

Charles Ehresmann œuvres complètes et commentées

ESQUISSES ET COMPLETIONS

PARTIE IV 1

Editée et commentée par Andrée CHARLES EHRESMANN

AMIENS 1981

Ce livre constitue le

SUPPLEMENT N° 1 au VOLUME XXII (1981) des

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

publication périodique, créée par Charles EHRESMANN en 1958,
actuellement dirigée et éditée par :

Madame A. C. EHRESMANN

U. E. R. de Mathématiques, 33 rue Saint-Leu

80039 AMIENS CEDEX. FRANCE.

IMPRIMERIE EVRARD. AMIENS.

Dépôt Légal: 2^e Trimestre 1981

Tous droits de traduction, reproduction et adaptation
réservés pour tous pays

INTRODUCTION

Charles EHRESMANN s'est intéressé à des domaines très variés des Mathématiques. Il a profondément influencé le développement de la Topologie Algébrique, de la Géométrie Différentielle et de la Théorie des Catégories. Ses travaux (de 1932 à 1979, plus de 2.500 pages) sont souvent passés dans le domaine commun, mais beaucoup ne sont plus accessibles matériellement. C'est pourquoi, depuis plusieurs années, nous avons l'intention, Charles et moi, de publier ses œuvres complètes.

Pour ne pas faire seulement un travail de compilation, nous voulions profiter de cette occasion pour mettre en évidence la genèse des idées et les motivations, pour améliorer certains résultats, pour relier les articles entre eux et avec ceux d'autres auteurs, pour indiquer les développements ultérieurs et, éventuellement, des voies non encore exploitées.

Désirant être indépendants et n'engager que notre propre responsabilité (Charles a toujours été très individualiste), nous comptons éditer ces «*Oeuvres complètes et commentées*» sous forme de Suppléments à notre périodique «*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*». C'est pour réaliser ce projet tel qu'il avait été conçu que j'ai décidé, après le décès de Charles, d'entreprendre seule (contrairement à l'usage) cette publication. Je remercie tous ceux qui m'aident, par leur soutien moral ou leur souscription, à mener à bien ce travail dans cet esprit, comme l'avait souhaité Charles.

PLAN GENERAL.

Il est très difficile de classer les œuvres de Charles. L'ordre chronologique est loin d'être satisfaisant (ainsi les travaux de Géométrie Différentielle s'échelonnent de 1939 à 1973); une division par matières laisse à désirer, beaucoup d'articles contenant des parties très différentes.

Le plan adopté (sans doute peu convaincant) tient compte à la fois de la date de parution et du sujet. Il comporte quatre grandes parties :

- I. *Topologie et Géométrie Différentielle.*
- II. *Structures locales et catégories ordonnées.*

INTRODUCTION

III. *Catégories internes et Fibrations.*

IV. *Esquisses. Complétions. Enrichissements.*

Chaque partie, divisée en deux volumes, contient :

- La liste des publications de Charles et une courte biographie de la période correspondant en gros à la partie,
- Les travaux originaux, reproduits par procédé photographique (et je remercie tous ceux qui m'ont accordé leurs droits de reproduction) ou recomposés lorsque la présentation n'était pas assez nette ;
- Des commentaires fragmentés (en anglais) avec renvois aux textes, suivis d'un Synopsis guidant dans la lecture des articles et commentaires ;
- Une bibliographie relative aux commentaires et un index dans chaque volume ; parfois des documents annexes éclairant tel ou tel point.

SUR LA PARTIE IV.

Cette partie s'enchaîne logiquement avec la Partie III qui porte en germe la plupart des idées développées ici. Elle regroupe une vingtaine d'articles sur les catégories, écrits entre 1967 et 1979 à l'exception d'un article de 1961 très lié. Ce sont surtout de long mémoires (cinq ont plus de 60 pages et l'un a 150 pages) contenant des résultats fins sur les sujets suivants : Existence et construction de complétions « optimales » d'une catégorie ou d'un foncteur concret ; théorie des esquisses et de leurs modèles ; construction de structures monoïdales fermées sur les catégories de structures algébriques, en particulier de catégories internes ; étude des catégories n -uples.

Les nombreuses publications récentes sur ces problèmes ont attiré l'attention sur les articles de Charles dont bien des passages sont encore actuels. C'est un peu pour les rendre accessibles (ils sont aujourd'hui épuisés) que j'ai décidé de publier rapidement la Partie IV-1. De plus il m'était facile dans les commentaires de retracer la genèse des idées et les développements ultérieurs, car Charles m'a fait participer à son travail à cette époque et plusieurs thèses ont été préparées dans notre équipe sur ces questions. La parution de la Partie IV-2 est moins urgente, les derniers travaux étant encore disponibles et trop récents pour être utilement analysés.

Andrée CHARLES EHRESMANN

Amiens, Juin 1981

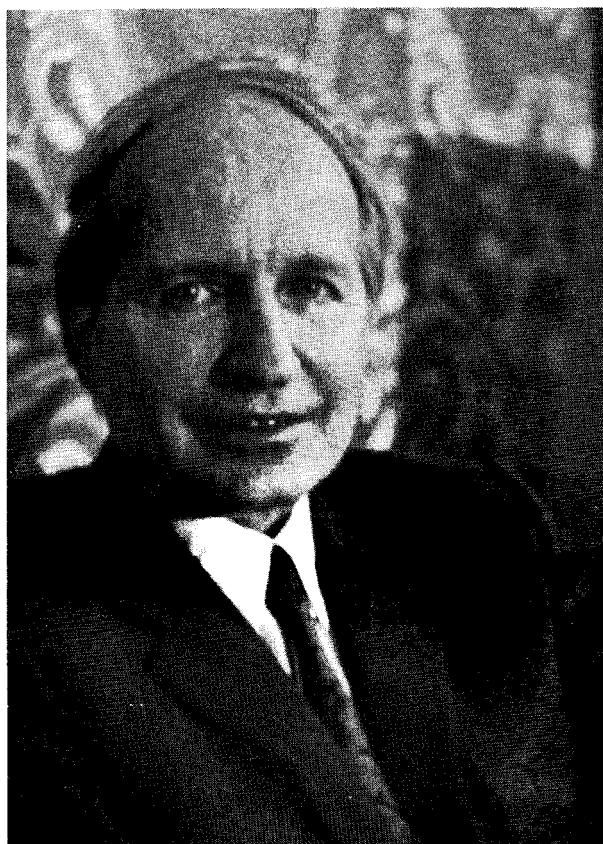
REMERCIEMENTS

Bien des personnes ont contribué à la réalisation de ce livre :

- Les souscripteurs individuels ou collectifs, en particulier M^{elle} P. LIBERMANN et M. G. REEB dont la Souscription confidentielle, lancée avant la parution du premier volume, a sensiblement allégé la mise de fonds initiale ;
- L'Imprimerie EVRARD, qui effectue l'impression avec efficacité ;
- Les mathématiciens qui m'ont envoyé suggestions, critiques ou tirés à part, en particulier M. R. GUITART qui m'a transmis d'utiles renseignements ;
- Enfin j'ai été beaucoup aidée par de stimulantes conversations avec le D^r J.-F. de FREMONT ; et surtout par le soutien et les conseils pratiques des D^{rs} F. de la SIMONE, et plus encore J.-P. VANBREMEERSCH à qui je dois la force de poursuivre ce travail.

Je leur adresse à tous mes vifs remerciements.

A. C. E.



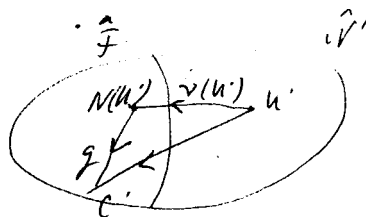
CHARLES EHRESMANN

19 Avril 1905 - 22 Septembre 1979

Esquisse de structures algébrique.

ce qui précède amène à poser la définition suivante :

Soit $\mathcal{I}$ une classe de catégories. Soit U un graphe multiplicatif. $U_0 \in \mathcal{U}_0$ et $U_0 \in \hat{\mathcal{U}}_0$.
 $U \in \hat{\mathcal{U}}_0$. A U est associée une catégorie $N(U) \in \hat{\mathcal{I}}$, propriété de $\hat{\mathcal{I}}$.

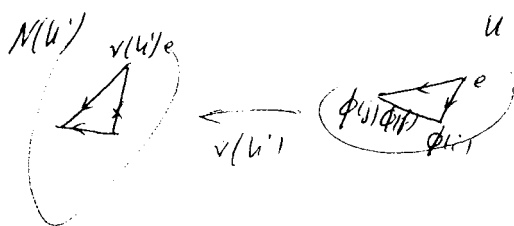


Si $v(U)$ est ~~un~~ injectif, on peut identifier U à un ~~un~~-graphe multiplicatif de $N(U)$ qui sera appelé une base de $N(U)$. On dira que U est une base de catégorie.

On appelle application $\mathcal{I}$ -limite projective partielle sur U une application p associée à certains néofoncteurs $K \in \mathcal{I}$ vers U une transformation naturelle $p(\Phi) = (\Phi, \tau, \bar{e})$, où $\bar{e}$ est le néofoncteur constant de K sur $c \in U_0$ et vérifiant la condition :

$\exists v(U) \cdot p(\Phi)$ est une limite projective naturalisée. Avec d'autres notations

$v(u')(e)$ est une limite projective de
 $v(u') \cdot \phi$, les projections canoniques étant
 $v(u')(\tau(i))$, pour tout $i \in K_0$



Définition : On appelle esquive algébrique
 T -projective un triplet $\mathcal{E}_T$
 $\mathcal{E} = (u', M, \mu)$

tel que :

u' est une base de catégorie

M est une classe de monomorphismes
de u' (i.e. à-dire de $N(u')$)

μ est une application T -limite projective
partielle telle que

$$\mu(\phi) = (\phi, \tau, \bar{e}) \quad , \quad \mu(\phi') = (\phi', \tau', \bar{e})$$

entraîne $\phi = \phi'$

Mesma

LISTE DES PUBLICATIONS DE CHARLES EHRESMANN

1. TRAVAUX DE RECHERCHE.

1. Les invariants intégraux et la topologie de l'espace projectif réglé, *C. R. A. S. Paris* 194 (1932), 2004-2006.
2. Sur la topologie de certaines variétés algébriques, *C. R. A. S. Paris* 196 (1933), 152-154.
3. Un théorème relatif aux espaces localement projectifs et sa généralisation, *C. R. A. S. Paris* 196 (1933), 1354-1356.
4. Sur la topologie de certains espaces homogènes, *Ann. of Math.* 35 (1934), 396-443. (Thèse Paris 1934.)
5. Groupes d'homologie, *Séminaire de Math. Paris*, III-B (1935), 1-25.
6. Sur les espaces localement homogènes, *Enseignement Math.* 35 (1936), 317-333.
7. Sur la notion d'espace complet en Géométrie différentielle, *C. R. A. S. Paris* 202 (1936), 2033-2035.
8. Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles, *J. de Math.* XVI (1937), 69-100.
9. Les groupes de Lie à r paramètres, *Séminaire de Math. Paris*, IV E et F (1937), 1-61.
10. Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan, *C. R. A. S. Paris* 205 (1938), 1433-1436.
11. Sur les congruences paratactiques et les parallélismes dans les espaces projectifs, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 153-155.
12. Sur la variété des génératrices planes d'une quadrique réelle et sur la topologie du groupe orthogonal à n variables, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 321-323.
13. Sur la topologie des groupes simples clos, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 1263-1265.
14. Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés, *C. R. A. S. Paris* 212 (1941), 945-948 (avec J. FELDBAU).
15. Espaces fibré associés, *C. R. A. S. Paris* 213 (1941), 762-764.

16. Espaces fibrés de structures comparables, *C. R. A. S. Paris* 214 (1942), 144-147.
17. Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 216 (1943), 628-630.
18. Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement, *Bull. Soc. Math. France* 72, Paris (1944), 27-54.
19. Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrables dans une variété continuellement différentiable, *C. R. A. S. Paris* 218 (1944), 955-956 (avec G. REEB).
20. Sur la théorie des espaces fibrés, *Coll. Intern. Topo. algébrique Paris*, C.N.R.S. (1947), 3-15.
21. Sur les sections d'un champ d'éléments de contact dans une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 224 (1947), 444-445.
22. Sur les espaces fibrés différentiables, *C. R. A. S. Paris* 224 (1947), 1611-1612.
23. Sur les variétés plongées dans une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 226 (1948), 1879-1881.
24. Sur les formes différentielles extérieures de degré 2, *C. R. A. S. Paris*, 227 (1948), 420-421 (avec P. LIBERMANN).
25. Sur les extensions de groupes topologiques, *C. R. A. S. Paris* 228 (1949), 1551-1553 (avec L. CALABI).
26. Sur le problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques, *C. R. A. S. Paris* 229 (1949), 697-699 (avec P. LIBERMANN).
27. Sur la notion de connexion infinitésimale dans un espace fibré et sur les espaces à connexion de Cartan, Congrès d'Innsbruck, *Nach. Oest. Math. Gesellschaft* (1949), 22.
28. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Coll. de Topo. Bruxelles*, C.B.R.M. (1950), 29-55.
29. Sur les variétés presque complexes, *Proc. Intern. Cong. of Math.* Harvard (1950), Vol. 2, 412-419 (et *Séminaire Bourbaki* 1950).
30. Sur la théorie des variétés feuilletées, *Rend. Mat. e Appl. Ser. V*, X-1-2 Rome (1951), 64-83.
31. Sur les structures presque hermitiennes isotropes, *C. R. A. S. Paris* 232 (1951), 1281-1283 (avec P. LIBERMANN).
32. Les prolongements d'une variété différentiable, *Atti IV Cong. Un. mat. Italiana*, Taormina Ott. (1951), 1-9.
33. Les prolongements d'une variété différentiable, I: Calcul des jets, prolongement principal, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 598-600.

34. Les prolongements d'une variété différentiable, II: L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m , *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 777-779.
35. Les prolongements d'une variété différentiable, III: Transitivité des prolongements, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 1081-1083.
36. Structures locales et structures infinitésimales, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 587-589.
37. Les prolongements d'une variété différentiable, IV: Eléments de contact et éléments d'enveloppe, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 1028-1030.
38. Les prolongements d'une variété différentiable, V: Covariants différentiels, et prolongements d'une structure infinitésimale, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 1424-1425.
39. Structures locales, *Ann. di Mat.* (1954), 133-142. (Multigraphié Rome et Strasbourg, 1952.)
40. Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, *Coll. Intern. Géom. Diff. Strasbourg*, C.N.R.S. (1953), 97-110.
41. Extension du calcul des jets aux jets non holonomes, *C. R. A. S. Paris* 239 (1954), 1762-1764.
42. Sur les structures infinitésimales régulières & Sur les pseudogroupes de transformations de Lie, *Proc. Int. Cong. Amsterdam* (1954), II, 478-479.
43. Applications de la notion de jet non holonome, *C. R. A. S. Paris* 240, (1955), 397-399.
44. Les prolongements d'un espace fibré différentiable, *C. R. A. S. Paris* (1955), 1755-1757.
45. Sur les espaces feuilletés: théorème de stabilité, *C. R. A. S. Paris* 243 (1956), 344-346 (avec SHIH WEISHU).
46. Sur les connexions d'ordre supérieur, *Atti V Cong. Un. Mat. Italiana* Pavia-Torino (1956), 326-328.
47. Gattungen von Lokalen Strukturen, *Jahres. d. Deutschen Math.* 60-2 (1957), 49-77. (Traduit en français dans *CTGD* ¹⁾ III, 1961.)
48. Sur les pseudogroupes de Lie de type fini, *C. R. A. S. Paris* 246 (1958), 360-362.
49. Sur les appuis d'une pyramide convexe et sur les polyèdres convexes sans sommet, *C. R. A. S. Paris* 249 (1959), 2695-2697 (avec A. EHRESMANN).
50. Catégories topologiques et catégories différentiables, *Coll. Géom. Diff. Globale* Bruxelles, C.B.R.M. (1959), 137-150.

1) *CTGD* se lit «Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle».

51. Grupos diferenciables y pseudogrupos de Lie, *Rev. Un. Mat. Argent.* 19, Buenos-Aires (1960), 48.
52. Catégorie des foncteurs types, *Rev. Un. Mat. Argentina* XX (1960), 194-209.
53. Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier* X, Grenoble (1960), 307-336.
54. Structures feuilletées, *Proc. 5th Can. Math. Cong.*, Montréal (1961), 109-172.
55. Elargissements de catégories, *CTGD* III (1961), 25-73.
56. Archimède et la Science moderne, *Celeb. Archimedeae*, Syracuse (1961), 25-37.
57. Catégories doubles et catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963) 1198-1201.
58. Catégorie double des quintettes; applications covariantes, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 1891-1894.
59. Catégories structurées d'opérateurs, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 2080-2083.
60. Sous-structures et applications $\mathcal{K}$ -covariantes, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 2280-2283.
61. Structures quotient et catégories quotient, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 5031-5034.
62. Complétion des catégories ordonnées, *C. R. A. S. Paris* 257 (1963), 4110-4113.
63. Catégories structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 80, Paris (1963), 349-426.
64. Quintettes et applications covariantes, *CTGD* V (1963), 1-22.
65. Catégories structurées quotient, *CTGD* V (1963), 1-4.
66. Structures quotient, *Comm. Math. Helv.* 38 (1963), 219-283.
67. Teilstrukturen und Faktorstrukturen, *Jahrestagung Deutschen Math. Ver.* Frankfurt (1963), 1.
68. Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Inst. Fourier* XIII-2, Grenoble (1963), 1-60.
69. Sous-structures et catégories ordonnées, *Fund. Math.* LIV (1964), 211-228.
70. Produit croisé de catégories, *C. R. A. S. Paris* 258 (1964), 2461-2464.
71. Complétion des catégories sous-prélocales, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 701-704.
72. Expansion d'homomorphismes en foncteurs, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 1372-1375.

PUBLICATIONS DE C. EHRESMANN

73. Cohomologie sur une catégorie, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 1683-1686.
74. Sur une notion générale de cohomologie, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 2050-2053.
75. Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, *Ann. Inst. Fourier* XIV 1, Grenoble (1964), 205-268.
76. Complétion des catégories ordonnées, *Ann. Inst. Fourier* XIV-2, Grenoble (1964), 89-144.
77. Catégories et Structures, Extraits, *CTGD* VI (1964), 1-31.
78. Prolongements des catégories différentiables, *CTGD* VI (1964), 1-8.
79. Expansion générale des foncteurs, *C. R. A. S. Paris* 260 (1965), 30-33.
80. Catégorie quotient d'une catégorie par une sous-catégorie, *C. R. A. S. Paris* 260 (1965), 2116-2119.
81. *Catégories quasi-topologiques et leurs prolongements*, Université Paris (1965), 1-15.
82. Quasi-surjections et structures quasi-quotient, *C. R. A. S. Paris* 261 (1965), 1577-1580.
83. Quasi-catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 261 (1965), 1932-1935.
84. Groupoïdes structurés quasi-quotient et quasi-cohomologie, *C. R. A. S. Paris* 261 (1965), 4583-4586.
85. Espèces de structures sous-inductives, *CTGD* VII (1965), 1-42.
86. Guide des catégories ordonnées, *CTGD* VII (1965), 43-49.
87. Expansion des systèmes de structures dominés, *C. R. A. S. Paris* 262 (1966), 8-11.
88. Adjonction de limites aux catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 263 (1966), 655-658.
89. Quasi-élargissement d'un système de structures structuré, *C. R. A. S. Paris* 263 (1966), 762-765.
90. 1^{er} théorème d'expansion structurée, *C. R. A. S. Paris* 263 (1966), 863-866.
91. Cohomologie à valeurs dans une catégorie dominée, *Coll. Topo. algébrique* Bruxelles, C. B. R. M. (1966), 21-80.
92. Catégories topologiques I, II, III, *Indig. Math.* 28-1 (1966), 133-175.
93. Introduction to the theory of structured categories, *Tech. Report* 10, Un. Kansas, Lawrence (1966), 96 pages.
94. Trends toward unity in Mathematics, *CTGD* VIII (1966), 1-7.
95. 2^e théorème d'expansion structurée, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 5-8.

96. Théorème de quasi-expansion régulière, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 56-59.
97. Problèmes universels relatifs aux catégories n -aires, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 273-276.
98. Sur les structures algébriques, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 840-843.
99. Adjonction de limites à un foncteur fidèle ou à une catégorie, *C. R. A. S. Paris* 265 (1967), 296-299.
100. Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), 293-363.
101. Propriétés infinitésimales des catégories différentiables, *CTGD IX-1* (1967), 1-9.
102. Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *CTGD IX-1-2* (1967), 33-180.
103. Sur les catégories différentiables, *Atti Conv. Int. Geom. Diff. Bologna* (1967), 31-40.
104. Catégories structurées généralisées, *CTGD X-1* (1968), 139-168.
105. Catégories structurées et catégories différentiables, *Revue Roumaine Math. Pures et Appl.* 7, XIII (1968), 967-977.
106. Esquisses et types de structures algébriques, *Bul. Inst. Polit. Iași* XIV-1-2 (1968), 1-14.
107. Prolongements universels d'un foncteur par adjonction de limites, *Dissertationes Math.* LXIV, Varsovie (1969), 1-72.
108. Construction de structures libres, *Lecture Notes in Math.* 92, Springer (1969), 74-104.
109. Catégories de foncteurs structurés, *CTGD XI-3* (1969), 329-383 (avec A. EHRESMANN).
110. Elargissement complet d'un foncteur local, *CTGD XI-4* (1969), 405-420.
111. *Espaces fibrés et variétés différentiables*, Univ. Paris VII (1969), 1-44 (avec A. EHRESMANN).
112. Catégories de foncteurs structurés, *Coll. E. Cartan*, Un. Paris VII (1970) 1 page.
113. *Etude des catégories dans une catégorie*, Univ. Paris VII (1972), 1-45 (avec A. EHRESMANN).
114. *Sur le plongement d'un prototype dans un type*, Univ. Paris VII (1972), 1-12 (avec A. EHRESMANN).
115. Categories of sketched structures, *CTGD XIII-2* (1972), 105-214 (avec A. EHRESMANN).
116. Categories in differential Geometry, Résumés Coll. Amiens 1973, *CTGD XIV-2* (1973), 175-177.

PUBLICATIONS DE C. EHRESMANN

- 117. Multiple functors, I: Limits relative to double categories, *CTGD* XV-3 (1974), 215-292 (avec A. EHRESMANN).
- 118. Tensor products of topological ringoids, *CTGD* XIX-1 (1978), 87-112 (avec A. EHRESMANN).
- 119. Multiple functors, II: The monoidal closed category of multiple categories, *CTGD* XIX-3 (1978), 295-334 (avec A. EHRESMANN).
- 120. Multiple functors, III: The cartesian closed category Cat_n , *CTGD* XIX-4 (1978), 387-444 (avec A. EHRESMANN).
- 121. Multiple functors, IV: Monoidal closed structures on Cat_n , *CTGD* XX-1 (1979), 59-104 (avec A. EHRESMANN).

2. LIVRES.

- 122. *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965, 375 pages.
- 123. *Algèbre* (Maîtrise de Math. C3), C.D.U. Paris, 1968, 168 pages.

3. COURS MULTIGRAPHIES.

- 124. *Cinématique*, Univ. Strasbourg (à Clermont-Ferrand), 1942.
- 125. *Espaces fibrés et structures infinitésimales*, 1^{er} chapitre, Univ. Rio de Janeiro, 1952, 24 pages.
- 126. *Catégories différentiables et Géométrie différentielle*, Chapitres I et II, Sémin. Soc. Can. Math., Montréal, 1961, 118 pages.
- 127. *Cours de Topologie algébrique*, Univ. Paris VII, 1970, 84 pages (avec A. EHRESMANN).
- 128. *Topologie algébrique*, Univ. Amiens, 1975, 150 pages (avec A. EHRESMANN).
- 129. *Histoire et Fondements des Mathématiques* (3 chapitres), Univ. Amiens 1977-1978 (avec A. EHRESMANN).

4. DIVERS.

- 130. Analyse de l'ouvrage de Seifert & Threlfall: «Lehrbuch der Topologie», *Enseignement Math.* 34 (1935), 404.
- 131. Analyse de l'ouvrage de Alexandroff & Hopf: «Topologie I», *Enseign. Math.* 35 (1936), 403.
- 132. Analyse de l'ouvrage de Schouten & Struik: «Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie», *Bull. Sc. Math.* 60 (1936), 129-131.

133. Revue critique des thèses de J. Cavaillès : Méthode axiomatique et formalisme, *Revue Philosophique* 131 (1941), 81-86.
134. Analyse de l'ouvrage d'E. Cartan : «Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques», *Bull. Sc. Math.* 70, Paris (1946), 117-122.
135. Analyse de l'ouvrage d'E. Cartan : «Leçons sur la théorie des espaces de Riemann», *Bull. Sc. Math.* 70, Paris (1946), 149-151.
136. *Travaux scientifiques de C. Ehresmann*, Univ. Strasbourg, 1955, 1-19.
137. Rapport sommaire sur les travaux de M. A. Lichnerowicz, *Atti V Cong. Un. Mat. Italiana* Pavia-Torino (1956), 21-26.
138. Topologie algébrique, *Formulaire de Math. à l'usage des Physiciens et Ingénieurs*, C.N.R.S. (1962), 202-220 (avec G. REEB).
139. Déjà vingt ans ..., *CTGD* XVIII-4 (1977), 431-432 (avec A. EHRESMANN).

5. ÉDITION DE TRAVAUX.

140. Edition de l'ouvrage posthume de J. Cavaillès : Sur la logique et la théorie de la Science, P.U.F., 1947, 1^e édition (avec G. CANGUILHEM).
141. Edition du Colloque de Géométrie Différentielle de Strasbourg 1953, *Coll. Intern. C. N. R. S.* (1953), 1-198 (avec A. LICHNEROWICZ).
142. Edition des Résumés du Colloque sur l'Algèbre des catégories Amiens 1973, *CTGD* XIV-2 (1973), 153-223 (avec A. EHRESMANN).
143. Edition des Résumés du 2^e Colloque sur l'Algèbre des Catégories, Amiens 1975, *CTGD* XVI-3 (1975), 217-340 (avec A. EHRESMANN).
144. Edition des Résumés des Journées T.A.C. de Chantilly, *CTGD* XVI-4 (1975), 425-442 (avec A. EHRESMANN).
145. Publication des :
 - . *Recueils d'exposés du Colloque de Topologie de Strasbourg*: 1951, 1952 et 1954.
 - . *CTGD*, Volumes 1 à 20, depuis 1957 (avec A. EHRESMANN).
 - . *Esquisses Mathématiques*, Volumes 1 à 30, depuis 1970, Paris-Amiens (avec A. EHRESMANN).

INÉDITS PUBLIÉS DANS LA PARTIE IV - 1.

- 146_{IV}.1. *Complétion d'un foncteur*, Conférence faite au Colloque Dijon-Paris, 1967.
- 146_{IV}.2. *Les catégories dans l'enseignement*, Conférence faite à Saint-Quentin, 1972.

A. C. E.

DE 1970 A 1979

Jusqu'en 1975, Charles est Professeur à l'Université Paris VII; il y enseigne divers cours de Maîtrise (Topologie; Topologie algébrique; Variétés différentiables) et de troisième cycle (Catégories intemes; Théorie des esquisses; Géométrie différentielle). Il doit prendre sa retraite en Octobre 75, ce qui lui paraît d'autant plus difficile qu'il se sent encore jeune.

Une de ses préoccupations essentielles est le développement de l'équipe de recherche «Théorie et Applications des Catégories» (Paris-Amiens). Un grand nombre de thèses y sont soutenues: une cinquantaine de thèses de Doctorat de troisième cycle à Paris VII; les thèses de Doctorat d'Etat de Yuen (70), Machado (70), Foltz (73) à Paris; de Pradines à Toulouse (en 75, qui a été l'occasion du seul voyage fait pendant ces dernières années); à Amiens de Chacron (70), Lair (77), Coppey (78), enfin Guitart (dont la soutenance en Juin 79 se déroule à notre domicile pour permettre à Charles, très malade, d'y assister). La plupart de ces thèses sont publiées dans «*Esquisses Mathématiques*», créé comme organe de l'équipe en 1970, avec l'aide de quelques chercheurs, surtout C. Lair et R. Guitart.

Beaucoup d'étrangers et la plupart des catégoristes participent un jour ou l'autre au Séminaire hebdomadaire «Catégories, Topologie et Géométrie Différentielle» à Paris (jusqu'en 76), aux «Journées Théorie et Applications des catégories» à Amiens (de 72 à 78), aux trois grandes rencontres internationales organisées par l'équipe: le premier et second Colloque sur les Catégories à Amiens (73 et 75), les «Journées de Chantilly» en 75. L'ambiance y est détendue: Charles, par sa personnalité et son accueil, contribue fortement à la qualité des liens qui s'établissent entre les participants; après l'installation à Amiens en 75, les réunions ont partiellement lieu à notre domicile, ce qui en souligne le caractère amical.

Mais si l'équipe a été créée en 70 dans l'enthousiasme, bien des problèmes se soulèvent peu à peu: refus d'inscription de chercheurs sur les listes d'aptitude; pressions externes sur les chercheurs pour les faire changer d'orientation; refus de création d'un troisième cycle à Amiens (qui aurait été dirigé par Charles) en 75; sans compter diverses vexations au mo-

ment de la retraite. Charles n'arrive pas à comprendre cette hostilité, dont il souffre plus qu'il ne veut l'admettre ; sans doute notre isolement par rapport aux milieux mathématiques français (d'abord pour raisons personnelles, plus tard à cause de cette hostilité même) ne facilitait-il pas la compréhension réciproque.

Mais il surmonte cette crise, voyant dans le refus du troisième cycle plus de disponibilités pour d'autres activités. Tout d'abord, il accepte avec plaisir de poursuivre son enseignement à Amiens (de 75 à la veille de sa maladie en Décembre 78), où il est chargé d'un cours « Histoire et Fondements des mathématiques » (Maîtrise) et d'une partie de la préparation à l'Agrégation. L'attitude de tous à Amiens le reconforte, et il s'intéresse à de nombreuses tâches administratives, nouvelles pour lui : il est représentant de l'U.E.R. au Conseil Scientifique de l'Université, Directeur du Conseil Scientifique de l'U.E.R., enfin Directeur Suppléant de cette U.E.R.. Il se remet avec une nouvelle ardeur à la recherche ; il passe de longues heures à la bibliothèque, se tenant au courant des publications les plus variées ; et les années 77-78 sont très fécondes, comme en témoigne notre dernière série d'articles. Enfin, il est particulièrement fier des « *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle* » (qui fêtent leur vingtième anniversaire en 77), que nous éditons aussi nous-mêmes depuis 72, d'abord à Paris, puis à Amiens après 75.

Ayant joui d'une merveilleuse santé toute sa vie, Charles n'accorde pas d'importance à la faiblesse qu'il ressent vers la mi 78 ; mais elle s'accroît rapidement, rendant ses derniers cours très pénibles, jusqu'à sa longue maladie (Décembre 78 à Septembre 79). La sympathie de ses anciens élèves et collègues et le dévouement de ses médecins (en particulier les Docteurs J.-F. de Frémont et J.-P. Vanbremeersch) l'aident à supporter cette épreuve avec beaucoup d'énergie, de philosophie et de dignité, sans jamais une plainte.

Après son décès le 22 Septembre 1979, de nombreux hommages lui sont rendus par les mathématiciens du monde entier, et le « Troisième Colloque sur les catégories, dédié à Charles Ehresmann » (Amiens, Juillet 80) réunit toutes les écoles catégoristes.

A. C. E.

Les mémoires originaux faisant l'objet de cette Partie IV-1 sont reproduits par procédé photographique dans les pages 1 à 321 ; le format initial des textes contenus dans les cent premières pages a dû être réduit, ce qui explique que l'ordre chronologique n'est pas entièrement respecté. Les articles /108, 114/ avaient seulement été prépubliés ; ils ont été recomposés sur machine Varsityper pour inclusion dans ce volume, ainsi que les deux textes de conférences inédits qui les suivent.

Les numéros rajoutés dans les marges extérieures réfèrent aux Commentaires situés à la fin du livre.

/ 88 /

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Adjonction de limites aux catégories structurées.*

Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Jean Leray.

Théorème de plongement « universel » d'une catégorie dans une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives. Théorème de plongement « universel » d'une catégorie ou d'une catégorie structurée dans une catégorie ou une catégorie structurée à $\mathcal{J}$ -limites projectives et $\mathcal{J}$ -limites inductives, en conservant certaines limites projectives et inductives. La terminologie est celle de (1).

1. NOTATIONS. — Désignons par $\mathcal{M}_0$ un univers, par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$ respectivement la catégorie pleine d'applications et la catégorie des foncteurs associées à $\mathcal{M}_0$, par $p_{\mathcal{F}}$ le foncteur projection canonique de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{M}$. Soit $\hat{\mathcal{M}}_0$ un univers tel que $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ et soit de même $P_{\mathcal{F}}$ le foncteur projection vers $\hat{\mathcal{M}}$ de la catégorie $\hat{\mathcal{F}}$ des foncteurs associée à $\hat{\mathcal{M}}_0$. Soit $\mathcal{M}$ la saturante (1) de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$. Nous supposons que $\mathcal{J}$ est une partie de $\mathcal{F}_0$ telle que $\mathcal{J} \in \mathcal{M}_0$.

Soit $\mathcal{H}$ une catégorie. Nous appellerons *application $\mathcal{J}$ -limite projective* (resp. *projective partielle*) sur $\mathcal{H}$ une application γ associant à tout (resp. à certains) foncteur $\Phi = (H, \Phi, \Gamma)$, où $\Gamma \in \mathcal{J}$, un couple

$$((p_i^{\gamma}(\Phi))_{i \in I}, \lim^{\gamma} \Phi),$$

tel que $\lim^{\gamma} \Phi$ soit une limite projective de Φ et $p_i^{\gamma}(\Phi)$ sa projection canonique vers $\Phi(i)$, pour toute unité i de Γ . Si γ est une application $\mathcal{J}$ -limite projective sur $\mathcal{H}$, il lui correspond un foncteur $\mathcal{J}$ -limite projective sur $\mathcal{H}$, noté $\lim^{\gamma}$.

2. COMPLÉTION $\mathcal{J}$ -PROJECTIVE D'UNE CATÉGORIE. — Soit $\mathcal{F}_0^{\mathcal{J}}$ la classe de tous les couples (H, γ) , où $H \in \mathcal{F}_0$ et où γ est une application $\mathcal{J}$ -limite projective partielle sur H . Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets

$$\hat{F} = ((\hat{H}, \hat{\gamma}), \underline{F}, (H, \gamma))$$

vérifiant les conditions :

$$1^0 \quad (H, \gamma) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}}, (\hat{H}, \hat{\gamma}) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}} \text{ et } F = (\hat{H}, \underline{F}, H) \in \mathcal{F};$$

$$2^0 \quad \text{Si } \gamma(\Phi) \text{ est défini, } \hat{\gamma}(F, \Phi) \text{ est défini et l'on a}$$

$$\hat{\gamma}(F, \Phi) = ((F(p_i^{\gamma}(\Phi)))_{i \in I}, F(\lim^{\gamma} \Phi));$$

elle admet un foncteur fidèle $q^{\mathcal{J}}$ vers $\mathcal{F}$, associant F à $\hat{F}$. Nous identifions $\mathcal{F}_0^{\mathcal{J}}$ à la classe des unités de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$. Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ ayant pour unités les couples (H, γ) tels que γ soit une application $\mathcal{J}$ -limite projective (partout définie) sur H , et soit $q^{\mathcal{J}}$ le foncteur restriction de $q^{\mathcal{J}}$ à $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$. Soient $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$, $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$, $\mathcal{Q}^{\mathcal{J}}$ et $\mathcal{Q}^{\mathcal{J}}$ les catégories et foncteurs construits de même à partir de $\hat{\mathcal{M}}_0$. Soit X la classe des $P_{\mathcal{F}}, Q^{\mathcal{J}}$ -monomorphismes.

Supposons $(C, \nu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{J}}$ et $M \subset C$. L'intersection $\hat{M}$ des sous-catégories de C stables pour ν et contenant M définit une $(X, \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}})$ -sous-structure $(\hat{M}, \nu')$ de (C, ν) engendrée ⁽²⁾ par M . On appelle $\hat{M}$ la *complétion $\mathcal{J}$ -projective* ⁽¹⁾ de M dans (C, ν) .

- 1 THÉORÈME. — Si $M \in \overline{\mathcal{M}}_0$, on a $\hat{M} \in \overline{\mathcal{M}}_0$. Si ν est injective et si M est une sous-catégorie de C , elle est pleine dans $\hat{M}$ et tout $h \in \hat{M} - \hat{M}_0$ est de la forme $m'' \cdot m'$, avec $m \in M$; si de plus $\mathcal{U} = p_{\hat{\mathcal{F}}}(\mathcal{J})$ est un univers et M une $\mathcal{U}$ -catégorie, $\hat{M}$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie. $p_{\hat{\mathcal{F}}}.Q^{\mathcal{J}}$ est $\sqsubset$ -engendrant ⁽²⁾ pour $\mathcal{M}$ et à $\overline{\mathcal{M}}_0$ -limites projectives.

En effet, on montre que $\hat{M}$ est la sous-catégorie $M_{\bar{\lambda}}$ de C définie par récurrence transfinie comme suit :

1° Pour tout $I \in \mathcal{J}$, soit λ_I l'ordinal associé au cardinal de I ; soit $\bar{\lambda}_0 = \sup_{I \in \mathcal{J}} \lambda_I$ dans la classe ordonnée des ordinaux. Alors $\bar{\lambda}$ est l'ordinal initial régulier $\omega_{\bar{\lambda}_0+1}$ d'indice $\bar{\lambda}_0 + 1$ ⁽³⁾.

2° $M_{\bar{\lambda}}$ est la sous-catégorie de C engendrée par M et, si $\bar{\lambda}$ est un ordinal inférieur à $\bar{\lambda}$ et n'admettant pas de prédécesseur, on pose

$$M_{\bar{\lambda}} := \bigcup_{\xi < \bar{\lambda}} M_{\xi}.$$

3° Soit $\bar{\lambda}$ un ordinal de la forme $\bar{\lambda}' + 1 < \bar{\lambda}$; alors $M_{\bar{\lambda}}$ est la sous-catégorie de C engendrée par la classe $M_{\bar{\lambda}} \cup N_{\bar{\lambda}}$, où $N_{\bar{\lambda}}$ a pour éléments :

- a. les $p_I(\Phi)$ tels que Φ soit un foncteur de $I \in \mathcal{J}$ vers C , que $i \in I_0$ et qu'on ait $\Phi(I) \subset M_{\bar{\lambda}}$;
b. les $\lim^{\nu} \Psi$, où $\Psi = (\sqsubset C, \Psi, I)$ est une transformation naturelle vers Φ d'un foncteur constant $\bar{E}$ sur une unité E de $M_{\bar{\lambda}}$, telle que

$$\Psi(I) \subset \square M_{\bar{\lambda}} \quad \text{et} \quad I \in \mathcal{J}.$$

3. ADJONCTION DE $\mathcal{J}$ -LIMITES PROJECTIVES. — A l'aide des résultats du n° 2 et des critères d'existence d'adjoints de ⁽⁵⁾, on déduit :

THÉORÈME. — Le foncteur $q^{\mathcal{J}}$ admet un adjoint; si $H \in \mathcal{F}_0$, alors H engendre la $q^{\mathcal{J}}$ -structure libre $(\hat{H}, \hat{\nu})$ ayant les propriétés suivantes :

- 3 1° H est une sous-catégorie pleine de $\hat{H}$ et $\hat{\nu}$ est injective;
4 2° Si $p_{\hat{\mathcal{F}}}(\mathcal{J})$ est un univers $\mathcal{U}$ et si H est une $\mathcal{U}$ -catégorie, $\hat{H}$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie.

Remarques. — En général, $\hat{H}$ n'est pas isomorphe à une sous-catégorie de la catégorie $\mathfrak{A}(\mathcal{M}, H^*)$. Lorsqu'elle l'est, elle est généralement isomorphe à une sous-catégorie non pleine de la catégorie $\text{Virt}_{\mathcal{J}} H$ définie dans ⁽⁶⁾.

THÉORÈME. — Pour tout $(H, \mu) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}}$, il existe un $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{J}})$ -projecteur de la forme $((\tilde{H}, \tilde{\mu}), \iota, (H, \mu))$, où ι est une injection canonique et $(\tilde{H}, \tilde{\mu})$

une $p_{\mathcal{J}}.q^{\mathcal{J}}$ -structure quasi-quotient ⁽²⁾ de la $q^{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par H .

1

Ainsi H' est « universellement » plongée dans une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives, avec conservation de certaines limites données.

4. ADJONCTION DE $\mathcal{J}$ -LIMITES PROJECTIVES ET DE $\mathcal{J}$ -LIMITES INDUCTIVES. — Soient $\mathcal{J} \in \overline{\mathcal{M}}_0$ et $\mathcal{J}' \in \overline{\mathcal{M}}_0$ deux parties de $\mathcal{F}_0$. Si ν' est une application $\mathcal{J}$ -limite projective sur la catégorie H^* duale de H , nous appellerons ν' une *application $\mathcal{J}$ -limite inductive sur H* .

Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets

$$\hat{F} = ((H'_2, \nu_2, \nu'_2), \underline{F}, (H'_1, \nu_1, \nu'_1))$$

tels que

$$((H'_2, \nu_2), \underline{F}, (H'_1, \nu_1)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad ((H'_2, \nu'_2), \underline{F}, (H'_1, \nu'_1)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}'}$$

Soit $q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ son foncteur projection canonique vers $\mathcal{F}$ et soit $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ ayant pour unités les (H', ν, ν') tels que

$$(H', \nu) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad (H', \nu') \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}'}$$

Soit $q^{\mathcal{J}}$ le foncteur restriction de $q^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ à $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$. A $\hat{\mathcal{M}}_0$ correspond $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$.

Si $(C, \nu, \nu') \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et si $M \subset C$, appelons $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -complétion ⁽⁴⁾ de M dans (C, ν, ν') l'intersection de toutes les sous-catégories de C contenant M et stables pour ν et pour ν' .

THÉORÈME. — Si $(C, \nu, \nu') \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ et si $M \subset C$ et $M \in \overline{\mathcal{M}}$, la $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -complétion $\hat{M}$ de M dans (C, ν, ν') est telle que $\hat{M} \in \overline{\mathcal{M}}$. Le foncteur $q^{\mathcal{J}}$ admet un adjoint; si $H' \in \mathcal{F}_0$ et si $(\hat{H}', \hat{\nu}, \hat{\nu}')$ est la $q^{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par H' , alors H' est une sous-catégorie de $\hat{H}'$. La catégorie $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ est une catégorie à $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}'}$ -projections ⁽¹⁾.

2

Exemples. — 1° Toute catégorie $H' \in \mathcal{F}_0$ peut être « universellement » complétée en une catégorie $\hat{H}' \in \mathcal{F}_0$ à produits finis et sommes finies (resp. à produits dénombrables et sommes dénombrables) en conservant certains produits ou sommes.

2° Appliqués à la catégorie des couples associée à une classe ordonnée $(A, <)$, ces résultats permettent d'adjoindre canoniquement à $(A, <)$ des intersections ou des agrégats d'un certain type, sans modifier ceux qui existent déjà. Ainsi on pourra plonger une classe ordonnée dans une classe sous-préinductive (resp. f -sous-inductive) ⁽³⁾ en conservant les intersections des parties finies majorées qui existent.

5. CATÉGORIES STRUCTURÉES $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -COMPLÈTES. — Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, \mathcal{A})$ un foncteur d'homomorphismes saturé, à produits finis et résolvant à droite ⁽¹⁾. Nous supposons que p est la restriction d'un foncteur d'homomorphismes saturé $P = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{P}, \hat{\mathcal{A}})$ à la sous-catégorie $\underline{\hat{P}}(\mathcal{M}) = \mathcal{A}$,

- et que P est à $\mathfrak{M}_0$ -limites projectives (cas auquel on peut se ramener d'après le n° 2).

Soit Λ l'ordinal associé au cardinal (inaccessible) de $\mathfrak{M}_0$ et soit $\zeta < \Lambda$ un ordinal sans prédécesseur. P sera dit ζ -engendrant pour $\mathfrak{M}$ si P est engendrant pour $\mathfrak{M}$ et vérifie la condition :

(D $_{\zeta}$) Soient $S \in \mathfrak{H}_0$ et $(s_{\xi})_{\xi < \zeta}$ une classe de P -sous-structures de S telle que

$$P(s_{\xi}) \in \overline{\mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad P(s_{\xi}) \subset P(s_{\xi'}) \quad \text{si} \quad \xi < \xi';$$

alors il existe une P -sous-structure s' de S telle que $P(s') = \bigcup_{\xi < \zeta} P(s_{\xi})$.

[La condition (D) de (*) est identique à la condition (D $_{\omega}$).]

- Soit $\mathfrak{F}(p)$ la catégorie des foncteurs p -structurés (*) et soit $\hat{p}$ son foncteur projection canonique vers $\mathfrak{F}$. Soit $\mathfrak{F}'^{\alpha\beta}(p)$ [resp. soit $\mathfrak{F}^{\alpha\beta}(p)$] la catégorie produit fibré $\hat{p} \vee q'^{\alpha\beta}$ (resp. $\hat{p} \vee q^{\alpha\beta}$), et $q^{\alpha\beta}(p)$ le foncteur projection canonique vers $\mathfrak{F}$ de $\mathfrak{F}'^{\alpha\beta}(p)$.

- THÉORÈME. — Supposons que P soit ζ -engendrant. Si (C, s) est une catégorie p -structurée et si r est une relation d'équivalence sur C , il existe une $p_{\mathfrak{F}}$ - $\hat{p}$ -structure quasi-quotient de (C, s) par r . Le foncteur $q^{\alpha\beta}(p)$ admet un adjoint et $\mathfrak{F}'^{\alpha\beta}(p)$ est une catégorie à $\mathfrak{F}^{\alpha\beta}(p)$ -projections.

Exemples. — Ce théorème s'applique lorsque p est le foncteur projection canonique vers $\mathfrak{M}$ de l'une des catégories : $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{M}'$ des néofoncteurs; $\mathfrak{C}$ des applications continues; Ω des applications ordonnées; $\mathcal{H}^p$ des applications sous-préinductives, etc. Il s'ensuit en particulier qu'une catégorie double $(H, H^T) \in \mathfrak{F}(p_{\mathfrak{F}})$ peut être universellement plongée dans une catégorie double $(\hat{H}, \hat{H}^T) \in \mathfrak{F}(p_{\mathfrak{F}})$ telle que $\hat{H} \in q^{\alpha\beta}(\mathfrak{F}^{\alpha\beta})$ et $\hat{H}^T \in q^{\alpha\beta}(\mathfrak{F}'^{\alpha\beta})$, avec conservation de certaines limites.

(*) Séance du 24 octobre 1966.

(¹) *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

(²) *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 1577.

(³) N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles*, chap. III, Hermann, Paris.

(⁴) Cette définition précise une notion définie dans J. ISBELL, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72, 1966, p. 619-655.

(⁵) *Structures quasi-quotient* (multigraphié, Paris, 1965, 92 pages, à l'impression dans *Math. Annalen*); ces critères sont généralisés dans un article à l'impression dans *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle*, IX, où sont développés les résultats de cette Note.

(⁶) J. BÉNABOU, *Thèse*, Paris, 1966 (à l'impression dans *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle*, IX).

(⁷) *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 80, 1963, p. 349-426.

(Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5^e.)

/97/

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Problèmes universels relatifs aux catégories n -aires*. Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. René Garnier.

Plongement « universel » d'une quasi-catégorie n -aire non associative dans une catégorie n -aire. Quasi-catégorie n -aire non associative libre engendrée par un n -graphe; toute catégorie n -aire est un quotient d'une catégorie n -aire libre. Existence et construction d'une catégorie n -aire quasi-quotient d'une catégorie n -aire par une relation d'équivalence.

Soit n un entier, $n > 1$. Pour les définitions des structures n -aires, voir (1). Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie pleine d'applications associée à un univers $\mathfrak{M}_0$. Nous désignons par $\mathfrak{N}_n$ la catégorie des n -quasi-néofoncteurs entre graphes multiplicatifs n -aires associée à $\mathfrak{M}$; par $\mathfrak{N}_n'$ (resp. par $\mathfrak{F}_n^1, \mathfrak{F}_n^2, \mathfrak{F}_n^3$) la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}_n$ formée par les morphismes entre graphes multiplicatifs (resp. entre quasi-catégories non associatives, catégories non associatives, quasi-catégories, catégories) n -aires. Le symbole $\mathfrak{U}_n$ désignera l'une quelconque de ces catégories. Le foncteur projection de $\mathfrak{U}_n$ vers $\mathfrak{M}$ est noté p_n . Les lettres i, i', i'' et j représentent des entiers, N l'ensemble des entiers. $(f_i | i \leq n)$ désigne la famille $f_1, \dots$

1+

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{N}_n' & \leftarrow & \mathfrak{F}_n^1 \leftarrow \mathfrak{F}_n^2 \\ \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow \\ \mathfrak{N}_n & \leftarrow & \mathfrak{F}_n^3 \leftarrow \mathfrak{F}_n^4 \end{array}$$

1. EXISTENCE DE STRUCTURES QUASI-QUOTIENT.

THÉORÈME. — Si $G_n \in (\mathfrak{N}_n')_0$ et si r est une relation d'équivalence sur G , il existe une $(\mathfrak{U}_n, p_n)$ -structure quasi-quotient (2) de G_n par r .

Ce théorème résulte du théorème général d'existence de structures quasi-quotient (2), car on montre que le foncteur P_n associé à un univers $\mathfrak{M}_0$ tel que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$, résolvant à droite et à $\mathfrak{M}_0$ -produits.

Soit $G_n = (G, U, k) \in (\mathfrak{N}_n')_0$. On pose $U = \{u_i | i \leq n\}$, $(G_n)_0 = u_i(G)$ et $\star G_n = \alpha(k)$.

Définition. — Nous dirons qu'une relation d'équivalence r sur G est n -compatible sur G_n si u_i est compatible avec r pour tout $i \leq n$ et si les conditions

$$\xi = (f_i | i \leq n) \in \star G_n, \quad \xi' = (f'_i | i \leq n) \in \star G_n \quad \text{et} \quad f_i \sim f'_i \text{ mod } r$$

pour tout $i \leq n$ entraînent $k(\xi) \sim k(\xi')$ modulo r .

Si r est une relation sur G , l'intersection de toutes les relations d'équivalence n -compatibles sur G_n contenant r est appelée relation n -compatible sur G_n engendrée par r .

(2)

PROPOSITION. — Pour qu'il existe une $p_{\mathcal{R}^n}^n$ -structure quotient G_n/r de G_n par la relation d'équivalence r sur G , il faut et il suffit que r soit n -compatible sur G_n .

COROLLAIRE. — Si $G_n \in \mathcal{U}_n$ et si $\hat{r}$ est la relation n -compatible sur G_n engendrée par une relation (G, A, G) telle que $e = e'$ lorsque

$$e \in (G_n)_n, \quad e' \in (G_n)_0 \quad \text{et} \quad (e, e') \in A,$$

- 1 il existe une $p_{\mathcal{U}}^n$ -structure quotient de G_n par $\hat{r}$ et $(G_n/\hat{r})_0$ s'identifie à $(G_n)_0$.

2. PROJECTIONS DES QUASI-CATÉGORIES n -AIRES NON ASSOCIATIVES. — Supposons $C_n = (C, U, k) \in (\mathcal{U}_n)_0$. Soit $r_{\mathcal{F}^n}$ la relation $(C, A_{\mathcal{F}^n}, C)$, où $A_{\mathcal{F}^n}$ est la classe des couples (h, h') vérifiant les conditions : Il existe $f_j \in C$ pour tout $j \leq 2n-1$, $i' \leq n$ et $i'' \leq n$ tels que $f^i = (f_j | i \leq j < i+n) \in \star C_n$ pour $i \leq n$.

$$h = k(\mathcal{G}_i^{i'} | i \leq n) \quad \text{et} \quad h' = k(\mathcal{G}_i^{i''} | i \leq n),$$

où, pour $m = i'$ et i'' , on a posé

$$\mathcal{G}_i^m = f_i \quad \text{si} \quad i \leq m; \quad \mathcal{G}_i^m = k(f^m); \quad \mathcal{G}_i^m = f_{i+n-1} \quad \text{si} \quad m < i \leq n.$$

- Notons $\langle f \rangle_j$, où $j \leq n$, la famille $(f_i | i \leq n)$ lorsque $f_i = f \in C$ et $f_i = u_i(f) = e$ pour tout $i \neq j$. Soit $A_{\mathcal{F}^n}$ la classe des couples $(f, k(\langle f \rangle_j))$, où $\langle f \rangle_j \in \star C_n$,

$$r_{\mathcal{F}^n} = r_{\mathcal{R}^n} = (C, A_{\mathcal{F}^n}, C) \quad \text{et} \quad r_{\mathcal{F}^n} = (C, A_{\mathcal{F}^n} \cup A_{\mathcal{F}^n}, C).$$

On a $C_n^{\perp} = (C, U, k') \in \mathcal{U}_n^{\perp}$, en définissant k' par

$$k'(\xi) = k(\xi) \quad \text{si} \quad \xi \in \star C_n \quad \text{et} \quad k'(\langle f \rangle_j) = f \quad \text{si} \quad \langle f \rangle_j \in \star C_n.$$

- THÉORÈME. — C_n admet pour $(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n^{\perp})$ -projection la $p_{\mathcal{R}^n}^n$ -structure quotient de C_n par $\hat{r}_{\mathcal{U}}$ si $C_n \in \mathcal{F}_n^{\perp}$ et $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{F}_n^{\perp}$ (resp. de $C_n^{\perp}$ par $\hat{r}_{\mathcal{U}}$ si $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{\perp}$), en désignant par $\hat{r}_{\mathcal{U}}$ la relation n -compatible sur C_n (resp. sur $C_n^{\perp}$) engendrée par $r_{\mathcal{U}}$.

3. CATÉGORIES n -AIRES LIBRES. — Soit $\mathcal{G}_n$ la catégorie des morphismes entre n -graphes ⁽¹⁾. Soit $q_{\mathcal{U}}^n$ le foncteur de $\mathcal{U}_n$ vers $\mathcal{G}_n$ associant (C, U) à (C, U, k) . A tout n -graphe $[C] = (C, U)$, où $U = [u_i]_{i \leq n}$, est associé canoniquement ⁽¹⁾ un foncteur F_C ; nous posons $\star[C] = \varprojlim F_C$ et nous notons $[C]_0$ la classe $u_i(C)$ des sommets de $[C]$.

THÉORÈME. — $q_{\mathcal{U}}^n$ admet un adjoint à gauche $L_{\mathcal{U}}^n$. Soit $[C] = (C, U) \in \mathcal{G}_n$; le n -graphe sous-jacent à $L_{\mathcal{U}}^n[C]$ admet $[C]$ pour n -sous-graphe, $[C]_0$ pour classe de ses sommets. $L_{\mathcal{U}}^n[C]$ est une $(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n^{\perp})$ -projection de $L_{\mathcal{U}^{\perp}}^n[C] = (C, U, \emptyset)$.

La $q_{\mathcal{F}^n}^n$ -structure libre $L_{\mathcal{F}^n}^n[C]$ est construite comme suit : Définissons par récurrence le n -graphe $[L_{\lambda}] = (L_{\lambda}, U^{\lambda})$, où $\lambda \in \mathbb{N}$ et $U^{\lambda} = [u_i^{\lambda}]_{i \leq n}$, en posant

$$\begin{aligned} [L_1] &= [C]; & L_{\lambda+1} &= L_{\lambda} \cup \star[L_{\lambda}]; \\ U^{\lambda+1}(h) &= U^{\lambda}(h) & \text{si} \quad h &\in L_{\lambda}; \\ u_j^{\lambda+1}(h_i | i \leq n) &= u_j^{\lambda}(h_i) & \text{si} \quad (h_i | i \leq n) &\in \star[L_{\lambda}] \quad \text{et} \quad j \leq n. \end{aligned}$$

On a $L_{\mathcal{G}^2}^n[C] = (\tilde{L}, \tilde{U}, \tilde{k})$, où

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} L_\lambda; & \tilde{U}(m) &= U^\lambda(m) \quad \text{si } m \in L_\lambda; \\ \tilde{k}(m_i, i \leq n) &= (m_i, i \leq n) & \text{si } (m_i, i \leq n) \in \star(\tilde{L}, \tilde{U}). \end{aligned}$$

On obtient $L_{\mathcal{G}^2}^n[C]$ de la façon suivante : Pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$, soit $[L'_\lambda] = (L'_\lambda, U^\lambda)$ le n -sous-graphe de $[L_\lambda]$ défini par récurrence en posant

$$[L'_1] = [C], \quad L'_{\lambda+1} = L'_\lambda \cup M_\lambda, \quad U^\lambda = U^\lambda / L'_\lambda.$$

M_λ étant formée des $(h_i, i \leq n) \in \star[L'_\lambda]$ tels qu'au moins deux des h_i n'appartiennent pas à $[L'_\lambda]_0$. Alors

$$L_{\mathcal{G}^2}^n[C] = (\tilde{L}, \tilde{U}, \tilde{k}), \quad \text{où } \tilde{U} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{N}} L'_\lambda, \quad \tilde{U}' = \tilde{U} / \tilde{L}$$

et où, si $\xi \in \star(\tilde{L}', \tilde{U}')$, on a

$$\tilde{k}'(\xi) = m \quad \text{si } \xi = (m, i, j) \quad \text{et} \quad \tilde{k}'(\xi) = \xi \quad \text{autrement.}$$

$L_{\mathcal{U}}^n[C]$ est la $(\mathcal{U}_n, \mathcal{N}_n)$ -projection de $L_{\mathcal{V}}^n[C]$ pour $\mathcal{U} = \mathcal{F}'$ et $\mathcal{V} = \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ (resp. pour $\mathcal{U} = \mathcal{F}$ et $\mathcal{V} = \mathcal{F}''$).

Définition. — $L_{\mathcal{U}}^n[C]$ est appelé *quasi-catégorie non associative* (resp. *catégorie non associative*, resp. *quasi-catégorie*, resp. *catégorie*) *n*-aire libre des dédales de $[C]$, si $\mathcal{U} = \mathcal{F}^{\mathfrak{A}}$ (resp. $= \mathcal{F}''$, $\mathcal{F}'$ ou $\mathcal{F}$). Une $q_{\mathcal{U}}^n$ -structure libre engendrée par un n -graphe sera appelée *structure n-aire libre*.

4. CONSTRUCTION D'UNE STRUCTURE *n*-AIRE QUASI-QUOTIENT. — Soit $C_n = (C, U, k) \in \mathcal{N}_n^+$ et $[C_n] = (C, U) \in \mathcal{G}_n$. Nous supposons $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{F}_n^{\mathfrak{A}}$ et désignons par $r_{\mathcal{U}}[C_n]$ la relation n -compatible sur $L_{\mathcal{U}}^n[C_n]$ engendrée par la relation $(L_{\mathcal{U}}^n[C_n], B, L_{\mathcal{U}}^n[C_n])$, où B est la classe des couples $((f, i \leq n), k(f, i \leq n))$ tels que $(f, i \leq n) \in \star C_n$.

THÉORÈME. — C_n admet pour $(\mathcal{U}_n, \mathcal{N}_n^+)$ -projection $N_{\mathcal{U}}^n(C_n)$ la $p_{\mathcal{U}}^n$ -structure quotient de $L_{\mathcal{U}}^n[C_n]$ par $r_{\mathcal{U}}[C_n]$. On a $N_{\mathcal{U}}^n(C_n)_0 = (C_n)_0$.

COROLLAIRE. — Si $C_n \in \mathcal{U}_n$, alors C_n est une $p_{\mathcal{U}}^n$ -structure quotient de $L_{\mathcal{U}}^n[C_n]$. Si r est une relation sur C et si $\hat{r}$ est la relation d'équivalence n -compatible sur C_n engendrée par r , la $p_{\mathcal{U}}^n$ -structure quasi-quotient de C_n par r est $C_n / \hat{r}$ si $\mathcal{V} = \mathcal{N}''$ (resp. est $N_{\mathcal{U}}^n(C_n / \hat{r})$ si $C_n \in \mathcal{U}_n$ et $\mathcal{V} = \mathcal{U}$).

THÉORÈME. — La classe $J_{\mathcal{U}}^n$ des $F \in \mathcal{U}_n$ tels que $\beta(F) \subset \beta(F)_0$ est un $p_{\mathcal{U}}^n$ -idéal et $p_{\mathcal{U}}^n$ est propre pour la quasi-cohomologie ⁽²⁾.

Soit $\mathcal{F}(p_{\mathcal{U}}^n)$ la catégorie des foncteurs $p_{\mathcal{U}}^n$ -structurés, $\hat{p}_{\mathcal{U}}^n$ son foncteur projection vers $\mathcal{N}^{(2)}$.

THÉORÈME. — Si $(C, C_n) \in \mathcal{F}(p_{\mathcal{U}}^n)_0$ et si r est une relation d'équivalence sur C , il existe une $\hat{p}_{\mathcal{U}}^n$ -structure quasi-quotient de (C, C_n) par r ; de plus $\hat{p}_{\mathcal{U}}^n$ est propre pour la quasi-cohomologie.

5. CAS PARTICULIER. — Supposons $n = 2$. Un quasi-graphe multiplicatif binaire s'identifie à un quasi-graphe multiplicatif (C, β, z) au sens de ⁽³⁾; une quasi-catégorie (resp. une catégorie) non associative ⁽²⁾ est

(4)

un quasi-graphe multiplicatif (C, β, α) (resp. un graphe multiplicatif C) tel que $C \star C = \alpha \vee \beta$. Les quasi-catégories (resp. les catégories) binaires s'identifient aux quasi-catégories (resp. aux catégories).

D'après le théorème du paragraphe 2, toute quasi-catégorie non associative admet un plongement « universel » en une catégorie non associative, en une quasi-catégorie et en une catégorie. Le théorème du paragraphe 3 associe à un graphe $[C]$ la quasi-catégorie (resp. la catégorie) non associative libre de ses dédales: par exemple, si $[C]$ est formé d'un seul sommet O et d'une seule flèche $f \neq O$, la catégorie non associative libre correspondante est le magma libre des entiers non associatifs ^(*). $L_{\mathcal{F}}^2[C]$ (resp. $L_{\mathcal{F}}^2[C]$) est la quasi-catégorie (resp. la catégorie) libre des chemins de $[C]$ considérée dans ⁽²⁾ [resp. dans ⁽³⁾]. Le paragraphe 4 étend aux quasi-catégories non associatives les théorèmes de construction de catégories quasi-quotient de ⁽²⁾.

(*) Séance du 23 janvier 1967.

(1) V. TOPENTCHAROV, *Comptes rendus*, 264, série A, 1967, p. 269.

(2) *Structures quasi-quotient* (à l'impression dans *Math. Ann.*; multigraphié, Paris 1965, 93 pages); *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 538.

(3) *Introduction to structured categories* (University of Kansas, tech. report 10, 1966, 95 pages).

(4) *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

(5) J. BÉNABOU, *Structures algébriques dans les catégories* (Thèse, Paris, 1966); à l'impression dans *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle*, 1967.

(Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie, Paris, 5^e.)

/ 98 /

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Sur les structures algébriques*. Note (*)
de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. René Garnier.

La définition des esquisses donnée dans (2) est précisée ici, à l'aide de la notion de limite projective. Type associé à une esquisse algébrique projective. H-structures algébriques projectives; étude du foncteur d'oubli de la catégorie des morphismes entre structures algébriques vers la catégorie des applications. Les notations sont celles de (1).

Soient $\mathcal{M}_0$ et $\hat{\mathcal{M}}_0$ deux univers tels que $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Nous désignons par $\mathcal{M}$ et $\hat{\mathcal{M}}$ les catégories pleines d'applications, par $\mathcal{T}$ et $\hat{\mathcal{T}}$ (resp. par $\mathcal{T}'$ et $\hat{\mathcal{T}}'$) les catégories des foncteurs (resp. des néofoncteurs) associées à $\mathcal{M}_0$ et à $\hat{\mathcal{M}}_0$. Le foncteur $(\mathcal{T}, \hat{\mathcal{T}}')$ -projection naturalisé canonique [chap. III, th. 10 (1)] est noté $(\hat{N}, \hat{\psi})$.

Dans toute cette Note, $\mathcal{J}$ désigne une partie de $\mathcal{T}_0$ appartenant à la saturante de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$. Si $K' \in \mathcal{J}$, nous notons $\mathbb{N}_K$ le foncteur canonique de $\hat{\mathcal{T}}'$ vers $\mathcal{T}'$ associant à $U' \in \hat{\mathcal{T}}'_0$ le graphe multiplicatif longitudinal $\mathbb{N}(U', K')^{\square}$ des transformations naturelles entre néofoncteurs de K' vers U' [voir (2)]. Nous identifions la classe des unités de $\mathbb{N}_K(U')$ à la classe des néofoncteurs de K' vers U' .

1. ESQUISSES ALGÈBRIQUES PROJECTIVES.

DÉFINITION. — On appelle *esquisse algébrique $\mathcal{J}$ -projective* un triplet

$$\sigma = (U', M, (A_K)_{K' \in \mathcal{J}})$$

vérifiant les conditions suivantes :

- 1° $U' \in \hat{\mathcal{T}}'$ et $\hat{\psi}(U')$ est injectif;
- 2° M est une partie de U' formée de monomorphismes de U' ;
- 3° A_K est une partie de $\mathbb{N}_K(U')$ dont les éléments sont des transformations naturelles ψ définies par des triplets $(\Phi, \psi, \bar{e})$, où $\bar{e}$ est le foncteur « constant » sur $e \in U'_0$; de plus $\square \hat{\psi}(U').\psi$ définit $\hat{\psi}(U')(e)$ comme limite projective de $\hat{\psi}(U').\Phi$.

Alors σ est une $(\text{Id}_{\hat{\mathcal{T}}'}, (\mathbb{N}_K)_{K' \in \mathcal{J}})$ -esquisse particulière de la forme considérée dans (2) (exemple b, p. 2). On obtient aussi une esquisse algébrique $\mathcal{J}$ -projective

$$\hat{N}(\sigma) = (\hat{N}(U'), \hat{\psi}(U')(M), (B_K)_{K' \in \mathcal{J}})$$

en désignant par B_K la classe des $\square \hat{\psi}(U').\psi$, où $\psi \in A_K$.

Un *morphisme* m entre les esquisses algébriques $\mathcal{J}$ -projectives σ et $\hat{\sigma} = (\hat{U}', \hat{M}, (\hat{A}_K)_{K' \in \mathcal{J}})$ est un triplet $(\hat{\sigma}, F, \sigma)$ vérifiant les conditions :

- 1° $F = F(m)$ est un néofoncteur de U' vers $\hat{U}'$ et $F(M) \subset \hat{M}$;
- 2° $\square F.\psi \in \hat{A}_K$ pour tout $\psi \in A_K$.

PROPOSITION. — Soit $\hat{\mathcal{S}}$ la catégorie des morphismes entre esquisses algébriques $\mathcal{J}$ -projectives; l'application $m \rightarrow F(m)$ définit un foncteur fidèle Σ de $\hat{\mathcal{S}}$ vers $\hat{\mathcal{N}}$, qui est à $\hat{\mathcal{F}}$ -limites projectives.

2. TYPE D'UNE ESQUISSE ALGÈBRIQUE. — Soit H' une catégorie et μ une application $\mathcal{J}$ -limite projective partielle ⁽³⁾ sur H' ; soit $\mu_{K'}$ la classe formée des $\mu(\Phi)$, où $\Phi \in H' \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot K'$. Le triplet $(H', R_{\mathcal{G}}(H'), (\mu_{K'})_{K' \in \mathcal{J}})$ est une esquisse algébrique $\mathcal{J}$ -projective, que nous noterons $\sigma(H', \mu)$ [le symbole $R_{\mathcal{G}}(H')$ représente la classe de tous les monomorphismes de H'].

Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{S}}$ ayant pour objets les esquisses $\sigma(H', \mu)$ telles que $H' \in \mathcal{F}_0$ et que μ soit une application limite $\mathcal{J}$ -projective (totale) sur H' . La catégorie $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ s'identifie à la catégorie désignée par la même lettre dans ⁽³⁾, en identifiant $\sigma(H', \mu)$ à (H', μ) .

THÉORÈME. — Soit $\sigma = (U', M, (A_{K'})_{K' \in \mathcal{J}})$ une esquisse algébrique $\mathcal{J}$ -projective telle que $U' \in \mathcal{M}_0$ et que les relations

$$\beta^{\sqcup} \psi = \beta^{\sqcup} \psi', \quad \psi \in A_{K'}, \quad \text{et} \quad \psi' \in A_{K'}$$

- 1 entraînent $\psi = \psi'$. Alors il existe un $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \hat{\mathcal{S}})$ -projecteur $\lambda(\sigma)$ tel que $\Sigma(\lambda(\sigma))$ soit une injection. On a $T(\sigma) = T(\hat{N}(\sigma))$, en désignant par $T(\sigma)$ la catégorie but de $\Sigma(\lambda(\sigma))$.

En effet, ce théorème résulte du théorème de complétion $\mathcal{J}$ -projective ⁽³⁾ : si μ est l'application $\mathcal{J}$ -limite projective partielle sur $\hat{N}(U')$ telle que

$$\mu(\Phi) = \psi \quad \text{si} \quad \psi \in B_{K'} \quad \text{et} \quad \Phi = \beta^{\sqcup} \psi,$$

on a $\beta(\lambda(\sigma)) = \sigma(T(\sigma), \hat{\mu})$ en notant $(T(\sigma), \hat{\mu})$ la $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}^{\mathcal{J}})$ -projection de $(\hat{N}(U'), \mu)$ construite dans ⁽³⁾.

DÉFINITION. — Avec les notations du théorème précédent, on appellera $T(\sigma)$ le *type* de σ .

Si $(\sigma(H', \mu), F, \sigma)$ est un morphisme, il résulte du théorème que F s'étend en un foncteur de $T(\sigma)$ vers H' , compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives.

3. STRUCTURES ALGÈBRIQUES $\mathcal{J}$ -PROJECTIVES. — Soit $H' \in \hat{\mathcal{F}}_0$ une catégorie; nous noterons $\sigma(H')$ l'esquisse algébrique $\mathcal{J}$ -projective $(H', R_{\mathcal{G}}(H'), (H_{K'})_{K' \in \mathcal{J}})$ telle que $H_{K'} \subset \mathcal{M}_{K'}(H')$ soit la classe de toutes les transformations naturelles définies par un triplet $(\Phi, \tau, \bar{e})$, où e est une limite projective de Φ et $\tau(i)$ sa projection canonique vers $\Phi(i)$, pour tout $i \in K'_0$. Supposons donnée une esquisse algébrique $\mathcal{J}$ -projective

$$\sigma = (U', M, (A_{K'})_{K' \in \mathcal{J}}).$$

- 2 DÉFINITION. — On appelle *H'-structure algébrique $\mathcal{J}$ -projective d'espèce σ* un néofoncteur F de U' vers H' tel que $(\sigma(H'), F, \sigma) \in \hat{\mathcal{S}}$. Une $\mathcal{M}$ -structure

algébrique $\mathcal{J}$ -projective est simplement appelée *structure algébrique $\mathcal{J}$ -projective*.

Nous désignons par $\mathcal{S}(\mathbf{H})$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}(\mathbf{H}, \mathbf{U})^{\square}$ ayant pour objets les $\mathbf{H}$ -structures algébriques d'espèce σ ; un élément de $\mathcal{S}(\mathbf{H})$ est appelé un *morphisme entre $\mathbf{H}$ -structures algébriques*. La surjection $\Gamma \rightarrow (\gamma(u))_{u \in U_0}$, où $\Gamma \in \mathcal{S}(\mathbf{H})$ et $\Gamma(u) = \gamma(u)^{\square}$ pour tout $u \in U_0$, définit un foncteur $\pi_{\sigma}(\mathbf{H})$ de $\mathcal{S}(\mathbf{H})$ vers $(\mathbf{H})^{U_0}$.

THÉORÈME. — $\pi_{\sigma}(\mathbf{H})$ est un foncteur d'homomorphismes saturé. Si $\mathbf{H}$ est une catégorie à $\mathcal{F}$ -limites projectives, $\mathcal{S}(\mathbf{H})$ est une catégorie à $\mathcal{F}$ -limites projectives.

1

4. FONCTEUR PROJECTION DE $\mathcal{S}(\mathbf{H})$ VERS $\mathfrak{M}$. — Soit $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, \mathbf{H})$ un foncteur compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives et tel que p soit la restriction à $\mathbf{H} = \underline{p}(\mathfrak{M})$ d'un foncteur $P = (\mathfrak{M}, \underline{P}, \hat{\mathbf{H}})$ compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives. Désignons par Π le foncteur $\{U_a\}$ -produit canonique sur $\mathfrak{M}$, par P_{σ} le foncteur $\Pi.P^{U_0}.\pi_{\sigma}(\hat{\mathbf{H}})$.

THÉORÈME. — Si P est un foncteur d'homomorphismes saturé dénombrablement engendrant (*) pour $\mathfrak{M}$, P_{σ} est $(\mathfrak{M}, X, \mathcal{S}(\mathbf{H}))$ -engendrant (*), X étant la classe des transformations naturelles $\Gamma \in \mathcal{S}(\hat{\mathbf{H}})$ telles que $\gamma(u)$ soit un P -monomorphisme si $\Gamma(u) = \gamma(u)^{\square}$ pour tout $u \in U_a$.

2¶

La construction se fait par récurrence : Soit $F \in \mathcal{S}(\hat{\mathbf{H}})_0$ et $C \subset P_{\sigma}(F)$. On se ramène au cas où $C = \Pi(C(u))_{u \in U_0}$. Pour tout $u \in U_a$, supposons définie, pour tout entier $i \leq n$, une partie $C_i(u)$ de $P.F(u)$, de sorte que

$$C_1(u) = C(u) \quad \text{et} \quad C_i(u) \subset C_{i+1}(u).$$

Soit $C'_n(u)$ la classe réunion des classes $P.F(k) \cap C_n(u')$, lorsque $k \in u.U.u'$. Alors $C'_n(u)$ engendre une P -sous-structure $s_n(u)$ de $F(u)$; posons $C_{n+1}(u) = P(s_n(u))$. Il existe une P -sous-structure $\hat{F}(u)$ de $F(u)$ telle que

$$P(\hat{F}(u)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n(u).$$

On montre que l'application $u \rightarrow \hat{F}(u)$ se prolonge en une $\hat{\mathbf{H}}$ -structure algébrique $\hat{F}$ d'espèce σ , et que $\hat{F}$ est isomorphe à la $(X, \mathcal{S}(\mathbf{H}))$ -sous-structure de F engendrée par C .

3¶

THÉORÈME. — Avec les hypothèses du théorème précédent, si $\mathbf{H} \in \mathfrak{M}_0$ et si P est à $\mathcal{F}$ -limites projectives, p_{σ} est un foncteur à structures quasi-quotient (*) et la catégorie $\mathcal{S}(\mathbf{H})$ est à $\mathcal{F}$ -limites inductives.

4+

Exemples : Si P est le foncteur identique de $\mathfrak{M}$ ou l'un des foncteurs projections vers $\hat{\mathfrak{M}}$ de la catégorie $\hat{\mathcal{F}}$ (resp. $\hat{\mathfrak{M}}'$, resp. $\hat{\Omega}$ des applications ordonnées, resp. $\hat{\mathcal{C}}$ des applications continues), alors les théorèmes précédents s'appliquent, puisque ces foncteurs sont dénombrablement engendrés pour $\mathfrak{M}$.

Les notions de sous-esquisse et d'idée d'une structure données dans ⁽²⁾ se précisent pour les structures algébriques. Nous reviendrons sur cette question dans un autre article.

1 5. EXEMPLES DE STRUCTURES ALGÈBRIQUES. — Les esquisses des graphes, des quasi-catégories et catégories non associatives, des quasi-catégories et des catégories, construites dans ⁽²⁾ sont des esquisses algébriques projectives. Plus généralement, les structures n -aires ⁽³⁾ sont des structures algébriques d'espèce σ , où l'esquisse σ est obtenue par généralisation immédiate de l'esquisse de la structure binaire correspondante. Il s'ensuit que les théorèmes d'existence de limites projectives, de limites inductives et de structures quasi-quotient pour les structures n -aires ⁽⁴⁾ se déduisent aussi des théorèmes du n° 3. Nous montrerons ailleurs que les constructions de projections faites dans ⁽⁵⁾ s'étendent au cas des structures algébriques projectives.

En particulier, les structures algébriques au sens de ⁽¹⁾ sont des H'-structures algébriques $\mathcal{J}$ -projectives, où $\mathcal{J}$ est la classe formée des catégories discrètes finies; leur type a été défini dans ⁽¹⁾, et les présents résultats généralisent ceux de ⁽¹⁾.

1 On pourrait aussi définir des structures algébriques inductives et projectives, mais il faut imposer à H' des conditions supplémentaires pour que les théorèmes précédents restent valables.

(*) Séance du 3 mai 1967.

⁽¹⁾ *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

⁽²⁾ *Introduction to the theory of structured categories*, Department of Math., University of Kansas, Technical Report 10, 1966, 95 pages.

⁽³⁾ *Comptes rendus*, 263, 1966, série A, p. 655; *Sur l'existence de structures libres* (*Cahiers Top. et Géom. diff.*, 1967, 147 pages, sous presse).

⁽⁴⁾ *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 4538; *Math. Ann.*, 171, n° 4, 1967, p. 293-363.

⁽⁵⁾ TOPENTCHAROV, *Comptes rendus*, 264, série A, 1967, p. 269.

⁽⁶⁾ *Comptes rendus*, 264, série A, 1967, p. 273.

⁽⁷⁾ BENABOU, *Structures algébriques dans les catégories* (Thèse, Paris, 1966; *Cahiers Top. et Géom. diff.*, 9, 1967, sous presse).

(Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5^e.)

/99/

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Adjonctions de limites à un foncteur fidèle ou à une catégorie*. Note de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Maurice Fréchet.

Théorèmes de prolongement universel d'un foncteur fidèle en un foncteur fidèle K' -étalant ou à $\mathcal{J}$ -limites projectives : solutions minimales et solutions maximales. Solution minimale à une équivalence près du problème du plongement d'une catégorie dans une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives. Cette Note fait suite à ⁽²⁾; la terminologie et les notations sont celles de ⁽¹⁾. Les démonstrations seront données dans ⁽³⁾.

Nous supposons donnés deux univers $\mathcal{M}_0$ et $\hat{\mathcal{M}}_0$ tels que $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Soient $\mathcal{M}$ et $\hat{\mathcal{M}}$ les catégories pleines d'applications, $\mathcal{F}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ les catégories des foncteurs, associées respectivement à $\mathcal{M}_0$ et à $\hat{\mathcal{M}}_0$. Nous désignons par $\mathcal{J}$ une partie de $\mathcal{F}_0$ telle qu'il existe une bijection de $\mathcal{J}$ sur un élément de $\mathcal{M}_0$.

Soit K' une catégorie, $K' \in \mathcal{F}_0$. Soit $\mathcal{H}_0$ la classe des foncteurs fidèles p vers K' dont la restriction $p_{\mathcal{J}}$ au groupoïde des inversibles de H' , source de p , soit bien fidèle ⁽¹⁾. Soit $\mathcal{K}$ la catégorie formée des triplets (p', F, p) où

$$p \in \mathcal{H}_0, \quad p' \in \mathcal{K}_0 \quad \text{et} \quad p' \cdot F = p,$$

la loi de composition étant

$$(p'', F', p') \cdot (p', F, p) = (p'', F' \cdot F, p);$$

la classe de ses unités est identifiée à $\mathcal{H}_0$. Soit Z le foncteur fidèle de $\mathcal{K}$ vers $\mathcal{M}$ associant à (p', F, p) l'application sous-jacente à F .

1. PROLONGEMENT MAXIMAL D'UN FONCTEUR EN UN FONCTEUR K' -ÉTALANT OU $\mathcal{J}$ -COMPATIBLE. — Soit K'' une sous-catégorie de la catégorie K' . Si p est un foncteur de but K' , la classe des (K', p) -injections ⁽¹⁾ est notée $(K', p)^{\ulcorner}$.

DÉFINITION. — On appelle *foncteur K' -étalant* un foncteur $p = (K', p, H) \in \mathcal{H}_0$ tel que la restriction de p à $e \cdot (K', p)^{\ulcorner}$ soit une surjection sur $p(e) \cdot K'$ pour toute unité e de H' (c'est alors une bijection).

Exemple. — Si K' est une catégorie pleine d'applications et si K' est la classe des injections canoniques, un foncteur K' -étalant est un foncteur $\ulcorner$ -étalant ⁽³⁾.

Soit $\mathcal{K}^e$ la sous-catégorie de $\mathcal{K}$ formée des triplets $(p', F, p) \in \mathcal{K}$ vérifiant les conditions

$$p'(\alpha(p')_0) \subset K' \quad \text{et} \quad F((K', p)^{\ulcorner}) \subset (K', p')^{\ulcorner}.$$

Soit $\mathcal{K}^e$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}^e$ dont les unités sont les foncteurs K' -étalants et soit Z^e la restriction de Z à $\mathcal{K}^e$.

Par ailleurs, si K' est une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites (limite signifie ici limite projective) et si nous nous donnons une application $\mathcal{J}$ -limite naturalisée multiforme μ sur K' [i. e. une surjection μ associant à tout foncteur φ de $I' \in \mathcal{J}$ vers K' une classe $\mu(\varphi)$ de limites naturalisées de but φ], nous utiliserons les catégories suivantes : Soit $\mathcal{K}^\mu$ la sous-catégorie de $\mathcal{K}$ formée des $(p', F, p) \in \mathcal{K}$ tels que, pour toute limite naturalisée Θ vérifiant $p\Theta = \coprod p.\Theta \in \mu(\varphi)$, la transformation naturelle $F\Theta$ soit une limite naturalisée. Soit $\mathcal{K}^\mu$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}^\mu$ ayant pour unités les foncteurs μ -compatibles, c'est-à-dire les foncteurs $p = (K', \underline{p}, H') \in \mathcal{K}_0$ tels que, pour tout foncteur Φ de $I' \in \mathcal{J}$ vers H' et tout $\theta \in \mu(p.\Phi)$, il existe une limite naturalisée Θ de but Φ appliquée par p sur θ (elle est alors déterminée d'une façon unique). Soit Z^μ la restriction de Z à $\mathcal{K}^\mu$.

Posons $\varepsilon = e$ ou μ selon que nous nous donnons une sous-catégorie K'' de K' ou une application $\mathcal{J}$ -limite naturalisée multiforme μ sur K' . Soit $\hat{Z}^\varepsilon$ le foncteur défini comme Z^ε en partant de l'univers $\mathcal{M}_0$ (mais en supposant toujours $K' \in \mathcal{F}_0$). Soit X^ε la classe des monomorphismes (p', F, p) de $\hat{\mathcal{K}}^\varepsilon$ tels que $F = (H'', \underline{F}, H')$ soit un foncteur injectif et $F(H')$ une sous-catégorie pleine de H'' .

THÉORÈME. — $\hat{Z}^\varepsilon$ est un foncteur Γ -engendrant pour $\mathcal{M}$ et engendrant $(^2)$ pour $(\mathcal{M}, X^\varepsilon, \mathcal{K}^\varepsilon)$. Si $p \in \mathcal{K}_0^\varepsilon$, alors p admet une $(\mathcal{K}^\varepsilon, \mathcal{K}^\varepsilon)$ -projection $p_{\mathcal{K}}^\varepsilon$ et p engendre une $(\mathcal{K}, \iota, \mathcal{K}^\varepsilon)$ -structure libre $p_{\mathcal{K}}^\varepsilon$ telles que p soit une restriction de $p_{\mathcal{K}}^\varepsilon$ et de $p_{\mathcal{K}}^\varepsilon$.

On montre que, si $P = (K', \underline{P}, \hat{H}') \in \hat{\mathcal{K}}_0^\varepsilon$, toute partie L de $\hat{H}$ engendre une $\hat{Z}^\varepsilon$ -sous-structure de P et une $(X^\varepsilon, \hat{\mathcal{K}}^\varepsilon)$ -sous-structure de P qui sont des restrictions de P construites explicitement (par récurrence transfinie si $\varepsilon = \mu$); leurs sources sont appelées respectivement la sous-catégorie et la sous-catégorie pleine (ε, P) -stables engendrées par L . L'existence de $p_{\mathcal{K}}^\varepsilon$ et de $p_{\mathcal{K}}^\varepsilon$ se déduit du théorème 1 $(^2)$.

2. PROLONGEMENTS MINIMAUX D'UN FONCTEUR EN UN FONCTEUR K' -ÉTALANT OU μ -COMPATIBLE. — Les notations sont celles du paragraphe 1.

Soit $\mathcal{K}_0^{\varepsilon_e}$ (resp. $\mathcal{K}_0^{\varepsilon_\mu}$) la classe des couples (q, C) , où $q = (K', q, \hat{C}') \in \mathcal{K}_0^\varepsilon$ et où C est une sous-catégorie pleine de $\hat{C}'$ telle que $\hat{C}'$ soit la sous-catégorie (resp. sous-catégorie pleine) (ε, q) -stable engendrée par C . Pour $\mathcal{L} = \mathcal{K}'$ ou $\mathcal{K}''$, soit $\mathcal{L}^\varepsilon$ la catégorie formée des éléments $\hat{F}$ vérifiant les conditions :

- 1° $\hat{F} = ((q_2, C_2), F', (q_1, C_1)), (q_i, C_i) \in \mathcal{L}_0^\varepsilon$ pour $i = 1, 2$ et $(q_2, F', q_1) \in \mathcal{K}^\varepsilon$;
- 2° La restriction $F = (C_2, \underline{F'}, C_1)$ de F' est un isomorphisme.

Soit $Y_\varepsilon^\varepsilon$ le foncteur de $\mathcal{L}^\varepsilon$ vers le groupoïde $\mathcal{K}_Y^\varepsilon$ des éléments inversibles de $\mathcal{K}^\varepsilon$, associant à $\hat{F}$ le triplet (p_2, F, p_1) , en notant p_i la restriction de q_i à C_i .

THÉORÈME. — 1° $Y_\varepsilon^\varepsilon$ admet un adjoint à droite : tout $p \in \mathcal{K}_0^\varepsilon$ engendre une $Y_\varepsilon^\varepsilon$ -structure colibre de la forme $(p_\varepsilon^\varepsilon, H)$, telle que H soit une sous-

catégorie pleine de $H_{\mathcal{E}}^{\varepsilon} = \mathbf{z}(p_{\mathcal{E}}^{\varepsilon})$. Il existe un foncteur $G_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}$ de $H_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}$ vers la catégorie $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}, H^*)$ des transformations naturelles entre foncteurs de la duale H^* de H vers $\mathfrak{M}$.

2° Si de plus K est une catégorie pleine d'applications, si p est équivalent au foncteur associé à un générateur a de H et si $p(a)$ est un atome, $G_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}$ est injectif et $G_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}(H_{\mathcal{E}}^{\varepsilon})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{M}(\mathfrak{M}, H^*)$.

1

Donnons quelques indications sur la construction de $p_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}$: 1° Cas $\varepsilon = e$: Soit A la classe des couples (s, k) , où $s \in H_0^+$ et $k \in p(s) \cdot K'$; pour tout $\hat{s} \in H_0^+$, notons $E_{\hat{s}}(s, k)$ la classe formée des $(f, \hat{s})$, où $f \in \mathbf{z}(k) \cdot K$, pour lesquels il existe un $h \in s \cdot H$ vérifiant $p(h) = k \cdot f$. Soit r la relation d'équivalence sur A :

$(s, k) \sim (s', k')$ si, et seulement si, $E_{\hat{s}}(s, k) = E_{\hat{s}}(s', k')$ pour tout $\hat{s} \in H_0^+$. La catégorie $H_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}$ a pour éléments les triplets $\bar{g} = (\tau_2, g, \tau_1)$ tels que

$$\tau_i = (s_i, k_i) \bmod r \quad \text{pour } i = 1, 2, \quad g \in \mathbf{z}(k_2) \cdot K \cdot \mathbf{z}(k_1)$$

et que $(f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s_1, k_1)$ entraîne $(g \cdot f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s_2, k_2)$ pour tout $\hat{s} \in H_0^+$. On a $p_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}(\bar{g}) = g$. Le foncteur $G_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}$ associe à τ_i le foncteur $G(\tau_i)$ tel que $G(\tau_i)(\hat{s}) = E_{\hat{s}}(s_i, k_i)$; en général $G_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}$ n'est pas injectif. — 2° Cas $\varepsilon = \mu$: Soit Λ le plus petit ordinal régulier supérieur à l'ordinal $\sup_{\lambda \in \mathcal{J}} \lambda_i + 1$,

où λ_i est le plus petit ordinal équipotent à L . On montre que $H_{\mathcal{E}}^{\mu} = \bigcup_{\lambda < \Lambda} L_{\lambda}$,

où $(L_{\lambda})_{\lambda < \Lambda}$ est une suite transfinie croissante de sous-catégories pleines de $H_{\mathcal{E}}^{\mu}$, la restriction q_{λ} du foncteur $p_{\mathcal{E}}^{\mu}$ à L_{λ} étant obtenue par récurrence transfinie en posant $q_1 = p$ et en construisant comme suit $q_{\lambda+1}$ à partir de q_{λ} , pour tout ordinal $\lambda < \Lambda$: Soit $\mathcal{J}(K')$ la catégorie admettant K' et $\sum_{\tau \in \mathcal{J}} \mathfrak{M}(K', \Gamma)$ pour sous-catégories pleines et dont les autres éléments sont les triplets $\hat{g} = (\varphi, \theta, s)$, où θ est une transformation naturelle d'un foncteur constant sur s vers $\varphi \in K' \cdot \mathcal{J} \cdot \mathcal{J}$; alors $\hat{g}$ est une limite naturalisée si, et seulement si, $\hat{g}$ est un $(\mathcal{J}(K'), K)$ -éjecteur. Soit $\mathcal{J}(q_{\lambda})$ le foncteur de $\mathcal{J}(L_{\lambda})$ vers $\mathcal{J}(K')$ prolongeant canoniquement q_{λ} et soit K'' la sous-catégorie de $\mathcal{J}(K')$ engendrée par la classe des $\hat{g} \in \mathcal{J}(K')$ tels que $\theta \in \mu(\varphi)$. On désigne par $\hat{q}_{\lambda}$ le foncteur K'' -étalant $\mathcal{J}(q_{\lambda})_{\mathcal{E}}$, associé à $\mathcal{J}(q_{\lambda})$ par le procédé précédant ; $q_{\lambda+1}$ est la restriction de $\hat{q}_{\lambda}$ à $L_{\lambda+1} = (\hat{q}_{\lambda})^{-1}(K)$. — 3° $p_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}$ est la restriction de $p_{\mathcal{E}}^{\mu}$ à la sous-catégorie $(\varepsilon, p_{\mathcal{E}}^{\varepsilon})$ -stable engendrée par H .

Ces théorèmes montrent que tout foncteur $p \in \mathcal{K}_0$ admet des prolongements « minimaux » $p_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}$ et un prolongement « maximal » $p_{\mathcal{E}}^{\varepsilon}$ en un foncteur K' -étalant avec conservation des (K', p) -injections. Si K' est à $\mathcal{J}$ -limites projectives, p admet aussi des prolongements « minimaux » $p_{\mathcal{E}}^{\mu}$ et un prolongement « maximal » $p_{\mathcal{E}}^{\mu}$ en un foncteur μ -compatible appartenant à $\mathcal{K}_0$, avec conservation des $\mathcal{J}$ -limites projectives existant dans p .

2

1 Par exemple, on peut ainsi prolonger le foncteur canonique de la catégorie des applications r -différentiables vers $\mathcal{M}$ en un foncteur d'homomorphismes à noyaux ou à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives.

3. COMPLÉTION MINIMALE D'UNE CATÉGORIE. — Soit $\mathcal{G}_0^*$ (resp. $\mathcal{G}_0'$) la classe des couples $(\hat{C}, C)$, où $\hat{C} \in \mathcal{F}_0$ et où C est une sous-catégorie pleine de $\hat{C}$ telle que $\hat{C}$ soit la sous-catégorie (resp. sous-catégorie pleine) de $\hat{C}$ stable par $\mathcal{J}$ -limites engendrée par C [i. e. $(\mu, (\hat{C}, \iota, \hat{C}))$ -stable engendrée par C , où $\mu(\Phi)$ est la classe de toutes les limites naturalisées de but Φ_2]. Soit $\mathcal{F}$ la catégorie quotient de $\mathcal{F}$ par la relation d'équivalence $\varphi : F \sim F'$ si, et seulement si, il existe une équivalence naturelle de F sur F' . Pour $\mathcal{G} = \mathcal{G}''$ (resp. $= \mathcal{G}'$), soit $\mathcal{G}$ la catégorie formée des triplets

$$m = ((\hat{C}_2, C_2), \tilde{F}, (\hat{C}_1, C_1)), \quad (\hat{C}_i, C_i) \in \mathcal{G}_0 \quad \text{et} \quad \tilde{F} \in \hat{C}_2, \mathcal{F}, \hat{C}_1$$

tels qu'il existe un $F' \in \tilde{F}'$ compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives et dont la restriction $F = (C_2, \tilde{F}', C_1)$ soit un isomorphisme. Soit $V_{\mathcal{G}}$ le foncteur de $\mathcal{G}$ vers le groupoïde $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ des inversibles de $\mathcal{F}$, défini par : $m \mapsto F \bmod \rho$.

Tout $H \in \mathcal{F}_0$ est canoniquement identifié à une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{H}(\mathcal{M}, H^*)$: soit $\bar{D}_{\mathcal{G}}$ la sous-catégorie (resp. sous-catégorie pleine) de $\mathfrak{H}(\mathcal{M}, H^*)$ stable par $\mathcal{J}$ -limites engendrée par H .

2 THÉORÈME. — *Le foncteur $V_{\mathcal{G}}$ admet un adjoint à droite. La catégorie $H \in \mathcal{F}_0$ engendre une $V_{\mathcal{G}}$ -structure colibre $(H_{\mathcal{G}}, H)$ telle que $H_{\mathcal{G}} \in \mathcal{F}_0$ soit une catégorie équivalente à $\bar{D}_{\mathcal{G}}$.*

La démonstration repose sur une étude approfondie de $\bar{D}_{\mathcal{G}}$.

Ce théorème montre que la catégorie $\bar{D}_{\mathcal{G}}$, considérée par plusieurs auteurs comme « la complétion » de H , est une solution minimale du problème du plongement de H , à une équivalence près, dans une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites. Ce problème admet aussi des solutions « maximales à une équivalence près » [(2), (5)] et des solutions « maximales à un isomorphisme près » [ce problème est résolu dans (2)].

Tous les résultats de cette Note sont encore valables en remplaçant limites par limites inductives, par passage aux catégories duales.

(1) *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

(2) *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle*, 9, nos 1 et 2, Dunod, Paris, 1967, p. 33-181.

(3) *Math. Ann.*, 171, 1967, p. 193-263.

(4) *Prolongements universels d'un foncteur par adjonction de limites* (à paraître; provisoirement multigraphié, 60 pages).

(5) TRNKOVÁ, *Comm. Math. Univer. Carolinae*, 7, n° 1, 1966, p. 1-73.

(Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie, Paris, 5^e.)

ESQUISSES ET TYPES DES STRUCTURES ALGÈBRIQUES

PAR

CHARLES EHRESMANN

1. Introduction

Une esquisse $\bar{\sigma}$ est la donnée d'un graphe multiplicatif U et de certaines transformations naturelles entre néofoncteurs à valeurs dans U , vérifiant quelques axiomes. Une structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}$ est une „réalisation“ de U , c'est-à-dire un néofoncteur de U vers une catégorie d'applications qui applique les transformations naturelles données en des limites projectives ou inductives naturalisées. Il existe une „plus grande“ esquisse $T(\sigma)$, appelée type de σ , prolongeant σ et telle que les structures d'espèce σ s'identifient aux structures d'espèce $T(\bar{\sigma})$.

1+

Dans le § 2 sont définies les esquisses des graphes, des classes multiplicatives et des catégories; l'étude des catégories et des catégories structurées comme réalisations d'esquisses a fait l'objet du mémoire [3]. Le § 3 généralise aux graphes multiplicatifs les théorèmes de complétion des catégories de [2]. Les notions d'esquisse, de prototype et de type d'une esquisse sont introduites dans le § 4; les définitions adoptées ici sont un peu différentes de celles proposées dans [4], mais elles permettent d'obtenir des résultats analogues à ceux de [4] et aussi de résoudre les problèmes indiqués à la fin de cet article.

2+

La terminologie et les notations (en particulier relativement aux transformations naturelles) sont ceux du livre [1].

2. Exemples de définition d'une structure comme réalisation d'une esquisse

Rappelons qu'un graphe multiplicatif est un couple $(C, \times)$ d'une classe C et d'une application $\times$ d'une partie M de $C \times C$ dans C vérifiant les axiomes suivants, où l'on pose $\times(g, f) = g \cdot f$:

1. Pour tout $f \in C$, il existe une et une seule unité à droite, notée $\alpha(f)$, telle que $(f, \alpha(f)) \in M$ et une et une seule unité à gauche $\beta(f)$ telle que $(\beta(f), f) \in M$.

2. Si $(g, f) \in M$, on a

$$\alpha(g) = \beta(f), \quad \alpha(g.f) = \alpha(f) \text{ et } \beta(g.f) = \beta(g).$$

Les applications α , β et γ sont appelées source, but et loi de composition de (C, γ) et le couple (C, γ) est souvent noté $C^\cdot$; dans ce cas, on écrit $M = C^\cdot \times C^\cdot$, et on désigne par $C_0^\cdot$ la classe $\alpha(C) = \beta(C)$ des unités de $C^\cdot$.

Remarquons que cette définition utilise seulement la composition des applications.

Si $C^\cdot$ et $\hat{C}^\cdot$ sont deux graphes multiplicatifs, on appelle *néofoncteur* de $C^\cdot$ vers $\hat{C}^\cdot$ un triplet $(\hat{C}^\cdot, \varphi, C^\cdot)$, où φ est une surjection de C sur $\varphi(C) \subset \hat{C}$, tel que:

1. Si $(g, f) \in C^\cdot \times C^\cdot$, on a $(\varphi(g), \varphi(f)) \in \hat{C}^\cdot \times \hat{C}^\cdot$ et $\varphi(g). \varphi(f) = \varphi(g.f)$;
2. Si $e \in C_0^\cdot$, alors $\varphi(e) \in \hat{C}_0^\cdot$.

1

a) Esquisses des graphes et des classes multiplicatives

Un graphe est un triplet $(C, \beta, \alpha) = [C]$, où C est une classe, α et β deux rétractions de C sur une partie $[C]_0$ de C . Cette définition est équivalente à la suivante: Soit $U_{\mathcal{G}}$ le graphe multiplicatif ayant deux unités u et u_0 et 3 autres morphismes a et b de u vers u_0 et i de u_0 vers u (fig. 1), les composés autres que le composé d'un élément avec ses unités à droite et à gauche étant

$$a.i = u_0 \text{ et } b.i = u_0.$$

Si $[C]$ est un graphe, la surjection

$$u \rightarrow C, \quad u_0 \rightarrow [C]_0, \quad a \rightarrow \alpha, \quad b \rightarrow \beta \text{ et } i \rightarrow (C, \gamma, [C]_0)$$

définit un néofoncteur F de $U_{\mathcal{G}}$ vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications. On voit que l'application $(C, \beta, \alpha) \rightarrow F$ est une bijection de la classe $\mathcal{G}_0$

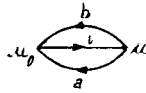


Fig. 1

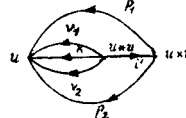


Fig. 2

des graphes (C, β, α) tels que $C \in \mathfrak{M}_0$ sur la classe des néofoncteurs F de U vers $\mathfrak{M}$ tels que $F(i) \in M^\cdot$ = classe des injections canoniques. Cette bijection s'étend en un isomorphisme de la catégorie $\mathcal{G}$ des morphismes entre graphes sur la sous-catégorie pleine de la catégorie longitudinale $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U)^{\text{ld}}$ des

transformations naturelles entre néofoncteurs F de U vers $\mathfrak{M}$ tels que $F(i) \in \mathfrak{M}^i$. Donc la „structure de graphe“ est obtenue comme „réalisation“ $U_{\mathfrak{G}}$. 1

De même, on peut définir une classe multiplicative comme une „réalisation“ du graphe multiplicatif $U_{\mathfrak{G}}$ ayant 3 unités u , $u \times u$ et $u \times u$, les autres morphismes étant (fig. 2)

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1, v_2 \text{ et } k \text{ de } u \times u \text{ vers } u, \\ p_1, p_2 \text{ de } u \times u \text{ vers } u, \\ i' \text{ de } u \times u \text{ vers } u \times u, \end{array} \right.$$

les composés de deux éléments différents d'une unité étant

$$p_1 \cdot i' = v_1 \quad \text{et} \quad p_2 \cdot i' = v_2.$$

Si $(C, \times)$ est une classe multiplicative, soit F le néofoncteur de $U_{\mathfrak{G}}$ vers $\mathfrak{M}$ tel que $F(p_i)$ soit la i -ième projection canonique de $C \times C$ sur C et que

$$F(k) = \times \quad \text{et} \quad F(i') = (C \times C, \cdot, C \times C).$$

La surjection $(C, \times) \rightarrow F$ définit une bijection de la classe $\mathfrak{M}_0$ des classes multiplicatives telles que $C \in \mathfrak{M}_0$ sur la classe des néofoncteurs F de $U_{\mathfrak{G}}$ vers $\mathfrak{M}$ tels que $F(i') \in \mathfrak{M}^i$ et que $F(p_i)$ soit la projection canonique de $F(u) \times F(u)$.

b) Esquisse d'une catégorie

Soit $[U_1]$ le graphe ayant 4 sommets $u, u_0, u \times u, (u \times u) \times (u \times u)$ et dont les seules flèches sont

$$\left\{ \begin{array}{l} a \text{ et } b \text{ de } u \text{ vers } u_0, \\ i \text{ de } u_0 \text{ vers } u, \\ v_1, v_2 \text{ et } k \text{ de } u \times u \text{ vers } u, \\ v(u, i \cdot a) \text{ et } v(i \cdot b, u) \text{ de } u \text{ vers } u \times u, \\ w_1, w_2, k_1 \text{ et } k_2 \text{ de } (u \times u) \times (u \times u) \text{ vers } u \times u. \end{array} \right.$$

Nous désignerons par $U_{\mathfrak{G}}$ le graphe multiplicatif défini comme suit: 2
 $[U_1]$ est un sous-graphe du graphe $[U_{\mathfrak{G}}]$ sous-jacent à $U_{\mathfrak{G}}$, contenant toutes les unités de $U_{\mathfrak{G}}$ (fig. 3); les éléments de $U_{\mathfrak{G}}$ sont ceux de U_1 et 11 autres morphismes g_i , où $1 \leq i \leq 11$; la loi de composition est telle que les seuls composés soient les composés d'un élément avec ses

unités à droite et à gauche, et les composés explicitement indiqués dans les formules ci-dessous; de plus deux composés sont égaux si, et seulement si, l'égalité figure parmi les relations suivantes:

- (1) $u_0 = a \cdot i = b \cdot i,$
- (2) $g_1 = a \cdot v_1 = b \cdot v_2, g_2 = a \cdot v_2 = a \cdot k, g_3 = b \cdot v_1 = b \cdot k,$
- (3) $u = v_1 \cdot v(u, i, a) = v_2 \cdot v(i, b, u), g_4 = i \cdot a = v_2 \cdot v(u, i, a), g_5 = i \cdot b = v_1 \cdot v(i, b, u),$
- (4) $k \cdot v(u, i, a) = u = k \cdot v(i, b, u),$
- (5) $g_6 = v_2 \cdot w_1 = v_1 \cdot w_2, g_7 = k \cdot w_1 = v_1 \cdot k_1, g_8 = v_2 \cdot w_2 = v_2 \cdot k_1,$
 $g_9 = k \cdot w_2 = v_2 \cdot k_2, g_{10} = v_1 \cdot w_1 = v_1 \cdot k_2,$
- (6) $g_{11} = k \cdot k_1 = k \cdot k_2.$

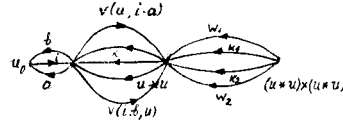


Fig. 3

Ainsi $U_{\mathcal{F}}$ est engendré par $[U_1]$ et une relation, i. e. c'est un quotient d'un sous-graphe multiplicatif de la catégorie libre des chemins associée à $[U_1]$.

Soit $\gamma = (H, \mu, H')$ un triplet formé d'une catégorie H' , d'une classe H' de monomorphismes de H' et d'une application produit fibré naturalisé fini μ sur H' [1, déf. 10-IV]. Désignons par $\mathcal{F}(\gamma)_0$ la classe des néofoncteurs F de $U_{\mathcal{F}}$ vers H' vérifiant les conditions suivantes:

- 1° $F(i) \in H',$
- 2° $((F(a), F(v_1)), (F(b), F(v_2))) = \mu(F(a), F(b)),$
- 3° $((F(v_2), F(w_1)), (F(v_1), F(w_2))) = \mu(F(v_2), F(v_1)).$

On montre que deux éléments F et F' de $\mathcal{F}(\gamma)_0$ ayant mêmes restrictions à l'ensemble $\{a, b, i, k\}$ sont égaux. Un élément de $\mathcal{F}(\gamma)_0$ est appelé *catégorie γ -structurée*. En particulier, supposons $\gamma_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}^i)$, où $\mu_{\mathfrak{M}}$ est l'application produit fibré naturalisé canonique sur $\mathfrak{M}$ (i. e. on a

$$\mu_{\mathfrak{M}}(f_1, f_2) = ((f_1, v_1), (f_2, v_2)),$$

si f_i sont deux applications de même but et si v_i est la restriction de la projection canonique du produit $\alpha(f_1) \times \alpha(f_2)$ vers $\alpha(f_i)$ à la classe des

couples (x_1, x_2) tels que $f_1(x_1) = f_2(x_2)$. Soit $\mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, U_{\mathcal{F}}) \boxplus$ des transformations naturelles ayant $\mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})_0$ pour classe de ses unités. On montre que $\mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})$ est isomorphe à la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs, l'isomorphisme associant à $F \in \mathcal{F}(\eta_{\mathfrak{M}})_0$ la catégorie $C = (F(u), F(k))$.

Si p est un foncteur d'homomorphismes saturé de H vers $\mathfrak{M}$, résolvant à droite et à produits finis [1, déf. 19-II, 8-III, 6-IV] et si $\eta = (H, \mu, p(\mathfrak{M}))$ où μ est l'application produit fibré naturalisé sur H appliquée par p sur $\mu_{\mathfrak{M}}$ [1, déf. 3-IV], on prouve que la catégorie $\mathcal{F}(p)$ des foncteurs p -structurés est isomorphe à $\mathcal{F}(\eta)$ (voir [3]), ce qui justifie la terminologie.

Remarque. L'esquisse d'une catégorie définie dans [3] est légèrement différente de celle construite ici, l'axiome d'associativité n'étant pas „représenté“ de la même façon. Les structures associées aux deux esquisses (i. e. les catégories) s'identifient, car les deux esquisses déterminent le même type (voir plus loin).

Pour définir d'une manière générale les notions d'esquisse et de structure associée, il nous faudra utiliser certains résultats sur la complétion des graphes multiplicatifs.

3. Complétion d'une base de catégorie

Dans la fin de cet article, nous désignons par $\mathfrak{M}_0$ et par $\hat{\mathfrak{M}}_0$ deux univers tels que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et $\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$, par $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$, par $\mathfrak{U}'$ et $\hat{\mathfrak{U}}'$, par $\mathcal{F}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ respectivement les catégories pleines d'applications, les catégories des néofoncteurs et les catégories des foncteurs correspondant à $\mathfrak{M}_0$ et à $\hat{\mathfrak{M}}_0$.

Soit U un graphe multiplicatif. À U est associée „universellement“ une catégorie $N(U)$ et un néofoncteur $\nu(U)$ de U vers $N(U)$ vérifiant la condition: Si F est un néofoncteur de U vers une catégorie C , il existe un et un seul foncteur $\bar{F}$ de $N(U)$ vers C tel que $F = \bar{F} \cdot \nu(U)$. Autrement dit: $\nu(U)$ est un $(\mathcal{F}, \mathfrak{U}')$ -projecteur, si $U \in \mathfrak{U}'_0$ [1, théorème 10-III].

Définition. Si $\nu(U)$ est injectif, on dira que U est une base de catégorie.

Dans ce cas, on identifie U à un sous-graphe multiplicatif de $N(U)$. Les bases de catégories sont les sous-graphes multiplicatifs des catégories.

a) Complétion $\mathcal{J}$ -projective

Nous partons d'une partie $\mathcal{J}$ de la classe $\mathcal{F}_0$ telle que $\mathcal{J}$ appartienne à la saturante $\hat{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{J}} \cdot \mathfrak{M} \cdot \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ [1, déf. 16-I] de $\mathfrak{M}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$. Soit $\mathfrak{S}'_0 = \mathfrak{S}'_0(\mathcal{J})$ la classe des couples (U, μ) , où $U \in \mathfrak{U}'_0$ et où μ est une surjection asso-

çant à certains néofoncteurs Φ de $I \in \mathcal{I}$ vers U une transformation naturelle $\mu(\Phi)$ définie par un triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, où $\hat{e}$ note le néofoncteur „constant“ sur $e \in U_0$. Soit $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\cdot)$ la classe des triplets

$$\bar{F} = ((\bar{U}, \bar{\mu}), f, (U, \mu))$$

vérifiant les conditions:

1° On a $(U, \mu) \in \mathcal{S}'_0$ et $(\bar{U}, \bar{\mu}) \in \mathcal{S}'_0$;

2° $F = (\bar{U}, f, U) \in \mathcal{U}'$; si $\mu(\Phi)$ est défini, $\bar{\mu}(F, \Phi)$ est défini et [1, prop. 46-II]

$$\bar{\mu}(F, \Phi) = F\mu(\Phi) = \bigoplus F, \mu(\Phi).$$

$\mathcal{S}'$ est une catégorie pour la loi de composition

$$((\bar{U}, \bar{\mu}), f', (\bar{U}', \bar{\mu}')) \cdot ((\bar{U}, \bar{\mu}), f, (U, \mu)) = ((\bar{U}, \bar{\mu}), f'f, (U, \mu))$$

si, et seulement si, $\bar{U}' = \bar{U}$ et $\bar{\mu}' = \bar{\mu}$. Nous identifions $\mathcal{S}'_0$ à la classe des unités de $\mathcal{S}'$. Soit $p^{\mathcal{I}}$ le foncteur de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{U}'$ associant F à $\bar{F}$.

$\mathcal{S}'$ admet pour sous-catégorie pleine la catégorie $\mathcal{F}'^{\mathcal{I}}$ dont les unités sont les couples $(U, \mu) \in \mathcal{S}'_0$ tels que $U \in \mathcal{F}_0$ et que μ soit une application $\mathcal{I}$ -limite projective partielle sur U . Ceci signifie que, si $\tau(\Phi)$ est défini par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, alors e est une limite projective de Φ et la projection canonique de e vers $\Phi(i)$ est $\tau(i)$ pour tout $i \in \alpha(\Phi)_0$. Soit $\mathcal{F}'^{\mathcal{I}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}'^{\mathcal{I}}$ ayant pour unités les couples $(U, \mu) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{I}}$ tels que μ soit une application $\mathcal{I}$ -limite projective (totale) sur U , c'est-à-dire tels que $\mu(\Phi)$ soit défini pour tout néofoncteur Φ de $I \in \mathcal{I}$ vers U . Soient $p'^{\mathcal{I}}$ et $p^{\mathcal{I}}$ les foncteurs de $\mathcal{F}'^{\mathcal{I}}$ et de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ respectivement vers $\mathcal{U}'$ restrictions de $p^{\mathcal{I}}$.

Proposition 1. $p^{\mathcal{I}}$ est un foncteur fidèle à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives, $\mathcal{F}'^{\mathcal{I}}$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ sont des sous-catégories saturées de $\mathcal{S}'$, et les foncteurs $(\mathcal{S}', \iota, \bar{p}'^{\mathcal{I}})$ et $(\mathcal{S}', \iota, \bar{p}^{\mathcal{I}})$ sont à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 20 [2].

Soit $p_{\mathcal{U}'}$ le foncteur canonique de $\mathcal{U}'$ vers $\mathcal{R}$ et posons

$$q'^{\mathcal{I}} = p_{\mathcal{U}'} \cdot p'^{\mathcal{I}} \quad \text{et} \quad q^{\mathcal{I}} = p_{\mathcal{U}'} \cdot p^{\mathcal{I}}.$$

Désignons par $\hat{\mathcal{S}}'$, par $\hat{\mathcal{F}}'^{\mathcal{I}}$ et par $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}}$ les catégories, par $Q'^{\mathcal{I}}$ et par $Q^{\mathcal{I}}$ les foncteurs, obtenus de même à partir de l'univers $\mathfrak{M}_0$. Soit $X'^{\mathcal{I}}$ la classe des $Q'^{\mathcal{I}}$ -monomorphismes [1, déf. 5-III] $((H, \mu), f, (C, \mu'))$ tels que $f(C)$ soit une sous-catégorie de H stable pour μ , i. e. vérifiant la condition:

Si $\mu(\Phi)$ est défini par $(\Phi, \tau_\Phi, \hat{e})$ et si le néofoncteur Φ de I vers H applique I dans $f(C)$, on a $\tau_\Phi(i) \in C$ pour tout $i \in I_0$; si de plus Ψ est une transformation naturelle définie par $(\Phi, \psi, \hat{e}')$ où $\Psi(I_0) \subset f(C)$, on a $\lim^\mu \Psi \in f(C)$, en notant $\lim^\mu \Psi$ l'unique $h \in H$ tel que $\tau_\Phi(i) \cdot h = \psi(i)$ pour tout i .

Théorème 1. *Le foncteur Q'^J est $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_0, X^J, \mathcal{F}^{J'})$ -engendrant et les foncteurs Q^J et Q'^J sont $\frown$ -engendrants pour $\mathfrak{M}$ [2, déf. 2-I].*

Preuve. Soient $(H, \mu) \in \mathcal{F}_0^{J'}$ et K une partie de H appartenant à $\mathfrak{M}$. L'intersection de toutes les sous-catégories de H stables pour μ et contenant K est notée $\hat{K}$; évidemment $\hat{K}$ est stable pour μ , et la $(X^J, \mathcal{F}^{J'})$ -sous-structure de (H, μ) engendrée [2, déf. 2-I] par K est $(\hat{K}, \hat{\mu})$, où $\hat{\mu}$ est l'application „induite“ par μ sur $\hat{K}$. On montre que $\hat{K} \in \mathfrak{M}$, en construisant $\hat{K}$ par récurrence transfinie. Cette construction est en tout point analogue à celle faite dans la démonstration du théorème 5 [2] (pour prouver que Q^J est $\frown$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$). La première affirmation en résulte. Comme $(\hat{K}, \hat{\mu})$ appartient à $\mathcal{F}_0^{J'}$ si $(H, \mu) \in \mathcal{F}_0^{J'}$, et comme tout Q'^J -monomorphisme appartient à X^J , il s'ensuit que Q'^J est $\frown$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$ (résultat démontré dans [2]). Enfin, Q'^J est $\frown$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$ en vertu de la proposition 12 [2], puisque Q'^J est à $\mathfrak{M}_0$ -produits fibrés et que $(\hat{K}, \hat{\mu})$ est une Q'^J -sous-structure de (H, μ) vérifiant $\hat{K} \in \mathfrak{M}$.

Théorème 2. *$\mathcal{S}'$ est une catégorie à $\mathcal{F}^{J'}$ -projections et une catégorie à $\mathcal{F}^J$ -projections [1, déf. 16-III].*

Preuve. Soit $\sigma = (U, \mu) \in \mathcal{S}'_0$. Posons $\mathcal{X} = \mathcal{F}^{J'}$ (resp. $= \mathcal{F}^J$) et $Y = \mathcal{X}_0 \cdot \mathcal{S}' \cdot \sigma$. La surjection associant (μ, f) à $((H, \mu), f, \sigma) \in Y$ définit une bijection de Y sur une partie de $\bigcup_{H \in \mathcal{F}_0} Y_H \times Y_H$, où

$$Y_H = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} (\boxminus H \cdot \mathcal{F} \cdot I) \cdot \mathfrak{M} \cdot (H \cdot \mathcal{F} \cdot I) \in \mathfrak{M}_0 \text{ et } Y'_H = H \cdot \mathfrak{M} \cdot U \in \mathfrak{M}_0.$$

Comme $\mathcal{F} \in \mathfrak{M}_0$ et que $\mathfrak{M}_0$ est un univers, on a $Y \in \mathfrak{M}_0$. Le foncteur $P^{J'}$ relatif à $\mathfrak{M}_0$ étant à $\mathfrak{M}_0$ -produits (d'après la proposition 1), il existe un produit

$$S = (\hat{H}, \hat{\mu}) = \coprod_{F \in Y} \beta(F) \text{ et } [F]_{F \in Y} = ((\hat{H}, \hat{\mu}), \hat{f}, \sigma)$$

dans $\mathcal{S}'$, et l'on a $S \in \mathcal{S}$. D'après le théorème 1, $\hat{f}(U) \in \mathfrak{M}$ engendre une

$(X'^J, \mathcal{K})$ -sous-structure $S' = (C', \hat{\mu}')$ de (H', μ) (à savoir C' est la sous-catégorie stable pour $\hat{\mu}$ engendrée par $\hat{f}(U)$), et il existe un $\bar{G} = (s, g, S') \in \mathcal{K}_0 \cdot \hat{\mathcal{K}}_Y$. Alors $\bar{J} = (S, \iota, S') \cdot \bar{G}^{-1}$ est $(Q'^J, X'^J, \mathcal{K})$ -engendré par $[F]_{F \in Y}$ et, *a fortiori*, $\bar{J}$ est $(P'^J, X'^J, \mathcal{K}_0, \mathcal{K})$ -engendré par $[F]_{F \in Y}$. Du théorème d'existence de structures libres [2, théorème 1] il résulte que s est une $(\mathcal{K}, \mathcal{S}')$ -projection de σ , car tout noyau dans $\mathcal{F}'^J$ appartient à X'^J .

Corollaire. p'^J admet un adjoint.

En effet, pour que (H', μ) soit une p'^J -structure libre engendrée par $U' \in \mathcal{K}_0$, il faut et il suffit que (H', μ) soit une $(\mathcal{F}'^J, \mathcal{S}')$ -projection de $(U', \emptyset)$, où $\emptyset$ est la surjection vide. Donc le corollaire résulte du théorème précédent.

Définition. Si $U' \in \mathcal{K}_0$, une p'^J -structure libre engendrée par U' est appelée une *complétion $\mathcal{J}$ -projective libre* de U' .

Théorème 3. Soit U' une base de catégorie. Alors U' admet une complétion $\mathcal{J}$ -projective libre (H', μ) telle que H' admette $N(U')$ pour sous-catégorie pleine et que le foncteur limite projective associé à μ soit injectif. H' est solution du problème universel du plongement, à une équivalence près, de U' dans une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives.

Preuve. $N(U')$ étant le plongement universel de U' dans une catégorie, la complétion $\mathcal{J}$ -projective de U' est identique à celle de $N(U')$, d'après le théorème 7-III [1] de transitivité des projections. Par suite la première affirmation se déduit du théorème 6 [2]. Soit $\mathcal{U}_\sim$ la catégorie quotient de $\mathcal{U}'$ par la relation d'équivalence $r: F \sim F'$ s'il existe une équivalence naturelle de F sur F' . Notons $\mathcal{F}_\sim$ et $\mathcal{F}'_\sim$ les sous-catégories de $\mathcal{U}_\sim$ dont les éléments sont les classes $F \bmod r$, où F est un foncteur et un foncteur à $\mathcal{J}$ -limites projectives respectivement. En vertu du théorème 8 [2], H' est une $(\mathcal{F}'_\sim, \mathcal{F}_\sim)$ -projection de $N(U')$; comme $N(U')$ est aussi une $(\mathcal{F}_\sim, \mathcal{U}_\sim)$ -projection de U' , il s'ensuit que H' est une $(\mathcal{F}'_\sim, \mathcal{U}_\sim)$ -projection de U' , ce qui précise la dernière affirmation.

b) Complétion $\mathcal{J}$ -projective et $\mathcal{J}'$ -inductive

Nous supposons que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ sont deux parties de $\mathcal{F}_0$ appartenant à la saturante $\widetilde{\mathcal{M}}$ de $\mathcal{M}$ dans $\widehat{\mathcal{M}}$.

Notons $\mathcal{S}_0^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ la classe des triplets (U', μ, μ') tels que :

1° $(U', \mu) \in \mathcal{S}_0' = \mathcal{S}_0'(\mathcal{J})$;

2° μ' est une surjection associant à certains néofoncteurs Φ de $I' \in \mathcal{J}'$ vers

U^* une transformation naturelle $\mu'(\Phi)$ définie par un triplet $(\hat{e}, \tau, \Phi)$, où $\hat{e} \in U_0$.

Si (U^*, μ, μ') vérifie ces conditions, soit μ'^* l'application associant au néofoncteur Φ^* dual de Φ la transformation naturelle $\mu'^*(\Phi^*)$ définie par $(\Phi^*, \tau, \hat{e})$, lorsque $\mu'(\Phi)$ est défini par $(\hat{e}, \tau, \Phi)$. Alors (U^*, μ'^*) appartient à la catégorie $\mathcal{S}'(\mathcal{J}'^*)$ construite à partir de la classe $\mathcal{J}'^*$ des catégories duales des éléments de $\mathcal{J}$. Soit $\mathcal{S}'^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets $\bar{F} = ((\bar{U}^*, \bar{\mu}, \bar{\mu}'), f, (U^*, \mu, \mu'))$ tels que

1° (U^*, μ, μ') et $(\bar{U}^*, \bar{\mu}, \bar{\mu}')$ appartiennent à $\mathcal{S}_0^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$;

2° $((\bar{U}^*, \bar{\mu}), f, (U^*, \mu)) \in \mathcal{S}'(\mathcal{J})$ et $((\bar{U}^*, \bar{\mu}'), f, (U^*, \mu')) \in \mathcal{S}'(\mathcal{J}^*)$.

Soit $p^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ son foncteur projection canonique vers $\mathcal{S}'$.

$\mathcal{S}'^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ admet pour sous-catégorie pleine la catégorie $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ (resp. $\mathcal{F}^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$) ayant pour unités les $(U^*, \mu, \mu') \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ tels que

$(U^*, \mu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ (resp. $\in \mathcal{F}^{\mathcal{J}'}$) et $(U^*, \mu'^*) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}'^*}$ (resp. $\in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}'^*}$);

pour un tel élément, on appelle μ' une application $\mathcal{J}'$ -limite inductive partielle (resp. inductive) sur U^* . Soit $q^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ le foncteur de $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ vers $\mathcal{M}$ associant $(\bar{U}, f, U)$ à $\bar{F}$ et soit $q^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ sa restriction à $\mathcal{F}^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$. Soient $Q^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ et $Q'^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ les foncteurs associés de même à l'univers $\mathcal{M}_0$. Nous désignons par $X^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ la classe des $Q^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ -monomorphismes de la forme $((H^*, \mu, \mu'), f, (C^*, \nu, \nu'))$, où $f(C)^*$ est une sous-catégorie de H^* stable pour μ et pour μ' . La classe $X^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'} \cap \mathcal{F}^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ est formée de tout les $Q'^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ -monomorphismes. Soit $p^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ le foncteur de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ vers $\mathcal{S}'$ restriction de $p^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$.

Théorème 4. $\mathcal{S}'^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ est une catégorie à $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ -projections et à $\mathcal{F}^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ -projections. Le foncteur $p^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ admet un adjoint. Si U^* est une base de catégorie, la $p^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ -structure libre $(\hat{H}^*, \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ engendrée par U^* est telle que U^* soit isomorphe à un sous-graphe multiplicatif de $\hat{H}^*$ et que $\hat{H}^*$ soit solution du problème universel du plongement de U^* , à une équivalence près, dans une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives et à $\mathcal{J}'$ -limites inductives.

1

Preuve. Si $\sigma = (H^*, \mu, \mu') \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}$ et si $K \subset H$ appartient à $\mathcal{M}$, on voit qu'il existe une $(X^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'}, \mathcal{F}'^{\mathcal{J}, \mathcal{J}'})$ -sous-structure $(\hat{K}^*, \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ de σ engendrée par K , où $\hat{K}^*$ est l'intersection de toutes les sous-catégories de H^* contenant K et stables pour μ et pour μ' . En construisant $\hat{K}^*$ par récurrence transfinie comme dans la démonstration du théorème 12 [2], on obtient

$\hat{K} \in \hat{\mathfrak{M}}$. Il s'ensuit que $Q^{J, J'}$ est un foncteur $(\hat{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}_0, X^{J, J'}, \mathfrak{F}^{J, J'})$ -engendrant et que $Q^{J, J'}$ est $\wedge$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$. La première affirmation se prouve d'une façon analogue au théorème 2, à l'aide du théorème d'existence de structures libres et en utilisant le fait que $Q^{J, J'}$ et $Q^{J', J'}$ sont des foncteurs à $\mathfrak{F}_0$ -limites projectives. Les autres affirmations se déduisent des théorèmes 13 et 14 [2], appliquées à $N(U^*)$.

Remarque. Les résultats du § 3a) peuvent être déduits du § 3b), en identifiant $(U^*, \mu) \in \mathfrak{S}_0'(J)$ à $(U^*, \mu, \emptyset) \in \mathfrak{S}_0'(J, J')$, où $\emptyset$ désigne la surjection vide.

4. Type et prototype d'une esquisse

Les notations sont celles du § 3. On suppose encore que J et J' sont des parties de $\mathfrak{F}_0$ appartenant à la saturante $\hat{\mathfrak{M}}$ de $\mathfrak{M}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$.

Définition. Si $\sigma = (U^*, \mu, \mu') \in \mathfrak{S}_0'(J, J')$ et si U^* est une base de catégorie, on appelle σ une *préesquisse J -projective et J' -inductive*, ou une *(J, J') -préesquisse*. Une $(\mathfrak{K}, \mathfrak{S}^{J, J'})$ -projection de σ est appelée *(J, J') -prototype de σ* si $\mathfrak{K} = \mathfrak{F}^{J, J'}$ (resp. (J, J') -type de σ , si $\mathfrak{K} = \mathfrak{F}^{J, J'}$).

Le prototype et le type de σ sont définis à un isomorphisme près. Si $\sigma \in \mathfrak{F}^{J, J'}$ son (J, J') -prototype est identique à σ ; par suite les éléments de $\mathfrak{F}^{J, J'}$, seront appelés des (J, J') -prototypes et ceux de $\mathfrak{F}^{J, J'}$ des (J, J') -types.

Soit $\sigma = (U^*, \mu, \mu')$ une (J, J') -préesquisse et $\nu(U^*)$ le néofoncteur injectif de U^* vers $N(U^*)$. Soit $\lambda = \mu$ (resp. $= \mu'$); désignons par $\bar{\lambda}$ la surjection obtenue en associant $\coprod \nu(U^*) \cdot \bar{\lambda}(\Phi)$ à tout Φ tel que $\bar{\lambda}(\Phi)$ soit défini. On voit que $N(\sigma) = (N(U^*), \bar{\mu}, \bar{\mu}')$ est une (J, J') -préesquisse, qui admet même (J, J') -prototype et même (J, J') -type que σ .

Théorème 5. Soit $\sigma = (U^*, \mu, \mu')$ une (J, J') -préesquisse et $\tilde{\sigma} = (\tilde{H}^*, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}')$ un (J, J') -type de σ . Alors $\tilde{\sigma}$ est une $q^{J, J'}$ -structure quasi-quotient d'une $p^{J, J'}$ -structure libre $\hat{\sigma} = (\hat{H}^*, \hat{\mu}, \hat{\mu}')$ engendrée par U^* . Si σ est un (J, J') -prototype, U^* s'identifie à une sous-catégorie de $\tilde{H}^*$.

Preuve. La première affirmation se démontre par un raisonnement analogue à celui utilisé pour prouver le théorème 15 [2]. D'après le théorème 4, U^* peut être identifié à un sous-graphe multiplicatif de $\tilde{H}^*$. Dans ce cas, $\tilde{\sigma}$ est la $q^{J, J'}$ -structure quasi-quotient de $\hat{\sigma}$ par la relation d'équivalence engendrée par la classe des couples $(\tau_\Phi(i), \hat{\tau}_\Phi(i))$, où $\mu(\Phi)$ (resp. $\mu'(\Phi)$) est défini par le triplet $(\Phi, \tau_\Phi, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \tau_\Phi, \Phi)$) où $i \in \alpha(\Phi)_0$.

et $\hat{\mu}(\Phi)$ (resp. $\hat{\mu}'(\Phi)$) est défini par le triplet $(\hat{\Phi}, \hat{\tau}_\Phi, \hat{e})$ (resp. $(\hat{e}, \hat{\tau}_\Phi, \hat{\Phi})$). La deuxième affirmation est une conséquence du théorème 15 [2].

Soit $\sigma = (U, \mu, \mu')$ une $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -préesquisse, $\check{\sigma} = (\check{U}, \check{\mu}, \check{\mu}')$ son $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -prototype et $\tilde{\sigma} = (\tilde{H}, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}')$ son $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -type. Le type de $\check{\sigma}$ est isomorphe à $\tilde{\sigma}$ et $\check{U}$ peut être identifié à une sous-catégorie de $\tilde{H}$ d'après le théorème 5. Mais si $G = (\sigma, g, \sigma)$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}, \mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'})$ -projecteur, en général g n'est pas injective. On est conduit à considérer les préesquisses particulières telles que g soit une injection, c'est-à-dire telles que U s'identifie à un sous-graphe multiplicatif de $\check{U}$ (et par suite de $\tilde{H}$); dans ce cas, nous dirons que U s'identifie à un sous-graphe multiplicatif de σ .

Définition. On appelle $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -esquisse un couple (σ, M) vérifiant les conditions :

- 1° $\sigma = (U, \mu, \mu')$ est une $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -préesquisse et $M \subset U$;
2. U s'identifie à un sous-graphe multiplicatif de son $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -prototype.

Soit $\mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ la catégorie des morphismes entre $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -esquisses, dont les éléments sont les triplets $F = ((\sigma', M'), f, (\sigma, M))$ tels que

$$i(F) = (\sigma', f, \sigma) \in \mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'} \text{ et } f(M) \subset M'.$$

Soient $\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ les sous-catégories pleines de $\mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ ayant pour unités les $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -types et les $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -prototypes pointés respectivement, i. e. les $(\sigma, M) \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ tels que $\sigma \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ et $\sigma \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$. Des théorèmes précédents, on déduit :

Théorème 6. $(\mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}, i, \mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'})$ est un foncteur à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives et à $\mathcal{F}_0$ -limites inductives. $\mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ est une catégorie à $\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ -projections et à $\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ -projections. 1¶

On peut choisir deux foncteurs $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}, \mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'})$ -projection T' et $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}, \mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'})$ -projection T de sorte que, si $(\sigma, M) \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ et $\sigma = (U, \mu, \mu')$, on ait :

- 1° $T'(\sigma, M) = ((\check{U}, \check{\mu}, \check{\mu}'), M)$ et $T(\sigma, M) = ((\tilde{H}, \tilde{\mu}, \tilde{\mu}'), M)$;
- 2° U est un sous-graphe multiplicatif de $\check{U}$ et $\check{U}$ une sous-catégorie de $\tilde{H}$;
- 3° $T(T'(\sigma, M)) = T(\sigma, M)$.

Définition. $T'(\sigma, M)$ et $T(\sigma, M)$ sont respectivement appelés $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -prototype et $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -type pointés de (σ, M) . 2

Remarque. Une esquisse (σ, M) telle que $\sigma = (U, \mu, \emptyset)$, où $\emptyset$ est la surjection vide, peut être appelée esquisse $\mathcal{I}$ -projective et représentée

par le couple $((U^*, \mu), M)$. Les esquisses algébriques projectives auxquelles un type a été associé dans [4] correspondent aux esquisses $\mathcal{I}$ -projectives (en ce sens) $\bar{\sigma} = (\sigma, M)$ telles que $N(\sigma)$ soit un $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -prototype et que M soit formée de monomorphismes.

Supposons donné un $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -type pointé $\sigma(H^*) = ((H^*, \mu_H, \mu'_H), M_H)$ et une $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -esquisse $\bar{\sigma} = (\sigma, M)$, où $\sigma = (U^*, \mu, \mu')$.

Définition. On appelle $\bar{\sigma}(H^*)$ -structure d'espèce $\bar{\sigma}$ un néofoncteur F de U^* vers H^* tel que $(\bar{\sigma}(H^*), F, \bar{\sigma}) \in \mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$. Si $\bar{\sigma}(\mathfrak{M}) = ((\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}}, \mu'_{\mathfrak{M}}), \mathfrak{M}^c)$, où $\mu_{\mathfrak{M}}$ et $\mu'_{\mathfrak{M}}$ sont les applications $\mathcal{I}$ -limite projective et $\mathcal{I}'$ -limite inductive usuelles sur la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications, une $\bar{\sigma}(\mathfrak{M})$ -structure d'espèce $\bar{\sigma}$ sera appelée *structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}$* .

Soit $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^*), \bar{\sigma})$ la catégorie des morphismes entre $\bar{\sigma}(H^*)$ -structures d'espèce $\bar{\sigma}$, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathfrak{N}(H^*, U^*)^{\square}$ des transformations naturelles ayant pour objets les $\bar{\sigma}(H^*)$ -structures d'espèce $\bar{\sigma}$. On définit un foncteur fidèle Σ de $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^*), \bar{\sigma})$ vers la catégorie produit $(H^*)^{U^*}$ en associant à la transformation naturelle $\Gamma \in \mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^*), \bar{\sigma})$ définie par le triplet (F', γ, F) la famille $(\gamma(u))_{u \in U^*}$.

Théorème 7. Si l'application somme de $\alpha^{\square} \mu$ et de $\beta^{\square} \mu'$ est injective et si M_H est saturée dans H^* (i. e. si $H^*_{\gamma} \cdot M_H \cdot H^*_{\gamma} \subset M_H$), les catégories $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^*), \bar{\sigma})$ et $\mathcal{S}(\bar{\sigma}_1(H^*), \bar{\sigma})$ sont isomorphes pour tout $\bar{\sigma}_1(H^*)$ de la forme $((H^*, \mu_1, \mu'_1), M_H) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$. Les catégories $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^*), \bar{\sigma})$, $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^*), T'(\bar{\sigma}))$ et $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H^*), T(\sigma))$ sont toujours isomorphes.

La dernière affirmation résulte du théorème 6. Nous ne démontrerons pas la première affirmation.

5. Cas particuliers. Problèmes

1° Supposons $\mathcal{I} = \mathcal{I}' = \emptyset$. Comme $\mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ s'identifie à $\mathfrak{U}'$ et que $\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{I}'}$ s'identifient alors à $\mathcal{F}$, une $(\emptyset, \emptyset)$ -esquisse s'identifie à un couple $\bar{\sigma} = (U^*, M)$ d'une base de catégorie U^* et d'une partie M de U . Ainsi, avec les notations du § 1, le couple $\bar{\sigma}_{\mathcal{G}} = (U_{\mathcal{G}}, \{i\})$ est une telle esquisse. Les structures algébriques d'espèce $\sigma_{\mathcal{G}}$ s'identifient aux graphes.

2° Supposons que $\mathcal{I}'$ soit la classe vide et que $\mathcal{I}$ soit la classe formée de la catégorie discrète I^0 ayant deux unités 1 et 2. Soit U_m^* la catégorie ayant deux unités u et $u \times u$ et trois morphismes k , p_1 et p_2 de source $u \times u$ et de but u . Soit $\sigma_m = (U_m^*, \mu)$, où $\mu(\Phi)$ existe pour le seul foncteur Φ de I^* vers U_m^* constant sur u , le triplet définissant $\mu(\Phi)$ étant

$(\Phi, \tau, u \times u)$, avec $\tau(i) = p_i$ pour $i = 1$ et 2 . On voit que σ_m est un $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -prototype (mais non un $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -type). Une structure algébrique d'espèce $(\sigma_m, \emptyset)$ s'identifie à un magma (= classe munie d'une loi de composition partout définie). Plus généralement tout type au sens de [7] est un $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -type.

3° Supposons encore $\mathcal{I}' = \emptyset$ et $\mathcal{I} = \{I^0\}$, où $I = \{1, 2\}$. À partir de la catégorie $U_{\mathcal{I}}$ du § 1, on définit comme dans l'exemple précédent l'application μ et l'on obtient une $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -esquisse $\bar{\sigma}_{\mathcal{I}} = (U_{\mathcal{I}}, \mu, \{i\})$. Une structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}_{\mathcal{I}}$ s'identifie à une classe multiplicative.

4° Soit I la catégorie ayant trois unités $0, 1$ et 2 et deux morphismes d_1 et d_2 de source 0 , de but 1 et 2 respectivement. Supposons $\mathcal{I} = \{I\}$ et $\mathcal{I}' = \emptyset$. On définit une $(\mathcal{I}, \mathcal{I}')$ -esquisse $\bar{\sigma}_{\mathcal{I}} = (U_{\mathcal{I}}, \mu_{\mathcal{I}}, \{i\})$ comme suit : soient Φ_1 et Φ_2 les néofoncteurs de I vers $U_{\mathcal{I}}$ tels que $\Phi_1(d_1) = a$, $\Phi_1(d_2) = b$, $\Phi_2(d_1) = v$, $\Phi_2(d_2) = w$; soit $\mu(\Phi_i)$ la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi_i, \tau_i, \hat{e}_i)$, où $\tau_1(j) = v_j$ et $\tau_2(j) = w_j$ pour $j = 1$ et 2 . Une structure algébrique d'espèce $\bar{\sigma}_{\mathcal{I}}$ s'identifie à une catégorie (voir § 1).

5° Les quasi-catégories (resp. les catégories non associatives) [3] sont les structures algébriques d'espèce $\bar{\sigma}$, l'esquisse $\bar{\sigma}$ étant la sous-esquisse de $\bar{\sigma}_{\mathcal{I}}$ obtenue en supprimant de $U_{\mathcal{I}}$ les éléments $v(i, b, u)$ et $v(u, i, a)$ (resp. tous les morphismes de source $(u \times u) \times (u \times u)$). D'une façon analogue, on peut construire des esquisses dont les structures n -aires (définies dans [6]) sont des réalisations.

Ces exemples montrent que les structures algébriques usuelles peuvent être définies comme des structures algébriques au sens précis indiqué plus haut. Par suite, on obtient une méthode de construction des structures de même espèce „relatives à une catégorie H “ (exemple : les catégories η -structurées du § 1).

Nous n'avons pas la place d'étudier ici les propriétés catégoriques des structures d'espèce $\bar{\sigma}$. Dans un prochain article nous considérerons les problèmes suivants :

1° Construction et étude d'un foncteur „d'oubli“ de $\mathcal{S}(\bar{\sigma}(H), \bar{\sigma})$ vers $\mathcal{M}$, qui est $\mathcal{S}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$ et à limites projectives (généralisant les résultats de [4]). Autres foncteurs d'oubli obtenus en „isolant“ certaines unités de U . Application à l'existence de structures quasi-quotient et de problèmes universels.

2° Définition d'esquisses „minimales“ ayant même type qu'une esquisse donnée ; ceci conduit à la notion d'idée d'une structure, qui précise les idées définies dans [3] : l'idée d'une catégorie est formée des éléments a, b, k, i .

3° Comparaison des structures d'espèce $\bar{\sigma}$ et d'espèce $\bar{\sigma}'$, où $\bar{\sigma}'$ est une sous-esquisse de $\bar{\sigma}$: ceci mène à des théorèmes de projections entre structures de diverses espèces, analogues aux théorèmes de projections entre structures n -aires considérés dans [5].

1+

Reçu le 26 X 1967

Faculté de Sciences, Paris,
France

BIBLIOGRAPHIE

1. Ehresmann C., *Catégories et Structures*. Dunod, Paris, 1965.
2. — *Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints*. Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, **IX**, Paris, Dunod, 1967, pp. 33—181.
3. — *Introduction to the Theory of structured Categories*. University of Kansas, Technical Report 10, 1966, 95 pp.
4. — *Sur les structures algébriques*. C. R. Ac. Sci., Paris, **264**, série A, 1967 (sous presse).
- 2 5. — *Problèmes universels relatifs aux catégories n -aires*. C. r. Ac., Paris, 1967, **264**, série A, p. 273.
- 3 6. Topentcharov V., *Éléments d'une théorie de catégories*. C. r. Ac. Sci., Paris, 1967, **264**, p. 269.
7. Bénabou J., *Structures algébriques dans les catégories*. Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, **IX**, Paris, Dunod, 1967.

SCHIȚĂRI ȘI TIPURI DE STRUCTURI ALGEBRICE

(Rezumat)

Se arată modul în care teoremele de completare [2] ale unei categorii prin adjuncția unor limite proiective și inductive pot fi utilizate pentru construirea anumitor structuri, numite „algebrice“, care cuprind de exemplu structurile algebrice uzuale (definite de legile de compoziție peste tot definite) precum și cele definite de legi de compoziție parțiale (clase multiplicative, cvasi-categorii, categorii etc.).

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

/ 107 /

DISSERTATIONES
MATHEMATICAE
(ROZPRAWY MATEMATYCZNE)

KOMITET REDAKCYJNY

KAROL BORSUK redaktor
BOGDAN BOJARSKI, ANDRZEJ MOSTOWSKI,
MARCELI STARK, STANISŁAW TURSKI

LXIV

CH. EHRESMANN

**Prolongements universels d'un foncteur
par adjonction de limites**

WARSZAWA 1969

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	5
0. Conventions	7
1. Foncteurs K' -étalements et K' -résolvants à droite	10
2. Construction d'un prolongement K' -étalant d'un foncteur	18
3. Prolongement minimal d'un foncteur en un foncteur K' -étalant	25
4. Cas des foncteurs vers une catégorie d'applications	29
5. Prolongement d'un foncteur en un foncteur à limites projectives	34
6. Prolongement minimal d'un foncteur en un foncteur à limites projectives	40
7. Plongement minimal d'une catégorie dans une catégorie à limites projectives	48
8. Prolongements maximaux d'un foncteur	58
Bibliographie	67
Index des notations	68
Index de la terminologie	69

INTRODUCTION

Soit p un foncteur d'une catégorie H vers une catégorie K ; une unité de H est alors appelée une p -structure. Nous dirons que p est un „bon” foncteur s'il est fidèle et si sa restriction au groupoïde des éléments inversibles de H est bien fidèle (i.e. si, pour toute p -structure s , la restriction p_s de p à la classe des inversibles de H de source s est injective). En particulier il en est ainsi pour les foncteurs d'oubli usuels vers la catégorie des applications, car ce sont des foncteurs d'homomorphismes saturés (i.e. des bons foncteurs tels que p_s soit une bijection sur la classe des inversibles de K de source $p(s)$ pour toute p -structure s).

Beaucoup de résultats faisant intervenir le foncteur p (par exemple les critères d'existence de p -structures libres (théorème 1 [4]), de p -quasi-surjections ou de limites inductives dans p (théorème 2 [4]), la condition suffisante pour que p soit propre pour la quasi-cohomologie (théorème 4 [4]) ou, lorsque K est la catégorie des applications, les théorèmes d'existence de catégories p -structurées quasi-quotient (théorème 1-3 [2], etc ...) supposent que p est la restriction d'un foncteur à limites projectives d'un certain type (noyaux, produits finis ou non, ...); de plus ces résultats se précisent si p admet „assez” de p -sous-structures (en particulier si p est $\lceil$ -étalant). Bien que ces propriétés soient vérifiées par un grand nombre de foncteurs d'oubli usuels (foncteur d'oubli de la catégorie des applications continues ou ordonnées, de la catégorie des foncteurs, de la catégorie des homomorphismes entre structures algébriques d'un certain type [5], ...), des exceptions notables se présentent, tel le foncteur d'oubli de la catégorie des applications r fois différentiables, qui n'est pas à noyaux. Il est donc naturel de chercher si l'on peut prolonger un bon foncteur p en un bon foncteur P de même but K , en ajoutant à H „assez” de limites projectives compatibles avec P ou „assez” de P -sous-structures. Exprimons ce problème en termes précis.

Si K' est une sous-catégorie de K , disons que p est K' -étalant si toute p -structure appliquée par p sur le but d'un élément k' de K' est but d'une p -injection [1] $\bar{k}'$ telle que $p(\bar{k}') = k'$. Si $\mathcal{J}$ est une classe de catégories, appelons application $\mathcal{J}$ -limite projective multiforme partielle sur K une surjection μ associant à tout foncteur φ de $I\epsilon\mathcal{J}$ vers K une classe (éventuellement vide) de limites projectives naturalisées de but φ (i.e. de transformations naturelles d'un foncteur constant sur une unité e de K

vers q , définissant e comme limite projective de q); le foncteur p est dit μ -compatible s'il existe une application $\mathcal{J}$ -limite projective multiforme partielle $\bar{\mu}$ sur H telle que, pour tout foncteur Φ de $I \in \mathcal{J}$ vers H et tout $\theta \in \mu(p \cdot \Phi)$, il existe un $\theta \in \bar{\mu}(\Phi)$ appliqué par p sur θ . Remarquons que, si K est à $\mathcal{J}$ -limites projectives (i.e. si tout foncteur q de $I \in \mathcal{J}$ vers K admet une limite projective) et si $\mu(q)$ a au moins un élément pour tout q , un foncteur μ -compatible est à $\mathcal{J}$ -limites projectives, c'est-à-dire il est compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives et sa source est une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives. Nous étudierons les *problèmes de prolongement d'un bon foncteur*:

Etant donné un bon foncteur p de H vers K , peut-on prolonger „canoniquement” p en un bon foncteur P vers K qui soit K' -étalant ou μ -compatible? Nous montrerons que ces problèmes admettent à la fois des solutions „maximales” (théorème 10) et des solutions „minimales”. Les prolongements K' -étalants optimaux de p sont construits explicitement (théorèmes 2 et 3, proposition 13); le prolongement μ -compatible minimal est obtenu par récurrence transfinie, en utilisant la construction d'un prolongement K' -étalant minimal d'un certain foncteur (théorèmes 5 et 6). Si K est une catégorie d'applications et si p est le foncteur associé à un générateur a de H , les sources des prolongements minimaux de p admettent a pour générateur et sont isomorphes à des sous-catégories pleines de la catégorie $\mathfrak{N}$ des transformations naturelles entre foncteurs de la duale H^* de H vers K (théorèmes 4 et 7).

Ces résultats suggèrent de revenir à l'étude du *problème de la complétion d'une catégorie*:

Plonger canoniquement une catégorie H dans une catégorie $\hat{H}$ à $\mathcal{J}$ -limites projectives, le foncteur injection canonique de H vers $\hat{H}$ étant compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives.

Ce problème a été abordé par plusieurs auteurs⁽¹⁾. La plupart (entre autres [7], [8], [9]) ont proposé comme solution „intuitivement canonique” la sous-catégorie (ou la sous-catégorie pleine) $\mathfrak{N}_{\mathcal{J}}$ de $\mathfrak{N}$ stable par $\mathcal{J}$ -limites projectives engendrée par la sous-catégorie de $\mathfrak{N}$ canoniquement isomorphe à H . Nous montrerons dans le § 8 que ce point de vue est justifié, car l'on obtient ainsi une solution „minimale à une équivalence près”: Si $\hat{C}$ est une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives, si C est une sous-catégorie pleine de $\hat{C}$ telle que $\hat{C}$ soit la sous-catégorie (resp. la sous-catégorie pleine) de $\hat{C}$ stable par $\mathcal{J}$ -limites projectives engendrée par C et si F est un *isomorphisme* de C sur H , alors F s'étend en un foncteur de $\hat{C}$ vers $\mathfrak{N}_{\mathcal{J}}$ compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives, deux tels prolongements de F étant équivalents (ce qui s'exprime par le fait que $(\mathfrak{N}_{\mathcal{J}}, H)$ est une structure colibre pour un certain foncteur).

⁽¹⁾ Voir dans [4] la bibliographie correspondante.

Rappelons qu'il existe aussi des solutions „maximales à une équivalence près” du problème de la $\mathcal{I}$ -complétion de H et des solutions „maximales à un isomorphisme près” du problème plus précis [4] de la complétion de (H, ν) :

Une application $\mathcal{I}$ -limite projective partielle ν étant donnée sur H , 1
plonger H dans une catégorie $\hat{H}$ à $\mathcal{I}$ -limites projectives, de sorte que ν s'étende en une application $\mathcal{I}$ -limite projective $\hat{\nu}$ sur $\hat{H}$.

Dans ce cas, le mot „maximal” signifie que, si μ est une application $\mathcal{I}$ -limite projective sur une catégorie K et si p est un foncteur de H vers K appliquant ν dans μ , alors p s'étend d'une manière unique en un foncteur P de $\hat{H}$ vers K appliquant $\hat{\nu}$ dans μ . Toutefois, si p est un bon foncteur, P n'est pas un bon foncteur, et par suite ne constitue pas une solution du problème du prolongement de p que nous considérons dans le présent travail.

Tous les résultats sont énoncés dans le cas de limites projectives. Par dualité, on en déduirait des théorèmes de prolongement optimal d'un bon foncteur en un bon foncteur à $\mathcal{I}$ -limites inductives.

0. CONVENTIONS

Les notations et terminologie sont celles de [1]. Une catégorie (C, κ) est désignée par C^* , où $\cdot$ est le symbole de la loi de composition κ ; la classe de ses unités est C_0^* , ses applications source et but α et β , le groupoïde de ses éléments inversibles C_γ^* et sa duale C^* . Si A et B sont deux parties de C , on pose

$$A \cdot B = \kappa((C^* * C^*) \cap A \times B),$$

où $C^* * C^*$ est la classe des couples composables (source de κ); la classe des morphismes de C^* de source e , de but e' , est notée $e' \cdot C \cdot e$. On associe à C^* la catégorie double $(\boxplus C^*, \boxminus C^*)$ de ses quatuors (chap. I [1]). 2

Un foncteur F de C^* vers une catégorie $\hat{C}^*$ est représenté par le triplet $(\hat{C}^*, \underline{F}, C^*)$, où $\underline{F}$ est la surjection de C sur $F(C) \subset \hat{C}$ définissant F . Le symbole F_γ dénote la restriction de F à C_γ^* ; pour que F_γ soit bien fidèle 3
(chap. II [1]), il faut et il suffit que les conditions $g \in C_\gamma^*$ et $F(g) \in \hat{C}_0^*$ entraînent $g \in C_0^*$. Le foncteur $(\hat{C}^*, \underline{F}, C^*)$ dual de F est dénoté F^* .

Soient C^* et $\hat{C}^*$ deux catégories. Une transformation naturelle entre foncteurs de C^* vers $\hat{C}^*$ est considérée comme un foncteur Ψ de C^* vers la catégorie $\boxminus \hat{C}^*$; si Ψ est une transformation naturelle de Φ vers Φ' , le triplet définissant Ψ (chap. I [1]) sera noté, sauf indication contraire, (Φ', τ_Ψ, Φ) et l'on pose $\alpha^\boxminus \Psi = \Phi$ et $\beta^\boxminus \Psi = \Phi'$; on a donc

$$\Psi(k) = (\Phi'(k), \tau_\Psi(e'), \tau_\Psi(e), \Phi(k)) \quad \text{si } k \in C, \alpha(k) = e, \beta(k) = e'.$$

(Classiquement [6] c'est le triplet (Φ', τ_Ψ, Φ) qui est appelé une transformation naturelle.) Un foncteur de C^* vers $\hat{C}^*$ constant sur $e \in \hat{C}_0^*$ sera noté $\tilde{e}$, sans préciser sa source ni son but (qui résulteront du contexte). La catégorie longitudinale des transformations naturelles entre foncteurs de C^* vers $\hat{C}^*$ est appelée $\mathfrak{N}(\hat{C}^*, C^*)^\square$; la classe de ses unités est identifiée à la classe des foncteurs de C^* vers $\hat{C}^*$. Rappelons (chap. I [1]) que, si Ψ et Ψ' sont deux transformations naturelles telles que $\alpha^\square(\Psi') = \beta^\square(\Psi)$, on a $\Psi' \square \Psi = \Psi''$, où

$$\tau_{\Psi''}(e) = \tau_{\Psi'}(e) \cdot \tau_\Psi(e) \quad \text{pour tout } e \in \hat{C}_0^*.$$

La catégorie duale $\hat{C}^*$ opère sur la sous-classe de $\mathfrak{N}(\hat{C}^*, C^*)$ formée des transformations naturelles ayant pour source un foncteur constant, pour la loi de composition

$$(g, \Psi) \rightarrow \Psi g = \Psi \circ \widetilde{g^\square} \quad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha^\square(\Psi) = \widetilde{\beta(g)},$$

où $\widetilde{g^\square}$ est le foncteur de C^* vers $\hat{C}^*$ constant sur le quatuor unité

$$g^\square = (\beta(g), g, g, \alpha(g));$$

en d'autres termes, on a $\tau_{\Psi g}(e) = \tau_\Psi(e) \cdot g$ pour $e \in \hat{C}_0^*$. Si q est un foncteur de K^* vers C^* , on note $\mathfrak{N}(q)$ le foncteur de $\mathfrak{N}(\hat{C}^*, C^*)^\square$ vers $\mathfrak{N}(\hat{C}^*, K^*)^\square$ associant à Ψ la transformation naturelle $\Psi \cdot q$. Si p est un foncteur de $\hat{C}^*$ vers K^* et si $\Psi \in \mathfrak{N}(\hat{C}^*, C^*)$, on désigne par $p\Psi$ la transformation naturelle $\square p \cdot \Psi$, telle que $\tau_{p\Psi} = \underline{p} \tau_\Psi$.

Supposons que $\hat{C}^*$ soit la catégorie pleine d'applications $\hat{\mathcal{M}}$ associée à un univers $\hat{\mathcal{M}}_0$ tel que $C \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Si Ψ et Ψ' sont deux éléments de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, C^*)$ tels que $\tau_{\Psi'}(e)$ soit une restriction de $\tau_\Psi(e)$ pour tout $e \in \hat{C}_0^*$ et $\alpha^\square \Psi'(f)$ et $\beta^\square \Psi'(f)$ des restrictions de $\alpha^\square \Psi(f)$ et de $\beta^\square \Psi(f)$ pour tout $f \in C$, on dira que Ψ' est une *sous-transformation naturelle* de Ψ . Nous désignerons par δ_C (ou simplement δ) le foncteur canonique de C^* vers $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, C^*)^\square$ défini comme suit: Si $e \in \hat{C}_0^*$, le foncteur $\delta_C(e)$ associe à $k \in C$ l'application $\delta_C(e)(k)$:

$$f \rightarrow f \cdot k \quad \text{de} \quad e \cdot C \cdot \beta(k) \quad \text{dans} \quad e \cdot C \cdot \alpha(k);$$

la transformation naturelle $\delta_C(h)$, où $h \in C$, est définie par le triplet $(\delta_C(\beta(h)), \tau_h, \delta_C(\alpha(h)))$, où $\tau_h(e')$ est, pour $e' \in \hat{C}_0^*$, l'application

$$f \rightarrow h \cdot f \quad \text{de} \quad \alpha(h) \cdot C \cdot e' \quad \text{dans} \quad \beta(h) \cdot C \cdot e'.$$

On sait que $\delta_C(C)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, C^*)^\square$ et que δ_C est compatible avec les limites projectives.

Soit q un foncteur fidèle de L^* vers C^* et δ_L le foncteur canonique de L^* vers la catégorie $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, L^*)^\square$, où $\hat{\mathcal{M}}_0$ est un univers auquel appartient L . Pour tout $s \in L_0^*$, il existe une équivalence naturelle $I(s)$ du foncteur

$\delta_L(s)$ vers un sous-foncteur de $\delta_{C^*}(q(s)) \cdot q^*$, noté $\delta_q(s)$, telle que $\tau_{I(s)}(s')$ soit la bijection

$$f \mapsto q(f) \quad \text{de} \quad s \cdot L \cdot s' \quad \text{sur} \quad q(s \cdot L \cdot s')$$

pour tout $s' \in L_0^*$. On en déduit un foncteur δ_q de L^* vers $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, L^*)^\square$ équivalent à δ_L , l'équivalence naturelle étant définie par le triplet (δ_q, I, δ_L) ; la transformation naturelle $\delta_q(h)$ est, pour tout $h \in L$, une sous-transformation naturelle de $\delta_{C^*}(q(h)) \cdot q^*$. Soit H^* une sous-catégorie pleine de L^* . Nous désignerons par $\delta_{q,H}$ le foncteur $\mathfrak{N}(L^*, \iota, H^*) \cdot \delta_q$ de L^* vers $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^\square$: Pour tout $\sigma \in L_0^*$, le foncteur $\delta_{q,H}(\sigma)$ de H^* vers $\hat{\mathcal{M}}$ associe à $h \in H$ l'application

$$f \mapsto f \cdot q(h) \quad \text{de} \quad q(\sigma \cdot L \cdot \beta(h)) \quad \text{dans} \quad q(\sigma \cdot L \cdot \alpha(h));$$

si $g \in L \cdot \sigma$ et $\beta(g) = \sigma'$, la transformation naturelle $\delta_{q,H}(g)$ est définie par le triplet $(\delta_{q,H}(\sigma'), \tau_\sigma, \delta_{q,H}(\sigma))$, où $\tau_\sigma(s)$ est, pour $s \in H_0^*$, l'application

$$f \mapsto q(g) \cdot f \quad \text{de} \quad q(\sigma \cdot L \cdot s) \quad \text{dans} \quad q(\sigma' \cdot L \cdot s).$$

Rappelons la définition suivante: Soient $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{M}}$ deux catégories pleines d'applications [1] telles que $\hat{\mathcal{M}} \subset \hat{\mathcal{M}}$. Supposons que $U = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{U}, \mathcal{X})$ soit un foncteur fidèle, que $S \in \mathcal{X}_0$ et $M \subset U(S)$. Si $h \in \mathcal{X}$, nous désignons par $\underline{h}$ la surjection définissant l'application $U(h)$. On appelle *U-sous-structure de S engendrée par M* [4] une *U-sous-structure* (déf. 7-III [1]) s de S telle que $M \subset U(s)$ et que l'on ait $U(s) \subset U(S')$ si S' est une *U-sous-structure* de S et si $M \subset U(S')$. Soient X une classe de *U-monomorphismes* (déf. 5-III [1]) et $\mathcal{X}$ une sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{X}}$ appliquée par U dans $\hat{\mathcal{M}}$. Si $s \in \mathcal{X}_0$ et s'il existe un $j \in S \cdot X \cdot s$ tel que

$$M \subset \underline{j}(U(s)) \quad \text{et} \quad j = j' \cdot j_1 \quad \text{lorsque} \quad j' \in S \cdot X \cdot \mathcal{X}_0 \quad \text{et} \quad M \subset \underline{j'}(U(a(j'))),$$

on dit que s est une $(X, \mathcal{X})$ -sous-structure [2] de S engendrée par M . Le foncteur U est $(\hat{\mathcal{M}} \cdot \hat{\mathcal{M}}_0, X, \mathcal{X})$ -engendrant [4] si, pour tout $S \in \mathcal{X}_0$ et tout $M \subset U(S)$ vérifiant $M \in \hat{\mathcal{M}}_0$, il existe une $(X, \mathcal{X})$ -sous-structure de S engendrée par M , en notant $\tilde{\mathcal{M}}$ la saturante de $\hat{\mathcal{M}}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$, c'est-à-dire (déf. 16-I [1]) $\tilde{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{M}}_\gamma \cdot \hat{\mathcal{M}} \cdot \hat{\mathcal{M}}_\gamma$. Le foncteur U est Γ -engendrant pour $\hat{\mathcal{M}}$ s'il est $(\hat{\mathcal{M}} \cdot \hat{\mathcal{M}}_0, X, \mathcal{X})$ -engendrant lorsque X est la classe U^Γ des *U-monomorphismes* et $\mathcal{X} = \underline{\tilde{U}}_1(\hat{\mathcal{M}})$. Si U est un foncteur d'homomorphismes saturé (déf. 19-II [1]), U est Γ -engendrant pour $\hat{\mathcal{M}}$ si, et seulement si, pour tout $S \in \mathcal{X}_0$ et tout $M \subset U(S)$ vérifiant $M \in \hat{\mathcal{M}}_0$, il existe une *U-sous-structure* s de S engendrée par M et pour laquelle $U(s) \in \hat{\mathcal{M}}_0$.

1. FONCTEURS K' -ÉTALANTS ET K' -RÉSOLVANTS A DROITE

1+ Nous désignons par $\mathcal{M}_0$, $\hat{\mathcal{M}}_0$ et $\hat{\hat{\mathcal{M}}}_0$ trois univers⁽²⁾ tels que

$$\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0 \in \hat{\hat{\mathcal{M}}}_0, \quad \mathcal{M}_0 \subset \hat{\mathcal{M}}_0 \subset \hat{\hat{\mathcal{M}}}_0.$$

Soient $\mathcal{M}$, $\hat{\mathcal{M}}$, $\hat{\hat{\mathcal{M}}}$ et $\mathcal{F}$, $\hat{\mathcal{F}}$, $\hat{\hat{\mathcal{F}}}$ les catégories pleines des applications et les catégories des foncteurs associées respectivement à $\mathcal{M}_0$, à $\hat{\mathcal{M}}_0$ et à $\hat{\hat{\mathcal{M}}}_0$. Les foncteurs canoniques de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{M}$, de $\hat{\mathcal{F}}$ vers $\hat{\mathcal{M}}$, de $\hat{\hat{\mathcal{F}}}$ vers $\hat{\hat{\mathcal{M}}}$ sont notés $p_{\mathcal{F}}$, $P_{\mathcal{F}}$ et $\hat{P}_{\mathcal{F}}$. Nous supposons toujours $K^* \in \hat{\hat{\mathcal{F}}}_0$. Par exemple, on pourra prendre $K^* = \mathcal{M}$ et $K' = \hat{\mathcal{M}} =$ classe des injections canoniques (M, ι, M') d'une sous-classe M' de M dans M .

Soit $V_{K^*} \hat{\hat{\mathcal{F}}}$ la catégorie des triangles de foncteurs au-dessus de K^* , dont les éléments sont les triplets (q', F, q) , où

$$q' \in K^* \cdot \hat{\hat{\mathcal{F}}}, \quad F \in \hat{\hat{\mathcal{F}}} \quad \text{et} \quad q = q' \cdot F,$$

la loi de composition étant

$$(q'', F', q') \cdot (q', F, q) = (q'', F' \cdot F, q) \quad \text{si, et seulement si,} \quad q' = q'_1.$$

2 Nous identifions $K^* \cdot \hat{\hat{\mathcal{F}}}$ à la classe des unités de $V_{K^*} \hat{\hat{\mathcal{F}}}$. Soit $\mathcal{H}(K^*)$ (ou plus brièvement $\mathcal{H}$) la sous-catégorie pleine de $V_{K^*} \hat{\hat{\mathcal{F}}}$ ayant pour unités les foncteurs fidèles $q \in \hat{\hat{\mathcal{F}}}$ et soit $\mathcal{H}(K^*) = \mathcal{H}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}$ dont les unités sont les foncteurs fidèles $q = (K^*, \underline{q}, C^*)$ tels que $q_{\gamma} = (K^*, \underline{q}_{\gamma}, C^*)$ soit bien fidèle (déf. 3-II [1]).

3 PROPOSITION 1. Soit $\hat{q} = (K^*, \hat{q}, \hat{C}^*) \in \hat{\hat{\mathcal{F}}}_0$ un foncteur fidèle; alors $\hat{q}$ admet pour $(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ -projection le foncteur $q = (K^*, q, L^*)$, où L^* est la catégorie quotient de $\hat{C}^*$ par le sous-groupe J^* de $\hat{C}^*$ formé des $j \in \hat{C}^*$ tels que $\hat{q}(j) \in K_0^*$; de plus L^* est isomorphe à une sous-catégorie pleine de $\hat{C}^*$ dont $\hat{C}^*$ est un élargissement.

Preuve. J^* est évidemment un sous-groupe $\hat{C}^*$; comme $\hat{q}$ est fidèle, il existe au plus un élément de J de source et but donnés. A fortiori, J^* vérifie la condition (0*) de la proposition 45-III [1]. D'après cette proposition, il existe une catégorie L^* quotient de $\hat{C}^*$ par J^* , et cette catégorie est la catégorie quotient strict de $\hat{C}^*$ par la relation d'équivalence r :

$h \sim h'$ si, et seulement si, il existe $j \in J$ et $j' \in J$ tels que $h' \cdot j = j' \cdot h$. Puisque $\hat{q}$ est fidèle, la relation r peut aussi s'exprimer comme suit: Soit r_0 la relation d'équivalence induite par r sur $\hat{C}_0^*$; on a

$$e \sim e' \text{ mod } r_0 \quad \text{si, et seulement si, il existe } j \in e' \cdot J \cdot e;$$

(2) Voir Note p. 66.

alors

$$h \sim h' \bmod r \quad \text{si, et seulement si,}$$

$$a(h) \sim a(h') \bmod r_0, \quad \beta(h) \sim \beta(h') \bmod r_0 \quad \text{et} \quad \hat{q}(h) = \hat{q}(h').$$

Soit $\bar{r}$ le $P_{\mathcal{F}}$ -épimorphisme canonique de $\hat{C}^*$ sur L^* . Le foncteur $\hat{q}$ étant compatible avec r , il existe un unique foncteur q de L^* vers K^* tel que $q \cdot \bar{r} = \hat{q}$; ce foncteur est défini par la surjection: $h \bmod r \rightarrow \hat{q}(h)$. Comme q est fidèle, on a

$$m = (q, \bar{r}, \hat{q}) \in \tilde{\mathcal{H}}.$$

Montrons que q_{γ} est bien fidèle. En effet, soit $\bar{g} \in L$; si $g \in \bar{g}$ et si $g' \in \bar{g}^{-1}$, les relations $a(g) \sim \beta(g') \bmod r_0$ et $\beta(g) \sim a(g') \bmod r_0$ assurent l'existence d'un $j \in a(g) \cdot J \cdot \beta(g')$ et d'un $j' \in a(g') \cdot J \cdot \beta(g)$. Les égalités

$$\hat{q}(j \cdot g) = \hat{q}(g) = q(\bar{g}) \quad \text{et} \quad \hat{q}(j \cdot g') = \hat{q}(g') = q(\bar{g})^{-1}$$

entraînent que $j \cdot g$ est l'inverse de $j \cdot g'$; ainsi g (et tout élément équivalent modulo r) est inversible. Si de plus $q(\bar{g}) = e \in K_0^*$, on a $\hat{q}(g) = e$ et $g \in J$; par construction, $\bar{g} = \bar{r}(g) \in L_0^*$. Donc q_{γ} est bien fidèle et $q \in \mathcal{H}_0$. — Soit v_0 une section de la surjection canonique $\bar{r}_0$ de $\hat{C}_0^*$ sur L_0^* ; si $\bar{g} \in L$, il existe un et un seul

$$g \in v_0(\beta(\bar{g})) \cdot \hat{C} \cdot v_0(a(\bar{g})) \quad \text{tel que} \quad \hat{q}(g) = q(\bar{g}).$$

La surjection $\bar{g} \rightarrow g$ définit un foncteur v section de $\bar{r}$ et $v(L)^*$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{C}^*$ isomorphe à L^* . Si $\sigma \in \hat{C}_0^*$, on a $\sigma \sim v \cdot \bar{r}(\sigma)$, de sorte que σ appartient à la saturante de $v(L)^*$ dans $\hat{C}^*$. En d'autres termes, $\hat{C}^*$ est un élargissement de $v(L)^*$ (déf. 10-V [1]).

— Supposons $m' = (q', F, \hat{q}) \in \mathcal{H}_0 \cdot \tilde{\mathcal{H}}$, où $a(q') = M^*$. Si $j \in J$, on a

$$j' = F(j) \in M_{\gamma}^* \quad \text{et} \quad q'(j') = \hat{q}(j) \in K_0^*.$$

q'_{γ} étant bien fidèle, il s'ensuit $F(j) \in M_0^*$. Ceci prouve que F est compatible avec r . Par conséquent il existe un et un seul foncteur F' tel que $F' \cdot \bar{r} = F$. Evidemment (q', F', q) est l'unique élément m'' de $\mathcal{H}$ vérifiant $m'' \cdot m = m'$; autrement dit, m est un $(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ -projecteur. ■

COROLLAIRE 1. Avec les notations de la proposition 1, q est aussi une $(\square(\hat{\mathcal{F}}; \hat{\mathcal{F}}, \mathcal{H}_0), \square \hat{\mathcal{F}})$ -projection de $\hat{q}$ (chap. I [1]).

Preuve. On a, avec les notations de la démonstration précédente

$$\hat{m} = (q, K^*, \bar{r}, q) \in \square \hat{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad q \in \mathcal{H}_0.$$

Supposons

$$\hat{m}' = (q', G', G, \hat{q}) \in \square \hat{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad q' = (M', \underline{q}', M') \in \mathcal{H}.$$

Si $j \in J$, on a

$$j' = G(j) \in M'_0 \quad \text{et} \quad q'(j') = q' \cdot G(j) = G' \cdot \hat{q}(j) \in M'_0.$$

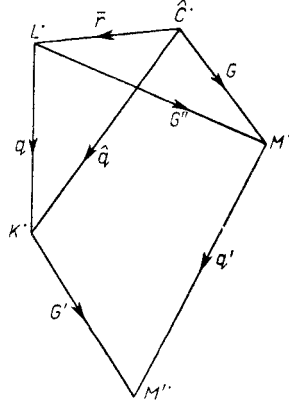


Fig. 1

Il en résulte $j' \in M'_0$, car q'_j est bien fidèle. Ainsi G est compatible avec r et il existe un et un seul G'' tel que $G = G'' \cdot \bar{r}$. Les égalités

$$G' \cdot q \cdot \bar{r} = G' \cdot \hat{q} = q' \cdot G = q' \cdot G'' \cdot \bar{r}$$

entraînent $G' \cdot q = q' \cdot G''$, puisque $\bar{r}$ est un épimorphisme, d'où

$$\hat{m}'' = (q', G', G'', q) \in \square \hat{\mathcal{F}}.$$

$\hat{m}''$ étant l'unique élément tel que $\hat{m}'' \cdot \hat{m} = \hat{m}'$, le quatuor $\hat{m}$ est un $(\square(\hat{\mathcal{F}}; \hat{\mathcal{F}}, \mathcal{H}_0), \square \hat{\mathcal{F}})$ -projecteur. ■

COROLLAIRE 2. $V_{K, \hat{\mathcal{F}}}$ est une catégorie à $\tilde{\mathcal{H}}$ -projections et à $\mathcal{H}$ -projections.

Preuve. Soit $Q = (K, Q, H) \in \hat{\mathcal{F}}_0$. Soit $\hat{C}$ la catégorie quotient strict de H par la relation d'équivalence élémentaire [4] ϱ :

$h \sim h'$ si, et seulement si, $\alpha(h) = \alpha(h')$, $\beta(h) = \beta(h')$ et $Q(h) = Q(h')$.

$\hat{C}$ s'identifie à la classe des triplets (s', f, s) tels que $s \in H_0$, $s' \in H'_0$ et $f \in Q(s' \cdot H \cdot s)$. La surjection $(s', f, s) \rightarrow f$ définit un foncteur $\hat{q}$ de $\hat{C}$ vers K , qui est fidèle. Le triplet $(\hat{q}, \bar{\varrho}, Q)$, où $\bar{\varrho}$ est le $P_{\hat{\mathcal{F}}}$ -épimorphisme de H sur $\hat{C}$, est un $(\mathcal{H}, V_{K, \hat{\mathcal{F}}})$ -projecteur. Puisque $\hat{q}$ admet une $(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ -projection q construite dans la proposition 1, d'après le théorème de transitivité des projections (th. 7-III [1]) q est aussi une $(\mathcal{H}, V_{K, \hat{\mathcal{F}}})$ -projection de Q . ■

DÉFINITION. On appelle *foncteur bien surjectif à gauche* un foncteur $F = (H^*, \underline{F}, C^*)$ tel que, pour tout $h \in H$ et toute unité $s \in \underline{F}^{-1}(\beta(h))$, il existe $k \in s \cdot \underline{F}(h)$.

Si F est bien surjectif à gauche, $F(C)$ définit une sous-catégorie de H^* qui est une catégorie quotient strict de C^* , d'après la proposition 14-III [1]. La classe des foncteurs bien surjectifs à gauche définit une sous-catégorie de la catégorie des foncteurs.

Soit $q = (K', \underline{q}, C^*)$ un foncteur et K'^* une sous-catégorie de K^* . Nous notons $(K', \underline{q})^\square$ la sous-catégorie de C^* formée des (K', q) -injections (déf. 2-III [1]).

DÉFINITION. On dit que q est *K' -étalant* si $q(C_0^*) \subset K'$ et si la restriction $(K'^*, \underline{q}, (K', q)^\square)$ de q est un foncteur bien surjectif à gauche. On dit que q est *K' -résolvant à droite* si $q(C_0^*) \subset K'$ et si, pour tout couple (h, h') , où $h \in C$ et $h' \in \beta(h) \cdot C \cdot \alpha(h)$, et tout noyau j de $(q(h), q(h'))$ tel que $j \in K'$, il existe une (K', q) -injection $\hat{j}$ vérifiant $q(\hat{j}) = j$ et $h \cdot \hat{j} = h' \cdot \hat{j}$.

Ces relations signifient que $\hat{j}$ est un (K', q) -noyau de (h, h') appliqué par q sur j (déf. 6-III [1]); a fortiori $\hat{j}$ est un noyau de (h, h') dans C^* (prop. 1 [4]). Si de plus q est bien fidèle, deux (K', q) -injections de même but et telles que $q(k') = q(k)$ sont égales (th. 1*-III [1]), de sorte que q est K' -étalant si, et seulement si, le foncteur dual de $(K', \underline{q}, (K', q)^\square)$ est un foncteur d'hypermorphismes et $q((K', q)^\square) = q(C_0^*) \cdot \bar{K}'$.

PROPOSITION 2. Si $q = (K', \underline{q}, C^*)$ est un foncteur fidèle K' -étalant, q est K' -résolvant à droite.

Preuve. Soient $h \in C$ et $h' \in \beta(h) \cdot C \cdot \alpha(h)$; si j est noyau de $(q(h), q(h'))$ dans K^* et si $j \in K'$, il existe une (K', q) -injection $\hat{j} \in \alpha(h) \cdot H$ telle que $q(\hat{j}) = j$, car q est K' -étalant. On a $h \cdot \hat{j} = h' \cdot \hat{j}$, étant donné que q est fidèle et que

$$q(h \cdot \hat{j}) = q(h) \cdot j = q(h') \cdot j = q(h' \cdot \hat{j}).$$

Donc q est K' -résolvant à droite. ■

PROPOSITION 3. Soient $p = (K^*, p, H^*)$ un foncteur fidèle, $F = (H^*, F, C^*)$ un foncteur bien surjectif à gauche et $q = p \cdot F$. Le foncteur F transforme une q -injection en une p -injection.

Preuve. Soit $\hat{k}$ une q -injection et posons $k = F(\hat{k})$. Si $h \in \beta(k) \cdot H$ est tel que $p(\hat{h}) = p(k) \cdot f$, il existe $\hat{h} \in \beta(\hat{k}) \cdot C$ appliqué par F sur h , et les égalités

$$q(\hat{h}) = p(h) = q(\hat{k}) \cdot f$$

assurent l'existence d'un et d'un seul $\hat{h}' \in C$ tel que

$$q(\hat{h}') = f \quad \text{et} \quad \hat{k} \cdot \hat{h}' = \hat{h}.$$

Il s'ensuit que $F(\hat{h}')$ est l'unique élément h' de H satisfaisant les relations

$$p(h') = f \quad \text{et} \quad k \cdot h' = h.$$

Donc $F((K', q)^\Gamma) \subset (K', p)^\Gamma$. ■

COROLLAIRE 1. Si $(q, \bar{r}, \hat{q})$ est un $(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ -projecteur et $\hat{k}$ une $\hat{q}$ -injection, $\bar{r}(\hat{k})$ est une q -injection.

En effet, ceci résulte de la proposition 3, car, d'après la démonstration de la proposition 1, $\bar{r}$ est un $P_{\tilde{\mathcal{H}}}$ -épimorphisme bien surjectif à gauche. ■

COROLLAIRE 2. Soient $p = (K', p, H')$ un foncteur fidèle, F un foncteur bien surjectif à gauche et $q = p \cdot F$. Si q est K' -résolvant à droite, F transforme un (K', q) -noyau en un (K', p) -noyau.

En effet, si (h, h') admet $\hat{f}$ pour (K', q) -noyau, $F(\hat{f})$ est une (K', p) -injection en vertu de la proposition 3, donc un noyau de $(F(h'), F(h))$ dans H' , et un (K', p) -noyau. ■

Soit $\mathcal{H}^e$ (resp. $\mathcal{H}^n$) la sous-catégorie de $\mathcal{H}$ formée des triplets $(q', F, q) \in \mathcal{H}$ vérifiant les conditions:

1° q et q' sont K' -étalants (resp. K' -résolvants à droite);

2° $F((K', q)^\Gamma) \subset (K', q')^\Gamma$ (resp. F applique un (K', q) -noyau sur un (K', q') -noyau).

La surjection $(q', F, q) \rightarrow P_{\tilde{\mathcal{H}}}(F)$ définit un foncteur fidèle Z de $\Gamma_K \cdot \tilde{\mathcal{H}}$ vers $\hat{\mathcal{M}}$. Pour $\varepsilon = e$ ou n , soit Z^ε la restriction de Z à $\mathcal{H}^\varepsilon$. On définit de même les catégories $\tilde{\mathcal{H}}, \tilde{\mathcal{H}}^\varepsilon$ et les foncteurs $\hat{Z}$ et $\hat{Z}^\varepsilon$ associés à l'univers $\hat{\mathcal{M}}_0$ (sans changer la catégorie donnée $K' \in \tilde{\mathcal{H}}_0$). Soit X' la classe des $\hat{Z}^\varepsilon$ -monomorphismes de la forme (q', F, q) , où F est un foncteur injectif et $F(a(q))$ une sous-catégorie pleine de $a(q')$.

THÉORÈME 1. $\hat{Z}^\varepsilon$ est un foncteur Γ -engendrant pour $\hat{\mathcal{M}}$ et $(\hat{\mathcal{M}} \cdot \hat{\mathcal{M}}_0, X', \mathcal{H}^\varepsilon)$ -engendrant [4], pour $\varepsilon = e$ ou n .

Preuve. Soit $P = (K', \underline{P}, \hat{H}^*) \in \hat{\mathcal{H}}_0$ et soit M une partie de H appartenant à la saturante $\tilde{\mathcal{M}}$ de $\hat{\mathcal{M}}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$. Alors M engendre une $\hat{Z}$ -sous-structure [4] de P , à savoir la restriction p de P à la sous-catégorie H^* de $\hat{H}^*$ engendrée par M . Comme $H \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ (th. 1-5 [3]) et que $\hat{Z}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe une $(\hat{Z}^\Gamma, \mathcal{H})$ -sous-structure de P engendrée par M , isomorphe à p , i.e. $\hat{Z}$ est Γ -engendrant pour $\hat{\mathcal{M}}$.

1°) Supposons aussi $P \in \hat{\mathcal{H}}_0^e$. Pour tout $s \in H_0^*$, soit B_s la classe $s \cdot (K', P)^\Gamma$; la surjection $j \rightarrow P(j)$ définit une bijection de B_s sur $P(s) \cdot K'$, car P_ν est bien fidèle. Comme $P(s) \cdot K' \subset K \in \hat{\mathcal{M}}_0$, il s'ensuit

$$B_s \in \hat{\mathcal{M}}_0 \quad \text{et} \quad B = \alpha(H_0^* \cdot (K', P)^\Gamma) = \bigcup_{s \in H_0^*} \alpha(B_s) \in \hat{\mathcal{M}}_0,$$

car $\tilde{\mathcal{M}}_0$ est un univers. Soit H'' la sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$ ayant B pour classe de ses unités. P étant fidèle, $s' \cdot \hat{H} \cdot s \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, pour tout couple (s', s) d'unités de $\hat{H}^*$; en utilisant le fait que $B \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ et que $\tilde{\mathcal{M}}_0$ est un univers, on obtient

$$H' = \bigcup (s' \cdot \hat{H} \cdot s \mid s' \in B, s \in B) \in \tilde{\mathcal{M}}_0.$$

Montrons que la restriction p' de P à H'' appartient à $\mathcal{H}'_0$; il en résultera que p' est la $(X^e, \mathcal{H}^e)$ -sous-structure de P engendrée par M , et a fortiori que $\hat{Z}^e$ est $(\hat{\mathcal{M}} \cdot \tilde{\mathcal{M}}_0, X^e, \mathcal{H}^e)$ -engendrant, $\hat{Z}^e$ étant un foncteur d'homomorphismes saturé. Or p' est fidèle et p'_* est bien fidèle. Soit $s' \in B$ et $k \in P(s') \cdot K'$. Par construction il existe une (K', P) -injection $\hat{k}' \in \hat{H} \cdot s'$ de but $s \in H_0$. Le foncteur P étant K' -étalant, il existe une (K', P) -injection $\hat{k}'' \in s \cdot \hat{H}$ telle que

$$P(\hat{k}'') = k' \cdot k \in K', \quad \text{où} \quad k' = P(\hat{k}').$$

D'après le théorème 1-III [1], il existe aussi une (K', P) -injection $\hat{k} \in s' \cdot \hat{H}$ vérifiant $P(\hat{k}) = k$ et $\hat{k}' \cdot \hat{k} = \hat{k}''$. Donc p' est K' -étalant, i.e. on a $p' \in \mathcal{H}'_0$.

2°) Soit $A(H^*)$ la classe des sous-catégories G^* de $\hat{H}^*$ contenant H et telles que $(P, (\hat{H}^*, \iota, G^*), P_G) \in \mathcal{H}^e$, où P_G est la restriction de P à G^* . Désignons par H''' la sous-catégorie intersection de $A(H^*)$, par p'' la restriction de P à H''' . Il est clair que $H''' \in A(H^*)$; comme $H'' \in A(H^*)$, on a $H'' \subset H'$, d'où $H'' \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Ainsi p'' est la $\hat{Z}^e$ -sous-structure de P engendrée par M , et $\hat{Z}^e$ est $\sqcap$ -engendrant pour $\mathcal{M}$. Nous allons construire H'' par récurrence: Posons $H_1 = H$ et, si H_i a été défini pour tout entier $i < n$, notons H_n la sous-catégorie de $\hat{H}^*$ engendrée par la classe des (K', P) -sous-morphismes des éléments de H_{n-1} . On a $H_{n-1} \subset H_n$, puisque $P(H_0) \subset K'$. Soit $\hat{G} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ et montrons que $\hat{G} = H''$. En effet, $\hat{G}^*$ est une sous-catégorie de H^* contenant H , et l'on a $\hat{G}_0^* \subset B$ et $\hat{G} \subset G$ pour tout $G^* \in A(H^*)$, c'est-à-dire $\hat{G} \subset H''$. Si $\hat{k} \in B_s$, où $s \in H_0^*$, alors $\hat{k}$ est un (K', P) -sous-morphisme de s de sorte que $\hat{k} \in \hat{G}$ et $\alpha(\hat{k}) \in \hat{G}$, d'où $B \subset \hat{G}_0^*$. Au total $B = \hat{G}_0^*$, c'est-à-dire $\hat{G}_0^* = (H_2)_0^*$. Si $s' \in \hat{G}_0^*$ et $k' \in P(s') \cdot K'$, il existe une (K', P) -injection $\hat{k}' \in s' \cdot \hat{H}$ telle que $P(\hat{k}') = k'$. Etant donné que $\hat{k}'$ est un (K', P) -sous-morphisme de $s' \in H_2$, on a $\hat{k}' \in H_3 \subset \hat{G}$. Supposons de plus $\hat{f} \in s' \cdot \hat{G}$ et $P(\hat{f}) = k' \cdot f'$; il existe un entier n tel que $\hat{f} \in H_{n+1}$ et il existe un et un seul $\hat{f}' \in \hat{H}$ vérifiant

$$P(\hat{f}') = f' \quad \text{et} \quad \hat{k}' \cdot \hat{f}' = \hat{f},$$

car $\hat{k}'$ est une (K', P) -injection. Or $\hat{f}'$ est un (K', P) -sous-morphisme de $\hat{f}' \in H_{n+1}$; il s'ensuit $\hat{f}' \in H_n \subset \hat{G}$. Ainsi $\hat{k}'$ est une $(K', P_{\hat{G}})$ -injection, et $P_{\hat{G}}$ est K' -étalant. On en conclut $\hat{G}^* \in A(H^*)$, d'où $\hat{G} = H''$.

3°) Supposons $P = (K^*, \underline{P}, \hat{H}^*) \in \mathcal{H}_0^n$ et soit H^* la sous-catégorie de $\hat{H}^*$ engendrée par $M \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Nous savons que $H \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ et que

$$C_1 = \bigcup (s' \cdot \hat{H} \cdot s \mid s \in H_0^*, s' \in H_0^*) \in \tilde{\mathcal{M}}_0,$$

car P est fidèle et $\tilde{\mathcal{M}}_0$ est un univers. Or C_1 est la sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$ engendrée par M . Supposons définie une suite croissante $(C_i)_{i < n}$ de sous-catégories pleines de $\hat{H}^*$ telles que $C_i \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ et prenons pour C_n^* la sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$ ayant pour unités les sources des (K', P) -noyaux $\hat{j}$ des couples $(\hat{f}, \hat{f}')$, où

$$\hat{f} \in C_{n-1}, \quad \hat{f}' \in \beta(\hat{f}) \cdot C_{n-1} \cdot \alpha(\hat{f}).$$

Evidemment $C_{n-1} \subset C_n$, puisque $P(H_0^*) \subset K'$. La surjection $(\hat{f}', \hat{f}, P(\hat{j})) \rightarrow \alpha(\hat{f})$ applique une partie de $C_{n-1} \times C_{n-1} \times K' \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ sur $(C_n)_0^*$; par suite $(C_n)_0^* \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ et, pour la même raison que plus haut, $C_n \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Ainsi nous construisons par récurrence une suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-catégories pleines de $\hat{H}^*$, pour lesquelles $C_n \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Soit $\hat{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \in \tilde{\mathcal{M}}_0$; notons $\hat{p}$ la restriction de P à la sous-catégorie pleine $\hat{C}^*$ de $\hat{H}^*$. Un (K', P) -noyau étant une (K', P) -injection et un composé de (K', P) -injections appartenant à $(K', P)^{\perp}$, toute unité de $\hat{C}^*$ est source d'une (K', P) -injection dont le but appartient à H . Si $\hat{f} \in \hat{C}$ et si $\hat{f}' \in \beta(\hat{f}) \cdot \hat{C} \cdot \alpha(\hat{f})$, il existe un entier n tel que $\hat{f} \in C_n$ et $\hat{f}' \in C_n$. Pour tout noyau $\hat{j}$ de $(P(\hat{f}), P(\hat{f}'))$ tel que $\hat{j} \in K'$, il existe un (K', P) -noyau $\hat{j}$ de $(\hat{f}, \hat{f}')$ tel que $P(\hat{j}) = \hat{j}$, car P est K' -résolvant à droite; comme $\hat{j} \in C_{n+1} \subset \hat{C}$, c'est aussi un $(K', \hat{p})$ -noyau de $(\hat{f}, \hat{f}')$. Donc $\hat{p}$ est K' -résolvant à droite et l'on a $(P, (\hat{H}^*, \iota, \hat{C}^*), \hat{p}) \in X^n$. Il en résulte, $\hat{Z}^n$ étant un foncteur d'homomorphismes saturé, que M engendre une $(X^n, \mathcal{H}^n)$ -sous-structure de P isomorphe à $\hat{p}$.

4°) Avec les mêmes hypothèses, montrons que M engendre aussi une $\hat{Z}^n$ -sous-structure $\hat{p}' = (K^*, \underline{P}, \hat{C}'^*)$ de P vérifiant $\hat{C}'^* \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. En effet, soit $A'(H^*)$ la classe des sous-catégories G^* de $\hat{H}^*$ contenant H et telles que $(P, (\hat{H}^*, \iota, G^*), P_G) \in \mathcal{H}^n$. L'intersection $\hat{C}'^*$ de $A'(H^*)$ appartient à $A'(H^*)$ et la relation $\hat{C}' \subset \hat{C} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ entraîne que $\hat{Z}^n$ est $\sqsubset$ -engendrant pour $\hat{\mathcal{M}}$, la $(\hat{Z}^{n\sqsubset}, \mathcal{H}^n)$ -sous-structure de P engendrée par M étant isomorphe à la restriction $P_{\hat{C}'}$ de P . Nous allons construire par récurrence $\hat{C}'$ par un procédé analogue à celui utilisé pour obtenir la complétion $\mathcal{S}$ -projective relative d'une sous-classe d'une catégorie munie d'une application $\mathcal{S}$ -limite projective naturalisée [4]. Posons $C'_1 = H$ et supposons définie une suite croissante $(C'_i)_{i < n}$ de sous-catégories de $\hat{H}^*$; définissons C'_n comme la sous-catégorie de $\hat{H}^*$ engendrée par la classe $Y_n \cup Y'_n$,

où Y_n est la classe des (K', P) -noyaux des couples $(\hat{f}, \hat{f}') \in C'_{n-1} \times C'_{n-1}$ et où Y'_n est la classe des $\hat{g} \in \hat{H}$ tels qu'il existe $\hat{j} \in Y_n$ vérifiant $\hat{j} \cdot \hat{g} \in C'_{n-1}$. Ecrivons $\hat{C}'' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C'_n$; on a $\hat{C}'' \subset \hat{G}$ pour tout $G \in A'(H')$, d'où $\hat{C}'' \subset \hat{C}'$. Soient $\hat{f} \in \hat{C}''$ et $\hat{f}' \in \beta(\hat{f}) \cdot \hat{C}'' \cdot \alpha(\hat{f})$; il existe un entier n tel que $\hat{f} \in C'_n$ et $\hat{f}' \in C'_n$, et tout (K', P) -noyau de $(\hat{f}, \hat{f}')$ appartient à C'_{n+1} . Soit $j \in K'$ un noyau de $(P(\hat{f}), P(\hat{f}'))$; il existe un (K', P) -noyau $\hat{j} \in C'_{n+1}$ de $(\hat{f}, \hat{f}')$ appliqué par P sur j . Si $\hat{g} \in \hat{C}''$ et si $\hat{f} \cdot \hat{g} = \hat{f}' \cdot \hat{g}$, il existe un entier $n' \geq n$ tel que $\hat{g} \in C'_{n'}$; alors l'élément $\hat{g}' \in \hat{H}$ tel que $\hat{j} \cdot \hat{g}' = \hat{g}$ appartient à $Y'_{n'+1} \subset \hat{C}''$; ceci montre que $\hat{j}$ est un $(K', P_{\hat{C}''})$ -noyau de $(\hat{f}, \hat{f}')$ et que $P_{\hat{C}''}$ est un foncteur K' -résolvant à droite. Donc $\hat{C}'' \in A'(H')$ et $\hat{C}'' \subset \hat{C}'$. Au total $\hat{C}' = \hat{C}''$ et la restriction $\hat{p}'$ de P à $\hat{C}''$ est la $\hat{Z}^n$ -sous-structure de P engendrée par M . ■

DÉFINITION. Soit $P = (K', \underline{P}, \hat{H}') \in \mathcal{H}_0^e$ et $M \subset \hat{H}$. Avec les notations de la démonstration du théorème 1, on appelle H'' la sous-catégorie pleine (resp. H''' la sous-catégorie) stable par (K', P) -injections engendrée par M ou $(K', P)^e$ -stable engendrée par M . On appelle $\hat{C}^*$ la sous-catégorie pleine (resp. $\hat{C}^{**}$ la sous-catégorie) stable par (K', P) -noyaux engendrée par M , ou $(K', P)^e$ -stable engendrée par M .

Remarque. Le fait que P est fidèle et P_* bien fidèle n'a été utilisé dans la démonstration précédente que pour démontrer que $H' \in \mathcal{H}_0$ et $\hat{C}' \in \mathcal{H}_0$; dans tous les cas la méthode indiquée permet de construire les sous-catégories (resp. sous-catégories pleines) $(K', P)^e$ -stables engendrées par une sous-classe de $\hat{H}$.

PROPOSITION 4. Soit $P = (K', \underline{P}, \hat{H}') \in \mathcal{H}_0^e$. Soient $(\hat{H}, \hat{\pi})$ et (H, π) des foncteurs $\{I\}$ -produit naturalisé (déf. 1-IV [1]) sur $\hat{H}'$ et K' tels que P applique $\hat{\pi}$ sur π . Si K' est stable pour H (c'est-à-dire $H(K'^I) \subset K'$) et si H' est une sous-catégorie pleine de $\hat{H}'$ stable pour $\hat{H}$, la sous-catégorie H^{**} pleine $(K', P)^e$ -stable engendrée par H est stable pour $\hat{H}$ si $\varepsilon = e$ (resp. si $\varepsilon = n$ et si I est fini).

Preuve. Nous reprenons les notations de la démonstration du théorème 1; donc $H^e = H'$ et $H^n = \hat{C}$. — Soit $s'_i \in H'_0$ pour tout $i \in I$. Il existe des (K', P) -injections $j_i \in \hat{H} \cdot s'_i$, où $s_i = \beta(j_i) \in H$. On a

$$S = \hat{H}(s_i)_{i \in I} \in H \quad \text{et} \quad \Pi(P(j_i))_{i \in I} \in K'.$$

D'après la proposition 15-IV [1], $j = \hat{H}(j_i)_{i \in I}$ est une (K', P) -injection de but $S \in H$. Par construction de H' (th. 1), on obtient $S' = \alpha(j) \in H'$. Puisque $S' = \hat{H}(s'_i)_{i \in I}$ et que H^{**} est une sous-catégorie pleine de $\hat{H}'$, cette sous-catégorie est stable pour $\hat{H}$. — Soit $\varepsilon = n$ et supposons montré

que C_m (th. 1) est stable pour $\hat{H}$ pour tout $m < n$; soient s''_i des unités de C_n ; il existe un couple $(f_i, f'_i) \in C_{n-1} \times C_{n-1}$ admettant un (K', P) -noyau j'_i de source s''_i pour tout $i \in I$. La sous-catégorie C_{n-1} étant stable pour $\hat{H}$, on trouve

$$f = \hat{H}(f_i)_{i \in I} \in C_{n-1} \quad \text{et} \quad f' = \hat{H}(f'_i)_{i \in I} \in C_{n-1}.$$

Le couple $(P(f), P(f'))$ admet pour noyau le produit $\Pi(P(j_i)_{i \in I}) \in K'$, de sorte que la (K', P) -injection $j' = \hat{H}(j'_i)_{i \in I}$ est un (K', P) -noyau de (f, f') . Par suite $j' \in C_n$ et $a(j') = \hat{H}(s''_i)_{i \in I} \in C_n$. Ainsi la sous-catégorie pleine C_n de $\hat{H}$ est stable pour $\hat{H}$ et, par récurrence, ceci est vrai pour tout entier n . Si $k_i \in \hat{C}$ pour tout $i \in I$ et si I est finie, il existe un entier n tel que $k_i \in C_n$ pour tout $i \in I$, et par conséquent on a $\hat{H}(k_i)_{i \in I} \in C_n \subset \hat{C}$. Ainsi $\hat{C}$ est stable pour $\hat{H}$ et la restriction $\hat{p}$ de P à $\hat{C}$ est un foncteur π -compatible. ■

1+

2. CONSTRUCTION D'UN PROLONGEMENT K' -ÉTALANT D'UN FONCTEUR

Soient q un foncteur fidèle de L^* vers K^* et H^* une sous-catégorie pleine de L^* .

2+ DÉFINITION. On dira que L^* est q -engendré par H si, étant donné

$$\sigma \in L_0^*, \quad \sigma' \in L_0^* \quad \text{et} \quad g \in q(\sigma') \cdot K \cdot q(\sigma),$$

on a $g \in q(\sigma' \cdot L \cdot \sigma)$ lorsque $g \cdot q(\sigma \cdot L \cdot s) \subset q(\sigma' \cdot L \cdot s)$ pour tout $s \in H_0^*$.

Si q_ν est bien fidèle, cette définition entraîne que, si $\sigma \in L_0^*, \sigma' \in L_0^*$ et si $q(\sigma' \cdot L \cdot s) = q(\sigma \cdot L \cdot s)$ pour tout $s \in H_0^*$, on a $\sigma = \sigma'$. En effet, il existe alors $j \in \sigma' \cdot L \cdot \sigma$ et $j' \in \sigma \cdot L \cdot \sigma'$ vérifiant $q(j) = q(j') = q(\sigma)$; il s'ensuit $j' = j^{-1} \in L_\nu^*$, d'où $j \in L_0^*$.

3 Désignons encore par $\delta_{q,H}$ le foncteur canonique (voir § 0) de L^* vers $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^\square$ associé à q et à H . On voit que L^* est q -engendré par H si, et seulement si, l'on a $\Psi \in \delta_{q,H}(L)$ lorsque

$$\sigma \in L_0^*, \quad \sigma' \in L_0^*, \quad g \in q(\sigma') \cdot K \cdot q(\sigma)$$

et que Ψ est une transformation naturelle de $\delta_{q,H}(\sigma)$ vers $\delta_{q,H}(\sigma')$ qui est une sous-transformation naturelle de $\delta_{K^*}(g) \cdot q^*$ (notations § 0); dans ce cas et si q_ν est bien fidèle, la restriction de $\delta_{q,H}$ à L_0^* est injective. D'une manière intuitive, L^* est q -engendré par H si $\delta_{q,H}(L)$ définit une sous-catégorie „relativement pleine” de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^\square$.

PROPOSITION 5. Supposons que L^* soit q -engendré par H et soit $p = (K^*, \underline{q}, H^*)$. Si Φ est un foncteur de L^* vers H^* admettant s pour limite

projective dans p [4], alors $\bar{\Phi} = (L', \bar{\Phi}, I')$ admet s pour limite projective. En particulier, si p est compatible avec les I' -limites projectives, (L', ι, H') l'est aussi. 1

Preuve. Soit $(\Phi, \bar{\tau}, \bar{s})$ le triplet définissant la limite projective naturalisée Θ , où $\bar{s}$ est le foncteur constant sur s et où $\bar{\tau}(i)$ est, pour tout $i \in I'_0$, la projection canonique de s vers $\Phi(i)$; soit $(q, \tau, \bar{\theta})$ le triplet définissant la transformation naturelle $\theta = p\theta$; par hypothèse θ est une limite projective naturalisée. Le triplet $(\bar{\Phi}, \bar{\tau}, \bar{s})$ définit la transformation naturelle $\bar{\Theta} = (\equiv L', \bar{\Theta}, I')$. Soit Ψ une transformation naturelle définie par un triplet $(\bar{\Phi}, \bar{\tau}', \bar{\sigma}')$, où $\bar{\sigma}'$ est le foncteur constant sur $\sigma' \in L'_0$. Puisque θ est une limite projective naturalisée et $\psi = q\Psi$ une transformation naturelle vers $q = p \cdot \Phi$, il existe un et un seul $g = \lim_{\theta} \psi \in K$ vérifiant $\theta g = \psi$, c'est-à-dire $\tau(i) \cdot g = q(\bar{\tau}'(i))$ pour tout $i \in I'_0$; montrons que $g \in q(s \cdot L \cdot \sigma')$. En effet, si $\hat{s} \in H'_0$ et si $\hat{f} \in \sigma' \cdot L \cdot \hat{s}$, le triplet $(\Phi, \bar{\tau}'', \hat{s})$, où $\bar{\tau}''(i) = \bar{\tau}'(i) \cdot \hat{f}$, définit une transformation naturelle Ψ' . Comme Θ est une limite projective naturalisée, il existe

$$g(f) = \lim_{\theta} \Psi' \in s \cdot H \cdot \hat{s} \quad \text{tel que} \quad \bar{\tau}(i) \cdot g(f) = \bar{\tau}''(i)$$

pour tout $i \in I'_0$; de plus les relations

$$\tau(i) \cdot p(g(f)) = p(\bar{\tau}(i) \cdot g(f)) = p(\bar{\tau}''(i)) = q(\bar{\tau}'(i) \cdot \hat{f}) = \tau(i) \cdot g \cdot f,$$

où $f = q(\hat{f})$, entraînent $p(g(f)) = g \cdot f$, car θ est une limite projective naturalisée. Il s'ensuit $g \cdot f \in q(s \cdot H \cdot \hat{s})$, d'où $g \cdot q(\sigma' \cdot L \cdot \hat{s}) \subset q(s \cdot L \cdot \hat{s})$. Par conséquent, il existe un $\bar{g} \in s \cdot L \cdot \sigma'$ vérifiant $q(\bar{g}) = g$. Le foncteur q étant fidèle, $\bar{g}$ est l'unique élément de L tel que $\bar{\Theta}\bar{g} = \Psi$. Donc $\bar{g} = \lim_{\bar{\Theta}} \Psi$ et $\bar{\Theta}$ est une limite projective naturalisée définissant s comme limite projective de $\bar{\Phi}$. La proposition en résulte. ■

Soit $p = (K', \underline{p}, H')$ un foncteur fidèle tel que p_* soit bien fidèle et que $p(H'_0) \subset K'$, où K'' est une sous-catégorie donnée de K' . Nous désignons par $\mathcal{C}(K', p)$ la classe des couples (Q, F) vérifiant les conditions:

1° $Q = (K', \underline{Q}, \hat{C}')$ est un foncteur fidèle et Q_* est bien fidèle;

2° F est un foncteur bien surjectif à gauche d'une sous-catégorie pleine C^* de $\hat{C}^*$ vers H^* et $p \cdot F$ est une restriction de Q ;

3° On a $\hat{C}'_0 \subset \alpha(C'_0 \cdot (K', Q)^{\neg})$ et, a fortiori, $Q(\hat{C}'_0) \subset K'$.

La condition 3 signifie que $\hat{C}^*$ est la sous-catégorie pleine stable par (K', Q) -injections engendrée par C , si Q est K' -étalant.

THÉORÈME 2. Il existe un couple $(q, (H', \iota, H')) \in \mathcal{C}(K', p)$ vérifiant les conditions:

1° $q = (K', \underline{q}, L')$ est K' -étalant et $(K', p)^{\neg} \subset (K', q)^{\neg}$.

2° L' est q -engendré par H .

3° Si $(Q, F) \in \mathcal{C}(K', p)$, il existe un unique foncteur F' prolongeant F tel que

$$q \cdot F' = Q \quad \text{et} \quad F'((K', Q)^\Gamma) \subset (K', q)^\Gamma.$$

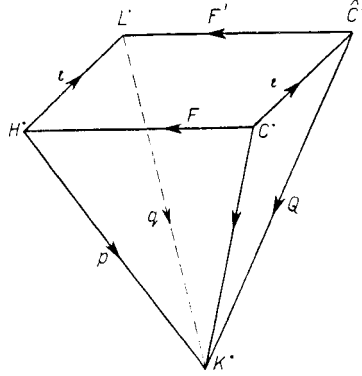


Fig. 2

Preuve. Soit $\hat{L}_0^*$ la classe des couples (s, k) , où $s \in H_0^*$ et $k \in p(s) \cdot K'$. Nous désignons par $E_s(s, k)$ la classe des couples $(f, \hat{s})$ tels que $\hat{s} \in H_0^*$, $f \in a(k) \cdot K \cdot p(\hat{s})$ et qu'il existe $h \in s \cdot H \cdot \hat{s}$ vérifiant $p(h) = k \cdot f$; l'élément h est alors déterminé d'une manière unique, puisque p est fidèle. Soit $\hat{L}$ la classe des triplets

$$\hat{g} = ((s', k'), g, (s, k)),$$

où

$$1^\circ (s, k) \in \hat{L}_0^*, (s', k') \in \hat{L}_0^*, g \in a(k') \cdot K \cdot a(k);$$

$$2^\circ \text{ Si } (f, \hat{s}) \in E_s(s, k), \text{ on a } (g \cdot f, \hat{s}) \in E_s(s', k').$$

Si $\hat{g} \in \hat{L}$ et si $\hat{g}' = ((s'', k''), g', (s', k')) \in \hat{L}$, pour tout $(f, \hat{s}) \in E_s(s, k)$ on a

$$(g \cdot f, \hat{s}) \in E_s(s', k'), \quad \text{d'où} \quad (g' \cdot g \cdot f, \hat{s}) \in E_s(s'', k'');$$

il s'ensuit $\hat{g}' \cdot \hat{g} \in \hat{L}$, en posant

$$\hat{g}' \cdot \hat{g} = ((s'', k''), g' \cdot g, (s, k)).$$

Muni de la loi de composition $(\hat{g}', \hat{g}) \rightarrow \hat{g}' \cdot \hat{g}$ ainsi définie, $\hat{L}^*$ est une catégorie, dont nous identifions la classe des unités à $\hat{L}_0^*$. Puisque $p(H_0^*) \subset K'$, on a $(s, p(s)) \in \hat{L}$ pour tout $s \in H_0^*$, et H^* s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\hat{L}^*$ ayant pour unités les couples $(s, p(s))$, où $s \in H_0^*$. La surjection $\hat{g} \rightarrow g$ définit un foncteur fidèle $\hat{q}$ de $\hat{L}^*$ vers K' : on a $\hat{q}(s, k) = a(k)$.

— Soit

$$(s, k) \in \hat{L}_0^* \quad \text{et} \quad k' \in \hat{q}(s, k) \cdot K';$$

si $(f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s, k \cdot k')$ et si $h \in s \cdot H \cdot \hat{s}$ et $p(h) = k \cdot k' \cdot f$, on a $(k' \cdot f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s, k)$, de sorte que

$$\hat{k}' = ((s, k), k', (s, k \cdot k'))$$

appartient à $\hat{L}$. Montrons que $\hat{k}'$ est une $(K', \hat{q})$ -injection. En effet, soit

$$\hat{g} = ((s, k), g, (s_1, k_1)) \in \hat{L}, \quad \text{où} \quad g = \hat{q}(\hat{g}) = k' \cdot g'.$$

Pour tout $(f_1, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s_1, k_1)$, la relation $(g \cdot f_1, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s, k)$ assure l'existence d'un $h' \in s \cdot H \cdot \hat{s}$ tel que

$$p(h') = k \cdot g \cdot f_1 = k \cdot k' \cdot g' \cdot f_1,$$

i.e. $(g' \cdot f_1, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s, k \cdot k')$. On en déduit que $((s, k \cdot k'), g', (s_1, k_1))$ est l'unique élément $\hat{g}'$ de $\hat{L}$ tel que $\hat{q}(\hat{g}') = g'$ et $\hat{k}' \cdot \hat{g}' = \hat{g}$. Ainsi $\hat{k}'$ est une $(K', \hat{q})$ -injection. En particulier, toute unité (s, k) de $\hat{L}$ est une $(K', \hat{q})$ -sous-structure de s .

— Soit $q = (K', \underline{q}, L')$ la $(\mathcal{K}, \hat{\mathcal{K}})$ -projection de $\hat{q}$ construite dans la proposition 1. Nous savons que L' est la catégorie quotient de $\hat{L}$ par le sous-groupe J' de $\hat{L}$ formé des $\hat{j} \in \hat{L}'$ tels que $\hat{q}(\hat{j}) \in K'_0$. On a $((s_1, k_1), e, (s, k)) \in J'$ si, et seulement si,

$$(s, k) \in \hat{L}'_0, \quad (s_1, k_1) \in \hat{L}'_0, \quad e = a(k) = a(k_1) \quad \text{et} \quad E_{\hat{s}}(s, k) = E_{\hat{s}}(s_1, k_1)$$

pour tout $\hat{s} \in H'_0$. Par suite L'_0 s'identifie au quotient $\hat{L}'_0 / r_0$, où r_0 est la relation d'équivalence:

$$(s, k) \sim (s_1, k_1) \text{ si, et seulement si, } a(k) = a(k_1) \text{ et } E_{\hat{s}}(s, k) = E_{\hat{s}}(s_1, k_1).$$

De plus L' est la catégorie quotient strict de $\hat{L}$ par la relation d'équivalence r :

$$\hat{h} \sim \hat{h}' \quad \text{si, et seulement si,}$$

$$\hat{q}(\hat{h}) = \hat{q}(\hat{h}'), \quad a(\hat{h}) \sim a(\hat{h}') \text{ et } \beta(\hat{h}) \sim \beta(\hat{h}'),$$

et l'on a $q(\hat{h} \bmod r) = \hat{q}(\hat{h})$. Soit $\bar{r}$ le $P_{\mathcal{F}}$ -épimorphisme canonique de $\hat{L}'$ sur L' ; la restriction de $\bar{r}$ à H' est un isomorphisme de H' sur une sous-catégorie pleine de L' , que nous identifions à H' ; alors q admet p pour restriction à H' . Le foncteur q étant fidèle, la surjection ζ :

$$\bar{h} = \hat{h} \bmod r \rightarrow (\beta(\bar{h}), q(\bar{h}), a(\bar{h}))$$

est une bijection de L sur une partie $\zeta(L)$ de la classe L' des triplets $\bar{g} = (\sigma', g, \sigma)$ vérifiant les conditions:

$$1^\circ \sigma = (s, k) \bmod r_0, \sigma' = (s', k') \bmod r_0, g \in a(k') \cdot K \cdot a(k);$$

$$2^\circ \text{ Pour tout } \hat{s} \in H'_0, \text{ on a } (g \cdot f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s', k') \text{ si } (f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s, k).$$

Si $\bar{g} \in L'$, la condition 2 est indépendante des représentants choisis de σ et σ' , par définition de r_0 ; elle entraîne

$$\hat{h} = ((s', k'), g, (s, k)) \in \hat{L}, \quad \text{d'où} \quad \bar{g} = \zeta(\hat{h} \bmod r) \in \zeta(L).$$

Au total $\zeta(L) = L'$, de sorte que nous pouvons identifier L à L' ; on a alors $q(\bar{g}) = g$. Si $\sigma = (s, k) \bmod r_0 \in L_0^*$, on a $(\sigma, f, \hat{s}) \in L$ pour tout $(f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s, k)$, de sorte que $E_{\hat{s}}(s, k) = q(\sigma \cdot L \cdot \hat{s}) \times \{\hat{s}\}$. La condition 2 précédente peut donc être remplacée par:

2') Pour tout $\hat{s} \in H_0^*$, on a $g \cdot q(\sigma \cdot L \cdot \hat{s}) \subset q(\sigma' \cdot L \cdot \hat{s})$. Ceci signifie que L' est q -engendrée par H .

— Soient $\sigma \in L_0^*$ et $k' \in q(\sigma) \cdot K'$. Nous avons vu que

$$\hat{k}' = ((s, k), k', (s, k \cdot k')), \quad \text{où} \quad \sigma = \bar{r}(s, k),$$

est une $\hat{q}$ -injection; d'après le corollaire 1 de la proposition 3, l'élément

$$\bar{k}' = \bar{r}(\hat{k}') = (\sigma, k', \bar{r}(s, k \cdot k'))$$

est une (K', q) -injection. Ainsi q est K' -étalant. En particulier, si $\sigma = \bar{r}(s, p(s)) \in \bar{r}(H)$, on trouve

$$\bar{k}' = (\sigma, k', \bar{r}(s, k')) \in (K', q)^{\sim}.$$

Si de plus il existe $j \in s \cdot (K', p)^{\sim}$ tel que $p(j) = k'$, la relation $(s, k') \sim (a(j), p(a(j)))$ entraîne $\bar{k}' = \bar{r}(j)$. Comme H' a été identifié à $\bar{r}(H)^*$, on obtient $(K', p)^{\sim} \subset (K', q)^{\sim}$.

— On a $(q, (H', \iota, H')) \in \mathcal{C}(K', p)$. Supposons que l'on ait $(Q, F) \in \mathcal{C}(K', p)$, où

$$Q = (K', \underline{Q}, \hat{C}') \quad \text{et} \quad F = (H', \underline{F}, \hat{C}').$$

Soit $\hat{e} \in \hat{C}_0'$; par hypothèse, il existe une (K', Q) -injection $\hat{k} \in \hat{C} \cdot \hat{e}$ telle que $e = \beta(\hat{k}) \in C$. Il s'ensuit $\sigma \in L_0^*$, où $\sigma = (s, k) \bmod r_0$, $s = F(e)$ et $k = Q(\hat{k})$. S'il existe une autre (K', Q) -injection $\hat{k}' \in \hat{C} \cdot \hat{e}$ telle que $e' = \beta(\hat{k}') \in C$, montrons que

$$(s', k') \in \sigma, \quad \text{où} \quad s' = F(e') \text{ et } k' = Q(\hat{k}').$$

En effet, soit $(f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s, k)$; il existe $h \in s \cdot H \cdot \hat{s}$ tel que $p(h) = k \cdot f$ et, F étant bien surjectif à gauche, il existe $\hat{h} \in e' \cdot \hat{C}$ vérifiant $F(\hat{h}) = h$. Par définition d'une (K', q) -injection, il existe $\hat{f} \in \hat{C}$ satisfaisant aux égalités $Q(\hat{f}) = f$ et $\hat{k} \cdot \hat{f} = \hat{h}$. Il en résulte $\hat{k}' \cdot \hat{f} \in e' \cdot \hat{C} \cdot a(\hat{h})$; la sous-catégorie C' étant pleine, on a

$$\hat{k}' \cdot \hat{f} \in C, \quad \text{d'où} \quad h' = F(\hat{k}' \cdot \hat{f}) \in H.$$

Puisque

$$p(h') = p \cdot F(\hat{k}' \cdot \hat{f}) = Q(\hat{k}' \cdot \hat{f}) = k' \cdot f,$$

on trouve $(f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s', k')$. De même, on montre que $E_{\hat{s}}(s', k') \subset E_{\hat{s}}(s, k)$. Au total $E_{\hat{s}}(s, k) = E_{\hat{s}}(s', k')$ pour $\hat{s} \in H_0^*$, c'est-à-dire $(s, k) \sim (s', k') \bmod r_0$. Désignons par $F'(\hat{c})$ la classe $\sigma \in L$ ainsi obtenue. Soit de plus $m \in \hat{c}_1 \cdot \hat{C} \cdot \hat{c}$, où $\hat{c}_1$ est la source d'une (K', Q) -injection $\hat{k}_1$ de but $c_1 \in C$. Posons

$$g = Q(m), \quad \sigma_1 = F'(\hat{c}_1), \quad s_1 = F(c_1), \quad k_1 = Q(\hat{k}_1).$$

Avec les notations précédentes, on a $\hat{k}_1 \cdot m \cdot \hat{f} \in c_1 \cdot \hat{C} \cdot a(\hat{f}) \subset C$, et par suite $h'' = F(\hat{k}_1 \cdot m \cdot \hat{f}) \in H \cdot \hat{s}$. Comme

$$p(h'') = p \cdot F(\hat{k}_1 \cdot m \cdot \hat{f}) = k_1 \cdot g \cdot f,$$

on trouve $(g \cdot f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s_1, k_1)$, ce qui entraîne $\bar{g} \in I_{\hat{s}}$, où $g = (\sigma_1, g, \sigma)$. Écrivons $F'(m) = \bar{g}$. La surjection $m \rightarrow F'(m)$ définit un foncteur F'' de $\hat{C}^*$ vers L^* , car Q et q sont fidèles. F' admet F pour restriction à C^* et on a $q \cdot F' = Q$. En particulier $F'(\hat{k})$ est la (K', q) -injection (s, k, σ) . Si $\hat{k}''$ est une (K', Q) -injection de but $\hat{c}$, pour la même raison $F''(\hat{k} \cdot \hat{k}'')$ est une (K', q) -injection, $\hat{k} \cdot \hat{k}''$ étant une (K', Q) -injection de but appartenant à C . De l'égalité $F'(\hat{k}) \cdot F'(\hat{k}'') = F'(\hat{k} \cdot \hat{k}'')$ et du théorème 1^e-III [1], on déduit que $F''(\hat{k}'')$ est une (K', q) -injection. Donc $F''((K', Q)^{-}) \subset (K', q)^{-}$. Si F'' était un autre prolongement de F transformant une (K', Q) -injection en une (K', q) -injection et tel que $q \cdot F'' = Q$, pour toute (K', Q) -injection $\hat{k}$ de source $\hat{c}$, de but $c \in C$, on a $F''(\hat{k}) = F'(\hat{k})$, car $F'(\hat{k})$ est l'unique (K', q) -injection de but $F(c)$ appliquée par q sur $Q(\hat{k})$; il s'ensuit $F''(\hat{c}) = F'(\hat{c})$ et F' et F'' ont donc même restriction à $\hat{C}_0^* = \alpha(C_0^* \cdot (K', Q)^{-})$; l'égalité $q \cdot F' = q \cdot F''$ entraîne $F' = F''$, étant donné que q est fidèle, ce qui achève la démonstration. ■

COROLLAIRE 1. Soit Φ un foncteur de L^* vers H^* admettant s pour limite projective dans p ; alors $\Phi = (L^*, \Phi, I^*)$ admet s pour limite projective (notations du th. 2). Si p est compatible avec les noyaux, (L^*, ι, H^*) l'est aussi. 1

En effet, ce corollaire résulte de la proposition 5, puisque L^* est q -engendré par H . ■

COROLLAIRE 2. Reprenons les notations du théorème 2. Soit (H, π) un foncteur $\{I\}$ -produit naturalisé sur K^* tel que $H(K'^I) \subset K'$. Si p est π -compatible (déf. 3-IV [1]), q est π -compatible.

Preuve. Les notations sont celles de la démonstration du théorème 2. Soit

$$\sigma_i = (s_i, k_i) \bmod r_0 \in L_0^* \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Il existe un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, s)$ de $(s_i)_{i \in I}$ dans H^* tel que

$$(p(p_i)_{i \in I}, p(s)) = \pi(p(s_i)_{i \in I}).$$

Désignons par $((p'_i)_{i \in I}, e)$ le produit naturalisé $\pi(a(k_i))_{i \in I}$; on a $k = \prod_{i \in I} k_i \in p(s) \cdot K'$, de sorte que $(s, k) \in \tilde{L}_0$. Montrons que $\sigma = (s, k) \bmod r_0$ est le produit de $(\sigma_i)_{i \in I}$ dans q . En effet, si $(f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s, k)$, il existe $h \in s \cdot H \cdot \hat{s}$ tel que $p(h) = k \cdot f$; les relations

$$p_i \cdot h \in s_i \cdot H \cdot \hat{s} \quad \text{et} \quad p(p_i \cdot h) = p(p_i) \cdot k \cdot f = k_i \cdot p'_i \cdot f$$

entraînent $(p'_i \cdot f, \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s_i, k_i)$, d'où

$$\bar{p}'_i = (\sigma_i, p'_i, \sigma) \in L.$$

Supposons que l'on ait $\bar{g}_i = (\sigma_i, g_i, \sigma') \in L$ pour tout $i \in I$, où $\sigma' = (s', k') \bmod r_0$. Il existe $g = [g_i]_{i \in I} \in e \cdot K$. Si $(f', \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s', k')$, on a $(g_i \cdot f', \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s_i, k_i)$, ce qui assure l'existence d'un $h'_i \in s_i \cdot H \cdot \hat{s}$ satisfaisant l'égalité $p(h'_i) = k_i \cdot g_i \cdot f'$. Soit $h' = [h'_i]_{i \in I}$; alors

$$p(h') = [p(h'_i)]_{i \in I} = [k_i \cdot g_i \cdot f']_{i \in I} = [k_i \cdot g_i]_{i \in I} \cdot f'.$$

Puisque

$$p(p_i) \cdot k \cdot g = k_i \cdot p'_i \cdot g = k_i \cdot g_i$$

pour tout $i \in I$, on obtient $k \cdot g = [k_i \cdot g_i]_{i \in I}$, et par suite $p(h') = k \cdot g \cdot f'$. Ceci signifie que $(g \cdot f', \hat{s}) \in E_{\hat{s}}(s, k)$, c'est-à-dire $\bar{g} \in L$, où $\bar{g} = (\sigma, g, \sigma')$. De plus $\bar{g} = [\bar{g}_i]_{i \in I}$, car

$$\bar{p}'_i \cdot \bar{g} = (\sigma_i, p'_i \cdot g, \sigma') = (\sigma_i, g_i, \sigma').$$

Donc σ est un produit de $(\sigma_i)_{i \in I}$ dans q . Le corollaire s'en déduit. ■

- Remarque. Supposons que K' soit la classe de tous les monomorphismes de K^* et posons $\bar{K}' = (K', p)^{\square}$. D'après les résultats du chapitre V [1] dont nous reprenons la terminologie et les notations, il existe une extension $\tilde{q}^*$ de $(K', \bar{K}', p^*)$, où p^* est le foncteur dual de p (théorème 12-V [1]): On sait que $\tilde{q}$ est un foncteur K' -étalant $(K^*, \tilde{q}, \tilde{L}^*)$, la catégorie $\tilde{L}^*$ étant le quotient strict de $\boxtimes(K', p)$ par une certaine relation d'équivalence, et $\tilde{L}^*$ étant une catégorie à H -projections. Le couple $(\tilde{q}, (H^*, \iota, H^*))$ appartient à $\mathcal{C}(K', p)$; d'après le théorème 2, il existe un foncteur F' prolongeant le foncteur identique de H^* et tel que $q \cdot F' = \tilde{q}$; ce foncteur n'est pas surjectif. Intuitivement le théorème 2 signifie que q est „le plus petit” foncteur K' -étalant admettant p pour restriction à une sous-catégorie pleine. En précisant ce résultat, nous montrerons dans le § 3 que q résout un problème universel moins fin que le problème de l'extension dont $\tilde{q}$ est solution (th. 12-V [1]).

3. PROLONGEMENT MINIMAL D'UN FONCTEUR EN UN FONCTEUR K' -ÉTALANT

Le symbole ε peut être lu e ou n et les notations sont celles des § 1-2. Nous désignons par $\mathcal{H}_0^{\varepsilon}$ (resp. par $\mathcal{H}_0^{\varepsilon'}$) la classe des couples (q, C) vérifiant:

- 1° $q = (K^*, \underline{q}, \hat{C}^*) \in \mathcal{H}_0^{\varepsilon}$ et C définit une sous-catégorie pleine de $\hat{C}^*$;
- 2° $\hat{C}^*$ est la sous-catégorie pleine (resp. sous-catégorie) $(K', q)^{\varepsilon}$ -stable engendrée par C .

Posons $\mathcal{L} = \mathcal{H}'$ ou $\mathcal{H}''$. Soit $\tilde{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets $\hat{F} = (q_2, C_2, F', (q_1, C_1))$ tels que

$$u_i = (q_i, C_i) \in \mathcal{L}_0^{\varepsilon} \quad \text{pour} \quad i = 1 \text{ et } 2, \quad (q_2, F', q_1) \in \mathcal{H}^{\varepsilon}, \quad F'(C_1) \subset C_2,$$

la loi de composition étant

$$((u_4, G', u_3), (u_2, F', u_1)) \rightarrow (u_4, G' \cdot F', u_1)$$

si, et seulement si, $u_3 = u_2$. La surjection $\hat{F} \mapsto (p_2, F, p_1)$, où p_i est la restriction de q_i à C_i et où $F = (C_2, F' \iota, C_1)$, définit un foncteur $\bar{Y}_{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$ de $\tilde{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$ vers $\mathcal{H}$; ce foncteur p_i est fidèle, car q_i est fidèle et $q_i|_{C_i}$ bien fidèle.

Soit $\mathcal{H}_1$ la sous-catégorie de $\mathcal{H}$ formée des $(q', F, q) \in \mathcal{H}$ pour lesquels $F = (H'^*, \underline{F}, H^*)$ est bien surjectif à gauche et $q(H_0^*) \subset K'$, $q'(H_0^*) \subset K'$. Désignons par $\mathcal{L}^{\varepsilon}$ la sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$ formée des $\hat{F} \in \tilde{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$ tels que $\bar{Y}_{\mathcal{L}}^{\varepsilon}(\hat{F}) \in \mathcal{H}_1$ et par $Y_{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$ le foncteur $(\mathcal{H}_1, \bar{Y}_{\mathcal{L}}^{\varepsilon} \iota, \mathcal{L}^{\varepsilon})$ restriction de $\bar{Y}_{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$.

THÉORÈME 3. *Pour $\mathcal{L} = \mathcal{H}'$ ou $\mathcal{H}''$ et $\varepsilon = e$ ou n , le foncteur $Y_{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$ admet un adjoint à droite: Si $p = (K^*, \underline{p}, H^*)$ est un foncteur fidèle tel que p_i soit bien fidèle et $p(H_0^*) \subset K'$ et si q est le prolongement de p construit dans le théorème 2, alors p engendre une $Y_{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$ -structure colibre $(p'_{\mathcal{L}}, H)$, où $p'_{\mathcal{L}}$ est une restriction de q et $p'_{\mathcal{H}} = q$.*

Preuve. Soit $\tilde{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$ la catégorie joint des foncteurs $((\mathcal{H}_1, \iota, \mathcal{H}_1), Y_{\mathcal{L}}^{\varepsilon})$ construite par la méthode de la proposition 36-II [1]: elle admet $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{L}^{\varepsilon}$ pour sous-catégories pleines et ses autres éléments sont les triplets $(p, F, (Q, C))$ tels que

$$(Q, C) \in \mathcal{L}_0^{\varepsilon} \quad \text{et} \quad (p, F, (K^*, \underline{Q} \iota, C^*)) \in \mathcal{H}_1.$$

Dire que $p \in \mathcal{H}_0$ engendre une $Y_{\mathcal{L}}^{\varepsilon}$ -structure colibre u signifie que p admet u pour $(\mathcal{L}^{\varepsilon}, \mathcal{L}^{\varepsilon})$ -éjection (app. I [1]). — Supposons $p = (K^*, \underline{p}, H^*) \in (\mathcal{H}_1)_0$; notons q le foncteur $(K^*, \underline{q}, L^*)$ du théorème 2, dont nous reprenons les notations; H^* est identifiée à une sous-catégorie pleine de L^* . Comme $L_0^* = a(H_0^* \cdot (K', q) \Gamma)$, la catégorie L^* est la sous-catégorie pleine stable par (K', q) -injections engendrée par H . Puisque $\hat{\mathcal{H}}_0$ est un univers et

que $H \in \hat{\mathcal{H}}_0$ et $K \in \hat{\mathcal{H}}_0$, on a $\hat{L}_0 \subset H_0 \times K \in \hat{\mathcal{H}}_0$, d'où $L_0 = \hat{L}_0 / r_0 \in \hat{\mathcal{H}}_0$ et $L \in \hat{\mathcal{H}}_0$, car $L \subset L_0 \times K \times L_0 \in \hat{\mathcal{H}}_0$. Il s'ensuit

$$q \in \mathcal{H}, \quad (q, H) \in \mathcal{H}'^e \quad \text{et} \quad j_{\mathcal{H}'}^e = (p, H^*, (q, H)) \in \tilde{\mathcal{H}}'^e.$$

Supposons $\bar{F} = (p, F, (Q, C)) \in \tilde{\mathcal{L}}^e$ et $Q = (K^*, \bar{Q}, \hat{C}^*)$. Alors $(Q, F) \in \mathcal{C}(K', p)$ et, d'après le théorème 2, il existe un foncteur unique F' prolongeant F et tel que

$$q \cdot F' = Q \quad \text{et} \quad F'((K', Q)^\Gamma) \subset (K', q)^\Gamma.$$

1°) Soit $\mathcal{L}^e = \mathcal{H}'^e$; le triplet $((q, H), F', (Q, C))$ est l'unique élément $\hat{F}'$ de $\tilde{\mathcal{H}}'^e$ vérifiant $j_{\mathcal{H}'}^e \cdot \hat{F}' = \bar{F}$, de sorte que $j_{\mathcal{H}'}^e$ est une $(\tilde{\mathcal{H}}'^e, \mathcal{H}'^e)$ -éjection; on posera $q = p_{\mathcal{H}'}^e$.

2°) Soit $\mathcal{L}^e = \mathcal{H}''^e$. Désignons par $p_{\mathcal{H}''}^e$ la restriction de q à la sous-catégorie H''' stable par (K', q) -injections engendrée par H^* ; on a

$$j_{\mathcal{H}''}^e = (p, H^*, (p_{\mathcal{H}''}^e, H)) \in \tilde{\mathcal{H}}''^e.$$

Nous allons montrer que $F'(\hat{C}) \subset H''$, d'où il résultera que $((p_{\mathcal{H}''}^e, H), (H''', F', \hat{C}^*), (Q, C))$ est l'unique élément $\hat{F}''$ de $\tilde{\mathcal{H}}''^e$ tel que $j_{\mathcal{H}''}^e \cdot \hat{F}'' = \bar{F}$, c'est-à-dire que $j_{\mathcal{H}''}^e$ est un $(\tilde{\mathcal{H}}''^e, \mathcal{H}''^e)$ -éjecteur. En effet, $\hat{C}^*$ étant la sous-catégorie stable par (K', Q) -injections engendrée par C , on a $\hat{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ d'après la démonstration du théorème 1, où $H_1 = C$ et où H_n est la sous-catégorie de $\hat{C}^*$ engendrée par la classe A_n des (K', Q) -sous-morphismes des éléments de H_{n-1} . On a $F'(H_1) = F(C) \subset H \subset H''$. Supposons prouvé $F'(H_{n-1}) \subset H''$ et soit $g' \in A_n$; il existe

$$(g, k', k, g') \in \square \hat{C}^*, \quad \text{où} \quad g \in H_{n-1}, \quad k' \in (K', Q)^\Gamma, \quad k \in (K', Q)^\Gamma.$$

Par suite

$$(F'(g), F'(k'), F'(k), F'(g')) \in \square L^*, \quad \text{où} \quad F'(g) \in H''$$

et où $F'(k)$ et $F'(k')$ sont des (K', q) -injections appartenant à H'' , car ce sont des (K', q) -sous-morphismes de leur source qui appartient à H'' ; il s'ensuit que $F'(g')$ est un (K', q) -sous-morphisme de $F'(g) \in H''$ et, comme tel, on a $F'(g') \in H''$. Donc $F'(A_n) \subset H''$; d'où $F'(H_n) \subset H''$ pour tout entier n par récurrence, et

$$F'(\hat{C}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F'(H_n) \subset H''.$$

3°) Supposons $\mathcal{L}^e = \mathcal{H}^n$. Soit $\hat{p} = p_{\mathcal{H}}^n$ la restriction de q à la sous-catégorie pleine $\tilde{H}^*$ stable par (K', q) -noyaux engendrée par H ; alors

$$j_{\mathcal{H}}^n = (p, H^*, (p_{\mathcal{H}}^n, H)) \in \tilde{\mathcal{H}}^n.$$

Pour voir que $j_{\mathcal{H}'}^n$ est un $(\tilde{\mathcal{H}}^n, \mathcal{H}'^n)$ -éjecteur, il suffit de montrer que l'on a $F'(\hat{C}) \subset \tilde{H}$; on en déduira que

$$((p_{\mathcal{H}'}^n, H), (\tilde{H}', \underline{F}', \hat{C}'), (Q, C))$$

est l'unique élément $\tilde{F}'$ de $\tilde{\mathcal{H}}^n$ tel que $j_{\mathcal{H}'}^n \cdot \tilde{F}' = \bar{F}'$. Or, d'après le théorème 1 dont nous reprenons les notations (en y remplaçant P par Q), la sous-catégorie pleine $\hat{C}^*$ stable par (K', Q) -noyaux engendrée par C est telle que $\hat{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, la suite (C_n) étant construite par récurrence à partir de $C_1 = C$ (car C est pleine dans $\hat{C}^*$). On a

$$F'(C_1) = F(C) \subset H \subset \tilde{H}.$$

Supposons prouvé $F'(C_{n-1}) \subset \tilde{H}$; pour tout $c \in (C_n^*)$, il existe un couple (g, g') d'éléments de C_{n-1} admettant un (K', Q) -noyau j de source c ; puisque $F'(g)$ et $F'(g')$ appartiennent à H et que $(F'(g), F'(g'))$ admet $F'(j)$ pour (K', q) -noyau (car $F'(j)$ est une (K', q) -injection), on obtient $F'(c) \in \tilde{H}_0$. La sous-catégorie $\tilde{H}'$ de L' étant pleine, $F'(C_n) \subset \tilde{H}$; d'où, par récurrence, $F'(\hat{C}) \subset \tilde{H}$.

iv) Enfin, soit $\mathcal{L}' = \mathcal{H}'^n$. Notons $\tilde{H}'$ la sous-catégorie stable par (K', q) -noyaux engendrée par H . Soit $p_{\mathcal{H}'}^n$ la restriction de q à $\tilde{H}'$; alors

$$j_{\mathcal{H}'}^n = (p, H, (p_{\mathcal{H}'}^n, H)) \in \tilde{\mathcal{H}}^n.$$

Il nous suffit de même de montrer que $F'(\hat{C}) \subset \tilde{H}'$ pour prouver que $j_{\mathcal{H}'}^n$ est un $(\tilde{\mathcal{H}}^n, \mathcal{H}'^n)$ -éjecteur. En effet, en vertu du théorème 2, on a

$$\hat{C} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C'_n, \quad \text{avec} \quad C'_1 = C \text{ et } F'(C'_1) \subset \tilde{H}'.$$

Supposons vérifiée la relation $F'(C'_{n-1}) \subset \tilde{H}'$. Si $(g, g') \in C'_{n-1} \times C'_{n-1}$ admet j pour (K', Q) -noyau, $F'(j)$ est un (K', q) -noyau de $(F'(g), F'(g')) \in \tilde{H}' \times \tilde{H}'$. D'après la définition de $\tilde{H}'$, on a $F'(j) \in \tilde{H}'$. Soit de plus $f \in C'_n$ tel que $f' = j \cdot f \in C'_{n-1}$. On trouve

$$g \cdot f' = g \cdot j \cdot f = g' \cdot j \cdot f = g' \cdot f'$$

et les relations

$$F'(f') \in \tilde{H}' \quad \text{et} \quad F'(g) \cdot F'(f') = F'(g \cdot f') = F'(g') \cdot F'(f')$$

assurent l'existence d'un et d'un seul $h \in \tilde{H}'$ tel que $F'(f') = F'(j) \cdot h$. Comme $F'(f') = F'(j) \cdot F'(f)$, on obtient $F'(f) = h \in \tilde{H}'$. La catégorie C'_n étant engendrée par la classe des éléments des deux formes j et f considérées ci-dessus, on a $F'(C'_n) \subset \tilde{H}'$ et, par récurrence, $F'(\hat{C}) \subset \tilde{H}'$. Ceci achève la démonstration. ■

COROLLAIRE. Avec les notations du théorème 3, soit (Π, π) un foncteur $\{I\}$ -produit naturalisé sur K^* tel que $\Pi(K'^I) \subset K'$ et que p soit π -compatible; alors $p_{\mathcal{H}'}^\varepsilon$ est π -compatible pour $\varepsilon = e$ (resp. $\varepsilon = n$ si I est fini).

En effet, $p_{\mathcal{H}'}^e = q$ est π -compatible d'après le corollaire 2 du théorème 2; la proposition 4 entraîne donc que $p_{\mathcal{H}'}^n$ est π -compatible. Remarquons que $p_{\mathcal{H}'}^e$ peut ne pas être π -compatible. ■

EXEMPLE. Soit p l'injection canonique d'une sous-catégorie pleine H^* de K^* vers K^* . Si K' est la classe de tous les monomorphismes de K^* , alors p engendre une $Y_{\mathcal{L}}$ -structure colibre $(p_{\mathcal{L}}^e, H)$, où $p_{\mathcal{L}}^e$ est l'injection canonique d'une sous-catégorie de K^* vers K^* , les catégories $\alpha(p_{\mathcal{H}'}^n)$ et $\alpha(p_{\mathcal{H}'}^e)$ étant respectivement la sous-catégorie pleine et la sous-catégorie stables par noyaux de K^* engendrées par H . Par contre si H^* n'est pas pleine dans K^* , le foncteur $p_{\mathcal{L}}^e$ peut ne pas être injectif. Soit $\mathcal{J}$ la classe ayant pour seul élément la catégorie I^* formée de deux morphismes de source 0, de but 1. Une application $\mathcal{J}$ -limite projective naturalisée μ sur K^* est appelée application noyau naturalisé; supposons que K' soit la classe des noyaux associés à un tel μ . Alors p engendre une $Y_{\mathcal{H}'}^n$ -structure colibre $(p_{\mathcal{H}'}^n, H)$, où $p_{\mathcal{H}'}^n = (K^*, \iota, \hat{H}^*)$, la catégorie $\hat{H}^*$ étant le support de la $\mathcal{J}$ -complétion projective de H dans (K^*, μ) au sens de [4]. En fait H^* est aussi la sous-catégorie $(K', P)^n$ -stable engendrée par H , pour $P = (K^*, \iota, K^*)$.

DÉFINITION. Soit $(p_{\mathcal{L}}^e, H)$ une $Y_{\mathcal{L}}$ -structure colibre engendrée par p . Si $\mathcal{L} = \mathcal{H}'$ (resp. $= \mathcal{H}''$), on appelle $p_{\mathcal{L}}^e$ le *prolongement plein* (resp. le prolongement) K'^e -minimal de p , ou encore, si $\varepsilon = e$, le prolongement plein (resp. le prolongement) K' -étalant minimal de p et, si $\varepsilon = n$, le prolongement plein (resp. le prolongement) K' -résolvant à droite minimal de p .

Supposons encore que K^* soit une catégorie. Soit $\check{K}^*$ une sous-catégorie pleine de K^* telle que K^* soit une catégorie à $\check{K}$ -éjections [1]. Supposons donnée une application $(K^*, \check{K})$ -éjection naturalisée τ telle que $\tau(e) = e$ si $e \in \check{K}_0^*$. Prenons pour K'' la sous-catégorie de K^* engendrée par $\tau(K_0^*)$.

PROPOSITION 6. Soit $P = (K^*, \underline{P}, H^*)$ un foncteur et $\check{H} = \underline{P}(\check{K})$. Pour que P soit K' -étalant, il faut (resp. il faut et il suffit si $\check{K}_0^* \cdot K \subset \check{K}$) que H^* soit une catégorie à $\check{H}$ -éjections et que P soit $(\tau, \check{H})$ -compatible (déf. 20-III [1]); H^* est alors la sous-catégorie-pleine stable par (K', P) -injections engendrée par $\check{H}$.

Preuve. Supposons que P soit K' -étalant et que $s' \in H_0^*$. Puisque $\tau(P(s')) \in K'$, il existe une et une seule (K', P) -injection $\hat{k}' \in s' \cdot H$ telle que $P(\hat{k}') = \tau(P(s'))$. D'après la proposition 27*-III [1], $\hat{k}'$ est un $(H^*, \check{H})$ -

éjecteur. La surjection $s' \rightarrow \hat{k}'$ ainsi définie est une application $(H^*, \check{H})$ -éjection naturalisée $\hat{\tau}$ appliquée par P sur τ ; autrement dit, P est $(\tau, \check{H})$ -compatible. D'après le théorème 1, H^* est la sous-catégorie pleine (K', P) -stable engendrée par $\check{H}$. — Inversement, supposons que P soit un foncteur $(\tau, \check{H})$ -compatible. Soit $s' \in H_0^*$ et $k' \in P(s') \cdot K'$; si $k' \notin \check{K}_0^*$, on a $k' = \tau(P(s'))$, de sorte qu'il existe un $(H^*, \check{H})$ -éjecteur $\hat{k}' \in s' \cdot H$ avec $P(\hat{k}') = k'$. Soit $\hat{f} \in s' \cdot H$ et $P(\hat{f}) = k' \cdot f'$. Si $a(\hat{f}) \in \check{H}_0^*$, il existe $\hat{f}' \in \check{H}$ tel que $\hat{f} = \hat{k}' \cdot \hat{f}'$, d'où $P(\hat{f}) = k' \cdot P(\hat{f}')$; puisque k' est $(K^*, \check{K})$ -régulier à gauche, il s'ensuit $P(\hat{f}') = f'$. La relation $f' \in \check{K}_0^* \cdot K$ entraîne $a(f') \in \check{K}$, si $\check{K}_0^* \cdot K \subset \check{K}$, et par suite $a(\hat{f}) \in \check{H}$. Ainsi le cas précédent est le seul possible. Donc k' est une (K', P) -injection et P est K' -étalant. ■

COROLLAIRE. Soit $p = (K^*, p, H^*)$ un foncteur fidèle tel que p_* soit bien fidèle. Si $q = (K^*, q, L^*)$ est un prolongement plein K' -minimal de p et si $\check{L} = \check{q}^{-1}(\check{K})$, la catégorie L^* est à $\check{L}$ -éjections et q est $(\tau, \check{L})$ -compatible.

La proposition 6 et son corollaire montrent que, dans le cas du corollaire, le prolongement plein q de p résout le problème du plongement de p en un foncteur „minimal” compatible avec les éjections.

Remarque. La proposition 6 est également vraie si l'on suppose que τ est une application $(K^*, \check{K})$ -éjection naturalisée multiforme partielle, i.e. une application de K_0^* dans la classe des parties de K associant à e une classe (éventuellement vide) de $(K^*, \check{K})$ -éjecteurs de but e .

4. CAS DES FONCTEURS VERS UNE CATÉGORIE D'APPLICATIONS

Dans ce paragraphe, nous supposons que K^* est la catégorie pleine $\mathcal{M}$ d'applications associée à l'univers $\mathcal{M}_0$ et que K' est la classe $\mathcal{M}'$ des injections canoniques. Un foncteur $\mathcal{M}'$ -étalant est alors un foncteur $\square$ -étalant [4] et un foncteur $\mathcal{M}'$ -résolvant à droite est un foncteur résolvant à droite au sens de la définition 8-III [1].

PROPOSITION 7. Soit $P = (\mathcal{M}, P, \hat{H}^*) \in \mathcal{H}_0^e$ un foncteur d'homomorphismes saturé et soit H^* une sous-catégorie pleine et saturée de $\hat{H}^*$. La restriction de P à la sous-catégorie pleine (resp. à la sous-catégorie) stable par $(\mathcal{M}', P)$ -injections si $\varepsilon = e$ et par $(\mathcal{M}', P)$ -noyaux si $\varepsilon = n$ engendrée par H est un foncteur d'homomorphismes saturé.

Preuve. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 1. Dire que $j \in \hat{H}$ est une $(\mathcal{M}', P)$ -injection signifie que $a(j)$ est une P -sous-structure de $\beta(j)$.

1°) Soit $\varepsilon = e$ et désignons par p' et p'' les restrictions de P à la sous-catégorie pleine H'' et à la sous-catégorie H''' stables par $(\mathcal{M}', P)$ -injections engendrées par H . Pour montrer que p' et p'' sont des foncteurs d'homomorphismes saturés, il suffit de montrer que H'' et H''' sont des sous-catégories saturées de $\hat{H}^*$. Or ces catégories admettent $B = a(H_0 \cdot (K', P)^\Gamma)$ pour classes de leurs unités. Soit $s' \in B$ et $f' \in \hat{H}_\gamma^* \cdot s'$; il existe $s \in H$ dont s' est une P -sous-structure; soit $\underline{f}$ une bijection de $P(s)$ sur M telle que

$$\underline{f}(x) = P(f')(x) \text{ si } x \in P(s').$$

Puisque P est un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe $f \in \hat{H}_\gamma^* \cdot s$ tel que $P(f) = \underline{f}$; on a $f \in H$, car H est saturée. Comme f' est un $(\mathcal{M}', P)$ -sous-morphisme de $f \in H$, on a

$$f' \in H'' \cdot s' \subset H' \cdot s'.$$

Donc H''' et H'' sont saturées.

2°) Examinons le cas où $\varepsilon = n$; pour voir que les restrictions $\hat{p}$ et $\hat{p}'$ de P à la sous-catégorie pleine $\hat{C}^*$ et à la sous-catégorie $\hat{C}''$ stables par $(\mathcal{M}', P)$ -noyaux engendrées par H sont des foncteurs d'homomorphismes saturés, il suffit de montrer que $\hat{C}^*$ et $\hat{C}''$ sont des sous-catégories saturées de $\hat{H}^*$. Posons $L = C$ ou C' . D'après le théorème 1, on a $\hat{L} = \bigcup_{n \in N} L_n$, où $L_1 = H$; ainsi L_1 est saturée. Supposons prouvé $\hat{H}_\gamma^* \cdot (L_{n-1})_0^* \subset (L_n)_\gamma^*$ et soient $s' \in (L_n)_0^*$ et $f' \in \hat{H}_\gamma^* \cdot s'$. Il existe un couple $(g, g') \in L_{n-1} \times L_{n-1}$ admettant un $(\mathcal{M}', P)$ -noyau $j \in L_n$ de source s' (en d'autres termes s' est un P -noyau de (g, g')). Comme plus haut on construit un $f \in \hat{H}_\gamma^* \cdot a(g)$ dont f' est un $(\mathcal{M}', P)$ -sous-morphisme. L'hypothèse de récurrence entraîne $f \in (L_n)_\gamma^*$, d'où

$$g_1 = g \cdot f^{-1} \in L_n \quad \text{et} \quad g'_1 = g' \cdot f^{-1} \in L_n.$$

Le couple $(g_1, g'_1) \in L_n \times L_n$ admettant $j' = f \cdot j \cdot f'^{-1}$ pour $(\mathcal{M}', P)$ -noyau, on a $j' \in L_{n+1}$. Si $L = C$, la sous-catégorie L_{n+1} est pleine, et $f' \in L_{n+1}$. Si $L = C'$, on a aussi $f' \in L_{n+1}$, car $j' \cdot f' = f \cdot j \in L_n$. Dans tous les cas, $\hat{H}_\gamma^* \cdot (L_n)_0^* \subset (L_{n+1})_\gamma^*$. Par récurrence, on obtient

$$\hat{H}_\gamma^* \cdot \hat{L}_0^* = \bigcup_{n \in N} \hat{H}_\gamma^* \cdot (L_n)_0^* \subset \bigcup_{n \in N} L_{n+1} = \hat{L}.$$

Il s'ensuit que $\hat{L}^*$ est une sous-catégorie saturée de $\hat{H}^*$. ■

Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, H^*)$ un foncteur fidèle tel que p_γ soit bien fidèle. Si $s \in H_0^*$, posons $\underline{s} = p(s)$ et, pour $h \in H$, désignons par $\underline{h}$ la surjection définissant l'application $p(h)$.

PROPOSITION 8. *Tout prolongement plein (resp. prolongement) $\mathcal{M}^e$ -minimal de p est un foncteur d'homomorphismes saturé, pour $\varepsilon = e$ ou n .*

1

Preuve. Soit $q = p_{\mathcal{H}'}^e$, le prolongement plein $\mathcal{M}^e$ -minimal canonique de p considéré dans les théorèmes 2 et 3 dont nous reprenons les notations. Rappelons la construction de la catégorie L^* telle que $q = (\mathcal{H}, q, L^*)$: Soit $\hat{L}_0^*$ la classe des couples $(s, (s, \iota, M))$, où $s \in H_0^*$ et $M \subset s$; pour tout $\hat{s} \in H_0^*$, soit $(s, M)\hat{s}$ la classe des $h \in s \cdot H \cdot \hat{s}$ vérifiant $\underline{h}(\hat{s}) \subset M$ et soit $E_{\hat{s}}(s, M)$ la classe des couples

$$((M, f, \underline{s}), \hat{s}) \in M \cdot \mathcal{H} \cdot \underline{s} \times \{\hat{s}\}, \quad \text{où} \quad (s, f, \underline{s}) \in p((s, M)\hat{s}).$$

Soit r_0 la relation d'équivalence sur $\hat{L}_0^*$:

$$(s, (s, \iota, M)) \sim (s', (s', \iota, M')) \quad \text{si, et seulement si,}$$

$$M' = M \text{ et } E_{\hat{s}}(s, M) = E_{\hat{s}}(s', M') \text{ pour } \hat{s} \in H_0^*.$$

La classe $\sigma = (s, (s, \iota, M)) \bmod r_0$ sera notée $[s, M]$ et on posera $q(\sigma) = M$. On a $L_0^* := \hat{L}_0^*/r_0$ et L est la classe des triplets $\bar{g} = (\sigma', g, \sigma)$, où

$$\sigma \in L_0^*, \sigma' \in L_0^* \quad \text{et} \quad g \in q(\sigma') \cdot \mathcal{H} \cdot q(\sigma)$$

tels que, si $f \in q(\sigma \cdot L \cdot \hat{s})$, on ait $g \cdot f \in q(\sigma' \cdot L \cdot \hat{s})$. De plus $q(\bar{g}) = g$. Nous identifions H^* à la sous-catégorie pleine de L^* ayant pour unités les classes $[s, \underline{s}]$. — Montrons que q est un foncteur d'homomorphismes saturé. En effet, soit $\sigma = [s, M] \in L_0^*$ et f une bijection de M sur M' . Puisque p est un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe un $\bar{g} \in H_0^* \cdot s$ appliqué par p sur une bijection admettant f pour restriction à M . La classe $\sigma' = [\beta(\bar{g}), M']$ est une q -sous-structure de $\beta(\bar{g})$ (théorème 2); comme $\bar{g} \in H_0^*$ et

$$\bar{g}' = (\beta(\bar{g}), f, \sigma) = \bar{g} \cdot (s, \iota, \sigma) \in L,$$

il existe $\bar{j} = (\sigma', f, \sigma) \in L_0^*$ tel que $(\beta(\bar{g}), \iota, \sigma') \cdot \bar{j} = \bar{g}'$. Il s'ensuit que le foncteur bien fidèle $q_{\bar{g}}$ est un foncteur d'hypermorphismes saturé. Si de plus $\sigma \in H$, on a $\beta(\bar{g}) = \sigma'$ et $\bar{j} \in H$, c'est-à-dire H^* est une sous-catégorie saturée de L^* .

— D'après la proposition 7, les restrictions $p_{\mathcal{H}'}^e$ de q aux sous-catégories et sous-catégories pleines $(\mathcal{H}', q)^e$ -stables engendrées par H sont des foncteurs d'homomorphismes saturés, car q en est un et H^* est saturée dans L^* . Ceci achève la démonstration, tout prolongement plein (resp. prolongement) $\mathcal{M}^e$ -minimal de p étant isomorphe dans $\mathcal{H}$ à $p_{\mathcal{H}'}^e$ (resp. à $p_{\mathcal{H}''}^e$). ■

Si a est un générateur de H^* , nous désignons par p_a le foncteur fidèle de H^* vers $\mathcal{H}$ tel que $p_a(s) = s \cdot H \cdot a$ si $s \in H_0^*$ et que $p_a(h)$ soit l'application $f \mapsto h \cdot f$ de $a(h) \cdot H \cdot a$ dans $\beta(h) \cdot H \cdot a$.

2

- 1 DÉFINITION. On dira que p est associé à un générateur de H^* si H^* admet un générateur a tel que $p(a)$ ait un seul élément et qu'il existe une équivalence naturelle de p sur p_a .

THÉORÈME 4. Supposons que p soit associé à un générateur a de H^* et soit $p_{\mathcal{H}^*}^e = (\mathcal{H}, q, L^*)$ un prolongement plein $\mathcal{H}$ -étalant minimal de p ; alors a est un générateur de L^* , il existe un isomorphisme G' de L^* sur une sous-catégorie pleine $\mathfrak{N}$ de la catégorie $\mathfrak{R}(\mathcal{H}, H^*)^\square$ et $(\mathfrak{N}, \iota, \mathfrak{N}')$ est un foncteur à noyaux.

Preuve. Soit a un générateur de H^* tel que $\underline{a} = \{a_-\}$ et qu'il existe un triplet (p_a, γ, p) définissant une équivalence naturelle I' . Si $s \in H_0^*$ et $x \in s$, montrons que $x_s = \gamma(s)(x) \in s \cdot H \cdot a$ vérifie $x_s(a_-) = x$. En effet, $\gamma(a)$ étant une bijection de $\underline{a}$ sur $a \cdot H \cdot a$, on trouve $\gamma(a)(a_-) = a$. L'égalité

$$I'(x_s) = (p_a(x_s), \gamma(s), \gamma(a), p(x_s)) \in \square \mathcal{H}$$

entraîne

$$p_a(x_s) \cdot \gamma(a)(a_-) = \gamma(s) \cdot p(x_s)(a_-), \quad \text{i.e.} \quad x_s = \gamma(s)(x_s(a_-));$$

- 2 comme $\gamma(s)$ est une bijection, $x = x_s(a_-)$. — Soit $p_{\mathcal{H}^*}^e = q = (\mathcal{H}, q, L^*)$ le prolongement $\mathcal{H}^e$ -minimal de p considéré dans la proposition 8 dont nous reprenons les notations. Si $\sigma = [s, M] \in L_0^*$, pour tout $x \in M$, on a $x_s \in (s, M)a$ d'après ce qui précède, et par suite $x_M \in q(\sigma \cdot L \cdot a)$ en désignant par x_M l'application $a_- \rightarrow x$ de $\underline{a}$ dans M . Autrement dit, $q(\sigma \cdot L \cdot a) = M \cdot \mathcal{H} \cdot \underline{a}$, et a est un générateur de L^* . — Soit G le foncteur canonique $\delta_{a, H}$ de L^* vers $\mathfrak{N}(\mathcal{H}, H^*)^\square$ construit dans le § 0 à partir de q et de H ; comme L^* est q -engendré par H , la restriction de G à L_0^* est injective. Supposons

$$\bar{g}_i = (\sigma', g_i, \sigma) \in L \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2 \quad \text{et} \quad G(\bar{g}_1) = G(\bar{g}_2).$$

L'application $\tau_{G(\bar{g}_i)}(a)$ appliquant x_M sur $g_i(x)_{M'}$, où $M = q(\sigma)$ et $M' = q(\sigma')$, on a

$$g_1(x) = g_2(x) \quad \text{pour tout } x \in M, \text{ d'où } \bar{g}_1 = \bar{g}_2.$$

— Soit $\mathcal{V}$ une transformation naturelle de $G(\sigma)$ vers $G(\sigma')$ et soit g l'application de $M = q(\sigma)$ dans $M' = q(\sigma')$ définie par

$$g(x)_{M'} = \tau_{\mathcal{V}}(a)(x_M) \quad \text{pour } x \in M.$$

Montrons que $\bar{g} = (\sigma', g, \sigma)$ appartient à L . En effet, soient $\hat{s} \in H_0^*$ et $f \in q(\sigma \cdot L \cdot \hat{s})$. Si $z \in \hat{s}$, de la relation

$$\mathcal{V}(z_{\hat{s}}) = (G(\sigma')(z_{\hat{s}}), \tau_{\mathcal{V}}(a), \tau_{\mathcal{V}}(\hat{s}), G(\sigma)(z_{\hat{s}})) \in \square \hat{\mathcal{H}},$$

on déduit

$$G(\sigma')(z_{\hat{s}}) \cdot \tau_{\mathcal{V}}(\hat{s})(f) = \tau_{\mathcal{V}}(a) \cdot G(\sigma)(z_{\hat{s}})(f)$$

et, en utilisant l'égalité $G(\sigma)(z_s)(f) = f(z)_M$, on obtient

$$\tau_{\Psi}(\delta)(f)(z)_M = g \cdot f(z)_{M'};$$

par suite $\tau_{\Psi}(\delta)(f) = g \cdot f \in G(\sigma')(\delta) = q(\sigma' \cdot L \cdot \delta)$. Donc $\bar{g} \in L$ et $\Psi = G(\bar{g}) \in G(L)$. Ainsi G définit un isomorphisme G' de L^* sur une sous-catégorie pleine $\mathfrak{N}'$ de $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^{\square}$.

— Soit $(\sigma, \iota, \sigma'')$ un $(\mathcal{M}', q)$ -noyau de $(\bar{g}, \bar{g}')$ dans L^* , où

$$\bar{g} = (\sigma', g, \sigma) \in L \quad \text{et} \quad \bar{g}' = (\sigma', g', \sigma) \in L.$$

Le couple $(G(\bar{g}), G(\bar{g}'))$ admet pour noyau dans $\mathfrak{N}$ la transformation naturelle canonique de Φ vers $G(\sigma)$, où Φ est le sous-foncteur de $G(\sigma)$ tel que $\Phi(\delta)$ soit, pour tout $\delta \in H_0^*$, la classe noyau de $(\tau_{\bar{g}}(\delta), \tau_{\bar{g}'}(\delta))$, c'est-à-dire la classe des $f \in q(\sigma \cdot L \cdot \delta) = G(\sigma)(\delta)$ vérifiant $g \cdot f = g' \cdot f$. Le foncteur q étant résolvant à droite, M'' est la classe des $x \in M$ tels que $g(x) = g'(x)$, si $\sigma = [s, M]$ et $q(\sigma'') = M''$. On a $[s, M''] = \sigma''$ et, $(s, M'')\delta$ étant formé des $h \in (s, M)\delta$ tels que $h(\delta) \subset M''$, la classe $G(\sigma'')(\delta)$ est formée des applications $(M'', \underline{f}, \underline{\delta})$ associées aux $f \in G(\sigma)(\delta)$ pour lesquels $g \cdot f = g' \cdot f$, i.e. aux $f \in \Phi(\delta)$. Soit φ la bijection

$$f \mapsto (M'', \underline{f}, \underline{\delta}) \quad \text{de } \Phi(\delta) \text{ sur } G(\sigma'')(\delta).$$

Il est évident que le triplet $(G(\sigma''), \varphi, \Phi)$ définit une équivalence naturelle. Par conséquent $G(\sigma'') \in \mathfrak{N}'$ est aussi un noyau de $(G(\bar{g}), G(\bar{g}'))$ dans $\mathfrak{N}$. Ceci prouve que $(\mathfrak{N}, \iota, \mathfrak{N}')$ est un foncteur à noyaux, les catégories $\mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N}$ étant à noyaux. ■

COROLLAIRE. Soit $p_{\mathcal{X}}^n$ un prolongement plein $\mathcal{M}^n$ -minimal de p . Si p est associé à un générateur de H^* , la sous-catégorie pleine stable par noyaux de $\mathfrak{N}$ engendrée par $G'(H)$ est équivalente à $a(p_{\mathcal{X}}^n)$.

Preuve. Montrons d'abord le résultat suivant: Soit S^* une catégorie à noyaux et S'^* une sous-catégorie pleine de S^* telle que (S', ι, S'^*) soit un foncteur à noyaux; soit A^* une sous-catégorie pleine de S'^* . Les sous-catégories pleines stables par noyaux de S^* et S'^* engendrées par A^* , notées $\hat{A}^*$ et $\bar{A}^*$ respectivement, sont équivalentes. En effet, d'après l'exemple § 3, $\hat{A}^*$ est la source d'un prolongement $R_{\theta}(S^*)^n$ -minimal de (S^*, ι, A^*) , où $R_{\theta}(S^*)$ est la classe des monomorphismes de S^* ; elle est donc construite par récurrence par la méthode du théorème 1, et l'on a $\hat{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, où $A_1 = A$ et où toute unité de A_n est source d'un noyau d'un couple d'éléments de A_{n-1} . Supposons prouvée la relation $A_{n-1} \subset S_r' \cdot \bar{A} \cdot S_r'$ et soit $s \in (A_n)_0^*$. Il existe un couple $(f, f') \in A_{n-1} \times A_{n-1}$ admettant un noyau $j \in S \cdot s$ et il existe des inversibles g et g' de S^* tels que

$$f_1 = g' \cdot f \cdot g \in \bar{A} \quad \text{et} \quad f'_1 = g' \cdot f' \cdot g \in \bar{A}$$

1+

2

(car $\bar{A}^*$ est pleine dans S^*); l'élément $s = a(j)$ est aussi un noyau de (f_1, f'_1) dans S^* . Par ailleurs (f_1, f'_1) admet un noyau j' dans S'^* qui est un noyau de (f_1, f'_1) dans S^* , car le foncteur (S^*, ι, S'^*) est à noyaux. Il s'ensuit que $a(j')$ est isomorphe dans S^* à s et, comme $a(j') \in \bar{A}$, on voit que $A_n \subset S'^* \cdot \bar{A} \cdot S'^*$. Par récurrence il en résulte que $\bar{A}^*$ est un élargissement de $\bar{A}$, de sorte que $\bar{A}^*$ et $\bar{A}$ sont équivalentes a fortiori. — Appliqué au cas où, avec les notations du théorème 4, on a $S^* = \mathfrak{R}$, $S' = \mathfrak{R}'$ et $A = G(H)$, ce résultat prouve le corollaire. ■

5. PROLONGEMENT D'UN FONCTEUR EN UN FONCTEUR A LIMITES PROJECTIVES

Soit $\mathcal{J}$ une classe de catégories et soit $\mathfrak{R}_{\mathcal{J}}(M^*)^*$ la catégorie somme des catégories $\mathfrak{R}(M^*, I^*)^{\square}$, où $I^* \in \mathcal{J}$ (ces catégories étant disjointes, la classe $\mathfrak{R}_{\mathcal{J}}(M^*)$ sous-jacente à $\mathfrak{R}_{\mathcal{J}}(M^*)^*$ est la réunion des classes $\mathfrak{R}(M^*, I^*)$); pour simplifier les notations, le symbole de composition est noté $\cdot$ au lieu de $\square$. Nous désignons par $\mathcal{J}(M^*)$ la catégorie définie comme suit: M^* et $\mathfrak{R}_{\mathcal{J}}(M^*)^*$ en sont des sous-catégories pleines, les autres éléments étant les triplets (Φ, Ψ, e) , où $e \in M_0^*$, où Φ est un foncteur de $I^* \in \mathcal{J}$ vers M^* et où $\Psi \in \Phi \cdot \mathfrak{R}_{\mathcal{J}}(M^*)^* \cdot \bar{e}$; ce triplet admet dans $\mathcal{J}(M^*)$ pour source e , pour but Φ ; la loi de composition vérifie de plus les égalités:

$$\begin{aligned} \Psi' \cdot (\Phi, \Psi, e) &= (\Phi', \Psi' \square \Psi, e) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \Psi' \in \Phi' \cdot \mathfrak{R}_{\mathcal{J}}(M^*) \cdot \Phi, \\ (\Phi, \Psi, e) \cdot g &= (\Phi, \Psi g, a(g)) \quad \text{si, et seulement si,} \quad g \in e \cdot M \end{aligned}$$

(où Ψg dénote la transformation naturelle $\Psi \square \bar{g}^{\square}$ telle que $\tau_{\Psi g}(i) = \tau_{\Psi}(i) \cdot g$ pour tout $i \in a(\Phi)_0$). En particulier on a $M_0^* \cdot \mathcal{J}(M^*) = M$. Pour que (Φ, Ψ, e) soit un $(\mathcal{J}(M^*), M)$ -éjecteur, il faut et il suffit que Ψ soit une limite projective naturalisée, i.e. que e soit une limite projective de Φ , la projection canonique de e vers $\Phi(i)$ étant $\tau_{\Psi}(i)$ pour tout $i \in a(\Phi)_0$. Dans ce cas, si Ψ' est une transformation naturelle d'un foncteur constant $\bar{e}'$ vers Φ , nous noterons $\lim_{\Psi} \Psi'$ ou $\lim \Psi'$ l'unique élément g de M tel que

$$(\Phi, \Psi, e) \cdot g = (\Phi, \Psi', e) \quad (\text{c'est-à-dire } \Psi' = \Psi g).$$

M^* est une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives si, et seulement si, $\mathcal{J}(M^*)$ est une catégorie à M -éjections. Remarquons que, si $\mathcal{J}$ a un seul élément I^* , la catégorie $\mathcal{J}(M^*)$ est le joint des foncteurs $(\mathfrak{R}(M^*, I^*)^{\square}, \iota, \mathfrak{R}(M^*, I^*)^{\square}, e)$, où e est le foncteur de M^* vers $\mathfrak{R}(M^*, I^*)^{\square}$ associant à h la transformation naturelle $\bar{h}^{\square}$ constante sur h .

On appelle *application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme partielle sur M^** une application μ de $\mathfrak{R}_{\mathcal{I}}(M^*)_0$ dans la classe des parties de $\mathfrak{R}_{\mathcal{I}}(M^*)$ associant à tout foncteur Φ de $I^* \in \mathcal{I}$ vers M^* une classe $\mu(\Phi)$ (éventuellement vide) de limites projectives naturalisées de but Φ ; si $\mu(\Phi) \neq \emptyset$, on dira que μ est une application *$\mathcal{I}$ -limite projective multiforme sur M^** ; dans ce cas M^* est une catégorie à $\mathcal{I}$ -limites projectives. On retrouve la notion d'application $\mathcal{I}$ -limite projective partielle (resp. projective) [4] lorsque $\mu(\Phi)$ a au plus un (resp. a un) élément pour tout Φ . Si μ est une application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme partielle sur M^* et si q est un foncteur de $\bar{M}^*$ vers M^* , on dira que q est *μ -compatible* s'il existe une application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme partielle $\bar{\mu}$ sur $\bar{M}^*$ appliquée par q sur μ , i.e. telle que, pour tout foncteur $\bar{\Phi}$ de $I^* \in \mathcal{I}$ vers $\bar{M}^*$, la classe $\mu(q \cdot \bar{\Phi})$ soit formée des éléments $q\Psi$ dans lesquels $\Psi \in \bar{\mu}(\bar{\Phi})$. Si $q_{\cdot}$ est bien fidèle, la donnée de μ détermine $\bar{\mu}$ d'une façon unique.

Supposons choisies une catégorie $\check{K}^*$ et une application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme partielle μ sur $\check{K}^*$. Désignons par K^* la catégorie $\mathcal{I}(\check{K}^*)$, par K'_q , pour tout foncteur q de $I^* \in \mathcal{I}$ vers $\check{K}^*$, la classe (éventuellement vide) des triplets $(q, \theta, e) \in K$, où $\theta \in \mu(q)$, la source de θ étant le foncteur constant $\tilde{e}$, par K'' la classe réunion des K'_q lorsque q varie. Soit de plus $\check{p} = (\check{K}^*, \check{p}, \check{H}^*)$ un foncteur tel que $\check{p}_{\cdot}$ soit bien fidèle et $\check{p}$ fidèle. Notons $K(\mu)^* = K'^*$ la sous-catégorie de K^* engendrée par la classe $K'' \cup \check{p}(\check{H}_0^*) \cup \mathfrak{R}_{\mathcal{I}}(\check{K}^*)_0$; les éléments de K' n'appartenant pas à K'' sont des unités. Si $H^* = \mathcal{I}(\check{H}^*)$, le foncteur $\check{p}$ s'étend en un foncteur $\mathcal{I}(\check{p}) = p$ de H^* vers K^* en posant

$$\begin{aligned} p(\Psi) &= \check{p}\Psi \quad \text{si} \quad \Psi \in \mathfrak{R}_{\mathcal{I}}(\check{H}^*), \\ p(\Phi, \Psi, s) &= (\check{p} \cdot \Phi, \check{p}\Psi, \check{p}(s)). \end{aligned}$$

Soit q le foncteur (K^*, q, L^*) prolongement plein K' -étalant minimal de p considéré dans le théorème 2, et notons $\check{q}$ la restriction $(\check{K}^*, \check{q}, \check{L}^*)$ de q à $\check{L}^* = \check{q}^{-1}(\check{K})^*$.

PROPOSITION 9. *Avec les notations précédentes, soit Φ un foncteur d'une catégorie I^* vers $\check{H}^*$ et $\bar{\Phi} = (\check{L}^*, \Phi, I^*)$. Si Φ admet s pour limite projective dans $\check{p}$, s est une limite projective de $\bar{\Phi}$. Si $I^* \in \mathcal{I}$ et si $\theta \in \mu(\check{p} \cdot \Phi)$, il existe une limite projective naturalisée Θ de but $\bar{\Phi}$ telle que $\check{q}\Theta = \theta$.*

Preuve. Nous reprenons les notations de la démonstration du théorème 2. Soit Φ un foncteur de I^* vers $\check{H}^*$; posons

$$q = \check{p} \cdot \Phi = p(\Phi) \quad \text{et} \quad \bar{\Phi} = (\check{L}^*, \Phi, I^*).$$

Si Φ admet s pour limite projective dans $\check{p}$, le foncteur (H^*, Φ, I^*) admet s pour limite projective dans p , car $\check{H}_0^* \cdot H \subset \check{H}$, et, d'après le corollaire 1 du théorème 2, s est une limite projective de (L^*, Φ, I^*) ; la sous-catégorie $\check{L}^*$ de L^* étant pleine, s est aussi une limite projective de $\bar{\Phi}$. — Supposons que l'on ait $I^* \in \mathcal{J}$ et $\theta \in \mu(\varphi)$; alors il existe $k = (\varphi, \theta, e) \in K'_\varphi \subset K'$ et, par construction, on a $\sigma = (\Phi, k) \bmod r_0 \in L_0^*$ et $\bar{k} = (\sigma, k, s) \in L$. Montrons que

$$(\Phi(i), \tau_\theta(i), \sigma) \in \check{L} \quad \text{pour tout } i \in I_0^*.$$

En effet, dire que $(f, s) \in E_s(\Phi, k)$, où $s \in H_0^*$, signifie que $f \in e \cdot K \cdot p(s)$ et qu'il existe $m \in \Phi \cdot H \cdot s$ tel que $p(m) = k \cdot f$. Comme $f \in \check{K}_0^* \cdot K \subset \check{K}$, la classe $E_s(\Phi, k)$ est vide si $s \notin \check{H}_0^*$. Soit $s \in \check{H}_0^*$; alors m est de la forme (Φ, χ, s) , où χ est une transformation naturelle telle que

$$\tau_\chi(i) \in \Phi(i) \cdot \check{H} \cdot s \quad \text{et} \quad p(\tau_\chi(i)) = \tau_\theta(i) \cdot f.$$

Il en résulte que $(\tau_\theta(i) \cdot f, s) \in E_s(\Phi(i), \varphi(i))$ et, a fortiori, que $(\Phi(i), \tau_\theta(i), \sigma)$ est un élément de $\check{L}$ que nous noterons $\tau_\theta(i)$. Le foncteur $\check{q}$ étant fidèle et θ étant une transformation naturelle de $\check{q}(\sigma)$ vers φ , le triplet $(\bar{\Phi}, \tau_\theta, \bar{\sigma})$, où $\bar{\Phi} = (\check{L}^*, \Phi, I^*)$, définit aussi une transformation naturelle $\bar{\theta}$ telle que $\check{q}\bar{\theta} = \theta$. Montrons que σ est une limite projective de $\bar{\Phi}$, la limite projective naturalisée correspondante étant $\bar{\theta}$. Il nous suffit de voir que, si Ψ est une transformation naturelle d'un foncteur constant $\bar{\sigma}'$, où $\sigma' \in \check{L}_0^*$, vers $\bar{\Phi}$, il existe un et un seul $\bar{g} \in \sigma \cdot \check{L} \cdot \sigma'$ tel que $\Psi = \bar{\theta}\bar{g}$. Puisque θ est une limite projective naturalisée et $\check{q}\Psi$ une transformation naturelle ψ d'un foncteur constant vers φ , il existe $g = \lim \psi$ tel que $\psi = \theta g$. Nous allons prouver que l'on a $(\sigma, g, \sigma') \in \check{L}$. Comme L^* est q -engendrée par H , il nous faut montrer, que si $f \in q(\sigma' \cdot L \cdot s)$ et si $s \in H_0^*$, alors $g \cdot f \in q(\sigma \cdot L \cdot s)$. Or $f \in q(\sigma' \cdot L \cdot s)$ entraîne $s \in \check{H}_0^*$ et $f = q(\bar{f})$, où $\bar{f} \in \sigma' \cdot \check{L} \cdot s$. La transformation naturelle $\Psi\bar{f}$ prenant ses valeurs dans $\square \check{H}^*$, le triplet $(\Phi, \tau_{\Psi\bar{f}}, \bar{s})$ définit une transformation naturelle Ψ' , de sorte que l'on trouve $(\Phi, \Psi', s) \in H$. De plus

$$q(\Phi, \Psi', s) = (\varphi, \psi f, \check{p}(s)) = k \cdot g \cdot f,$$

car

$$q\Psi' = q(\Psi\bar{f}) = \psi f = (\theta g)f = \theta(g \cdot f).$$

Autrement dit, $(g \cdot f, s) \in E_s(\Phi, k)$, d'où

$$g \cdot f \in q(\sigma \cdot L \cdot s) \quad \text{et} \quad \bar{g} = (\sigma, g, \sigma') \in \check{L}.$$

Il s'ensuit $\bar{g} = \lim_\theta \Psi$, le foncteur q étant fidèle et $q(\bar{g})$ étant égal à $\lim_\theta(\check{q}\Psi)$. Ainsi $\bar{\theta}$ est une limite projective naturalisée de but $\bar{\Phi}$ et $\check{q}\bar{\theta} = \theta$. ■

Remarque. Il ne résulte pas de la proposition 9 que $\check{q}$ est compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives; en fait, on peut construire un exemple où il ne l'est pas.

THÉOREME 5. Soit $\check{p}$ un foncteur fidèle tel que $\check{p}_\gamma$ soit bien fidèle. Si μ est une application $\mathcal{J}$ -limite projective multiforme partielle sur $\check{K}^*$, il existe un foncteur $P = (\check{K}^*, \underline{P}, \check{H}^*)$ vérifiant les conditions suivantes:

- 1° $\check{H}^*$ est une sous-catégorie pleine de $\check{H}^*$ et $\check{p}$ la restriction de P à $\check{H}^*$; si $\check{p}$ est compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives, $(\check{H}^*, \iota, \check{H}^*)$ l'est aussi.
- 2° P est fidèle, μ -compatible et P_γ est bien fidèle.
- 3° $\check{H}^*$ est P -engendrée (voir § 2) par $\check{H}$.

Preuve. Prenons pour K'^* la catégorie $K'(\mu)^*$ associée plus haut à μ et soit $\check{q}$ le foncteur considéré dans la proposition 9; nous reprenons les notations de la démonstration précédente. Nous allons définir par récurrence transfinie une suite croissante transfinie de catégories $(L_\lambda)_{\lambda \leq \lambda}$ comme suit: A toute classe I telle qu'il existe $I' \in \mathcal{J}$, associons son ordinal λ_I , c'est-à-dire le plus petit ordinal équipotent à I . Soit λ le plus petit ordinal limite régulier supérieur à $\hat{\lambda} = \sup_{I \in \mathcal{J}} \lambda_I + 1$; cet ordinal est inférieur à l'ordinal initial régulier [11] d'indice $\hat{\lambda}$. Posons $L_1 = \check{H}^*$ et $q_1 = \check{p}$. Soit λ un ordinal tel que $\lambda \leq \lambda$ et supposons défini, pour tout ordinal $\lambda' < \lambda$, un foncteur $q_{\lambda'}$ de $L_{\lambda'}$ vers $\check{K}^*$ vérifiant, pour tout ordinal $\lambda'' < \lambda'$, la condition $(C_{\lambda'\lambda''})$ suivante:

$(C_{\lambda'\lambda''})$: $q_{\lambda'}$ admet $q_{\lambda''}$ pour restriction à la sous-catégorie pleine $L_{\lambda''}$ de $L_{\lambda'}$ et, si Φ est un foncteur d'une catégorie I' vers $L_{\lambda''}$ admettant s pour limite projective dans $q_{\lambda''}$, alors s est aussi une limite projective de $(L_{\lambda'}, \underline{\Phi}, I')$ dans $q_{\lambda'}$.

— Si $\lambda = \lambda' + 1$, désignons par q_λ le foncteur associé à $q_{\lambda'}$, par la construction de la proposition 9, en y remplaçant $\check{p}$ par $q_{\lambda'}$, et $\check{q}$ par q_λ (en particulier $q_\lambda = \check{q}$); d'après cette proposition, q_λ vérifie la condition $(C_{\lambda\lambda'})$ et, a fortiori, la condition $(C_{\lambda\lambda''})$ pour tout $\lambda'' < \lambda$. Par ailleurs, si λ n'a pas de prédécesseur, posons $L_\lambda = \bigcup_{\lambda' < \lambda} L_{\lambda'}$; la suite $(L_{\lambda'})_{\lambda' < \lambda}$ de catégories étant croissante, il existe une unique catégorie L_λ admettant $L_{\lambda'}$ pour sous-catégorie pour tout $\lambda' < \lambda$ et un foncteur q_λ dont $q_{\lambda'}$ est une restriction; si Φ est un foncteur de I' vers $L_{\lambda''}$ admettant s pour limite projective dans $q_{\lambda''}$, pour $\lambda'' < \lambda$, et si Ψ est une transformation naturelle d'un foncteur constant $\tilde{s}'$ vers $(L_\lambda, \underline{\Phi}, I')$, il existe un ordinal λ' tel que $\lambda' \leq \lambda' < \lambda$ et $s' \in L_{\lambda'}$, et par suite $\Psi(I) \subset \square L_{\lambda'}$. Le foncteur $q_{\lambda'}$ vérifiant la condition $(C_{\lambda\lambda'})$, le foncteur $(L_\lambda, \underline{\Phi}, I')$ admet s pour limite projective, de sorte qu'il existe

$$g = \lim(\boxplus L_{\lambda'}, \underline{\Psi}, I') \in L_{\lambda'} \subset L_\lambda;$$

donc $g = \lim \Psi$ et s est une limite projective de (L_i^*, Φ, I^*) . Ainsi q_i vérifie dans tous les cas la condition $(C_{\lambda''})$ pour tout $\lambda'' < \lambda$. Ceci permet, par récurrence transfinie, de construire un foncteur $q_1 = (\check{K}^*, \underline{q}_1, L_1)$. Nous écrirons

$$L_1^* = \bar{H}^* \quad \text{et} \quad q_1 = P.$$

- 1 Evidemment P est fidèle, P_γ bien fidèle et $\check{p}$ est la restriction de P à la sous-catégorie pleine $\check{H}^*$ de $\bar{H}^*$. De la condition (C_{A1}) , il résulte que $(\bar{H}^*, \iota, \check{H}^*)$ est à J^* -limites projectives en même temps que $\check{p}$. — Montrons que P est μ -compatible. En effet, soit Φ un foncteur de $I^* \in \mathcal{J}$ vers $\bar{H}^*$ et supposons $\theta \in \mu(\Phi)$, où $\varphi = P \cdot \Phi$.

1° Si $\Phi(I) \subset H$, d'après la proposition 9, il existe une limite projective naturalisée Θ de but $(\check{L}^*, \Phi, I^*)$ appliquée par $\check{q}$ sur θ . La condition (C_{A2}) entraîne que $(\exists \bar{H}^*, \underline{\Theta}, I^*)$ est une limite projective naturalisée de but Φ , que nous notons $\bar{\mu}_\theta(\Phi)$.

2° Pour tout $i \in I_0^*$, il existe un ordinal $\lambda_i < A$ tel que $\Phi(i) \in L_{\lambda_i}$; comme A est un ordinal régulier supérieur à l'ordinal de I , on a

$$\lambda' = \sup_{i \in I_0^*} \lambda_i < A, \quad \text{d'où} \quad \lambda = \lambda' + 1 < A.$$

La sous-catégorie L_λ^* étant pleine dans $\bar{H}^*$, il s'ensuit $\Phi(I) \subset L_\lambda$. Le passage de q_i à $q_{\lambda+1}$ étant analogue à celui de $\check{p}$ à $\check{q} = q_2$, la proposition 9 permet encore de construire une limite projective naturalisée Θ de but $(L_{\lambda+1}^*, \Phi, I^*)$ telle que $q_{\lambda+1} \Theta = \theta$; la transformation naturelle $(\exists \bar{H}^*, \underline{\Theta}, I^*)$ est, en vertu de $(C_{A\lambda+1})$, une limite projective naturalisée, que nous noterons $\bar{\mu}_\theta(\Phi)$.

— Comme P_γ est bien fidèle, la transformation naturelle $\bar{\mu}_\theta(\Phi)$ définie ainsi dans tous les cas par récurrence transfinie est l'unique limite projective naturalisée de but Φ appliquée par P sur θ , de sorte qu'elle ne dépend pas du choix de l'ordinal λ intervenant dans sa définition. Désignons par $\bar{\mu}(\Phi)$ la classe des limites projectives naturalisées $\bar{\mu}_\theta(\Phi)$ associées de cette manière aux différents $\theta \in \mu(P \cdot \Phi)$. Si $\mu(P \cdot \Phi) = \emptyset$, nous posons $\bar{\mu}(\Phi) = \emptyset$. La surjection $\Phi \rightarrow \bar{\mu}(\Phi)$ ainsi obtenue est une application $\mathcal{J}$ -limite projective multiforme partielle $\bar{\mu}$ sur $\bar{H}^*$, appliquée par P sur μ . Donc P est μ -compatible.

— Soit B la classe des triplets $\bar{g} = (\sigma', g, \sigma)$ vérifiant $\sigma \in \bar{H}_0^*$, $\sigma' \in \bar{H}_0^*$, $g \in P(\sigma') \cdot \check{K} \cdot P(\sigma)$ et $g \cdot P(\sigma \cdot \bar{H} \cdot s) \subset P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot s)$ pour tout $s \in \check{H}_0^*$. Soit B_λ la sous-classe de B formée des $\bar{g}$ tels que $\sigma \in L_\lambda$ et $\sigma' \in L_\lambda$. Si

$$\bar{h} \in \bar{H}, \quad \alpha(\bar{h}) = \sigma, \quad \beta(\bar{h}) = \sigma' \quad \text{et} \quad P(\bar{h}) = h,$$

la condition $\bar{f} \in \sigma \cdot \bar{H} \cdot s$, où $s \in \check{H}_0^*$, entraîne

$$P(\bar{h} \cdot \bar{f}) = h \cdot P(\bar{f}) \in P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot s),$$

de sorte que $(\sigma', h, \sigma) \in B$. Comme P est fidèle, on peut identifier $\bar{h}$ à ce triplet, identifiant ainsi $\bar{H}$ à une partie de B . — Inversement, soit $\bar{g} = (\sigma', g, \sigma) \in B$.

1° Si $\sigma \in \check{H}_0^*$, on a $g = g \cdot P(\sigma) \in P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot \sigma)$, et par suite $\bar{g} \in \bar{H}$. A fortiori B_1 s'identifie avec $L_1 = \bar{H}$.

2° Soit $\lambda \leq A$ un ordinal et supposons que $L_{\lambda'}$ s'identifie à $B_{\lambda'}$ pour tout $\lambda' < \lambda$. Si λ n'a pas de prédécesseur, on a $B_\lambda = \bigcup_{\lambda' < \lambda} B_{\lambda'} = L_\lambda$. Considérons le cas où $\lambda = \lambda' + 1$ et où $\bar{g} \in B_\lambda - B_{\lambda'}$; d'après la construction de q_λ à partir de $q_{\lambda'}$ et le théorème 2, $\bar{g}$ s'identifie à un élément de L_λ si, et seulement si, pour toute unité $\hat{\sigma}$ de $L_{\lambda'}$, la relation $f \in P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot \hat{\sigma})$ entraîne $g \cdot f \in P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot \hat{\sigma})$. Or, soit $\bar{f} \in \sigma' \cdot \bar{H} \cdot \hat{\sigma}$ et $f = P(\bar{f})$, où $\hat{\sigma} \in L_{\lambda'}$. Pour tout $s \in \check{H}_0^*$ et tout $f' \in P(\hat{\sigma} \cdot \bar{H} \cdot s)$, on a

$$f \cdot f' \in P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot s), \quad \text{d'où} \quad g \cdot f \cdot f' \in P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot s)$$

par définition de B .

a) Si $\sigma' \in L_{\lambda'}$, en utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient $(\sigma', g \cdot f, \hat{\sigma}) \in \bar{H}$, c'est-à-dire $g \cdot f \in P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot \hat{\sigma})$.

b) Soit $\sigma' \notin L_{\lambda'}$; il existe une limite projective naturalisée Θ dont la source est un foncteur constant $\check{\sigma}'$ et le but un foncteur Φ de $L' \in \mathcal{I}$ vers L_λ , et telle que $\Phi(I) \subset L_{\lambda'}$ et $q_\lambda \Theta = \theta \in \mu(q_\lambda \cdot \Phi)$. Puisque $\tau_\theta(i) \in \Phi(i) \cdot L_{\lambda'} \cdot \sigma'$, on a

$$\tau_\theta(i) \cdot g \cdot f \cdot f' \in P(\Phi(i) \cdot \bar{H} \cdot s)$$

et, d'après l'hypothèse de récurrence, $\tau(i) \in L_{\lambda'}$, où

$$\tau(i) = (\Phi(i), \tau_\theta(i) \cdot g \cdot f, \hat{\sigma}).$$

P étant fidèle et le triplet $(q_\lambda \cdot \Phi, P\tau, P(\hat{\sigma}))$ définissant la transformation naturelle $\theta(g \cdot f)$, le triplet $(\Phi, \tau, \hat{\sigma})$ définit une transformation naturelle Ψ . Il existe $\bar{h} = \lim_\theta \Psi \in \sigma' \cdot \bar{H} \cdot \hat{\sigma}$ tel que

$$P(\bar{h}) = \lim_\theta (q_\lambda \Psi) = \lim \theta(g \cdot f) = g \cdot f,$$

ce qui signifie $g \cdot f \in P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot \hat{\sigma})$. Ainsi B_λ s'identifie à L_λ .

3° Par récurrence transfinie, on voit que $B = B_A$ s'identifie à $\bar{H}$. ■

COROLLAIRE 1. Si $\sigma \in \check{H}_0^*$, $\sigma' \in \check{H}_0$ et $P(\sigma \cdot \bar{H} \cdot s) = P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot s)$ pour tout $s \in \check{H}_0^*$, on a $\sigma = \sigma'$ (notations du théorème 5).

En effet, ceci résulte du fait que P_γ est bien fidèle et que $\bar{H}^*$ est P -engendré par $\check{H}$. ■

COROLLAIRE 2. *Si $\check{p}$ est un foncteur fidèle compatible avec les $\mathcal{I}$ -limites projectives, si $\check{p}_\gamma$ est bien fidèle et si $\check{K}^*$ est une catégorie à $\mathcal{I}$ -limites projectives, il existe un foncteur fidèle P de $\bar{H}^*$ vers $\check{K}^*$, à $\mathcal{I}$ -limites projectives, prolongeant $\check{p}$, tel que P_γ soit bien fidèle et $(\bar{H}^*, \iota, \check{H}^*)$ compatible avec les $\mathcal{I}$ -limites projectives.*

En effet, il suffit d'appliquer le théorème 5 en prenant sur $\check{K}^*$ une application $\mathcal{I}$ -limite projective μ . ■

6. PROLONGEMENT MINIMAL D'UN FONCTEUR EN UN FONCTEUR A LIMITES PROJECTIVES

Soient encore $\hat{\mathcal{M}}_0$ et $\hat{\mathcal{M}}_0$ les deux univers considérés dans le § 1, et notons toujours $\hat{\mathcal{M}}$ la saturante de $\hat{\mathcal{M}}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$. Nous supposons de plus données, dans toute cette section: une partie $\mathcal{I}$ de $\hat{\mathcal{F}}_0$ telle que $\mathcal{I} \in \hat{\mathcal{M}}_0$, une catégorie $\check{K}^* \in \hat{\mathcal{F}}_0$ et une application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme partielle μ sur $\check{K}^*$.

Soit $\mathcal{H}^\mu$ la sous-catégorie de $V_{\check{K}^*} \hat{\mathcal{F}}$ ayant pour unités les foncteurs $q_i = (\check{K}^*, q_i, C_i)$ tels que q_i soit fidèle et μ -compatible et $q_{i\gamma}$ bien fidèle; il existe alors une application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme partielle $\bar{\mu}_i$ sur C_i appliquée par q_i sur μ (elle est déterminée d'une manière unique); les éléments de $\mathcal{H}^\mu$ sont les triplets $\hat{F} = (q_2, F, q_1) \in \hat{\mathcal{F}}_0^3$ tels que

$$q_1 \in \mathcal{H}_0^\mu, \quad q_2 \in \mathcal{H}_0^\mu, \quad q_2 \cdot F = q_1$$

et que F applique $\bar{\mu}_1$ sur $\bar{\mu}_2$. Evidemment $\mathcal{H}^\mu$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}(\check{K}^*)$ (§ 2).

Soit Z^μ le foncteur de $\mathcal{H}^\mu$ vers $\hat{\mathcal{M}}$ restriction de Z (§ 2) qui applique $\hat{F}$ sur $P_{\hat{\mathcal{F}}}(F)$. Définissons de même le foncteur $\hat{Z}^\mu$ de $\mathcal{H}^\mu$ vers $\hat{\mathcal{M}}$ associé à l'univers $\hat{\mathcal{M}}_0$ (mais encore relatif à la catégorie donnée $\check{K}^* \in \hat{\mathcal{F}}_0$). Soit X^μ la classe des $\hat{Z}^\mu$ -monomorphismes $\hat{F}$ tels que $F(C_1)^*$ soit une sous-catégorie pleine de C_2^* .

PROPOSITION 10. $\hat{Z}^\mu$ est un foncteur $\sqsubset$ -engendrant pour $\hat{\mathcal{M}}$ et $(\hat{\mathcal{M}} \cdot \hat{\mathcal{M}}_0, X^\mu, \mathcal{H}^\mu)$ -engendrant.

Preuve. Supposons $Q = (\check{K}^*, Q, \hat{C}^*) \in \mathcal{H}_0^\mu$ et soit $M \subset \hat{C}$ tel que M appartienne à la saturante $\tilde{\mathcal{M}}$ de $\hat{\mathcal{M}}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$. Soit C_1^* la sous-catégorie pleine de $\hat{C}^*$ engendrée par M ; puisque Q est fidèle, on voit comme dans la démonstration du théorème 1 que $C_1 \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Soit $\hat{A}$ l'ordinal inaccessible

[11] borne supérieure des ordinaux λ_M des éléments $M \in \hat{\mathcal{M}}_0$; alors A est aussi la borne supérieure des $\lambda_{M'}$, où $M' \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Soit A le plus petit ordinal limite régulier [11] supérieur à $\hat{\lambda} = \sup_{I \in \mathcal{I}} \lambda_I + 1$; on a $\hat{\lambda} < \hat{A}$, car $\lambda_I < \hat{A}$, l'ordinal de $\mathcal{I}$ est inférieur à $\hat{A}$ et $\hat{A}$ est régulier. A vérifiant $A \leq \omega_{\hat{\lambda}}$, où $\omega_{\hat{\lambda}}$ est l'ordinal initial d'indice $\hat{\lambda}$ [11] et $\hat{A}$ étant inaccessible, on obtient $A \leq \omega_{\hat{\lambda}} < \omega_{\hat{A}} = \hat{A}$. Soit λ un certain ordinal tel que $\lambda \leq A$, et supposons définie une suite croissante $(C_{\lambda'})_{\lambda' < \lambda}$ de sous-catégories pleines de $\hat{C}^*$ telles que $C_{\lambda'} \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Définissons C_{λ} comme suit: Si λ est un ordinal limite, $C_{\lambda} = \bigcup_{\lambda' < \lambda} C_{\lambda'}$; puisque $\lambda < \hat{A}$ et que l'ordinal de $C_{\lambda'}$ est inférieur à $\hat{A}$ d'après l'hypothèse de récurrence, on a $C_{\lambda} \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Si $\lambda = \lambda' + 1$, soit V_{λ} la classe des $s \in \hat{C}_0^*$ tels qu'il existe un foncteur Φ de $I' \in \mathcal{I}$ vers $\hat{C}^*$ vérifiant $\Phi(I) \subset C_{\lambda'}$ et une limite projective naturalisée $\Theta \in \bar{\mu}(\Phi)$ de source $\hat{s}$, de but Φ , où $\bar{\mu}$ est l'unique application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme partielle sur $\hat{C}^*$ appliquée par Q sur μ ; prenons pour C_{λ} la sous-catégorie pleine de $\hat{C}^*$ ayant $(C_{\lambda'})_0^* \cup V_{\lambda}$ pour classe de ses unités. En associant à s le couple $((C_{\lambda'}, \Phi, I'), \theta)$, où $\theta = Q\Theta$ (si plusieurs tels couples existent, on en choisit un), on définit une injection de V_{λ} sur une partie de la classe

$$A = \bigcup_{I' \in \mathcal{I}} A_{I'}, \quad \text{où} \quad A_{I'} = C_{\lambda'}^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot I' \times \subseteq \hat{K}^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot I'.$$

Les relations

$$C_{\lambda'}^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot I' \in \hat{\mathcal{M}}_0, \quad \square \hat{K}^* \in \hat{\mathcal{M}}_0 \quad \text{et} \quad \subseteq \hat{K}^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot I' \in \hat{\mathcal{M}}_0$$

entraînent $A_{I'} \in \hat{\mathcal{M}}_0$ et, $\hat{\mathcal{M}}_0$ étant un univers auquel appartient $\mathcal{I}$, on a $A \in \hat{\mathcal{M}}_0$ et $V_{\lambda} \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Il s'ensuit $(C_{\lambda})_0^* \in \hat{\mathcal{M}}_0$, d'où $C_{\lambda} \in \hat{\mathcal{M}}_0$, le foncteur Q étant fidèle. Par récurrence transfinie, on construit de cette façon une sous-catégorie pleine C_A^* de $\hat{C}^*$ telle que $C_A \in \hat{\mathcal{M}}_0$; posons $\hat{M}^* = C_A^*$. L'ordinal A étant régulier un raisonnement analogue à celui fait dans la démonstration du théorème 5 prouve que, pour tout foncteur Φ de $I' \in \mathcal{I}$ vers $\hat{M}^*$, il existe un ordinal $\lambda < A$ tel que $\Phi(I) \subset C_{\lambda}$ et que le foncteur $P = (\hat{K}^*, \underline{Q}, \hat{M}^*)$ restriction de Q est μ -compatible. Il s'ensuit que P est la $(X^{\mu}, \hat{\mathcal{H}}^{\mu})$ -sous-structure de Q engendrée par M et, $\hat{Z}^{\mu}$ étant un foncteur d'homomorphismes saturé, $\hat{Z}^{\mu}$ est $(\hat{\mathcal{M}} \cdot \hat{\mathcal{M}}_0, X^{\mu}, \hat{\mathcal{H}}^{\mu})$ -engendrant. — Comme le foncteur $\hat{Z}^{\mu}$ est à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits fibrés, il est aussi Γ -engendrant pour $\hat{\mathcal{M}}$ d'après la proposition 12 [4]. La source M'' de la $\hat{Z}^{\mu}$ -sous-structure de Q engendrée par M est construite par récurrence transfinie d'une manière semblable à la construction de la complétion $\mathcal{I}$ -projective de M dans $(\hat{C}^*, \bar{\mu})$, lorsque $\bar{\mu}$ est une application $\mathcal{I}$ -limite projective partielle sur $\hat{C}^*$ (voir [4], théorème 5 et [5], théorème 1). ■

COROLLAIRE. Avec les hypothèses du théorème 5 et si $\check{H} \in \hat{\mathcal{M}}_0$, $\mathcal{I} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ et $\check{K} \in \hat{\mathcal{M}}_0$, on a $\bar{H} \in \hat{\mathcal{M}}_0$.

En effet, ce résultat se déduit de la démonstration précédente, appliquée au cas où Q est le foncteur P du théorème 5, car P est alors la $(\check{Z}^\mu, \hat{\mathcal{H}}^\mu)$ -sous-structure de P engendrée par $\check{H} \in \hat{\mathcal{M}}_0$ et l'on a $S^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot I^* \in \hat{\mathcal{M}}_0$ (et non seulement $\in \tilde{\mathcal{M}}_0$) pour $S^* \in \hat{\mathcal{F}}_0$ et $I^* \in \hat{\mathcal{F}}_0$. ■

DÉFINITION. Avec les notations de la démonstration de la proposition 10, on appelle $\hat{M}^*$ la sous-catégorie pleine (resp. M^{**} la sous-catégorie) (μ, Q) -stable engendrée par M .

EXEMPLE. Avec les notations du théorème 5, la sous-catégorie pleine et la sous-catégorie $(K', P)^\mu$ -stables engendrées par M sont identiques à la sous-catégorie pleine et à la sous-catégorie (μ, P) -stables engendrées par M , lorsque $\mathcal{I}$ est la classe formée de la seule catégorie I^* ayant deux morphismes a_1 et a_2 de source 0, de but 1, et μ l'application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme partielle associant à un foncteur Φ de I^* vers $\check{K}^*$ la classe des transformations naturelles θ de $a(j)$ vers Φ telles que $j = \tau_\theta(0)$ soit un noyau de $(\Phi(a_1), \Phi(a_2))$ dans $\check{K}^*$ appartenant à K' .

Soit $\mathcal{H}'_0^\mu$ (resp. soit $\mathcal{H}''_0^\mu$) la classe des couples $u_i = (q_i, C_i)$ tels que $q_i = (\check{K}^*, q_i, \check{C}_i) \in \mathcal{H}_0^\mu$, que C_i soit une sous-catégorie pleine de $\check{C}_i$ et que $\check{C}_i$ soit la sous-catégorie pleine (resp. la sous-catégorie) (μ, q_i) -stable engendrée par C_i . Pour $\mathcal{L} = \mathcal{H}'$ ou $\mathcal{H}''$, désignons par $\mathcal{L}^\mu$ la catégorie dont les éléments sont les triplets $F = (u_2, F', u_1)$ tels que :

- 1° $u_i = (q_i, C_i) \in \mathcal{L}_0^\mu$, $(q_2, F', q_1) \in \mathcal{H}^\mu$ et $F'(C_1) \subset C_2$;
- 2° $F = (C_2, F', C_1)$ est un isomorphisme.

Soit $\mathcal{H}_\gamma$ la sous-catégorie $\mathcal{H}(\check{K}^*)_\gamma$ de $V_{\check{K}^*} \cdot \hat{\mathcal{F}}$ ayant pour éléments les triplets $(\check{p}_2, F, \check{p}_1)$ tels que $\check{p}_i$ soit un foncteur fidèle, $\check{p}_{i\gamma}$ étant bien fidèle et que F soit un isomorphisme vérifiant $\check{p}_2 \cdot F = \check{p}_1$.

La surjection $\hat{F} \rightarrow (\check{p}_2, F, \check{p}_1)$, où $\check{p}_i = (\check{K}^*, q_{i\gamma}, C_i)$ et $\hat{F} \in \mathcal{L}^\mu$, définit un foncteur fidèle $Y_{\mathcal{L}}^\mu$ de $\mathcal{L}^\mu$ vers $\mathcal{H}_\gamma$.

THÉORÈME 6. $Y_{\mathcal{L}}^\mu$ admet un adjoint à droite: Soit $\check{p} = (\check{K}^*, \check{p}, \check{H}^*) \in \hat{\mathcal{F}}_0$ un foncteur fidèle tel que $\check{p}_\gamma$ soit bien fidèle; $\check{p}$ engendre une $Y_{\mathcal{L}}^\mu$ -structure colibre $(p_{\mathcal{L}}^\mu, \check{H})$ telle que $p_{\mathcal{L}}^\mu$ soit le foncteur P associé à $\check{p}$ dans le théorème 5 et que $p_{\mathcal{H}}^\mu$ soit la restriction de P à la sous-catégorie (μ, P) -stable engendrée par $\check{H}$.

Preuve. Reprenons les notations du théorème 5 et identifions $\bar{h} \in \bar{H}$ au triplet

$$(\sigma', h, \sigma), \quad \text{où} \quad \sigma = a(\bar{h}), \quad \sigma' = \beta(\bar{h}) \text{ et } h = P(\bar{h}).$$

1° Montrons que $(P, \check{H})$ est une $Y_{\mathcal{H}}^\mu$ -structure colibre engendrée par $\check{p}$. Ceci signifie que l'on a $(P, \check{H}) \in \mathcal{H}'_0^\mu$, ce qui résulte du corollaire

de la proposition 10, et que, si $(Q, C) \in \mathcal{H}'^\mu$, où $Q = (\check{K}^*, \underline{Q}, \hat{C}^*)$, et si F est un isomorphisme de C^* sur $\check{H}^*$ tel que $\check{p} \cdot F$ soit une restriction de Q , alors F s'étend d'une manière unique en un foncteur F' de $\hat{C}^*$ vers $\check{H}^*$ tel que $((P, \check{H}), F', (Q, C)) \in \mathcal{H}'^\mu$.

— En effet, d'après la démonstration de la proposition 10 dont nous reprenons les notations, on a $\hat{C} = \bigcup_{\lambda < A} C_\lambda$, avec $C_1 = C$ (car C^* est une sous-catégorie pleine de $\hat{C}^*$). Posons $F_1 = (\check{H}^*, \underline{F}, C^*)$. Soit λ un ordinal tel que $\lambda \leq A$ et supposons définie une suite transfinie $(F_{\lambda'})_{\lambda' < \lambda}$, où $F_{\lambda'}$ est un foncteur de $C_{\lambda'}^*$ vers $\check{H}^*$ vérifiant les conditions:

- (a_λ) $P \cdot F_{\lambda'} = (\check{K}^*, Q_{\lambda'}, C_{\lambda'}^*)$ et, si $\lambda'' < \lambda'$, on a $F_{\lambda''} = (\check{H}^*, \underline{F}_{\lambda''}, C_{\lambda''}^*)$;
- (b_λ) $F_{\lambda'}(u \cdot C_{\lambda'} \cdot C_0^*) = F_{\lambda'}(u) \cdot \check{H} \cdot \check{H}_0$ pour toute unité u de $C_{\lambda'}^*$.

Les foncteurs P et Q étant fidèles, le foncteur $F_{\lambda'}$ est fidèle; comme F est un isomorphisme de C^* sur $\check{H}^*$, il s'ensuit que la restriction de $F_{\lambda'}$ à $u \cdot \hat{C} \cdot C_0^*$ est une bijection sur $F_{\lambda'}(u) \cdot \check{H} \cdot \check{H}_0$ pour tout $u \in C_{\lambda'}^*$. De plus, soit $s \in \check{H}_0$ et $\hat{u} = F^{-1}(s)$; si Φ' est un foncteur de I^* vers $C_{\lambda'}^*$ et si Ψ' est une transformation naturelle de $\tilde{s}$ vers $F_{\lambda'} \cdot \Phi'$, il existe, pour tout $i \in I_0$, un et un seul $\tau(i) \in \Phi'(i) \cdot \hat{C} \cdot \hat{u}$ tel que $F_{\lambda'}(\tau(i)) = \tau_p(i)$, de sorte que le triplet $(\Phi', \tau, \tilde{u})$ définit une transformation naturelle Ψ' appliquée par $F_{\lambda'}$ sur Ψ . Ainsi la surjection $\Psi' \rightarrow F_{\lambda'} \Psi' = \Psi$ est une bijection de la classe des transformations naturelles de $\tilde{u}$ vers Φ' sur la classe des transformations naturelles de $\tilde{s}$ vers $F_{\lambda'} \cdot \Phi'$. Nous allons construire un foncteur F_λ de C_λ^* vers $\check{H}^*$ comme suit:

1° Si λ n'a pas de prédécesseur, F_λ est l'unique foncteur admettant $F_{\lambda'}$ pour restriction pour tout $\lambda' < \lambda$. Il est évident que F_λ vérifie (a_λ) et (b_λ), puisque C_λ^* est la réunion des sous-catégories pleines $C_{\lambda'}^*$.

2° Supposons $\lambda = \lambda' + 1$. Si $h' \in C_{\lambda'}$, posons $F_\lambda(h') = F_{\lambda'}(h')$. Soit u une unité de C_λ^* n'appartenant pas à $C_{\lambda'}$. D'après la proposition 10, il existe une limite projective naturalisée Ω de $\tilde{u}$ vers un foncteur $\hat{\Phi}$ de $I^* \in \mathcal{J}$ vers $\hat{C}^*$ telle que $\theta = Q \Omega \epsilon \mu(Q, \hat{\Phi})$ et $\hat{\Phi}(I) \subset C_{\lambda'}$. Le foncteur P étant μ -compatible et P_γ bien fidèle, il existe une unique limite projective naturalisée $\Theta = \Omega_\theta$ de but $F_{\lambda'} \cdot \hat{\Phi}$, où $\hat{\Phi} = (C_{\lambda'}^*, \hat{\Phi}, I^*)$, vérifiant $P\Theta = \theta$. Si $\tilde{\sigma}$ est la source de Θ , posons $F_\lambda(u) = \sigma$. Soit $\hat{u} \in C_0^*$ et $s = F(\hat{u})$. Lorsque $g \in u \cdot C_\lambda \cdot \hat{u}$, la transformation naturelle Ωg prenant ses valeurs dans $\hat{C}^*$, il existe

$$g_\Omega = \lim_\theta F_{\lambda'}(\Theta g, I^*)$$

vérifiant $g_\Omega \epsilon \sigma \cdot \check{H} \cdot s$ et

$$P(g_\Omega) = \lim_\theta Q(\Omega g) = \lim_\theta \theta Q(g) = Q(g);$$

autrement dit, $g_\Omega = (\sigma, Q(g), s)$. Inversement, si $f \in \sigma \cdot \bar{H} \cdot s$, nous avons construit plus haut une transformation naturelle Ψ' de $\hat{u}$ vers Φ telle que $F_{\lambda'} \Psi' = \Theta f$. Si $g = \lim_\Omega \hat{\Psi}'$, où $\hat{\Psi}' = (\Xi \hat{C}', \underline{\Psi}', I')$, on a $g \in C_\lambda$ et

$$Q(g) = \lim_\Omega Q \hat{\Psi}' = \lim_\Omega P(\Theta f) = P(f),$$

de sorte que $f = g_\Omega$. Ainsi la surjection $g \rightarrow (\sigma, Q(g), s)$ est une bijection de $u \cdot C_\lambda \cdot \hat{u}$ sur $\sigma \cdot \bar{H} \cdot s$; nous poserons $g_\Omega = F_\lambda(g)$. — Montrons que $\sigma = F_\lambda(u)$ (et a fortiori $F_\lambda(g)$) est indépendant du choix de Ω . En effet, soit Ω' une autre limite projective naturalisée de $\tilde{u}$ vers un foncteur $\hat{\Phi}'$ de $I'' \in \mathcal{I}$ vers $\hat{C}'$ telle que

$$\hat{\Phi}'(I') \subset C_{\lambda'} \quad \text{et} \quad \theta' = Q \Omega' \in \mu(Q \cdot \hat{\Phi}');$$

notons Θ' la limite projective naturalisée $\Theta_{\Omega'}$ associée de même à Ω' et $\tilde{\sigma}'$ sa source. Soient

$$s \in \check{H}_0^*, \quad \hat{u} = F^{-1}(s) \quad \text{et} \quad f \in \sigma \cdot \bar{H} \cdot s;$$

nous venons de voir qu'il existe $g \in u \cdot C_\lambda \cdot \hat{u}$ tel que

$$f = F_\lambda(g) \quad \text{et} \quad Q(g) = P(f).$$

Un raisonnement analogue au précédent à partir de Ω' prouve la relation

$$f' = (\sigma', Q(g), s) \in \sigma' \cdot \bar{H} \cdot s.$$

Puisque Ω et Ω' jouent des rôles symétriques, il s'ensuit

$$P(\sigma \cdot \bar{H} \cdot s) = P(\sigma' \cdot \bar{H} \cdot s) \quad \text{pour tout } s \in \check{H}_0^*,$$

d'où $\sigma = \sigma'$ d'après le corollaire 1 du théorème 5. — Supposons de plus

$$\hat{h} \in C_\lambda \cdot u, \quad \beta(\hat{h}) = u_1, \quad Q(\hat{h}) = h \quad \text{et} \quad \sigma_1 = F_\lambda(u_1).$$

Si $f \in \sigma \cdot \bar{H} \cdot s$, où $s \in \check{H}_0^*$ et $F^{-1}(s) = \hat{u}$, il existe $g \in u \cdot C_\lambda \cdot \hat{u}$ tel que $F_\lambda(g) = f$ et les relations

$$f' = F_\lambda(\hat{h} \cdot g) \in \sigma_1 \cdot \bar{H} \cdot s \quad \text{et} \quad P(f') = Q(\hat{h} \cdot g) = h \cdot P(f)$$

entraînent, en vertu du théorème 5, $(\sigma_1, h, \sigma) \in \bar{H}$. Le foncteur P étant fidèle, (σ_1, h, σ) est identique à $F_\lambda(\hat{h})$ lorsque ce dernier a déjà été défini (i.e. si $\hat{h} \in C_\lambda \cup (C_\lambda)_0^* \cup C_\lambda \cdot C_0^*$). Nous poserons dans tous les cas $F_\lambda(\hat{h}) = (\sigma_1, h, \sigma)$. On définit de cette façon une surjection $\underline{F}_\lambda: \hat{h} \rightarrow F_\lambda(\hat{h})$ de C_λ dans $\bar{H}$. Etant donné que

$$(\check{K}, \underline{P} \cdot \underline{F}_\lambda, C_\lambda) = (\check{K}, \underline{Q}, C_\lambda),$$

où P et Q sont fidèles, $\underline{F}_\lambda$ définit un foncteur F_λ de C_λ^* vers H^* . En particulier, on a $\underline{F}_\lambda \tau_\Omega = \tau_\Theta$. La démonstration qui précède prouve que F_λ vérifie les conditions (a_λ) et (b_λ).

— Par récurrence transfinie, on construit par cette méthode un foncteur fidèle $F' = F_A$ de $\hat{C}^*$ vers $\bar{H}^*$, prolongeant F (et F_λ pour tout $\lambda < A$), tel que $P \cdot F' = Q$ et que

$$F'(u \cdot \hat{C}^* \cdot C_0^*) = F'(u) \cdot \bar{H} \cdot \check{H}_0^* \quad \text{pour tout } u \in \hat{C}_0^*.$$

— Soit $\hat{\Omega}$ une limite projective naturalisée de source $\hat{u}$ de but $\hat{\Phi} \in \hat{C}^* \cdot \hat{F} \cdot I^*$, où $I^* \in \mathcal{I}$, telle que $\hat{\theta} = Q \hat{\Omega} \in \mu(Q \cdot \hat{\Phi})$; posons $\hat{\sigma} = F_\lambda(u)$. Il existe une limite projective naturalisée $\hat{\Theta}$ de source $\hat{\sigma}$, de but $F' \cdot \hat{\Phi}$ vérifiant $P \hat{\Theta} = \hat{\theta}$, et l'on a $(\sigma, \iota, \hat{\sigma}) \in \bar{H}$. Soit $s \in \check{H}_0^*$ et $f \in \sigma \cdot \bar{H} \cdot s$; le début de la démonstration (appliquée pour $\lambda' = A$) affirme qu'il existe une transformation naturelle Ψ' de $\hat{u}$, où $F(\hat{u}) = s$, vers $\hat{\Phi}$ appliquée par F' sur $\hat{\Theta}f$; si $g = \lim_{\hat{\Omega}} \Psi'$, on a $F'(g) \in \hat{\sigma} \cdot \bar{H} \cdot s$ et

$$P(F'(g)) = Q(g) = \lim_{\hat{\Theta}} Q \Psi' = \lim_{\hat{\Theta}} P(\hat{\Theta}f) = P(f).$$

On en déduit $(\hat{\sigma}, \iota, \sigma) \in \bar{H}$ et, P_γ étant bien fidèle, $\sigma = \hat{\sigma}$. Donc $\hat{\Theta} = F' \hat{\Omega}$. Par conséquent

$$((P, \check{H}), F', (Q, C)) \in \mathcal{H}'^{\mu}.$$

— Soit F'' un autre foncteur prolongeant F et tel que

$$((P, \check{H}), F'', (Q, C)) \in \mathcal{H}'^{\mu}.$$

Notons F'_λ la restriction de F'' à C_λ^* . On a $\underline{F}_1'' = \underline{F}_1' = \underline{F}$; supposons prouvée la formule $F'_\lambda = F'_\lambda$, pour tout $\lambda' < \lambda$, où $\lambda \leq A$. Soit $u \in C_\lambda - C_{\lambda'}$ une unité; il existe une limite projective naturalisée Ω de source $\hat{u}$, de but $\hat{\Phi} \in \hat{C}^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot I^* \subset \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{I}$, telle que

$$\hat{\Phi}(I) \subset C_{\lambda'} \quad \text{et} \quad Q \Omega \in \mu(Q \cdot \hat{\Phi}).$$

La transformation naturelle $F'' \Omega$ étant l'unique limite projective naturalisée appliquée par P sur $Q \Omega$, on trouve $F'' \Omega = F' \Omega$ et, a fortiori, $F''(u) = F'(u)$. Ainsi les foncteurs F'_λ et F''_λ ont même restriction à $(C_\lambda)_0^*$; le foncteur P étant fidèle, il s'ensuit $F'_\lambda = F''_\lambda$ car $\underline{P F'_\lambda} = \underline{P F''_\lambda}$. Par récurrence transfinie, on obtient $F' = F'_A = F''_A = F''$.

2°) Soit $\hat{H}^*$ la sous-catégorie (μ, P) -stable engendrée par $\check{H}$ et soit $\hat{P}$ la restriction de P à $\hat{H}^*$. Soit $(Q, C) \in \mathcal{H}_0'^{\mu}$, où $Q = (\check{K}^*, \underline{Q}, \hat{C}^*)$, et soit F un isomorphisme de C^* sur $\hat{H}^*$ tel que $\check{p} \cdot F$ soit une restriction de Q . D'après la proposition 10, on a $\hat{C} = \bigcup_{\lambda < A} C'_\lambda$, où $C'_1 = C$ et où C'_λ est construite par récurrence transfinie: Si $\lambda = \lambda' + 1$, la sous-catégorie C'_λ de $\hat{C}^*$ est engendrée par les éléments de $C'_{\lambda'}$, par les projections $\tau_{\hat{\Omega}}(i)$ et par les $\lim_{\hat{\Omega}} \Psi$, où Ω est une limite projective naturalisée de but $\hat{\Phi} \in \hat{C}^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot I^* \subset \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{I}$ telle que

$$Q \Omega \in \mu(Q \cdot \hat{\Phi}) \quad \text{et} \quad \hat{\Phi}(I) \subset C'_{\lambda'},$$

où $i \in I_0^*$ et où $\mathcal{V}$ est une transformation naturelle d'un foncteur constant vers $\hat{\Phi}$ prenant ses valeurs dans $\square C_{\lambda'}^*$. Il s'ensuit que toute unité $u \in C_{\lambda'}^* - C_{\lambda'}^*$ est la limite projective d'un tel $\hat{\Phi}$ et tout $g \in u \cdot C_{\lambda'}^* \cdot C_0^*$ est de la forme $\lim_{\Omega} \Psi$, avec $\Psi = \Omega g$ et $\Psi(I) \subset \square C_{\lambda'}^*$. Par suite le raisonnement par récurrence fait pour construire ci-dessus F' permet de prolonger F en un foncteur $\hat{F}'$ de $\hat{C}^*$ vers $\bar{H}^*$ tel que $(P, \hat{F}', Q) \in \mathcal{H}^n$. Comme Q et $\hat{P}$ sont respectivement les $\hat{Z}^n$ -sous-structures de Q et de P engendrées par C et par $\hat{H} = F(C)$, on a $\hat{F}'(\hat{C}) \subset \hat{H}$ (appendice [4]), d'où

$$(\hat{P}, F'', Q) \in \mathcal{H}^{n''}, \quad \text{où} \quad F'' = (\hat{H}^*, \hat{F}', \hat{C}^*).$$

On voit aussi que $((\hat{P}, \hat{H}), F'', (Q, C))$ est l'unique élément de $\mathcal{H}^{n''}$ appliqué par $Y_{\mathcal{H}^{n''}}^n$ sur F . Donc $(\hat{P}, \hat{H})$ est la $Y_{\mathcal{H}^{n''}}^n$ -structure colibre engendrée par $\hat{P}$. ■

COROLLAIRE. Soit $\mathcal{U}$ une classe de classes telle que $\sum_{i \in I} J_i \in \mathcal{U}$ si $I \in \mathcal{U}$ et $J_i \in \mathcal{U}$ pour tout $i \in I$. Supposons que $\mathcal{J}$ soit la classe des catégories discrètes I^0 telles que $I \in \mathcal{U}$ et que, pour tout foncteur φ de $I^0 \in \mathcal{J}$ vers $\bar{K}^*$, la classe $\mu(\varphi)$ soit formée de tous les produits naturalisés de φ . Si $\check{p} \in \mathcal{H}_0^n$ et si $\check{q}$ est le foncteur associé à $\check{p}$ dans la proposition 9, $(\check{q}, \hat{H})$ est une $Y_{\mathcal{H}^{n''}}^n$ -structure colibre engendrée par $\check{p}$.

Preuve. D'après le théorème précédent, il nous suffit de voir que $P = \check{q}$. Or, soit Φ un foncteur de $I^0 \in \mathcal{J}$ vers $\bar{L}^*$ et $\theta \in \mu(\varphi)$, où $\varphi = \check{q} \cdot \Phi$. Puisque $I^0 \in \mathcal{J}$ est discrète (i.e. $I^0 = I_0^0$), la donnée de Φ revient à celle de la famille $(\Phi(i))_{i \in I}$; dire que la transformation naturelle θ de source $\hat{e}$ est une limite projective naturalisée de φ signifie que $((\tau_{\theta}(i))_{i \in I}, e)$ est un produit naturalisé (déf. 1-IV [1]) de $(\Phi(i))_{i \in I}$. En vertu de la proposition 9, à tout $\Phi(i) \in \bar{L}_0^*$ est associé un produit naturalisé $((p_j^i)_{j \in J_i}, \Phi(i))$ d'une famille $(s_j^i)_{j \in J_i}$, où $s_j^i \in \bar{H}_0^*$ et $J_i^0 \in \mathcal{J}$. Posons

$$e_j^i = \check{p}(s_j^i) \quad \text{et} \quad J = \sum_{i \in I} J_i.$$

Le théorème de transitivité des produits (th. 1-IV [1]) affirme que

$$\pi = (\tau(j, i))_{(j, i) \in J}, \quad \text{où} \quad \tau(j, i) = p(p_j^i) \cdot \tau_{\theta}(i),$$

est un produit naturalisé. La transformation naturelle θ' définie par le triplet $(\chi, \tau, \hat{e})$, où χ est le foncteur de la catégorie discrète $J^0 \in \mathcal{J}$ vers $\bar{K}^*$ tel que $\chi(j, i) = e_j^i$, appartient à $\mu(\chi)$. Il existe, par construction de $\check{L}$, un produit naturalisé $((\hat{\tau}(j, i))_{(j, i) \in J}, s)$ de $(s_j^i)_{(j, i) \in J}$ appliqué par $\check{q}$ sur θ' . Il en résulte que $((\hat{\tau}(i))_{i \in I}, s)$, où $\hat{\tau}(i) = [\hat{\tau}(j, i)]_{j \in J_i}$, est un produit naturalisé dans $\bar{L}^*$, car $\hat{\tau}(j, i) = p_j^i \cdot \tau(i)$. La transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \hat{\tau}, \hat{s})$ est une limite projective naturalisée appliquée par $\check{q}$ sur θ . On en conclut que $\check{q}_3 = \check{q}_2 = \check{q}$ et, par récurrence transfinie, $P = \check{q}$.

1+

DÉFINITION. Avec les notations du théorème 6, on appelle P le *prolongement plein* (resp. on appelle $\hat{P} = (\check{K}^*, \underline{P}_\iota, \hat{H}^*)$ le prolongement) à $\mathcal{J}$ -limites projectives μ -minimal de $\check{p}$.

Remarques. 1° Sous les hypothèses de l'exemple précédant le théorème 6, le prolongement plein (resp. prolongement) à $\mathcal{J}$ -limites projectives μ -minimal de p est identique (par construction) au prolongement plein (resp. prolongement) K' -résolvant à droite minimal de p . Toutefois les résultats du théorème 3 relatifs aux noyaux ne se déduisent pas du théorème 6; en effet, dans ce dernier, nous montrons seulement que, si $(Q, C) \in \mathcal{L}_0^a = \mathcal{L}^a(\check{K}^*)_0$, tout isomorphisme (et non tout foncteur bien surjectif à gauche comme dans le théorème 3) de C^* vers $\check{H}^*$ se prolonge en un foncteur de $a(Q)$ vers $\check{H}^*$ (resp. vers $\hat{H}^*$). La méthode du théorème 3 ne s'étend pas dans le cas des limites projectives quelconques, puisqu'elle utilise le fait qu'un noyau dans p est une p -injection, alors que les projections canoniques d'une limite projective (par exemple d'un produit) ne sont généralement pas des p -injections. 1+

2° Supposons que $\check{K}^*$ soit la catégorie $\mathcal{M}$ d'applications relative à l'univers $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Soit $\check{p}$ un foncteur d'homomorphismes saturé de $\check{H}^*$ vers $\mathcal{M}$. Un prolongement plein (resp. un prolongement) à $\mathcal{J}$ -limites projectives μ -minimal de $\check{p}$ peut ne pas être un foncteur d'homomorphismes saturé; par exemple si $\mathcal{J}$ est la classe formée des catégories discrètes finies et μ l'application produit fini naturalisé canonique sur $\mathcal{M}$.

THÉORÈME 7. Soit $\check{p} = (\mathcal{M}, \check{p}, \check{H}^*)$ un foncteur associé à un générateur a de $\check{H}^*$ (§ 2); soit $P = (\mathcal{M}, \underline{P}, \bar{H}^*)$ le prolongement plein à $\mathcal{J}$ -limites projectives μ -minimal de $\check{p}$, où μ est l'application $\mathcal{J}$ -limite projective canonique sur $\mathcal{M}$. Alors a est un générateur de $\bar{H}^*$, il existe un isomorphisme $\bar{a}$ de $\bar{H}^*$ sur une sous-catégorie pleine $\mathfrak{N}'$ de $\mathfrak{N}(\mathcal{M}, \check{H}^*)^\square$ et $(\mathfrak{N}, \iota, \mathfrak{N}')$ est un foncteur à $\mathcal{J}$ -limites projectives. 2

Preuve. Soit a un générateur de $\check{H}^*$ tel que $\check{p}(a) = a = \{a_\lambda\}$. Reprenons les notations du théorème 5 et montrons d'abord que, pour tout $\sigma \in \bar{H}_0^*$, on a

$$P(\sigma \cdot \bar{H} \cdot a) = P(\sigma) \cdot \mathcal{M} \cdot a.$$

En effet, le début de la démonstration du théorème 4 prouve que cette relation est satisfaite lorsque $\sigma \in \check{H}$. Supposons-la prouvée pour tout $\sigma \in L_{\lambda'}$, où $\lambda' < \lambda$ et λ est un ordinal donné, $\lambda \leq A$. Si λ n'a pas de prédécesseur, la formule est aussi vérifiée pour $\sigma \in L_\lambda$. Soit $\lambda = \lambda' + 1$ et $\sigma \in L_\lambda - L_{\lambda'}$. Si $f \in P(\sigma) \cdot \mathcal{M} \cdot a$, l'application f est une application x_M , où $x \in M = P(\sigma)$. Par construction de $\bar{H}$, il existe une limite projective naturalisée θ de source $\bar{\sigma}$, de but un foncteur Φ de $I \in \mathcal{J}$ vers $\bar{H}^*$ telle que

$$P\theta = \theta \in \mu(P \cdot \Phi) \quad \text{et} \quad \Phi(I) \subset L_{\lambda'}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un $\bar{\tau}(i) \in \Phi(i) \cdot \bar{H} \cdot a$ vérifiant $P(\bar{\tau}(i)) = \tau_\theta(i) \cdot f$ pour tout $i \in I_0$; le triplet $(\Phi, \bar{\tau}, \bar{a})$ définit une transformation naturelle Ψ appliquée par P sur θf , car P est fidèle. Donc il existe

$$\bar{f} = \lim_\theta \Psi \in \sigma \cdot \bar{H} \cdot a \quad \text{et} \quad P(\bar{f}) = \lim_\theta P\Psi = f.$$

Par récurrence transfinie, on en déduit l'égalité annoncée pour tout $\sigma \in \bar{H}_0$.

— Désignons par G le foncteur canonique $\delta_{P, \check{H}}$ associé à P et à $\check{H}$ dans le § 0; comme $\bar{H}^*$ est P -engendré par $\check{H}$ (th. 5), la restriction de G à $\bar{H}_0^*$ est injective. Un raisonnement analogue à celui du théorème 4 prouve que G définit un isomorphisme $\bar{G}$ de $\bar{H}^*$ sur une sous-catégorie pleine $\mathfrak{N}'$ de $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, \check{H}^*)^\square$. Avec les notations précédentes, montrons que $G(\sigma)$ est une limite projective de $G \cdot \Phi$. En effet, $G \cdot \Phi$ admet pour limite projective le foncteur F de $\check{H}^*$ vers $\hat{\mathcal{M}}$ associant à $s \in \check{H}_0^*$ la classe des $\xi = (\tau'(i))_{i \in I_0}$, où

$$\tau'(i) \in P(\Phi(i) \cdot \bar{H} \cdot s) \quad \text{et} \quad P(\Phi(k)) \cdot \tau'(i) = \tau'(j)$$

si $k \in j \cdot I \cdot i$, c'est-à-dire $(P \cdot \Phi, \tau', \bar{P}(s))$ définit une transformation naturelle ψ' . Soit $\bar{\tau}'(i)$ l'élément vérifiant $P(\bar{\tau}'(i)) = \tau'(i)$ et $\bar{\tau}'(i) \in \Phi(i) \cdot \bar{H} \cdot s$; le triplet $(\Phi, \bar{\tau}', \bar{s})$ définit une transformation naturelle Ψ' telle que $P\Psi' = \psi'$ et il existe $\bar{g} = \lim_\theta \Psi' \in \sigma \cdot \bar{H} \cdot s$; la surjection $\xi \rightarrow P(\bar{g})$ est une bijection $v(s)$ de $F(s)$ sur $G(\sigma)(s) = P(\sigma \cdot \bar{H} \cdot s)$; le triplet $(G(\sigma), v, F)$ définit une équivalence naturelle, de sorte que $G(\sigma)$ est aussi une limite projective de $G \cdot \Phi$. Par conséquent $(\mathfrak{N}, \iota, \mathfrak{N}')$ est un foncteur à $\mathcal{I}$ -limites projectives, $\bar{H}^*$ étant à $\mathcal{I}$ -limites projectives. ■

COROLLAIRE. Avec les hypothèses du théorème 7, la source $\hat{H}^*$ du prolongement à $\mathcal{I}$ -limites projectives μ -minimal de $\check{p}$ est une catégorie équivalente à la sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, \check{H}^*)^\square$ stable par $\mathcal{I}$ -limites projectives engendrée par $\bar{G}(\check{H})$.

En effet, la démonstration utilise la même méthode que celle du corollaire du théorème 4, en y remplaçant noyau par limite projective et en remarquant que, si Φ est un foncteur d'une catégorie I^* vers une catégorie S^* et si l'on a $\tau(i) \in S_i^* \cdot \Phi(i)$ pour tout $i \in I$, il existe un foncteur Φ' équivalent à Φ , l'équivalence étant définie par le triplet (Φ', τ, Φ) . ■

7. PLONGEMENT MINIMAL D'UNE CATÉGORIE DANS UNE CATÉGORIE À LIMITES PROJECTIVES

Le théorème 6 montre que le problème (P) du prolongement d'un foncteur fidèle $\check{p}$ tel que $\check{p}_\nu$ soit bien fidèle en un foncteur à $\mathcal{I}$ -limites projectives jouissant des mêmes propriétés admet des solutions „minimales”. Nous verrons dans le § 8 que ce problème a aussi des solutions

„maximales”. Comparons ce problème avec le problème (P') du plongement de la catégorie $\check{H}^*$ dans une catégorie à $\mathcal{I}$ -limites projectives. Le problème (P) est évidemment plus précis, puisqu'on cherche à prolonger $\check{H}^*$ en une catégorie à $\mathcal{I}$ -limites projectives, mais de telle sorte que $\check{p}$ se prolonge en un foncteur μ -compatible et fidèle. Les solutions des problèmes (P) et (P') sont donc différentes. Dans [4], nous avons prouvé que le problème (P') admet des solutions „maximales à une équivalence près” (voir aussi [10]). Mais nous n'avons pas cherché s'il admet des solutions „minimales”. Le théorème 7 affirmant que, si $\check{p}$ est associé à un générateur de $\check{H}^*$, la source d'une solution du problème (P) est équivalente à une sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, \check{H}^*)^\square$ suggère que le problème (P') pourrait admettre une sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, \check{H}^*)^\square$ pour solution „minimale à une équivalence près”. Nous allons établir ce résultat sous forme précise. 1

Soient L^* une catégorie, $L \in \hat{\mathcal{M}}_0$, et H^* une sous-catégorie pleine de L^* . Notons $\delta_{L,H}$ le foncteur canonique de L^* vers $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^\square$ associé (§ 0) au foncteur identique de L^* et à H : si $\sigma \in L_0^*$, le foncteur $\delta_{L,H}(\sigma)$ associe à $h \in H$ l'application

$$f \mapsto f \cdot h \quad \text{de} \quad \sigma \cdot L \cdot \beta(h) \quad \text{dans} \quad \sigma \cdot L \cdot \alpha(h);$$

pour $g \in \sigma' \cdot L \cdot \sigma$, la transformation naturelle $\delta_{L,H}(g)$ est définie par le triplet $(\delta_{L,H}(\sigma'), \tau_g, \delta_{L,H}(\sigma))$, où $\tau_g(s)$ est, pour tout $s \in H_0^*$, l'application

$$f \mapsto g \cdot f \quad \text{de} \quad \sigma \cdot L \cdot s \quad \text{dans} \quad \sigma' \cdot L \cdot s.$$

DÉFINITION. On dira que L^* est *pleinement engendré par H* si $\delta_{L,H}$ définit un isomorphisme de L^* sur une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^\square$. 2

Autrement dit: L^* est pleinement engendré par H si, étant données deux unités σ et σ' de L^* , les conditions suivantes sont vérifiées:

1° Si $g \in \sigma' \cdot L \cdot \sigma$, $g' \in \sigma' \cdot L \cdot \sigma$ et si $g \cdot f = g' \cdot f$ pour tout $f \in \sigma \cdot L \cdot H_0^*$, alors $g = g'$ (c'est-à-dire H_0^* est une famille de générateurs [12] de L^*).

2° Si ψ est une transformation naturelle de $\delta_{L,H}(\sigma)$ vers $\delta_{L,H}(\sigma')$, il existe $g \in \sigma' \cdot L \cdot \sigma$ tel que $\psi = \delta_{L,H}(g)$, c'est-à-dire tel que

$$\tau_\psi(s)(f) = g \cdot f \quad \text{pour tout } f \in \sigma \cdot L \cdot s, \text{ où } s \in H_0^*.$$

Si L^* est pleinement engendré par H , toute sous-catégorie pleine de L^* contenant H est pleinement engendrée par H ; si de plus U est un isomorphisme de L^* sur M^* , la catégorie M^* est pleinement engendrée par $U(H)$.

Soit $H^* \in \hat{\mathcal{F}}_0$. Pour simplifier l'écriture, désignons par $\mathfrak{N}$ la catégorie $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^\square$ et par δ le foncteur canonique δ_{H^*} de H^* vers $\mathfrak{N}$; nous savons que $\delta(H)$ définit une sous-catégorie pleine $D^\square$ de $\mathfrak{N}$ (voir § 0). Comme

$\hat{\mathcal{M}} \in \hat{\mathcal{M}}_0$, on a $\mathfrak{N} \in \hat{\mathcal{M}}_0$; soit J le foncteur injection de $\mathfrak{N}$ vers $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^\square$ associant à Ψ la transformation naturelle $(\square \hat{\mathcal{M}}, \underline{\Psi}, H^*)$. Notons η le foncteur $\mathfrak{N}(\delta^*) \cdot \delta_{\mathfrak{N}, D}$ canonique de $\mathfrak{N}$ vers $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^\square$ associé au foncteur identique de $\mathfrak{N}$ et à D .

1 PROPOSITION 11. *Il existe une équivalence naturelle T de J vers η et la catégorie $\mathfrak{N}$ est pleinement engendrée par D .*

Preuve. Soit σ une unité de $\mathfrak{N}$ et soit $s \in H_0^*$. Pour $x \in \sigma(s)$ et pour $s' \in H_0^*$, notons $\tau_{\hat{s}}(s')$ l'application

$$h \mapsto \sigma(h)(x) \quad \text{de} \quad \delta(s)(s') = s \cdot H \cdot s' \quad \text{dans} \quad \sigma(s').$$

Si $h' \in s' \cdot H$ et $\alpha(h') = s''$, on a

$$\begin{aligned} \sigma(h') \cdot \tau_{\hat{s}}(s')(h) &= \sigma(h') \cdot \sigma(h)(x) = \sigma(h \cdot h')(x) = \tau_{\hat{s}}(s'')(h \cdot h') \\ &= \tau_{\hat{s}}(s'') \cdot \delta(s)(h')(h), \end{aligned}$$

de sorte que le triplet $(\sigma, \tau_{\hat{s}}, \delta(s))$ définit une transformation naturelle $\xi \in \eta(\sigma)(s)$. Soit $\gamma(s)$ l'application $x \mapsto \xi$ de $\sigma(s)$ dans $\eta(\sigma)(s)$. L'égalité $\tau_{\hat{s}}(s)(s) = \sigma(s)(x) = x$ entraîne

$$\gamma(s) \cdot \tau_{\hat{s}}(s)(s) = \gamma(s)(x) = \xi.$$

L'application $\gamma(s)$ est injective, car, si $x' \in \sigma(s)$ et $\xi = \gamma(s)(x')$, on trouve

$$x' = \sigma(s)(x') = \tau_{\hat{s}}(s)(s) = x.$$

Elle est aussi surjective, tout $\hat{\xi} \in \eta(\sigma)(s)$ étant l'image par $\gamma(s)$ de $y = \tau_{\hat{s}}(s)(s)$, en vertu des égalités

$$\begin{aligned} \tau_{\hat{s}}(s')(h) &= \sigma(h)(y) = \sigma(h) \cdot \tau_{\hat{s}}(s)(s) \\ &= \tau_{\hat{s}}(s') \cdot \delta(s)(h)(s) = \tau_{\hat{s}}(s')(h), \end{aligned}$$

où $\xi = \gamma(s)(y)$ et $h \in s \cdot H \cdot s'$. Il s'ensuit que $\gamma(s)$ est une bijection de $\sigma(s)$ sur $\eta(\sigma)(s)$ et $(\eta(\sigma), \gamma, J(\sigma))$ définit une équivalence naturelle $t(\sigma)$. — Si $\zeta \in \mathfrak{N}$ a σ pour source, σ' pour but, on trouve $\eta(\zeta) \sqsubseteq t(\sigma) = t(\sigma') \sqsubseteq J(\zeta)$, car, avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} \tau_{\eta(\zeta) \sqsubseteq t(\sigma)}(s)(x) &= \zeta \sqsubseteq \xi = \tau_{t(\sigma')}(s) \cdot \tau_{\zeta \sqsubseteq \xi}(s)(s) = \tau_{t(\sigma') \sqsubseteq \zeta}(s) \cdot \tau_{\hat{s}}(s)(s) \\ &= \tau_{t(\sigma') \sqsubseteq \zeta}(s)(x), \quad \text{où} \quad \tilde{\zeta} = J(\zeta), \end{aligned}$$

pour tout $x \in \sigma(s)$. Donc (η, t, J) définit une équivalence naturelle T . La restriction de η à $\mathfrak{N}_0$ est injective; puisque J est injectif, il en résulte que le foncteur η équivalent à J est aussi injectif. De plus, si Ψ est une transformation naturelle de $\eta(\sigma)$ vers $\eta(\sigma')$, il existe $\zeta \in \mathfrak{N}$ tel que $J(\zeta) = t(\sigma')^{-1} \sqcup \Psi \sqcup t(\sigma)$, la sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^\square$ définie par $J(\zeta)$ étant pleine, et l'on a $\eta(\zeta) = \Psi$. Ainsi $\mathfrak{N}$ est pleinement engendrée par D , de même que toute sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}$ contenant D . ■

Soit $\hat{\mathcal{F}}_{\sim}$ la catégorie quotient de la catégorie $\hat{\mathcal{F}}$ des foncteurs par la relation d'équivalence ϱ :

$F \sim F'$ si, et seulement si, il existe une équivalence naturelle de F sur F' .

Soit $\hat{\mathcal{F}}_{\sim}$ la sous-catégorie de $\hat{\mathcal{F}}_{\sim}$ formée des classes T telles qu'il existe un isomorphisme $F \in T$. Cette sous-catégorie admet $(\hat{\mathcal{F}}_{\sim})_{\sim}$ pour saturante.

Soit $\mathcal{G}_0^{\mathcal{F}}$ (resp. soit $\mathcal{G}_0^{\mathcal{F}'}$) la classe des couples $(\hat{C}^*, C)$ tels que $\hat{C}^* \in \hat{\mathcal{F}}_0$ soit une catégorie à $\mathcal{I}$ -limites projectives et C^* une sous-catégorie pleine de $\hat{C}^*$, la sous-catégorie pleine (resp. la sous-catégorie) stable par $\mathcal{I}$ -limites projectives de $\hat{C}^*$ engendrée par C étant $\hat{C}$ (c'est-à-dire $\hat{C}^*$ est la sous-catégorie pleine (resp. la sous-catégorie) $(\mu, (\hat{C}^*, \iota, \hat{C}^*))$ — stable engendrée par C , en notant μ l'application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme sur $\hat{C}^*$ associant à Φ la classe de toutes les limites naturalisées de but Φ . Pour $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ ou $\mathcal{G}''$, soit $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets

$$\hat{T} = ((\hat{C}_2^*, C_2), T', (\hat{C}_1^*, C_1))$$

où $(\hat{C}_i^*, C_i) \in \mathcal{G}_0^{\mathcal{F}}$ et $T' \in \hat{\mathcal{C}}_2^* \cdot \hat{\mathcal{F}}_{\sim} \cdot \hat{C}_1^*$, tels qu'il existe un $F' \in T'$ qui soit compatible avec les $\mathcal{I}$ -limites projectives, qui applique C_1 dans C_2 et dont la restriction $F = (C_2^*, \underline{F}' \iota, C_1^*)$ soit un isomorphisme. Soit $V_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$ le foncteur de $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ vers $\hat{\mathcal{F}}_{\sim}$ associant $F \bmod \varrho$ à $\hat{T}$.

THÉORÈME 8. *Pour $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ ou $\mathcal{G}''$, le foncteur $V_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$ admet un adjoint à droite: $H^* \in \hat{\mathcal{F}}_0$ engendre une $V_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$ -structure colibre de la forme $(H_{\mathcal{G}}^*, H)$, où $H_{\mathcal{G}}^*$ est une catégorie pleinement engendrée par H et équivalente à la sous-catégorie pleine (resp. à la sous-catégorie) de $\mathfrak{R}(\mathcal{H}, H^*)^{\sim}$ stable par $\mathcal{I}$ -limites projectives engendrée par $\delta_H(H)$.*

Preuve. 1^o) Supposons qu'il existe un couple $(L^*, H) \in \mathcal{G}_0^{\mathcal{F}}$ tel que L^* soit pleinement engendré par H (l'existence d'un tel couple sera prouvée ultérieurement) et choisissons une application $\mathcal{I}$ -limite projective l sur L^* , la limite projective σ de φ telle que $l(\varphi)$ ait $\hat{\sigma}$ pour source étant notée $\text{Lim} \varphi$. — Soit $(\hat{C}^*, C) \in \mathcal{G}_0^{\mathcal{F}}$ et F un isomorphisme de C^* sur H^* . Montrons que F s'étend en un foncteur F' de $\hat{C}^*$ vers L^* compatible avec les $\mathcal{I}$ -limites projectives, deux tels prolongements étant équivalents. En effet, d'après la démonstration de la proposition 10, on a $\hat{C} = \bigcup_{\lambda < A} C_{\lambda}$, où A est le plus petit ordinal régulier limite supérieur à l'ordinal λ_I de I pour tout $I \in \mathcal{I}$, où $C_1 = C$ et où $C_{\lambda+1}$ est la sous-catégorie pleine de $\hat{C}^*$ ayant pour unités les limites projectives des foncteurs $\hat{\Phi}$ de $I \in \mathcal{I}$ vers $\hat{C}^*$ tels que $\hat{\Phi}(I) \subset C_{\lambda}$. Posons $F_1 = (L^*, \underline{F}, C^*)$. Soit λ un ordinal tel que $\lambda \leq A$ et supposons défini, pour tout ordinal $\lambda' < \lambda$, un prolongement $F_{\lambda'}$ de F ayant les propriétés: (a $_{\lambda}$) $F_{\lambda''}$ est une restriction de $F_{\lambda'}$ pour tout $\lambda'' < \lambda'$; (b $_{\lambda}$) Si e est une unité de C_{λ}^* , la restriction de F_{λ} à $e \cdot \hat{C} \cdot C_0^*$ est une bijection sur $F_{\lambda'}(e) \cdot L \cdot H_0^*$.

Si λ n'a pas de prédécesseur, le foncteur F_λ de C_λ^* vers L^* admettant $F_{\lambda'}$ pour restriction pour tout $\lambda' < \lambda$ vérifie les conditions (a) _{λ} et (b) _{λ} .
— Considérons le cas où $\lambda = \lambda' + 1$. Écrivons

$$F_\lambda(h) = F_{\lambda'}(h) \quad \text{si} \quad h \in C_{\lambda'}.$$

et choisissons, pour chaque unité $e \in C_\lambda - C_{\lambda'}$, une limite projective naturalisée $\hat{\Theta}(e)$ définie par un triplet $(\hat{\Phi}, \tau_{\hat{\Theta}}, \tilde{e})$, où $\hat{\Phi}$ est un foncteur de $I^* \in \mathcal{S}$ vers $\hat{C}^*$ tel que $\hat{\Phi}(I) \subset C_{\lambda'}$; soient

$$\Phi = (C_{\lambda'}^*, \hat{\Phi}, I^*) \quad \text{et} \quad \varphi = F_{\lambda'} \cdot \Phi.$$

Posons $F_\lambda(e) = \text{Lim}_{l(\varphi)} \varphi$; si $\tilde{f} \in e \cdot \hat{C} \cdot C_0^*$, soit

$$F_\lambda(\tilde{f}) = \lim_{l(\varphi)} F_{\lambda'}(\Theta(e)\tilde{f}) \in F_\lambda(e) \cdot L \cdot F(\alpha(\tilde{f})),$$

où $\Theta(e)\tilde{f} = (\exists C_{\lambda'}^*, \hat{\Theta}(e)\tilde{f}, I^*)$.

Si $\tilde{f}' \in \alpha(\tilde{f}) \cdot C$, on a

$$F_\lambda(\tilde{f} \cdot \tilde{f}') = \lim_{l(\varphi)} F_{\lambda'}(\Theta(e)(\tilde{f} \cdot \tilde{f}')) = F_\lambda(\tilde{f}) \cdot F_\lambda(\tilde{f}').$$

Si ψ est une transformation naturelle d'un foncteur constant sur $s \in H_0^*$ vers φ , le triplet $(\Phi, \bar{\tau}, \bar{u})$, où $s = F(u)$ et où $\bar{\tau}(i)$ est l'unique élément de $\Phi(i) \cdot \hat{C} \cdot u$ appliqué par $F_{\lambda'}$ sur $\tau_\psi(i)$, définit la seule transformation naturelle Ψ telle que $F_{\lambda'}\Psi = \psi$, car, si $k \in j \cdot I \cdot i$, on a

$$F_{\lambda'}(\Phi(k) \cdot \bar{\tau}(i)) = \varphi(k) \cdot \tau_\psi(i) = \tau_\psi(j) = F_{\lambda'}(\bar{\tau}(j)),$$

d'où $\Phi(k) \cdot \bar{\tau}(i) = \bar{\tau}(j)$. Si de plus $f \in F_\lambda(e) \cdot L \cdot s$ et $\psi = l(\varphi)f$, l'élément

$$\lim_{\hat{\Theta}(e)} \hat{\Psi}, \quad \text{où} \quad \hat{\Psi} = (\exists \hat{C}^*, \hat{\Psi}, I^*),$$

est l'unique $\tilde{f} \in e \cdot \hat{C} \cdot u$ vérifiant $F_\lambda(\tilde{f}) = f$. Ainsi la surjection $\tilde{f} \rightarrow F_\lambda(\tilde{f})$, où $\tilde{f} \in e \cdot \hat{C} \cdot C_0^*$, est une bijection de $e \cdot \hat{C} \cdot C_0^*$ sur $F_\lambda(e) \cdot L \cdot H_0^*$. — Supposons

$$\bar{g} \in C_{\lambda'} \cdot e, \quad s' = \beta(\bar{g}), \quad \sigma = F_\lambda(e) \quad \text{et} \quad \sigma' = F_\lambda(e').$$

Pour tout $s \in H_0^*$, associons à $f \in \sigma \cdot L \cdot s$ l'élément $f' = F_\lambda(\bar{g} \cdot \tilde{f})$ où

$$\tilde{f} \in e \cdot \hat{C} \cdot F^{-1}(s) \quad \text{et} \quad F_\lambda(\tilde{f}) = f.$$

Nous obtenons de cette façon une surjection $\tau(s)$ de $\sigma \cdot L \cdot s$ dans $\sigma' \cdot L \cdot s$. En désignant par n le foncteur canonique $\delta_{L, H}$ de L^* vers $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{H}}, H^*)^\square$ associé au foncteur identique de L^* et à H , le triplet $(n(\sigma'), \tau, n(\sigma))$ définit une transformation naturelle ψ . La catégorie L^* étant pleinement engendrée par H , il existe un et seul $g \in \sigma' \cdot L \cdot \sigma$ tel que $n(g) = \psi$, i.e. tel que

$$g \cdot F_\lambda(\tilde{f}) = F_\lambda(\bar{g} \cdot \tilde{f}) \quad \text{pour tout} \quad \tilde{f} \in e \cdot \hat{C} \cdot C_0^*.$$

Il s'ensuit que $g = F_\lambda(\bar{g})$ lorsque ce dernier a déjà été défini. On peut donc poser dans tous les cas $g = F_\lambda(\bar{g})$. Si $\bar{g}' \cdot \bar{g}$ est défini dans C_λ^* , pour tout $\bar{f} \in e \cdot \hat{C} \cdot C_0^*$, on a

$$F_\lambda(\bar{g}') \cdot F_\lambda(\bar{g}) \cdot F_\lambda(\bar{f}) = F_\lambda(\bar{g}') \cdot F_\lambda(\bar{g} \cdot \bar{f}) = F_\lambda(\bar{g}' \cdot \bar{g} \cdot \bar{f}),$$

de sorte que $F_\lambda(\bar{g}') \cdot F_\lambda(\bar{g})$ est l'unique élément g'' vérifiant $g'' \cdot F_\lambda(\bar{f}) = F_\lambda(\bar{g}' \cdot \bar{g} \cdot \bar{f})$, d'où $g'' = F_\lambda(\bar{g}' \cdot \bar{g})$. Ceci prouve que la surjection $\bar{g} \rightarrow F_\lambda(\bar{g})$ définit un foncteur F_λ de C_λ^* vers L^* remplissant les conditions (a_λ) et (b_λ). — Par récurrence transfinie, on construit un foncteur $F' = F'_\lambda$ de $\hat{C}^*$ vers L^* satisfaisant (a_λ) et (b_λ). — Montrons que F' est compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives. En effet, soit Φ' un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers $\hat{C}^*$ et Θ' une limite projective naturalisée de source $\bar{e}$ et but Φ' . Posons $\theta' = F' \Theta'$ et supposons que ψ soit une transformation naturelle d'un foncteur constant sur σ' vers $q' = F' \cdot \Phi'$. Si $f \in \sigma' \cdot L \cdot s$, où $s \in H_0^*$ et $F(u) = s$, le raisonnement utilisé plus haut appliqué au cas $\lambda' = \lambda$ assure l'existence d'une unique transformation naturelle Ψ de $\bar{u}$ vers Φ' telle que $F' \Psi = \psi f$; on a

$$f' = F'(\lim_{\Theta'} \Psi) \in F'(e) \cdot L \cdot s.$$

Si $t(s)$ désigne l'application $f \mapsto f'$ de $u(\sigma')(s)$ dans $u(F'(e))(s)$ ainsi construite, le triplet $(u(F'(e)), t, u(\sigma'))$ définit une transformation naturelle ψ' . La catégorie L^* étant pleinement engendrée par H , il existe un et un seul $g \in F'(e) \cdot L \cdot \sigma'$ vérifiant $g \cdot f = t(s)(f)$. Les égalités

$$(\theta' g) f = \theta'(g \cdot f) = (F' \Theta') F'(\lim_{\Theta'} \Psi) = F' \Psi = \psi f$$

entraînent

$$u(\tau_{\theta'}(i) \cdot g) = u(\tau_{\psi}(i)) \quad \text{pour tout } i \in I_0^*,$$

d'où $\theta' g = \psi$. Ainsi θ' est une limite projective naturalisée et F' est compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives.

— Soit F'' un autre foncteur de $\hat{C}^*$ vers L^* compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives. Soit $\lambda' < \lambda$ un ordinal et supposons donnée une équivalence naturelle $\Omega_{\lambda'}$ de $F_{\lambda'}$ vers la restriction $F_{\lambda'}''$ de F'' à $C_{\lambda'}^*$. Montrons que $\Omega_{\lambda'}$ se prolonge en une équivalence de F' vers F'' . Il existe un foncteur G et une équivalence Ω' de G vers F'' définis par

$$\tau_{\Omega'}(e) = \begin{cases} \tau_{\Omega_{\lambda'}}(e) & \text{si } e \in C_{\lambda'}, \\ e & \text{si } e \in \hat{C}_0^* - (C_{\lambda'})_0^*. \end{cases}$$

Soit G_λ la restriction de G à C_λ^* pour tout ordinal $\lambda \leq \lambda$. On a $G_{\lambda'} = F_{\lambda'}$ si $\lambda'' \leq \lambda'$. Supposons $\lambda = \lambda' + 1$. Si $e \in C_{\lambda'}$ posons $\omega(e) = e$. Soit e une unité de C_λ^* n'appartenant pas à $C_{\lambda'}$. Les foncteurs F' et G étant compatibles avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives, les transformations naturelles

$$\theta = F' \hat{\Theta}(e) \quad \text{et} \quad \theta' = G \hat{\Theta}(e)$$

(avec les notations introduites plus haut) sont deux limites projectives naturalisées de but $F_\lambda \cdot \Phi = G_\lambda \cdot \Phi$, de sorte qu'il existe un $\omega(e) \in L_\lambda^*$ vérifiant $\theta = \theta' \omega(e)$. Si $\bar{f} \in e \cdot \hat{C}$ et $u(\bar{f}) \in C_{\lambda'}$, l'égalité $\bar{f} = \lim_{\hat{C}(e)} (\hat{\theta}(e) \bar{f})$ entraîne

$$F_\lambda(\bar{f}) = \lim_{\hat{C}(e)} \theta F_\lambda(\bar{f}) \quad \text{et} \quad G_\lambda(\bar{f}) = \lim_{\hat{C}(e)} \theta' G_\lambda(\bar{f}).$$

La transformation naturelle $\Psi = \hat{\theta}(e) \bar{f}$ prenant ses valeurs dans $\square C_{\lambda'}^*$, on trouve

$$\theta F_\lambda(\bar{f}) = F' \Psi = G \Psi = \theta' G_\lambda(\bar{f}).$$

Il en résulte, si $\psi = \theta F_\lambda(\bar{f})$:

$$G_\lambda(\bar{f}) = \lim_{\hat{C}(e)} \psi = \omega(e) \cdot \lim_{\hat{C}(e)} \psi = \omega(e) \cdot F_\lambda(\bar{f}).$$

Cette égalité est aussi formellement valable si $\beta(\bar{f}) = e \in C_{\lambda'}$, car, dans ce cas,

$$\bar{f} \in C_{\lambda'}, \quad F_\lambda(\bar{f}) = G_\lambda(\bar{f}) \quad \text{et} \quad \omega(e) = e.$$

Supposons $\bar{g} \in \hat{C} \cdot e$ et $e' = \beta(\bar{g})$. Si $f \in \sigma \cdot L \cdot H_0^*$, il existe un unique $\bar{f} \in e \cdot \hat{C} \cdot C_0^*$ tel que $F_\lambda(\bar{f}) = f$; en utilisant les relations

$$G_\lambda(\bar{f}) = \omega(e) \cdot F_\lambda(\bar{f}) \quad \text{et} \quad G_\lambda(\bar{g} \cdot \bar{f}) = \omega(e') \cdot F_\lambda(\bar{g} \cdot \bar{f}),$$

on en déduit

$$\begin{aligned} \omega(e') \cdot F_\lambda(\bar{g}) \cdot f &= \omega(e') \cdot F_\lambda(\bar{g} \cdot \bar{f}) = G_\lambda(\bar{g} \cdot \bar{f}) = G_\lambda(\bar{g}) \cdot \omega(e) \cdot F_\lambda(\bar{f}) \\ &= G_\lambda(\bar{g}) \cdot \omega(e) \cdot f. \end{aligned}$$

L^* étant pleinement engendré par H , on obtient $\omega(e') \cdot F_\lambda(\bar{g}) = G_\lambda(\bar{g}) \cdot \omega(e)$. Ceci montre que le triplet $(G_\lambda, \omega, F_\lambda)$ définit une équivalence naturelle Ω . A fortiori, le triplet $(F_\lambda'', \omega_\lambda, F_\lambda)$, où

$$\omega_\lambda(e) = \begin{cases} \tau_{\Omega_{\lambda'}}(e) & \text{si } e \in C_{\lambda'}, \\ \omega(e) & \text{si } e \in C_\lambda - C_{\lambda'}, \end{cases}$$

définit l'équivalence $(\boxplus L^*, \underline{\Omega}' \iota, C_\lambda^*) \boxplus \Omega$ qui admet $\Omega_{\lambda'}$ pour restriction. Par récurrence transfinie, on construit une équivalence Ω_λ de F' vers F'' admettant $\Omega_{\lambda'}$ (et Ω_λ) pour restriction. Ce raisonnement appliqué au cas où $\lambda' = 1$ signifie que, si F_1 est un foncteur équivalent à F' , c'est-à-dire si $F_1 \in F \bmod \mathcal{Q}$, tout prolongement de F_1 en un foncteur F_1' de $\hat{C}$ vers L^* compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives appartient à la classe $F' \bmod \mathcal{Q}$.

2°) Soit S^* la sous-catégorie de L^* stable par $\mathcal{J}$ -limites projectives engendrée par H . Soient $(\hat{C}^*, C) \in \mathcal{G}_0'$ et F un isomorphisme de $\hat{C}^*$ sur H^* . On a $(\hat{C}^*, C) \in \mathcal{G}_0'$ (car $\mathcal{G}_0'' \subset \mathcal{G}_0'$) de sorte que, d'après ce qui précède, F s'étend en un foncteur F' de $\hat{C}^*$ vers L^* compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives et défini à une équivalence près. Montrons que $F'(\hat{C}) \subset S$.

En effet, d'après la proposition 10, on définit une suite transfinie croissante de sous-catégories $(C'_\lambda)_{\lambda < \lambda_1}$ de $\hat{C}^*$ telle que $\hat{C} = \bigcup_{\lambda < \lambda_1} C'_\lambda$, où $C'_1 = C$ et où $C'_{\lambda+1}$ est engendrée par la classe formée des éléments de C'_λ , des $\tau_\theta(i)$ et des $\lim_\theta \Psi$, où θ est une limite projective naturalisée de but $\Phi \in \hat{C}^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot I^*$, où $I^* \in \mathcal{I}$ et $\Phi(I) \subset C'_\lambda$, où $i \in I_0^*$ et où Ψ est une transformation naturelle d'un foncteur constant vers Φ prenant ses valeurs dans $\square C'_\lambda$. Par hypothèse

$$F'(C'_1) = F(C) = H \subset S.$$

Supposons prouvé $F'(C'_\lambda) \subset S$; alors, avec les notations précédentes, $\theta = F'\theta$ est une limite projective naturalisée de but $F' \cdot \Phi$ et l'on a

$$F' \cdot \Phi(I) \subset S \quad \text{et} \quad F' \Psi(I) \subset \square S^*$$

d'où, par définition de S ,

$$\tau_\theta(i) \in S \quad \text{et} \quad F'(\lim_\theta \Psi) = \lim_\theta F' \Psi \in S.$$

Par récurrence transfinie, on en conclut $F'(\hat{C}) \subset S$. Ainsi le foncteur

$$F'_1 = (S^*, F', \hat{C}^*)$$

est un prolongement de F compatible avec les $\mathcal{I}$ -limites projectives. Si F'_1 est un tel prolongement d'un isomorphisme F_1 de C^* sur H^* équivalent à F , le foncteur $(L^*, F'_1, \hat{C}^*)$ est équivalent à F' (partie 1°), et par suite F'_1 est équivalent à F'_1 .

3°) Posons $H_{\mathcal{G}} = L$ et $H_{\mathcal{G}'} = S$ et montrons que $(H_{\mathcal{G}}^*, H)$ est une $V_{\mathcal{G}}$ -structure colibre engendrée par H . En effet, soient

$$(\hat{C}^*, C) \in \mathcal{G}_0 \quad \text{et} \quad T \in H^* \cdot \hat{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}} \cdot C^*.$$

Par définition de $\hat{\mathcal{F}}_{\mathcal{I}}$, il existe un isomorphisme $F \in T$. D'après ce qui précède F s'étend en un foncteur $F'_{\mathcal{G}}$ de $\hat{C}^*$ vers $H_{\mathcal{G}}^*$ compatible avec les $\mathcal{I}$ -limites projectives; en posant $T' = F'_{\mathcal{G}} \bmod \mathcal{Q}$, on trouve

$$\hat{T} = ((H_{\mathcal{G}}^*, H), T', (\hat{C}^*, C)) \in \mathcal{G}_0 \quad \text{et} \quad V_{\mathcal{G}}^{\mathcal{I}}(\hat{T}) = T.$$

Par ailleurs, si

$$\hat{T}_1 = ((H_{\mathcal{G}}^*, H), T'_1, (\hat{C}^*, C)) \in \mathcal{G}_0 \quad \text{et si} \quad V_{\mathcal{G}}^{\mathcal{I}}(\hat{T}_1) = T,$$

il existe un $F'_1 \in T'_1$ dont la restriction $F_1 = (H^*, F'_1, C^*)$ appartient à T et est un isomorphisme sur H^* . Les deux premières parties de la démonstration prouvent que les prolongements F'_1 et $F'_{\mathcal{G}}$ des foncteurs équivalents F_1 et F sont équivalents, i.e. on a $T'_1 = T'$, d'où $\hat{T}_1 = \hat{T}$. L'affirmation est ainsi démontrée.

4°) Il nous reste encore à prouver l'existence d'un couple $(L^*, H) \in \mathcal{G}'_0$ tel que L^* soit pleinement engendré par H . Or, désignons par $\mathfrak{R}$ la catégorie

$\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{M}}, H^*)^\square$ et identifions H^* à la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}$ définie par $\delta_H(H)$. D'après la proposition 11, toute sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}$ contenant H est pleinement engendrée par H . Choisissons une application $\mathcal{I}$ -limite projective l sur $\mathfrak{N}$ (par exemple l'application $\mathcal{I}$ -limite projective canonique [4]) et montrons que la sous-catégorie $(l, (\mathfrak{N}, \iota, \mathfrak{N}))$ -stable $\mathfrak{N}'$ engendrée par H appartient à la saturante de $\hat{\mathcal{F}}$ dans $\hat{\mathcal{F}}$. En effet, remarquons d'abord que, si σ et σ' sont deux unités de $\mathfrak{N}$, la classe des $\zeta \in \mathfrak{N}$ de source σ et but σ' appartient à $\tilde{\mathcal{M}}_0$, puisque la surjection $\zeta \rightarrow (\tau_\zeta(s))_{s \in H_0}$ est une bijection de $\sigma' \square \mathfrak{N} \square \sigma$ sur une partie de

$$A = \prod_{s \in H_0} (\sigma'(s) \cdot \hat{\mathcal{M}} \cdot \sigma(s)), \quad \text{et} \quad A \in \tilde{\mathcal{M}}_0,$$

car $\sigma'(s) \cdot \hat{\mathcal{M}} \cdot \sigma(s) \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, $H \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ et $\tilde{\mathcal{M}}_0$ est un univers. En vertu de la proposition 10, on a $\mathfrak{N}' = \bigcup_{\lambda \in A} N_\lambda$, où $N_1 = H \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ et où, si $\lambda = \lambda' + 1$, la classe N_λ définit la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}$ ayant pour unités les $\sigma_\varphi \in \mathfrak{N}$ vérifiant la condition: il existe un foncteur φ de $I^* \in \mathcal{I}$ vers $\mathfrak{N}$, où $\varphi(I) \subset N_{\lambda'}$, et $\tilde{\sigma}_\varphi$ est la source de $l(\varphi)$. Supposons que la formule $N_{\lambda'} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ ait été prouvée; pour toute unité σ de N_λ choisissons un φ tel que $\sigma = \sigma_\varphi$; en associant à σ l'application $(N_{\lambda'}, \varphi, I)$, on définit une bijection de la classe $(N_\lambda)_0^\square$ sur une partie de $N_{\lambda'} \cdot \hat{\mathcal{M}} \cdot I \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, de sorte que $(N_\lambda)_0^\square \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Comme N_λ est la réunion des classes

$$\sigma' \square \mathfrak{N} \square \sigma \in \tilde{\mathcal{M}}_0, \quad \text{où} \quad \sigma \in (N_\lambda)_0^\square \text{ et } \sigma' \in (N_\lambda)_0^\square,$$

il s'ensuit $N_\lambda \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ et, par récurrence transfinie, $\mathfrak{N}' \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, car l'ordinal A est inférieur à l'ordinal inaccessible associé à l'univers $\tilde{\mathcal{M}}_0$ (voir le début de la démonstration de la proposition 10).

— Par suite on peut construire un isomorphisme A de $\mathfrak{N}'$ sur une catégorie $H_{\mathcal{G}} \in \hat{\mathcal{F}}_0$ dont la restriction à H^* soit le foncteur identique de H^* . Si $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$, la catégorie $H_{\mathcal{G}}$ est pleinement engendrée par H (puisque $\mathfrak{N}'$ est pleinement engendrée par H) et la partie 3 de la démonstration montre que $(H_{\mathcal{G}}, H)$ est une $V_{\mathcal{G}}$ -structure colibre engendrée par H . Cette même partie affirme que $(H_{\mathcal{G}'}, H)$ est une $V_{\mathcal{G}'}$ -structure colibre engendrée par H , en désignant par $H_{\mathcal{G}'}$ la sous-catégorie de $H_{\mathcal{G}}$ stable par $\mathcal{I}$ -limites projectives engendrée par H . — Par définition de la catégorie $\mathcal{G}$, toute $V_{\mathcal{G}}$ -structure colibre engendrée par H est de la forme $(\hat{H}_{\mathcal{G}}, H)$, où $\hat{H}_{\mathcal{G}} \in \hat{\mathcal{F}}_0$ est une catégorie équivalente à $H_{\mathcal{G}}$. Comme $\mathfrak{N}'$ admet pour saturante dans $\mathfrak{N}$ la sous-catégorie pleine $\mathfrak{N}_{\mathcal{I}}$ de $\mathfrak{N}$ stable par $\mathcal{I}$ -limites projectives engendrée par H , elle est équivalente à $\mathfrak{N}_{\mathcal{I}}$ et, a fortiori, $\hat{H}_{\mathcal{G}}$ est équivalente à $\mathfrak{N}_{\mathcal{I}}$. Enfin $\hat{H}_{\mathcal{G}'}$ est équivalente à la sous-catégorie $\mathfrak{N}_{\mathcal{I}}'$ de $\mathfrak{N}$

stable par $\mathcal{I}$ -limites projectives engendrée par H , car $\mathfrak{N}'$ est un élargissement de la sous-catégorie de $\mathfrak{N}$ stable par $\mathcal{I}$ -limites projectives engendrée par H , laquelle est isomorphe à $H_{\mathcal{G}'}$. ■

Remarques. 1° Comme $\hat{\mathcal{F}}_{\sim\gamma}$ est la saturante de $\hat{\mathcal{F}}_{\sim}$ dans $\hat{\mathcal{F}}$, il résulte du théorème 8 que le foncteur $(\hat{\mathcal{F}}_{\sim\gamma}, \underline{V}_{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$ admet aussi un adjoint à droite.

2° Soit H^* une catégorie; identifions H^* à la sous-catégorie $\delta_H(H)^{\square}$ de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{H}}, H^*)^{\square}$ et soit encore $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ la sous-catégorie pleine stable par $\mathcal{I}$ -limites projectives engendrée par H dans $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{H}}, H^*)^{\square}$. Plusieurs auteurs ont considéré $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ comme „la complétion” de H^* par adjonction de $\mathcal{I}$ -limites projectives (voir par exemple [7], où $\mathcal{I}$ est formé des catégories discrètes finies, [8] et [9], où $\mathcal{I} = \hat{\mathcal{F}}_0$). Le théorème 8 justifie ce point-de-vue (ainsi que la remarque finale de [5]), en montrant que $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ est une solution „minimale” du problème du plongement, à une équivalence près, de H^* dans une catégorie à $\mathcal{I}$ -limites projectives, avec conservation des limites projectives existant dans H^* ; la catégorie $\mathfrak{N}$ n'a été introduite dans le théorème 8 que pour montrer l'existence d'une telle solution $H_{\mathcal{F}}$ vérifiant de plus $H_{\mathcal{F}} \in \hat{\mathcal{H}}_0$. Comme nous l'avons prouvé dans [4], $\mathfrak{N}$ n'est pas la solution „maximale” de ce même problème, bien qu'il existe aussi des solutions „maximales” ([4] et [10]). Remarquons que la recherche de solutions maximales peut être précisée par la donnée d'applications $\mathcal{I}$ -limites projectives, de sorte que le problème soit solvable à un isomorphisme (et non à une équivalence) près (voir [4]).

1+

3° Soit K^* une catégorie à $\mathcal{I}$ -limites projectives et p un foncteur de $H^* \in \hat{\mathcal{F}}_0$ vers K^* , fidèle tel que $p_{\cdot}$ soit bien fidèle. Nous savons (théorème 6) que p admet un prolongement minimal P en un foncteur fidèle de $\hat{H}^*$ vers K^* , à $\mathcal{I}$ -limites projectives et tel que $P_{\cdot}$ soit bien fidèle. Si p est associé à un générateur de H^* , la catégorie $\hat{H}^*$ est isomorphe à une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{H}}, H^*)^{\square}$ (th. 7). Il ne résulte pas du théorème 8 qu'il en est toujours ainsi (et l'on peut donner facilement des contr'exemples) car, en identifiant H et $\delta_H(H)$, le foncteur p ne peut pas nécessairement s'étendre en un foncteur vers K^* d'une sous-catégorie de $\mathfrak{N}(\hat{\mathcal{H}}, H^*)^{\square}$ équivalente à $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$.

2

4° Supposons donnée une catégorie $H^* \in \hat{\mathcal{F}}_0$ et une classe $\mathcal{A}$ de foncteurs φ de $I^* \in \mathcal{F}$ vers H^* . Soit $\mathfrak{N}_{\mathcal{A}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}_{\mathcal{F}}$ ayant pour unités les éléments $\sigma_{\hat{\varphi}}$ tels que $\hat{\varphi} = (\mathfrak{N}, \varphi, I^*)$ et $\varphi \in \mathcal{A}$ (les notations sont celles de la fin de la démonstration du théorème 8). Une démonstration analogue à la deuxième partie de celle du théorème 8 montre que $\mathfrak{N}_{\mathcal{A}}$ est une solution minimale du problème du plongement, à une équivalence près, de H^* dans une catégorie telle que tout foncteur appartenant à $\mathcal{A}$ admette une limite projective (lorsqu'il est considéré comme foncteur à valeurs dans cette catégorie prolongée).

8. PROLONGEMENTS MAXIMAUX D'UN FONCTEUR

Soit K^* une catégorie appartenant à $\hat{\mathcal{F}}_0$ et $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(K^*)$ (resp. et $\mathcal{H} = \mathcal{H}(K^*)$) la sous-catégorie de $V_{K^*, \hat{\mathcal{F}}}$ ayant pour unités les foncteurs fidèles p vers K^* (resp. vers K^* tels que p_j soit bien fidèle); ces catégories ont été définies dans le § 1. Nous considérerons les sous-catégories suivantes de $\mathcal{H}$:

1° Si K'^* est une sous-catégorie de K^* , soit $\mathcal{H}^c$ la sous-catégorie de $\mathcal{H}$ formée des triplets $(p', F, p) \in \mathcal{H}$, où $F = (H'', \underline{F}, H')$ tels que

$$p(H'_0) \subset K', \quad p'(H''_0) \subset K' \quad \text{et} \quad F((K', p)^\Gamma) \subset (K', p')^\Gamma.$$

$\mathcal{H}^c$ (considérée au § 2) est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^c$ ayant pour unités les foncteurs K' -étalants.

2° Si μ est une application $\mathcal{F}$ -limite projective multiforme partielle sur K^* , désignons par $\mathcal{H}^\mu$ la sous-catégorie de $\mathcal{H}$ formée des triplets $(p', F, p) \in \mathcal{H}^\mu$, où $F = (H'', \underline{F}, H')$, vérifiant la condition suivante: Si Θ est une limite projective naturalisée dans H^* telle que $p\Theta \in \mu(\Phi)$ pour un $\Phi \in K^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{F}$, alors $F\Theta$ est une limite projective naturalisée dans H'' . Soit $\mathcal{H}^\mu = \mathcal{H}^\mu(K^*)$ (voir § 6) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^\mu$ ayant pour unités les foncteurs μ -compatibles.

1 Nous posons $\varepsilon = e$ lorsque nous nous donnons une sous-catégorie K'^* de K^* et $\varepsilon = \mu$ lorsque nous nous donnons une application $\mathcal{F}$ -limite projective multiforme partielle μ sur K^* . Remarquons que l'on a $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0^\mu$ pour $\varepsilon = \mu$ et que $\mathcal{H}_0^c$ est formée des $p = (K^*, p, H^*) \in \mathcal{H}_0$ tels que $p(H'_0) \subset K'$. Soit encore Z le foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{A}$ associant $P_{\mathcal{F}}(F)$ à (p', F, p) , et Z^c sa restriction à $\mathcal{H}^c$.

2¶ PROPOSITION 12. $(\mathcal{H}, \iota, \mathcal{H}^c)$ est un foncteur à $\hat{\mathcal{F}}_0$ -limites projectives et $(\mathcal{H}^\varepsilon, \iota, \mathcal{H}^c)$ est un foncteur à $\hat{\mathcal{H}}_0$ -produits, compatible avec les limites projectives.

Preuve. 1°) Soit $(p_j)_{j \in J}$ une famille de foncteurs

$$p_j = (K^*, \underline{p}_j, H'_j) \in \mathcal{H}_0,$$

où $J \in \hat{\mathcal{H}}_0$. Soit H^* la catégorie produit fibré V_{p_j} et v_j sa projection canonique vers H'_j . La surjection $(f_j)_{j \in J} \rightarrow p_j(f_j)$ définit un foncteur p de H^* vers K^* . D'après la proposition 35-IV [1], p est un foncteur fidèle et p_j est bien fidèle, de sorte que l'on a

$$\pi_j = (p_j, v_j, p) \in \mathcal{H}.$$

Soit $m_j = (p_j, F_j, p') \in \mathcal{H}$ pour tout $j \in J$; les relations $p_j \cdot F_j = p'$ entraînent l'existence d'un et d'un seul foncteur F tel que $v_j \cdot F = F_j$ pour tout $j \in J$; il s'ensuit $m = (p, F, p') \in \mathcal{H}$, et $\pi_j \cdot m = m_j$, car

$$p' = p_j \cdot F_j = p_j \cdot v_j \cdot F = p \cdot F.$$

Ainsi $(\pi_j)_{j \in J}$ est un produit naturalisé de $(p_j)_{j \in J}$ dans $\mathcal{H}$. — Soit $\varepsilon = e$; le foncteur v_j étant bien surjectif à gauche, d'après la proposition 3 il transforme une p -injection en une p_j -injection; par suite $\pi_j \in \mathcal{H}^e$ si $p_j \in \mathcal{H}^e$ pour tout $j \in J$, et p est un produit de $(p_j)_{j \in J}$ dans $\mathcal{H}^e$. Si de plus p_j est K' -étalant pour tout $j \in J$, soit

$$e = (e_j)_{j \in J} \in H_0^* \quad \text{et} \quad k \in p(e) \cdot K'.$$

Il existe une (K', p_j) -injection $k_j \in e_j \cdot H_j$ telle que $p_j(k_j) = k$ pour tout $j \in J$ et $\bar{k} = (k_j)_{j \in J} \in e \cdot H$ est une (K', p) -injection (corollaire du théorème 9-IV⁽¹⁾ [1]). Puisque $p(\bar{k}) = k$, le foncteur p est K' -étalant. Ceci montre que p est un produit de $(p_j)_{j \in J}$ dans $\mathcal{H}^e$. — Soit $\varepsilon = \mu$; avec les notations précédentes, soit Θ une transformation naturelle de $F^* \mathcal{H}$ vers H^* telle que $p\Theta \in \mu(q)$. Alors Θ est une limite projective naturalisée si, et seulement si, $v_j\Theta$ en est une pour tout $j \in J$ (prop. 20 [4]); il en résulte que $\pi_j \in \mathcal{H}^{\mu}$ et que p est un produit de $(p_j)_{j \in J}$ dans $\mathcal{H}^{\mu}$; de plus $p \in \mathcal{H}_0^{\mu}$ si $p_j \in \mathcal{H}_0^{\mu}$ pour tout $j \in J$. — Au total, nous avons montré que $(\mathcal{H}, \iota, \mathcal{H}^e)$ et $(\mathcal{H}^{\mu}, \iota, \mathcal{H}^e)$ sont des foncteurs à $\mathcal{H}_0$ -produits.

2°) Soient $m = (p'', F, p') \in \mathcal{H}$ et $m' = (p'', F', p') \in \mathcal{H}$, où $p' \in (K', p', H'')$. Notons H'' la sous-catégorie de H'' noyau de (F, F') et p la restriction de p' à H'' . Toute restriction d'un élément de $\mathcal{H}_0$ appartenant à $\mathcal{H}_0$, p est source d'un noyau π de (m, m') dans $\mathcal{H}$. — Supposons $\varepsilon = e$, $m \in \mathcal{H}^e$ et $m' \in \mathcal{H}^e$. Soit $e \in H_0^*$ et $k \in p(e) \cdot K'$. Il existe une (K', p') -injection $\bar{k} \in e \cdot H'$; comme $F(\bar{k})$ et $F'(\bar{k})$ sont deux (K', p'') -injections de but $F(e) = F'(e)$ et que p'' est bien fidèle, on a

$$F(\bar{k}) = F'(\bar{k}), \quad \text{d'où} \quad \bar{k} \in H.$$

Si $\bar{j} \in e \cdot H$ et si $p(\bar{j}) = k \cdot f'$, il existe $\bar{j}' \in H'$ vérifiant

$$\bar{k} \cdot \bar{j}' = \bar{j} \quad \text{et} \quad p'(\bar{j}') = f'.$$

Les relations

$$F(\bar{k}) \cdot F(\bar{j}') = F(\bar{j}) = F'(\bar{j}) = F(\bar{k}) \cdot F'(\bar{j}')$$

et

$$p''(F(\bar{j}')) = p'(\bar{j}') = p''(F'(\bar{j}'))$$

ont par conséquent $F(\bar{j}') = F'(\bar{j}')$, car $F(\bar{k})$ est une (K', p'') -injection. On en déduit $\bar{j}' \in H$, de sorte que $\bar{k}$ est une (K', p) -injection. Ainsi p est K' -étalant. Soit $m_1 = (p', G, p_1) \in \mathcal{H}^e$, $m \cdot m_1 = m' \cdot m_1$. Si $k_1 \in (K', p_1)^\Gamma$ est tel que $p_1(k_1) = k$, l'élément $G(k_1)$ est une (K', p') -injection appartenant à H et, d'après ce qui précède, $G(k_1)$ est une (K', p) -injection, c'est-à-dire

$$(p, (H', G, a(p_1)), p_1) \in \mathcal{H}^e.$$

⁽¹⁾ La démonstration de ce corollaire prouve que l'hypothèse $f \in R_d(C^*)$ de son énoncé est superflue.

Par suite π est un noyau de (m, m') dans $(\mathcal{H}^e, \iota, \mathcal{H}^e)$. — Supposons $\varepsilon = \mu$, $m \in \mathcal{H}^\mu$ et $m' \in \mathcal{H}^\mu$. Soit Φ un foncteur de $I^* \in \mathcal{F}$ vers H^* et soit $\theta \in \mu(p \cdot \Phi)$. Le foncteur p' étant μ -compatible, il existe une limite projective naturalisée Θ de but (H'', Φ, I') , où $p' \cdot \Theta = \theta$. Les transformations naturelles $F\Theta$ et $F' \cdot \Theta$ sont deux limites projectives naturalisées de but $F \cdot (H'', \Phi, I')$, appliquées par p'' sur θ , par définition de $\mathcal{H}^\mu$. Il s'ensuit $F\Theta = F' \cdot \Theta$, car p'' est bien fidèle, d'où $\Theta(I) \subset \square H^*$. On sait (prop. 21 [4]) que $(\square H^*, \Theta, I')$ est une limite projective naturalisée appliquée par p sur θ . Ainsi p est μ -compatible. Soit

$$m_1 = (p', G, p_1) \in \mathcal{H}^\mu, \quad a(p_1) = H_1^*, \quad m \cdot m_1 = m' \cdot m_1.$$

Si Θ_1 est une limite projective naturalisée dans H_1^* appliquée par p_1 sur θ , la limite projective naturalisée $\Theta = G\Theta_1$ prend ses valeurs dans $\square H^*$; la démonstration précédente entraîne que $(\square H^*, \Theta, I')$ est une limite projective naturalisée, i.e.

$$(p, (H^*, G, H_1^*), p_1) \in \mathcal{H}^\mu.$$

Ceci prouve que π est un noyau de (m, m') dans $(\mathcal{H}^\mu, \iota, \mathcal{H}^\mu)$. On en conclut que $(\mathcal{H}, \iota, \mathcal{H}^e)$ est un foncteur à noyaux et que $(\mathcal{H}^e, \iota, \mathcal{H}^e)$ est compatible avec les noyaux. — Le foncteur $(\mathcal{H}, \iota, \mathcal{H}^e)$ étant à $\hat{\mathcal{H}}_0$ -produits et à noyaux, il est à $\hat{\mathcal{F}}_0$ -limites projectives (prop. 1 [4]); le foncteur $(\mathcal{H}^e, \iota, \mathcal{H}^e)$ est compatible avec les limites projectives, car il est compatible avec les produits et les noyaux. ■

THÉORÈME 9. Soit $p = (K^*, \underline{p}, H^*) \in \mathcal{H}_0$ et r une relation d'équivalence sur H telle que p soit compatible avec r . Alors il existe une $(\mathcal{H}^e, Z)$ -structure quasi-quotient de p par r .

Preuve. Soit $\mathcal{H}^r$ la catégorie formée des triplets (r'', m, r') , où

$$m = (p'', F, p') \in \mathcal{H},$$

r' et r'' étant des relations d'équivalence sur $a(p')$ et $a(p'')$ respectivement telles que $Z(m)$ soit compatible avec (r'', r') , la loi de composition étant

$$(r_1'', m', r'') \cdot (r'', m, r') = (r_1'', m' \cdot m, r').$$

Nous identifions au couple (m, r) un triplet $(i, m, r) \in \mathcal{H}^r$, lorsque i est une relation identique. De plus $\mathcal{H}$ est identifiée à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}^r$ ayant pour unités les couples (q, i) , où $q \in \mathcal{H}_0$ et $i =$ relation identique sur $Z(q)$. Nous savons [2] que $\hat{p}$ est une $(\mathcal{H}^e, Z)$ -structure quasi-quotient de p par r si, et seulement si, $\hat{p}$ est une $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H}^r)$ -projection de (r, p, r) . — Si φ est un foncteur, nous désignons par φ' l'application $P_{\mathcal{F}}(\varphi)$ sous-jacente. Soient $p = (K^*, \underline{p}, H^*) \in \mathcal{H}_0$ et r une relation d'équivalence sur H compatible avec p ; autrement dit, on a $p' = g \cdot \tilde{r}$, en désignant par $\tilde{r}$ la surjection canonique de H sur H/r . Soit M la classe des

$$m = (p_m, F_m, p) \in \mathcal{H}^e \cdot \mathcal{H} \cdot p$$

tels que $(m, r) \in \mathcal{H}^e \cdot \mathcal{H}^r \cdot (r, p, r)$, i.e. pour lesquels $F'_m = f_m \cdot \tilde{r}$. Comme $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_0^3 \in \hat{\mathcal{M}}_0$, on a $M \in \hat{\mathcal{M}}_0$ et, d'après la proposition 12 appliquée au foncteur $(\hat{\mathcal{H}}, \iota, \mathcal{H}^e)$ relatif à l'univers $\hat{\mathcal{M}}_0$, il existe un produit naturalisé $((\pi_m)_{m \in M}, P)$ de $(p_m)_{m \in M}$ dans $(\hat{\mathcal{H}}, \iota, \mathcal{H}^e)$, à savoir $\pi_m = (p_m, v_m, P)$, où v_m est la projection canonique vers $\alpha(p_m)$ de la catégorie $\hat{H}^*$ produit fibré de $(p_m)_{m \in M}$. Soit

$$\hat{\pi} = (P, \hat{F}, p) = [m]_{m \in M};$$

on a $v'_m \cdot \hat{F}' = F'_m$ pour tout $m \in M$. Les relations

$$p'_m \cdot f_m \cdot \tilde{r} = p'_m \cdot F'_m = p' = g \cdot \tilde{r}$$

entraînent $p'_m \cdot f_m = g$ pour tout $m \in M$; la classe $\hat{H}$ étant le produit fibré de $(p'_m)_{m \in M}$, il existe un et un seul f' tel que $v'_m \cdot f' = f_m$ pour tout $m \in M$; il s'ensuit

$$v'_m \cdot f' \cdot \tilde{r} = f_m \cdot \tilde{r} = F'_m = v'_m \cdot F'$$

pour tout $m \in M$, d'où $f' \cdot \tilde{r} = F'$. Ainsi, en désignant par $\hat{\mathcal{H}}^r$ la catégorie associée à $\hat{\mathcal{H}}$ pour définir les $\hat{Z}$ -structures quasi-quotient, on trouve

$$(\hat{\pi}, r) \in \hat{\mathcal{H}}^r \quad \text{et} \quad \pi_m \cdot (\hat{\pi}, r) = (m, r) \quad \text{pour tout } m \in M.$$

Ceci signifie que $e = (r, p, r)$ vérifie la condition $(\hat{U}_e)$ du théorème 1 [4] relativement au foncteur $\hat{U} = (\hat{\mathcal{H}}^r, \iota, \mathcal{H}^e)$. Par ailleurs, il résulte de la démonstration du théorème 2-2 [2] que $\hat{U}$ est un foncteur à noyaux et que tout $\hat{Z}^e$ -monomorphisme est un $\hat{Z}^r$ -monomorphisme, $\hat{Z}^r$ dénotant le foncteur canonique de $\hat{\mathcal{H}}^r$ vers $\hat{\mathcal{M}}$ (qui applique (r', m, r) sur $\hat{Z}(m)$). Soit $\hat{p}$ la restriction de P à la sous-catégorie $(K', P)^e$ -stable si $\varepsilon = e$ (resp. sous-catégorie (μ, P) -stable si $\varepsilon = \mu$) $\bar{H}^*$ engendrée par $\hat{F}(H)$. Le triplet $\hat{m} = (P, (\hat{H}^*, \iota, \bar{H}^*), \hat{p})$ est un morphisme $(\hat{Z}^e, R_g(\hat{\mathcal{H}}^e), \mathcal{H}^e)$ -engendré [4] par $\hat{F}' = \hat{Z}(\hat{\pi})$ et $\hat{p} \in \hat{\mathcal{M}}$. Comme $\hat{Z}' = \hat{Z}^r \cdot \hat{U}$, où $\hat{Z}^r$ est fidèle, la proposition 7 [4] assure que $\hat{m}$ est un morphisme $(\hat{U}, R_g(\hat{\mathcal{H}}^e), \mathcal{H}^e)$ -engendré par $(\hat{\pi}, r)$. Donc toutes les conditions du théorème 1 [4] d'existence de structures libres sont vérifiées par $\hat{U}$ et e , de sorte qu'il existe une U -structure libre q engendrée par e , c'est-à-dire une $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H}^r)$ -projection q de e ou encore une $(\mathcal{H}^e, Z)$ -structure quasi-quotient de p par r ; de plus q est isomorphe à $\hat{p}$ dans $\hat{\mathcal{H}}^e$. ■

COROLLAIRE. $\mathcal{H}$ et $\hat{\mathcal{H}}$ sont des catégories à $\mathcal{H}^e$ -projections.

En effet, $p \in \mathcal{H}_0$ admet pour $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H})$ -projection la $(\mathcal{H}^e, Z)$ -structure quasi-quotient de p par la relation d'équivalence identique sur H , qui existe d'après le théorème 9. Le théorème de transitivité des projections

entraîne que $\tilde{\mathcal{H}}$ est une catégorie à $\mathcal{H}^e$ -projections, car elle est à $\mathcal{H}$ -projections (prop. 1). ■

THÉORÈME 10. *$\mathcal{H}^e$ est une catégorie à $\mathcal{H}^e$ -projections. Soit $p \in \mathcal{H}_0^e$; alors p admet une $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H})$ -projection $p_{\mathcal{H}}^e$ et une $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H}^e)$ -projection $p_{\mathcal{H}^e}^e$ admettant p pour restrictions; de plus $p_{\mathcal{H}^e}^e$ est une Z^e -structure quasi-quotient de $p_{\mathcal{H}}^e$.*

Preuve. Pour $p \in \mathcal{H}_0^e$, la démonstration de l'existence de $p_{\mathcal{H}^e}^e$ est analogue à celle du théorème 9, remplaçant U par le foncteur $(\mathcal{H}^e, \iota, \mathcal{H}^e)$ et en utilisant encore la proposition 12. — Supposons de plus $p = (K^*, p, H^*) \in \mathcal{H}_0^e$; soit $\hat{m}_1 = (p_1, F_1, p)$ un $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H}^e)$ -projecteur et $\hat{m}_2 = (p_2, F_2, p)$ un $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H})$ -projecteur (il en existe d'après le corollaire du théorème 9). Soit

$$m^e = (p_{\mathcal{H}^e}^e, (u(p_{\mathcal{H}^e}^e), \iota, H^*), p),$$

où $p_{\mathcal{H}^e}^e$ désigne le prolongement plein K' -minimal si $\varepsilon = e$ (resp. plein μ -minimal si $\varepsilon = \mu$) de p ; par construction de m^e (th. 2 et th. 6) nous savons que m^e appartient à $\mathcal{H}_0^e \cdot \mathcal{H}^e$. Par suite, il existe des

$$m'_i = (p_{\mathcal{H}^e}^e, G_i, p_i) \quad \text{tels que} \quad m^e = m'_i \cdot \hat{m}_i$$

pour $i = 1$ et 2 , d'où $(u(p_{\mathcal{H}^e}^e), \iota, H^*) = G_i \cdot F_i$. Cette égalité entraîne que F_i est injectif. Le foncteur Z^e étant un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe des éléments $\hat{p}$ et $\tilde{p}$ isomorphes respectivement à p_2 et p_1 dans $\mathcal{H}^e$ et qui admettent p pour restrictions; ce sont respectivement une $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H})$ -projection et une $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H}^e)$ -projection de p .

— Soit $\hat{m} = (\hat{p}, i, p)$ un $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H})$ -projecteur, où $\hat{p} = (K^*, \hat{p}, \hat{H}^*)$ admet p pour restriction à H^* et où $i = (\hat{H}^*, \iota, H^*)$. Soit r la relation d'équivalence sur $\hat{H}$ engendrée par la classe B^e des couples $(k, \hat{k})$ tels que $\beta(k) = \beta(\hat{k})$, $\hat{p}(k) = \hat{p}(\hat{k})$ et que:

1° si $\varepsilon = e$, k est une (K', p) -injection et $\hat{k}$ une $(K', \hat{p})$ -injection;

2° si $\varepsilon = \mu$, il existe un foncteur Φ de $I^* \varepsilon \mathcal{H}$ vers H^* et un $\theta \in \mu(p \cdot \Phi)$ tels que $k = p_i(\theta, \Phi)$ et $\hat{k} = \pi_i(\theta, \Phi)$, où $p_i(\theta, \Phi)$ et $\pi_i(\theta, \Phi)$ désignent pour tout $i \in I_0^*$ les projections canoniques vers $\Phi(i)$ correspondant respectivement à une limite projective naturalisée Θ de but Φ et à une limite projective naturalisée Θ' de but $(\boxminus \hat{H}^*, \underline{\Phi}, I^*)$, appliquées par p et par $\hat{p}$ sur θ .

— La relation r étant compatible avec $\hat{p}$, d'après le théorème 9 il existe une Z^e -structure quasi-quotient $\tilde{p}$ de $\hat{p}$ par r ; soit $\hat{m}' = (\tilde{p}, j, \hat{p})$ la Z^e -quasi-surjection correspondante. Montrons que

$$\tilde{m} = \hat{m}' \cdot \hat{m} = (\tilde{p}, j \cdot i, p)$$

appartient à $\mathcal{H}^e$. En effet:

1° Soit $\varepsilon = e$; si $k \in (K', p)^\Gamma$ et $e = \beta(k)$, les relations $e \in \hat{H}_0^\varepsilon$ et $p(k) \in e \cdot K'$ assurent l'existence d'une et d'une seule $(K', \hat{p})$ -injection $\hat{k} \in e \cdot \hat{H}$ telle que $p(\hat{k}) = k$; puisque $(k, \hat{k}) \in B^e$, on a $j(k) = j(\hat{k}) \in (K', \tilde{p})^\Gamma$, d'où

$$j \cdot i((K', p)^\Gamma) \subset (K', \tilde{p})^\Gamma \quad \text{et} \quad \tilde{m} \in \mathcal{H}''.$$

2° Soit $\varepsilon = \mu$, Φ un foncteur de $I' \in \mathcal{F}$ vers H' et Θ une limite projective naturalisée de but Φ , telle que $\theta \in \mu(p \cdot \Phi)$, où $\theta = p\Theta$. Le foncteur $\hat{p}$ étant μ -compatible, il existe une limite projective naturalisée $\hat{\Theta}$ de but $(\hat{H}', \hat{\Phi}, I')$ appliquée par $\hat{p}$ sur θ . Pour tout $i \in I'_0$, le couple $(k, \hat{k})$ des projections canoniques $p_i(\theta, \Phi) = k$ et $\hat{k} = \pi_i(\theta, \Phi)$ correspondantes appartient à B'' ; par suite $j(k) = j(\hat{k})$ est la projection canonique vers $j(\Phi(i))$ correspondant à l'unique limite projective naturalisée Θ_i de but $(j \cdot i) \cdot \Phi$ appliquée par $\hat{p}$ sur θ . Donc

$$(j \cdot i)\Theta = \Theta_i \quad \text{et} \quad \tilde{m} \in \mathcal{H}''.$$

— Prouvons que $\tilde{m}$ est un $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H}^e)$ -projecteur; supposons

$$m = (q, F, p) \in \mathcal{H}^e \cdot \mathcal{H}^e.$$

Il existe $m' = (q, G, \hat{p}) \in \mathcal{H}^e$ tel que $m = m' \cdot \hat{m}$, car $\hat{m}$ est un $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H})$ -projecteur. Soit $(k, \hat{k}) \in B^e$ un des couples considérés plus haut :

1° si $\varepsilon = e$, l'élément $G(k) = F(k)$ est une (K', q) -injection, étant donné que $F((K', p)^\Gamma) \subset (K', q)^\Gamma$, et $G(\hat{k})$ en est une, puisque $G((K', \hat{p})^\Gamma) \subset (K', q)^\Gamma$ par définition de $\mathcal{H}^e$; le foncteur $q_\cdot$ est bien fidèle et $G(k)$ et $G(\hat{k})$ sont deux (K', q) -injections de but $G(\beta(k))$ telles que

$$q(G(k)) = \hat{p}(k) = \hat{p}(\hat{k}) = q(G(\hat{k}));$$

il s'ensuit $G(k) = G(\hat{k})$.

2° si $\varepsilon = \mu$, $G(p_i(\theta, \Phi)) = F(p_i(\theta, \Phi))$ et $G(\pi_i(\theta, \Phi))$ étant les projections canoniques correspondant à l'unique limite projective naturalisée appliquée par q sur θ , elles sont égales.

— Ainsi $G(k) = G(\hat{k})$ si $(k, \hat{k}) \in B^e$, de sorte que G est compatible avec r . Comme $\hat{m}'$ est une Z^e -quasi-surjection, il existe

$$m_1 = (q, F_1, \hat{p}) \in \mathcal{H}^e \quad \text{et} \quad m_1 \cdot \hat{m}' = m'.$$

On voit que m_1 est l'unique élément de $\mathcal{H}^e$ vérifiant

$$m_1 \cdot \tilde{m} = m_1 \cdot \hat{m}' \cdot \hat{m} = m' \cdot \hat{m} = m.$$

Ceci prouve que $\tilde{m}$ est un $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H}^e)$ -projecteur. Toute $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H}^e)$ -projection de p étant isomorphe dans $\mathcal{H}^e$ à $\tilde{p}$, c'est aussi une Z^e -structure quasi-quotient de $\hat{p}$ par r . ■

1+ DÉFINITION. Soit $p \in \mathcal{K}_0^e$; une $(\mathcal{K}^e, \mathcal{H})$ -projection (resp. une $(\mathcal{K}^e, \mathcal{K}^e)$ -projection) de p admettant p pour restriction est appelée, selon que $\varepsilon = e$ ou μ , un *prolongement K' -étalant* ou *μ -compatible libre* (resp. *K' -étalant* ou *μ -compatible maximal*) de p .

PROPOSITION 13. Soit $p = (K', \underline{p}, H') \in \mathcal{K}_0^e$; on peut construire explicitement un prolongement K' -étalant libre de p .

Preuve. Soit M_0^* la classe des couples (s, k) , où $s \in H_0^*$ et $k \in p(s) \cdot K'$. Désignons par M la classe des triplets

$$\bar{g} = ((s_2, k_2), g, (s_1, k_1))$$

vérifiant les conditions:

- 1° $(s_i, k_i) \in M_0^*$ pour $i = 1$ et 2 , $g \in a(k_2) \cdot K' \cdot a(k_1)$;
- 2° il existe $\hat{g} \in s_2 \cdot H' \cdot s_1$ tel que $p(\hat{g}) \cdot k_1 = k_2 \cdot g$.

M^* est une catégorie pour la loi de composition

$$((s'_2, k'_2), g', (s'_1, k'_1)) \cdot ((s_2, k_2), g, (s_1, k_1)) = ((s'_2, k'_2), g' \cdot g, (s_1, k_1))$$

si, et seulement si, $(s_2, k_2) = (s'_1, k'_1)$; la classe de ses unités est identifiée avec M_0^* et la surjection $\bar{g} \rightarrow g$ définit un foncteur fidèle $\hat{q}$ de M^* vers K' . On identifie H' à la sous-catégorie pleine de M^* ayant pour unités les couples $(s, p(s))$, où $s \in H_0^*$. Si $(s, k) \in M_0^*$, on a

$$\bar{k} = (s, k, (s, k)) \in M$$

et $\bar{k}$ est une $(K', \hat{q})$ -injection; en effet, les relations

$$\bar{f} \in \beta(\bar{k}) \cdot M \quad \text{et} \quad \hat{q}(\bar{f}) = \hat{q}(\bar{k}) \cdot f' = k \cdot f'$$

entraînent que, si $a(\bar{f}) = (s', k')$, il existe $\hat{g} \in s \cdot H' \cdot s'$ vérifiant

$$p(\hat{g}) \cdot k' = \hat{q}(\bar{f}) = k \cdot f';$$

par suite $((s, k), f', (s', k'))$ est l'unique élément $\bar{f}'$ de $a(\bar{k}) \cdot M \cdot a(\bar{f})$ tel que $\bar{k} \cdot \bar{f}' = \bar{f}$. — Puisque

$$M \subset (H_0^* \times K') \times K \times (H_0^* \times K') \in \hat{\mathcal{M}}_0,$$

on a $M \in \hat{\mathcal{M}}_0$, d'où $\hat{q} \in \tilde{\mathcal{H}}_0$. D'après la proposition 1, il existe un $(\mathcal{K}, \tilde{\mathcal{H}})$ -projecteur $(q, \bar{r}, \hat{q})$, où $q = (K', q, L')$, le foncteur $\bar{r}$ étant le $P_{\mathcal{F}}$ -épi-morphisme canonique de M^* sur la catégorie L' quotient strict de M^* par le sous-groupeoïde de M^* formé des $\bar{g} \in M_0^*$ appliqués par $\hat{q}$ sur une unité; de plus M^* est un élargissement d'une sous-catégorie pleine de M^* isomorphe à L' et, en vertu du corollaire 1 de la proposition 3, $\bar{r}((K', \hat{q})^\square) \subset (K', q)^\square$. — Si $\sigma = \bar{r}(s, k)$ et si $k' \in q(\sigma) \cdot K'$, nous avons vu que les éléments

$$\bar{k} = (s, k, (s, k)) \quad \text{et} \quad \bar{k}' = (s, k \cdot k', (s, k \cdot k'))$$

sont des $(K', \hat{q})$ -injections, et l'on a

$$\bar{k}' = ((s, k), k', (s, k \cdot k')) \in M \quad \text{et} \quad \bar{k}'' = \bar{k} \cdot \bar{k}'.$$

Des relations

$$\bar{r}(\bar{k}) \in (K', q)^{\neg}, \quad \bar{r}(\bar{k}'') \in (K', q)^{\neg} \quad \text{et} \quad \bar{r}(\bar{k}'') = \bar{r}(\bar{k}) \cdot \bar{r}(\bar{k}'),$$

on déduit (th. 1-III [1]) que $\bar{r}(\bar{k}')$ est l'unique (K', q) -injection de but σ appliquée par q sur k' . Donc q est K' -étalant. — Montrons que

$$(q, j, p) \in \mathcal{H}, \quad \text{où} \quad j = (L', \bar{r}_\iota, H'),$$

est un $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H})$ -projecteur. En effet, soit

$$m = (Q, F, p) \in \mathcal{H}^e \cdot \mathcal{H}, \quad \text{où} \quad Q = (K'', Q, C').$$

Si $(s, k) \in M_0^*$, désignons par $F'(s, k)$ la source de l'unique (K', Q) -injection k_s de but $F(s)$ appliquée par Q sur k . Si

$$\bar{g} = ((s', k'), g, (s, k)) \in M,$$

il existe un $\hat{g} \in s' \cdot H \cdot s$ tel que $p(\hat{g}) \cdot k = k' \cdot g$, et l'on a $F(\hat{g}) \in F(s') \cdot C \cdot F(s)$. Puisque k_s et k'_s sont des (K', Q) -injections, il existe un et un seul (K', Q) -sous-morphisme h de $F(\hat{g})$ tel que $F(\hat{g}) \cdot k_s = k'_s \cdot h$ et $Q(h) = g$; l'élément h ne dépend pas du choix de $\hat{g}$, le foncteur Q étant fidèle; posons $h = F'(g)$. La surjection $\bar{g} \rightarrow F'(\bar{g})$ ainsi obtenue définit un foncteur F' de M^* vers C' , prolongeant F et vérifiant $Q \cdot F' = \hat{q}$; on a $(Q, F', \hat{q}) \in \mathcal{H}^e \cdot \hat{\mathcal{H}}$. Par définition de q , il existe un et un seul

$$(Q, F'', q) \in \mathcal{H}^e \quad \text{tel que} \quad (Q, F', \hat{q}) = (Q, F'', q) \cdot (q, \bar{r}, \hat{q}),$$

d'où

$$F' = F'' \cdot \bar{r} \quad \text{et} \quad F = (C', F'_\iota, H') = F'' \cdot j.$$

Si $\hat{k}'$ est une (K', q) -injection de but $\sigma = \bar{r}(s, k)$ et si $q(\hat{k}') = k'$, nous avons montré plus haut que $\hat{k}' = \bar{r}(\bar{k}')$, où $\bar{k}'$ est la $(K', \hat{q})$ -injection $((s, k), k \cdot k', (s, k \cdot k'))$; l'égalité $(k \cdot k')_s = k_s \cdot F'(\bar{k}')$ entraînant $F'(\bar{k}') \in (K', Q)^{\neg}$, on obtient

$$F''(\hat{k}') = F'(\bar{k}') \in (K', Q)^{\neg}, \quad \text{i.e.} \quad (Q, F'', q) \in \mathcal{H}^e.$$

Il s'ensuit que (Q, F'', q) est l'unique élément m' de $\mathcal{H}^e$ satisfaisant l'égalité

$$m = m' \cdot (q, j, p),$$

de sorte que (q, j, p) est un $(\mathcal{H}^e, \mathcal{H})$ -projecteur. Soit v_0 une section de la restriction $\tilde{r}_0 = (L_0', \bar{r}_\iota, M_0')$ de $\bar{r}$ telle que $v_0(\tilde{r}_0(H)) \subset H$. La démonstration de la proposition 1 permet d'étendre v_0 en un foncteur v section de $\bar{r}$; on a $v(\bar{r}(H)) = H$ et M^* est un élargissement de $v(L)^*$. En notant v' l'isomorphisme $(v(L)^*, v, L^*)$ et $\hat{p}$ la restriction de $\hat{q}$ à $v(L)^*$, on trouve $(\hat{p}, v', q) \in \mathcal{H}_v^e$. On en conclut que $\hat{p}$ est un prolongement K' -étalant libre de p . ■

1

Note ajoutée à la correction des épreuves

Le mot univers a ici le même sens que dans [2] et [4]; c'est-à-dire, contrairement à la définition de Grothendieck (ou de Sonner), on ne suppose pas un univers transitif, hypothèse inutile pour la Théorie des Catégories. Un univers est donc un ensemble (d'ensembles) $\mathcal{M}_0$ vérifiant les conditions:

- 1° $E \in \mathcal{M}_0$ entraîne $\mathcal{P}(E) \in \mathcal{M}_0$ et $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{M}_0$;
- 2° $I \in \mathcal{M}_0$ et $E_i \in \mathcal{M}_0$ pour tout $i \in I$ entraîne $\bigcup_{i \in I} E_i \in \mathcal{M}_0$;
- 3° Il existe un ensemble infini appartenant à $\mathcal{M}_0$.

Il en résulte que, avec des définitions convenables, le couple (E, F) et le produit $F \times E$ de deux éléments d'un univers appartient à l'univers, ainsi que l'ensemble canonique N des entiers naturels (voir: A. Bastiani, Théorie des Ensembles, cours multigraphié, Amiens, 1968, où est prouvée aussi l'équivalence des "Axiomes des univers" relatifs à ces deux notions d'univers).

1

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ehresmann, C., *Catégories et Structures*, Paris (1965).
- [2] — *Structures quasi-quotient*, Math. Ann. 171 (1967), p. 193-263.
- [3] — *Introduction to the theory of structured categories*, Univ. of Kansas, Lawrence, technical report 10 (1966), 95 p.
- [4] — *Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints*, Cahiers de Topologie et Géo. diff. IX, 1 et 2 (1967), p. 33-180.
- [5] — *Esquisses et types des structures algébriques*, Bul. Inst. Polit. Jasi XIV (1968), p. 1-14 et C. R. A. S. 264 (1967), p. 840.
- [6] Eilenberg, S. — Mac Lane, S., *General theory of natural equivalences*, Trans. A. M. S. 58 (1945), p. 231-294.
- [7] Bénabou, J., *Structures algébriques dans les catégories*, Cahiers de Topologie et Géométrie diff. X (1968); thèse Paris (1966).
- [8] Isbell, J. R., *Structure of categories*, Bull. A. M. S. 72, 4 (1966), p. 619-655.
- [9] Lambek, J., *Completions of Categories*, Lecture Notes in Math., Springer (1966).
- [10] Trnkova V., *Limits in categories and limit-preserving functors*, Comm. Math. Univer. Carolinae 7, 1 (1966), p. 1-73.
- [11] Sierpiński, W., *Leçons sur les nombres transfinis*, Gauthier-Villars (1950).
- [12] Mitchell, B., *Theory of Categories*, Pure and Applied Math., Academic Press (1965).

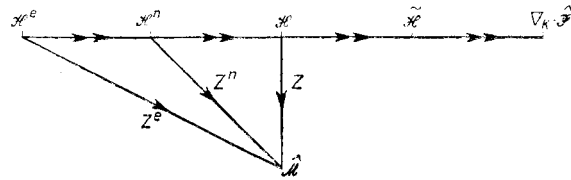
INDEX DES NOTATIONS

Catégories:	$\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}}, \nabla_K, \hat{\mathcal{F}}$	10
	$\mathcal{H}^e, \mathcal{H}^n$	14
	$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}^\varepsilon, \mathcal{H}''^\varepsilon$ où $\varepsilon = e$ ou n	25
	$\mathcal{H}^\mu$	40
	$\mathcal{H}^{\mu_1}, \mathcal{H}^{\mu_2}$	42
	$\mathcal{F}_\sim, \hat{\mathcal{F}}_{\gamma_\sim}$	51
	$\mathcal{G}^\mathcal{F}, \mathcal{G}''^\mathcal{F}$	51
	$\mathcal{K}^\varepsilon$ pour $\varepsilon = e$ ou μ	58
Foncteurs:	$\delta_{H^*} : H^* \rightarrow \mathfrak{N}(\hat{\mathcal{A}}, H^*) \square$	8
	$\delta_{q, H} : a(q) \rightarrow \mathfrak{N}(\hat{\mathcal{A}}, H^*) \square$	9
	$Z : \mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$	14
	$Z^\varepsilon : \mathcal{H}^\varepsilon \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$ pour $\varepsilon = e$ ou n	14
		pour $\varepsilon = \mu$ 40
	$\Upsilon_{\mathcal{L}}^\varepsilon : \mathcal{L}^\varepsilon \rightarrow \mathcal{H}_1$ pour $\varepsilon = e$ ou n et $\mathcal{L} = \mathcal{H}'$ ou $\mathcal{H}''$	25
	$\Upsilon_{\mathcal{L}}^\mu : \mathcal{L}^\mu \rightarrow \mathcal{H}_\gamma$ pour $\mathcal{L} = \mathcal{H}'$ ou $\mathcal{H}''$	42
	$V_{\mathcal{G}}^\mathcal{F} : \mathcal{G}^\mathcal{F} \rightarrow \hat{\mathcal{F}}_{\gamma_\sim}$ pour $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ ou $\mathcal{G}''$	51

INDEX DE LA TERMINOLOGIE

- Application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme (partielle) 35
- Catégorie q -engendrée par une sous-catégorie 18
 - pleinement engendrée par une sous-catégorie 49
- Foncteur associé à un générateur 32
 - bien surjectif à gauche 13
 - $\sqcap$ -engendrant 9
 - K' -étalant 13
 - K' -résolvant à droite 13
 - μ -compatible 35
- Prolongement (plein) K'' -minimal pour $e = e$ ou u 28
 - à $\mathcal{I}$ -limites projectives μ -minimal 47
 - K' -étalant libre 64
 - maximal 64
 - μ -compatible libre 64
 - maximal 64
- Sous-catégorie (pleine) stable par (K', I') -injections engendrée par une sous-classe 17
 - — — — (K', I') -noyaux engendrée par une sous-classe 17
 - — — — (μ, Q) -stable engendrée par une sous-classe 42
 - — — — stable par $\mathcal{I}$ -limites projectives engendrée par une sous-classe 51
- Sous-structure engendrée 9
- Sous-transformation naturelle 8

On a le diagramme suivant, où $\rightarrow$ désigne un foncteur injection canonique d'une sous-catégorie pleine vers une catégorie



/ 52 /

CATEGORIE DES FONCTEURS TYPES

par CHARLES EHRESMANN
(Université de Paris)

Le but de cet article est de donner la construction explicite d'une catégorie de foncteurs servant à définir les espèces de structures mathématiques du genre usuel. Cette construction a été esquissée déjà partiellement dans [1], p. 57. Elle précise la construction de l'échelle des ensembles [3].

Cet article reproduit des conférences faites à Buenos Aires, São Paulo et Caracas en Septembre, Octobre et Novembre 1960.

I. Foncteurs naturalisés.

Etant données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, soient Φ et Φ' deux foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ (nous dirons simplement foncteur pour foncteur covariant). Pour tout élément (ou morphisme) f d'une catégorie, l'unité à droite sera désignée par $\alpha(f)$, l'unité à gauche par $\beta(f)$; $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ (ou les objets correspondants) sont appelés aussi source et but de f . Rappelons qu'une *transformation naturelle* de Φ vers Φ' est un triplet (Φ', τ, Φ) , où τ est une fonction associant à toute unité e de $\mathcal{C}$ un morphisme $\tau(e) \in \mathcal{C}'$ de source $\Phi(e)$ et de but $\Phi'(e)$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}$, on ait

$$\tau(e') \Phi(f) = \Phi'(f) \tau(e), \quad \text{où } e = \alpha(f), \quad e' = \beta(f).$$

Soit $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ la classe des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ et soit $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ la classe des transformations naturelles (Φ', τ, Φ) , où Φ' et Φ sont des foncteurs quelconques de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$.

Proposition: $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ est une catégorie pour la multiplication suivante (appelée *longitudinale*):

$$(\Phi'', \tau', \Phi_1) (\Phi', \tau, \Phi) = (\Phi'', \tau' \cdot \tau, \Phi)$$

si et seulement si $\Phi_1 = \Phi'$, la fonction $\tau' \cdot \tau$ étant définie par: $(\tau' \cdot \tau)(e) = \tau'(e) \tau(e)$.

Une unité de $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ est un triplet (Φ, Φ_0, Φ) , où Φ_0 est la restriction de Φ à la classe des unités de $\mathcal{C}$; les foncteurs Φ correspondent ainsi d'une manière biunivoque aux unités et

peuvent être considérés comme étant les objets de la catégorie $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$. Une transformation naturelle inversible (Φ', τ, Φ) est appelée une *équivalence naturelle* de Φ vers Φ' . Pour toute unité e de $\mathcal{C}$, $\tau(e)$ est alors un élément inversible de $\mathcal{C}'$; l'élément inverse de (Φ', τ, Φ) est (Φ, τ^{-1}, Φ') , où $\tau^{-1}(e) = \tau(e)^{-1}$.

En particulier soit $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ la classe des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$. Cette classe est une catégorie pour la multiplication définie par $(\Phi' \Phi)(f) = \Phi'(\Phi(f))$, pour tout $f \in \mathcal{C}$; elle admet une seule unité, le foncteur Id tel que $Id(f) = f$. Désignons par $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ la catégorie des transformations naturelles $\mathcal{N}(\mathcal{C}, \mathcal{C})$.

Proposition: La catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ opère à droite et à gauche sur la catégorie $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ de la manière suivante:

$$\begin{aligned} (\Phi', \tau, \Phi) \Phi_1 &= (\Phi' \Phi_1, \tau \Phi_1, \Phi \Phi_1), \\ \Phi_1' (\Phi', \tau, \Phi) &= (\Phi_1' \Phi', \Phi_1' \tau, \Phi_1' \Phi). \end{aligned}$$

(Dans la première formule nous écrivons $\tau \Phi_1$ à la place de $\tau \Phi_{10}$, cette convention n'entraînant pas de confusion dans ce cas).

1 Remarquons que la multiplication par Φ_1 ou par Φ_1' est compatible avec la loi de composition de la catégorie $\mathcal{N}(\mathcal{C})$. En effet,

$$\begin{aligned} [(\Phi'', \tau', \Phi') (\Phi', \tau, \Phi)] \Phi_1 &= [(\Phi'', \tau', \Phi') \Phi_1] [(\Phi', \tau, \Phi) \Phi_1] = \\ &= (\Phi'' \Phi_1, (\tau' \cdot \tau) \Phi_1, \Phi \Phi_1) \end{aligned}$$

d'après la relation $(\tau' \cdot \tau) \Phi_1 = \tau' \Phi_1 \cdot \tau \Phi_1$. Il en est de même pour la multiplication par Φ_1' d'après la relation $\Phi_1' (\tau' \cdot \tau) = \Phi_1' \tau' \cdot \Phi_1' \tau$.

Proposition: $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ est aussi une catégorie, qui sera appelée catégorie latérale des transformations naturelles, pour la loi de composition suivante, appelée multiplication latérale:

$$\begin{aligned} (\bar{\Phi}', \bar{\tau}, \bar{\Phi}) \times (\Phi', \tau, \Phi) &= [(\bar{\Phi}', \bar{\tau}, \bar{\Phi}) \Phi'] [\bar{\Phi} (\Phi', \tau, \Phi)] = \\ &= (\bar{\Phi}' \Phi', \bar{\tau} \Phi' \cdot \bar{\Phi} \tau, \bar{\Phi} \Phi). \end{aligned}$$

Ce produit latéral est aussi défini par:

$$[\bar{\Phi}' (\Phi', \tau, \Phi)] [(\bar{\Phi}', \bar{\tau}, \bar{\Phi}) \Phi] = (\bar{\Phi}' \Phi', \bar{\Phi}' \tau \cdot \bar{\tau} \Phi, \bar{\Phi} \Phi),$$

en vertu de l'égalité $\bar{\tau} \Phi' \cdot \bar{\Phi} \tau = \bar{\Phi}' \tau \cdot \bar{\tau} \Phi$, qui résulte de l'identité $\bar{\tau}(\beta(f)) \bar{\Phi}(f) = \bar{\Phi}'(f) \bar{\tau}(\alpha(f))$ caractérisant la transformation naturelle $(\bar{\Phi}', \bar{\tau}, \bar{\Phi})$ lorsqu'on l'applique à $f = \tau(e)$.

Pour la multiplication latérale il n'y a qu'une seule unité (Id, Id_0, Id). L'associativité de la multiplication latérale résulte de la formule:

$$\overline{\tau} \overline{\Phi'} \Phi' \cdot \overline{\Phi} (\overline{\tau} \Phi' \cdot \overline{\Phi} \tau) = (\overline{\tau} \overline{\Phi'} \cdot \overline{\Phi} \overline{\tau}) \Phi' \cdot \overline{\Phi} \overline{\Phi} \tau.$$

Proposition: Les deux multiplications définies sur $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ vérifient l'identité de permutabilité:

$$(Y' \times Y) (X' \times X) = Y' X' \times YX,$$

où $X, X', Y, Y' \in \mathcal{N}(\mathcal{C})$ tels que $Y'X'$ et YX soient définis.

1

Définition: Une transformation naturelle $(\Phi, \varphi, Id) \in \mathcal{N}(\mathcal{C})$, que nous représenterons simplement par (Φ, φ) , sera appelée foncteur naturalisé.

2

Proposition: La classe $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{C})$ des foncteurs naturalisés est une sous-catégorie de la catégorie latérale $\mathcal{N}(\mathcal{C})$.

La multiplication des foncteurs naturalisés s'écrit simplement:

$$(\Phi', \varphi') \times (\Phi, \varphi) = (\Phi' \Phi, \varphi' \Phi \cdot \varphi) = (\Phi' \Phi, \Phi' \varphi \cdot \varphi')$$

Proposition: La catégorie longitudinale $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ opère sur $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{C})$ de la manière suivante:

$$(\Phi', \tau, \Phi_1) (\Phi, \varphi) = (\Phi', \tau \cdot \varphi)$$

si et seulement si $\Phi_1 = \Phi$.

Définition: Un couple composable $[(\Phi', \tau, \Phi), (\Phi, \varphi)]$ sera représenté par le triplet $[(\Phi', \tau \cdot \varphi), \tau, (\Phi, \varphi)]$ et s'appellera transformation naturelle du foncteur naturalisé (Φ, φ) vers $(\Phi', \tau \cdot \varphi)$. Soit $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{C})$ la catégorie formée par ces couples composables.

La loi de composition dans $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{C})$ s'écrit:

$$\begin{aligned} [(\Phi'', \varphi''), \tau', (\Phi_1, \varphi_1)] [(\Phi', \varphi'), \tau, (\Phi, \varphi)] = \\ = [(\Phi'', \varphi''), \tau' \cdot \tau, (\Phi, \varphi)] \end{aligned}$$

où $\varphi' = \tau \cdot \varphi$, $\varphi'' = \tau' \cdot \varphi_1$, si et seulement si $(\Phi_1, \varphi_1) = (\Phi', \varphi')$.

La classe $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{C}) \times \mathcal{F}_\nu(\mathcal{C})$ des couples de foncteurs naturalisés $[(\Phi', \varphi'), (\Phi, \varphi)]$ forme une catégorie pour la loi de composition suivante:

$$\begin{aligned} [(\Phi'', \varphi''), (\Phi_1, \varphi_1)] [(\Phi', \varphi'), (\Phi, \varphi)] = \\ = [(\Phi'', \varphi'') \times (\Phi', \varphi'), (\Phi, \varphi)] \end{aligned}$$

si et seulement si $(\Phi_1, \varphi_1) = (\Phi', \varphi') \times (\Phi, \varphi)$. (Remarquons que pour toute catégorie Γ la classe $\Gamma \times \Gamma$ devient une catégorie en considérant Γ comme une catégorie d'opérateurs [1] à gauche ou à droite sur Γ .)

Proposition: Soit Θ la fonction qui associe au couple $[(\Phi', \varphi'), (\Phi, \varphi)]$ la transformation naturelle $[(\Phi', \varphi') \times (\Phi, \varphi), \varphi' \Phi, (\Phi, \varphi)]$. Alors Θ est un foncteur biunivoque de $\mathcal{F}_*(\mathcal{C}) \times \mathcal{F}_*(\mathcal{C})$ sur une sous-catégorie de $\mathcal{N}_*(\mathcal{C})$. A toute sous-catégorie $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}_*(\mathcal{C})$ correspond par Θ une sous-catégorie de $\mathcal{N}_*(\mathcal{C})$ admettant $\mathcal{F}'$ comme classe d'objets.

L'identité de permutabilité entraîne:

Proposition: $\mathcal{N}_*(\mathcal{C})$ est une catégorie pour la loi de composition suivante, appelée multiplication latérale:

$$\begin{aligned} [(\bar{\Phi}', \bar{\varphi}'), \bar{\tau}, (\bar{\Phi}, \bar{\varphi})] \times [(\Phi', \varphi'), \tau, (\Phi, \varphi)] = \\ = [(\bar{\Phi}', \bar{\varphi}') \times (\Phi', \varphi'), \bar{\tau} \Phi' \cdot \bar{\Phi} \tau, (\bar{\Phi}, \bar{\varphi}) \times (\Phi, \varphi)] \end{aligned}$$

correspondant à la multiplication latérale des transformations naturelles.

- 1 Dans la suite nous considérons le cas où la catégorie $\mathcal{C}$ est
- 2 la catégorie $\tilde{\mathcal{E}}$ des applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble quelconque. A un élément f de $\tilde{\mathcal{E}}$ est associé un ensemble $E = \alpha(f)$ et un ensemble $E' = \beta(f)$; $f(x)$ est défini pour tout $x \in E$ et on a $f(x) \in E'$. Un couple (g, f) d'éléments de $\tilde{\mathcal{E}}$ est composable si et seulement si $\alpha(g) = \beta(f)$, le composé gf étant défini par $(gf)(x) = g(f(x))$ pour $x \in \alpha(f)$. Les ensembles forment la classe des objets de $\tilde{\mathcal{E}}$, chaque ensemble correspondant à une unité $i(E)$, application identique de E . Les catégories $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{E}})$, $\mathcal{F}_*(\tilde{\mathcal{E}})$, $\mathcal{N}(\tilde{\mathcal{E}})$, $\mathcal{N}_*(\tilde{\mathcal{E}})$ seront désignées par $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_*$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_*$ respectivement.

Une transformation naturelle $(\Phi', \tau, \Phi) \in \mathcal{N}$ sera appelée *injection naturelle* de Φ dans Φ' lorsque, pour tout ensemble E , l'application $\tau(E)$ est une injection de $\Phi(E)$ dans $\Phi'(E)$ (c'est-à-dire $\tau(E)(y) = \tau(E)(y')$ entraîne $y = y'$).

On désigne ici $\tau(i(E))$ par $\tau(E)$ et $\Phi(i(E))$ par $\Phi(E)$.

II. Construction de foncteurs naturalisés.

1. Foncteur $\mathcal{P}$:

Soit $f \in \tilde{\mathcal{G}}$, $\alpha(f) = E$, $\beta(f) = E'$. Désignons par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Pour tout $U \in \mathcal{P}(E)$, désignons par $f(U)$ l'ensemble des éléments $f(x)$ pour $x \in U$. Soit $\mathcal{P}(f)$ l'application $U \rightarrow f(U)$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E')$. L'application $\mathcal{P}: f \rightarrow \mathcal{P}(f)$ est un foncteur de $\tilde{\mathcal{G}}$ dans $\tilde{\mathcal{G}}$.

En posant $\mathcal{P}^0 = Id$ et $\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{n-1} \mathcal{P}$, on définit par récurrence le foncteur $\mathcal{P}^n$ pour tout entier naturel.

Le foncteur $\mathcal{P}$ est naturalisé par la fonction γ telle que $\gamma(E)$ soit l'application $x \rightarrow \{x\}$ de E dans $\mathcal{P}(E)$, où $\{x\}$ est la partie de E dont x est le seul élément. Le foncteur naturalisé $(\mathcal{P}, \gamma)$ admet les puissances $(\mathcal{P}, \gamma)^n = (\mathcal{P}^n, \gamma_n)$, où $\gamma_n(E) = \gamma_{n-1}(\mathcal{P}(E))\gamma(E)$, $(\mathcal{P}, \gamma)^0 = (Id, Id_0)$.

2. Produit parallèle d'une famille de foncteurs naturalisés:

Définition: Soit $(\Phi_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs de $\tilde{\mathcal{G}}$ dans $\tilde{\mathcal{G}}$, où I est un ensemble d'indices. On appellera produit parallèle 1
 $\prod_{i \in I} \Phi_i$ de cette famille le foncteur associant à $f \in \tilde{\mathcal{G}}$ l'application $\prod_{i \in I} \Phi_i(f): (x_i)_{i \in I} \rightarrow (\Phi_i(f)(x_i))_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} E_i$ dans $\prod_{i \in I} E'_i$, où $E_i = \Phi_i(E)$, $E'_i = \Phi_i(E')$, $E = \alpha(f)$, $E' = \beta(f)$.

En particulier, soit $\prod_{i \in I}^I$ le foncteur $\prod_{i \in I} \Phi_i$, où $\Phi_i = Id$ quel que soit $i \in I$. $\prod_{i \in I}^I(f)$ est l'application: $(x_i)_{i \in I} \rightarrow (f(x_i))_{i \in I}$ de E^I dans E'^I . Ce foncteur est naturalisé par la fonction δ^I telle que $\delta^I(E)$ soit l'application diagonale $x \rightarrow (x_i)_{i \in I}$, où $x \in E$ et $x_i = x$ pour tout $i \in I$.

Soit $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs naturalisés. On a la transformation naturelle $(\prod_{i \in I} \Phi_i, \prod_{i \in I} \varphi_i, \prod_{i \in I}^I)$, où $\prod_{i \in I} \varphi_i$ associe à E l'application $\prod_{i \in I} \varphi_i(E)$.

Définition: On appellera produit parallèle $\prod_{i \in I} (\Phi_i, \varphi_i)$ de la famille $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ le foncteur naturalisé: 2

$$(\prod_{i \in I} \Phi_i, \prod_{i \in I} \varphi_i, \prod_{i \in I}^I) (\prod_{i \in I}^I, \delta^I) = (\prod_{i \in I} \Phi_i, \prod_{i \in I} \varphi_i \cdot \delta^I).$$

Si I ne contient qu'un seul élément i , le produit parallèle de la famille sera par définition le foncteur (Φ_i, φ_i) lui-même.

$\prod_{i \in I} \varphi_i \cdot \delta^I$ associe à E l'application $x \rightarrow (\varphi_i(x))_{i \in I}$, où $x \in E$.

Si l'on pose $\prod_{i \in I} (\Phi_i, \varphi_i) = (\Phi, \varphi)^I$ lorsque $(\Phi_i, \varphi_i) = (\Phi, \varphi)$ pour tout $i \in I$, on a $(\prod_{i \in I}^I, \delta^I) = (Id, Id_0)^I$.

3. Foncteurs limites:

Pour tout ensemble I , l'ensemble $I \times I$ est muni d'une structure de groupoïde par la loi de composition $(j', i') (j, i) = (j', i)$ si et seulement si $i' = j$. Les unités sont les éléments (i, i) de la diagonale de $I \times I$. Une structure de préordre sur I est définie par la relation $(j, i) \in \Omega$, notée aussi $j < i$, où Ω est une sous-catégorie de $I \times I$ contenant la diagonale. Une structure d'ordre sur I correspond au cas où Ω n'admet pas d'autres éléments inversibles que les unités.

Définition: Une famille préordonnée (resp. ordonnée) d'éléments d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur covariant de Ω dans $\mathcal{C}$, où Ω est une sous-catégorie de $I \times I$ définissant un préordre (resp. un ordre) sur I .

En particulier, soit θ un foncteur de Ω dans $\tilde{\mathcal{E}}$, l'application correspondant à $(j, i) \in \Omega$ étant désignée par θ_{ji} . Supposons que le préordre sur I soit filtrant à gauche, c'est-à-dire pour $(j, i) \in I \times I$ il existe $k \in I$ tel que $k < i, k < j$. Soit E_i l'ensemble correspondant par θ à (i, i) . L'ensemble somme $\sum_{i \in I} E_i$ est l'ensemble des couples (i, x) , où $i \in I, x \in E_i$. Soit ρ la relation d'équivalence définie dans $\sum_{i \in I} E_i$ par: $(i, x) \sim (j, x') \pmod{\rho}$ lorsqu'il existe $k \in I$ tel que $k < i, k < j$ et $\theta_{ki}(x) = \theta_{kj}(x')$. La classe d'équivalence de (i, x) sera notée $\overline{(i, x)}$.

Définition: On appelle limite inductive de la famille préordonnée θ l'ensemble $\lim \theta = (\sum_{i \in I} E_i)_{/\rho}$.

Proposition: Soient θ et θ' deux foncteurs de Ω dans $\tilde{\mathcal{E}}$. A toute transformation naturelle (θ', τ, θ) correspond une application $\Psi(\theta', \tau, \theta)$ de $\lim \theta$ dans $\lim \theta'$ définie par $\overline{(i, x)} \rightarrow \overline{(i, \tau(i)(x))}$,

1 où $x \in E_i$. La fonction Ψ est un foncteur de $\mathcal{N}(\tilde{\mathcal{E}}, \Omega)$ vers $\tilde{\mathcal{E}}$.

Considérons une famille préordonnée de transformations naturelles définie par un foncteur Θ de Ω dans $\mathcal{N}$ et soit $\Theta_{ji} = (\Phi_j, \tau_{ji}, \Phi_i)$. Pour tout ensemble E les applications $\tau_{ji}(E)$ forment une famille préordonnée $\tau(E)$. A tout $f \in \tilde{\mathcal{G}}$ correspond la transformation naturelle $(\tau(E'), \Phi(f), \tau(E))$, où $E = \alpha(f)$, $E' = \beta(f)$, $\Phi(f)$ est la fonction $i \rightarrow \Phi_i(f)$. La fonction $f \rightarrow (\tau(E'), \Phi(f), \tau(E))$ est un foncteur $\overline{\Phi}$. Le foncteur Ψ de la proposition précédente associe à $(\tau(E'), \Phi(f), \tau(E))$ l'application $(\lim \Theta)(f)$ de $\lim \tau(E)$ dans $\lim \tau(E')$, où $\lim \Theta$ est le foncteur composé $\Psi \circ \overline{\Phi}$.

Définition: Le foncteur $\lim \Theta$ est appelé limite de la famille de foncteurs $(\Phi_i)_{i \in I}$ par rapport à Θ . 1

Supposons que $\overline{\Theta}$ soit un foncteur de Ω dans $\mathcal{N}$, définissant une famille préordonnée de transformations naturelles de foncteurs naturalisés. Posons $\overline{\Theta}_{ji} = ((\Phi_j, \varphi_j), \tau_{ji}, (\Phi_i, \varphi_i))$ où $\varphi_j = \tau_{ji} \cdot \varphi_i$, et $\Theta_{ji} = (\Phi_j, \tau_{ji}, \Phi_i)$. Pour tout $x \in E$, les éléments $(i, \varphi_i(E)(x))$ appartiennent à une classe d'équivalence dans $\sum_{i \in I} \Phi_i(E)$ définissant un élément de $\lim \tau(E)$ que nous désignons par $\varphi(E)(x)$. Nous définissons ainsi une application $\varphi(E)$ de E dans $\lim \tau(E)$. L'application $\lim \Theta(f)$ applique $\varphi(E)(x)$ sur $\varphi(E')(f(x))$, car $(i, \varphi_i(E)(x))$ est appliqué sur $(i, \Phi_i(f) \varphi_i(E)(x))$; or $\Phi_i(f) \varphi_i(E) = \varphi_i(E') f$, relation qui exprime que (Φ_i, φ_i) est un foncteur naturalisé. Par suite $(\lim \Theta, \varphi)$ est un foncteur naturalisé, où φ associe à E l'application $\varphi(E)$.

Définition: Le foncteur naturalisé $(\lim \Theta, \varphi)$ est désigné par $\lim \overline{\Theta}$ et s'appellera limite de la famille de foncteurs naturalisés $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ par rapport à Θ . Si I ne contient qu'un seul élément i , le foncteur limite de la famille sera par définition le foncteur (Φ_i, φ_i) . 2

Pour tout $i \in I$, on a la transformation naturelle canonique de (Φ_i, φ_i) vers $(\lim \Theta, \varphi)$ définie par la fonction τ_i qui associe à l'ensemble E l'application $\tau_i(E): y \rightarrow (i, y)$, où $y \in \Phi_i(E)$. On vérifie, en effet, les relations:

$$\begin{aligned} \tau_i(E') \Phi_i(f) &= \lim \Theta(f) \tau_i(E) \text{ et} \\ \varphi &= \tau_i \cdot \varphi_i. \text{ Si } j < i, \text{ on a } \varphi_i = \varphi_j \cdot \tau_{ji}. \end{aligned}$$

4. Limite d'une suite finie ou transfinie de foncteurs naturalisés:

Soit $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ une suite (finie ou transfinie) de foncteurs naturalisés, c'est-à-dire une famille où I est une section de la classe

des ordinaux formée par l'ensemble des nombres ordinaux i tels que $i < \mu$, $i \neq \mu$. Nous allons y associer une suite de foncteurs naturalisés $(\Psi_i, \psi_i)_{i \in I}$ et pour chaque couple (i, j) , où $i < j$, une transformation naturelle $\bar{\Theta}_{ji}^I = [(\Psi_j, \psi_j), \tau_{ji}, (\Psi_i, \psi_i)]$ vérifiant les conditions suivantes:

1. La fonction $\bar{\Theta}^I: (i, j) \rightarrow \bar{\Theta}_{ji}^I$ est un foncteur contravariant de Ω dans $\mathcal{N}$, où Ω est la catégorie des couples (i, j) où $i < j$.
2. $(\Phi_0, \varphi_0) = (\Psi_0, \psi_0)$.
3. $(\Psi_{i+1}, \psi_{i+1}) = (\Phi_{i+1}, \varphi_{i+1}) \times (\Psi_i, \psi_i) = (\Phi_{i+1} \Psi_i, \varphi_{i+1} \psi_i)$, $\tau_{i+1i} = \varphi_{i+1} \Psi_i$.
4. Si $\lambda < \mu$ et si λ n'admet pas de précédent, soit J l'ensemble des j tels que $j < \lambda$, $j \neq \lambda$. Soit $\bar{\Theta}^J$ la restriction de $\bar{\Theta}^I$ aux couples (j, j') , où $j \in J$, $j' \in J$. Enfin soit $(\lim \Theta^J, \varphi^J)$ le foncteur naturalisé limite de la famille $(\Psi_j, \psi_j)_{j \in J}$ relativement à $\bar{\Theta}^J$ et soit $[(\lim \Theta^J, \varphi^J), \tau_j, (\Psi_j, \psi_j)]$ la transformation naturelle canonique de (Ψ_j, ψ_j) vers $(\lim \Theta^J, \varphi^J)$. Alors $(\Psi_\lambda, \psi_\lambda) = (\Phi_\lambda, \varphi_\lambda) \times (\lim \Theta^J, \varphi^J)$ et $\tau_{\lambda j} = \varphi_\lambda \lim \Theta^J \cdot \tau_j$; c'est-à-dire $\bar{\Theta}_{\lambda j}^I$ est le produit longitudinal de la transformation canonique de (Ψ_j, ψ_j) vers $(\lim \Theta^J, \varphi^J)$ par la transformation naturelle canonique (voir § 1) de $(\lim \Theta^J, \varphi^J)$ vers $(\Phi_\lambda, \varphi_\lambda) \times (\lim \Theta^J, \varphi^J)$.

Proposition: Par induction transfinie, ces conditions définissent d'une façon unique $\bar{\Theta}^I$.

Définition: On appellera limite de la suite de foncteurs naturalisés $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ le foncteur limite de la famille $(\Psi_i, \psi_i)_{i \in I}$ relativement à $\bar{\Theta}^I$. Nous le noterons $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

On définit d'une façon analogue la limite de la famille $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ lorsque I est un ensemble bien ordonné quelconque.

Exemple: Par induction transfinie, on associe à tout ordinal μ le foncteur naturalisé $(\mathcal{P}^\mu, \gamma_\mu)$ de telle façon que les conditions suivantes soient réalisées:

- 1) $(\mathcal{P}^0, \gamma_0) = (Id, Id_0)$.
- 2) $(\mathcal{P}^{\lambda+1}, \gamma_{\lambda+1}) = (\mathcal{P}^\lambda, \gamma_\lambda) \times (\mathcal{P}, \gamma)$.
- 3) Si μ n'a pas d'ordinal précédent, considérons la famille $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$, où I est l'ensemble des ordinaux i tels que $i < \mu$, $i \neq \mu$ et où $(\Phi_i, \varphi_i) = (\mathcal{P}, \gamma)$ pour tout $i \in I$. Alors $(\mathcal{P}^\mu, \gamma_\mu)$ est la limite de la famille $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$. En particulier, on a ainsi le foncteur $(\mathcal{P}^\omega, \gamma_\omega)$, ω étant le premier nombre ordinal transfini.

III. Catégorie des foncteurs types.

Définition: Appelons catégorie des foncteurs types la plus petite sous-catégorie $\mathcal{F}_\tau$ de $\mathcal{F}_\gamma$ vérifiant les conditions suivantes:

- 1) $\mathcal{F}_\tau$ contient $(\mathcal{P}, \gamma)$.
- 2) $\mathcal{F}_\tau$ contient le produit parallèle d'une famille quelconque de foncteurs naturalisés appartenant à $\mathcal{F}_\tau$.
- 3) Etant donnée une suite (finie ou transfinie) $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$, où $(\Phi_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}_\tau$ quel que soit $i \in I$, alors $\mathcal{F}_\tau$ contient aussi la limite de cette suite.

Pour tout ordinal μ on définit par induction transfinie une sous-catégorie $\mathcal{F}_\tau^\mu$ de $\mathcal{F}_\tau$ de telle façon que les conditions suivantes soient vérifiées:

- 1) $\mathcal{F}_\tau^1$ est la sous-catégorie de $\mathcal{F}_\tau$ engendrée par $(\mathcal{P}, \gamma)$ et $(\prod^I, \vartheta^I)$, où I est un ensemble quelconque.
- 2) $\mathcal{F}_\tau^\mu$, pour $\mu \neq 1$, est la sous-catégorie de $\mathcal{F}_\tau$ engendrée par la réunion des $\mathcal{F}_\tau^\lambda$, où $\lambda < \mu$, $\lambda \neq \mu$, et des éléments suivants:
 - a) Le produit parallèle d'une famille quelconque $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$, où $(\Phi_i, \varphi_i) \in \bigcup_{\substack{\lambda < \mu \\ \lambda \neq \mu}} \mathcal{F}_\tau^\lambda$, pour tout $i \in I$, I étant un ensemble quelconque.
 - b) La limite d'une suite $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$, où $(\Phi_i, \varphi_i) \in \bigcup_{\substack{\lambda < \mu \\ \lambda \neq \mu}} \mathcal{F}_\tau^\lambda$, pour tout $i \in I$.

Si on suppose de plus dans a) et b) qu'il n'existe aucun $\lambda < \mu$, $\lambda \neq \mu$ tel que $(\Phi_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}_\tau^{\lambda_i}$, $\lambda_i + 1 < \lambda$, pour tout $i \in I$, le produit parallèle de la famille ou la limite de la suite $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sera appelé *générateur canonique de type μ* . Les foncteurs $(\mathcal{P}, \gamma)$ et $(\prod^I, \vartheta^I)$ seront appelés *générateurs canoniques de type 1*.

Proposition: $\mathcal{F}_\tau$ est la réunion des $\mathcal{F}_\tau^\lambda$.

En effet, $\mathcal{F}_\tau$ contient $\mathcal{F}_\tau^\mu$ pour tout μ , car $\mathcal{F}_\tau$ contient $\mathcal{F}_\tau^1$; d'autre part, si $\mathcal{F}_\tau$ contient $\mathcal{F}_\tau^\lambda$ pour tout $\lambda < \mu$, $\lambda \neq \mu$, alors $\mathcal{F}_\tau$ contient $\mathcal{F}_\tau^\mu$. Inversement, soit une famille $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ telle que $(\Phi_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}_\tau^{\lambda_i}$, pour tout $i \in I$. Alors l'ensemble des nombres transfinis λ_i admet un majorant μ . Donc $(\Phi_i, \varphi_i) \in \mathcal{F}_\tau^\mu$ pour tout $i \in I$ et le produit parallèle ou la limite de $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ appartient à $\mathcal{F}_\tau^{\mu+1}$.

On définit une catégorie restreinte $\hat{\mathcal{F}}_\tau$ de foncteurs types en ajoutant dans la définition de $\mathcal{F}_\tau$ les conditions suivantes: l'en-

semble I de la condition 2) est dénombrable; de plus la section I de la condition 3) est la section des nombres finis $n < \omega$. On peut définir alors les sous-catégories $\hat{\mathcal{F}}_{\tau}^{\lambda}$, où λ est un ordinal quelconque de la deuxième classe (correspondant au cardinal $\aleph_0$).

$\hat{\mathcal{F}}_{\tau}$ sera la réunion des $\hat{\mathcal{F}}_{\tau}^{\lambda}$ parce que tout ensemble dénombrable d'ordinaux de la deuxième classe est majoré par un ordinal de la deuxième classe. Les générateurs canoniques tels que I vérifie la condition restrictive sont les générateurs canoniques de $\hat{\mathcal{F}}_{\tau}$.

1+

Proposition: Pour tout foncteur type $(\Phi, \varphi) \in \hat{\mathcal{F}}_{\tau}$, on a les propriétés suivantes: a) L'application $\varphi(E)$ est une injection de E dans $\Phi(E)$, pour tout ensemble E ; b) Φ est un foncteur biunivoque de $\tilde{\mathcal{E}}$ sur une sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{E}}$; c) (Φ, φ, Id) est la seule injection naturelle de Id vers Φ .

Si $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est une famille de foncteurs naturalisés tels que $\varphi_i(E)$ soit une injection pour tout E , alors le produit parallèle $(\coprod_{i \in I} \Phi_i, \coprod_{i \in I} \varphi_i \cdot \delta^I)$ possède encore la même propriété.

Si de plus on a une famille préordonnée de transformations naturelles $\bar{\Phi}_{ji} = [(\Phi_j, \varphi_j), \tau_{ji}, (\Phi_i, \varphi_i)]$, alors la limite de $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ relativement à $\bar{\Theta}$ est un foncteur naturalisé $(\lim \Theta, \varphi)$ tel que $\varphi(E)$ soit une injection pour tout E . De plus si $\tau_{ji}(E)$ est une injection quels que soient i, j, E , alors dans la transformation naturelle canonique $[(\lim \Theta, \varphi), \tau_i, (\Phi_i, \varphi_i)]$ l'application $\tau(E)$ est une injection naturelle.

2

Soit $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ une suite de foncteurs naturalisés et supposons que $\varphi_i(E)$ soit une injection pour tout E et pour tout $i \in I$. Par induction transfinie, on démontre que pour la suite associée $(\Psi_i, \psi_i)_{i \in I}$ définie plus haut, $\psi_i(E)$ est encore une injection. On considère alors la famille ordonnée de transformations naturelles $\bar{\Theta}_{ji}^I = [(\Psi_j, \psi_j), \tau_{ji}, (\Psi_i, \psi_i)]$. Le foncteur $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$, qui est la limite de $(\Psi_i, \psi_i)_{i \in I}$ relativement à $\bar{\Theta}^I$, est un foncteur (Φ, φ) tel que $\varphi(E)$ soit une injection. Remarquons de plus que $\tau_{ji}(E)$ est une injection naturelle.

Par induction transfinie, on démontre que $(\Phi, \varphi) \in \hat{\mathcal{F}}_{\tau}^{\lambda}$ possède la propriété a) quel que soit l'ordinal λ . Il en résulte que tout foncteur type possède la propriété a).

D'une manière analogue, on démontre la propriété b).

Pour démontrer la propriété c), on vérifie d'abord cette propriété pour les foncteurs (Id, Id_0) et $(\mathcal{P}, \gamma)$. La même suite de raisonnements par induction transfinie démontre alors la propriété pour un foncteur type quelconque.

3

Proposition: La catégorie $\mathcal{F}_\tau$ est une catégorie libre ayant pour système libre de générateurs la classe des générateurs canoniques définis ci-dessus.

La notion de catégorie libre est définie de la manière suivante:

Définition: Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, $\mathcal{C}_0$ la classe de ses unités, $\mathcal{B}$ un système de générateurs ne contenant aucune unité non isolée (c'est-à-dire la plus petite sous-catégorie contenant $\mathcal{B}$ est identique à $\mathcal{C}$). Alors $\mathcal{C}$ est une catégorie libre par rapport à $\mathcal{B}$ lorsqu'aucune unité de $\mathcal{C}$ n'est le composé de deux éléments distincts de $\mathcal{C}$ et que tout élément f de $\mathcal{C}$ qui n'est pas une unité se décompose d'une manière unique sous la forme $f = f_n f_{n-1} \dots f_1$ où $f_i \in \mathcal{B}$. Dans ce cas $\mathcal{B}$ est appelé système libre de générateurs de $\mathcal{C}$. $\mathcal{B}$ est la classe des éléments "premiers" de $\mathcal{C}$.

Remarque: $\mathcal{C}$ peut être considérée comme un graphe orienté, un élément $f \in \mathcal{C}$ étant appelé flèche (ou arête orientée) si f n'est pas une unité et sommet si f est une unité. $\mathcal{B}$ détermine alors un sous-graphe orienté. Une suite finie de flèches $(f_n, f_{n-1}, \dots, f_1)$ telle que $\alpha(f_{p+1}) = \beta(f_p)$, pour $p < n$, sera appelée un chemin sur le sous-graphe orienté $\mathcal{B}$. La classe des sommets de $\mathcal{B}$ et des chemins orientés de $\mathcal{B}$ définit une catégorie $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ pour la multiplication:

$$(g_p, \dots, g_2, g_1) (f_n, \dots, f_2, f_1) = (g_p, \dots, g_1, f_n, \dots, f_1)$$

si et seulement si $g_1 f_n$ est défini.

$$\begin{aligned} (f_n, \dots, f_2, f_1) e &= (f_n, \dots, f_1), \\ e' (f_n, \dots, f_2, f_1) &= (f_n, \dots, f_1), \end{aligned}$$

si et seulement si $e = \alpha(f_1)$, $e' = \beta(f_n)$.

Si $\mathcal{C}$ est libre par rapport à $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ est isomorphe à la catégorie $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. 1

On voit aisément qu'il existe des catégories non libres; en particulier une sous-catégorie d'une catégorie libre n'est pas nécessairement libre.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie engendrée par une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ ne contenant aucune unité, alors $\mathcal{C}$ est une catégorie quotient de la catégorie $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ des chemins sur le graphe $\mathcal{B}$.

Etant donné un graphe non orienté $\mathcal{K}$, on en déduit un graphe orienté $\mathcal{B}$ en faisant correspondre à chaque arête de $\mathcal{K}$ deux arêtes orientées, c'est-à-dire deux flèches désignées par f et f^{-1} . On définit le groupoïde libre $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{K})$ sur $\mathcal{K}$ en considérant la catégorie libre $\mathcal{C} = \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Soit ρ la plus petite relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ compatible avec la loi de composition et telle que $f^{-1}f \sim \alpha(f)$, $ff^{-1} \sim \beta(f)$, $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ désignant l'origine et l'extrémité de la flèche f , considérée comme chemin élémentaire. Par passage au quotient, on définit sur $\mathcal{C}_{/\rho}$ une multiplication pour laquelle $\mathcal{C}_{/\rho}$ est un groupoïde, appelé groupoïde libre sur $\mathcal{K}$. On démontre que tout sous-groupoïde d'un groupoïde libre est un groupoïde libre. 2

- Pour démontrer que la catégorie $\mathcal{F}_\tau$ est libre, on montre d'abord par induction transfinie que tout foncteur type est le produit d'un nombre fini de générateurs canoniques. Supposons démontrée la propriété suivante, pour deux générateurs canoniques distincts, (Φ, φ) et (Φ', φ') de type λ et λ' tels que $\lambda + 1 < \mu$, $\lambda' + 1 < \mu$: Les ensembles $\Phi(E)$ et $\Phi'(E')$, correspondants à deux ensembles quelconques E et E' , sont distincts. Alors on voit que cette propriété est encore vérifiée pour deux générateurs canoniques distincts de types μ ou $< \mu$. Donc par induction transfinie la propriété est vérifiée pour deux générateurs canoniques distincts quelconques. Il en résulte facilement que deux produits distincts finis de générateurs canoniques sont distincts.

On démontre de même que la catégorie restreinte de foncteurs types $\hat{\mathcal{F}}_\tau$ est une catégorie libre par rapport à la sous-classe des générateurs canoniques de $\hat{\mathcal{F}}_\tau$.

- D'après la dernière proposition du §1, à la catégorie $\mathcal{F}_\tau$ est associée une sous-catégorie $\mathcal{N}_\tau$ de $\mathcal{N}_\tau$, formée d'injections naturelles d'un foncteur type vers un foncteur type. Nous les appellerons *injections naturelles types*. Si $[(\Phi', \varphi'), \tau, (\Phi, \varphi)]$ est une injection naturelle type, nous écrivons $(\Phi, \varphi) < (\Phi', \varphi')$. On définit ainsi une relation d'ordre dans $\mathcal{F}_\tau$. Celle-ci peut aussi être définie de la manière suivante: $(\Phi', \varphi') = (\Psi, \psi) \times (\Phi, \varphi)$, où (Ψ, ψ) est un foncteur type. La fonction τ est déterminée par la donnée de (Φ, φ) et (Φ', φ') .

IV. Catégorie des transformations naturelles canoniques.

Nous allons définir un groupoïde d'équivalences naturelles d'un foncteur type vers un foncteur type. Les générateurs de ce groupoïde sont les suivants:

- 1) Soit $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs types. Soit $(I_j)_{j \in J}$ une famille de parties de I qui forment une partition de I . Soit $\bigsqcup_{i \in I_j} (\Phi_i, \varphi_i) = (\Psi_j, \psi_j)$. Considérons l'équivalence naturelle de $\bigsqcup_{i \in I} (\Phi_i, \varphi_i)$ vers $\bigsqcup_{j \in J} (\Psi_j, \psi_j)$ définie de la manière suivante: A l'ensemble E sera associée l'application biunvoque $\tau(E)$ de $\bigsqcup_{i \in I} \Phi_i(E)$ sur $\bigsqcup_{j \in J} \Psi_j(E)$ qui applique $(x_i)_{i \in I}$, où $x_i \in E_i$, sur $(y_j)_{j \in J}$, où $y_j = (x_i)_{i \in I_j}$. On vérifie que $[\bigsqcup_{j \in J} (\Psi_j, \psi_j), \tau, \bigsqcup_{i \in I} (\Phi_i, \varphi_i)]$ est bien

une équivalence naturelle. En particulier, soient $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(\Phi_j, \varphi_j)_{j \in J}$ deux familles de foncteurs types. A toute application biunivoque de J sur I correspond ainsi une équivalence naturelle de $\prod_{i \in I} (\Phi_i, \varphi_i)$ vers $\prod_{j \in J} (\Phi_j, \varphi_j)$.

2. Soit $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ une suite de foncteurs types, où I est la section de la classe des ordinaux $i < \mu$ et $i \neq \mu$. Supposons qu'il existe une suite transfinie d'ordinaux λ_j où $j \in J$, section des ordinaux, telle que μ soit la somme de la suite (λ_j) , où λ_j est l'ordinal correspondant à la section I_j . Alors pour tout $j \in J$ on a un isomorphisme $\tilde{j}$ de I_j sur un intervalle I'_j de I de telle façon que les I'_j forment une partition de I , un élément de I'_j étant plus petit qu'un élément de $I'_{j'}$ si $j < j'$. Posons $(\bar{\Phi}_j, \bar{\varphi}_j) = \lim (\Phi'_i, \varphi'_i)_{i \in I'_j}$ où $(\Phi'_i, \varphi'_i) = (\Phi_{\tilde{j}(i)}, \varphi_{\tilde{j}(i)})$ pour $i \in I_j$. On a l'équivalence naturelle de $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ vers $\lim (\bar{\Phi}_j, \bar{\varphi}_j)_{j \in J}$ définie par la fonction τ qui associe à E l'application biunivoque $\tau(E)$ qui applique la classe d'équivalence de (i', y) , où $i' = \tilde{j}(i)$, $i \in I_j$, $y \in \Psi_{i'}(E)$, sur la classe d'équivalence de (j, z) , où $z \in \bar{\Psi}_j(E)$ correspond à la restriction de (i', y) à $\sum_{i \in I'_j} \Psi_i(E)$.

3) Si $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est une suite finie de foncteurs types, on a l'équivalence naturelle de $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ sur le produit $(\Phi_n, \varphi_n) \dots (\Phi_0, \varphi_0)$ qui associe à l'ensemble E l'application biunivoque $\tau(E)$ qui applique la classe d'équivalence de (i, y) sur $z \in \Phi_n \dots \Phi_0(E)$, où $y \in \Psi_i(E)$ et où $z = \tau_{ni}(E)(y)$.

4) Si $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ est une suite finie ou transfinie de foncteurs types, où $(\Phi_i, \varphi_i) = (Id, Id_0)$ pour tout $i \in I$, on a une équivalence naturelle de (Id, Id_0) vers $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ en associant à l'ensemble E l'application: $x \rightarrow (\overline{0}, x)$, $x \in E$, $(\overline{0}, x)$ étant la classe d'équivalence de $(0, x)$ correspondant à la famille d'applications $\tau_{ji}(E)$ qui interviennent dans la définition de $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

Les équivalences naturelles ainsi définies seront appelées *équivalences naturelles élémentaires*.

Soient $(\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ et $(\Phi'_i, \varphi'_i)_{i \in I}$ deux familles de foncteurs types tels que l'on ait une équivalence naturelle $[(\Phi'_i, \varphi'_i), \tau_i, (\Phi_i, \varphi_i)]$ pour tout $i \in I$. Alors on en déduit une équivalence naturelle $(\prod_{i \in I} (\Phi'_i, \varphi'_i), \tau, \prod_{i \in I} (\Phi_i, \varphi_i))$, où $\tau(E)$ est l'application biunivoque: $(x_i)_{i \in I} \rightarrow (\tau_i(E)(x_i))_{i \in I}$, $x_i \in \Phi_i(E)$. Cette équivalence sera appelée *produit parallèle* de la famille des équivalences données.

Supposons de plus que I soit une section de la classe des ordi-

naux. Alors on a une équivalence naturelle: $[\lim (\Phi_i', \varphi_i')_{i \in I}, \tau, \lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}]$, où $\tau(E)$ est l'application biunivoque: $(i, y) \rightarrow (i, \tau_i(E)(y))$, où $y \in \Psi_i(E)$. Cette équivalence sera appelée *limite latérale* de la suite des équivalences données.

Soit I l'ensemble des nombres 0 et 1. Soit T l'équivalence élémentaire de $\lim (\Phi_i, \varphi_i)_{i \in I}$ vers $(\Phi_1, \varphi_1) \times (\Phi_0, \varphi_0)$. Soit T' l'équivalence élémentaire de $\lim (\Phi_i', \varphi_i')_{i \in I}$ vers $(\Phi_1', \varphi_1') \times (\Phi_0', \varphi_0')$. Posons $T_1 = [(\Phi_1', \varphi_1'), \tau_1, (\Phi_1, \varphi_1)]$ et $T_0 = [(\Phi_0', \varphi_0'), \tau_0, (\Phi_0, \varphi_0)]$. Soit $T_1 \square T_0$ la limite latérale de (T_0, T_1) , $T_1 \times T_0$ désignant toujours le produit latéral de T_0 et T_1 . Alors on démontre la relation:

$$T_1 \square T_0 = T'^{-1} (T_1 \times T_0) T.$$

Définition: Soit $\mathcal{N}_c$ le plus petit sous-groupeïde de $\mathcal{N}_v$, relativement à la multiplication longitudinale, contenant: 1) les équivalences naturelles élémentaires; 2) le produit parallèle d'une famille d'éléments de $\mathcal{N}_c$; 3) le produit latéral de deux éléments de $\mathcal{N}_c$; 4) la limite latérale d'une suite (finie ou transfinie) d'éléments de $\mathcal{N}_c$. Soit $\mathcal{N}_c'$ la plus petite sous-catégorie de $\mathcal{N}_v$, relativement à la multiplication longitudinale, contenant: 1) les éléments de $\mathcal{N}_c$; 2) les éléments de $\mathcal{N}_c'$; 3) le produit parallèle d'une famille d'éléments de $\mathcal{N}_c'$; 4) la limite latérale d'une suite (finie ou transfinie) d'éléments de $\mathcal{N}_c'$. Un élément de $\mathcal{N}_c$ (resp. $\mathcal{N}_c'$) sera appelé *équivalence naturelle canonique* (resp. *injection naturelle canonique*) d'un foncteur type vers un foncteur type.

V. Foncteurs typiques.

Soit (Φ, φ) un foncteur type. Rappelons que $\tilde{\mathcal{G}}$ est une catégorie inductive [2], les éléments induits par $f \in \tilde{\mathcal{G}}$ étant les restrictions de f . Si $f' < f$, c'est-à-dire si f' est une restriction de f , alors on a: $\Phi(f') < \Phi(f)$, $\varphi(\alpha(f')) < \varphi(\alpha(f))$, $\varphi(\beta(f')) < \varphi(\beta(f))$. Mais, en général, on a:

$$\Phi(\bigcup_{i \in I} f_i) \neq \bigcup_{i \in I} \Phi(f_i).$$

Les propriétés précédentes ne suffisent pas pour caractériser les foncteurs types. Il serait intéressant d'avoir une définition axiomatique des foncteurs types ne faisant pas intervenir les générateurs explicites.

Définition: Un foncteur Φ' de $\tilde{\mathcal{E}}$ vers $\tilde{\mathcal{E}}$ sera dit *déduit* du foncteur Φ lorsqu'il existe une injection naturelle (Φ, τ, Φ') telle que, pour tout ensemble E , on ait $\Phi'(E) \subset \Phi(E)$, $\tau(E)$ étant l'injection canonique de $\Phi'(E)$ dans $\Phi(E)$; c'est-à-dire $\Phi'(f)$ est une restriction de $\Phi(f)$, pour tout $f \in \tilde{\mathcal{E}}$; on écrira $\Phi' < \Phi$.

Un foncteur naturalisé (Φ', φ') sera dit *déduit* de (Φ, φ) , si $\Phi'(f)$ est une restriction de $\Phi(f)$ et si $\varphi(E) = \tau(E) \varphi'(E)$, $\tau(E)$ étant encore l'injection canonique de $\Phi'(E)$ dans $\Phi(E)$; on écrira $(\Phi', \varphi') < (\Phi, \varphi)$. 1

Les relations ainsi définies sont des relations d'ordre compatibles avec la multiplication. Ainsi $\mathcal{F}$ est une classe inductive [2]: le plus petit élément de $\mathcal{F}$ est le foncteur 0 qui applique tout $f \in \tilde{\mathcal{E}}$ sur l'application identique de l'ensemble vide. En adjoignant à $\mathcal{F}_\bullet$, cet élément 0, $\mathcal{F}_\bullet$ devient une classe inductive. Les foncteurs naturalisés déduits d'un foncteur naturalisé (Φ, φ) ont pour intersection le foncteur naturalisé (Φ', φ') tel que $\Phi'(E)$ soit l'ensemble des points $\varphi(x)$, où $x \in E$. 2¶

Définition: Si (Φ, φ) est un foncteur type, tout foncteur déduit de Φ sera appelé *foncteur typique*. Si $(\Phi', \varphi') < (\Phi, \varphi)$, alors (Φ', φ') sera appelé *foncteur typique naturalisé*. Soit $\mathcal{F}_\tau'$ (resp. $\mathcal{F}_\tau''$) la classe des foncteur typiques (resp. typiques naturalisés).

Proposition: 1) $\mathcal{F}_\tau'$ (resp. $\mathcal{F}_\tau''$) est une sous-classe de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_\bullet$) contenant avec un élément tout élément déduit.

2) $\mathcal{F}_\tau'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}$. Pour toute famille $(\Phi_i)_{i \in I}$ où $\Phi_i \in \mathcal{F}_\tau'$ pour tout $i \in I$, le produit parallèle de la famille appartient à $\mathcal{F}_\tau'$.

3) $\mathcal{F}_\tau''$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}_\bullet$ contenant avec toute famille (resp. suite) d'éléments de $\mathcal{F}_\tau''$ son produit parallèle (resp. sa limite). 3

Soit $\mathcal{E}$ le groupoïde des applications biunivoques. Chaque foncteur type admet une restriction à $\mathcal{E}$, que nous appellerons encore foncteur type de $\mathcal{E}$ vers $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{F}_\tau(\mathcal{E})$ la catégorie de ces foncteurs types. Dans $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ (resp. $\mathcal{F}_\tau(\mathcal{E})$), on définit encore la notion de foncteur déduit (resp. foncteur naturalisé déduit). En particulier, on définit comme précédemment les foncteurs typiques (resp. typiques naturalisés). Ils forment une sous-catégorie $\mathcal{F}_\tau'(\mathcal{E})$ (resp. $\mathcal{F}_\tau''(\mathcal{E})$) jouissant encore des propriétés indiquées dans la proposition précédente.

D'après les définitions de [1], un foncteur $\Phi' \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ définit une espèce de structures sur $\mathcal{E}$. Le procédé régulier de définition d'une espèce de structures sur E consiste à prendre pour Φ' un foncteur typique; un tel foncteur sera, en général, déduit d'un foncteur type donné par un système d'axiomes. Chaque axiome du système définit un foncteur déduit et le système définit l'intersection de ces foncteurs déduits.

Le procédé de définition peut aussi faire intervenir des ensembles auxiliaires. Par exemple, soit $\wedge$ le foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui applique tout $f \in \mathcal{E}$ sur l'application identique de I . Soit Φ_1 le produit parallèle de $\wedge$ avec Id . On considère alors les foncteurs déduits de $\Phi \Phi_1$, où $(\Phi, \varphi) \in \mathcal{F}_\tau(\mathcal{E})$.

1+ Soit $\mathcal{C}_i$ une catégorie munie d'un foncteur Φ_i vers $\tilde{\mathcal{E}}$ pour $i \in I$. Soit $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ la catégorie produit et p_i le foncteur projection de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ sur $\mathcal{C}_i$. A l'aide des foncteurs $\Phi_i p_i$ et des foncteurs typiques on définit [1] aussi une classe de foncteurs de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ vers $\tilde{\mathcal{E}}$ qu'on pourrait encore appeler foncteurs typiques.

2+

Remarque: Pour une suite de foncteurs naturalisés, on peut définir la limite projective de la suite. Nous ne l'avons pas introduite comme générateur de la catégorie des foncteurs types, car elle se déduit d'un foncteur type.

REFERENCES

- [1] EHRESMANN, C., *Gattungen von lokalen Strukturen*, Jahresbericht d. D. M. V., 60, 1957, p. 49-77.
- [2] *Catégories inductives et pseudo-groupes*, Ann. Inst. Fourier, 10, 1960, p. 307-336.
- [3] BOURBAKI, N., *Théorie des Ensembles*, Chap. 4, Structures, Hermann, A S I, 1258.
- [4] Les notions de catégorie libre et de groupoïde libre ainsi que les résultats de la remarque p. 204 ont été obtenus en collaboration avec M. HASSE. Voir: HASSE, MARIA, *Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und groupoide*, Math. Nachrichten, 22, 1960

/102/

Gratefully to the Department of Mathematics,
University of Kansas,
in the "Heart of mid-America", so stimulating
a place (regardless some tornadoes) for writing
this paper (Spring 1966).

SUR L'EXISTENCE DE STRUCTURES LIBRES ET DE FONCTEURS ADJOINTS

par Charles EHRESMANN

INTRODUCTION

Les « problèmes universels », qui interviennent dans tous les domaines des Mathématiques (construction de structures algébriques libres, complétion d'un espace uniforme, etc...), peuvent se formuler dans le cadre de la théorie des catégories à l'aide de la notion de p -structure libre, où p est un foncteur. Il est donc important d'avoir des critères « maniables » d'existence et de construction de p -structures libres.

De tels critères sont connus : Le théorème de Freyd [4] assure l'existence d'un foncteur adjoint de p si p est à limites projectives et si les catégories sont « assez petites » ; le critère de Lawvere (plus général [7]) prouve qu'il existe une p -structure libre lorsqu'il existe une p -structure semi-libre (définie comme une p -structure libre, mais sans la propriété d'unicité) et certains noyaux ; les propositions d'existence de projections de [1] dont l'idée est reprise et systématisée dans le présent travail.

Dans la partie I, nous supposons que p est la restriction à H d'un foncteur P . Le théorème 1 lie la notion de p -structure libre à celle de morphisme (P, X, H) -engendré de but une (H, P) -structure semi-libre. Les morphismes engendrés sont étudiés dans les § 1 et 2 ; en choisissant judicieusement la classe X , des conditions faciles à vérifier entraînent l'existence de morphismes engendrés, et par suite de p -structures libres. Les théorèmes de Freyd et de Lawvere sont ainsi « relativisés » et plusieurs critères d'existence d'adjoints sont indiqués. Comme application, nous généralisons les théorèmes d'existence de structures quasi-quotient et de limites inductives de [1] et, dans le § 4, nous étudions le problème de la quasi-cohomologie à valeurs dans une catégorie dominée.

La partie II, qui contient les principaux résultats de l'article, est consacrée à la complétion des catégories, problème abordé récemment par de nombreux auteurs. Ici nous utilisons le théorème d'existence de structures libres, le point délicat étant de prouver que certains foncteurs sont « engendrant » (th. 5, 12, 16). Le § 1 contient la (longue) démonstration du théorème de complétion projective (th. 6 dont le th. 5 est un auxiliaire) : Plongement universel, à un isomorphisme près, d'une catégorie H dans une catégorie admettant H pour sous-catégorie pleine, munie d'une application $\mathcal{I}$ -limite projective univoque, et appartenant au même univers. Par « abstraction » de cette démonstration, nous construisons par récurrence transfinie une complétion projective canonique de H (th. 7). Le théorème 8 montre que cette complétion est aussi une « complétion projective libre », i.e. une solution du problème universel du plongement, à une équivalence près, de H dans une catégorie à limites projectives (c'est ce dernier problème qui avait été considéré auparavant). La construction se simplifie lorsqu'on veut seulement ajouter des produits (th. 9) et montre qu'il n'existe généralement pas de complétion projective libre qui soit une sous-catégorie de la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de H^* vers une catégorie d'applications (une solution de cette forme a été cherchée par différents auteurs). Le théorème 10 résout le problème de la complétion projective avec conservation de certaines limites : Etant donnée une application limite projective partielle $\mathcal{V}$ sur H , il existe une structure quasi-quotient de la complétion projective de H admettant H pour sous-catégorie et munie d'une application limite projective prolongeant $\mathcal{V}$.

Des résultats analogues relatifs à la complétion de catégories (adjonction à la fois de $\mathcal{I}$ -limites projectives et de $\mathcal{J}$ -limites inductives) sont obtenus dans le § 3. La complétion « structurée » des catégories structurées fait l'objet du § 4, avec application aux catégories ordonnées et multiples. Par exemple la complétion des catégories doubles intervient dans la construction des foncteurs types [8].

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
I. Existence de structures libres	
1. Morphismes engendrés.....	2
2. Foncteurs engendrants.....	17
3. Existence de structures libres engendrées.....	28
4. Quasi-cohomologie.....	42
II. Adjonction de limites à une catégorie	
1. Adjonction de limites projectives.....	50
2. Construction de complétions projectives.....	69
3. Adjonction de limites inductives et limites projectives.....	86
4. Adjonction de limites à une catégorie structurée.....	98
Appendice	
1. Image réciproque de sous-structures.....	121
2. Relation structurée engendrée par une relation.....	130
3. Lemmes relatifs au théorème 12 - II.....	141
Bibliographie	145

CONVENTIONS. La terminologie est celle du livre «Catégories et structures», Dunod, désigné par C.S.. En particulier : si C est une catégorie, α et β sont ses applications source et but, C_0 la classe de ses unités, C_* le groupoïde de ses inversibles, C^* sa duale. $\mathcal{M}$ désigne une catégorie pleine d'applications, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}^*$ et $\mathcal{F}$ les catégories des homomorphismes entre classes multiplicatives, des néofoncteurs et des foncteurs associées, $p\mathcal{N}$, $p\mathcal{N}^*$ et $p\mathcal{F}$ leurs foncteurs projection vers $\mathcal{M}$. Pour une catégorie pleine d'applications $\hat{\mathcal{M}}$ telle que $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$, nous notons $\hat{\mathcal{N}}$, $\hat{\mathcal{N}}^*$, $\hat{\mathcal{F}}$, $p\hat{\mathcal{N}}$, $p\hat{\mathcal{N}}^*$ et $p\hat{\mathcal{F}}$ les catégories et foncteurs correspondants. «Univers» signifie classe de classes (ici «classe» et «ensemble» sont synonymes) $\mathcal{M}_0$ vérifiant les conditions d'un univers au sens de Grothendieck, à l'exclusion de l'axiome : Si $x \in M$ et $M \in \mathcal{M}_0$, alors $x \in \mathcal{M}_0$.

I. EXISTENCE DE STRUCTURES LIBRES.

1. Morphismes engendrés.

Si $P = (K^*, \underline{p}, H^*)$ est un foncteur, désignons par $\widetilde{P}$ la classe de toutes les P -injections, par $\widetilde{P_i}$ la classe des P -monomorphismes; on a $\widetilde{P_i} \subset R_g(H^*)$, en notant $R_g(H^*)$ la classe des monomorphismes de H^* . Si $(j_i, j'_i)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé dans H^* (C.S. déf. 9, chap. IV) tel que $(P(j_i), P(j'_i))_{i \in I}$ soit un produit fibré naturalisé dans K^* , nous dirons que $(j_i, j'_i)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé dans P . On définit de même un produit naturalisé dans P . Nous dirons que P est un *foncteur à 1-produits* (resp. à *1-produits fibrés*) si toute famille $(e_i)_{i \in I}$, où $e_i \in H_0$ pour tout $i \in I$ (resp. toute famille $(j_i)_{i \in I}$, $j_i \in e.H$ pour tout $i \in I$), admet un produit (resp. un produit fibré) naturalisé dans P .

A. NOYAUX.

Soient H^* une catégorie, b et b' deux éléments de H de même source et de même but. Si $X \subset H$, on dira que $\hat{j} \in X$ est un X -noyau de (b, b') dans H^* si on a $b.\hat{j} = b'.\hat{j}$ et si les conditions $j \in X$ et $b.j = b'.j$ assurent l'existence d'un et d'un seul $f \in H$ tel que $j = \hat{j}.f$. Si $X = H$, un H -noyau de (b, b') est un noyau de (b, b') dans H^* au sens de [2], aussi appelé égalisateur de (b, b') dans [3] ou « difference kernel » dans [4].

Soit $p = (K^*, \underline{p}, H^*)$ un foncteur et X une sous-classe de H .

DEFINITION. Si $b \in H$ et $b' \in \beta(b).H.\alpha(b)$, on dira que j est un X -noyau de (b, b') dans p si :

- 1) j est un X -noyau de (b, b') dans H^* ;
- 2) $p(j)$ est un noyau de $(p(b), p(b'))$ dans K^* .

S'il existe un X -noyau de (b, b') dans p pour tout couple (b, b') tel que

$$\alpha(b) = \alpha(b') \text{ et } \beta(b) = \beta(b'),$$

on dira que p est un *foncteur à X-noyaux* (resp. à *noyaux* si $X = H$).

En particulier, si p est le foncteur injectif canonique (K^*, ι, H^*) , alors j est un X -noyau de (b, b') dans p si, et seulement si, j est un (H, X, K^*) -noyau de (b, b') au sens de [1], où $X \subset R_g(K^*)$.

PROPOSITION 1. Soit $b \in H$, $\alpha(b) = s$ et $b' \in \beta(b).H.s$. Si H^* est

une catégorie à produits fibrés finis et s'il existe un produit naturalisé $((\pi, \pi'), s \times s)$ dans H^* , alors (b, b') admet un noyau dans H^* .

DEMONSTRATION. Il existe un produit fibré naturalisé $((b, k), (b', k'))$ dans H^* et un produit fibré naturalisé

$$(([s, s], v), ([k, k'], v'))$$

dans H^* . Montrons que v est le noyau cherché. En effet, posons $d = [s, s]$, et $g = [k, k']$. On a $\pi \cdot g \cdot v' = \pi \cdot d \cdot v = v = \pi' \cdot d \cdot v = \pi' \cdot g \cdot v'$ et

$$b \cdot v = b \cdot \pi \cdot g \cdot v' = b \cdot k \cdot v' = b' \cdot k' \cdot v' = b' \cdot \pi' \cdot g \cdot v' = b' \cdot v.$$

Puisque g est un monomorphisme, il en est de même pour v .

Si, par ailleurs, nous supposons $j \in s \cdot H$ tel que $b \cdot j = b' \cdot j$, il existe $j' \in H$ vérifiant

$$k \cdot j' = j = k' \cdot j',$$

car $((b, k), (b', k'))$ est un produit fibré naturalisé. Les relations

$$g \cdot j' = [k, k'] \cdot j' = [k \cdot j', k' \cdot j'] = [j, j] = d \cdot j$$

assurent l'existence d'un et d'un seul $j'' \in H$ tel que

$$v \cdot j'' = j \text{ et } v' \cdot j'' = j',$$

car $((d, v), (g, v'))$ est un produit fibré naturalisé. Il s'ensuit que v est un noyau de (b, b') dans H^* . ■

COROLLAIRE. Si p est un foncteur à produits finis et à produits fibrés finis, alors p est à noyaux. Si $\mathcal{J}$ est une classe de classes telle que l'on ait $\{1, 2\} \in \mathcal{J}$, et que p soit un foncteur à $\mathcal{J}$ -produits, p est à noyaux si, et seulement si, p est à $\mathcal{J}$ -produits fibrés, ou encore si, et seulement si, p est à l^* -limites projectives, pour toute catégorie l^* telle que $l \in \mathcal{J}$ et $l_0 \in \mathcal{J}$.

DEMONSTRATION. La première affirmation résulte directement de la proposition 1.-Réciproquement : Soit $(b_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de H de même but s et supposons qu'il existe un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ de $(\alpha(b_i))_{i \in I}$ dans H^* . Si $I = \{1, 2\}$ et si n est un noyau de

$$(b_1 \cdot p_1, b_2 \cdot p_2) \text{ dans } H^*,$$

alors $\alpha(n)$ est un produit fibré de (b_1, b_2) dans H^* . S'il existe un produit s^I dans H^* ainsi qu'un produit fibré naturalisé

$$(([s]_{i \in I}, v'), (\prod_{i \in I} b_i, v)) \text{ dans } H^*,$$

où $[s]_{i \in I}$ est le morphisme diagonal de s^I , alors $(b_i, p_i, v)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé. De plus, on sait [4] que, si H^* est une catégorie à noyaux et à $\mathcal{J}$ -produits, H^* est à I^* -limites projectives. En effet, soit $F = (H^*, \underline{F}, I^*)$ un foncteur, où $I \in \mathcal{J}$; soit $((p_i)_{i \in I_0}, S)$ un produit naturalisé de $(F(i))_{i \in I_0}$ et, pour tout $f \in I$, désignons par n_f un noyau de $(p_{\beta(f)}, F(f), p_{\alpha(f)})$; alors F admet pour limite projective un produit fibré de $(n_f)_{f \in I}$ dans H^* . - Cette construction montre que p est aussi à I^* -limites projectives si p est à noyaux et à $\mathcal{J}$ -produits. ■

PROPOSITION 2. Si $j \in H$ est tel que $h.j = h'.j$, que $p(j)$ soit un noyau de $(p(h), p(h'))$ dans $\hat{K}^*$ et que $j \in \overleftarrow{p}$, alors j est un noyau de (h, h') dans p . Si j' est un noyau de (h, h') dans H^* , si $p(j') \in R_g(K^*)$ et si p est fidèle, on a $j' \in \overleftarrow{p_i}$, et par suite $j'.\overleftarrow{p_i} \subset \overleftarrow{p_i}$.

DEMONSTRATION. Montrons la première affirmation. Soit $k \in H$ tel que $h.k = h'.k$. Comme $p(j)$ est un noyau de $(p(h), p(h'))$ dans K^* , la relation

$$p(h).p(k) = p(h').p(k)$$

assure l'existence d'un $f \in K$ tel que $p(k) = p(j).f$. Puisque j est une p -injection, il existe un et un seul $k' \in H$ tel que

$$k = j.k' \text{ et } p(k') = f.$$

Par suite, j est un noyau de (h, h') dans H^* . - Supposons que j' soit un noyau de (h, h') dans H^* et soit $k \in \beta(j').H$ tel que $p(k) = p(j').f$. Les relations $\alpha(h.k) = \alpha(h'.k)$, $\beta(h.k) = \beta(h'.k)$ et

$$p(h.k) = p(h).p(j').f = p(h').p(j').f = p(h'.k)$$

entraînent $h.k = h'.k$, si p est fidèle. Par suite il existe un et un seul

$k' \in H$ tel que $k = j' \cdot k'$. Il s'ensuit

$$p(j') \cdot p(k') = p(k) = p(j') \cdot f,$$

d'où $p(k') = f$, si $p(j')$ est un monomorphisme. Donc j' est un p -monomorphisme. ■

COROLLAIRE 1. Si p est à $p_i^\perp$ -noyaux, p est à noyaux. Si p est fidèle et à noyaux, p est à $p_i^\perp$ -noyaux.

COROLLAIRE 2. Si p est à $p_i^\perp$ -noyaux et à $\mathcal{G}$ -produits, où $\mathcal{G}$ est une classe de classes admettant $\{1, 2\}$ pour élément, p est à $\mathcal{G}$ -produits fibrés, et par suite à I° -limites projectives, si $I \in \mathcal{G}$ et $I_0 \in \mathcal{G}$.

Supposons que $\mathcal{M}$ soit une catégorie pleine d'applications et $p = (\mathcal{M}, p, H^\circ)$ un foncteur. Nous désignons par $\mathcal{M}^i$ la classe des injections, par $\mathcal{M}^l$ la classe des injections canoniques (M, ι, M') , par $p_i^\perp$ la classe des $(\mathcal{M}^l, p)$ -injections. Soit $h \in H$ et $h' \in \beta(h) \cdot H \cdot \alpha(h)$. Pour que j soit un $(\mathcal{M}^l, p)$ -noyau de (h, h') au sens de la déf. 6, chap. III, C.S., il faut et il suffit que j soit un $p_i^\perp$ -noyau de (h, h') dans p . Si p est un foncteur d'homomorphismes saturé (C.S., déf. 20, chap. II), il est résolvant à droite (i.e. à $p_i^\perp$ -noyaux) (C.S., déf. 8, chap. III) si, et seulement si, p est à $p_i^\perp$ -noyaux, donc (corollaire 1, prop. 2) si, et seulement si, il est à noyaux. Soit $\hat{\mathcal{M}}$ une catégorie pleine d'applications contenant $\mathcal{M}$. Un couple (f, f') , où f et f' sont deux applications de $M \in \mathcal{M}_0$ dans $M' \in \mathcal{M}_0$, admet pour noyau dans $\mathcal{M}$ l'injection (M, ι, N) , où N est la classe des $x \in M$ tels que $f(x) = f'(x)$. Il s'ensuit que $\mathcal{M}$ est à noyaux. - Comme (M, ι, N) est aussi un noyau de (f, f') dans $\hat{\mathcal{M}}$, le foncteur $(\hat{\mathcal{M}}, \iota, \mathcal{M})$ est à noyaux. Supposons que p soit une restriction d'un foncteur $P = (\hat{\mathcal{M}}, P, \hat{H}^\circ)$. De la proposition 2 résulte que, si p est à $p_i^\perp$ -noyaux et si X est une partie de $P_i^\perp$ contenant tout $p_i^\perp$ -noyau, H° est une catégorie à $(X, \hat{H}^\circ)$ -noyaux; ceci généralise la proposition 1-2 [1] relative au cas où p est résolvant à droite.

Supposons que $\mathcal{M}_0$ soit un univers. Nous désignons toujours par :

1) π l'application $\mathcal{M}_0$ -produit canonique dans $\mathcal{M}$ telle que (C.S. chap. IV)

$$\pi((M_i)_{i \in I}) = ((p_i)_{i \in I}, \prod_{i \in I} M_i),$$

où $p_{\bar{i}}$ est la $\bar{i}$ -ème projection canonique du produit cartésien $\prod_{i \in I} M_i$ sur $M_{\bar{i}}$.

2) v l'application $\mathfrak{M}_o$ -produit fibré naturalisé telle que (C.S. chap. IV)

$$v((f_i)_{i \in I}) = ((v_i)_{i \in I}, \bigvee_{i \in I} f_i),$$

où $\bigvee_{i \in I} f_i$ est la classe des

$$(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \alpha(f_i) \text{ tels que } f_i(x_i) = f_{\bar{i}}(x_{\bar{i}}) \text{ pour tout } i, \bar{i} \in I,$$

et où $v_{\bar{i}}$ est la restriction à $\bigvee_{i \in I} f_i$ de la $\bar{i}$ -ème projection canonique de $\prod_{i \in I} \alpha(f_i)$.

Le corollaire de la proposition 1 entraîne que, si p est un foncteur d'homomorphismes saturé π -compatible, il est v -compatible si, et seulement si, il est résolvant à droite. Dans ce cas, il est à I^* -limites projectives, pour toute catégorie I^* telle que $I \in \mathfrak{M}_o$.

1 B. EJECTEURS STRICTS ET COEJECTEURS.

Soit $\hat{C}^*$ une catégorie. Nous désignons par $<$ la relation de préordre sur $\hat{C}$ définie par (C.S. déf. 21, chap. I)

$$g < g' \text{ si, et seulement si, il existe } h \in \hat{C} \text{ tel que } g = g' \cdot h.$$

Si $A \subset e \cdot \hat{C}$, où $e \in \hat{C}_o$, on dit (C.S. déf. 21, chap. I) que $\hat{g}$ est un $\hat{C}^*$ -minimum de A si $\hat{g} \in A$ et si $\hat{g} < g$ pour tout $g \in A$, et un $\hat{C}^*$ -maximum de A si $\hat{g} \in A$ et si $g < \hat{g}$ pour tout $g \in A$.

DEFINITION. Soient Y et Z deux parties de $\hat{C}$. On dira que $\hat{g}$ est un *éjecteur* (resp. un *coéjecteur*) *relativement à* $(Z, Y, \hat{C}^*)$ si $\hat{g} \in Y$ et si, pour tout $g \in \beta(\hat{g}).Z$, on a

$$g < \hat{g} \quad (\text{resp. } \hat{g} < g).$$

On appelle *projecteur* (resp. *coprojecteur*) *relativement à* $(Z, Y, \hat{C}^*)$ un éjecteur (resp. un coéjecteur) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^*)$, où $\hat{C}^*$ est la catégorie duale de $\hat{C}^*$.

Ainsi $\hat{g}$ est un projecteur (resp. un coprojecteur) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^*)$ si, et seulement si, $\hat{g} \in Y$ et si, pour tout $g \in Z \cdot \alpha(\hat{g})$, il existe

$$h \in \hat{C} \text{ tel que } g = h \cdot \hat{g} \quad (\text{resp. que } \hat{g} = h \cdot g),$$

Lorsque $Y = Z$, un éjecteur (resp. un coéjecteur) $\hat{g}$ relativement à $(Y, Y, \hat{C}^*)$ est simplement un $\hat{C}^*$ -maximum (resp. un $\hat{C}^*$ -minimum) de $\beta(\hat{g}) \cdot Y$.

EXEMPLES. Si C est une sous-classe de $\hat{C}$, nous notons $R_g(\hat{C}^*, C)$ (resp. $R_d(C, \hat{C}^*)$) la classe des éléments C -réguliers à gauche (resp. C -réguliers à droite) dans $\hat{C}^*$, i.e. (C.S. déf. 17, chap. I) des $g \in \hat{C}$ tels que $h = h'$ si $h \in C$, $h' \in C$ et $g \cdot h = g \cdot h'$ (resp. et $h \cdot g = h' \cdot g$). Soit C^* une sous-catégorie pleine de $\hat{C}^*$. Alors g est un éjecteur relativement à $(\hat{C}^*, C, R_g(\hat{C}^*, C), C, \hat{C}^*)$ si, et seulement si, g est un $(\hat{C}^*, C)$ -éjecteur (C.S. déf. 15*, chap. III). Pour que $g \in \hat{C}$ soit un projecteur relativement à $(C, \hat{C}^*, C, R_d(C, \hat{C}^*), \hat{C}^*)$, il faut et il suffit que g soit un $(C, \hat{C}^*)$ -projecteur. Si de plus C' définit une sous-catégorie pleine de C^* , alors g est un projecteur relativement à

$$(C'^*, \hat{C}, C, R_d(C'^*, C, \hat{C}^*), \hat{C}^*)$$

si, et seulement si, g est un $(C', C, \hat{C}^*)$ -projecteur au sens de la définition 5-2 [1].

Il est souvent utile de préciser les définitions précédentes comme suit :

DEFINITION. Soient Y et Z deux parties de $\hat{C}$. On dira que $\hat{g}$ est un *éjecteur strict* (resp. *éjecteur costrict*) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^*)$ si $\hat{g}$ est un $\hat{C}^*$ -maximum (resp. un $\hat{C}^*$ -minimum) de la classe des éjecteurs relativement à $(Z, Y, \hat{C}^*)$ de but $\beta(\hat{g})$. On dira que $\hat{g}$ est un *coéjecteur strict* (resp. *coéjecteur costrict*) si $\hat{g}$ est un $\hat{C}^*$ -minimum (resp. un $\hat{C}^*$ -maximum) de la classe des coéjecteurs relativement à $(Z, Y, \hat{C}^*)$, de but $\beta(\hat{g})$. Si $\hat{g}$ est un éjecteur strict (resp. un coéjecteur strict, resp. un éjecteur costrict, resp. un coéjecteur costrict) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^*)$, on dira que $\hat{g}$ est un *projecteur strict* (resp. un *coprojecteur strict*, resp. un

projecteur costrict, resp. un coprojecteur costrict) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^*)$

Lorsque Y est formée de monomorphismes de $\hat{C}^*$, la classe des éjecteurs stricts (resp. éjecteurs costricts) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^*)$ de but e est la classe $Y \cap \hat{g} \cdot \hat{C}_Y^*$, où $\hat{g}$ est un éjecteur strict (resp. costrict) relativement à $(Z, Y, \hat{C}^*)$.

De nombreux problèmes reviennent à chercher des éjecteurs, coéjecteurs, projecteurs ou coprojecteurs stricts ou costricts, i.e. des éléments « optimaux » en un certain sens. De tels problèmes peuvent être appelés problèmes « universels », en généralisant un peu la définition de ([2] et C.S., appendice II).

EXEMPLE. Soit $Z \subset e \cdot \hat{C}^*$, où $e \in \hat{C}_0^*$. Si $(i, v_i)_{i \in Z}$ est un produit fibré naturalisé dans $\hat{C}^*$, alors $v_o = i \cdot v_i$ est un coéjecteur costrict relativement à $(Z, \hat{C}^*, \hat{C}^*)$. Si Z est formé de monomorphismes et si $v_o \in e \cdot R_g(\hat{C}^*)$ est un coéjecteur costrict relativement à $(Z, \hat{C}^*, \hat{C}^*)$, alors $\alpha(v_o)$ est un produit fibré de $(i)_{i \in Z}$ dans $\hat{C}^*$.

C. MORPHISMES ENGENDRES.

Soient $\hat{C}^*$ une catégorie, C^* une sous-catégorie pleine de $\hat{C}^*$ et $Y \subset \hat{C}^*$.

DEFINITION. On appelle $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur (resp. coéjecteur strict) un coéjecteur (resp. coéjecteur strict) relativement à $(Y \cdot C_0^*, Y, \hat{C}^*)$.

D'après le § B, $\hat{g}$ est un $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur si, et seulement si, $\hat{g} \in Y$ et si $\hat{g} \leq g$ pour tout $g \in \beta(\hat{g}) \cdot Y \cdot C_0^*$. C'est un $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur strict si $\hat{g} \leq g'$ pour tout $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur g' . Si $e \in \hat{C}_0^*$ et si $e \cdot Y \cdot C_0^* = \emptyset$, tout $g \in e \cdot Y$ est un $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur et s'il existe un $\hat{C}^*$ -minimum de $e \cdot Y$, cet élément est un $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur strict.

Si $Y \subset R_g(\hat{C}^*)$ et si $\hat{g}$ et $\hat{g}'$ sont deux $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteurs stricts, de même but, on a $\hat{g} \in \hat{g}' \cdot \hat{C}_Y^*$. Si $Y' \subset Y$, un $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur g tel que $g \in Y'$ est un $(\hat{C}^*, Y', C)$ -coéjecteur; mais $g \in Y'$ peut être un $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur strict sans être un $(\hat{C}^*, Y', C)$ -coéjecteur strict. Un $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur g tel que $\alpha(g) \in C$ est un $(\hat{C}^*, Y \cdot C_0^*, C)$ -coéjecteur strict.

Si g est un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$ -coéjecteur et si $g' \in \alpha(g). \hat{C}$, alors $g.g'$ est un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$ -coéjecteur lorsque $g.g' \in Y$. Si de plus g est un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$ -coéjecteur strict, $g.g'$ est un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$ -coéjecteur strict et on a $g < g.g' < g$, d'où $g = g.g'.g''$; si $g \in R_g(\hat{C}^\bullet)$, cette égalité entraîne que g' admet un inverse à droite.

Soit $\bar{A}_1 = S.Y.C_0^\bullet$ et soit $\bar{A}_2$ la classe des $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$ -coéjecteurs de but S . Si $\bar{A}_i \neq \emptyset$, si $A_i \subset \bar{A}_i \subset A_i.\hat{C}_Y^\bullet$ et s'il existe un produit fibré naturalisé $(g, \nu_g)_{g \in A_i}$ dans $\hat{C}^\bullet$ tel que $\hat{g}_i = g.\nu_g \in Y$ pour $i = 1$ ou 2 , alors $\hat{g}_1$ est évidemment un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$ -coéjecteur, $\hat{g}_2$ un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$ -coéjecteur strict.

Soit $P = (K^\bullet, P, \hat{H}^\bullet)$ un foncteur, $H^\bullet$ une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^\bullet$ et X une partie de $\hat{H}$. Soit $\hat{C}^\bullet$ la catégorie ayant pour éléments les triplets

$$(f, b, f') \text{ tels que } b \in \hat{H}, f \in K, f' \in K \text{ et } f = P(b).f',$$

la loi de composition étant

$$((f_1, b_1, f'_1), (f, b, f')) \rightarrow (f_1, b_1.b, f')$$

si, et seulement si, $f'_1 = f$ et $\alpha(b_1) = \beta(b)$. Identifions les unités de $\hat{C}^\bullet$ aux couples (s, f) tels que $s \in \hat{H}_0^\bullet$ et $f \in P(s).K$. Soit Y (resp. C) la classe des

$$(f, b, f') \in \hat{C}^\bullet \text{ tels que } b \in X \text{ (resp. } b \in H).$$

Pour que $(f, \hat{j}, \hat{f}')$ soit un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$ -coéjecteur, il faut et il suffit que l'on ait

$$\hat{j} \in X, \quad f = P(\hat{j}).\hat{f}'$$

et que, si $j \in \beta(\hat{j}).X.H_0^\bullet$ et $f = P(j).f'$, il existe $b \in \hat{H}$ vérifiant

$$\hat{j} = j.b \quad \text{et} \quad f' = P(b).\hat{f}'.$$

Pour que $(f, \hat{j}, \hat{f}')$ soit un $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$ -coéjecteur strict, il faut et il suffit que, de plus, pour tout $(\hat{C}^\bullet, Y, C)$ -coéjecteur $(f, \hat{j}', \hat{f}'')$ tel que $\beta(\hat{j}) = \beta(\hat{j}')$, il existe $b' \in \hat{H}$ vérifiant

$$\hat{j} = \hat{j}'.b' \quad \text{et} \quad \hat{f}'' = P(b').\hat{f}'.$$

DEFINITION. Si $(f, \hat{j}, \hat{f}')$ est un $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur (resp. -coéjecteur strict), $\hat{j}$ est dit (P, X, H) -distingué pour (resp. dit (P, X, H) -engendré par) $(f, \hat{f}')$. Soit $f \in K$; on dira que $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour (resp. -engendré par) f s'il existe $\hat{f}'$ tel que $\hat{j}$ soit (P, X, H) -distingué pour (resp. -engendré par) $(f, \hat{f}')$.

EXEMPLES.

1) Soit P le foncteur constant de $\hat{H}^*$ sur la catégorie $\{\emptyset\}^*$ admettant un seul élément, $\emptyset$. Pour que $\hat{j}$ soit (P, X, H) -distingué pour (resp. -engendré par) $\emptyset$, il faut et il suffit que $\hat{j}$ soit un $(\hat{H}^*, X, H)$ -coéjecteur (resp. -coéjecteur strict).

2) Supposons que l'on ait $P(X) \subset R_g(K^*)$. Pour que $\hat{j}$ soit (P, X, H) -distingué pour $f \in K$, il faut et il suffit que l'on ait $\hat{j} \in X$, $f < P(\hat{j})$ et que, pour $j \in \beta(\hat{j}).X.H_0^*$ tel que $f < P(j)$, on ait $\hat{j} < j$. Pour que $\hat{j}$ soit (P, X, H) -engendré par f , il faut et il suffit que $\hat{j}$ soit un $\hat{H}^*$ -minimum de la classe des éléments (P, X, H) -distingués pour f . Dans ce cas, si $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour $f.k$ et si $f < P(\hat{j})$, alors $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour f .

3) Si $X \subset P_i^*$, un élément $\hat{j}$ est $(P, X.H_0^*, H)$ -engendré par f si, et seulement si, $\hat{j}$ est un (X, H) -sous-morphisme de $\beta(\hat{j})$ engendré par f au sens de [1].

4) j est $(P, R_g(\hat{H}^*), \hat{H})$ -engendré par $f \in K$ si, et seulement si, $\alpha(j)$ est une « sous-structure de $\beta(j)$ engendrée » par f au sens de [3].

PROPOSITION 3. Si $\hat{j}$ est $(P, X.H_0^*, H)$ -distingué pour (f, f') , il est $(P, X.H_0^*, H)$ -engendré par (f, f') . Supposons que $\hat{j}$ soit (P, X, H) -distingué pour (resp. -engendré par) (f, f') et que j soit tel que $\hat{j}.j \in X$ et $f' < P(j)$; alors $\hat{j}.j$ est (P, X, H) -distingué pour (resp. -engendré par) f .

En effet, la première affirmation est évidente. - Si $g = (f, \hat{j}, f')$ est un $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur (resp. -coéjecteur strict) et si $g' = (f', j, f'') \in \hat{C}$ nous avons vu que

$$g.g' = (f, \hat{j}.j, f'')$$

est un $(\hat{C}^*, Y, C)$ -coéjecteur (resp.-coéjecteur strict), donc $\hat{j}.j$ est (P, X, H) -distingué pour (resp.-engendré par) (f, f'') . ■

DEFINITION. On dira que X est ∇ -stable dans $\hat{H}^*$ si X est une sous-classe stable dans $\hat{H}^*$ et si les conditions

$$j \in X, j' \in X, b \in \hat{H} \text{ et } j.b = j'$$

entraînent $b \in X$. On dira que X est $\mathcal{J}$ - V -stable pour (P, H) si $X.X.H_0^* \subset X$, si $\mathcal{J}$ est une classe de classes et si les conditions

$$I \in \mathcal{J}, j_i \in X.H_0^* \text{ et } \beta(j_i) = e \text{ pour tout } i \in I$$

assurent l'existence d'un produit fibré naturalisé $(j_i, j'_i)_{i \in I}$ dans P tel que $j'_i \in X$. Si X est $\{\{1, 2\}\}$ - V -stable pour (P, H) , on dit aussi que X est V -stable pour (P, H) .

Soit $\nabla \hat{H}^*$ la catégorie des triangles de $\hat{H}^*$, i.e. la sous-catégorie de $\square \hat{H}^*$ formée des quatuors

$$(e, f', f, b) \text{ tels que } e \in \hat{H}_0^*$$

(C.S., p. 85, exemple 4, où $\square$ doit être remplacé par $\square$). Si X est stable dans $\hat{H}^*$, alors X est ∇ -stable dans $\hat{H}^*$ si, et seulement si, la classe des

$$(e, f', f, b) \in \nabla \hat{H}^* \text{ tels que } f \in X, f' \in X \text{ et } b \in X$$

définit une sous-catégorie pleine de $\nabla \hat{H}^*$.

EXEMPLES. $R_g(\hat{H}^*)$ est ∇ -stable dans $\hat{H}^*$ et, si P est à $\mathcal{J}$ -produits fibrés, $\mathcal{J}$ - V -stable pour $(P, \hat{H})$.

PROPOSITION 4. Soit $X = P^\sim$; alors X est ∇ -stable dans $\hat{H}^*$ et, si P est à $\mathcal{J}$ -produits fibrés, $\mathcal{J}$ - V -stable pour $(P, \hat{H})$.

DEMONSTRATION. X est ∇ -stable, car c'est une sous-catégorie de $\hat{H}^*$ (C.S. prop. 1, chap. III) vérifiant la condition supplémentaire voulue (C.S. théo. 1, chap. III). Supposons donnée une famille $(j_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\hat{H}$ vérifiant les conditions : on a

$$s \in \hat{H}_0^* \text{ et } j_i \in s.X \text{ pour tout } i \in I - \{\bar{i}\};$$

il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, j'_i)_{i \in I}$ dans $\hat{H}^*$ tel que

$(P(j_i), P(j'_i))_{i \in I}$ soit un produit fibré naturalisé dans K^* . Nous allons montrer que l'on a $j'_i \in P^\sim$, d'où résultera la proposition. En effet, soit $b \in \beta(j'_i) \cdot \hat{H}$ tel que $P(b) = P(j'_i) \cdot f$. Etant donné que $j_i \in P^\sim$, les égalités

$$P(j'_i, b) = P(j_i) \cdot P(j'_i) \cdot f \quad \text{pour tout } i \in I - \{\bar{i}\}$$

entraînent qu'il existe un et un seul $b_i \in \hat{H}$ tel que

$$j'_i \cdot b = j_i \cdot b_i \quad \text{et} \quad P(b_i) = P(j'_i) \cdot f;$$

posons de plus $b = b_{\bar{i}}$. Il s'ensuit, $(j_i, j'_i)_{i \in I}$ étant un produit fibré naturalisé dans $\hat{H}^*$, qu'il existe un et un seul $b' \in \hat{H}$ tel que

$$j'_i \cdot b' = b_i \quad \text{et} \quad j'_i \cdot b' = b_{\bar{i}} = b.$$

Comme $(P(j_i), P(j'_i))_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé dans K^* , les relations

$$P(j'_i) \cdot P(b') = P(b_i) = P(j'_i) \cdot f,$$

pour tout $i \in I$, assurent que l'on a $P(b') = f$. Supposons aussi

$$b = j'_i \cdot b'' \quad \text{et} \quad P(b'') = f.$$

On a, pour tout $i \in I - \{\bar{i}\}$, $j_i \in P^\sim$,

$$j_i \cdot j'_i \cdot b'' = j_{\bar{i}} \cdot j'_i \cdot b'' = j_{\bar{i}} \cdot b = j_i \cdot b_i \quad \text{et} \quad P(j'_i \cdot b'') = P(j'_i) \cdot f = P(b_i),$$

d'où $j'_i \cdot b'' = b_i$. Par suite $b' = b''$, car

$$j'_i \cdot b'' = b_i = j'_i \cdot b' \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Ainsi b' est l'unique élément de $\hat{H}$ tel que

$$j'_i \cdot b' = b \quad \text{et} \quad P(b') = f,$$

de sorte que $j'_i \in P^\sim$. ■

Dans la suite de ce paragraphe, $\hat{C}^*$ désignera toujours la catégorie associée plus haut à P et le mot coéjecteur (resp. coéjecteur strict) signifiera ($\hat{C}^*$, Y , C)-coéjecteur (resp. -coéjecteur strict).

PROPOSITION 5. Soient $S \in \hat{H}_0^*$, $j \in S \cdot X \cdot H_0^*$, $f = P(j) \cdot f'$ et $j' \in \alpha(j) \cdot X$. Supposons que $j \cdot j' \in X$, que $X \cdot H_0^*$ (resp. X) soit $\forall$ -stable pour (P, H) (resp. (P, H)) et que, si $s \in \hat{H}_0^*$ et $f'_1 \in P(s) \cdot K \cdot \alpha(f)$, il existe $j' \in s \cdot X \cdot H_0^*$

tel que $f'_1 < P(j')$). Si $\hat{j}'$ est (P, X, H) -distingué pour f' , $j \cdot \hat{j}'$ est (P, X, H) -distingué pour f . Si $\hat{j}'$ est (P, X, H) -engendré par f' , si X est ∇ -stable dans $\hat{H}^*$ et si $j \in R_g(\hat{H}^*)$, alors $j \cdot \hat{j}'$ est (P, X, H) -engendré par f .

DEMONSTRATION. Posons $g = (f, j, f') \in Y$. Soit $\hat{g}' = (f', \hat{j}', \hat{f}'')$ un coéjecteur. On a

$$\hat{j} = j \cdot \hat{j}' \in X, X \subset X \quad \text{et} \quad \hat{g} = g \cdot \hat{g}' = (f, \hat{j}, \hat{f}'') \in Y.$$

Supposons

$$j_1 \in \beta(j) \cdot X \cdot H_0^* \quad \text{et} \quad g_1 = (f, j_1, f_1) \in Y \cdot C_0^*.$$

Puisque $X \cdot H_0^*$ (resp. Puisque X) est ∇ -stable pour (P, H) , il existe un produit fibré naturalisé $((j, v), (j_1, v_1))$ dans P tel que $v \in X \cdot H_0^*$ (resp. $\in X$). L'égalité

$$P(j_1) \cdot f_1 = f = P(j) \cdot f'$$

assure l'existence d'un $f'_1 \in K$ tel que

$$P(v_1) \cdot f'_1 = f_1 \quad \text{et} \quad P(v) \cdot f'_1 = f'.$$

Il s'ensuit $g'_1 = (f', v, f'_1) \in Y \cdot C_0^*$ (resp. $\in Y$ et, par hypothèse, il existe un

$$g'' = (f'_1, j', f'_2) \in \beta(g'_1) \cdot Y \cdot C_0^*;$$

on a $g'_2 = g'_1 \cdot g'' \in Y \cdot C_0^*$) de sorte que, $\hat{g}'$ étant un coéjecteur, il existe $k \in \hat{C}$ tel que $\hat{g}' = g'_1 \cdot k$, où $i = 1$ (resp. $= 2$); par suite

$$\hat{g} = g \cdot \hat{g}' = g \cdot g'_1 \cdot k.$$

Comme

$$g \cdot g'_1 = (f, j, v, f'_1) = (f, j_1, v_1, f'_1) = g_1 \cdot k',$$

où $k' = (f_1, v_1, f'_1)$, on obtient $\hat{g} = g_1 \cdot k' \cdot k$ (resp. $\hat{g} = g_1 \cdot k' \cdot g'' \cdot k$). Donc $\hat{g}$ est un coéjecteur, i.e. $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour $(f, \hat{f}'')$. - Nous supposons de plus que $\hat{g}'$ soit un coéjecteur strict, que $j \in R_g(\hat{H}^*)$ et que X soit ∇ -stable dans $\hat{H}^*$. Soit $\hat{g}'' = (f, j'', f'')$ un coéjecteur de but $\beta(\hat{g})$. Puisque $\alpha(g) \in C$, il existe $k = (f', b, f'') \in \hat{C}$ tel que $\hat{g}'' = g \cdot k$. Etant donné que X est ∇ -stable dans $\hat{H}^*$, les relations

$$j'' = j \cdot b, \quad j'' \in X \text{ et } j \in X$$

entraînent $b \in X$, et $k \in Y$. Montrons que k est un coéjecteur. En effet soit $g_1 \in \beta(k) \cdot \hat{C} \cdot C_0^*$. On a $g \cdot g_1 \in \beta(\hat{g}'') \cdot \hat{C} \cdot C_0^*$ et $\hat{g}''$ étant un coéjecteur, il existe $g_1'' \in \hat{C}$ tel que $\hat{g}'' = g \cdot g_1 \cdot g_1''$. Les égalités

$$g \cdot g_1 \cdot g_1'' = \hat{g}'' = g \cdot k$$

ont pour conséquence $g_1 \cdot g_1'' = k$, car j étant un monomorphisme, $g \in R_g(\hat{C}')$. Ceci montre que k est un coéjecteur. $\hat{g}'$ étant un coéjecteur strict, on en déduit l'existence d'un $k' \in \hat{C}$ tel que $\hat{g}' = k \cdot k'$, d'où

$$\hat{g} = g \cdot \hat{g}' = g \cdot k \cdot k' = \hat{g}'' \cdot k'.$$

Par conséquent $\hat{g}$ est un coéjecteur strict, i.e. $\hat{f}$ est (P, X, H) -engendré par f . ■

PROPOSITION 6. Supposons que $\hat{j}$ soit (P, X, H) -distingué pour (f, f'') (resp. -engendré par (f, f'') et $X \cdot H_0^*$ soit V -stable pour (P, H)). Soit $\hat{j}' \in X$ et $j \in X$ (resp. $j \in X \cdot H_0^*$) tels que $\hat{j} = j \cdot \hat{j}'$ et $f = P(j) \cdot f'$, où $f' = P(\hat{j}')$. Si $j \in R_g(\hat{H}^*)$ et $j : X \cdot H_0^* \subset X$, alors $\hat{j}'$ est (P, X, H) -distingué pour (resp. -engendré par) (f', f'') .

DEMONSTRATION. Par hypothèse $\hat{g} = (f, \hat{j}, f'')$ est un coéjecteur,

$$g = (f, j, f') \in Y \quad \text{et} \quad \hat{g}' = (f', \hat{j}', f'') \in \alpha(g) \cdot Y.$$

Montrons que $\hat{g}'$ est un coéjecteur. En effet, soit $g' \in \beta(\hat{g}') \cdot Y \cdot C_0^*$; on a $g \cdot g' \in Y \cdot C_0^*$ et $\hat{g}$ étant un coéjecteur, il existe $k \in \hat{C}$ tel que $\hat{g} = g \cdot g' \cdot k$. Puisque j est un monomorphisme, g est un monomorphisme de $\hat{C}^*$, de sorte que l'on déduit $\hat{g}' = g' \cdot k$ de $g \cdot \hat{g}' = \hat{g} = g \cdot g' \cdot k$. Donc $\hat{g}'$ est un coéjecteur.

- Nous supposons de plus que $\hat{g}$ soit un coéjecteur strict, $X \cdot H_0^*$ soit V -stable pour (P, H) et que $j \in X \cdot H_0^*$, c'est-à-dire $g \in Y \cdot C_0^*$. Soit

$$\hat{g}'_1 = (f', \hat{j}'_1, f''_1) \in \beta(\hat{g}') \cdot Y$$

un coéjecteur. Montrons que

$$\hat{g}_1 = g \cdot \hat{g}'_1 = (f, j \cdot \hat{j}'_1, f''_1) \in \beta(\hat{g}) \cdot Y$$

est un coéjecteur. En effet, soit

$$g_1 = (f, j_1, f'_1) \in \beta(\hat{g}_1).Y.C_0^*.$$

$X.H_0^*$ étant V -stable pour (P, H) , il existe un produit fibré naturalisé $((j, v), (j_1, v_1))$ dans P tel que $v \in X.H_0^*$. Les relations

$$P(j).f' = f = P(j_1).f'_1$$

assurent l'existence d'un f_1 tel que

$$f' = P(v).f_1 \text{ et } f'_1 = P(v_1).f_1.$$

Il s'ensuit $k_1 = (f'_1, v_1, f_1) \in \hat{C}$, $g'_1 = (f', v, f_1) \in \beta(\hat{g}'_1).Y.C_0^*$ et

$$g.g'_1 = (f, j, v, f_1) = g_1.k_1.$$

$\hat{g}'_1$ étant un coéjecteur, il existe k' tel que $\hat{g}'_1 = g'_1.k'$, d'où

$$\hat{g}_1 = g.\hat{g}'_1 = g.g'_1.k' = g_1.k_1.k'.$$

Ainsi $\hat{g}_1$ est un coéjecteur. Comme $\hat{g}$ est un coéjecteur strict, il existe $k'_1 \in \hat{C}$ tel que $\hat{g} = \hat{g}_1.k'_1$. Il en résulte

$$g.\hat{g}' = \hat{g} = g.\hat{g}'_1.k'_1,$$

et par suite $\hat{g}' = \hat{g}'_1.k'_1$, car $g \in R_g(\hat{C}^*)$. Donc $\hat{g}'$ est un coéjecteur strict. ■

PROPOSITION 7. Soit $P' = (\hat{K}^*, P', K^*)$ un foncteur fidèle (resp. foncteur et soit $P(X) \subset R_g(K^*)$); soit $\hat{j} \in X$. Si $f = P(\hat{j}).f'$ et si $\hat{j}$ est (P', P, X, H) -distingué pour $(P'(f), P'(f'))$, alors $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour (f, f') . Supposons $P(X) \subset P'^{\sim}$; si $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour f , il est (P', P, X, H) -distingué pour $P'(f)$; de plus $\hat{j}$ est (P', P, X, H) -engendré par $(P'(f), P'(f'))$ si, et seulement si, $\hat{j}$ est (P, X, H) -engendré par (f, f') et $f = P(\hat{j}).f'$.

DEMONSTRATION. Soient $\hat{C}''$ la catégorie, C' et Y' les sous-classes de $\hat{C}'$, associées à $P'.P$ pour définir les morphismes (P', P, X, H) -distingués. L'application

$$(f, j, f') \rightarrow (P'(f), j, P'(f'))$$

définit un foncteur q de $\hat{C}^*$ vers $\hat{C}''$ tel que $q(Y) \subset Y'$ et $q(C) \subset C'$. Soit

$$\hat{g} = (f, \hat{j}, f') \in \hat{C}.$$

Supposons que $q(\hat{g})$ soit un $(\hat{C}', Y', C')$ -coéjecteur et soit

$$g = (f, j, f'') = \beta(\hat{g}).\hat{C}.C'_0.$$

Comme $q(g) \in \beta(q(\hat{g})).\hat{C}'.C'_0$, il existe

$$k = (P'(f''), b, P'(f')) \in \hat{C}' \text{ tel que } q(\hat{g}) = q(g).k,$$

c'est-à-dire on a

$$\hat{j} = j.b \quad \text{et} \quad P'(f'') = P'(P(b).f').$$

Il s'ensuit (resp. Si $P(j) \in R_g(K')$, les égalités

$$P(j).f'' = f = P(\hat{j}).f' = P(j).P(b).f'$$

entraînent) $f'' = P(b).f'$, d'où $g' = (f'', b, f') \in \hat{C}$ et $\hat{g} = g.g'$. Ainsi $\hat{g}$ est un coéjecteur, i.e. $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour (f, f') .

- Nous supposons $P(X) \subset P'^{\sim}$. Si $\hat{j} \in X$, $f \in \beta(P(\hat{j})).K$,

$$k = (P'(f), j, m) \in Y' \quad \text{et} \quad \beta(\hat{j}) = \beta(j),$$

il existe un et un seul $f' \in K$ tel que

$$f = P(j).f' \quad \text{et} \quad P'(f') = m,$$

de sorte que l'on obtient

$$k = q(g), \quad \text{où} \quad g = (f, j, f') \in Y.$$

Si $\hat{g}$ est un coéjecteur et si $k \in \beta(q(\hat{g})).Y'.C'_0$, on a $k = q(g)$, où $g \in \beta(\hat{g}).Y.C'_0$, et il existe $g' \in \hat{C}$ tel que $\hat{g} = g.g'$; par suite $q(\hat{g}) = k.q(g')$, et $q(\hat{g})$ est un $(\hat{C}', Y', C')$ -coéjecteur. - Supposons de plus que $\hat{g}$ soit un coéjecteur strict. Soit $\hat{k}$ un $(\hat{C}', Y', C')$ -coéjecteur de but $\beta(q(\hat{g}))$; alors $\hat{k} = q(\hat{g}')$, où $\hat{g}' \in \beta(\hat{g}).\hat{C}'$. D'après ce qui précède, $\hat{g}'$ est un coéjecteur, de sorte qu'il existe $g'' \in \hat{C}$ tel que $\hat{g} = \hat{g}'.g''$; il en résulte $q(\hat{g}) = \hat{k}.q(g'')$. Ainsi $q(\hat{g})$ est un $(\hat{C}', Y', C')$ -coéjecteur strict. - Enfin soit $q(\hat{g})$ un $(\hat{C}', Y', C')$ -coéjecteur strict; $\hat{g}$ est un coéjecteur $(f, \hat{j}, f')$. Soit

$$g'_1 = (f, j', f'') \in \beta(\hat{g}).Y$$

un coéjecteur. Comme $q(g'_1)$ est un $(\hat{C}', Y', C')$ -coéjecteur, il existe

$$k_1 = (P'(f''), b, P'(f')) \in \hat{C}' \quad \text{tel que} \quad q(\hat{g}) = q(g'_1).k_1.$$

Puisque P' est fidèle et que $P'(f'') = P'(P(b).f')$ (resp. Puisque

$$\hat{j} = j'.b, \quad P(j').f'' = f = P(\hat{j}).f' = P(j').P(b).f',$$

$P(X) \subset R_g(K')$), on trouve $f'' = P(b).f'$. Il s'ensuit $g_1 = (f'', b, f') \in \hat{C}'$ et $\hat{g} = g'_1.g_1$. Ceci prouve que $\hat{g}$ est un coéjecteur strict. ■

2. Foncteurs engendrant.

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{M}_o$ désigne un univers, sauf dans $B, 2$).

DEFINITION. Nous appellerons $\mathbb{M}_o$ -classe une classe A telle qu'il existe une bijection de A sur un élément de $\mathbb{M}_o$.

Soient $P = (K', P, \hat{H}')$ un foncteur, H' une sous-catégorie pleine de $\hat{H}'$ et X une partie de $\hat{H}'$. Soient $\hat{C}'$ la catégorie, C et Y les parties de $\hat{C}'$, associées à P dans § 1-C. Coéjecteur signifie encore $(\hat{C}', Y, C)$ -coéjecteur.

DEFINITION. Si $S \in \hat{H}'_o$, nous désignons par $S.X/\hat{H}'_Y$ la classe quotient de $S.X$ par la relation d'équivalence : $j \sim j'$ si, et seulement si, $j \in j'.\hat{H}'_Y$. On dira que $\hat{H}'$ est $\mathbb{M}_o$ -petite pour X si $S.X/\hat{H}'_Y$ est une $\mathbb{M}_o$ -classe pour tout $S \in \hat{H}'_o$.

EXEMPLES.

1) $\hat{H}'$ est localement petite [4] (ou «à sous-objets $\mathbb{M}_o$ -petits») si elle est $\mathbb{M}_o$ -petite pour $R_g(\hat{H}')$ et si $S'.\hat{H}.S \in \mathbb{M}_o$ lorsque $S \in \hat{H}'_o$ et $S' \in \hat{H}'_o$.

2) Soient $S \in \hat{H}'_o$ et $f \in P(S).K$; on a $e = (S, f) \in \hat{C}'_o$. Pour que $\hat{C}'$ soit $\mathbb{M}_o$ -petite pour $e.Y$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

a) soit M la classe des $j \in S.X$ tels que $f < P(j)$; alors $M/\hat{H}'_Y$ est une $\mathbb{M}_o$ -classe;

b) pour tout $j \in S.X$, soit M_j la classe des f' tels que $f = P(j).f'$; alors $M_j/P(\hat{H}'_Y)^*$ est une $\mathbb{M}_o$ -classe.

Si $\hat{H}'$ est $\mathbb{M}_o$ -petite pour $S.X$, la condition a est satisfaite. Si

$$P(X) \subset R_g(K'),$$

la classe M_j a au plus un élément, de sorte que b est vérifiée. b est aussi

remplie lorsque $P(s).K.\alpha(f)$ est une $\mathfrak{M}_0$ -classe pour tout $s \in \alpha(X)$.

A. EXISTENCE DE MORPHISMES ENGENDRES.

DEFINITION. Soit $K' \subset K$; on dira que P est (K', X, H) -engendrant si, pour tout $S \in \hat{H}_0^\circ$ et tout $f \in P(S).K'$, il existe un morphisme (P, X, H_0°, H) -engendré par f de but S .

Soient $S \in \hat{H}_0^\circ$ et $f \in P(S).K$. Désignons par $\bar{I}_1$ la classe des couples (j, f') tels que $j \in S.X.H_0^\circ$ et $f = P(j).f'$, c'est-à-dire tels que $(f, j, f') \in (S, f).Y.C_0^\circ$. Si $i = (j, f') \in \bar{I}_1$, posons $j_i = j$ et $f'_i = f'$. De même soit $\bar{I}_2$ la classe des couples (j', f'') tels que $j' \in S.X$ soit (P, X, H) -distingué pour (f, f'') et soit

$$j_{i'} = j' \text{ et } f'_{i'} = f'' \text{ pour tout } i' = (j', f'') \in \bar{I}_2.$$

PROPOSITION 8. Posons $n = 1$ (resp. $n = 2$). Supposons que I_n soit une partie de $\bar{I}_n$ telle que, pour tout $(j_i, f'_i) \in \bar{I}_n$, il existe $b \in \hat{H}_\gamma^\circ$, où

$$(j_i.b, P(b)^{-1}.f'_i) \in I_n.$$

Si l'on a $\hat{j} \in X$, $v_i \in \hat{H}$, $j_i.v_i = \hat{j}$ pour tout $i \in I_n$ et si $(P(j_i), P(v_i))_{i \in I_n}$ est un produit fibré naturalisé dans K^* , alors $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour (resp. -engendré par) f .

DEMONSTRATION. Soit $i = (j_i, f'_i) \in \bar{I}_n$; on a $g_i = (f, j_i, f'_i) \in Y$. Soient A_n et $\bar{A}_n$ les classes des g_i tels que $i \in I_n$ et $i \in \bar{I}_n$ respectivement. Si $g_i \in \bar{A}_n$, il existe par hypothèse

$$g^i = (f'_i, b, P(b)^{-1}.f'_i) \in \hat{C}_\gamma^\circ \text{ tel que } g_i.g^i \in A_n,$$

i.e. on a $\bar{A}_n \subset A_n.\hat{C}_\gamma^\circ$. Comme $(P(j_i), P(v_i))_{i \in I_n}$ est un produit fibré naturalisé dans K^* et que $f = P(j_i).f'_i$, il existe un et un seul $f'' \in K$ tel que

$$f'_i = P(v_i).f'' \text{ pour tout } i \in I_n,$$

d'où $w_i = (f'_i, v_i, f'') \in \hat{C}$ et

$$\hat{g}_n = g_i.w_i = (f, j_i, v_i, f'') \in Y,$$

si $i \in I_n$. Lorsque $i \in \bar{I}_n$, on a $\hat{g}_i.g^i = g_i \in A_n$ et les relations

$$\hat{g}_n = g_{i'}.w_{i'} = g_i.g^i.w_{i'} < g_i$$

montrent que l'élément $\hat{g}_1$ (resp. $\hat{g}_2$) $\in Y$ est un coéjecteur (resp. coéjecteur strict). Par suite $\hat{j} = j_i \cdot v_i$ est (P, X, H) -distingué pour (f, f'') (resp. (P, X, H) -engendré par (f, f'')) . ■

REMARQUE. Considérons les conditions, où $j_i \in S.X$, $i \in I_n$, $\hat{j} \in X$:

a) Il existe $v_i \in \hat{H}$ tels que $j_i \cdot v_i = \hat{j}$ et que $(P(j_i), P(v_i))_{i \in I_n}$ soit un produit fibré naturalisé dans K^* ;

b) $(j_i, v_i)_{i \in I_n}$ est un produit fibré naturalisé dans P et $\hat{j} = j_i \cdot v_i$.
b entraîne a. Si $X \subset P_i^{\sim}$, les conditions a et b sont équivalentes.

COROLLAIRE 1. Supposons que $\hat{C}^*$ soit $\mathfrak{M}_0$ -petite pour $(S, f).Y.C_0^*$ (resp. pour $(S, f).Y$), que $X.X \subset X$ et que X soit $\mathfrak{M}_0$ -V-stable pour (P, H) (resp. $(P, \hat{H})$). S'il existe $j \in S.X$ tel que $f < P(j)$, il existe un morphisme (P, X, H) -distingué pour (resp. -engendré par) f , de but S .

DEMONSTRATION. Soit u une bijection de $(S, f).Y.C_0^*/\hat{C}_Y^*$ (resp. de $\bar{A}_2/\hat{C}_Y^*$, où $\bar{A}_2$ est la classe des coéjecteurs de but (S, f)) sur un élément J_1 (resp. J_2) de $\mathfrak{M}_0$. Pour tout $m \in J_n$, où $n = 1$ ou 2 , choisissons un

$$g_m = (f, j_m, f'_m) \in u^{-1}(m).$$

L'application $m \mapsto (j_m, f'_m)$ est une bijection de J_n sur une partie I_n de $\bar{I}_n$ vérifiant la condition de la proposition 8. D'après la $\mathfrak{M}_0$ -V-stabilité de X , il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, v_i)_{i \in I_n}$, où $n = 1$ (resp. $= 2$); soit $\hat{j}_n = j_i \cdot v_i$. Si $\bar{I}_1 = \emptyset$, $j \in S.X$ est (P, X, H) -distingué pour f ; si $\bar{I}_1 \neq \emptyset$, la proposition 8 affirme que $\hat{j}_1$ est (P, X, H) -distingué pour f . (resp. pour f). Il s'ensuit $I_2 \neq \emptyset$ et, d'après la même proposition, $\hat{j}_2$ est (P, X, H) -engendré par f . ■

COROLLAIRE 2. Si les trois conditions a, b, c ou a, b', c suivantes sont vérifiées, P est (K', X, H) -engendrant :

a) $\hat{H}^*$ est $\mathfrak{M}_0$ -petite pour $X.H_0^*$ et $P(X) \subset R_g(K^*)$ (resp. et $P(s).K.e / P(H_Y^*)^*$ est une $\mathfrak{M}_0$ -classe si $e \in \alpha(K')$ et $s \in H_0^*$).

b) $X.H_0^*$ est $\mathfrak{M}_0$ -V-stable pour (P, H) .

b') On a $X.X.H_0^* \subset X$ et $K' = K.\alpha(K')$. Si $j_i \in S.X.H_0^*$ pour

tout $i \in I$, où $S \in \hat{H}_0^\circ$ et $I \in \mathbb{M}_0$, il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, v_i)_{i \in I}$ dans P tel que $j_i, v_i \in X$.

c) Si $S \in \hat{H}_0^\circ$ et $f \in P(S).K'$, il existe $j \in S.X.H_0^\circ$ où $f < P(j)$.

DEMONSTRATION. Soit $S \in \hat{H}_0^\circ$ et $f \in P(S).K'$. La condition a entraîne que $\hat{C}^\circ$ est $\mathbb{M}_0$ -petite pour $(S, f).Y.C_0^\circ$ d'après l'exemple 2. Le corollaire 1 permet de construire un $\hat{j}$ qui est (P, X, H) -distingué pour (f, f') . Si b, c sont vérifiées, on a $\alpha(\hat{j}) \in H$, donc $\hat{j}$ est (P, X, H_0°, H) -engendré par f . - Si a, b' et c sont satisfaites, on a

$$f = P(\hat{j}).f', \quad \text{où} \quad f' \in K, \alpha(f) \subset K, \alpha(K') = K',$$

de sorte qu'il existe $j \in \alpha(\hat{j}).X.H_0^\circ$ tel que $f' < P(j)$. En vertu de la proposition 3, $\hat{j}.j$ est (P, X, H_0°, H) -distingué pour f . ■

COROLLAIRE 3. Si les trois conditions a, b, c ou a, b', c suivantes sont vérifiées, P est (K', X, H) -engendrant :

a) H° est $\mathbb{M}_0$ -petite pour $X \cap H$, et on a $P(X \cap H) \subset R_g(K')$ (resp. et, si $s \in H_0^\circ$ et $s' \in H_0^\circ$, la classe $P(s').K.P(s)/P(H_0^\circ)^*$ est une $\mathbb{M}_0$ -classe). Y est ∇ -stable pour (P, H) , où $Y = X.H_0^\circ$ (resp. $= X$ et $K' = K, \alpha(K')$).

b) $X.X.H_0^\circ \subset X$; $X \cap H$ est $\mathbb{M}_0$ - ∇ -stable pour (P_H, H) et K' est ∇ -stable dans K' (on pose $P_H = (K', P_\perp, H^\circ)$).

b') $X.X \subset X$ et $K' = K, \alpha(K')$. Si $j_i \in s.X.H_0^\circ$ pour tout $i \in I$, où $s \in H_0^\circ$ et $I \in \mathbb{M}_0$, il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, v_i)_{i \in I}$ dans P tel que $j_i, v_i \in X$.

c) Si $S \in \hat{H}_0^\circ$ et $f \in P(S).K'$, il existe $j \in S.X.H_0^\circ$ tel que $f < P(j)$ et $P(j) \in K'$.

DEMONSTRATION. Soit $S \in \hat{H}_0^\circ$ et $f \in P(S).K'$. Il existe $j \in S.X.H_0^\circ$ tel que $f < P(j) \in K'$; soit $s = \alpha(j)$ et $f = P(j).f'$. Puisque K' est ∇ -stable dans K' , on a $f' \in K'$. La condition a entraîne que $\hat{C}^\circ$ est $\mathbb{M}_0$ -petite pour $(s, f').Y.C_0^\circ$ (exemple 2). Le corollaire 1 assure qu'il existe $\hat{j} \in s.X$ qui est (P, X, H) -distingué pour (f', f'') . D'après la proposition 5, $\hat{j}.j$ est (P, X, H) -distingué pour f . - Si a, b, c sont vérifiées, on a

$\alpha(\hat{j}) \in H$, donc $j.\hat{j}$ est $(P, X.H_0^*, H)$ -engendré par f . - Si a, b', c sont remplies, on a $f'' \in K.\alpha(f') \subset K'$, de sorte qu'il existe $j' \in \alpha(\hat{j}).X.H_0^*$ tel que $f'' < P(j')$. En vertu de la proposition 3, $(j.\hat{j}).j'$ est $(P, X.H_0^*, H)$ -engendré par f . ■

EXEMPLES.

1) Supposons $P(X) \subset R_g(K')$. L'application $(j_i, f'_i) \rightarrow j_i$ est une bijection de la classe $\bar{I}_1$ sur la classe B des $j \in S.X.H_0^*$ tels que $f < P(j)$. Par suite, si $B \subset \bar{B} \subset B.\hat{H}$ et si $(j, v_j)_{j \in B}$ est un produit fibré naturalisé dans P tel que $\hat{j} = j.v_j$ appartienne à X , alors $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour f .

2) Supposons $H = \hat{H}$ et $\hat{H}_0^* \subset X$; la condition c du corollaire 3 est alors vérifiée (on peut prendre S pour j); par suite, en appliquant le corollaire 2 au cas où $X = R_g(\hat{H}')$, on obtient le résultat suivant [4] : Si $\hat{H}$ est localement petite, si P est à $\mathbb{M}_0$ -produits fibrés et si $e_2.K.e_1 \in \mathbb{M}_0$ pour tout $e_i \in K_0^*$, le foncteur P est $(K, R_g(\hat{H}'), \hat{H})$ -engendrant.

Soit $F = (\hat{H}', F, D')$ un foncteur et (P, F, t, G) un triplet définissant une transformation naturelle telle que $t(D_0') \subset K' \subset K$. Considérons les conditions :

1) Si $j \in X.H_0^*$ et $g \in \beta(j).\hat{H}$, il existe un produit fibré naturalisé $((j, v), (g, v'))$ dans P tel que $v' \in X$. On a $X \subset R_g(\hat{H}')$.

2) Si $S \in \hat{H}_0^*$ et $f \in P(S).K'$, il existe $j \in S.X.H_0^*$ tel que $f < P(j)$.

PROPOSITION 9. Supposons que X vérifie 1 et 2, que $P(X) \subset K'$ et K' soit ∇ -stable dans K' (resp. que $K' = K.\alpha(K')$) et $X.X.H_0^* \subset X$. Si, pour $e \in D_0^*$, il existe $T(e) \in F(e).X$ qui soit $(P, X.H_0^*, H)$ -distingué pour $t(e)$, il existe un triplet (F, T, F') définissant une transformation naturelle.

DEMONSTRATION. Soit $k \in D$, $\alpha(k) = e'$ et $\beta(k) = e$. Posons

$$F(k) = b, \quad T(e') = j' \quad \text{et} \quad T(e) = j.$$

Montrons qu'il existe b' tel que

$$(b, j, j', b') \in \square \hat{H}.$$

En effet, par hypothèse, il existe un produit fibré naturalisé $((j, v), (h, v'))$ dans P tel que $v' \in X$. Puisque j est (P, X, H) -distingué pour $t(e)$, il existe $f \in K$ tel que $t(e) = P(j).f$. Les relations

$$P(j).f.G(k) = t(e).G(k) = P(h).t(e')$$

assurent l'existence d'un $f' \in K$ vérifiant

$$f.G(k) = P(v).f' \quad \text{et} \quad t(e') = P(v').f'.$$

Par hypothèse $t(e') \in K'$ et $P(v') \in K'$; on a $f' \in K'$, car K' est ∇ -stable (resp. $f' \in K, \alpha(K') \subset K'$). En vertu de la condition 2, il existe

$$j_1 \in \alpha(v').X.H_0^* \quad \text{tel que} \quad f' < P(j_1).$$

On a $v'.j_1 \in X.X.H_0^* \subset X.H_0^*$ et

$$t(e') = P(v').f' < P(v').P(j_1).$$

Etant donné que j' est (P, X, H) -distingué pour $t(e')$, il existe $g \in \hat{H}$ tel que $j' = v'.j_1.g$. En posant $h' = v'.j_1.g$, on obtient

$$j.b' = j.v.j_1.g = h.v'.j_1.g = h.j',$$

d'où $q(k) = (h, j, j', h') \in \square \hat{H}'$.

Enfin si $(k', k) \in D' * D'$, les éléments

$$q_1 = q(k'.k) \quad \text{et} \quad q_2 = q(k') \sqcup q(k)$$

construits par la méthode précédente sont deux quatuors de la forme

$$(F(k'.k), T(\beta(k')), j', h_i''), \quad \text{où} \quad i = 1, 2.$$

Par hypothèse, $T(\beta(k'))$ est un monomorphisme; il s'ensuit $h_1'' = h_2''$, et par conséquent $q_1 = q_2$. Ceci prouve que l'application $k \mapsto q(k)$ définit la transformation naturelle de F' vers F cherchée, F' étant le foncteur défini par $k \mapsto h'$. ■

COROLLAIRE. Supposons que $X.H_0^*$ (au lieu de X) vérifie la condition 1 et que, pour tout $e \in D_0^*$, il existe $T(e) \in F(e).X$ qui soit (P, X, H_0^*, H) -engendré par $t(e)$. Alors il existe un foncteur F' tel que (F, T, F') définisse une transformation naturelle. Si $X = P_i^{\overline{F}}$ on appelle F' un $\mathfrak{N}(K, P, H)$ -sous-foncteur de F engendré par G .

En effet, les hypothèses sur K' et la condition 2 sont inutiles si $\alpha(v') \in H$ car la démonstration précédente s'applique alors sans changement, en prenant $K' = K$ et $j_1 = \alpha(v')$, la relation $X.X.H_0^* \subset X$ n'ayant été utilisée que pour affirmer que l'on a $v'.j_1 \in X$. ■

B. CAS PARTICULIERS.

1) Images.

Supposons que P soit le foncteur identique d'une catégorie $\hat{H}^*$. Soient H^* une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$ et X une partie de $\hat{H}$.

Dire que $\hat{j}$ est $(\hat{H}^*, X, H)$ -distingué pour $g \in S.\hat{H}$ signifie que $\hat{j} \in S.X$ et qu'il existe $\hat{b} \in \hat{H}$ vérifiant les conditions : $g = \hat{j}.\hat{b}$ et, si $\hat{j} \in S.X.H_0^*$ et $g = j.b$, il existe $k \in H$ tel que $\hat{j} = j.k$ et $b = k.\hat{b}$. Pour que $\hat{j}$ soit $(\hat{H}^*, X, H)$ -engendré par g , il faut et il suffit que $\hat{j}$ remplisse les conditions précédentes et que, de plus, si $\hat{j}' \in S.X$ est $(\hat{H}^*, X, H)$ -distingué pour g et si $g = \hat{j}'.b'$, il existe $k' \in H$ tel que

$$\hat{j} = \hat{j}'.k' \quad \text{et} \quad b' = k'.\hat{b}.$$

En particulier, $\hat{j}$ est une $(X.H_0^*, \hat{H}^*, \hat{H})$ -image de g (C.S., déf. 30 chap. III, où l'on suppose de plus $X.H_0^* \subset R_g(\hat{H}^*)$) si, et seulement si, $\hat{j}$ est $(\hat{H}^*, X.H_0^*, H)$ -engendré par g . Rappelons (prop. 5-2 [1], voir aussi § 3) qu'un critère pour l'existence de $(H, \hat{H}^*)$ -projecteurs demande qu'il existe des $(X.H_0^*, \hat{H}^*, \hat{H})$ -images. La proposition 8 donne les critères suivants pour l'existence de telles images de $g \in \hat{H}$.

PROPOSITION 10. Soit $\bar{I}$ la classe des $i = (j_i, b_i)$ tels que $j_i \in X.H_0^*$ et $j_i.b_i = g$. Soit I une partie de $\bar{I}$ vérifiant les conditions :

a) $I \neq \emptyset$; pour tout $(j, b) \in \bar{I}$, il existe $k \in \hat{H}_\gamma^*$ tel que

$$(j.k, k^{-1}.b) \in I;$$

b) il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, v_i)_{i \in I}$ dans $\hat{H}^*$ tel que $\hat{j} = j_i.v_i \in X.H_0^*$.

Alors $\hat{j}$ est une $(X.H_0^*, \hat{H}^*, \hat{H})$ -image de g .

COROLLAIRE 1. Si les conditions suivantes a', b', c' ou a', b'' sont véri-

fiées, g admet une $(X, H_0^*, \hat{H}^*, \hat{H})$ -image :

a') H^* est $\mathbb{M}_0$ -petite pour $X \cap H$ et $X \cap H \subset R_g(\hat{H}^*)$ (resp. et $s'.H, s/H_0^*$ est une $\mathbb{M}_0$ -classe si $s \in H_0^*$ et $s' \in H_0^*$).

b') $X.X \subset X$ et, si $j_i \in s.X, H_0^*$ pour tout $i \in I$, où $s \in H_0^*$ et $I \in \mathbb{M}_0$, il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, v_i)_{i \in I}$ dans $\hat{H}^*$ tel que $j_i, v_i \in X$. La classe X est V -stable pour $(\hat{H}^*, H)$.

b'') X, H_0^* est V -stable et $X \cap H$ est $\mathbb{M}_0$ - V -stable. pour $(\hat{H}^*, H)$; il existe $j \in X, H_0^*$ tel que $g = j.g'$.

c') Si $g = j.g'$ et $j \in X \cup \{\beta(g)\}$, on a $g' = j'.g''$, où $j' \in X, H_0^*$.

COROLLAIRE 2. Si $\hat{H}^*$ est $\mathbb{M}_0$ -petite pour $X \subset R_g(\hat{H}^*)$ et si $(\hat{H}^*, \iota, X^*)$ est un foncteur à $\mathbb{M}_0$ -produits fibrés (par exemple si $\hat{H}^*$ est localement petite et à $\mathbb{M}_0$ -produits fibrés et si $X = R_g(\hat{H}^*)$), tout $g \in X_0^*, \hat{H}$ a une $(X, \hat{H}^*, \hat{H})$ -image.

En particulier, soit $\tilde{H}^*$ une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$ telle que

1) $H \subset \tilde{H}$ et H^* est $\mathbb{M}_0$ -petite pour H (resp. est localement petite);

2) $(\hat{H}^*, \iota, \tilde{H}^*)$ est un foncteur à $\mathbb{M}_0$ -produits fibrés;

3) Si $g \in \tilde{H}_0^*, \hat{H}$, on a $g = j.g'$, où $j \in \tilde{H}, H_0^*$ (resp. $\in R_g(\hat{H}^*), H_0^*$).

D'après le corollaire 1, tout $g \in \tilde{H}_0^*, \hat{H}$ admet une $(\tilde{H}, H_0^*, \hat{H}^*, \hat{H})$ - (resp. une $(R_g(\hat{H}^*), H_0^*, \hat{H}^*, \hat{H})$ -) image. (La condition 1 est, par exemple vérifiée si $H \in \mathbb{M}_0$.)

Soit $p = (K^*, \underline{p}, H^*)$ un foncteur et K'^* une sous-catégorie de K^* formée de monomorphismes. Soit X la classe des (K', p) -injections (C.S., déf. 1, chap. III). Soit $g \in H$. Pour que j soit une (K', p, H) -image de g (C.S., déf. 30, chap. III), il faut et il suffit que j soit une (X, H^*, H) -image de g . Puisque X est formée de monomorphismes (C.S., prop. 1, chap. III), la proposition 7 affirme que j est une (K', p, H) -image de g si, et seulement si, j est (p, X, H) -engendré par $p(g)$. Supposons $K' = R_g(K^*)$. Si p est à $\mathbb{M}_0$ -produits fibrés, on déduit de la proposition 4 que $p_i^{\sim}$ est $\mathbb{M}_0$ - V -stable pour (p, H) . Par suite le corollaire 2 de la proposition 10 entraîne que, si H^* est $\mathbb{M}_0$ -petite pour $p_i^{\sim}$ et si p est à $\mathbb{M}_0$ -produits fibrés, où $\mathbb{M}_0$ est un univers, tout $g \in H$ admet une (K', p, H) -

image.

Considérons le cas où K^* est la catégorie pleine d'applications $\mathbb{M}$ associée à l'univers $\mathbb{M}_0$, c'est-à-dire $p = (\mathbb{M}, \underline{p}, H^*)$. Pour tout $b \in H$, désignons par $\underline{b}$ la surjection définissant l'application $p(b)$. Pour que $g \in H$ admette une $(\mathbb{M}^i, p, H)$ -image j , il faut et il suffit que j soit $(p, p_i^{\sim}, H)$ -engendré par $p(g)$. On a $p(g) = f \cdot \underline{g}$, où $\underline{g} \in \mathbb{M}_{\gamma}$ et $f = (p(S), \iota, \beta(\underline{g}))$, $S = \beta(g)$; par conséquent j est une $(\mathbb{M}^i, p, H)$ -image de g si, et seulement si, j est $(p, p_i^{\sim}, H)$ -engendré par f .

PROPOSITION 11. Soit $p = (\mathbb{M}, \underline{p}, H^*)$ un foncteur; alors H^* est $\mathbb{M}_0$ -petite pour $p^{\sim}$. Si p est à $\mathbb{M}_0$ -produits fibrés, tout élément de H admet une $(\mathbb{M}^i, p, H)$ -image.

DEMONSTRATION. Soit $S \in H_0^*$ et $A = S \cdot p_i^{\sim}$. Soit r la relation d'équivalence sur A telle que $A/r = A/H_{\gamma}^*$. Si $j \sim j' \text{ mod } r$, on a $\beta(\underline{j}) = \beta(\underline{j'})$. Inversement, si

$$j \in A, \quad j' \in A \quad \text{et} \quad \beta(\underline{j}) = \beta(\underline{j'}),$$

l'application $x \rightarrow j^{-1} j'(x)$, où $x \in \alpha(\underline{j'})$, est une bijection f telle que $p(j) \cdot f = p(j')$. En vertu du théorème 1*, chap. III, C.S., il existe

$$g \in H_{\gamma}^* \quad \text{tel que} \quad j \cdot g = j' \quad \text{et} \quad p(g) = f;$$

donc $j \sim j' \text{ mod } r$. Ainsi l'application $j \text{ mod } r \rightarrow \beta(\underline{j})$ définit une bijection de A/r sur une partie A' de $\mathcal{P}(p(S))$. Puisque $\mathbb{M}_0$ est un univers, on a $\mathcal{P}(p(S)) \in \mathbb{M}_0$, d'où $A' \in \mathbb{M}_0$. Ceci prouve que H^* est $\mathbb{M}_0$ -petite pour $p_i^{\sim}$. La proposition en résulte. ■

2) Sous-structures engendrées.

Supposons que $\mathbb{M}$ et $\hat{\mathbb{M}}$ soient deux catégories pleines d'applications telles que $\mathbb{M} \subset \hat{\mathbb{M}}$. Désignons par $\tilde{\mathbb{M}}$ la saturante de $\mathbb{M}$ dans $\hat{\mathbb{M}}$ et par $\mathbb{M}^{\cup}$ la classe $\hat{\mathbb{M}}^{\cup} \cdot \tilde{\mathbb{M}}_0$ dont les éléments sont donc les $(\hat{M}, \iota, M) \in \hat{\mathbb{M}}^{\cup}$ tels que M soit une $\mathbb{M}_0$ -classe appartenant à $\tilde{\mathbb{M}}_0$.

Soit $P = (\hat{\mathbb{M}}, P, \hat{H}^*)$ un foncteur et H^* une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$ telle que $P(H) \subset \mathbb{M}$. Posons $p = (\mathbb{M}, P_{\cup}, H^*)$. Soit X une sous-classe de la classe des P -monomorphismes $P_i^{\sim}$; donc $X \subset R_g(\hat{H}^*)$.

1

Soit $S \in \hat{H}_0^\circ$ et $M \subset P(S)$. Rappelons [1] que s est une (X, H) -sous-structure de S engendrée par M s'il existe un $\hat{H}^\circ$ -minimum $\hat{j}$ de la classe des $j \in S.X.H_0^\circ$ tels que $M \subset \beta(j)$, et si $s = \alpha(\hat{j})$; autrement dit, s'il existe un $\hat{j} \in S.X.s$ qui soit $(P, X, \hat{H}_0^\circ, H)$ -engendré par $(P(S), \iota, M)$.

Des propositions 5 et 6, il résulte que, si X est ∇ -stable dans $\hat{H}^\circ$ et $X.H_0^\circ \nabla$ -stable pour (P, H) et s'il existe $j \in S.X.H_0^\circ$ tel que $M \subset \beta(j)$, les (X, H) -sous-structures de S engendrées par M sont les (X, H) -sous-structures de $\alpha(j)$ engendrées par $j^{-1}(M)$. D'après la proposition 8, si la classe $\bar{A}$ des $j \in S.X.H_0^\circ$ tels que $M \subset \beta(j)$ n'est pas vide et s'il existe un produit fibré naturalisé $(j, v_j)_{j \in \bar{A}}$ dans P tel que

$$A \subset \bar{A} \subset A.\hat{H}_\gamma^\circ \quad \text{et que} \quad j.v_j \in X.H_0^\circ,$$

alors $\alpha(v_j)$ est une (X, H) -sous-structure de S engendrée par M .

La notion de foncteur $(\mathfrak{M}^\cup, X, H)$ -engendrant a été définie dans [1] sous le nom de foncteur $\curvearrowright$ -engendrant pour $(\mathfrak{M}, X, H)$, si $\hat{H}_0^\circ \subset X$.

DEFINITION. P est $\curvearrowright$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$ s'il est $(\mathfrak{M}^\cup, P_i^\curvearrowright, \bar{P}^{-1}(\mathfrak{M}))$ -engendrant [1]. Une $(P_i^\curvearrowright, \hat{H})$ -sous-structure de $S \in \hat{H}_0^\circ$ engendrée par $M \subset P(S)$ est appelée P -sous-structure de S engendrée par M , notée S/M .

Sauf indication contraire, nous ne supposons pas que $\mathfrak{M}_0$ ni $\hat{\mathfrak{M}}_0$ sont des univers. Soient $S \in \hat{H}_0^\circ$ et $f \in P(S).\hat{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}_0$; on a $f = k.f'$, où

$$f' = (\beta(f), f, \alpha(f)) \in \hat{\mathfrak{M}}_\gamma \quad \text{et} \quad k = (\beta(f), \iota, \beta(f)) \in \mathfrak{M}^\cup.$$

Pour que $\hat{j} \in S.X$ soit (P, X, H) -distingué pour f , il faut et il suffit qu'il soit (P, X, H) -distingué pour k . Donc si P est $(\mathfrak{M}^\cup, X, H)$ -engendrant, P est aussi $(\hat{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}_0, X, H)$ -engendrant ou, ce qui est équivalent, $(\hat{\mathfrak{M}}.\mathfrak{M}_0, X, H)$ -engendrant.

PROPOSITION 12. P est $(\mathfrak{M}^\cup, X, H)$ -engendrant si les conditions a et b (resp. a et b') sont vérifiées :

a) Si $S \in \hat{H}_0^\circ$, $M \in \mathfrak{M}_0$ et $M \subset P(S)$, il existe $j \in S.X.H_0^\circ$ tel que $M \subset \beta(j)$.

b) On a $X.X.H_0^\circ \subset X$; si $j_i \in S.X.H_0^\circ$ pour tout $i \in I$, où $I \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et $S \in \hat{H}_0^\circ$, il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, v_i)_{i \in I}$ dans P tel que $j_i.v_i \in X$. Enfin $\hat{\mathfrak{M}}_0$ est un univers.

b') On a $X, X \subset X$; si $j_i \in s, X, H_0^\circ$ pour tout $i \in I$, où $I \in \mathbb{M}_0$ et $s \in H_0^\circ$, il existe un produit fibré naturalisé $(j_i, v_i)_{i \in I}$ dans P tel que $j_i, v_i \in X$. De plus, X est V -stable pour (P, H) , $\mathbb{M}_0$ est un univers.

DEMONSTRATION. En vertu de la proposition 11, $\hat{H}^\circ$ est $\mathbb{M}_0$ -petite pour P_i° , donc pour $X \subset P_i^\circ$ (resp. H° est $\mathbb{M}_0$ -petite pour $X \cap H \subset p_i^\circ$). Soient $S \in \hat{H}_0^\circ$, $M \in \mathbb{M}_0$ et $M \subset P(S)$. D'après les corollaires de la proposition 8, il existe une (X, H) -sous-structure s de S engendrée par M , construite comme suit : Si a et b (resp. b') sont vérifiées, soit $\bar{A}$ la classe des

$$j \in S, X, H_0^\circ \text{ tels que } M \subset \beta(j)$$

(resp. soit $j_1 \in S, X, H_0^\circ$ tel que $M \subset \beta(j_1)$ et soit $\bar{A}$ la classe des $j \in \alpha(j_1), X, H_0^\circ$ tels que $j_1^{-1}(M) \subset \beta(j)$). Il existe une $\mathbb{M}_0$ -classe (resp. une $\mathbb{M}_0$ -classe) A telle que $A \subset \bar{A} \subset A, \hat{H}_\gamma^\circ$, un produit fibré naturalisé $(j, v_j)_{j \in A}$ dans P et un $j' \in \alpha(v_j), X, H_0^\circ$ tel que $j^{-1}(M) \subset \beta(j')$ (resp. que $j^{-1}(j_1^{-1}(M)) \subset \beta(j')$), où $j = j, v_j$. Alors on a $s = \alpha(j')$. ■

COROLLAIRE. Si P est à $\mathbb{M}_0$ -produits fibrés, il est $\sim$ -engendrant pour $\mathbb{M}$ si, et seulement si, la condition a de la proposition 12 est remplie, en prenant $H = \hat{P}^{-1}(\mathbb{M})$ et $X = P_i^\circ$, et en supposant que $\mathbb{M}_0$ est un univers.

En effet, P_i° est $\mathbb{M}_0$ - V -stable pour $(P, \hat{H})$ d'après la proposition 4 et le corollaire résulte de la proposition 12. ■

Soit $F = (\hat{H}^\circ, F, D^\circ)$ un foncteur et G un $\mathcal{N}(\mathbb{M}^\cup, \hat{\mathbb{M}})$ -sous-foncteur de P, F . Considérons les hypothèses suivantes :

A) P est fidèle, à produits fibrés finis et $\sim$ -engendrant pour $\mathbb{M}$.

B) X° est une sous-catégorie de $\hat{H}^\circ$ vérifiant les conditions 1 et 2, proposition 9, avec $K' = \mathbb{M}^\cup$; le foncteur $(\mathbb{M}, P_i, X^\circ)$ est à $\mathbb{M}_0$ -produits fibrés et $\mathbb{M}_0$ est un univers.

PROPOSITION 13. Si l'hypothèse A (resp. B) est vérifiée, il existe un $\mathcal{N}(\hat{\mathbb{M}}^\circ, P, \hat{P}^{-1}(\mathbb{M}))$ -sous-foncteur F' de F engendré par G (resp. de F tel que $F'(e)$ soit une (X, H) -sous-structure de $F(e)$ engendrée par $G(e)$ pour $e \in D_0^\circ$) (C.S., chap. III, déf. 37).

DEMONSTRATION. Si la condition B est satisfaite, P est $(\mathbb{M}^\cup, X, H)$ -

engendrant en vertu de la proposition 12, par suite les hypothèses de la proposition 9 sont vérifiées; et l'existence de F' découle de cette proposition. - Supposons que A soit remplie et montrons que les conditions de la proposition 9 sont vérifiées, en posant $H = \bar{P}^1(\mathbb{M})$, $K' = \hat{\mathbb{M}} \cdot \tilde{\mathbb{M}}_0$ et $X = P_i^\sim$. En vertu du corollaire de la proposition 12, la condition 2 de la proposition 9 est remplie. De plus, on a

$$K \cdot \alpha(K') = K', \quad X \cdot X \cdot H_0 \subset P_i^\sim \cdot P_i^\sim \cdot H_0 \subset X.$$

Montrons que la condition 1 de la proposition 9 est satisfaite. En effet soit $j \in X \cdot H_0$ et $g \in \beta(j) \cdot \hat{H}$. Il existe un produit fibré naturalisé $((j, v), (g, v'))$ dans P ; la démonstration de la proposition 4 prouve que $v' \in P_i^\sim$. La proposition 13 s'en déduit. ■

3. Existence de structures libres engendrées.

A. PROJECTEURS STRICTS.

Soient $\tilde{H}^*$ une catégorie, H^* et $\hat{H}^*$ deux sous-catégories pleines de $\tilde{H}^*$ telles que $H \subset \hat{H}$. Rappelons [1] que g est un $(H, \hat{H}, \tilde{H}^*)$ -projecteur si $g \in \hat{H}_0 \cdot \tilde{H}$ et si, pour tout $b \in H_0 \cdot \tilde{H} \cdot \alpha(g)$, il existe un et un seul $k \in \hat{H}$ tel que $k \cdot g = b$ (exemple § 1-B).

- 1 DEFINITION. On dira que g est un $(H, \hat{H}, \tilde{H}^*)$ -projecteur strict si g est un projecteur strict relativement à $(H_0 \cdot \tilde{H}, \hat{H}_0 \cdot \tilde{H}, R_d(H_0 \cdot \hat{H}, \tilde{H}^*), \tilde{H}^*)$.

$g \in \tilde{H}$ est un $(H, \hat{H}, \tilde{H}^*)$ -projecteur strict lorsque g est un $(H, \hat{H}, \tilde{H}^*)$ -projecteur et que, pour tout $(H, \hat{H}, \tilde{H}^*)$ -projecteur $g' \in \tilde{H} \cdot \alpha(g)$, il existe un $k' \in \hat{H}$ tel que $k' \cdot g = g'$.

Il est évident que les notions de $(H, H, \tilde{H}^*)$ -projecteur, de $(H, H, \tilde{H}^*)$ -projecteur strict et de $(H, \tilde{H}^*)$ -projecteur sont identiques. Si g est un $(H, \hat{H}, \tilde{H}^*)$ -projecteur tel que $\beta(g) \in H$, alors g est un $(H, \tilde{H}^*)$ -projecteur. Si g et g' sont deux $(H, \hat{H}, \tilde{H}^*)$ -projecteurs stricts de même source appartenant à $R_d(\hat{H}, \tilde{H}^*)$, on a $g \in \hat{H}_\gamma \cdot g'$.

EXEMPLE. On voit facilement que les projecteurs construits dans [1], théorème 3-6 et 4-7 sont en réalité des projecteurs stricts.

Soit $P = (\hat{K}^*, \underline{P}, \hat{H}^*)$ un foncteur et $p = (K^*, \underline{P}_t, H^*)$ une res-

triction de P aux sous-catégories pleines H^* et K^* de $\hat{H}^*$ et $\hat{K}^*$ respectivement. Soit $\tilde{H}^*$ la catégorie associée au couple de foncteurs

$$(P, (\hat{K}^*, \iota, \hat{K}^*))$$

par la construction de la proposition 36, chapitre II, C.S. (voir aussi C.S., appendice I). Soit Σ la classe des couples

$$(s, k) \text{ tels que } s \in \hat{H}_0^* \text{ et } k \in P(s). \hat{K}.$$

Les éléments de $\tilde{H}$ sont les couples $(\hat{H}, b)$, où $b \in \hat{H}$, les couples $(\hat{K}, g)$, où $g \in \hat{K}$, et les couples $(\Sigma, (s, k))$, où $(s, k) \in \Sigma$; la loi de composition est telle que l'application $b \mapsto (\hat{H}, b)$ (resp. l'application $g \mapsto (\hat{K}, g)$) définisse un isomorphisme de $\hat{H}^*$ (resp. de $\hat{K}^*$) sur une sous-catégorie pleine de $\tilde{H}^*$ et que l'on ait

$$\begin{aligned} (\Sigma, (s, k)).(\hat{K}, g) &= (\Sigma, (s, k.g)) \quad \text{si } \alpha(k) = \beta(g), \\ (\hat{H}, b).(\Sigma, (s, k)) &= (\Sigma, (\beta(b), P(b), k)) \quad \text{si } \alpha(b) = s. \end{aligned}$$

CONVENTION. Si $A \subset \hat{H}$, nous notons A' la classe des couples $(\hat{H}, b) \in \tilde{H}$ tels que $b \in A$; en particulier H' est la classe des couples $(\hat{H}, b)$, où $b \in H$. Pour simplifier, nous désignerons par $\langle s, k \rangle$ le couple

$$(\Sigma, (s, k)) \in \tilde{H}.$$

DEFINITION. On dira que $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur (resp. un (H, P) -projecteur strict) si $\langle \hat{s}, g \rangle$ est un $(H', \hat{H}', \tilde{H}')$ -projecteur (resp. -projecteur strict). On dira que $\hat{s}$ est une P -structure libre engendrée par $\alpha(g)$ s'il existe un $(\hat{H}, P)$ -projecteur strict $(\hat{s}, g)$.

Si, pour tout $e \in \hat{K}_0^*$, il existe une P -structure libre $q(e)$ engendrée par e , l'application $e \mapsto q(e)$ se prolonge en un foncteur q de $\hat{K}^*$ vers $\hat{H}^*$ qui est un foncteur adjoint à gauche [6] (nous dirons seulement adjoint) de P . Pour que $(\hat{s}, g)$ soit un (H, P) -projecteur, il faut et il suffit que $(\hat{s}, g)$ soit un (H, P) -projecteur tel que $\hat{s} \in H_0^*$ et $g \in K$.

EXEMPLE. Supposons $s \in \hat{H}_0^*$ et $X \subset R_g(\hat{H}^*)$. Désignons par $\hat{C}^*$ (resp. par C^*) la sous-catégorie de la catégorie $\nabla \hat{H}^*$ (voir 1-C) formée des quatuors $(s, j', j, b) \in \square \hat{H}^*$ tels que j et j' appartiennent à X (resp.

à $X.H_0^*$). Soit $\nabla'P$ le foncteur de $\hat{C}^*$ vers $\nabla\hat{K}^*$ restriction de $\square P$. Pour que $(j, \square, (P(s), P(j), f, f'))$ soit un $(C, \nabla'P)$ -projecteur (resp. projecteur strict), il faut et il suffit que j soit (P, X, H) -distingué pour (resp. -engendré par) (f, f') .

Soient $\hat{s} \in \hat{H}_0^*$ et $g \in P(\hat{s}).\hat{K}$. Pour que $(\hat{s}, g)$ soit un (H, P) -projecteur, il faut et il suffit que, si $s \in H_0^*$ et $k \in P(s).\hat{K}.\alpha(g)$, il existe un et un seul $b \in s.\hat{H}.\hat{s}$ tel que $k = P(b).g$. De plus $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur strict si, et seulement si, pour tout (H, P) -projecteur (s', g') , il existe un $b' \in s'.H.\hat{s}$ tel que $g' = P(b').g$.

Nous désignons par $\bar{P}$ une restriction $(\bar{K}^*, \bar{P}, A^*)$ de P , où $\bar{K}^*$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{K}^*$, par X une partie de $\hat{H}$.

DEFINITION. Nous dirons que P vérifie $N(X, \bar{P}, s)$, où $s \in \hat{H}_0^*$ et $N \subset \hat{H}_0^*$ si pour tout couple (b, b') , où $b \in A.\hat{H}.s$ et $b' \in \beta(b).\hat{H}.s$, il existe n tel que $n \in R_g(\hat{H}^*, \hat{H}.\alpha(n)).N$, $b.n = b'.n$, $X.n \subset X$ et que $P(n)$ soit un noyau de $(P(b), P(b'))$ dans $\bar{K}^*$. (Donc $P(s) \in \bar{K}$.)

Lorsque p est à noyaux n et si $X.n \subset X.f$, où $f \in H_0^*$ (resp. Si $X.X \subset X \subset R_g(\hat{H}^*)$ et si p est à $X \cap H$ -noyaux), P vérifie $N(X, H_0^*, p, s)$ pour $s \in H_0^* = N$.

Soit $e \in \hat{K}_0^*$; notons I la classe $H_0^*.\hat{H}^*(\hat{K}, e)$ des éléments $\langle s, k \rangle$ tels que

$$s \in H_0^* \quad \text{et} \quad k \in p(s).\hat{K}.e;$$

pour tout $i \in I$ nous poserons $i = \langle s_i, k_i \rangle$. Considérons les hypothèses :

P_e) Il existe un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ dans P de $(s_i)_{i \in I}$, où $I = H_0^*.\hat{H}^*(\hat{K}, e)$, et soit $\hat{g} = [k_i]_{i \in I}$.

P'_e) Il existe $\langle S, \hat{g} \rangle \in \hat{H}$ tel que, pour tout $i \in I$, il existe $p_i \in \hat{H}$ vérifiant la relation $(\hat{H}, p_i). \langle S, \hat{g} \rangle = \langle s_i, k_i \rangle = i$.

Naturellement P_e entraîne P'_e .

THEOREME 1. Soit $e \in \hat{K}_0^*$. Si e vérifie P_e et si $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur tel que $e = \alpha(g)$, on a $\hat{g} = P(\hat{j}).g$, où $\hat{j}$ est $(P, \hat{H}, H)$ -distingué pour $\hat{g}$ et $\hat{j} \in S.\hat{H}.\hat{s}$. Supposons que e vérifie P'_e , que P vérifie

$N(X, \bar{P}, \hat{s})$, où $N = H_o^\bullet$ (resp. $= \hat{H}_o^\bullet$), qu'il existe $\hat{j} \in S.R_g(\hat{H}^\bullet)$, $\hat{s}$ qui soit (P, X, H) -distingué pour $\hat{g}$ et que $\hat{g} = P(\hat{j}).g$ (resp. -engendré par $(\hat{g}, g)$); alors

$$\langle \hat{s}, g \rangle \in R_d(A'.\tilde{H}, \tilde{H}^\bullet);$$

1

de plus $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur si $H_o^\bullet \subset A$ (resp. A et un (H, P) -projecteur strict si $X = \hat{H}$ et $A \supset \hat{H}_o^\bullet$ et si e vérifie P_e).

DEMONSTRATION. Supposons que e vérifie P_e et que $(\hat{s}, g)$ soit un (H, P) -projecteur tel que $e = \alpha(g)$. Si $i = \langle s_i, k_i \rangle \in I$, il existe

$$b_i \in s_i.\hat{H}.\hat{s} \quad \text{tel que} \quad P(b_i).g = k_i.$$

Par suite il existe $\hat{j} = [b_i]_{i \in I}$ et, puisque $(P(p_i)_{i \in I}, P(S))$ est un produit naturalisé dans $\hat{K}^\bullet$, on a (C.S., prop. 9, chap. IV) :

$$P(\hat{j}) = [P(b_i)]_{i \in I}, \quad \text{d'où} \quad P(\hat{j}).g = [P(b_i).g]_{i \in I} = [k_i]_{i \in I} = \hat{g}.$$

Montrons que $\hat{j}$ est $(P, \hat{H}, H)$ -distingué pour $(\hat{g}, g)$. En effet, soit

$$j \in S.\hat{H}.H_o^\bullet \quad \text{et} \quad \hat{g} = P(j).k.$$

Comme $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur et que $\langle s, k \rangle \in I$, où $s = \alpha(j)$ il existe un et un seul

$$b \in s.\hat{H}.\hat{s} \quad \text{tel que} \quad k = P(b).g.$$

Il s'ensuit, pour tout $i = \langle s_i, k_i \rangle \in I$:

$$P(p_i.j.b).g = P(p_i).P(j).k = P(p_i).\hat{g} = k_i = P(b_i).g.$$

Ces égalités entraînent $p_i.j.b = b_i$, puisque $\langle \hat{s}, g \rangle \in R_d(H_o^\bullet.\tilde{H}, \tilde{H}^\bullet)$.

Il en résulte $\hat{j} = j.b$, car $\hat{j} = [b_i]_{i \in I}$, ce qui prouve la première partie.

- Supposons que e vérifie P'_e et que $\hat{j} \in S.R_g(\hat{H}^\bullet)$ soit (P, X, H) -distingué pour $\hat{g}$ et $\hat{g} = P(\hat{j}).g$ (resp. -engendré par $(\hat{g}, g)$); soit $\hat{s} = \alpha(\hat{j})$. Supposons que P vérifie $N(X, \bar{P}, \hat{s})$, pour $N = H_o^\bullet$ (resp. $= \hat{H}_o^\bullet$). Soient

$$b \in s.H.\hat{s}, \quad b' \in s.H.\hat{s}, \quad s \in A_o^\bullet \quad \text{et} \quad P(b).g = P(b').g.$$

Il existe $n \in R_g(\hat{H}^\bullet, \hat{H}.\alpha(n)).N$ tel que

$$b.n = b'.n, \quad \hat{j}.n \in X$$

et que $P(n)$ soit un noyau de $(P(h), P(h'))$ dans $\bar{K}^*$. Il s'ensuit $g \in \bar{K}$,

$$g < P(n) \quad \text{et} \quad \hat{g} = P(\hat{j}).g < P(\hat{j}.n).$$

Comme $\hat{j}.n \in X.H_0^*$ (resp. $\hat{j}.n$ est (P, X, H) -distingué pour $\hat{g}$ d'après la proposition 3), il existe $n' \in \hat{H}$ tel que $\hat{j} = \hat{j}.n.n'$. Utilisant $\hat{j} \in R_g(\hat{H}^*)$ on trouve $\hat{s} = n.n'$ et, puisque $n \in R_g(\hat{H}^*, \alpha(n), \hat{H}. \alpha(n))$, on voit que $n \in \hat{H}_\gamma^*$. Donc $h = h'$ et $\langle \hat{s}, g \rangle \in R_d(A', \bar{H}, \bar{H}^*)$. - Par ailleurs, avec les notations de P'_e , on a pour tout $i = \langle s_i, k_i \rangle \in I$:

$$h_i = p_i.\hat{j} \in s_i.H.\hat{s} \quad \text{et} \quad P(h_i).g = P(p_i).P(\hat{j}).g = P(p_i).\hat{g} = k_i.$$

Ainsi $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur si $H_0^* \subset A$.

- Nous supposons de plus que $A \supset \hat{H}_0^*$, $X \cong \hat{H}$ et que e vérifie P_e . Alors $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur et $\langle \hat{s}, g \rangle \in R_d(\hat{H}', \bar{H}^*)$. Soit (s', g') un (H, P) -projecteur tel que $\alpha(g') = e$. D'après le début de la démonstration, il existe un $j' \in S.\hat{H}.s'$ qui est $(P, \hat{H}, H)$ -distingué pour $\hat{g}$ et tel que $\hat{g} = P(j').g'$. Lorsque $\hat{j}$ est $(P, \hat{H}, H)$ -engendré par $(\hat{g}, g)$, on en déduit

$$\hat{j} = j'.h \quad \text{et} \quad g' = P(h).g.$$

Il en résulte que $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur strict. ■

COROLLAIRE 1. Soit $e \in K_0^*$. Si e vérifie P_e et s'il existe une p -structure libre $\hat{s}$ engendrée par e , il existe un $\hat{j} \in S.R_g(\hat{H}^*)$, $\hat{s}$ qui est $(P, \hat{H}.H_0^*, H)$ -engendré par $\hat{g}$. Soit $N = H_0^*$; si e vérifie P'_e , si P vérifie $N(X.H_0^*, p, \hat{s})$ et si $\hat{j} \in S.R_g(\hat{H}^*)$, $\hat{s}$ est $(P, X.H_0^*, H)$ -distingué pour $\hat{g}$, alors $\hat{s}$ est une p -structure libre engendrée par e .

DEMONSTRATION. Soit $(\hat{s}, g)$ un (H, p) -projecteur. Alors $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur tel que $\hat{s} \in H$. - Si e vérifie P_e reprenons les notations de la démonstration du théorème 1; il existe $\hat{j} \in S.H.\hat{s}$ tel que $\hat{j}$ soit $(P, \hat{H}, H)$ -distingué pour $\hat{g}$ et que $\hat{g} = P(\hat{j}).g$, à savoir $\hat{j} = [b_i]_{i \in I}$. Or $\bar{i} = \langle \hat{s}, g \rangle \in I$, d'où $b_{\bar{i}} = \hat{s}$, par suite $p_{\bar{i}}.\hat{j} = b_{\bar{i}} = \hat{s}$, de sorte que $\hat{j}$ est inversible à droite, et a fortiori $\hat{j} \in R_g(\hat{H}^*)$. - La deuxième affirmation du corollaire se déduit du théorème 1, en prenant pour $\bar{P}$ et pour X respectivement p et $X.H_0^*$, dans l'énoncé de ce théorème. ■

COROLLAIRE 2. Soit X une partie de $R_g(\hat{H}^*)$ telle que P soit $(\hat{K}, K_o^*, X, H)$ -engendrant et vérifie la condition $H_o^*(X, H_o^*, p, s)$ pour tout $s \in H_o^*$. Si tout $e \in K_o^*$ vérifie la condition P'_e , alors p admet un foncteur adjoint.

En effet, ce corollaire résulte immédiatement du corollaire 1.

COROLLAIRE 3. Soit $e \in \tilde{K}_o^*$. Supposons que :

1) H^* vérifie la condition $\Sigma(H)$: Si $s' \in \hat{H}_o^*$ et $k' \in P(s'), K.e$ il existe $b' \in s', \hat{H}.H_o^*$ et $k'' \in \hat{K}$ tels que $k' = P(b').k''$;

2) e vérifie la condition P'_e et P la condition $\hat{H}_o^*(X, P, \hat{s})$;

3) il existe $\hat{j} \in S.R_g(\hat{H}^*). \hat{s}$ qui soit (P, X, H) -engendré par $\hat{g}$.

Alors $\hat{s}$ est une P -structure libre engendrée par e .

DEMONSTRATION. Soit $\hat{g} = P(\hat{j}).g$. D'après le théorème 1, $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur et

$$\langle \hat{s}, g \rangle \in R_d(\hat{H}^*, \tilde{H}^*).$$

Soient $s' \in \hat{H}_o^*$ et $k' \in P(s'). \hat{K}.e$. La condition 1 assure qu'il existe $\langle s'', k'' \rangle \in I$ et $b' \in s', \hat{H}.s''$ tels que $P(b').k'' = k'$. Par suite il existe $b'' \in s'', \hat{H}.\hat{s}$ tel que $P(b'').g = k''$, d'où

$$P(b'.b'').g = P(b').k'' = k'.$$

Donc $(\hat{s}, g)$ est un $(\hat{H}, P)$ -projecteur. ■

COROLLAIRE 4. Supposons que $e \in \tilde{K}_o^*$ vérifie la condition P'_e : soit M la classe des $b \in S.\hat{H}.S$ tels que $P(b).\hat{g} = \hat{g}$ et $b \in X.p_i$ pour un $i \in I$. Supposons qu'il existe un $\hat{j} \in X.\hat{s}$ ayant les propriétés : $\hat{j} \in R_g(\hat{H}^*)$, $\hat{j} = b.\hat{j}$ pour tout $b \in M$, $P(\hat{j})$ est un noyau de $P(M)$ dans $\hat{K}^*$ et P vérifie $H_o^*(X, \bar{P}, \hat{s})$. Alors on a $\hat{g} = P(\hat{j}).g$, et $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur, si $H_o^* \subset A$.

DEMONSTRATION. D'après le théorème 1, il suffit de montrer que $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour $\hat{g}$. En effet, puisque $P(\hat{j})$ est un noyau de $P(M)$ dans $\hat{K}^*$ on a $\hat{g} = P(\hat{j}).g$. Soit $j \in S.X.H_o^*$, $\hat{g} = P(j).g'$. Comme e vérifie P'_e , il existe $p_i \in \alpha(j).\hat{H}.S$ tel que $P(p_i).\hat{g} = g'$, d'où

$$\hat{g} = P(j).P(p_i).\hat{g}, \quad j.p_i \in M$$

$$\text{et } \hat{j} = j.p_i.\hat{j} < j.$$

Puisque $P(p_i, \hat{j}) \cdot g = g'$, il s'ensuit que $\hat{j}$ est (P, X, H) -distingué pour $\hat{g}$. Donc $(\hat{s}, g)$ est un (H, P) -projecteur. ■

Du corollaire 1 il résulte que, si e vérifie P_e , si $e \in K_o^*$ et si p est à noyaux, il existe une p -structure libre $\hat{s}$ engendrée par e si, et seulement si, il existe $\hat{j} \in S, \hat{H} \cdot \hat{s}$ qui soit $(P, R_g(\hat{H}^*, H), H_o^*, H)$ -engendré par $\hat{g}$. Dans ce cas, $\hat{j}$ est aussi $(P, \hat{H} \cdot H_o^*, H)$ -engendré par $\hat{g}$.

B. CRITERES D'EXISTENCE DE FONCTEURS ADJOINTS.

Supposons que $\hat{\mathbb{M}}_o$ soit un univers, que $\mathbb{M}_o \subset \hat{\mathbb{M}}_o$ et que $\mathbb{M}_o \in \hat{\mathbb{M}}_{o_2}$; soient $\mathbb{M} \subset \hat{\mathbb{M}}$ les catégories pleines d'applications correspondantes, $\hat{\mathbb{M}}$ la saturante de $\mathbb{M}$ dans $\hat{\mathbb{M}}$. Soit $Q = (\hat{\mathbb{M}}, \underline{Q}, \hat{K}^*)$ un foncteur fidèle tel que $Q(K) \subset \mathbb{M}$, lorsqu'il en existe un. Des § 2 et 3, on déduit :

CRITERE 1. Si les conditions suivantes sont vérifiées, p admet un adjoint p' (resp. p' ; $\hat{s}$ est une P -structure libre engendrée par $e \in K_o^*$ si $\hat{s} = p'(e)$):

- 1) $Q \cdot P$ est $(\mathbb{M}^\cup, X, H)$ -engendrant; $X \subset R_g(\hat{H}^*)$, $P(X) \subset \underline{Q}_i$;
- 2) P est à $\hat{\mathbb{M}}_o$ -produits et, pour tout $M \in \mathbb{M}_o$, on a $H_M \in \hat{\mathbb{M}}_o$, où H_M est la classe des $s \in H_o^*$ tels que $Q \cdot P(s) = M$;
- 3) P vérifie $N(X \cdot H_o^*, \bar{P}, s)$, où $s \in H$, $\bar{P} = p$ (resp. $= P$).

En effet, puisque $Q(\hat{K} \cdot K_o^*) \subset \hat{\mathbb{M}} \cdot \mathbb{M}_o$ et que $Q \cdot P$ est $(\hat{\mathbb{M}} \cdot \mathbb{M}_o, X, H)$ -engendrant, P est $(\hat{K} \cdot K_o^*, X, H)$ -engendrant d'après la proposition 7-1. Soit $e \in K_o^*$; alors H^* vérifie $\Sigma(H)$ (cor. 3, th. 1); l'application

$$\langle s, g \rangle \rightarrow (s, Q(g))$$

est une injection de $I = H_o^* \cdot \hat{H} \cdot (\bar{K}, e)$ dans $I' = \bigcup_{M \in \mathbb{M}_o} (H_M \times M \cdot \mathbb{M} \cdot Q(e))$.

Comme $\mathbb{M}_o \in \hat{\mathbb{M}}_o$ et que $\hat{\mathbb{M}}_o$ est un univers, on trouve $I' \in \hat{\mathbb{M}}_o$. Donc I est une $\hat{\mathbb{M}}_o$ -classe et, P étant à $\hat{\mathbb{M}}_o$ -produits, e vérifie la condition P_e . Le critère 1 résulte alors des corollaires 2 et 3 du théorème 1. ■

COROLLAIRE. Supposons $P = (\hat{\mathbb{M}}, P, \hat{H}^*)$ et $H = \bar{P}^{-1}(\mathbb{M}) \in \hat{\mathbb{M}}_o$. Si P est à $\hat{\mathbb{M}}_o$ -produits, résolvant à droite et $\bar{P}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$, alors p admet un adjoint.

CRITERE 2. Si les conditions suivantes sont vérifiées, p a un adjoint :

- 1) P est à $\mathfrak{M}_0$ -produits fibrés;
- 2) Pour tout $S \in \hat{H}_0^*$, $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$ et $M \subset Q.P(S)$, il existe $j \in S.X.H_0^*$ tel que $M \subset \beta(j')$, où $j' = Q.P(j)$ et $X = (Q.P)_i^{-1} \cap \bar{P}^{-1}(Q_i^{-1})$;
- 3) P est à $\hat{\mathfrak{M}}_0$ -produits et $H_0^* \in \hat{\mathfrak{M}}_0$;
- 4) P est fidèle et Q est compatible avec les noyaux.

En effet, on a $P(X) \subset Q_i^{-1}$ et $X.X \subset X$. Les conditions 1 et 2 entraînent que $Q.P$ est $(\mathfrak{M}^U, X, H)$ -engendrant d'après la proposition 12. Si n est un noyau de (b, b') dans P , et par suite dans $Q.P$, on a $n \in X$ (proposition 2). Si $\alpha(n) = s$ et $\beta(n) \in H_0^*$, il existe un $\hat{j} \in s.X.H_0^*$ qui est (P, X, H) -distingué pour $Q.P(s)$ et on a $\hat{j} \in \hat{H}_\gamma^*$, car $Q.P(\hat{j}) \in \tilde{\mathfrak{M}}_\gamma$. Donc $n.\hat{j} \in X.H_0^*$, de sorte que P vérifie $H_0^*(X.H_0^*, P, \beta(n))$. Ainsi le critère 2 est ramené au critère 1. ■

CRITERE 3. Si les conditions suivantes sont vérifiées, P admet un adjoint :

- 1) P est à X -noyaux et à $\hat{\mathfrak{M}}_0$ -produits; $\hat{H}_0^* \subset X.X \subset X \subset R_g(\hat{H}^*)$;
- 2) $\hat{H}^*$ est $\hat{\mathfrak{M}}_0$ -petite pour X et $e'.\hat{K}.e \in \hat{\mathfrak{M}}_0$, si $e \in \hat{K}_0^*$ et $e' \in \hat{K}_0^*$;
- 3) X est $\hat{\mathfrak{M}}_0$ -V-stable pour $(P, \hat{H})$;
- 4) Pour tout $e \in \hat{K}_0^*$, il existe une sous-catégorie H_e^* de $\hat{H}^*$ telle que $H_e^* \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et que H_e^* vérifie la condition $\Sigma(H_e^*)$ (corollaire 3 du théorème 1).

En effet, soit $e \in \hat{K}_0^*$ et $H = H_e$. La classe $I/\tilde{H}_\gamma^*$ est isomorphe à

$$I' \subset \bigcup_{e' \in P(H_0^*)} (H \times e'.\hat{K}.e) \in \hat{\mathfrak{M}}_0,$$

de sorte que e vérifie P_e . Puisque P est à X -noyaux, il vérifie $\hat{H}_0^*(X, P, s)$ pour tout $s \in (H_e)_0^*$. Le corollaire 2 de la proposition 8 appliqué au cas $H = \hat{H}$ prouve que P est $(\hat{K}, X, \hat{H})$ -engendrant. Les hypothèses du corollaire 3 du théorème 1 sont donc vérifiées, et ce corollaire affirme qu'il existe une P -structure libre engendrée par e . Il s'ensuit que P admet un adjoint. ■

CRITERE 4. Si la condition 4 du critère 3 est vérifiée ainsi que les conditions 1 et 2 suivantes, P admet un adjoint :

- 1) P est un foncteur à noyaux et à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits;
 2) $e', \hat{K}, e \in \hat{\mathcal{M}}_0$ pour tout $e \in \hat{K}_0$ et tout $e' \in \hat{K}_0$ et $S, \hat{H}, S \in \hat{\mathcal{M}}_0$, si $S \in \hat{H}_0$.

En effet, soit $e \in \hat{K}_0$ et $H = H_e$. On voit comme dans le critère 3 que e vérifie P_e relativement à H . Si $s \in \hat{H}_0$ et $g \in P(s), \hat{K}, e$, il existe

$$b \in s, \hat{H}, H_e \quad \text{et} \quad g' \in \hat{K} \quad \text{tels que} \quad P(b), g' = g.$$

La relation $i = \langle \alpha(b), g' \rangle \in I$ assure l'existence de $p_i \in \alpha(b), \hat{H}, S$ tel que $g' = P(p_i), \hat{g}$. On en déduit $P(b, p_i), \hat{g} = g$, de sorte que e vérifie P'_e relativement à $\hat{H}$. P étant à noyaux et à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits, il est à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -limites projectives. Par suite la classe M des $b \in S, \hat{H}, S$ tels que $P(b), \hat{g} = \hat{g}$ a un noyau. Le critère résulte du cor. 4 (pour $X = \hat{H} = H$). ■

CAS PARTICULIERS

- 1) Si on prend pour X dans le critère 3 la classe $R_g(\hat{H}^*)$, on retrouve le théorème d'existence d'adjoint dû à Freyd [5] : Si P est à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -limites projectives, si $\hat{H}^*$ est localement petite et si, pour tout $e \in \hat{K}_0$, il existe une petite catégorie H_e^* vérifiant la condition $\Sigma(H_e^*)$ (corollaire 3 du théorème 1), alors P admet un adjoint. Le critère 4 a été montré directement dans [7], dans le cas où $X = \hat{H} = H$ (voir aussi [9]).

2) Supposons que P soit le foncteur injection canonique vers $\hat{K}^*$ d'une sous-catégorie pleine $\hat{H}^*$ de $\hat{K}^*$. De la proposition 7 et du corollaire 1 du théorème 1 résultent les propositions 5-2, 6-2 [1] et corollaires.

REMARQUES.

1) Le corollaire 1 d'une part et d'autre part les corollaires 3 et 4 du théorème 1 sont de nature différente, et a fortiori les critères d'existence d'adjoints qui s'en déduisent (corollaire 2 du théorème 1, critères 1 et 2 d'une part; corollaire 3 du théorème 1, critères 3 et 4 et théorème de Freyd d'autre part). Alors que dans les corollaires 3 et 4 du théorème 1 la conclusion porte sur le foncteur P , dans le corollaire 2 le foncteur P intervient seulement en tant qu'auxiliaire (i.e. on peut choisir P de la manière la plus intéressante). En particulier supposer qu'il existe un pro-

2) Supposons que p soit de la forme (K^*, ι, H^*) , où H^* est une sous-catégorie pleine de K^* , et qu'il existe un foncteur d'homomorphismes $q = (\mathfrak{M}, \underline{q}, K^*)$ tel que K^*_0 soit la classe des structures d'une espèce de structures $(\mathfrak{M}_\gamma, K^*_0, \kappa')$ définie par un foncteur typique F [8], H^*_0 étant la classe des structures relative à un sous-foncteur typique F' de F . On pourra alors choisir pour P le foncteur $(\hat{K}^*, \iota, \hat{H}^*)$, en désignant par $\hat{K}^*$ et $\hat{H}^*$ les catégories d'homomorphismes relatives aux espèces de structures définies par les foncteurs typiques $\hat{F}$ et $\hat{F}'$ respectivement prolongeant F et F' à l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_0$. Par exemple, si $p = (\mathfrak{N}', \iota, \mathcal{F})$, on prendra pour P le foncteur $(\mathfrak{N}', \iota, \hat{\mathcal{F}})$ associé à $\hat{\mathfrak{M}}$. Le critère 1 prouve que $\mathfrak{N}'$ est une catégorie à $\mathcal{F}$ -projections (C.S. th.9, chap. III).

a) Soit $S \in \hat{H}_o$, $M' \subset Q'(S)$ et $\overline{M'} \leq \overline{M}$; si s est la Q' -sous-structure de S engendrée par M' , on a $\overline{Q'(s)} \leq \alpha(\overline{M})$.

1

2+

THEOREME 2. Soit $\hat{q} = (\mathcal{M}, \hat{q}, \hat{H} \cdot)$ un foncteur et soit $H \cdot$ une sous-caté-

gorie pleine de $\hat{H}^*$ telle que $H \in \hat{\mathcal{M}}_0$ et $\hat{q}(H) \subset \mathcal{M}$. Supposons que $\hat{q}$ soit à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits et H^* à noyaux, que $X \subset \hat{q}_i^{-1}$ et $X.n \subset X.H$ pour tout noyau n dans H^* et que $\hat{q}$ soit $(\mathcal{M} \cup, X, H)$ -engendrant. Alors :

1) Si K^* est une catégorie telle que $K \in \mathcal{M}_0$ et si $\mathcal{M}_0$ et $\hat{\mathcal{M}}_0$ sont des univers, H^* est une catégorie à K^* -limites inductives.

2) Si $s \in H_0^*$ et si r est une relation d'équivalence sur $\hat{q}(s)$, il existe une q -structure quasi-quotient de s par r , où $q = (\mathcal{M}, \hat{q}_i, H^*)$.

DEMONSTRATION. Soit $K^* \in \mathcal{F}_0$. Désignons par $\hat{N}^*$ la catégorie longitudinale des transformations naturelles $\mathcal{N}(\hat{H}^*, K^*)^{\square}$ entre foncteurs de K^* vers $\hat{H}^*$. Soit P le foncteur de $\hat{H}^*$ vers $\hat{N}^*$ associant à b le foncteur de K^* vers $\square \hat{H}^*$ constant sur $b^{\square}$. Nous posons $P(b) = \bar{b}$.

Soit $s_i \in \hat{H}_0^*$ pour tout $i \in I$, où $I \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Par hypothèse, il existe un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ de $(s_i)_{i \in I}$ dans $\hat{H}^*$. On peut aussi définir S comme la limite projective du foncteur σ de I^0 vers $\hat{H}^*$ défini par : $i \rightarrow s_i$, en désignant par I^0 la catégorie telle que $I^0_0 = I$. Par suite il résulte de la proposition duale de la proposition 2 (C.S. appendice II) que $\bar{S}$ est la limite projective de $(\hat{N}^*, \bar{P}, I^0)$, c'est-à-dire que S est un produit de $(s_i)_{i \in I}$ dans P . Désignons par N^* la sous-catégorie de $\hat{N}^*$ isomorphe à $\mathcal{N}(\hat{H}^*, K^*)^{\square}$, formée des

$$\Psi \in \hat{N}^* \text{ tels que } \Psi(K) \subset \square H^*.$$

On a $P(H) \subset N$. De la même proposition on déduit que $p = (N^*, \bar{P}, H^*)$ est un foncteur à noyaux, de sorte que P vérifie $H_0^*(X.H_0^*, p, s)$ pour tout $s \in H_0^*$. Supposons $S \in \hat{H}_0^*$ et $\Psi \in \bar{S}.N^*.N_0^*$; soit $(\bar{M}, \tau, G)$, où $M = \hat{q}(S)$, le triplet définissant la transformation naturelle $\square \hat{q}.\Psi$. Pour tout $e \in K_0^*$, on a $\tau(e) \in \hat{\mathcal{M}}_0$, d'où $M' = \bigcup_{e \in K_0^*} \beta(\tau(e)) \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Par hypothèse, il existe un $j \in S.\hat{q}_i^{-1}$ qui est $(\hat{q}, X.H_0^*, H)$ -engendré par (M, ι, M') . On montre facilement que j est alors $(P, X.H_0^*, H)$ -engendré par Ψ . Donc P est $(\hat{N}^*.N_0^*, X, H)$ -engendrant. Si $\Phi \in N_0^*$ et si I est la classe des (s, Ψ) tels que $s \in H_0^*$ et $\Psi \in \bar{S}.N.\Phi$, on définit une bijection $(s, \Psi) \rightarrow (s, (\Psi(e))_{e \in K_0^*})$ de I sur $I' \in \hat{\mathcal{M}}_0$, car $H \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Il s'ensuit que Φ vérifie P_Φ . Ainsi les hypothèses du corollaire 1 du théorème 1 sont

remplies, et p admet un adjoint. Ceci signifie que H^* est à K^* -limites inductives. - La démonstration du théorème 2-2 [1] s'étend immédiatement pour démontrer la deuxième affirmation. - Rappelons que, d'après le théorème 3-2 [1], si $F = (H^*, \underline{F}, K^*) \in \mathcal{F}$, alors F admet pour limite inductive s une q -structure quasi-quotient de $S = \sum_{i \in K_o^*} F(i)$, lorsque q est fidèle, à savoir : si j désigne l'application canonique de

$$E = \sum_{i \in K_o^*} q.F(i)$$

dans $q(S)$, alors s est une q -structure quasi-quotient de S par la relation d'équivalence engendrée par $j(E, A, E)$, où A est la classe des $(x, q.F(k)(x))$ tels que $x \in q.F(i)$ et $k \in K.i$,

i. e. par la relation d'équivalence image par j de la relation r telle que

$$\lim_{\rightarrow} q.F = E/r. \blacksquare$$

Le théorème 3-2 [1] suggère de généraliser comme suit la notion de limite inductive : Soit $q = (\mathbb{M}, \underline{q}, H^*)$ un foncteur fidèle. Soit I^* une catégorie, Φ_o une application de I_o^* dans H_o^* et φ un foncteur de I^* vers $\mathbb{M}$ tel que

$$q(\Phi_o(i)) = \varphi(i) \quad \text{pour tout } i \in I_o^*.$$

Supposons qu'il existe une somme $\sum_{i \in I_o^*} \Phi_o(i) = S$ dans H^* et soit j l'application canonique de

$$E = \sum_{i \in I_o^*} \varphi(i)$$

dans $q(S)$; soit r la relation d'équivalence sur E telle que $\lim_{\rightarrow} \varphi = E/r$.

DEFINITION. Avec les notations précédentes et s'il existe une q -structure quasi-quotient $\hat{s}$ de S par $j(r)$, on appellera $\hat{s}$ une q -limite inductive de (φ, Φ_o) . 1

En particulier, si Φ_o est la restriction à I_o^* d'un foncteur $\Phi = (H^*, \underline{\Phi}, I^*)$ tel que $q.\Phi = \varphi$ (ces conditions déterminent alors Φ d'une manière unique puisque q est fidèle), il résulte du théorème 3-2 [1] que $\hat{s}$ est une limite inductive de Φ si, et seulement si, $\hat{s}$ est une q -limite

inductive de (φ, Φ_o) . Du théorème 2, on déduit :

COROLLAIRE. Si les conditions du théorème 2 sont vérifiées, si $\varphi = (\mathbb{M}, \varphi, l^*)$ est un foncteur, où $l^* \in \mathcal{F}_o$, et si Φ_o est une application de l_o^* dans H_o^* telle que $q\Phi_o(i) = \varphi(i)$ pour tout $i \in l_o^*$, il existe une q -limite inductive de (φ, Φ_o) , en supposant q fidèle.

Produits tensoriels :

- Soit $q = (\mathbb{M}, q, H^*)$ un foncteur fidèle, $I \in \mathbb{M}_o$ et $\Sigma(q)$ la classe
- 1 des triplets $\bar{f} = (s, f, (s_i)_{i \in I})$ vérifiant les conditions :
- 1) $f = (q(s), \underline{f}, \prod_{i \in I} q(s_i)) \in \mathbb{M}$, $s \in H_o^*$, $s_i \in H_o^*$;
 - 2) Soit $\bar{i} \in I$ et $J = I - \{\bar{i}\}$. Pour tout $u = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} q(s_j)$, il existe un $\bar{f}^u \in s.H.\bar{s}_{\bar{i}}$ tel que $q(\bar{f}^u)$ soit l'application $x_{\bar{i}} \mapsto f(x_i)_{i \in I}$ de $q(s_{\bar{i}})$ dans $q(s)$.

On définit une catégorie $T(q)$, si $\mathbb{M}_o$ est un univers, telle que

$$T(q) = H \cup H^I \cup \Sigma(q)$$

et que H^* et H^{*I} soient des sous-catégories pleines, en posant :

$$\begin{aligned} (s, f, (s_i)_{i \in I}) \cdot (g_i)_{i \in I} &= (s, f, \prod_{i \in I} q(g_i), \alpha(g_i)_{i \in I}) \\ \text{si } (s, f, (s_i)_{i \in I}) &\in \Sigma(q) \text{ et } g_i \in s_i.H; \\ g \cdot (s, f, (s_i)_{i \in I}) &= (\beta(g), q(g) \cdot f, (s_i)_{i \in I}) \\ \text{si } (s, f, (s_i)_{i \in I}) &\in \Sigma(q) \text{ et } g \in H.s. \end{aligned}$$

THEOREME 3. Si les conditions du théorème 2 sont vérifiées et si $q(n)$ est une injection pour tout noyau n dans H^* , alors $T(q)$ est une catégorie à H -projections, lorsque $\hat{q}$ est fidèle.

DEMONSTRATION. Soit $T(\hat{q})$ la catégorie associée au foncteur $\hat{q}$ et à I . Le foncteur $\hat{q}$ se prolonge en un foncteur Q de $T(\hat{q})$ vers $\mathbb{M}$ en posant

$$Q(s, f, (s_i)_{i \in I}) = (\hat{q}(s), \underline{f}, \prod_{i \in I} \hat{q}(s_i)) \text{ et } Q((g_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} \hat{q}(g_i).$$

- Montrons que, si $s_\lambda \in \hat{H}_o^*$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ où $\Lambda \in \mathbb{M}_o$ et si $((p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, S)$ est un produit naturalisé de $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dans $\hat{q}$, alors c'est aussi un produit naturalisé dans $T(\hat{q})$. En effet, soit

$$\bar{f}_\lambda = (s_\lambda, f_\lambda, (s'_i)_{i \in I}) \in \Sigma(\hat{q}) \quad \text{pour tout } \lambda \in \Lambda.$$

On a

$$f = [\hat{q}(s_\lambda), \bar{f}_\lambda, \prod_{i \in I} \hat{q}(s'_i)]_{\lambda \in \Lambda} \in \mathfrak{M}.$$

Soit $\bar{i} \in I$ et $J = I - \{\bar{i}\}$; si $u = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \hat{q}(s'_j)$, désignons par $\bar{f}_\lambda^u$ l'élément de $s_\lambda \cdot \hat{H} \cdot s'_{\bar{i}}$ associé à $\bar{f}_\lambda$ par définition de la catégorie $T(\hat{q})$.

Posons

$$\bar{f}^u = [\bar{f}_\lambda^u]_{\lambda \in \Lambda} \in S \cdot \hat{H} \cdot s'_{\bar{i}}.$$

Comme $\hat{q}(\bar{f}^u)$ est l'application :

$$x_{\bar{i}} \mapsto (\bar{f}_\lambda^u(x_{\bar{i}}))_{\lambda \in \Lambda} = (f_\lambda(x_{\bar{i}}))_{\lambda \in \Lambda} = f((x_i)_{i \in I})$$

de $\hat{q}(s'_{\bar{i}})$ dans $\hat{q}(S)$, on trouve

$$\bar{f} = (S, f, (s'_i)_{i \in I}) \in \Sigma(\hat{q}) \quad \text{et} \quad \bar{f}_\lambda = p_\lambda \cdot \bar{f}.$$

Ainsi S est un produit de $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ dans $T(\hat{q})$. - Soit n un noyau de (b, b') dans $H \cdot$, où $b \in H$, $\alpha(b) = s$ et $b' \in \beta(b) \cdot H \cdot s$. Par hypothèse $q(n)$ est un monomorphisme. Montrons que n est aussi un noyau de (b, b') dans $T(q)$. En effet, soit

$$\bar{f} = (s, f, (s'_i)_{i \in I}) \in \Sigma(q) \quad \text{tel que} \quad b \cdot \bar{f} = b' \cdot \bar{f}.$$

Soit $\bar{i} \in I$, $J = I - \{\bar{i}\}$ et $u = (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \hat{q}(s'_j)$. Les éléments $b \cdot \bar{f}^u$ et $b' \cdot \bar{f}^u$, où $\bar{f}^u$ est l'élément associé à $\bar{f}$ par définition, ont pour projection l'application

$$x_{\bar{i}} \mapsto \underline{b}(f(x_{\bar{i}}))_{i \in I} = \underline{b'}(f(x_{\bar{i}}))_{i \in I} \quad \text{de} \quad \hat{q}(s'_{\bar{i}}) \quad \text{dans} \quad \hat{q}(\beta(b));$$

puisque $\hat{q}$ est fidèle, ils sont égaux. Par suite il existe un et un seul

$$\bar{k}^u \in s' \cdot H \cdot s'_{\bar{i}} \quad \text{tel que} \quad \bar{f}^u = n \cdot \bar{k}^u, \quad \text{où } s' = \alpha(n);$$

on a $\bar{k}^u(x_{\bar{i}}) = \underline{n}^{-1}(f(x_{\bar{i}}))_{i \in I}$. Il s'ensuit

$$k = (\hat{q}(s'), \underline{n}^{-1} \bar{f}, \prod_{i \in I} \hat{q}(s'_i)) \in \mathfrak{M} \quad \text{et} \quad \bar{k} = (s', k, (s'_i)_{i \in I}) \in T(q);$$

de plus $\bar{k}$ est l'unique élément de $T(q)$ tel que $n \cdot \bar{k} = \bar{f}$. Il en résulte que n est un noyau de (b, b') dans $T(q)$. - Une démonstration analogue prouve que $X \subset Q_i^{\leftarrow}$. Les hypothèses du critère 1 sont donc vérifiées pour

$$P = (T(\hat{q}), \iota, \hat{H}^*) \quad \text{et} \quad p = (T(q), \iota, H^*).$$

Par suite $T(q)$ est une catégorie à H -projections. ■

DEFINITION. Avec les notations du théorème 3, une $(H, T(q))$ -projection de $(s_i)_{i \in I}$ est appelée un q -produit tensoriel de $(s_i)_{i \in I}$.

EXEMPLES.

1) Soit H^* la catégorie des homomorphismes entre modules sur un anneau A (unitaire ou non) relative à $\mathbb{M}$, et soit q son foncteur projection canonique vers $\mathbb{M}$. Alors $(M_i)_{i \in I}$ admet le produit tensoriel $\bigotimes_{i \in I} M_i$ (usuel) pour q -produit tensoriel.

2) Si q est l'un des foncteurs projection canonique vers $\mathbb{M}$ de la catégorie $\mathcal{T}$ des applications continues, Ω des applications ordonnées, $\mathcal{F}$ des foncteurs, $\mathcal{N}$ des néofoncteurs ou de l'une des sous-catégories de Ω formées des applications sous-préinductives, f -sous-inductives [1] ou f -inductives [1], alors il existe des q -produits tensoriels.

REMARQUE. Soient (C^*, D) une catégorie q -dominée, $e \in H_o^*$, $s \in C_o^*$ et D_s le foncteur de C^* vers H^* tel que $D_s(k) = D(k, s)$. La notion de produit tensoriel considérée dans [5] (où (C^*, D) est une catégorie additive) se généralise en appelant D -produit tensoriel de (e, s) une D_s -structure libre engendrée par e . On peut «relativiser» la définition donnée plus haut, de sorte que les deux notions soient identiques lorsque C^* a un générateur. Les q -produits tensoriels «relativisés» seront étudiés dans [10], où sera indiquée une construction du q -produit tensoriel comme structure quasi-quotient d'une somme.

1+

4. Quasi-cohomologie.

A) p -IDEAUX.

Soit $p = (\mathbb{M}, \underline{p}, H^*)$ un foncteur fidèle, où $\mathbb{M}$ est une catégorie pleine d'applications. Si $k \in H$ et si $p(k)$ est compatible avec une relation r sur $p(\alpha(k))$, on dira que k est compatible avec r .

PROPOSITION 14. Soit H^* une catégorie et r une application de H dans la classe des relations vérifiant les conditions :

1) $r(b)$ est une relation sur $p(\beta(b))$ pour tout $b \in H$;

2) Soit $(b, b') \in H^* * H^*$; si $k \in H, \beta(b)$ est compatible avec $r(b)$, alors k est aussi compatible avec $r(b, b')$.

La classe I_r formée des k, b tels que $(k, b) \in H^* * H^*$ et k compatible avec $r(b)$ est un idéal de H^* .

En effet, soit $k, b \in I_r$. Si $f \in H, \beta(k)$, on voit que $f.k$ est compatible avec $r(b)$, de sorte que $f.k.b \in I_r$, d'où $H.I_r \subset I_r$. Soit $f' \in \alpha(b).H$. Puisque k est compatible avec $r(b)$, il est compatible avec $r(b, f')$ d'après la condition 2, donc

$$k.(b, f') \in I_r \quad \text{et} \quad I_r.H \subset I_r.$$

Ceci montre que I_r est un idéal de H^* . ■

DEFINITION. On appelle p -idéal un idéal J de H^* vérifiant la condition suivante : Pour tout $b \in p_i^{-1}$, il existe une relation r sur $p(\beta(b))$ telle que l'on ait :

$$k.b \in J \text{ si, et seulement si, } k \in H, \beta(b) \text{ est compatible avec } r.$$

Il peut y avoir plusieurs relations r ayant la propriété indiquée dans cette définition; nous supposons que l'une de ces relations a été choisie, et nous la noterons $r(b)$. On pose encore $\underline{k} = p(k)$, si $k \in H$.

PROPOSITION 15. Supposons que $\mathcal{M}_0$ soit un univers et p un foncteur à $\mathcal{M}_0$ -produits fibrés. Si J est un p -idéal, l'application $b \mapsto r(b)$ de p_i^{-1} dans la classe des relations se prolonge en une application r définie sur H , et J est l'idéal I_r associé à r dans la proposition 14.

DEMONSTRATION. D'après la proposition 11, tout $f \in H$ admet des $(\mathcal{M}^i, p, H)$ images; choisissons-en une notée $\hat{f}$. En particulier, si $b \in p_i^{-1}$, choisissons $\hat{b} = b$. Montrons que l'application $r : f \mapsto r(\hat{f})$ vérifie les conditions de la proposition 14. En effet, $r(\hat{f})$ est une relation sur $p(\beta(f))$. Soit $(f, f') \in H^* * H^*$ et $k \in H, \beta(f)$ compatible avec $r(\hat{f})$. On a $k, \hat{f} \in J$, par définition. Puisque

$$f = \hat{f}.f_1, \quad \text{on a} \quad f.f' = \hat{f}.f_1.f';$$

il en résulte qu'il existe

$$g \in H \quad \text{tel que} \quad (\widehat{f, f'}) = \hat{f} \cdot g.$$

On en déduit

$$k.(\widehat{f, f'}) = k.\hat{f} \cdot g \in J \cdot g \subset J$$

et, par hypothèse, k est compatible avec $r(f, f')$, ce qu'il fallait démontrer. - Soit I_r l'idéal associé à l'application r . Si $k.f \in I_r$, alors k est compatible avec $r(f)$, et l'on trouve

$$k.\hat{f} \in J \quad \text{et} \quad k.f = k.\hat{f}.f_1 \in J.f_1 \subset J.$$

Inversement, si $j \in J$, la relation $j.\alpha(j) \in J$ entraîne que j est compatible avec $r(\alpha(j))$, c'est-à-dire $j \in I_r$. Ceci prouve que $J = I_r$. ■

EXEMPLES.

1) Supposons $p = p\mathcal{F}$. Soit $b = (C^*, \iota, G^*).b' \in \mathcal{F}$, où $b' \in \mathcal{F}_\gamma$. Désignons par $r(b)$ la relation $r_G = (C, A_G, C)$ telle que A_G soit la classe des couples $(g, \alpha(g))$, où $g \in G$. D'après le théorème 3-1 [1] on a $k.b \in J\mathcal{F}$ si, et seulement si, $k \in \mathcal{F}.C^*$ est compatible avec r_G . Ainsi $J\mathcal{F}$ est un $p\mathcal{F}$ -idéal. L'application r correspondante (prop. 15) de $\mathcal{F}$ dans la classe des relations est obtenue en posant :

$$r((\hat{C}^*, \Phi, C^*)) = (\hat{C}, \hat{A}, \hat{C}),$$

où $\hat{A}$ est formée des $(k, \alpha(k))$, où $k = \Phi(f_n) \dots \Phi(f_1)$, $f_i \in C$.

2) Soit $\mathcal{F}(p)$ la catégorie des foncteurs p -structurés. Soit J_p l'idéal de $\mathcal{F}(p)$ formé (n° 8 [1]) par les $\bar{b} = (C^*, \tilde{b}, G^*) \in \mathcal{F}(p)$ tels que $b = (C^*, \tilde{b}, G^*) \in J\mathcal{F}$. Si $p\mathcal{F}$ est le foncteur projection canonique de $\mathcal{F}(p)$ vers $\mathcal{M}$, l'idéal J_p est un $p\mathcal{F}$ -idéal, car à $\bar{b} \in \mathcal{F}(p)$ est associée la relation $r(b)$ définie dans l'exemple 1.

PROPOSITION 16. Soit J un p -idéal et $b \in S.p \overset{\sim}{\leftarrow} s$, où $s \in H_o^*$ et $S \in H_o^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes, où $\hat{r}$ désigne la relation d'équivalence engendrée par $r(b)$:

1) $\hat{s}$ est une (p, J) -structure quotient de S par s (C. S. déf. 34, chap. III);

2) $\hat{s}$ est une p -structure quotient faible de S par $\hat{r}$ (déf. 2-1 [1]);

3) $\hat{s}$ est une p -structure quasi-quotient de S par $r(h)$ et $p(\hat{s}) = p(S)/\bar{r}$, où $\bar{r}$ est la relation p -compatible engendrée par $\hat{r}$.

En effet, soit p^r la catégorie servant à définir les p -structures quasi-quotient (n° 1 [1]). $(k, \hat{r})$ est un (H, p^r) -projecteur, où $k \in R_d(H^*)$ si, et seulement si, on a $k' = g.k$ lorsque $k' \in H.S$ est compatible avec $r(h)$, c'est-à-dire si, et seulement si, $k' = g.k$ lorsque $k'.h \in J$. Dans ce cas, pour que $\beta(k) = \hat{s}$ soit une p -structure quotient faible de s par $\hat{r}$, il faut et il suffit que $p(k)$ soit une surjection canonique (prop. 5-1 [1]) donc que (k, h) soit une (p, J) -suite exacte courte. ■

La proposition 16 montre que l'étude des suites exactes courtes relatives à un p -idéal se ramène à l'étude des structures quotient d'une structure par une relation d'équivalence.

PROPOSITION 17. Soit J un p -idéal et $h \in p_i^r$. Pour que (k, h) soit une $(R_d(H^*), p_i^r, H^*, J)$ -suite exacte courte (C.S. déf. 32, chap. III), il faut et il suffit que $\beta(k)$ soit une p -structure quasi-quotient de $\alpha(k)$ par $r(h)$, la p -quasi-surjection correspondante étant k .

DEMONSTRATION. Soit (k, h) une $(R_d(H^*), p_i^r, H^*, J)$ -suite exacte courte. On a $k.h \in J$; ainsi $k \in R_d(H^*)$ est compatible avec $r(h)$ et, si $k' \in H$, $\beta(h)$ est compatible avec $r(h)$, il existe un et un seul $g \in H$ tel que $g.k = k'$. Ainsi $\beta(k)$ est une p -structure quasi-quotient de $\alpha(k)$ par $r(h)$. - Inversement, supposons que k soit une p -quasi-surjection définissant $\beta(k)$ comme p -structure quasi-quotient de $\alpha(k)$ par $r(h)$. Puisque $\hat{k} = (k, \hat{r})$, où $\hat{r}$ est la relation d'équivalence engendrée par $r(h)$, est un (H, p^r) -projecteur (not. n° 1 [1]), on a $k.h \in J$ et

$$\hat{k} \in R_d(H, p^r), \quad \text{d'où} \quad k \in R_d(H^*).$$

Par ailleurs la condition $k'.h \in J$ entraîne $(k', \hat{r}) \in p^r$, de sorte qu'il existe

$$g \in H \quad \text{tel que} \quad k' = g.k.$$

Ceci montre que (k, h) est une $(R_d(H^*), p_i^r, H^*, J)$ -suite exacte. ■

DEFINITION. Soit J un idéal de H^* ; si (k, h) est une $(R_d(H^*), p_i^r, H^*, J)$ -

suite exacte courte on dira que (k, b) est une J -suite quasi-exacte courte ou que $\beta(k)$ est une J -structure quasi-quotient de $\beta(b)$ par $\alpha(b)$.

B) FONCTEUR DE QUASI-COHOMOLOGIE.

Nous supposons donnés dans la suite :

1) Un foncteur fidèle $p = (\mathbb{M}, \underline{p}, H^*)$, un p -idéal J et une sous-catégorie X^* de $\widehat{p_i}$.

2) Une catégorie K^* , un idéal I de K^* et une sous-catégorie K'^* de K^* .

3) Un foncteur D de $K'^* \times K^*$ vers H^* tel que $p.D$ soit une restriction de Hom_{K^*} .

Nous désignons par $\mathbb{K}(K^*, I)$ la catégorie des morphismes entre complexes de (K^*, I) (voir [11]), par $\mathbb{E}(K^*, I)$ la catégorie $K^* \times \mathbb{K}(K^*, I)^*$ par C^n , Z^n et B^n respectivement les foncteurs n -cochaînes, n -cocycles et n -cobords de (K^*, I) , qui sont [11] des foncteurs de $\mathbb{E}(K^*, I)$ vers $\mathbb{M}$, pour tout entier $n > 0$. Soit

$$\mathbb{E}' = \mathbb{E}'(K^*, I) = K'^* \times \mathbb{K}(K^*, I)^*.$$

On définit un foncteur, noté $\overline{C}^n$, de $\mathbb{E}'$ vers H^* en posant :

$$\begin{aligned} \overline{C}^n(k', (E', \tau, E)) &= D(k', \tau(n)) \\ \text{si } k' \in K' \text{ et } (E', \tau, E) &\in \mathbb{K}(K^*, I). \end{aligned}$$

DEFINITION. On appelle *foncteur de quasi-cohomologie d'ordre n pour (X, J, D, I)* un foncteur $\overline{H}^n$ de $\mathbb{E}'$ vers H^* vérifiant les conditions suivantes, où $\sigma \in \mathbb{E}'_0$:

1) Il existe des triplets définissant des transformations naturelles $(\overline{C}^n, b, \overline{Z}^n)$ et $(\overline{C}^n, b', \overline{B}^n)$ tels que $b(\sigma)$ et $b'(\sigma)$ soient (p, X, H) engendrés respectivement par $(C^n(\sigma), \iota, Z^n(\sigma))$ et par $(C^n(\sigma), \iota, B^n(\sigma))$.

2) Il existe un triplet définissant une transformation naturelle $(\overline{H}^n, m', \overline{Z}^n)$ tel que $m'(\sigma)$ soit une p -quasi-surjection définissant $\overline{H}^n(\sigma)$ comme J -structure quasi-quotient de $\overline{Z}^n(\sigma)$ par $\overline{B}^n(\sigma)$.

On dira que p est X -propre (resp. est propre) pour la quasi-cohomologie si, lorsque J, D et I vérifient les conditions 1, 2, 3, il existe un foncteur de quasi-cohomologie d'ordre n pour (X, J, D, I) (resp. pour

$(\bar{p}_i, J, D, I))$ pour tout entier $n > 0$.

PROPOSITION 18. Si $\bar{H}_i^n$ est un foncteur de quasi-cohomologie d'ordre n pour (X, J, D, I) , où $i = 1$ ou 2 , il existe une équivalence naturelle de $\bar{H}_1^n$ vers $\bar{H}_2^n$.

DEMONSTRATION. Soient $(\bar{C}^n, h_i, \bar{Z}_i^n)$ et $(\bar{C}^n, h'_i, \bar{B}_i^n)$ les triplets intervenant dans la définition du foncteur $\bar{H}_i^n$. Soit $\sigma \in \mathfrak{E}'_0$. On a

$$h_i(\sigma) \in \bar{C}^n(\sigma).X.\bar{Z}_i^n(\sigma) \quad \text{et} \quad h'_i(\sigma) \in \bar{C}^n(\sigma).X.\bar{B}_i^n(\sigma);$$

$h_i(\sigma)$ et $h'_i(\sigma)$ étant (p, X, H) -engendrés par $(C^n(\sigma), \iota, Z^n(\sigma))$ et $(C^n(\sigma), \iota, B^n(\sigma))$ respectivement, il existe

$$\gamma'(\sigma) \in \bar{B}_2^n(\sigma).H_\gamma^*.\bar{B}_1^n(\sigma) \quad \text{et} \quad \gamma(\sigma) \in \bar{Z}_2^n(\sigma).H_\gamma^*.\bar{Z}_1^n(\sigma)$$

tels que

$$h_2(\sigma).\gamma(\sigma) = h_1(\sigma) \quad \text{et} \quad h'_2(\sigma).\gamma'(\sigma) = h'_1(\sigma).$$

Comme $B^n(\sigma) \subset Z^n(\sigma)$, on a $B^n(\sigma) \subset \beta(h_i(\sigma))$, et par suite, par définition d'un morphisme (p, X, H) -engendré, il existe

$$m_i(\sigma) \in \bar{Z}_i^n(\sigma).H.\bar{B}_i^n(\sigma) \quad \text{tel que} \quad h_i(\sigma).m_i(\sigma) = h'_i(\sigma).$$

Les relations

$$\begin{aligned} h_2(\sigma).\gamma(\sigma).m_1(\sigma) &= h_1(\sigma).m_1(\sigma) = h'_1(\sigma) = h'_2(\sigma).\gamma'(\sigma) = \\ &= h_2(\sigma).m_2(\sigma).\gamma'(\sigma) \end{aligned}$$

entraînent

$$q = (\gamma(\sigma), m_2(\sigma), m_1(\sigma), \gamma'(\sigma)) \in \square H^*,$$

car $h_2(\sigma) \in R_g(H^*)$. Par définition de $\bar{H}_i^n(\sigma)$, il existe une J -suite quasi-exacte courte $(m'_i(\sigma), m_i(\sigma))$ telle que $\beta(m'_i(\sigma)) = \bar{H}_i^n(\sigma)$. La proposition 44, chap. III, C.S., affirme que, en posant $M^* = \square H^*$, il existe une $(R_d(M^*), R_g(M^*), M^*, \square(H^*; J, H))$ -suite exacte courte (q', q) telle que

$$q' = (\gamma''(\sigma), m'_2(\sigma), m'_1(\sigma), \gamma(\sigma)) \in \square(H^*; H, H_\gamma^*).$$

Comme $\bar{Z}_1^n$ et $\bar{Z}_2^n$ sont deux $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}^i, p)$ -sous-foncteurs de $\bar{C}^n$, le triplet $(\bar{Z}_2^n, \gamma, \bar{Z}_1^n)$ définit une équivalence naturelle. Les foncteurs $\bar{H}_1^n$ et

$\bar{H}_2^n$ sont équivalents, car ce sont deux $\mathcal{N}(R_d(H^*), H^*)$ -foncteurs quotient de $\bar{Z}_1^n$. En effet, pour tout $u \in \sigma' \cdot \mathbb{E}' \cdot \sigma$, on trouve :

$$\begin{aligned} \bar{H}_2^n(u) \cdot \gamma''(\sigma) \cdot m'_1(\sigma) &= \bar{H}_2^n(u) \cdot m'_2(\sigma) \cdot \gamma'(\sigma) = \\ &= m'_2(\sigma') \cdot \bar{Z}_2^n(u) \cdot \gamma'(\sigma) = \\ &= m'_2(\sigma') \cdot \gamma'(\sigma') \cdot \bar{Z}_1^n(u) = \\ &= \gamma''(\sigma') \cdot m'_1(\sigma') \cdot \bar{Z}_1^n(u) = \\ &= \gamma''(\sigma') \cdot \bar{H}_1^n(u) \cdot m'_1(\sigma), \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{H}_2^n(u) \cdot \gamma''(\sigma) = \gamma''(\sigma') \cdot \bar{H}_1^n(u).$$

Ceci montre que $(\bar{H}_2^n, \gamma'', \bar{H}_1^n)$ est un triplet définissant une équivalence naturelle. ■

PROPOSITION 19. Soit $\bar{H}^n$ un foncteur de quasi-cohomologie d'ordre n pour (p_l^-, J, D, I) , $\bar{Z}^n$ et $\bar{B}^n$ les foncteurs correspondants. Pour que $\bar{H}^n$ soit un foncteur de cohomologie [11] pour (H, J, D, I) , il faut et il suffit que, pour tout $\sigma \in \mathbb{E}'_o$, on ait

$$p(\bar{Z}^n(\sigma)) = Z^n(\sigma) \quad \text{et} \quad p(\bar{H}^n(\sigma)) = Z^n(\sigma) / \bar{r},$$

où $\bar{r}$ est la relation d'équivalence p -compatible engendrée par la relation $r(m)$ associée au p -monomorphisme $m \in \bar{Z}^n(\sigma)$, $p_l^-, \bar{B}^n(\sigma)$ canonique.

En effet, ces conditions sont nécessaires. Si elles sont vérifiées $\bar{H}^n(\sigma)$ est une (p, J) -structure quotient de $\bar{Z}^n(\sigma)$ par $\bar{B}^n(\sigma)$ d'après la proposition 16. ■

Soient $\mathbb{M}_o \subset \hat{\mathbb{M}}_o$ deux univers tels que $\mathbb{M}_o \in \hat{\mathbb{M}}_o$; désignons par $\mathbb{M}$ et $\hat{\mathbb{M}}$ les catégories pleines d'applications correspondantes. Soit $P = (\mathbb{M}, \bar{P}, \hat{H}^*)$ un foncteur d'homomorphismes résolvant à droite et $\hat{\pi}$ -compatible. Supposons que $p = (\mathbb{M}, p_l, H^*)$ soit une restriction de P telle que $H = \bar{P}^{-1}(\mathbb{M}) \in \hat{\mathbb{M}}_o$. Soit $\mathcal{U}(\bar{p})$ l'une des sous-catégories de la catégorie $\mathcal{F}(\bar{p})$ des foncteurs p -structurés : $\mathcal{F}(\bar{p})$, $\mathcal{F}_g(\bar{p})$, $\mathcal{G}(\bar{p})$ ou $\mathcal{G}'(\bar{p})$ considérées dans le n° 3 [1]; le foncteur projection canonique de $\mathcal{U}(\bar{p})$ vers $\mathbb{M}$ est noté $\hat{p}_{\mathcal{U}}$. Soit $X_{\mathcal{U}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}(\bar{p})$ formée

des $\hat{p}\mathcal{U}$ -monomorphismes

$$\bar{b} = (C^*, b, G^*) \in (\hat{p}\mathcal{U})_i^{\sim} \text{ tels que } b \in p_i^{\sim} \text{ (voir n}^\circ 3 [1]).$$

THEOREME 4. Si P est $\mathcal{P}$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$, alors p est propre pour la quasi-cohomologie; si P est $(\mathfrak{M}, \mathcal{U})$ -résolvant (déf. 1-3 [1]), $\hat{p}\mathcal{U}$ est $X\mathcal{U}$ -propre pour la quasi-cohomologie.

DEMONSTRATION. Supposons que P soit $\mathcal{P}$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$. Soient J, D, I vérifiant les conditions 1, 2, 3, p. 46. D'après la proposition 13, il existe des $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}^i, p, H)$ -sous-foncteurs $\bar{Z}^n$ et $\bar{B}^n$ de $\bar{C}^n$ engendrés par Z^n et B^n respect., car p est $\mathcal{P}$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$ (prop. 12). Soit

$$\sigma \in \mathbb{S}'_0, \quad S = \bar{Z}^n(\sigma) \quad \text{et} \quad s = \bar{B}^n(\sigma);$$

désignons par m le p -monomorphisme canonique $m \in S, p_i^{\sim}, s$. Le théorème 2 (ou le th. 1-2 [1]) implique qu'il existe une p -quasi-surjection m' définissant une p -structure quasi-quotient s' de S par $r(m)$. D'après la proposition 17, (m', m) est une $(R_d(H^*), R_g(H^*), H^*, J)$ -suite exacte courte. Comme $\bar{B}^n$ est aussi un $\mathfrak{N}(R_g(H^*), H^*)$ -sous-foncteur de $\bar{Z}^n$, on sait (cor. prop. 49*, chap. III, C.S.) qu'il existe un $\mathfrak{N}(R_d(H^*), H^*)$ -foncteur quotient $\bar{H}^n$ de $\bar{Z}^n$ tel que $\bar{H}^n(\sigma) = s'$. Ainsi $\bar{H}^n$ est un foncteur de quasi-cohomologie pour $(p_i^{\sim}, J, D, I)$, de sorte que p est propre pour la quasi-cohomologie. - Supposons que P soit $(\mathfrak{M}, \mathcal{U})$ -résolvant (déf. 1-3 [1]) et soit $\bar{J}$ un $\hat{p}\mathcal{U}$ -idéal. La démonstration de la proposition 13 montre que $X\mathcal{U}$ vérifie la condition B de la proposition 13 relativement à $\hat{p}\mathcal{U}$. Soit $\bar{b} \in X\mathcal{U}$. D'après le théorème 1-3 [1], il existe une $\hat{p}\mathcal{U}$ -structure quasi-quotient de $\beta(\bar{b})$ par la relation $r(\bar{b})$ associée au $\hat{p}\mathcal{U}$ -idéal $\bar{J}$, c'est-à-dire il existe une $\bar{J}$ -suite quasi-exacte courte $(\bar{k}, \bar{b})$. Il en résulte qu'une démonstration analogue à celle qui précède montre que $\hat{p}\mathcal{U}$ est $X\mathcal{U}$ -propre pour la quasi-cohomologie. ■

COROLLAIRE 1. Si P est $\mathcal{P}$ -étalant, il existe un foncteur de cohomologie pour (H, J, D, I) quel que soit le p -idéal J ; de plus $\hat{p}\mathcal{U}$ est propre pour la quasi-cohomologie.

En effet, dans la démonstration précédente, on peut choisir S et s

tels que $p(S) = Z^n(\sigma)$, $p(s) = B^n(\sigma)$ et $m \in p_i^-$; en vertu du corollaire du théorème 2-2 [1], on peut prendre pour $H^n(\sigma)$ une p -structure quotient faible de S par $r(m)$, à savoir la p -structure quotient de S par la relation d'équivalence p -compatible engendrée par $r(m)$. Ceci signifie (prop. 16) que $\bar{H}^n(\sigma)$ est une (p, J) -structure quotient de S par s , de sorte que $\bar{H}^n$ est, d'après la proposition 19, un foncteur de cohomologie pour (H, J, D, I) . D'après le théorème 4, $\hat{p}\mathcal{U}$ est $X\mathcal{U}$ -propre pour la quasi-cohomologie. Mais $X\mathcal{U} = (\hat{p}\mathcal{U})_i^-$, car p est $\sim$ -étalant. Le corollaire en résulte. ■

COROLLAIRE 2. Si P est un foncteur d'homomorphismes saturé dénombrablement engendrant pour $\mathcal{M}$ (déf. 1-5 [1]), alors p est propre pour la quasi-cohomologie et $\hat{p}\mathcal{U}$ est $X\mathcal{U}$ -propre pour la quasi-cohomologie.

En effet, d'après le théorème 1-5 [1], P est $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$ -résolvant, de sorte que le corollaire 2 se déduit immédiatement du théorème 4.

EXEMPLES.

1) Si $p = p\mathcal{J}$ ou p_Ω , il existe un foncteur de cohomologie pour (H, J, D, I) pour tout p -idéal J et $\hat{p}\mathcal{U}$ est propre pour la quasi-cohomologie, p étant $\sim$ -étalant. Si $p = p\mathcal{J}$ ou $p\mathcal{H}_*$, alors p et $\hat{p}\mathcal{U}$ sont propres pour la quasi-cohomologie.

2) Si $p = p\mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est l'une des catégories $\mathcal{J}^{ps}$, $\mathcal{J}^{fs}$ ou $\mathcal{J} \cup \langle \text{n}^\circ 5 \rangle$ [1], p est propre pour la quasi-cohomologie et $\hat{p}\mathcal{U}$ est $X\mathcal{U}$ -propre pour la quasi-cohomologie, car P est dénombrablement engendrant pour $\mathcal{M}$, en vertu des théorèmes 3-5 et 4-5 [1].

II. ADJONCTION DE LIMITES À UNE CATÉGORIE.

Dans toute cette partie, nous désignons par $\mathcal{M}_o$ et par $\hat{\mathcal{M}}_o$ deux univers, $\mathcal{M}_o \subset \hat{\mathcal{M}}_o$, $\mathcal{M}_o \in \hat{\mathcal{M}}_o$, par $\mathcal{M}$ et $\hat{\mathcal{M}}$ les catégories pleines d'applications correspondantes, par $\mathcal{F}$ et $\hat{\mathcal{F}}$ les catégories des foncteurs associées.

1. Adjonction de limites projectives.

Soient C^* et I^* deux catégories. Nous notons $\mathcal{N}(C^*, I^*)^{\square}$ la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de I^* vers C^* dont nous identifions la classe des unités à la classe des foncteurs de I^* .

vers C^* ; de plus la sous-catégorie de $\mathfrak{N}(C^*, I^*)^{\square}$ formée des transformations naturelles qui sont des foncteurs de I^* vers la catégorie latérale $\square C^*$, constants sur une unité de $\square C^*$, est notée $\hat{C}^* \cdot I^*$; elle est isomorphe à C^* .

Soit $\Phi = (C^*, \Phi, I^*)$ un foncteur. Si Φ admet une limite projective e , et si p_i est, pour tout $i \in I^*_0$, la projection canonique de e vers $\Phi(i)$, le $(\mathfrak{N}(C^*, I^*)^{\square}, \hat{C}^* \cdot I^*)$ -éjecteur correspondant à cette limite est la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, où $\hat{e}$ est le foncteur de I^* vers C^* constant sur e et où $\tau(i) = p_i$ pour tout $i \in I^*_0$.

Nous supposons donnée une classe $\mathfrak{J}$ de catégories telle que $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{F}_0$ et que la catégorie « vide » n'appartienne pas à $\mathfrak{J}$ (restriction supprimée à la fin du § 2).

Si C^* est une catégorie, nous appellerons *application $\mathfrak{J}$ -limite projective partielle sur C^** une application ν qui associe, à certains foncteurs Φ de $I^* \in \mathfrak{J}$ vers C^* admettant une limite projective, un $(\mathfrak{N}(C^*, I^*)^{\square}, \hat{C}^* \cdot I^*)$ -éjecteur $\nu(\Phi)$. Si une telle application ν est choisie, nous désignons par $\text{Lim}^\nu \Phi \in C^*_0$ la limite projective de Φ déterminée par la source de $\nu(\Phi)$, par $p_i^\nu(\Phi)$ sa projection canonique vers $\Phi(i)$. Si

$$\Psi \in \Phi \square \mathfrak{N}(C^*, I^*) \quad \text{et} \quad \alpha^{\square}(\psi) \in \hat{C}^* \cdot I^*,$$

l'unique élément $b \in C$ tel que

$$\nu(\Phi) \square \hat{b} = \Psi,$$

où $\hat{b}$ est l'élément de $\hat{C}^* \cdot I^*$ déterminé par b , est désigné par $\text{lim}^\nu \Psi$. Si aucune confusion n'est possible, les exposants ν seront supprimés.

Si C^* est une catégorie à $\mathfrak{J}$ -limites projectives, nous appellerons *application $\mathfrak{J}$ -limite projective sur C^** une application $\mathfrak{J}$ -limite projective partielle ν sur C^* telle que $\nu(\Phi)$ soit défini pour tout foncteur $\Phi = (C^*, \Phi, I^*)$, où $I^* \in \mathfrak{J}$. Le foncteur vers C^* de la catégorie somme des catégories $\mathfrak{N}(C^*, I^*)^{\square}$, où $I^* \in \mathfrak{J}$, déterminé canoniquement par ν , est noté Lim^ν , et dit *foncteur limite projective associé à ν* .

Soit $\mathfrak{F}^{\mathfrak{J}}$ la classe des triplets $((\hat{C}^*, \hat{\nu}), \underline{F}, (C^*, \nu))$ tels que
 $1^\circ) F = (\hat{C}^*, \underline{F}, C^*) \in \mathfrak{F}$;

2°) ν et $\hat{\nu}$ sont des applications $\mathcal{J}$ -limite projective partielles sur $C^\bullet$ et sur $\hat{C}^\bullet$ respectivement; si $\Phi \in C^\bullet \cdot \mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ et si $\nu(\Phi)$ est défini, $\hat{\nu}(F, \Phi)$ est défini et

$$\hat{\nu}(F, \Phi) = \prod F, \nu(\Phi).$$

$\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ est une catégorie pour la loi de composition

$$((\hat{C}'^\bullet, \hat{\nu}'), \underline{F'}, (C'^\bullet, \nu')) \cdot ((\hat{C}^\bullet, \hat{\nu}), \underline{F}, (C^\bullet, \nu)) = ((\hat{C}'^\bullet, \hat{\nu}'), \underline{F'F}, (C^\bullet, \nu))$$

si, et seulement si, $(C'^\bullet, \nu') = (\hat{C}^\bullet, \hat{\nu})$.

Nous identifions la classe de ses unités à la classe des couples $(C^\bullet, \nu)$, où $C^\bullet \in \mathcal{F}_o$ et ν est une application $\mathcal{J}$ -limite projective partielle sur $C^\bullet$. Soit $\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ ayant pour unités les couples $(C^\bullet, \nu)$ tels que ν soit une application $\mathcal{J}$ -limite projective (partout définie) sur $C^\bullet$.

1 Soit $p \cdot \mathcal{J}$ le foncteur de $\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ vers $\mathcal{F}$ défini par la surjection

$$((\hat{C}^\bullet, \hat{\nu}), \underline{F}, (C^\bullet, \nu)) \rightarrow (\hat{C}^\bullet, \underline{F}, C^\bullet).$$

Soient $q \cdot \mathcal{J}$ et $q \cdot \mathcal{J}$ les foncteurs projection canonique vers $\mathcal{M}$ de $\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ et de $\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ respectivement. Soient $P \cdot \mathcal{J}$, $Q \cdot \mathcal{J}$ et $Q \cdot \mathcal{J}$ les foncteurs de $\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ vers $\mathcal{F}$, de $\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ vers $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ vers $\mathcal{M}$ définis de même à partir de l'univers $\mathcal{M}_o$.

PROPOSITION 20. $\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$ est une catégorie à $\mathcal{M}_o$ -produits; $p \cdot \mathcal{J}$ et $(\mathcal{F} \cdot \mathcal{J}, \iota, \mathcal{F} \cdot \mathcal{J})$ sont des foncteurs à $\mathcal{M}_o$ -limites projectives. $Q \cdot \mathcal{J}$ est un foncteur $\wedge$ -engendrant pour $\mathcal{M}$.

2 DEMONSTRATION. Soit $J \in \mathcal{M}_o$ et supposons

$$(C_j^\bullet, \nu_j) \in \mathcal{F}_o \cdot \mathcal{J} \quad \text{pour tout } j \in J.$$

Désignons par $C^\bullet$ la catégorie $\prod_{j \in J} C_j^\bullet$; par F_j le foncteur projection canonique de $C^\bullet$ vers $C_j^\bullet$. Soit $\Phi = (C^\bullet, \underline{\Phi}, I^\bullet) \in \mathcal{F} \cdot \mathcal{J}$. On sait que Φ admet une limite projective si, et seulement si, $F_j \cdot \Phi$ en admet une pour tout $j \in J$; dans ce cas, $(\text{Lim}^{\nu_j} F_j \cdot \Phi)_{j \in J}$ est une limite projective $\text{Lim}^{\nu} \Phi$ de Φ , dont la i -ème projection canonique est $(p_i^{\nu_j}(F_j \cdot \Phi))_{j \in J}$. Soit $\nu(\Phi)$ le $(\mathcal{M}(C^\bullet, I^\bullet) \prod, \hat{C}^\bullet, I^\bullet)$ -éjecteur correspondant; on a

$$\nu(\Phi) = [\nu_j(F_j \cdot \Phi)]_{j \in J}$$

dans la catégorie latérale des transformations naturelles $\mathfrak{N}^\diamond$. L'application $\Phi \rightarrow \nu(\Phi)$ si, et seulement si, $\nu_j(\Phi)$ est défini pour tout $j \in J$ est une application $\mathfrak{J}$ -limite projective partielle ν sur $C^\cdot$. Il est évident que $(C^\cdot, \nu)$ est un produit de $((C_j^\cdot, \nu_j))_{j \in J}$ dans $\mathfrak{F}^\mathfrak{J}$. Donc $q^\mathfrak{J}$ est un foncteur à $\mathfrak{M}_o$ -produits. - Si de plus $(C_j^\cdot, \nu_j) \in \mathfrak{F}_o^\mathfrak{J}$ pour tout $j \in J$, on a

$$(C^\cdot, \nu) \in \mathfrak{F}^\mathfrak{J},$$

de sorte que $(\mathfrak{F}^\mathfrak{J}, \iota, \mathfrak{F}^\mathfrak{J})$ et $p^\mathfrak{J}$ sont des foncteurs à $\mathfrak{M}_o$ -produits.

- Nous supposons

$$\hat{F} = ((\hat{C}^\cdot, \hat{\nu}), F, (C^\cdot, \nu)) \in \mathfrak{F}^\mathfrak{J} \quad \text{et} \quad \hat{F}' = ((\hat{C}^\cdot, \hat{\nu}), \underline{F}', (C^\cdot, \nu)) \in \hat{\mathfrak{F}}^\mathfrak{J};$$

posons $F = p^\mathfrak{J}(\hat{F})$ et $F' = p^\mathfrak{J}(\hat{F}')$ et notons $N^\cdot$ le noyau de (F, F') dans $\mathfrak{F}$. Soit $\Phi = (N^\cdot, \Phi, I^\cdot) \in \mathfrak{F}^\mathfrak{J}$; le foncteur $\Phi' = (C^\cdot, \Phi, I^\cdot)$ admet une limite projective. Comme $F \cdot \Phi' = F' \cdot \Phi'$, on trouve

$$\Box F \cdot \nu(\Phi') = \hat{\nu}(F \cdot \Phi') = \hat{\nu}(F' \cdot \Phi') = \Box F' \cdot \nu(\Phi'),$$

d'où

$$\lim^\nu \Phi' \in N \quad \text{et} \quad p_i^\nu(\Phi') \in N \quad \text{pour tout} \quad i \in I^\cdot.$$

Si $\Psi \in \mathfrak{N}(N^\cdot, I^\cdot)$ et $\alpha^{\Box}(\Psi) \in \hat{N}^\cdot \cdot I^\cdot$, on a de même $\Box F \cdot \Psi' = \Box F' \cdot \Psi'$, où $\Psi' = (\Box C^\cdot, \Psi, I^\cdot)$. Il s'ensuit $\lim^\nu \Psi \in N$, car

$$F(\lim^\nu \Psi) = \lim^{\hat{\nu}} (\Box F \cdot \Psi') = F'(\lim^\nu \Psi).$$

Par suite l'application qui associe à Φ la transformation naturelle

$$(\Box N^\cdot, \nu(\Phi'), I^\cdot)$$

est une application $\mathfrak{J}$ -limite projective sur $N^\cdot$, notée ν' . On a

$$m = ((C^\cdot, \nu), \iota, (N^\cdot, \nu')) \in \mathfrak{F}^\mathfrak{J}.$$

Ainsi m est un noyau de $(\hat{F}, \hat{F}')$ dans $\mathfrak{F}^\mathfrak{J}$, dans $\mathfrak{F}^\mathfrak{J}$ et dans $p^\mathfrak{J}$. Donc les foncteurs $(\mathfrak{F}^\mathfrak{J}, \iota, \mathfrak{F}^\mathfrak{J})$ et $p^\mathfrak{J}$ sont à noyaux. D'après la proposition 1, ces foncteurs sont aussi à $\mathfrak{M}_o$ -limites projectives, puisque nous avons montré plus haut qu'ils sont à $\mathfrak{M}_o$ -produits.

- Enfin, montrons que $Q^\mathfrak{J}$ est $\sim$ -engendrant pour $\hat{\mathfrak{M}}$. En effet, supposons

$$(C^\cdot, \nu) \in \hat{\mathfrak{F}}_o^\mathfrak{J}, \quad M \subset C \quad \text{et} \quad M \neq \emptyset.$$

Disons qu'une sous-catégorie $H^\cdot$ de $C^\cdot$ est stable pour ν si les conditions

$$\Phi = (C^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot) \in \hat{\mathcal{F}}. \mathcal{J} \quad \text{et} \quad \Phi(I) \subset H$$

entraînent $p_i^\nu(\Phi) \in H$ pour tout $i \in I_0^\cdot$, et si l'on a $\lim^\nu \Psi \in H$ lorsque

$$\Psi = (\square C^\cdot, \underline{\Psi}, I^\cdot) \in \hat{\mathcal{F}}. \mathcal{J}, \quad \alpha^\square(\Psi) \in \hat{C}^\cdot I^\cdot \quad \text{et} \quad \Psi(I) \subset \square H^\cdot.$$

Dans ce cas, $H^\cdot$ est une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives. La sous-catégorie $\hat{H}^\cdot$ de $C^\cdot$ intersection des sous-catégories $H^\cdot$ de $C^\cdot$ stables pour ν et contenant M est évidemment stable pour ν . C'est donc une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives, admettant pour application $\mathcal{J}$ -limite projective l'application $\hat{\nu}$ telle que $\hat{\nu}(\Phi) = (\square \hat{H}^\cdot, \underline{\nu(\hat{\Phi})}, I^\cdot)$, où

$$\hat{\Phi} = (C^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot), \quad \text{si} \quad \Phi = (\hat{H}^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot) \in \mathcal{F}. \mathcal{J}.$$

Par suite $(\hat{H}^\cdot, \hat{\nu}) \in \hat{\mathcal{F}}_0^\mathcal{J}$. Pour que $(K^\cdot, \nu')$ soit une $Q^\mathcal{J}$ -sous-structure de $(C^\cdot, \nu)$, il faut et il suffit que la sous-catégorie $K^\cdot$ soit stable pour ν . On en déduit que $(\hat{H}^\cdot, \hat{\nu})$ est la $Q^\mathcal{J}$ -sous-structure de $(C^\cdot, \nu)$ engendrée par M . ■

1 COROLLAIRE. Tout élément de $\mathcal{F}^\mathcal{J}$ admet une $(\mathcal{F}^\mathcal{J}, \hat{\mathcal{F}}^\mathcal{J}, \hat{\mathcal{F}}^\mathcal{J})$ -projection.

DEMONSTRATION. Soit $e = (C^\cdot, \nu) \in \mathcal{F}^\mathcal{J}$ et $U = \mathcal{F}_0^\mathcal{J}. \mathcal{F}^\mathcal{J}. e$. Alors U est une $\mathfrak{M}_0$ -classe et, $\hat{\mathcal{F}}^\mathcal{J}$ étant une catégorie à $\mathfrak{M}_0$ -produits (prop. 20), e vérifie la condition P_e relativement au foncteur $P = (\mathcal{F}^\mathcal{J}, \iota, \hat{\mathcal{F}}^\mathcal{J})$ (3-I). Soit

$$\hat{F} = ((\hat{C}^\cdot, \hat{\nu}), F, (C^\cdot, \nu)) = [\hat{F}_b]_{b \in U}.$$

La classe $F(C)$ engendre une $Q^\mathcal{J}$ -sous-structure $(N^\cdot, \hat{\nu}')$ de $(\hat{C}^\cdot, \hat{\nu})$, d'après la proposition 20; l'élément $((\hat{C}^\cdot, \hat{\nu}), \iota, (N^\cdot, \hat{\nu}'))$ est un morphisme $(P, \hat{\mathcal{F}}^\mathcal{J}, \hat{\mathcal{F}}^\mathcal{J})$ -engendré par $\hat{F}$. Ainsi les conditions du théorème 1 sont vérifiées, de sorte que $(N^\cdot, \hat{\nu}')$ est une $(\mathcal{F}^\mathcal{J}, \hat{\mathcal{F}}^\mathcal{J}, \hat{\mathcal{F}}^\mathcal{J})$ -projection de $(C^\cdot, \nu)$. ■

A. THEOREME DE COMPLETION PROJECTIVE RELATIVE.

DEFINITION. Soient $(C^\cdot, \nu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^\mathcal{J}$ et $M \subset C$. La $Q^\mathcal{J}$ -sous-structure $(\hat{M}^\cdot, \hat{\nu})$ de $(C^\cdot, \nu)$ engendrée par M (prop. 20) est appelée complétion $\mathcal{J}$ -projective de M dans $(C^\cdot, \nu)$.

REMARQUE. Cette définition précise la notion de complétion gauche considérée dans [12].

Dans la suite de ce §, nous désignons par $\tilde{\mathfrak{M}}$ et par $\tilde{\mathcal{F}}$ les saturantes respectivement de $\mathfrak{M}$ dans $\tilde{\mathfrak{M}}$ et de $\mathcal{F}$ dans $\tilde{\mathcal{F}}$. On sait que $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ est un univers; un élément de $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ est dit une $\mathfrak{M}_0$ -classe. Nous supposons que $\mathcal{I}$ est une partie de $\mathcal{F}_0$ telle que $\mathcal{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. Le symbole I^* représentera toujours un élément de $\mathcal{I}$. Nous notons $\mathcal{U}$ un univers tel que $\mathcal{U} \subset \tilde{\mathfrak{M}}_0$; une $\mathcal{U}$ -catégorie [2] est une catégorie H^* telle que $e' \cdot H \cdot e$ soit une $\mathcal{U}$ -classe pour tout couple (e', e) d'unités de H^* .

THEOREME 5. Supposons $\mathcal{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, $(C^*, \nu) \in \tilde{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{I}}$ et $M \subset C$. Soit $(\hat{M}^*, \hat{\nu})$ la complétion $\mathcal{I}$ -projective de M dans (C^*, ν) . Si $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, on a $\hat{M} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$. Si M^* est une sous-catégorie de C^* , si Lim^ν est injectif et si $\text{Lim}^\nu \Phi \notin M$ quel que soit $\Phi \in C^* \cdot \tilde{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{I}$, alors M^* est pleine dans $\hat{M}^*$; si de plus M^* est une $\mathcal{U}$ -catégorie et si $\text{pq}(\mathcal{I}) \subset \mathcal{U}$, la catégorie $\hat{M}^*$ est aussi une $\mathcal{U}$ -catégorie.

DEMONSTRATION. Si V est une classe, nous notons $\bar{V}$ son cardinal. Si λ est un ordinal, nous désignons par $\bar{\lambda}$ le cardinal $\bar{A}$, où $(A, <)$ est un ensemble bien ordonné de type λ [13]. Inversement, si n est un cardinal, soit $\bar{n}$ l'ordinal borne supérieure (dans la classe ordonnée des ordinaux) de la classe des ordinaux λ tels que $\bar{\lambda} < n$; en particulier, si V est une classe, nous posons $\bar{V} = \bar{n}$, où $n = \bar{V}$. A un ordinal λ est aussi associé [13] l'ordinal initial ω_λ d'indice λ , tel que $\bar{\omega}_\lambda$ soit l'aleph d'indice λ . Dire que $\mathfrak{M}_0$ est un univers entraîne que l'ordinal Λ , borne supérieure de la classe des ordinaux $\bar{V}$, où $V \in \mathfrak{M}_0$, est inaccessible au sens de Tarski [13]; il s'ensuit $\omega_\Lambda = \Lambda$. Remarquons que l'on a aussi

$$\Lambda = \sup_{V^* \in \tilde{\mathfrak{M}}_0} \bar{V}^*.$$

-Si $I^* \in \mathcal{I}$, on a $I \in \mathfrak{M}_0$, et par suite $\bar{I} < \Lambda$. Comme $\mathcal{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, on a

$$U = \bigcup_{I^* \in \mathcal{I}} I \in \mathfrak{M}_0, \quad \text{d'où} \quad \bar{I} \leq \bar{U} < \Lambda.$$

L'ordinal ω_Λ étant régulier [13], on en déduit

$$\lambda_{\mathfrak{g}} = \sup_{I \in \mathfrak{g}} \overline{I} \leq \overline{U} < \Lambda \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathfrak{g}} + 1 < \Lambda.$$

L'ordinal initial $\omega_{\lambda_{\mathfrak{g}}+1}$ est régulier, car son indice est de première espèce [13], et on a $\omega_{\lambda_{\mathfrak{g}}+1} < \omega_{\Lambda} = \Lambda$; nous poserons $\hat{\lambda} = \omega_{\lambda_{\mathfrak{g}}+1}$.

-Supposons $(C^*, \nu) \in \hat{\mathfrak{F}}_o^{\mathfrak{g}}$. Soit Lim le foncteur $\mathfrak{g}$ -limite projective Lim^{ν} associé à ν . Pour toute sous-catégorie B^* de C^* , nous construisons une sous-classe $\sigma^{\nu}(B)$ de C de la façon suivante :

Soit $\delta_B^{I^*}$ la classe des foncteurs $\Phi \in C^*, \hat{\mathfrak{F}}, I^*$ tels que $\Phi(I) \subset B$. Soit $\pi_B^{I^*}$ la classe de tous les éléments $p_i^{\nu}(\Phi)$ tels que $\Phi \in \delta_B^{I^*}$ et $i \in I_o^*$. Soit $\Delta_B^{I^*}$ la classe des transformations naturelles

$$\Psi \in \mathfrak{N}(C^*, I^*) \quad \text{telles que} \quad \alpha^{\square}(\Psi) \in \hat{B}^*, I^* \quad \text{et} \quad \Psi(I) \subset \square B^*.$$

On pose

$$\sigma^{\nu}(B) = B \cup \left(\bigcup_{I^* \in \mathfrak{g}} \pi_B^{I^*} \cup \text{lim}^{\nu}(\Delta_B^{I^*}) \right).$$

On définit une bijection g_B de $\sigma^{\nu}(B)$ sur une partie de

$$N = B \cup \bigcup_{I^* \in \mathfrak{g}} ((I \times B, \hat{\mathfrak{M}}, I) \cup (\square B^*, \hat{\mathfrak{M}}, I))$$

en posant

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_B(m) = m & \text{si } m \in B; \\ g_B(m) = (i, (B, \underline{\Phi}, I)) \in I \times B, \hat{\mathfrak{M}}, I & \text{si } m \notin B, \text{ si } m \in \pi_B^{I^*} \text{ et si} \\ & \text{l'on a choisi } i \in I_o^* \text{ et } \Phi \in \delta_B^{I^*} \\ & \text{tels que } m = p_i^{\nu}(\Phi); \\ g_B(m') = (\square B^*, \underline{\Psi}, I) \in \square B^*, \hat{\mathfrak{M}}, I & \text{si } g_B(m') \text{ n'est pas encore} \\ & \text{défini et si l'on a choisi} \\ & \Psi \in \Delta_B^{I^*} \text{ tel que } m' = \text{lim } \Psi. \end{array} \right.$$

Si $B \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, les relations $B \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, $I \in \mathfrak{M}_o$ et $\mathfrak{g} \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ entraînent

$$B, \hat{\mathfrak{M}}, I = B, \tilde{\mathfrak{M}}, I \in \tilde{\mathfrak{M}}_o, \quad \square B^*, \hat{\mathfrak{M}}, I \in \tilde{\mathfrak{M}}_o \quad \text{et} \quad N \in \tilde{\mathfrak{M}}_o,$$

car $\tilde{\mathfrak{M}}_o$ est un univers. Il s'ensuit

$$g_B(\sigma^{\nu}(B)) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o \quad \text{et} \quad \sigma^{\nu}(B) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o.$$

-Soit $M \subset C$. Pour tout ordinal $\lambda \leq \hat{\lambda}$, nous définissons par récurrence

transfinie une sous-catégorie $M_{\lambda}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ comme suit :

- 1°) $M_1^{\cdot}$ est la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ engendrée par M ;
 2°) Si $\lambda = \lambda' + 1$, alors $M_{\lambda}^{\cdot}$ est la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ engendrée par $\sigma^{\nu}(M_{\lambda'}^{\cdot})$;

3°) Si λ est de seconde espèce (i.e. n'a pas de prédécesseur), on pose $M_{\lambda} = \bigcup_{\xi < \lambda} M_{\xi}$. On a évidemment $M_{\xi} \subset M_{\xi'}$ si $\xi' < \xi$.
 $M_{\lambda}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $C^{\cdot}$. Nous allons montrer que $M_{\lambda}^{\cdot} = \hat{M}$, où $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{\nu})$ est la complétion $\mathcal{J}$ -projective de M dans $(C^{\cdot}, \nu)$. En effet, on a $M_{\lambda}^{\cdot} \subset \hat{M}$, car toute sous-catégorie de $C^{\cdot}$ stable pour ν et contenant M doit évidemment contenir $M_{\lambda}^{\cdot}$. D'après la proposition 20, il nous suffit de montrer que $M_{\lambda}^{\cdot}$ est stable pour ν . En effet, soit $\Phi \in C^{\cdot} \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot I^{\cdot}$ tel que $\Phi(I) \subset M_{\lambda}^{\cdot}$. Pour tout $k \in I$, il existe $\xi_k < \hat{\lambda}$ tel que $\Phi(k) \in M_{\xi_k}$. Puisque $\bar{I} < \hat{\lambda}$ et que $\hat{\lambda}$ est un ordinal initial régulier, la limite ξ de la suite transfinie $(\xi_k)_{k \in I}$ de type $\bar{I}$ vérifie la relation $\xi < \hat{\lambda}$, de sorte que l'on a $\Phi(k) \in M_{\xi}$ pour tout $k \in I$. Par suite $\Phi \in \delta_{M_{\xi}}^{I^{\cdot}}$ et, par construction, on a

$$p_i(\Phi) \in M_{\xi+1} \subset M_{\lambda}^{\cdot} \text{ pour tout } i \in I_0^{\cdot}.$$

Soit $\Psi \in \square C^{\cdot} \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{J}$ une transformation naturelle de $\hat{e}$ vers Φ telle que $\Psi(I) \subset \square M_{\lambda}^{\cdot}$, où $\hat{e}$ est le foncteur constant sur $e \in C_0^{\cdot}$. De même on trouve un ordinal ξ' tel que

$$\xi \leq \xi' < \hat{\lambda} \text{ et } \Psi(I) \subset \square M_{\xi'}^{\cdot}.$$

Il s'ensuit $\Psi \in \Delta_B^{I^{\cdot}}$, où $B = M_{\xi'+1}$, ce qui entraîne

$$\lim \Psi \in M_{\xi'+2} \subset M_{\lambda}^{\cdot}.$$

Donc $M_{\lambda}^{\cdot}$ est stable pour ν , d'où $M_{\lambda}^{\cdot} = \hat{M}$.

-Supposons $M \in \tilde{\mathcal{M}}_0$; on a $M_1 \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, car $P_{\mathcal{F}}$ est $\mathcal{M}$ -engendrant pour $\mathcal{M}[1]$. Supposons prouvé que $M_{\xi} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ pour tout $\xi < \lambda$, où $\lambda \leq \hat{\lambda}$. Si $\lambda = \lambda' + 1$, alors $M_{\lambda} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, car $M_{\lambda}^{\cdot}$ est la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ engendrée par $\sigma^{\nu}(M_{\lambda'}^{\cdot})$, qui appartient à $\tilde{\mathcal{M}}_0$ d'après le début de la démonstration. Si λ est de seconde espèce, on a $M_{\lambda} = \bigcup_{\xi < \lambda} M_{\xi}$, d'où

$$\bar{M}_{\lambda} \leq \sum_{\xi < \lambda} \bar{M}_{\xi} < \Lambda,$$

car Λ est régulier, $\bar{M}_\xi < \Lambda$ pour tout $\xi < \lambda$ et $\lambda \leq \hat{\lambda} < \Lambda$. Par définition de Λ , il existe $V \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ tel que $\bar{M}_\lambda < \bar{V}$; autrement dit, il existe une bijection de M_λ sur une partie de V ; ainsi on a $M_\lambda \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Par récurrence transfinie, on en déduit $M_{\hat{\lambda}} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Par conséquent, il existe un isomorphisme G de $\hat{M}$ sur une catégorie $S \in \mathcal{F}_0$.

- Dans la fin de cette démonstration, nous supposons que M est une sous-catégorie (quelconque) de C (donc $M = M_1$), que les relations $\text{Lim}^\nu \Phi = \text{Lim}^\nu \Phi'$ entraînent $\Phi = \Phi'$ et que $\text{Lim}^\nu \Phi \notin M$ pour tout $\Phi \in \delta_{M_{\hat{\lambda}}}^{I^*}$. Examinons la forme des éléments de M_λ pour un ordinal $\lambda = \lambda' + 1 < \hat{\lambda}$. Soit A_λ la classe des éléments $\text{lim } \Psi \in M_\lambda$ tels que

$$\Psi \in \bigcup_{I^* \in \mathcal{J}} \Delta_{M_{\lambda'}}^{I^*}, \quad \text{lim } \Psi \notin M_{\lambda'} \quad \text{et} \quad \alpha(\text{lim } \Psi) \in M_{\lambda'},$$

et soit A'_λ la classe des composés $m_n \dots m_1$ tels que

$$m_j \in A_\lambda \cup (M_{\lambda'})_o^* \quad \text{si} \quad 1 \leq j \leq n;$$

on a $A'_\lambda, A_\lambda \subset A'_\lambda$. Soit B_λ la classe des $m' \in M_\lambda$ tels que

$$m' \in \left(\bigcup_{I^* \in \mathcal{J}} \pi_{M_{\lambda'}}^{I^*} \right) \cup (M_\lambda)_o^* \quad \text{et} \quad m' \notin M_{\lambda'} - (M_{\lambda'})_o^*.$$

Si $m' = p_i(\Phi) \in B_\lambda$, on a $\alpha(m') = \text{Lim } \Phi$ et, par hypothèse, $\alpha(m') \notin M$.

Si l'on avait $\alpha(m') \in M_{\lambda'} - M$, il existerait $\xi < \lambda'$ tel que

$$\alpha(m') = \text{Lim } \Phi' \quad \text{et} \quad \Phi' \in \delta_{M_\xi}^{I^*}.$$

Il s'ensuivrait $\Phi = \Phi'$ et $m' \in M_{\xi+1} \subset M_{\lambda'}$, ce qui est impossible. Donc $m' \in B_\lambda$ entraîne $\alpha(m') \notin M_{\lambda'}$ ou $m' = \alpha(m') \in M_{\lambda'}$. Soit N_λ la classe des composés $m'' \dots m'$ tels que

$$m' \in B_\lambda, \quad m \in A'_\lambda \quad \text{et} \quad m'' \in M_{\lambda'} \cup (M_{\lambda'})_o^*.$$

Montrons que l'on a $M_\lambda = N_\lambda$. On a évidemment

$$\sigma^\nu(M_{\lambda'}) \cup (M_\lambda)_o^* \subset N_\lambda \subset M_\lambda.$$

Il nous suffit donc de prouver que N_λ est stable dans C . Pour cela, montrons d'abord que l'on a

$$(A'_\lambda - (M_\lambda)_o^*) \cdot M_{\lambda'} \subset A'_\lambda \cup M_{\lambda'}.$$

En effet, soient

$$m = m_n \dots m_1 \in A'_{\lambda} - (M_{\lambda})_0^{\circ} \quad \text{et} \quad m'' \in \alpha(m) \cdot M_{\lambda'}.$$

On peut se ramener au cas où

$$m_1 = \lim \Psi \in A_{\lambda}, \quad \text{avec} \quad \Psi \in \Delta_{M_{\lambda'}}^{I^*}.$$

Soit $(\Phi, \tau, \alpha(\widehat{m_1}))$ le triplet définissant la transformation naturelle Ψ . Si τ' désigne la surjection

$$i \rightarrow \tau(i), m'' \in M_{\lambda'} \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0^*,$$

le triplet $(\Phi, \tau', \alpha(\widehat{m''}))$ définit la transformation naturelle

$$\Psi' = \Psi \square \widehat{m''} \in \Delta_{M_{\lambda'}}^{I^*}$$

et on a

$$m_1 \cdot m'' = \lim \Psi' \in A_{\lambda} \cup M_{\lambda'}.$$

Il s'ensuit, par récurrence,

$$m \cdot m'' = (m_n \dots m_2) \cdot (m_1 \cdot m'') \in A'_{\lambda} \cup M_{\lambda'}.$$

Pour montrer que N_{λ} est stable supposons

$$f = m'' \cdot m \cdot m' \in N_{\lambda} \quad \text{et} \quad \tilde{f} = \tilde{m}'' \cdot \tilde{m} \cdot \tilde{m}' \in N_{\lambda} \cdot \beta(f).$$

Les seuls cas possibles sont les suivants :

1°) Soit $m'' \in M_{\lambda'}$; nous avons vu que $\tilde{m}' = \beta(m'')$, par définition de B_{λ} .

a) Si $\tilde{m} \in (M_{\lambda})_0^{\circ}$, on a

$$\tilde{f} \cdot f = (\tilde{m}'' \cdot m'') \cdot m \cdot m' \in N_{\lambda},$$

car $\tilde{m}'' \cdot m'' \in M_{\lambda'} \cdot M_{\lambda'} \subset M_{\lambda'}$;

b) Si $\tilde{m} \in A'_{\lambda} - (M_{\lambda})_0^{\circ}$, en utilisant le résultat précédent, on trouve

$$\tilde{m} \cdot m'' \in A'_{\lambda} \cdot M_{\lambda'} \subset A'_{\lambda} \cup M_{\lambda'} \subset M_{\lambda'} \cdot A'_{\lambda};$$

par suite $\tilde{m} \cdot m'' \cdot m \in M_{\lambda'} \cdot A'_{\lambda} \cdot A'_{\lambda} \subset M_{\lambda'} \cdot A'_{\lambda}$ et

$$\tilde{f} \cdot f = \tilde{m}'' \cdot (\tilde{m} \cdot \tilde{m}' \cdot m'' \cdot m) \cdot m' \in N_{\lambda}.$$

2°) Supposons $m'' \notin M_{\lambda'}$, c'est-à-dire $m'' \in (M_{\lambda})_0^{\circ} - (M_{\lambda'})_0^{\circ}$. Il s'ensuit $\alpha(\tilde{m}') \in M_{\lambda} - M_{\lambda'}$.

a) Si $\tilde{m}' = \alpha(\tilde{m}')$, on a $\alpha(\tilde{m}) \notin M_{\lambda'}$, d'où $\tilde{m} = \alpha(\tilde{m})$ par définition de A'_{λ} et $\tilde{f} = \alpha(\tilde{m})$ par construction de N_{λ} ; ainsi $\tilde{f}.f = f \in N_{\lambda}$.

b) Supposons $\tilde{m}' = p_i(\Phi) \notin M_{\lambda'}$. Si $m \in (M_{\lambda})_0^*$, on a aussi $m' \in (M_{\lambda})_0^*$, d'où

$$f \in (M_{\lambda})_0^* \quad \text{et} \quad \tilde{f}.f = \tilde{f} \in N_{\lambda}.$$

Sinon, m admet une décomposition $m_n \dots m_1 \in A'_{\lambda}$ dans laquelle

$$m_n = \lim \Psi \in (\lim \Phi).A_{\lambda}.M_{\lambda'}.$$

Puisque $\lim$ est injectif, on en déduit $\Phi = \alpha^{\square}(\Psi)$ et

$$\tilde{m}'.m_n = p_i(\Phi).\lim \Psi = \tau(i) \in M_{\lambda'},$$

en notant $(\Phi, \tau, \hat{e})$ le triplet définissant la transformation naturelle Ψ .

1) Si $\tilde{m} \in A'_{\lambda} - (M_{\lambda})_0^*$, on a

$$\tilde{m}, \tilde{m}', m_n \in A'_{\lambda}.M_{\lambda'} \subset M_{\lambda'}.A_{\lambda} \quad \text{et} \quad \tilde{m}, \tilde{m}', m \in M_{\lambda'}.A'_{\lambda}.$$

$$\text{donc} \quad \tilde{f}.f = \tilde{m}'' . (\tilde{m}, \tilde{m}', m), m' \in N_{\lambda}.$$

2) Si $\tilde{m} = \alpha(\tilde{m})$, à partir des relations

$$g = \tilde{m}'' . \tilde{m}, \tilde{m}' . m'' . m = \tilde{m}'' . \tilde{m}', m = (\tilde{m}'' . \tilde{m}' . m_n) . (m_{n-1} \dots m_1) \in M_{\lambda'}.A'_{\lambda},$$

on trouve encore

$$\tilde{f}.f = g.m' \in N_{\lambda}.$$

Nous avons donc montré que, dans tous les cas, on a $\tilde{f}.f \in N_{\lambda}$, ce qui assure que N_{λ} est stable dans C^* , et a fortiori définit une sous-catégorie de C^* ; autrement dit, $M_{\lambda} = N_{\lambda}$. - En particulier, soit $\lambda = 2$. Si $m = \lim \Psi \in A_2$, on a

$$\beta(m) = \lim \beta^{\square}(\Psi) \notin M,$$

de sorte que $A'_2 = A_2 \cup (M_2)_0^*$. Soit $f \in N_2 = M_2$; de la définition de N_2 et de A_2 , il résulte

$$f = m.m', \quad \text{où} \quad m' \in B_2 \quad \text{et} \quad m \in A_2 \cup M \cup (M_2)_0^*.$$

Si $\alpha(f) \in M_0^*$, cette relation entraîne

$$m' = \alpha(m'), \quad \text{d'où} \quad f \in A_2 \cup M;$$

si de plus $\beta(f) \in M$, on obtient $f \in M$. Donc M^* est une sous-catégorie pleine de M_2^* .

-Pour tout ordinal $\xi \leq \hat{\lambda}$, soit B'_ξ la classe des composés $m' = m'_n \dots m'_1$ tels que

$$\beta(m') \in M, \quad m'_j \in B_{\xi_j} \quad \text{et} \quad 1 < \xi_n < \xi_{n-1} < \dots < \xi_1 \leq \xi,$$

les ordinaux ξ_j étant de première espèce. Si $m = \lim \Psi \in \alpha(m') \cdot A_{\xi+1}$ et si $m'_1 = p_i(\Phi)$, les égalités

$$\lim \beta^{\square}(\Psi) = \beta(m) = \alpha(m'_1) = \lim \Phi$$

entraînent $\Phi = \beta^{\square}(\Psi)$, d'où

$$m'_1 \cdot m = \tau(i) \in M_\xi \quad \text{et} \quad m' \cdot m = (m'_n \dots m'_2) \cdot \tau(i) \in M_\xi,$$

en désignant par $(\Phi, \tau, \hat{e})$ le triplet définissant la transformation naturelle Ψ . Ainsi $B'_\xi \cdot A_{\xi+1} \subset M_\xi$. Soit $\lambda \leq \hat{\lambda}$. Supposons montré que, pour tout $\xi < \lambda$, on ait $M_0^* \cdot M_\xi = M \cdot B'_\xi$ et soit $f \in M_0^* \cdot M_\lambda$. Si λ est de seconde espèce, il existe $\xi < \lambda$ tel que

$$f \in M_0^* \cdot M_\xi \subset M \cdot B'_\xi \subset M \cdot B'_\lambda.$$

Soit $\lambda = \lambda' + 1$. Nous avons vu que l'on a $f = m'' \cdot m \cdot m' \in N_\lambda$. Plusieurs cas se présentent :

1°) Si $m'' \in M_{\lambda'} \cdot M_0^*$, on a $m \in (M_\lambda)_0^*$ car $\beta(m) \in M$ entraîne $\beta(m) \neq \lim \Phi$. Il en résulte

$$f = m'' \cdot m' \in M \cdot B_\lambda \subset M \cdot B'_\lambda.$$

2°) Soit $m'' \in M_{\lambda'}$ et $\alpha(m'') \notin M$; on a $m'' \in M \cdot B'_{\lambda'}$ par hypothèse.

a) Si $m \in (M_\lambda)_0^*$, on trouve

$$f = m'' \cdot m' \in (M \cdot B'_{\lambda'}) \cdot B_\lambda \subset M \cdot B'_\lambda;$$

b) Soit $m = m_q \dots m_1 \in A'_{\lambda'}$ et $m_q \notin (M_\lambda)_0^*$. D'après ce qui précède

$$m'' \cdot m_q \in M \cdot B'_{\lambda'} \cdot A_{\lambda'+1} \subset M \cdot M_{\lambda'} \subset M \cdot B'_{\lambda'}$$

et, de même,

$$(m'' \cdot m_q) \cdot m_{q-1} \in M \cdot B'_{\lambda'} \cdot A_{\lambda} \subset M \cdot B'_{\lambda'} ;$$

il s'ensuit, par récurrence, $m'' \cdot m \in M \cdot B'_{\lambda'}$, de sorte que

$$f = (m'' \cdot m) \cdot m' \in (M \cdot B'_{\lambda'}) \cdot B'_{\lambda} \subset M \cdot B'_{\lambda}.$$

Par récurrence transfinie, on obtient

$$M_{\circ} \cdot \hat{M} = M_{\circ} \cdot M_{\hat{\lambda}} = M \cdot B'_{\hat{\lambda}}.$$

Soit $1 \leq \xi \leq \lambda \leq \hat{\lambda}$ et $m' = m'_n \dots m'_1 \in B'_{\lambda} \cdot (M_{\xi})_{\circ}$. Il existe $\xi' < \xi$ et $\Phi \in \delta_{M_{\xi'}}^{I_{\circ}}$, tels que $\alpha(m'_1) = \text{Lim } \Phi$. On en conclut

$$m'_1 \in B_{\xi'+1}, \quad m' \in B'_{\xi} \quad \text{et} \quad B'_{\lambda} \cdot (M_{\xi})_{\circ} \subset B'_{\xi}.$$

Cette relation entraîne

$$M_{\circ} \cdot \hat{M} \cdot (M_{\lambda})_{\circ} \subset M \cdot B'_{\hat{\lambda}} \cdot (M_{\lambda})_{\circ} \subset M \cdot B'_{\lambda} = M_{\circ} \cdot M_{\lambda},$$

et par suite $M_{\circ} \cdot \hat{M} \cdot (M_{\lambda})_{\circ} = M_{\circ} \cdot M_{\lambda}$. En particulier,

$$M_{\circ} \cdot \hat{M} \cdot M_{\circ} \subset M_{\circ} \cdot \hat{M} \cdot (M_2)_{\circ} \cdot M_{\circ} \subset M_{\circ} \cdot M_2 \cdot M_{\circ} \subset M.$$

Ainsi M^* est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}^*$.

-Supposons de plus que M^* soit une $\mathcal{U}$ -catégorie, l'univers $\mathcal{U}$ contenant $p_{\mathcal{F}}(\mathcal{I})$; désignons par $\tilde{\mathcal{U}}$ l'univers obtenu par saturation de $\mathcal{U}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$, i.e. $\tilde{\mathcal{U}} = \beta(\hat{\mathcal{M}}_{\gamma} \cdot \mathcal{U})$. Soit $E \in M_{\circ}$. Si $E' \in M_{\circ}$, on a

$$E \cdot \hat{M} \cdot E' = E \cdot M \cdot E' \in \tilde{\mathcal{U}}.$$

Supposons montré que, pour tout $\xi < \lambda$, on a $E \cdot \hat{M} \cdot E' \in \tilde{\mathcal{U}}$ si $E' \in (M_{\xi})_{\circ}$, où $\lambda \leq \hat{\lambda}$. Soit $E' \in (M_{\lambda})_{\circ}$. Si λ est de seconde espèce, il existe $\xi < \lambda$ tel que $E' \in M_{\xi}$, ce qui entraîne $E \cdot \hat{M} \cdot E' \in \tilde{\mathcal{U}}$. Soit $\lambda = \lambda' + 1$, $E' \in M_{\lambda} - M_{\lambda'}$ et $f \in E \cdot \hat{M} \cdot E'$; nous avons prouvé que l'on a $E \cdot \hat{M} \cdot E' = E \cdot M_{\lambda} \cdot E'$ et

$$f = h \cdot (m'_n \dots m'_1) \in M \cdot B'_{\lambda}.$$

Comme $\alpha(m'_1) = E' \notin M_{\lambda'}$, il existe un et un seul $\Phi \in \delta_{M_{\lambda'}}^{I_{\circ}}$ tel que $E' = \text{Lim } \Phi$ et on a

$$m'_1 = p_i(\Phi) \in (M_{\lambda'})_{\circ} \cdot M_{\lambda}, \quad \text{avec} \quad i \in I_{\circ}.$$

Il s'ensuit

$$f' = b.(m'_1 \dots m'_2) \in E.M.B'_{\lambda'}.\Phi(i) \subset E.M_{\lambda'}.\Phi(i).$$

En associant à $f \in E.\hat{M}.E'$ le couple $(f', i) \in E.M_{\lambda'}.\Phi(i) \times I$, on 1
définit une bijection de $E.\hat{M}.E'$ sur une partie de

$$U = \left(\bigcup_{i \in I'_0} E.M_{\lambda'}.\Phi(i) \right) \times I.$$

Puisque $E.M_{\lambda'}.\Phi(i) \in \tilde{\mathcal{U}}$ pour tout $i \in I'_0$ et que $I'_0 \subset I \in \tilde{\mathcal{U}}$, on a $U \in \tilde{\mathcal{U}}$,
car $\tilde{\mathcal{U}}$ est un univers, et par suite $E.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathcal{U}}$. Par récurrence transfinie,
on en déduit que $E.\hat{M}.E'$ est une $\mathcal{U}$ -classe pour tout $E' \in \hat{M}_0$ et $E \in M_0$.
- Soit alors $E' \in \hat{M}_0$. Supposons montré que, pour tout $\xi < \lambda$, où $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}$,
on a

$$E''.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathcal{U}} \quad \text{si} \quad E'' \in (M_{\xi})'_0.$$

Soit $E'' \in (M_{\lambda})'_0$. Si λ est de seconde espèce, il existe $\xi < \lambda$ tel que
 $E'' \in M_{\xi}$, de sorte que $E''.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathcal{U}}$. Soit $\lambda = \lambda' + 1$; on a, si $E'' \notin M$,

$$E'' = \text{Lim } \Phi', \quad \text{où} \quad \Phi' \in \delta_{M_{\lambda'}}^{I'}.$$

Si $f \in E''.\hat{M}.E'$, alors $f = \lim \Psi$, où Ψ est la transformation naturelle
définie par le triplet $(\Phi', \tau', \hat{E}')$ tel que

$$\tau'(i) = p_i(\Phi').f \quad \text{pour tout} \quad i \in I'_0.$$

L'application

$$f \mapsto (p_i(\Phi').f)_{i \in I'_0}, \quad \text{où} \quad f \in E''.\hat{M}.E',$$

est une bijection de $E''.\hat{M}.E'$ sur une partie de $U' = \prod_{i \in I'_0} \Phi'(i).\hat{M}.E'$.
Etant donné que $\Phi'(i) \in M_{\lambda'}$, on a $U' \in \tilde{\mathcal{U}}$, car

$$\Phi'(i).\hat{M}.E' \in \tilde{\mathcal{U}} \quad \text{et} \quad I'_0 \in \tilde{\mathcal{U}};$$

a fortiori $E''.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathcal{U}}$. Par récurrence transfinie, il en résulte

$$E''.\hat{M}.E' \in \tilde{\mathcal{U}} \quad \text{si} \quad E' \in \hat{M}_0 \quad \text{et} \quad E'' \in \hat{M}_0,$$

ce qui signifie que $\hat{M}$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie. La démonstration du théorème
est ainsi achevée. ■

COROLLAIRE. $\mathcal{Q}^{\mathcal{A}}$ est $\mathcal{A}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$. Les foncteurs $p^{\mathcal{A}}$ et $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{A}})$
admettent des adjoints.

En effet, la première partie résulte de la première affirmation du théorème 5, la deuxième du critère 1, les foncteurs $p^{\mathcal{J}}$ et $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{J}})$ étant à $\mathbb{M}_0$ -limites projectives, les foncteurs $P^{\mathcal{J}}$ et $(\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}, \iota, \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}})$ à $\mathbb{M}_0$ -produits, en vertu de la proposition 20.

REMARQUE. Si $(C^*, \nu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{J}}$ et si $(\hat{M}^*, \hat{\nu})$ est la complétion $\mathcal{J}$ -projective de M dans (C^*, ν) , alors $(\hat{M}^*, \hat{\nu})$ est aussi la complétion $\mathcal{J}$ -projective de M dans $(\hat{M}^*, \hat{\nu})$.

DEFINITION. Une $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}^{\mathcal{J}})$ -projection de $(H^*, \mu) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}}$ est appelée complétion $\mathcal{J}$ -projective de (H^*, μ) .

En particulier, $\mathcal{F}$ est isomorphe à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ ayant pour unités les couples $(H^*, \emptyset)$, où $\emptyset$ est la surjection vide. On a

$$((K^*, \nu), \underline{E}, (H^*, \emptyset)) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$$

si, et seulement si, $(K^*, \nu) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}}$ et $(K^*, \underline{E}, H^*) \in \mathcal{F}$.

Par suite, les $p^{\mathcal{J}}$ -structures libres engendrées par $H^* \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}}$ sont identiques aux complétions $\mathcal{J}$ -projectives de $(H^*, \emptyset)$.

B. $p^{\mathcal{J}}$ -STRUCTURES LIBRES.

THEOREME 6. Soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}_0$ et $\mathcal{J} \in \tilde{\mathbb{M}}_0$. Tout $H^* \in \mathcal{F}_0$ engendre une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre $(\hat{H}^*, \hat{\nu})$ ayant les propriétés suivantes :

- 1) $\text{Lim}^{\hat{\nu}}$ est injectif et H^* une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$;
- 2) Si $p_{\mathcal{F}}(\mathcal{J})$ est contenu dans l'univers $\mathcal{U}$ et si H^* est une $\mathcal{U}$ -catégorie, $\hat{H}^*$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie.

DEMONSTRATION. D'après le corollaire du théorème 5, H^* engendre une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre (C^*, ν) .

-Soit $K^* \in \mathcal{F}_0$; soit K_+^* la catégorie obtenue en adjoignant à K^* un élément initial 0. Nous désignerons par $\mathcal{Q}(K^*)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}(\mathbb{M}, (K_+^*)^*)^{\square}$, où $(K_+^*)^*$ est la duale de K_+^* , ayant pour unités les foncteurs F de $(K_+^*)^*$ vers $\mathbb{M}$ tels que $F(0)$ soit un atome (i.e. ait un seul élément). Soit η_K l'isomorphisme canonique (App. 1, C.S.) de K^* sur une sous-catégorie pleine de $\mathcal{Q}(K^*)$ qui associe à $e \in K_0^*$ le foncteur $\eta_K.(e)$ de K_+^* vers $\mathbb{M}$ défini par

$$\begin{cases} \eta_{K \cdot}(e)(e') = e \cdot K_+ \cdot e' & \text{si } e' \in (K_+)_0^* \\ \eta_{K \cdot}(e)(f) = (\tilde{e} \cdot K_+ \cdot \alpha(f), \tilde{f}, e \cdot K_+ \cdot \beta(f)), \\ \text{où } f(k) = k \cdot f \text{ pour } k \in e \cdot K_+ \cdot \beta(f). \end{cases}$$

En particulier, on a $\eta_{K \cdot}(e)(0) = \{(e, 0)\}$. Puisque $\mathbb{M}$ est une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives, $\mathcal{N}(\mathbb{M}, (K_+)^*)^{\square}$ est une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives et le foncteur $\eta_{K \cdot}$ est compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives. Nous allons définir sur $\mathcal{U}(K \cdot)$ une application $\mathcal{J}$ -limite projective $\nu_K^{\mathcal{J}}$ comme suit : Soit Lim le foncteur $\mathcal{J}$ -limite projective usuel sur $\mathbb{M}$: si

$$F = (\mathbb{M}, \underline{F}, I \cdot) \in \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{J},$$

la classe $\text{Lim } F$ est donc formée des $(s_i)_{i \in I_0^*} \in \prod_{i \in I_0^*} F(i)$ tels que

$$F(k)(s_i) = s_{i'}, \quad \text{pour tout } k \in i' \cdot I \cdot i.$$

Soit $\Phi = (\mathcal{U}(K \cdot), \Phi, I \cdot)$ un foncteur. Pour tout $e \in (K_+)_0^*$, l'application $k \rightarrow \Phi(k)(e)$ définit un foncteur Φ_e de $I \cdot$ vers $\mathbb{M}$. Désignons par $l(\Phi_e)$ la classe des couples

$$(z, \Phi), \quad \text{où } z \in \text{Lim } \Phi_e;$$

évidemment $l(\Phi_e)$ est aussi une limite projective de Φ_e . Le foncteur

$$(\mathcal{N}(\mathbb{M}, K_+^*)^{\square}, \underline{\Phi}, I \cdot)$$

admet pour limite projective l'unique foncteur $\text{Lim } \Phi$ de K_+^* vers $\mathbb{M}$ tel que

$$\text{Lim } \Phi(e) = l(\Phi_e) \quad \text{pour tout } e \in (K_+)_0^*.$$

Comme $\Phi_0(e') = \Phi(e')(0)$ est un atome pour tout $e' \in K_0^*$, la classe $\text{Lim } \Phi(0)$ est un atome de la forme $\{(z, \Phi)\}$. Par suite $\text{Lim } \Phi$ est aussi une limite projective de Φ . Pour tout $i \in I_0^*$, la projection canonique de $\text{Lim } \Phi$ vers $\Phi(i)$ est la transformation naturelle $\hat{\tau}(i)$ définie par le triplet $(\Phi(i), \tau_i, \text{Lim } \Phi)$, où $\tau_i(e)$ est l'application

$$((z_i)_{i \in I_0^*}, \Phi) \rightarrow z_i \quad \text{de } \text{Lim } \Phi(e) \quad \text{dans } \Phi(i)(e).$$

Nous désignons par $\nu_K^{\mathcal{J}}(\Phi)$ la transformation naturelle définie par le triplet

$(\Phi, \hat{\tau}, \hat{E})$, où $\hat{E}$ est le foncteur de I^* vers K^* constant sur $E = \text{Lim } \Phi$. L'application $\Phi \mapsto \nu_K^{\mathcal{J}}(\Phi)$ est une application $\mathcal{J}$ -limite projective $\nu_K^{\mathcal{J}}$ sur $\mathcal{U}(K^*)$. Puisque $\mathbb{M}_o \in \hat{\mathbb{M}}_o$, on a $\mathcal{N}(\mathbb{M}, K_+^*) \in \hat{\mathbb{M}}_o$, d'où

$$S_K^{\mathcal{J}} = (\mathcal{U}(K^*), \nu_K^{\mathcal{J}}) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}.$$

Si $\text{Lim } \nu_K^{\mathcal{J}} \Phi = \text{Lim } \nu_K^{\mathcal{J}} \Phi'$, la relation $l(\Phi_o) = l(\Phi'_o)$ entraîne $\Phi = \Phi'$, par construction. De plus $\text{Lim } \Phi$ n'appartient pas à $\eta_K.(K)$. D'après le théorème 5, la complétion $\mathcal{J}$ -projective $(\bar{K}^*, \bar{\nu})$ de $\eta_K.(K)$ dans $S_K^{\mathcal{J}}$ est telle que $\bar{K} \in \hat{\mathbb{M}}_o$ et que $\eta_K.(K)^*$ soit une sous-catégorie pleine de $\bar{K}^*$. Comme $Q^{\mathcal{J}}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe

$$\hat{u} = ((\mathcal{U}(K^*), \hat{\nu}_K^{\mathcal{J}}), \underline{u}, (\bar{K}^*, \bar{\nu})) \in \mathcal{F}_o^{\mathcal{J}} \cdot \hat{\mathcal{F}}_{\gamma}^{\mathcal{J}}.$$

Puisque $K \in \mathbb{M}_o$ et que $p^{\mathcal{J}}(\hat{u}).\eta_K^*$ est injectif, on peut supposer que K^* est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}(K^*)$ et que la restriction de $\underline{u}$ à K est η_K^* .

- Soit $H^* \in \mathcal{F}_o$ et soit $((C^*, \nu), J)$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, p^{\mathcal{J}})$ -projecteur. Les relations

$$(\mathcal{U}(H^*), \hat{\nu}_H^{\mathcal{J}}) \in \mathcal{F}_o^{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad (\mathcal{U}(H^*), \iota, H^*) \in \mathcal{F}$$

assurent l'existence d'un et d'un seul $\hat{G}' \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ tel que

$$p^{\mathcal{J}}(\hat{G}').J = (\mathcal{U}(H^*), \iota, H^*).$$

Il s'ensuit que J est un foncteur injectif, de sorte que $J(H)^*$ est une sous-catégorie M^* de C^* isomorphe à H^* . Soit $\Phi = (C^*, \Phi, I^*) \in \mathcal{F}$ et $E = \text{Lim } \nu \Phi$. Si l'on avait $E \in M$, on aurait $p^{\mathcal{J}}(\hat{G}')(E) \in \bar{H}$ et l'égalité

$$\text{Lim}(p^{\mathcal{J}}(\hat{G}').\Phi) = p^{\mathcal{J}}(\hat{G}')(E) \in H$$

entraînerait, en posant $\Phi' = p^{\mathcal{J}}(\hat{u}^{-1}.\hat{G}').\Phi$,

$$\text{Lim } \nu_H^{\mathcal{J}}(\mathcal{U}(H^*), \Phi', I^*) \in \eta_H.(H),$$

ce qui est impossible par définition de $\nu_H^{\mathcal{J}}$. Par conséquent $E \notin M$.

- D'après la construction d'une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre (th. 1), (C^*, ν) est la complétion $\mathcal{J}$ -projective de M dans un élément de $\hat{\mathcal{F}}_o^{\mathcal{J}}$, produit d'éléments de $\mathcal{F}_o^{\mathcal{J}}$. La remarque précédant le théorème affirme que (C^*, ν) est aussi la complétion $\mathcal{J}$ -projective de M dans (C^*, ν) . Ainsi, en reprenant les

notations du début de la démonstration du théorème 5, $C = \bigcup_{\lambda < \hat{\lambda}} M_{\lambda}$.
Montrons que Lim^{ν} est injectif. En effet, supposons qu'il existe

$$\Phi_m \in C^{\cdot} \cdot \mathcal{F} \cdot I_m^{\cdot}, \quad \text{où } m = 1 \text{ et } 2,$$

tels que

$$\text{Lim}^{\nu} \Phi_1 = \text{Lim}^{\nu} \Phi_2 = E \quad \text{et} \quad \Phi_1 \neq \Phi_2.$$

Soit λ le plus petit des ordinaux $\lambda' \leq \hat{\lambda}$ tels que

$$\Phi_1(I_1) \cup \Phi_2(I_2) \subset M_{\lambda};$$

nous pouvons supposer que c'est Φ_2 qui vérifie

$$\Phi_2 \notin \delta_{M_{\xi}}^{I^{\cdot}} \quad \text{quel que soit } \xi < \lambda.$$

On sait (démonstration du théorème 5) que $\lambda < \hat{\lambda}$. Désignons par A une classe de la forme $C_0 \cup \{E'\}$, où $E' \notin C$, et par a l'application de A dans C_0 telle que

$$a(E') = E \quad \text{et} \quad a(e) = e \quad \text{si } e \neq E'.$$

La catégorie $a^*(C^{\cdot})$ induite de $C^{\cdot}$ par a (chap. IV, C.S.) admet pour éléments les triplets $((e', e), f) \in A^2 \times C$ tels que $f \in a(e') \cdot C \cdot a(e)$. Soit $\hat{C}^{\cdot}$ la catégorie obtenue à partir de $a^*(C^{\cdot})$ en identifiant $C^{\cdot}$ à la sous-catégorie pleine de $a^*(C^{\cdot})$ formée des $((\beta(f), \alpha(f)), f)$, où $f \in C$, et en identifiant $((E', E'), E)$ à E' . On a $((E', E), E) \in E' \cdot \hat{C}^{\cdot}_{\gamma} \cdot E$, de sorte que $\hat{C}^{\cdot}$ est un élargissement (chap. V, C.S.) de $C^{\cdot}$. Il en résulte que le foncteur $(\hat{C}^{\cdot}, \iota, C^{\cdot})$ est à $\mathcal{J}$ -limites projectives. En particulier E et E' sont tous deux des limites projectives de $\hat{\Phi}_m$ pour $m = 1$ et 2 . Choisissons sur $\hat{C}^{\cdot}$ une application $\mathcal{J}$ -limite projective $\hat{\nu}$ telle que

$$p_i^{\hat{\nu}}(\hat{\Phi}) = p_i^{\nu}(\Phi) \quad \text{si } \beta(\hat{\Phi}) \subset C \text{ et } \Phi = (C^{\cdot}, \hat{\Phi}, I^{\cdot}) \neq \Phi_2, \text{ où } i \in I_0^{\cdot},$$

$$\text{Lim}^{\hat{\nu}} \hat{\Phi}_2 = E' \quad \text{si } \hat{\Phi}_2 = (\hat{C}^{\cdot}, \hat{\Phi}_2, I_2^{\cdot}).$$

Les relations

$$(\hat{C}^{\cdot}, \hat{\nu}) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad (\hat{C}^{\cdot}, \iota, C^{\cdot}) \cdot J \in \mathcal{F}$$

assurent l'existence d'un et d'un seul

$$\hat{G} = ((\hat{C}^*, \hat{\nu}), \underline{G}, (C^*, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$$

tel que $G.J = (\hat{C}^*, \iota, C^*).J$, où $G = p^{\mathcal{A}}(\hat{G})$. Soit G_{ξ} la restriction de G à M_{ξ}^* pour tout $\xi \leq \lambda$. Etant donné que J est injectif, $G_1 = (\hat{C}^*, \iota, M_1^*)$. Soit $\xi \leq \lambda$ et supposons prouvé que $G_{\xi^1} = (\hat{C}^*, \iota, M_{\xi^1}^*)$ pour tout $\xi^1 < \xi$.

1°) Si ξ est de seconde espèce, $G_{\xi} = (\hat{C}^*, \iota, M_{\xi}^*)$, car $M_{\xi} = \bigcup_{\xi^1 < \xi} M_{\xi^1}$.

2°) Soit $\xi = \xi' + 1$. Si $\Phi' \in \delta_{M_{\xi^1}}^{I^*}$, on a

$$\Phi' \neq \Phi_2, \quad \underline{G}\Phi' = \underline{G}_{\xi^1}\Phi' = \underline{\Phi}'$$

et par construction de $\hat{\nu}$, pour tout $i \in I_0^*$,

$$G(p_i^{\nu}(\Phi')) = p_i^{\hat{\nu}}(G.\Phi') = p_i^{\hat{\nu}}(\hat{C}^*, \Phi', I^*) = p_i^{\nu}(\Phi').$$

Si $\Psi \in \Delta_{M_{\xi^1}}^{I^*}$ est la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi', \tau, \hat{e})$, $\lim^{\nu} \Psi$ est l'unique $b \in C$ tel que

$$p_i^{\nu}(\Phi').b = \tau(i) \in M_{\xi^1}, \quad \text{pour tout } i \in I_0^*;$$

les relations

$$\tau(i) = G(\tau(i)) = G(p_i^{\nu}(\Phi').b) = p_i^{\nu}(\Phi').G(b)$$

pour tout $i \in I_0^*$ entraînent $G(b) = b$. Ainsi la restriction de G à $\sigma^{\nu}(M_{\xi^1})$ est l'identité. Comme $\sigma^{\nu}(M_{\xi^1})$ engendre la sous-catégorie M_{ξ}^* de C^* et de $\hat{C}^*$, on en conclut $G_{\xi} = (\hat{C}^*, \iota, M_{\xi}^*)$.

Par récurrence transfinie, on obtient $G_{\lambda} = (\hat{C}^*, \iota, M_{\lambda}^*)$, d'où

$$\underline{G}\Phi_m = \underline{G}_{\lambda}\Phi_m = \underline{\Phi}_m,$$

et

$$G(\lim^{\nu} \Phi_m) = \lim^{\hat{\nu}}(G.\Phi_m) = \lim^{\hat{\nu}}(\hat{C}^*, \Phi_m, I_m^*)$$

pour $m = 1$ et 2 . Mais on a d'une part

$$\lim^{\hat{\nu}}(\hat{C}^*, \Phi_1, I_1^*) = E \quad \text{et} \quad \lim^{\hat{\nu}}(\hat{C}^*, \Phi_2, I_2^*) = E'$$

par définition de $\hat{\nu}$, d'autre part

$$G(\lim^{\nu} \Phi_1) = G(\lim^{\nu} \Phi_2).$$

Ces relations étant incompatibles, on obtient une contradiction. Donc $\Phi_1 = \Phi_2$ et Lim^ν est injectif.

- Comme ν vérifie les hypothèses du théorème 5, $M^\cdot$ est une sous-catégorie pleine de $C^\cdot$. Si de plus $p\mathcal{F}(\mathcal{J})$ est contenu dans l'univers $\mathcal{U}$ et si $H^\cdot$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie, la catégorie $M^\cdot$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie et, d'après le théorème 5, $C^\cdot$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie. ■

COROLLAIRE. Si $p\mathcal{F}(\mathcal{J})$ est contenu dans l'univers $\mathcal{U}$, soit $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{J}}$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ (resp. de $\mathcal{F}$) ayant pour unités les $(H^\cdot, \nu) \in \mathcal{F}_o^{\mathcal{J}}$ (resp. les $H^\cdot \in \mathcal{F}_o$) tels que $H^\cdot$ soit une $\mathcal{U}$ -catégorie. Le foncteur $p_{\mathcal{U}}^{\mathcal{J}} = (\mathcal{F}_{\mathcal{U}}, p_{\mathcal{U}}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{J}})$ admet un adjoint.

En effet, la $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par $H^\cdot \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ appartient à $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{J}}$ d'après le théorème 6, et par suite est aussi une $p_{\mathcal{U}}^{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par $H^\cdot$. ■

2. Construction de complétions projectives.

A. $p^{\mathcal{J}}$ -STRUCTURES LIBRES.

THEOREME 7. Soit $H^\cdot \in \mathcal{F}_o$; on peut construire explicitement par récurrence transfinie une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par $H^\cdot$.

DEMONSTRATION. La construction que nous allons donner est suggérée par la démonstration du théorème 5. Posons $\hat{M}_1^\cdot = H^\cdot$. Soit $\hat{\lambda}$ l'ordinal initial $\omega_{\lambda_{\mathcal{J}}+1}$, où $\lambda_{\mathcal{J}} = \sup_{I^\cdot \in \mathcal{J}} \bar{I}^\cdot$. Soit $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons définie une catégorie $\hat{M}_{\xi}^\cdot$ pour tout $\xi < \lambda$, de sorte que $\hat{M}_{\xi}^\cdot$ soit une sous-catégorie de $\hat{M}_{\xi'}^\cdot$ si $\xi' < \xi$. Pour tout foncteur Y , notons $\underline{Y}^\cdot$ le couple (Y, κ) tel que $Y = (\beta(Y), Y, N^\cdot)$, où $N^\cdot = (\alpha(Y), \kappa)$. On peut supposer $\underline{Y}^\cdot \notin H$. 1

1°) Supposons $\lambda = \lambda' + 1$. Soient K_λ la classe des $\underline{\Phi}^\cdot$, et H_λ la classe des $(i, \underline{\Phi}^\cdot)$, tels que

$$\alpha(\underline{\Phi}) = I, \quad \Phi = (\hat{M}_{\lambda'}^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad i \in I_o^\cdot.$$

Soit H'_λ la classe formée des $\underline{\Psi}^\cdot$ tels que

$$\Psi = (\hat{M}_{\lambda'}^\cdot, \underline{\Psi}, I^\cdot) \in \mathfrak{N}(\hat{M}_{\lambda'}^\cdot, I^\cdot) \quad \text{et} \quad \alpha^{\square}(\Psi) \in \hat{M}_{\lambda'}^\cdot.$$

Soit $[G_\lambda] = (G_\lambda, \beta_\lambda, \alpha_\lambda)$ le graphe défini comme suit :

$$G_\lambda = \hat{M}_{\lambda'} \cup K_\lambda \cup H_\lambda \cup H'_\lambda;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_\lambda(b) = \alpha(b) \quad \text{et} \quad \beta_\lambda(b) = \beta(b) \quad \text{dans} \quad \hat{M}_{\lambda'}, \quad \text{si} \quad b \in \hat{M}_{\lambda'}; \\ \alpha_\lambda(\underline{\Phi}^\bullet) = \underline{\Phi}^\bullet = \beta_\lambda(\underline{\Phi}^\bullet), \quad \text{si} \quad \underline{\Phi}^\bullet \in K_\lambda; \\ \alpha_\lambda(i, \underline{\Phi}^\bullet) = \underline{\Phi}^\bullet \quad \text{et} \quad \beta_\lambda(i, \underline{\Phi}^\bullet) = \underline{\Phi}(i), \quad \text{si} \quad (i, \underline{\Phi}^\bullet) \in H_\lambda; \\ \alpha_\lambda(\underline{\Psi}^\bullet) = e \quad \text{et} \quad \beta_\lambda(\underline{\Psi}^\bullet) = \underline{\Phi}^\bullet, \quad \text{si} \quad \underline{\Psi}^\bullet \in H'_\lambda \quad \text{et si le triplet} \\ \text{définissant } (\hat{\Box} \hat{M}_{\lambda'}, \underline{\Psi}, \alpha(\underline{\Psi})^\bullet) \text{ est } (\Phi, \tau, \hat{e}) \text{ où } \Phi = (\hat{M}_{\lambda'}, \underline{\Phi}, I^\bullet). \end{array} \right.$$

Soit $L[G_\lambda]^\bullet$ la catégorie libre des chemins associée à $[G_\lambda]$ (chap. III, C.S.) et soit $r_\lambda = (L[G_\lambda], D_\lambda, L[G_\lambda])$ la relation telle que D_λ soit la classe des couples suivants, où $\Psi = (\hat{\Box} \hat{M}_{\lambda'}, \underline{\Psi}, I^\bullet)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (((i, \underline{\Phi}^\bullet), \underline{\Psi}^\bullet), \tau(i)), \quad \text{si} \quad \underline{\Psi}^\bullet \in H'_\lambda \quad \text{et si la transformation naturelle } \Psi \\ \text{est définie par le triplet } (\Phi, \tau, \hat{e}), \quad \text{où} \quad \Phi = (\hat{M}_{\lambda'}, \underline{\Phi}, \alpha(\underline{\Phi})^\bullet); \\ ((b', b), b'.b) \quad \text{si} \quad b \in \hat{M}_{\lambda'}, \quad b' \in \hat{M}_{\lambda'}, \quad \text{et} \quad (b', b) \in \hat{M}_{\lambda'} * \hat{M}_{\lambda'}; \\ ((\underline{\Psi}^\bullet, b), \underline{\Psi}'^\bullet) \quad \text{si} \quad \underline{\Psi}^\bullet \in H'_\lambda, \quad \underline{\Psi}'^\bullet \in H'_\lambda, \quad b \in \hat{M}_{\lambda'}, \quad \Psi' = \Psi \square \square (\hat{b}^\square); \\ ((\underline{\Psi}^\bullet, \underline{\Psi}_1^\bullet), \underline{\Psi}'^\bullet) \in H'^2_\lambda \times H'_\lambda \quad \text{si, pour } i \in I, \quad \text{il existe } i' \in I_1 \quad \text{et} \\ b_i \in \hat{M}_{\lambda'} \quad \text{avec} \quad b_i^\square \square \underline{\Psi}_1(i') = \underline{\Psi}'(i), \quad (b_i, (i', \underline{\Phi}_1))^\square = \underline{\Psi}(i). \end{array} \right.$$

Comme deux unités de $L[G_\lambda]^\bullet$ ne sont pas équivalentes pour la relation d'équivalence $\hat{r}_\lambda$ bicompatible sur $L[G_\lambda]^\bullet$ engendrée par r_λ il existe une catégorie quotient strict de $L[G_\lambda]^\bullet$ par $\hat{r}_\lambda$ notée $\hat{M}_{\lambda'}^\bullet$. D'après le corollaire proposition 8 (appendice), on voit que G_λ s'identifie à une sous-classe de $\hat{M}_{\lambda'}$ et $\hat{M}_{\lambda'}^\bullet$ à une sous-catégorie de $\hat{M}_{\lambda'}^\bullet$. De plus tout élément $g \in \hat{M}_{\lambda'}^\bullet - G_\lambda$ est déterminé par la donnée du seul chemin propre de G_λ appartenant à g et qui est irréductible (i.e. de longueur inférieure à celle de tout chemin équivalent). Ce chemin irréductible est de l'une des formes suivantes, où seul b appartient à $\hat{M}_{\lambda'}$:

- a) $(b, (i, \underline{\Phi}^\bullet)) \in \hat{M}_{\lambda'} \times H_\lambda; (b, f_n, \dots, f_1) \in \hat{M}_{\lambda'} \times (H'_\lambda)^n;$
- b) $(f_n, \dots, f_1) \in H'^n_\lambda; (f_n, \dots, f_1, (i, \underline{\Phi}^\bullet)) \in (H'_\lambda)^n \times H_\lambda$
- c) $(b, f_n, \dots, f_1, (i, \underline{\Phi}^\bullet)) \in \hat{M}_{\lambda'} \times H'^n_\lambda \times H_\lambda.$

2) Si λ est de seconde espèce, $\hat{M}_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \hat{M}_\xi$ admet une unique structure de catégorie $\hat{M}_\lambda$ telle que $\hat{M}_\xi$ soit une sous-catégorie de $\hat{M}_\lambda$ pour tout $\xi < \lambda$.

- Ainsi par récurrence transfinie, nous obtenons une catégorie $\hat{M}_\lambda$, qui admet H^* pour sous-catégorie. La construction de $\hat{M}_\lambda$ implique évidemment que $\hat{M}_\lambda \in \mathfrak{M}_0$. Nous poserons $\hat{H}^* = \hat{M}_\lambda$.

- Montrons que $\hat{H}^*$ est à $\mathcal{F}$ -limites projectives. En effet, soit $\Phi \in \hat{H}^* \cdot \mathcal{F} \cdot I^*$. Une démonstration analogue à celle du théorème 5 prouve qu'il existe un plus petit ordinal $\hat{\lambda} < \hat{\lambda}$ tel que $\Phi(I) \subset \hat{M}_\lambda$. Montrons que $\Phi^* \in \hat{M}_{\lambda+1}$ est une limite projective de Φ , la projection canonique vers $\Phi(i)$ étant (i, Φ^*) , pour tout $i \in I_0^*$. Pour cela, soit Ψ une transformation naturelle définie par un triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$. On voit comme dans le théorème 5 qu'il existe un ordinal $\xi < \hat{\lambda}$ tel que $\lambda \leq \xi$ et que $\Psi(I) \subset \square \hat{M}_\xi$. Par construction, $\Psi^* \in \hat{M}_{\xi+1}$ et

$$(i, \Phi^*) \cdot \Psi^* = \tau(i) \quad \text{pour tout } i \in I_0^*.$$

Soient $g \in \hat{H}$ et $g' \in \hat{H}$ tels que

$$(i, \Phi^*) \cdot g = (i, \Phi^*) \cdot g' \quad \text{pour tout } i \in I_0^*.$$

Il nous faut montrer qu'alors $g = g'$. La démonstration se fait en deux étapes :

1°) Supposons $g \in \hat{M}_{\lambda+1}$ et $g' \in \hat{M}_{\lambda+1}$. Il existe deux chemins irréductibles $(g_n, \dots, g_1)$ et $(g'_n, \dots, g'_1)$ caractérisant g et g' respectivement, et on a

$$((i, \Phi^*), g_n, \dots, g_1) \sim ((i, \Phi^*), g'_n, \dots, g'_1) \text{ mod } \hat{r}_\lambda$$

pour tout $i \in I_0^*$. Comme $\Phi^* \notin \hat{M}_\lambda$, on a nécessairement $g_n \in H'_\lambda$ et $g'_n \in H'_\lambda$ d'où

$$\hat{g}_n = (i, \Phi^*) \cdot g_n \in \hat{M}_\lambda \quad \text{et} \quad \hat{g}'_n = (i, \Phi^*) \cdot g'_n \in \hat{M}_\lambda.$$

Puisque $\hat{M}_\lambda \cdot H'_\lambda \subset \hat{M}_\lambda \cup H'_\lambda$, on peut se ramener au cas où

$$(\hat{g}_n, g_{n-1}, \dots, g_1) \quad \text{et} \quad (\hat{g}'_n, g'_{n-1}, \dots, g'_1)$$

sont tous deux irréductibles. Il s'ensuit

$$n = n', \quad g_j = g'_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq j < n \quad \text{et} \quad \hat{g}_n = \hat{g}'_n.$$

Comme g_n et g'_n sont de la forme $\underline{\Psi} \cdot$ et $\underline{\Psi}' \cdot$ (prop. 8, app.), l'égalité

$$(i, \underline{\Phi} \cdot) \cdot \underline{\Psi} \cdot = (i, \underline{\Phi} \cdot) \cdot \underline{\Psi}' \cdot \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0$$

entraîne $\underline{\Psi} \cdot = \underline{\Psi}' \cdot$. Par suite $g_n = g'_n$ et $g = g'$.

2°) Soit $\lambda + 1 < \xi \leq \hat{\lambda}$. Supposons montré que $f = f'$ lorsque

$$(i, \underline{\Phi} \cdot) \cdot f = (i, \underline{\Phi} \cdot) \cdot f' \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0$$

et qu'il existe $\xi' < \xi$ tel que $f \in \hat{M}_{\xi'}$ et $f' \in \hat{M}_{\xi'}$; supposons $g \in \hat{M}_{\xi}$ et $g' \in \hat{M}_{\xi}$.

a) Si ξ est de seconde espèce, il existe $\xi' < \xi$ tel que $g \in M_{\xi'}$ et $g' \in M_{\xi'}$, de sorte que l'on a $g = g'$, d'après l'hypothèse de récurrence.

b) Soit $\xi = \xi' + 1$; désignons par $(g_n, \dots, g_1)$ et $(g'_n, \dots, g'_1)$ les chemins irréductibles caractérisant g et g' . On a

$$((i, \underline{\Phi} \cdot), g_n, \dots, g_1) \sim ((i, \underline{\Phi} \cdot), g'_n, \dots, g'_1) \text{ mod } \hat{r}_{\lambda}.$$

1) Si g_n et $g'_n \in H_{\xi} - \hat{M}_{\xi'}$, les deux chemins sont irréductibles, et $g = g'$.

2) Si $g_n \in H_{\xi} - \hat{M}_{\xi'}$, $g'_n \in \hat{M}_{\xi'} \cup H'_{\xi'}$, on se ramène au cas où

$$((i, \underline{\Phi} \cdot), g_n, \dots, g_1) \quad \text{et} \quad ((i, \underline{\Phi} \cdot), g'_n, g'_{n-1}, \dots, g'_1)$$

sont irréductibles, de sorte que l'on obtient $n' = n + 1$, $g'_j = g_j$, $1 \leq j \leq n$ et $(i, \underline{\Phi} \cdot) = (i, \underline{\Phi} \cdot) \cdot g'_n$. Cette dernière égalité a pour conséquence $g'_n = \underline{\Phi} \cdot$ (en vertu de l'hypothèse de récurrence si $g'_n \in \hat{M}_{\xi'}$). Ainsi $g = g'$.

3) Si $g_n \in \hat{M}_{\xi'} \cup H'_{\xi'}$ et $g'_n \in \hat{M}_{\xi'} \cup H'_{\xi'}$, on peut supposer que

$$((i, \underline{\Phi} \cdot), g_n, g_{n-1}, \dots, g_1) \quad \text{et} \quad ((i, \underline{\Phi} \cdot), g'_n, g'_{n-1}, \dots, g'_1)$$

sont irréductibles et équivalents; il s'ensuit $n = n'$,

$$g_j = g'_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq j < n \quad \text{et} \quad (i, \underline{\Phi} \cdot) \cdot g_n = (i, \underline{\Phi} \cdot) \cdot g'_n.$$

c'est-à-dire, par hypothèse, $g_n = g'_n$. Donc $g = g'$.

Par récurrence transfinie, il en résulte que $g = g'$ lorsque $g \in \hat{H}$, $g' \in \hat{H}$ et

$$(i, \underline{\Phi} \cdot), g = (i, \underline{\Phi} \cdot), g' \quad \text{pour tout } i \in I_0^*.$$

Ceci montre que $\underline{\Phi} \cdot$ est la limite projective de Φ .

- Soit $\hat{\nu}$ l'application $\mathcal{J}$ -limite projective sur $\hat{H} \cdot$ telle que

$$p_i^{\hat{\nu}}(\hat{H} \cdot, \underline{\Phi}, I \cdot) = (i, \underline{\Phi} \cdot) \quad \text{pour tout } i \in I_0^*.$$

Supposons $(C \cdot, \nu) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}}$ et $F = (C \cdot, F, H \cdot) \in \mathcal{F}$. Nous allons étendre F en un foncteur F' de $\hat{H} \cdot$ vers $C \cdot$. À cette fin, posons $\tilde{F}'_1 = F$ et soit $\lambda \leq \hat{\lambda}$. Supposons défini un foncteur $\tilde{F}'_{\xi} = (C \cdot, \tilde{F}'_{\xi}, \hat{M}_{\xi} \cdot)$ pour tout $\xi < \lambda$, de sorte que $\tilde{F}'_{\xi}$ soit une restriction de $\tilde{F}'_{\xi'}$ si $\xi' < \xi$. Si λ est de seconde espèce, il existe un unique foncteur $\tilde{F}'_{\lambda}$ de $\hat{M}_{\lambda} \cdot$ vers $C \cdot$ admettant $\tilde{F}'_{\xi}$ pour restriction pour tout $\xi < \lambda$. Examinons le cas où $\lambda = \lambda' + 1$. Si $\underline{\Phi} \cdot \in K_{\lambda}$ et $\underline{\Psi} \cdot \in H'_{\lambda}$, posons

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} \cdot &= \tilde{F}'_{\lambda} \cdot (\hat{M}_{\lambda} \cdot, \underline{\Phi}, I \cdot) \quad \text{et} \quad \hat{\Psi} \cdot = \tilde{F}'_{\lambda} (\hat{\boxplus} \hat{M}_{\lambda} \cdot, \underline{\Psi}, I \cdot), \\ &\text{si } I \cdot = \alpha(\underline{\Phi}) \cdot = \alpha(\underline{\Psi}) \cdot. \end{aligned}$$

Soit $F'_{\lambda} : k \rightarrow F'_{\lambda}(k)$ la surjection de G_{λ} dans C telle que

$$\begin{cases} F'_{\lambda}(b) = \tilde{F}'_{\lambda'}(b) & \text{si } b \in \hat{M}_{\lambda'} \\ F'_{\lambda}(\underline{\Phi} \cdot) = \lim^{\nu}(\hat{\Phi} \cdot) \quad \text{et} \quad F'_{\lambda}(i, \underline{\Phi} \cdot) = p_i^{\nu}(\hat{\Phi} \cdot) & \text{si } (i, \underline{\Phi} \cdot) \in H_{\lambda} \\ F'_{\lambda}(\underline{\Psi} \cdot) = \lim^{\nu} \hat{\Psi} \cdot & \text{si } \underline{\Psi} \cdot \in H'_{\lambda}. \end{cases}$$

La surjection F'_{λ} définit un homomorphisme F'_{λ} du graphe $[G_{\lambda}]$ vers le graphe $[C \cdot]$ sous-jacent à la catégorie $C \cdot$. Soit $\bar{F}'_{\lambda} = L(C \cdot, F'_{\lambda}, [G_{\lambda}])$ le foncteur de $L[G_{\lambda}] \cdot$ vers $C \cdot$ correspondant. Ce foncteur est compatible avec r_{λ} , car :

a) Si $((i, \underline{\Phi} \cdot), \underline{\Psi} \cdot), \tau(i)) \in D_{\lambda}$, on a

$$\bar{F}'_{\lambda}((i, \underline{\Phi} \cdot), \underline{\Psi} \cdot) = F'_{\lambda}(i, \underline{\Phi} \cdot), F'_{\lambda}(\underline{\Psi} \cdot) = p_i^{\nu}(\hat{\Phi} \cdot), \lim^{\nu} \hat{\Psi} \cdot = \bar{F}'_{\lambda}(\tau(i));$$

b) Si $((b', b), b' \cdot b) \in D_{\lambda}$, où $(b', b) \in \hat{M}_{\lambda'} * \hat{M}_{\lambda'}$, on trouve

$$\bar{F}'_{\lambda}(b', b) = \tilde{F}'_{\lambda'}(b'), \tilde{F}'_{\lambda'}(b) = \tilde{F}'_{\lambda'}(b' \cdot b) = \bar{F}'_{\lambda}(b' \cdot b);$$

c) Si $((\underline{\Psi} \cdot, b), \underline{\Psi} \cdot) \in D_{\lambda}$, où $b = \underline{\Psi}_1$ (resp. $b \in \hat{M}_{\lambda'}$), alors

$$p_i^{\nu}(\hat{\Phi} \cdot), \bar{F}'_{\lambda}(\underline{\Psi} \cdot, \underline{\Psi}_1) = p_i^{\nu}(\hat{\Phi} \cdot), \bar{F}'_{\lambda}(\underline{\Psi} \cdot) \quad \text{pour tout } i \in \alpha(\underline{\Psi})$$

$$(\text{resp. } \bar{F}'_\lambda(\underline{\Psi}^\cdot, b) = \lim^\nu \hat{\Psi}^\cdot \cdot F'_\lambda(b) = \lim^\nu \hat{\Psi}^\cdot \cdot \bar{F}'_\lambda(\underline{\Psi}^\cdot)) .$$

Il est a fortiori compatible avec $\hat{r}_\lambda$ étant donné que $\hat{r}_\lambda$ est la relation d'équivalence bicompatible sur $\alpha(\bar{F}'_\lambda)$ engendrée par r_λ . Comme $\hat{M}_\lambda^\cdot$ est une catégorie quotient de $L[G_\lambda]^\cdot$ par $\hat{r}_\lambda$, il existe un et un seul $\tilde{F}'_\lambda \in \mathcal{F}$ tel que $\tilde{F}'_\lambda \cdot \tilde{r}_\lambda = \bar{F}'_\lambda$, en notant $\tilde{r}_\lambda$ le $p\mathcal{F}$ -épimorphisme de $L[G_\lambda]^\cdot$ sur $\hat{M}_\lambda^\cdot$. Evidemment $\tilde{F}'_\lambda(b) = F'_\lambda(b)$ si ce dernier est défini. Par récurrence transfinie, on construit de cette manière un foncteur $F' = \tilde{F}'_\lambda$ de $\hat{H}^\cdot$ vers $C^\cdot$ tel que

$$F' = ((C^\cdot, \nu), \underline{F'}, (\hat{H}^\cdot, \hat{\nu})) \in \mathcal{F}^d \quad \text{et} \quad F' \cdot (\hat{H}^\cdot, \iota, H^\cdot) = F.$$

-Supposons que l'on ait

$$\hat{F}'' = ((C^\cdot, \nu), \underline{F''}, (\hat{H}^\cdot, \hat{\nu})) \in \mathcal{F}^d, \quad F'' = p^d(\hat{F}''),$$

et que F'' admette F pour restriction à $H^\cdot$. Soit $\lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons prouvé que F'' et F' ont la même restriction à $\hat{M}_\xi^\cdot$ pour tout $\xi < \lambda$. Montrons qu'ils ont aussi la même restriction à $\hat{M}_\lambda^\cdot$. En effet, ceci est évident si λ est de seconde espèce. Soit $\lambda = \lambda' + 1$; on a $F'(b) = F''(b)$ si $b \in \hat{M}_{\lambda'}^\cdot$. Supposons

$$\underline{\Phi}^\cdot \in K_\lambda, \quad I^\cdot = \alpha(\underline{\Phi})^\cdot \quad \text{et} \quad \Phi = (\hat{H}^\cdot, \underline{\Phi}, I^\cdot).$$

Puisque $\underline{\Phi}(I) \subset \hat{M}_{\lambda'}^\cdot$, on a $F' \cdot \Phi = F'' \cdot \Phi$, et par suite, pour tout $i \in I_0^\cdot$,

$$F''(i, \underline{\Phi}^\cdot) = F''(p_i^{\hat{\nu}}(\Phi)) = p_i^{\nu}(F'' \cdot \Phi) = F'(i, \underline{\Phi}^\cdot),$$

$$F''(\Phi^\cdot) = F'(\Phi^\cdot).$$

Si $\underline{\Psi}^\cdot \in H'_\lambda$, on obtient de même $\square F'' \cdot \Psi = \square F' \cdot \Psi$, où $\Psi = (\square \hat{H}^\cdot, \underline{\Psi}, \alpha(\Psi)^\cdot)$ et

$$F''(\underline{\Psi}^\cdot) = F''(\lim^{\hat{\nu}} \Psi) = \lim^\nu (\square F'' \cdot \Psi) = \lim^\nu (\square F' \cdot \Psi) = F'(\underline{\Psi}^\cdot).$$

Par conséquent F' et F'' ont même restriction $\bar{F}'_\lambda$ à G_λ , de sorte que

$$(C^\cdot, \underline{F''} \cdot \hat{M}_\lambda^\cdot) \cdot \tilde{r}_\lambda = L(C^\cdot, \underline{F''} \cdot [G_\lambda]) = \bar{F}'_\lambda = \tilde{F}'_\lambda \cdot \tilde{r}_\lambda.$$

Comme $\tilde{r}_\lambda$ est une $p\mathcal{F}$ -surjection, on en conclut que F' et F'' admettent $\tilde{F}'_\lambda$ pour restriction à $\hat{M}_\lambda^\cdot$. - Par récurrence transfinie, on obtient $F' = F''$.

Ceci signifie que $(\hat{H}^*, \hat{\nu})$ est une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par H^* . ■

B. COMPLETION PROJECTIVE LIBRE.

Soit $\mathcal{F}_{\sim}$ la catégorie quotient de $\mathcal{F}$ par la relation d'équivalence r :
 $F \sim F'$ si, et seulement si, il existe une équivalence naturelle
 de F sur F' .

Nous identifions $\mathcal{F}_0$ à la classe des unités de $\mathcal{F}_{\sim}$. Deux catégories sont isomorphes dans $\mathcal{F}_{\sim}$ si, et seulement si, elles sont équivalentes. En particulier, toute catégorie est isomorphe dans $\mathcal{F}_{\sim}$ à chacun de ses élargissements. Si $F \sim F'$ et si F est compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives, F' est aussi compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives. Soit $\mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{J}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}_{\sim}$ formée des classes $F \bmod r$, où F est un foncteur à $\mathcal{J}$ -limites projectives.

THEOREME 8. Supposons $\mathcal{J} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, $H^* \in \mathcal{F}_0$ et soit (C^*, ν) une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par H^* . Alors C^* est une $(\mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}_{\sim})$ -projection de H^* .

DEMONSTRATION. D'après le théorème 6, nous pouvons supposer que le $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, p^{\mathcal{J}})$ -projecteur $((C^*, \nu), J)$ est de la forme $J = (C^*, \iota, H^*)$, où H^* est une sous-catégorie pleine de C^* . Soit $F = (K^*, \overline{F}, H^*)$ un foncteur tel que K^* soit une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives. Choisissons une application $\mathcal{J}$ -limite projective ν' sur K^* . Les relations

$$(K^*, \nu') \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad F \in K^* \cdot \mathcal{F} \cdot H^*$$

assurent l'existence d'un et d'un seul

$$\hat{F}' = ((K^*, \nu'), \overline{F'}, (C^*, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$$

tel que $F' \cdot (C^*, \iota, H^*) = F$, où $F' = p^{\mathcal{J}}(\hat{F}')$. Dans la catégorie $\mathcal{F}_{\sim}$, on a $\tilde{F}' \cdot \tilde{J} = \tilde{F}$, où

$$\tilde{F}' = F' \bmod r, \quad \tilde{J} = (C^*, \iota, H^*) \bmod r \quad \text{et} \quad \tilde{F} = F \bmod r.$$

Supposons que l'on ait aussi

$$\tilde{F}'', \tilde{J} = \tilde{F}, \quad \text{où} \quad \tilde{F}'' \in \mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{J}}.$$

Il reste à montrer que $\tilde{F}'' = \tilde{F}'$. En effet, soit $F'' \in \tilde{F}''$. Nous savons (théorème 6) que C' est la complétion $\mathcal{J}$ -projective de $M = H$ dans (C', ν) et que, en reprenant les notations de la démonstration du théorème 5, on a $C = \bigcup_{\lambda < \hat{\lambda}} M_\lambda$. Pour tout ordinal $\lambda \leq \hat{\lambda}$, soient F'_λ et F''_λ les restrictions de F' et de F'' à M_λ . Comme $\tilde{F}'' \cdot \tilde{J} = \tilde{F}' \cdot \tilde{J}$, il existe une équivalence Γ_1 définie par le triplet (F''_1, γ_1, F'_1) . Soit $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons obtenue, pour tout $\xi < \lambda$, une équivalence Γ_ξ définie par le triplet

$$(F''_\xi, \gamma_\xi, F'_\xi),$$

de sorte que Γ_ξ admette $\Gamma_{\xi'}$ pour restriction si $\xi' < \xi$. Si λ est de seconde espèce, il existe une équivalence Γ_λ admettant Γ_ξ pour restriction pour tout $\xi < \lambda$. Soit $\lambda = \lambda' + 1$. Soit $E \in (M_\lambda)_0$ et posons

$$\gamma_\lambda(E) = \gamma_\xi(E) \text{ s'il existe } \xi < \lambda \text{ tel que } E \in M_\xi;$$

sinon, il existe un et un seul $\Phi \in \delta_{M_\lambda}^{I_0}$ tel que $E = \text{Lim}^\nu \Phi$, car Lim^ν est injectif d'après le théorème 6; comme F' et F'' sont compatibles avec les limites projectives, $F'(E)$ et $F''(E)$ sont des limites projectives de $F' \cdot \Phi$ et de $F'' \cdot \Phi$ respectivement, et $F''(p_i^\nu(\Phi))$ est la projection canonique $p_i'(F'' \cdot \Phi)$ de $F''(E)$ sur $F'' \cdot \Phi(i)$ pour tout $i \in I_0$. Puisque $\Phi(I) \subset M_\lambda$, le triplet $(F'' \cdot \Phi, \varphi, F' \cdot \Phi)$, où

$$\varphi(i) = \gamma_\lambda(\Phi(i)) \text{ pour tout } i \in I_0,$$

définit une équivalence; deux foncteurs équivalents ayant des limites projectives isomorphes, il existe un et un seul

$$b \in F''(E) \cdot K_\gamma \cdot F'(E) \text{ tel que } p_i'(F'' \cdot \Phi) \cdot b = \varphi(i) \cdot p_i^\nu(F' \cdot \Phi)$$

pour tout $i \in I_0$; posons $\gamma_\lambda(E) = b$. Montrons que le triplet $(F_\lambda, \gamma_\lambda, F'_\lambda)$ définit une équivalence Γ_λ . Pour cela, soit $m \in \sigma^\nu(M_\lambda) - M_\lambda$.

1°) Si $m = p_i^\nu(\Phi)$, on a :

$$\Gamma_\lambda(m) = (F''(p_i^\nu(\Phi)), \gamma_\lambda(\Phi(i)), \gamma_\lambda(E), F'(p_i^\nu(\Phi))) \in \square K;$$

2°) Soit $m = \text{lim}^\nu \Psi$, où $\Psi \in \Delta_{M_\lambda}^{I_0}$ est la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$; posons

$$E = \text{Lim}^\nu \Phi \text{ et } \Gamma_\lambda(m) = (F''(\text{lim}^\nu \Psi), \gamma_\lambda(E), \gamma_\lambda(e), F'(\text{lim}^\nu \Psi)).$$

On a $b' = F'(\lim^{\nu} \Psi) = \lim^{\nu'}(\coprod F', \Psi)$ et $F''(\lim^{\nu} \Psi)$ est l'unique $b'' \in K$ tel que

$$p'_i(F'', \Phi), b'' = F''(\tau(i)) \quad \text{pour tout } i \in I_0.$$

Les égalités

$$\begin{aligned} p'_i(F'', \Phi), b'' \cdot \gamma_{\lambda}(e) &= F''_{\lambda}(\tau(i)) \cdot \gamma_{\lambda}(e) = \gamma_{\lambda}(\Phi(i)) \cdot F'_{\lambda}(\tau(i)) = \\ &= \varphi(i) \cdot p'_i(F', \Phi), b' = p'_i(F'', \Phi), \gamma_{\lambda}(E), b' \end{aligned}$$

pour tout $i \in I_0$ entraînent $b'' \cdot \gamma_{\lambda}(e) = \gamma_{\lambda}(E), b'$, d'où $\Gamma_{\lambda}(m) \in \square K$.

Ainsi la surjection

$$\begin{cases} m \mapsto \Gamma_{\lambda}(m) & \text{si } m \in M_{\lambda}, \\ E \mapsto \gamma_{\lambda}(E) & \text{si } E \in (M_{\lambda})_0, \\ m \mapsto \Gamma_{\lambda}(m) & \text{si } m \in \sigma^{\nu}(M_{\lambda}) - M_{\lambda}, \end{cases}$$

définit une équivalence $\Gamma'_{\lambda} = (\coprod C^*, \Gamma_{\lambda}, L_{\lambda})$, où L_{λ} est le sous-graphe multiplicatif de C^* engendré par $\sigma^{\nu}(M_{\lambda})$, prolongeant Γ_{λ} . Puisque M_{λ} est la sous-catégorie de C^* engendrée par L_{λ} et que les néofoncteurs source et but de l'équivalence Γ'_{λ} sont les restrictions à L_{λ} des foncteurs F'_{λ} et F''_{λ} , il en résulte que le triplet $(F'_{\lambda}, \gamma_{\lambda}, F''_{\lambda})$ définit une équivalence Γ_{λ} prolongeant Γ'_{λ} .

- Par récurrence transfinie, on construit ainsi une équivalence $\hat{\Gamma}_{\lambda}$ de $F'_{\lambda} = F'$ sur $F''_{\lambda} = F''$. Donc $F' \sim F'' \text{ mod } r$ et $\tilde{F}' = \tilde{F}''$. ■

COROLLAIRE. Si $p\mathcal{F}(\mathcal{J})$ est contenu dans $\mathcal{U}$, soit $\mathcal{F}_{\sim}(\mathcal{U})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_{\sim}$ ayant pour unités les $\mathcal{U}$ -catégories et soit $\mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{J}}(\mathcal{U}) = \mathcal{F}_{\sim}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{J}}$. Alors $\mathcal{F}_{\sim}(\mathcal{U})$ est une catégorie à $\mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{J}}(\mathcal{U})$ -projections.

En effet, si $H^* \in \mathcal{F}_0$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie, une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre (C^*, ν) engendrée par H^* est telle que C^* soit une $\mathcal{U}$ -catégorie, en vertu du théorème 6. Le corollaire résulte donc du théorème 8. ■

DEFINITION. Une $(\mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}_{\sim})$ -projection de $H^* \in \mathcal{F}_0$ est appelée complétion $\mathcal{J}$ -projective libre de H^* .

D'après le théorème 8, si (C^*, ν) est une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre en-

gendrée par $H^* \in \mathcal{F}_0$, les complétions $\mathcal{I}$ -projectives libres de H^* sont les catégories équivalentes à C^* .

THEOREME 9. Supposons que $\mathcal{U} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ soit un univers et que $\mathcal{I}$ soit la classe de toutes les catégories triviales I^* telles que $I \in \mathcal{U}$. Soit $H^* \in \mathcal{F}_0$; on peut construire explicitement une complétion $\mathcal{I}$ -projective libre N^* de H^* sans utiliser de récurrence transfinie. Pour que N^* soit isomorphe à une sous-catégorie de $\mathcal{Q}(H^*)$ (démonstration du théorème 6), il faut et il suffit que, si $b \in H$ et $b' \in \beta(b).H$, il existe $k \in H$ et $k' \in H$, $\alpha(k)$ tels que $b.k \neq b'.k'$.

DEMONSTRATION. Soit $(\hat{H}^*, \hat{\nu})$ la $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}}, p^{\mathcal{I}})$ -structure libre engendrée par H^* construite dans la démonstration du théorème 7, dont nous reprenons les notations. Toutes les catégories $I^* \in \mathcal{I}$ étant triviales (i.e. telles que $I = I_0$), un élément $\underline{\Phi}^* \in K_\lambda$ ou $\underline{\Psi}^* \in H'_\lambda$ est entièrement déterminé par $\underline{\Phi}$ ou $\underline{\Psi}$, car $\cdot$ est la loi de composition triviale sur $\alpha(\underline{\Phi})$ ou $\alpha(\underline{\Psi})$; nous pouvons donc écrire $\underline{\Phi}$ ou $\underline{\Psi}$ au lieu de $\underline{\Phi}^*$ ou $\underline{\Psi}^*$. Soit N^* la sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$ admettant $(\hat{M}_2)_0$ pour classe de ses unités. Soit $E \in \hat{H}_0^* - H_0^*$. Par construction, on a $E = \underline{\Phi}$ et, d'après la démonstration du théorème 7,

$$E = \text{Lim}^{\hat{\nu}} \Phi, \quad \text{où} \quad \Phi = (\hat{H}^*, \underline{\Phi}, I^*) \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad I = \alpha(\underline{\Phi}).$$

Puisque I^* est triviale, E est donc un produit $\prod_{i \in I} \Phi(i)$. Si $E \in \hat{M}_2 - H_0^*$, on a $\Phi(i) \in H$ pour tout $i \in I$. Soit $\lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons montré que, pour tout $\xi < \lambda$, toute unité de $\hat{M}_\xi - \hat{M}_2$ est un produit de $(e_j)_{j \in J}$, où $e_j \in H_0^*$, pour tout $j \in J \in \mathcal{U}$. Si λ est de seconde espèce, toute unité de $\hat{M}_\lambda$ appartient à un $\hat{M}_\xi$, et par suite a la même propriété. Si $\lambda = \lambda' + 1$ et $E \in \hat{M}_\lambda - \hat{M}_{\lambda'}$, alors

$$E = \prod_{i \in I} \Phi(i), \quad \text{où} \quad \Phi(i) \in \hat{M}_{\lambda'} \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0^*.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $J_i \in \mathcal{U}$ tel que

$$\Phi(i) = \prod_{j \in J_i} e_j^i, \quad \text{où} \quad e_j^i \in H_0^*.$$

Puisque $\mathcal{U}$ est un univers,

$$J = \sum_{i \in I} J_i \in \mathcal{U}, \text{ d'où } J^* \in \mathcal{J},$$

en désignant par J^* la catégorie triviale sur J . D'après l'associativité du produit, E est un produit de la famille $u = (e_j^i)_{(i,j) \in J}$. Si $\underline{\Phi}^*$ désigne la surjection

$$(i, j) \rightarrow e_j^i \text{ de } I \text{ dans } H,$$

on a $E' = \underline{\Phi}^* \in \hat{M}_2$, et E' est aussi un produit de u dans $\hat{H}^*$. Par conséquent, E' est isomorphe à E dans $\hat{H}^*$.

-Par récurrence transfinie, on en déduit que toute unité de $\hat{H}^*$ est isomorphe à une unité de N^* dans $\hat{H}^*$. Donc $\hat{H}^*$ est un élargissement de N^* et a fortiori $\hat{H}^*$ est une catégorie équivalente à N^* . D'après le théorème 8, H^* admet pour $(\mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}_{\sim})$ -projection toute catégorie équivalente à $\hat{H}^*$ de sorte que N^* est une complétion $\mathcal{J}$ -projective libre de H^* .

-D'après la démonstration du théorème 5, H^* est une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$, et on a $H_o^* \cdot \hat{M}_2 = H_o^* \cdot \hat{H} \cdot (\hat{M}_2)_o^*$. Soit $f \in N$.

a) Si $\beta(f) \in H$, alors $f \in \hat{M}_2$;

b) Si $\beta(f) = \underline{\Phi} \notin H$, on a $f = \lim^{\hat{\nu}} \Psi$, en désignant par Ψ la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$, où $\Phi = (\hat{H}^*, \underline{\Phi}, \alpha(\underline{\Phi})^*)$ et

$$\tau(i) = (i, \underline{\Phi}) \cdot f \text{ pour tout } i \in \alpha(\underline{\Phi}).$$

$$\text{Or } \tau(i) \in \hat{M}_2, \text{ car } \tau(i) \in \Phi(i) \cdot \hat{H} \cdot (\hat{M}_2)_o^* \subset H_o^* \cdot \hat{H} \cdot (\hat{M}_2)_o^*.$$

Il s'ensuit $f = \underline{\Psi} \in \hat{M}_3$.

Ceci montre que N^* est la sous-catégorie pleine de $\hat{M}_3$ admettant $(\hat{M}_2)_o^*$ pour classe de ses unités. Autrement dit, pour construire N^* , il suffit de construire $\hat{M}_2^*$ et $\hat{M}_3^*$.

-D'après la démonstration du théorème 6 dont nous reprenons les notations il existe

$$\hat{\Gamma} = (\mathcal{A}(H^*), \nu_H^{\mathcal{J}}, \Gamma, (\hat{H}^*, \hat{\nu})) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$$

tel que

$$\eta_{H^*} = \Gamma \cdot (\hat{H}^*, \iota, H^*), \text{ où } \Gamma = p^{\mathcal{J}}(\hat{\Gamma}).$$

Pour qu'une sous-catégorie de $\mathcal{A}(H^*)$ soit une $(\mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}_{\sim})$ -projection de H^* , il faut et il suffit que la restriction Γ' de Γ à N^* soit un foncteur injectif. La restriction de Γ à H^* est injective et, puisque $\text{Lim}^{\mathcal{V}} H^*$ est injectif, la restriction de Γ à N_o^* est aussi injective. Soient

$$b_1 \in H, \quad b_2 \in H \quad \text{et} \quad \beta(b_1) = \beta(b_2) = e.$$

Désignons par Φ un foncteur de $I \in \mathcal{A}$ vers H^* tel que $\{1, 2\} = I$ et

$$\Phi(i) = \alpha(b_i) = e_i \quad \text{pour} \quad i = 1 \text{ et } 2.$$

Dans N^* , on a $b_1.(1, \Phi) \neq b_2.(2, \Phi)$. Calculons la transformation naturelle

$$\Psi_j = \Gamma(b_j.(j, \Phi)) = \eta_H.(b_j).p_j(\eta_H.\Phi), \quad \text{où} \quad j = 1 \text{ ou } 2,$$

qui est définie par le triplet $(\eta_H.(e), \tau_j, \text{Lim } \eta_H.\Phi)$. Si $e' \in H_o^*$, l'application $\tau_j(e')$ est l'application

$$((k_i)_{i \in I}, \hat{\Phi}) \rightarrow b_j.k_j, \quad \text{où} \quad \hat{\Phi} = \eta_H.\Phi, \quad \text{de} \quad \left(\prod_{i \in I} \Phi(i).H.e' \right) \times \{\hat{\Phi}\}$$

dans $e.H.e'$.

On a $\Psi_1 \neq \Psi_2$ si, et seulement si, il existe $k_1 \in H$ et $k_2 \in H$ tels que

$$\alpha(k_1) = \alpha(k_2) \quad \text{et} \quad b_1.k_1 \neq b_2.k_2,$$

de sorte que cette condition est nécessaire pour que Γ' soit injectif. - Inversement supposons cette condition vérifiée pour tout couple $(b_1, b_2) \in H \times H$ tel que $\beta(b_1) = \beta(b_2)$, et montrons que Γ' est injectif. En effet, d'après la démonstration du théorème 7, tout élément de $H_o^*.N$ est de la forme $b_i.(i, \Phi)$, où $b_i \in H$, et, d'après ce qui précède, la restriction de Γ à $H_o^*.N$ est injective. Soient

$$f_1 \in N \quad \text{et} \quad f_2 \in N \quad \text{tels que} \quad \Gamma'(f_1) = \Gamma'(f_2).$$

On a $\beta(f_1) = \beta(f_2) = \Phi$ et, comme nous avons vu dans la première partie de la démonstration,

$$f_j = \Psi_j = \text{Lim}^{\mathcal{V}} \Psi_j', \quad \text{où} \quad \Psi_j' = (\square H^*, \Psi_j', I^*),$$

pour $j = 1$ et 2 , est la transformation naturelle définie par un triplet $(\Phi, \tau_j, \hat{e})$ tel que $\tau_j(I) \subset H_o^*.N$. Les relations

$$\lim \coprod \Gamma . \Psi'_1 = \Gamma'(f_1) = \lim \coprod \Gamma . \Psi'_2$$

entraînent $\coprod \Gamma . \Psi'_1 = \coprod \Gamma . \Psi'_2$; puisque la restriction de $\sqsubset$ à $H^*_0 . N$ est injective, on en déduit $\underline{\Psi}'_1 = \underline{\Psi}'_2$, et par conséquent $f_1 = f_2$. Donc Γ' est injectif. ■

1+

PROPOSITION 21. Soit $\mathcal{F}'$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}$ formée des foncteurs à $\mathcal{J}$ -limites projectives. Pour que $H^* \in \mathcal{F}_0$ admette une $(\mathcal{F}', \mathcal{F})$ -projection il faut et il suffit que H^* soit une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives et que l'on ait $F \in \mathcal{F}'$ si $F \in \mathcal{F}' . \mathcal{F} . H^*$.

DEMONSTRATION. Soit $H^* \in \mathcal{F}_0$; selon le théorème 6 , il existe un $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, p^{\mathcal{J}})$ projecteur $((C^*, \nu), J)$ tel que $J = (C^*, \iota, H^*)$. Supposons qu'il existe un $(\mathcal{F}', \mathcal{F})$ -projecteur $J' = (K^*, J', H^*)$. Puisque $J \in \mathcal{F}$, il existe un et un seul $F' \in \mathcal{F}'$ tel que $F' . J' = J$. Par ailleurs, soit μ une application $\mathcal{J}$ -limite projective sur K^* . Les relations

$$(K^*, \mu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad J' \in K^* . \mathcal{F} . H^*$$

assurent l'existence d'un et d'un seul $\hat{F} \in (K^*, \mu) . \mathcal{F}^{\mathcal{J}} . (C^*, \nu)$ tel que

$$J' = F . J, \quad \text{où} \quad F = p^{\mathcal{J}}(\hat{F}).$$

Il en résulte

$$F . F' . J' = F . J = J' \quad \text{et} \quad F' . F . J = F' . J' = J.$$

Comme J' est un $(\mathcal{F}', \mathcal{F})$ -projecteur, la première relation entraîne $F . F' = K^*$. D'après le théorème 8 , $\tilde{J} = J \bmod r$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_{\sim}, \mathcal{F}_{\sim})$ -projecteur ; donc de l'égalité

$$\tilde{G} . \tilde{J} = \tilde{J}, \quad \text{où} \quad \tilde{G} = (F' . F) \bmod r,$$

il suit que $F' . F$ est équivalent au foncteur identique de C^* . Ceci montre que les catégories K^* et C^* sont équivalentes, i.e. K^* est aussi une complétion $\mathcal{J}$ -projective libre de H^* . Posons $\hat{H} = F'(K)$. Puisque K^* et $\hat{H}^*$ sont des catégories isomorphes, $J'' = (\hat{H}^*, \iota, H^*)$ est un $(\mathcal{F}', \mathcal{F})$ -projecteur et C^* est un élargissement de $\hat{H}^*$. Deux cas se présentent :

1°) Pour que $H = \hat{H}$, il faut et il suffit que l'on ait

$$H^* \in \mathcal{F}^1 \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_0^1 \cdot \mathcal{F} \cdot H^* = \mathcal{F}^1 \cdot H^*$$

(condition qui n'est généralement pas satisfaite).

2°) Supposons $H \not\equiv \hat{H}$. Comme H^* est une sous-catégorie pleine de C^* , on a $H_0^* \not\equiv \hat{H}_0^*$ et il existe $E \in \hat{H}_0^* - H_0^*$. Soit $\hat{C}^*$ un élargissement de C^* tel que $\hat{C}_0^* = C_0^* \cup \{E\}$, où $E' \notin C$, et qu'il existe $g \in E' \cdot \hat{C}_0^* \cdot E$ (il a été construit au cours de la démonstration du théorème 6). On trouve

$$G = (\hat{C}^*, \iota, C^*) \in \mathcal{F}^1, \quad \text{d'où} \quad G' = G \cdot (C^*, \iota, \hat{H}^*) \in \mathcal{F}^1.$$

Il existe une équivalence définie par un triplet (G'', τ, G') , dans lequel τ est la surjection

$$\tau(E) = g \quad \text{et} \quad \tau(e) = e \quad \text{si} \quad E \not\equiv e \in \hat{H}_0^*.$$

Les foncteurs G' et G'' ayant même restriction à H^* , on obtient

$$G'' \in \mathcal{F}^1 \quad \text{et} \quad G'' \cdot J'' = G' \cdot J''.$$

Comme $G''(E) = E' \not\equiv E = G'(E)$, l'élément J'' ne peut pas être un $(\mathcal{F}^1, \mathcal{F})$ -projecteur.

On obtient donc une impossibilité dans les 2 cas. Ceci achève la démonstration. Remarquons que ce résultat n'est pas en contradiction avec les critères d'existence d'adjoint, car le foncteur $(\mathcal{F}, \iota, \mathcal{F}^1)$ est bien à $\mathfrak{M}_0$ -limites projectives, mais la restriction de $P_{\mathcal{F}}$ à $\mathcal{F}^1$ n'est pas un foncteur $\mathcal{F}$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$. ■

REMARQUES. 1°) Si les conditions du théorème 9 sont vérifiées et si H^* est à $\mathcal{U}$ -produits, N^* n'est généralement pas un élargissement de H^* , de sorte que H^* n'est pas sa propre complétion $\mathcal{J}$ -projective libre.

2°) La proposition 21 montre que le problème universel du plongement d'une catégorie H^* dans une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives n'admet généralement pas de solution (contrairement à ce qui est affirmé dans [17]). Ainsi les résultats des théorèmes 6 et 8 sont «les meilleurs possibles». En d'autres termes, le théorème 8 signifie que le problème universel du plongement à une *équivalence* près (et non à un *isomorphisme* près) d'une catégorie H^* dans une catégorie à $\mathcal{J}$ -limites projectives admet

pour solution une complétion $\mathcal{J}$ -projective libre de H^* . Certains auteurs ont cherché à résoudre ce problème universel en associant à H^* une sous-catégorie de $\mathcal{A}(H^*)$; ainsi que le prouve le théorème 9, il n'existe pas toujours une solution de cette forme. Si $\mathcal{J}$ est la classe des catégories triviales ayant un nombre fini d'éléments, la catégorie $\text{Virt } H^*$ définie dans [9] est isomorphe à la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}(H^*)$ ayant $\Gamma(\hat{H})_0$ pour classe de ses unités (notations du théorème 9). Même si la condition du théorème 9 est vérifiée, de sorte que $\Gamma(N)^*$ soit une solution du problème universel en question, $\Gamma(N)^*$ peut ne pas être une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}(H^*)$; par suite $\text{Virt } H^*$ n'est pas une solution du problème universel voulu. C'est pourquoi est introduite dans [9] la notion de «foncteur compatible avec les produits virtuels» (i.e. un foncteur s'étendant aux catégories Virt associées à sa source et à son but), afin d'obtenir un problème universel dont $\text{Virt } H^*$ soit une solution.

3°) Avec les hypothèses du théorème 9, la complétion $\mathcal{J}$ -projective libre N^* de H^* est isomorphe à la «complétion libre canonique» de H^* construite directement dans [18]. D'après la remarque précédente, cette «complétion libre canonique» est donc solution du problème universel du plongement, à une équivalence près, de H^* dans une catégorie à produits.

THEOREME 10. Supposons $(H^*, \mu) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}}$. Il existe une complétion $\mathcal{J}$ -projective $(\bar{H}^*, \bar{\mu})$ de (H^*, μ) , et elle possède les propriétés suivantes:

- 1°) H^* est isomorphe à une sous-catégorie de $\bar{H}^*$;
- 2°) (H^*, μ) est une $q^{\mathcal{J}}$ -structure quasi-quotient d'une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par H^* .

DEMONSTRATION. D'après le corollaire du théorème 5, (H^*, μ) admet une $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}^{\mathcal{J}})$ -projection, i.e. une complétion $\mathcal{J}$ -projective. Soit $\hat{j}'$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}^{\mathcal{J}})$ -projecteur de source (H^*, μ) . Soit $\mathcal{A}(H^*)$ la catégorie construite dans la démonstration du théorème 6 dont nous reprenons les notations; soit ν_μ l'application $\mathcal{J}$ -limite projective sur $\mathcal{A}(H^*)$ telle que

$$\nu_\mu(\hat{\Phi}) = \mu(H^*, \underline{\Phi}, I^*) \text{ si } \hat{\Phi} = (\mathcal{A}(H^*), \hat{\underline{\Phi}}, I^*) = \eta_{H^*}(H^*, \underline{\Phi}, I^*)$$

et si $\mu(H^*, \underline{\Phi}, I^*)$ est défini,

$$\nu_{\mu}(\hat{\Phi}) = \nu_H^{\mathcal{J}}(\hat{\Phi}) \quad \text{autrement.}$$

La sous-catégorie $\eta_H.(H)^{\circ}$ admet une complétion $\mathcal{J}$ -projective $(\hat{K}^{\circ}, \hat{\nu})$ dans $(\mathcal{Q}(H^{\circ}), \nu_{\mu})$ et, comme $\hat{K} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ (théorème 5), il existe une bijection $\underline{G}$ et un

$$\hat{G} = ((\bar{K}^{\circ}, \bar{\nu}), \underline{G} \eta_{H^{\circ}}.(H^{\circ}, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}.$$

Par définition de $\hat{J}'$, il existe un et un seul $\hat{G}' \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ tel que $\hat{G}'.\hat{J}' = \hat{G}$. Cette égalité entraîne que $p^{\mathcal{J}}(\hat{J}')$ est injectif, puisque $p^{\mathcal{J}}(\hat{G})$ l'est. Ainsi $p^{\mathcal{J}}(\hat{J}')(H)^{\circ}$ est une catégorie isomorphe à H° .

-Soit (C°, ν) une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par H° ; nous pouvons supposer (théorème 6) que le $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, p^{\mathcal{J}})$ -projecteur correspondant est

$$((C^{\circ}, \nu), (C^{\circ}, \iota, H^{\circ})).$$

Si $\Phi = (H^{\circ}, \Phi, I^{\circ}) \in \mathcal{F}$ et si $\mu(\Phi)$ est défini, posons

$$\hat{\Phi} = (C^{\circ}, \underline{\Phi}, I^{\circ}) \quad \text{et} \quad a(\Phi) = \lim^{\nu}(\square C^{\circ}, \underline{\mu}(\Phi), I^{\circ}).$$

Soit A la classe des éléments $a(\Phi)$ tels que $\mu(\Phi)$ soit défini. Soit ρ la relation d'équivalence sur C° engendrée par la relation (C, V, C) , dans laquelle V est la classe des couples

$$(a(\Phi), \alpha(a(\Phi))), \quad \text{où} \quad a(\Phi) \in A.$$

Puisque le foncteur $q^{\mathcal{J}}$ vérifie les conditions du théorème 2, il existe une $q^{\mathcal{J}}$ -structure quasi-quotient $(\tilde{H}^{\circ}, \tilde{\mu})$ de (C°, ν) par ρ . Soit

$$\hat{D} = ((\tilde{H}^{\circ}, \tilde{\mu}), \underline{D}, (C^{\circ}, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$$

la $q^{\mathcal{J}}$ -quasi-surjection associée. Posons

$$\hat{J} = ((\tilde{H}^{\circ}, \tilde{\mu}), \underline{D} \iota.(H^{\circ}, \mu)) \quad \text{et} \quad J = p^{\mathcal{J}}(\hat{J}).$$

Nous allons montrer que $\hat{J}$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}^{\mathcal{J}})$ -projecteur. En effet, si $\Phi = (H^{\circ}, \underline{\Phi}, I^{\circ}) \in \mathcal{F}$ et si $\mu(\Phi)$ est défini, on a, pour tout $i \in I_0^{\circ}$,

$$p_i^{\mu}(\Phi) = p_i^{\nu}(\hat{\Phi}).a(\Phi) \quad \text{et} \quad \underline{D}(a(\Phi)) \in \tilde{H}_0^{\circ},$$

d'où

$$J(p_i^{\mu}(\Phi)) = \underline{D}(p_i^{\nu}(\hat{\Phi})).\underline{D}(a(\Phi)) = \underline{D}(p_i^{\nu}(\hat{\Phi})) = p_i^{\tilde{\mu}}(J.\Phi).$$

Ceci signifie que $\hat{J}$ appartient à $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$. Supposons

$$\hat{F} = ((S^*, \nu'), \overline{F}, (H^*, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad F = p^{\mathcal{J}}(\hat{F}).$$

Puisque (C^*, ν) est une $p^{\mathcal{J}}$ -structure libre engendrée par H^* , il existe un et un seul

$$\hat{F}' = ((S^*, \nu'), \overline{F'}, (C^*, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}} \quad \text{tel que} \quad F'.(C^*, \iota, H^*) \equiv F,$$

où $F' = p^{\mathcal{J}}(\hat{F}')$. Si $\Phi = (H^*, \overline{\Phi}, I^*) \in \mathcal{F}$ et si $\mu(\Phi)$ est défini, des relations $F'.\hat{\Phi} = F.\Phi$ et

$$\begin{aligned} p_i^{\nu'}(F.\Phi) &= F(p_i^{\mu}(\Phi)) = F'(p_i^{\mu}(\Phi)) = F'(p_i^{\nu}(\hat{\Phi})).F'(a(\Phi)) \\ &= p_i^{\nu'}(F'.\hat{\Phi}).F'(a(\Phi)) = p_i^{\nu'}(F.\Phi).F'(a(\Phi)), \end{aligned}$$

pour tout $i \in I_o^*$, on déduit $F'(a(\Phi)) \in S_o^*$, de sorte que F' est compatible avec ρ . Par définition d'une $q^{\mathcal{J}}$ -structure quasi-quotient, il existe un et un seul $\hat{F}'' \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ tel que $\hat{F}''.\hat{D} = \hat{F}'$, ce qui entraîne $\hat{F}''.\hat{J} = \hat{F}$. Si $\hat{F}_1''.\hat{J} = \hat{F}$, on a

$$\hat{F}_1''.\hat{D} \in (S^*, \nu').\mathcal{F}^{\mathcal{J}}.(C^*, \nu) \quad \text{et} \quad p^{\mathcal{J}}(\hat{F}_1''.\hat{D}).(C^*, \iota, H^*) = F.$$

Par construction de $\hat{F}'$, il s'ensuit $\hat{F}_1''.\hat{D} = \hat{F}'$; on en conclut $\hat{F}_1'' = \hat{F}''$, ce qui achève la démonstration. Tout $(H^*, \mu) \in \mathcal{F}_o^{\mathcal{J}}$ est évidemment sa propre complétion. ■

1+

Jusqu'ici, nous avons supposé que $\mathcal{J}$ ne contient pas la catégorie vide $\emptyset^*$. En réalité, les résultats de ce § sont encore vrais si l'on y supprime l'hypothèse $\emptyset^* \notin \mathcal{J}$. En effet toutes les démonstrations précédentes sont valables lorsque $I^* = \emptyset^* \in \mathcal{J}$ à condition d'adopter les conventions suivantes : Soit H^* une catégorie; $\hat{H}^*.\emptyset^*$ désigne une catégorie isomorphe à H^* , dont l'élément isomorphe à $h \in H$ est noté $\hat{h}$. Soit $\mathfrak{N}(H^*, \emptyset^*)^{\square}$ la catégorie admettant $\hat{H}^*.\emptyset^*$ pour sous-catégorie pleine, ayant une unité

2

$$\emptyset_H = (H^*, \emptyset, \emptyset^*) \in \mathcal{F},$$

et dont les autres éléments sont les triplets

$$\Psi_e = (\emptyset^*, \emptyset, \hat{e}), \quad \text{où} \quad e \in H_o^*,$$

et dont la loi de composition est telle que

$$\beta(\Psi_e) = \emptyset_H,$$

$$\Psi_e \square \hat{h} = \Psi_{e'}, \quad \text{si} \quad h \in H, e' = \alpha(h), e = \beta(h).$$

(Cette catégorie est la catégorie $H^*(\{\emptyset^*\})$ associée à H^* au début du chapitre IV, C.S.). Nous dirons que 0 est une limite projective de $\emptyset_H$ si Ψ_0 est un $(\mathcal{N}(H^*, \emptyset^*)^{\square}, \tilde{H}^* \cdot \emptyset^*)$ -éjecteur, i.e. si 0 est un élément final de H^* ; dans ce cas, Ψ_0 (qui est entièrement déterminé par 0) est la limite projective naturalisée associée. Avec ces conventions, il résulte par exemple du théorème 10 :

COROLLAIRE. Supposons $\emptyset^* \in \mathcal{I} \subset \mathcal{F}_0$ et $\mathcal{I} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Si $H^* \in \mathcal{F}_0$ admet un élément final 0 et si μ est une application $\mathcal{I}$ -limite projective partielle sur H^* telle que $\mu(\emptyset_H) = \Psi_0$, il existe une complétion $\mathcal{I}$ -projective $(\tilde{H}^*, \tilde{\mu})$ de (H^*, μ) dans laquelle H^* est une sous-catégorie de $\tilde{H}^*$ et 0 un élément final de $\tilde{H}^*$.

CAS PARTICULIER. Supposons dans le corollaire précédent que $\mathcal{I}$ soit la classe de toutes les catégories triviales correspondant à l'univers $\mathcal{U} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ et que $\mu(\emptyset_H)$ soit seul défini. Reprenons les notations des démonstrations des théorèmes 9 et 10, ce dernier étant appliqué au cas où l'on choisit pour (C^*, ν) la complétion $\mathcal{I}$ -projective libre $(\hat{H}^*, \hat{\nu})$ canonique de H^* .

- 1 ρ est la relation associée à une sous-catégorie propre de N^* ; par suite $D(C)^*$ est une sous-catégorie $\bar{H}^*$ de $\tilde{H}^*$ admettant $\tilde{H}^*$ pour élargissement. En identifiant H^* à une sous-catégorie de $\bar{H}^*$, on obtient une catégorie à $\mathcal{I}$ -limites projectives dont 0 est un élément final. Cette catégorie est construite directement dans [18].

3. Adjonction de limites inductives et limites projectives.

Nous reprenons les notations du § 1 et nous désignons par $\mathcal{J}$ une partie de $\mathcal{F}_0$, par $\mathcal{J}^*$ la classe des catégories J^* duales des catégories $J \in \mathcal{J}$. Le dual d'un foncteur Φ est noté Φ^* .

Soit H^* une catégorie. Nous appelons application $\mathcal{J}$ -limite inductive (resp. inductive partielle) sur H^* une application μ qui associe à tout (resp. à certains) foncteur Φ de $J \in \mathcal{J}$ vers H^* un $(\tilde{H}^* \cdot J^*, \mathcal{N}(H^*, J^*)^{\square})$ -projecteur $\mu(\Phi)$; alors $\text{Lim}^\mu \Phi$ désigne la limite inductive de Φ (resp. Lim^μ est le foncteur $\mathcal{J}$ -limite inductive de $\sum_{J \in \mathcal{J}} \mathcal{N}(H^*, J^*)^{\square}$ vers H^*) correspondant et $s_j^\mu(\Phi)$ désigne l'injection canonique de $\Phi(j)$ vers

$\lim_{\rightarrow}^{\mu} \Phi$ pour tout $j \in J_0$. Si Ψ est une transformation naturelle définie par le triplet $(\hat{e}, \tau, \Phi)$, où $\hat{e} \in \hat{H} \cdot J$, l'unique élément b tel que

$$b \cdot s_j^{\mu}(\Phi) = \tau(j), \quad \text{pour tout } j \in J_0,$$

est noté $\lim_{\rightarrow}^{\mu} \Psi$. Si J est la catégorie vide, les conventions sont celles introduites à la fin du § 2. Pour que μ soit une application $\mathcal{J}$ -limite inductive (resp. inductive partielle) sur H^* , il faut et il suffit que l'application $\mu^*: \Phi^* \rightarrow \varepsilon \cdot (\mu(\Phi)^*)$ si $\mu(\Phi)$ est défini, soit une application $\mathcal{J}^*$ -limite projective (resp. projective partielle) sur la duale H^* de H , où ε est l'isomorphisme de $(\prod H^*)^*$ vers $\prod H^*$ tel que $\varepsilon(f', b', b, f) = (f, b, b', f')$.

Soit $\mathcal{J}\mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{J}\mathcal{F}$) la catégorie isomorphe à $\mathcal{F}\mathcal{J}^*$ (resp. à $\mathcal{F}\mathcal{J}$) ayant pour éléments les triplets $\hat{F} = ((\hat{C}^*, \hat{\mu}), \underline{F}, (C^*, \mu))$ tels que

$$((\hat{C}^*, \hat{\mu}^*), \underline{F}, (C^*, \mu^*)) \in \mathcal{F}\mathcal{J}^* \quad (\text{resp. } \in \mathcal{F}\mathcal{J}^*).$$

Soient $\mathcal{J}_p$ et $\mathcal{J}_q$ les foncteurs projections canoniques de $\mathcal{J}\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}$ et $\mathcal{M}$ respectivement, $\mathcal{J}_Q$ le foncteur associé de même à $\mathcal{M}_0$. Soit $\mathcal{J}\mathcal{F}_{\sim}$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}_{\sim}$ formée des classes $F \bmod r$, où F est un foncteur à $\mathcal{J}$ -limites inductives. De tout résultat des § 1-2, nous déduisons par dualité un résultat analogue concernant les limites inductives. En particulier :

THEOREME 11. Soit $\mathcal{J} \in \mathcal{M}_0$. Alors $\mathcal{J}_Q$ est un foncteur à $\mathcal{M}_0$ -limites projectives et $\sim$ -engendrant pour $\mathcal{M}$. Tout $H^* \in \mathcal{F}_0$ admet une $\mathcal{J}_p$ -structure libre $(\hat{H}^*, \hat{\mu})$ telle que H^* soit une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$, que $\hat{\mu}$ soit injectif et que $\hat{H}^*$ soit une $\mathcal{U}$ -catégorie si $p\mathcal{F}(\mathcal{J}) \subset \mathcal{U}$ et si H^* est une $\mathcal{U}$ -catégorie; de plus $\hat{H}^*$ est une $(\mathcal{J}\mathcal{F}_{\sim}, \mathcal{F}_{\sim})$ -projection de H^* . La catégorie $\mathcal{J}\mathcal{F}'$ est une catégorie à $\mathcal{J}\mathcal{F}$ -projections.

DEFINITION. Si $(C^*, \mu) \in \mathcal{J}\mathcal{F}$ et si $M \subset C$, la $\mathcal{J}_Q$ -sous-structure de $(\hat{C}^*, \mu)$ engendrée par M est appelée *complétion $\mathcal{J}$ -inductive de M dans $(\hat{C}^*, \mu)$* . Une $(\mathcal{J}\mathcal{F}_{\sim}, \mathcal{F}_{\sim})$ -projection de $H^* \in \mathcal{F}_0$ est dite *complétion $\mathcal{J}$ -inductive libre de H^** . Une $(\mathcal{J}\mathcal{F}, \mathcal{J}\mathcal{F}')$ -projection de $(H^*, \mu) \in \mathcal{J}\mathcal{F}_0$ est appelée *complétion $\mathcal{J}$ -inductive de (H^*, μ)* .

Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux parties de $\mathcal{F}_0$. Désignons par $\mathcal{F}\mathcal{I}\mathcal{J}$ la catégorie

formée des triplets $\hat{F} = ((\hat{C}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu}), \underline{F}, (C^\bullet, \nu, \mu))$ tels que

$$((\hat{C}^\bullet, \hat{\nu}), \underline{F}, (C^\bullet, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \quad \text{et} \quad ((\hat{C}^\bullet, \hat{\mu}), \underline{F}, (C^\bullet, \mu)) \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}},$$

munie de la loi de composition

$$(w'_1, \underline{F}_1, w_1) \cdot (w', \underline{F}, w) = (w'_1, \underline{F}_1 \underline{F}, w)$$

si, et seulement si, $w_1 = w'$. Nous identifions la classe des unités de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ à la classe des triplets $(C^\bullet, \nu, \mu)$ tels que ν et μ soient respectivement une application $\mathcal{A}$ -limite projective partielle et une application $\mathcal{A}$ -limite inductive partielle sur $C^\bullet \in \mathcal{F}_0$. Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ ayant pour unités les $(C^\bullet, \nu, \mu)$ tels que $(C^\bullet, \nu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ et $(C^\bullet, \mu) \in \mathcal{G}^{\mathcal{A}}$. Soit $p^{\mathcal{A}}$ le foncteur de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ vers $\mathcal{F}$ associant $(\hat{C}^\bullet, \underline{F}, C^\bullet)$ à $\hat{F}$, et soit $p^{\mathcal{A}}$ sa restriction à $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$. Posons

$$q^{\mathcal{A}} = p_{\mathcal{F}} \cdot p^{\mathcal{A}} \quad \text{et} \quad q^{\mathcal{A}} = p_{\mathcal{G}} \cdot p^{\mathcal{A}}.$$

Soient $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}}$ et $\hat{\mathcal{G}}^{\mathcal{A}}$ les catégories associées de même à l'univers $\hat{\mathcal{M}}_0$, les foncteurs canoniques de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}}$ vers $\hat{\mathcal{M}}$ et $\hat{\mathcal{G}}$ étant respectivement $Q^{\mathcal{A}}$ et $P^{\mathcal{A}}$.

PROPOSITION 22. $p^{\mathcal{A}}$ et $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{A}})$ sont des foncteurs à $\mathcal{M}_0$ -limites projectives. $Q^{\mathcal{A}}$ est un foncteur ω -engendrant pour $\hat{\mathcal{M}}$.

DEMONSTRATION. Supposons $K \in \mathcal{M}_0$ et

$$E_k = (C_k^\bullet, \nu_k, \mu_k) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}} \quad \text{pour tout } k \in K.$$

D'après la proposition 20 et sa duale, il existe des produits $(C^\bullet, \nu)$ et $(C^\bullet, \mu)$ de $(C_k^\bullet, \nu_k)_{k \in K}$ et de $(C_k^\bullet, \mu_k)_{k \in K}$ dans $p^{\mathcal{A}}$ et dans $\mathcal{G}_{p'}$ respectivement, les projections canoniques étant

$$((C_k^\bullet, \nu_k), \underline{p}_k, (C^\bullet, \nu)) \quad \text{et} \quad ((C_k^\bullet, \mu_k), \underline{p}_k, (C^\bullet, \mu)),$$

si $(C_k^\bullet, \underline{p}_k, C^\bullet)$ est la projection canonique de la catégorie produit $C^\bullet = \prod_{k \in K} C_k^\bullet$ sur $C_k^\bullet$. Comme $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ est un produit fibré de $(p^{\mathcal{A}}, \mathcal{G}_{p'})$, il en résulte que $(C^\bullet, \nu, \mu)$ est un produit de $(E_k)_{k \in K}$ dans $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$, la k -ème projection étant $(E_k, \underline{p}_k, (C^\bullet, \nu, \mu))$. Si de plus $E_k \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}}$ pour tout $k \in K$ on trouve $(C^\bullet, \nu, \mu) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}}$, de sorte que $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{A}})$ est un foncteur à $\mathcal{M}_0$ -produits.

- Soient

$$\begin{aligned}\hat{F} &= ((\hat{C}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu}), F, (C^*, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}} \\ \hat{F}' &= ((\hat{C}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu}), F', (C^*, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

Si N est le noyau de $(p^{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\hat{F}), \bar{p}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\hat{F}'))$ dans $\mathcal{F}$, la proposition 20 et sa duale montrent qu'il existe une $q^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -sous-structure (N^*, ν') de (C^*, ν) et une $\mathcal{J}$ -sous-structure (N^*, μ') de (C^*, μ) . Il s'ensuit que (N^*, ν', μ') est un noyau de $(\hat{F}, \hat{F}')$ dans $p^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$. Donc (prop. 1), $p^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ et $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ sont des foncteurs à $\mathbb{M}_0$ -limites projectives.

- Soient $(C^*, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ et $M \subset C$. L'intersection $\hat{H}^*$ des sous-catégories H^* de C^* stables pour ν et pour μ et telles que $M \subset H$ a les mêmes propriétés; par suite $\hat{H}^*$ détermine une $Q^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -sous-structure $(\hat{H}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ de (C^*, ν, μ) , qui est évidemment la $Q^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -sous-structure de (C^*, ν, μ) engendrée par M . ■

COROLLAIRE. Tout $H^* \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ admet une $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ -projection.

En effet, la démonstration est analogue à celle du corollaire de la proposition 20. ■

DEFINITION. Si $(C^*, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ et si $M \subset C$, la $Q^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -sous-structure de (C^*, ν, μ) engendrée par M est appelée $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -complétion de M dans (C^*, ν, μ) .

Nous supposons désormais que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des parties de $\mathcal{F}_0$ telles que $\mathcal{A} \in \tilde{\mathbb{M}}_0$ et $\mathcal{B} \in \tilde{\mathbb{M}}_0$.

A. CONSTRUCTION D'UNE $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -COMPLÉTION.

THEOREME 12. Soit $(C^*, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ et désignons par $(\hat{M}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ la $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -complétion de $M \subset C$ dans (C^*, ν, μ) . Si $M \in \tilde{\mathbb{M}}_0$, on a $\hat{M} \in \tilde{\mathbb{M}}_0$. Si M^* est une sous-catégorie de C^* , si le foncteur Z est injectif et si $\text{Lim}^\nu \Phi \notin M$ (resp. $\text{Lim}^\mu \Phi \notin M$) pour tout $\Phi \in \hat{M}^* \cdot \mathcal{F} \cdot \mathcal{A}$ (resp. $\in \hat{M}^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{B}$), alors M^* est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}^*$; ici Z désigne le foncteur vers C^* somme de Lim^ν et de Lim^μ .

DEMONSTRATION. Soient $\lambda_{\mathcal{A}}$ et $\lambda_{\mathcal{B}}$ les ordinaux tels que

$$\lambda_{\mathcal{G}} = \sup_{I \in \mathcal{G}} \bar{I} \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathcal{J}} = \sup_{J \in \mathcal{J}} \bar{J}.$$

On a $\lambda_{\mathcal{G}} < \Lambda$ et $\lambda_{\mathcal{J}} < \Lambda$, où Λ désigne l'ordinal inaccessible associé à l'univers $\mathfrak{M}_0$ (démonstration du théorème 5). Notons $\hat{\lambda}$ l'ordinal initial régulier d'indice $(\sup(\lambda_{\mathcal{G}}, \lambda_{\mathcal{J}}) + 1)$; on a $\hat{\lambda} < \Lambda$.

-Supposons $M \subset C$ et soit $\hat{M}_1$ la sous-catégorie de C^* engendrée par M . Soit $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons définie, pour tout ordinal $\xi < \lambda$, une sous-catégorie $\hat{M}_{\xi}$ de C^* . Nous définissons alors une sous-catégorie $\hat{M}_{\lambda}$ de C^* comme suit :

1°) Si λ est de seconde espèce, $\hat{M}_{\lambda} = \bigcup_{\xi < \lambda} \hat{M}_{\xi}$.

2°) Soit $\lambda = \lambda' + 1$; soit $(M'_{\lambda}, \nu_{\lambda})$ la complétion $\mathcal{G}$ -projective de $\hat{M}_{\lambda'}$ dans (C^*, ν) ; alors $\hat{M}_{\lambda}$ est la sous-catégorie telle que $(\hat{M}_{\lambda}, \mu_{\lambda})$ soit la complétion $\mathcal{J}$ -inductive de M'_{λ} dans (C^*, μ) .

Par récurrence transfinie, nous obtenons ainsi une sous-catégorie $\hat{M}_{\hat{\lambda}}$ de C^* . Montrons que $\hat{M}_{\hat{\lambda}}$ est stable pour ν et μ . En effet, si

$$\Phi = (C^*, \Phi, I^*) \in \mathcal{F}, \mathcal{G},$$

on voit comme dans la démonstration du théorème 5 qu'il existe un $\xi < \hat{\lambda}$ tel que $\Phi(I) \subset \hat{M}_{\xi}$; puisque $M'_{\xi+1}$ est stable pour ν , on a

$$\lim^{\nu} \Phi \in M'_{\xi+1} \subset \hat{M}_{\xi+1}.$$

De même, si Ψ est la transformation naturelle définie par un triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$ où $\hat{e} \in C_0$, il existe un $\xi' < \hat{\lambda}$ tel que $\Psi(I) \subset \hat{M}_{\xi'}$, et par suite

$$\lim^{\nu} \Psi \in M'_{\xi'+1} \subset \hat{M}_{\xi'+1}.$$

Donc $\hat{M}_{\hat{\lambda}}$ est stable pour ν et, par un raisonnement analogue, on voit qu'il est stable pour μ . On en conclut que $\hat{M}_{\hat{\lambda}}$ définit une $Q^{\mathcal{G}}$ -sous-structure $(\hat{M}_{\hat{\lambda}}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ de (C^*, ν, μ) .

-Soit $(\hat{M}^*, \hat{\nu}^*, \hat{\mu}^*)$ la $(\mathcal{G}, \mathcal{J})$ -complétion de M dans (C^*, ν, μ) . De l'affirmation précédente, on déduit $\hat{M} \subset \hat{M}_{\hat{\lambda}}$. Par ailleurs, on a $\hat{M}_1 \subset \hat{M}$. Supposons montré que $\hat{M}_{\xi} \subset \hat{M}$ pour tout $\xi < \lambda$, où $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}$. Alors $\hat{M}_{\lambda} \subset \hat{M}$, si λ est de seconde espèce. Si $\lambda = \lambda' + 1$, on a $M'_{\lambda} \subset \hat{M}$, car M'_{λ} est la plus petite sous-catégorie de C^* stable pour ν et contenant $\hat{M}_{\lambda'}$, et

que $\hat{M}^*$ est stable pour ν ; de même $\hat{M}_\lambda \subset \hat{M}$, puisque $\hat{M}_\lambda^*$ est la plus petite sous-catégorie de C^* stable pour μ et contenant M'_λ . Ainsi, par récurrence transfinie, on obtient $\hat{M}_{\hat{\lambda}} \subset \hat{M}$. D'où

$$\hat{M}_{\hat{\lambda}}^* = \hat{M}^* \quad \text{et} \quad (\hat{M}^*, \hat{\nu}^*, \hat{\mu}^*) = (\hat{M}_{\hat{\lambda}}^*, \hat{\nu}^*, \hat{\mu}^*).$$

-Supposons $M \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. On a $\hat{M}_1 \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Soit $\lambda \leq \hat{\lambda}'$ et supposons prouvée la relation $\hat{M}_\xi \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ pour tout $\xi < \lambda$. Si λ est de seconde espèce, il s'ensuit $\hat{M}_\lambda \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, car $\lambda \leq \hat{\lambda}' < \Lambda$ et que $\tilde{\mathcal{M}}_0$ est un univers admettant Λ pour ordinal associé. Si $\lambda = \lambda' + 1$, alors $M'_\lambda \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ en vertu du théorème 5, et $\hat{M}_\lambda \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, d'après le théorème 11. Par récurrence transfinie, on trouve $\hat{M} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$.

-Supposons vérifiées les conditions de la deuxième affirmation du théorème. On a $\hat{M}_1 = M$. Soit $1 < \lambda \leq \hat{\lambda}'$ et supposons montré que M^* est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}_\xi^*$ pour tout $\xi < \lambda$.

1°) Si λ est de seconde espèce et si $f \in M_0^* \cdot \hat{M}_\lambda \cdot M_0^*$, il existe un $\xi < \lambda$ tel que $f \in M_0^* \cdot \hat{M}_\xi \cdot M_0^* \subset M$, de sorte que M^* est pleine dans $\hat{M}_\lambda^*$.

2°) Soit $\lambda = \lambda' + 1$. M'_λ définit la complétion $\mathcal{I}$ -projective de $\hat{M}_\lambda$ dans (C^*, ν) et l'on montre (voir démonstration dans appendice, corollaire du lemme 7) que la condition A du lemme 6 (appendice) est vérifiée. Ce lemme affirme que $\hat{M}_\lambda^*$ est pleine dans M'_λ et (duallement) que M'_λ est pleine dans $\hat{M}_\lambda^*$. Comme M^* est pleine dans $\hat{M}_\lambda^*$ par hypothèse de récurrence, elle est a fortiori pleine dans $\hat{M}_\lambda^*$.

On voit donc, par récurrence transfinie, que M^* est pleine dans $\hat{M}_{\hat{\lambda}}^* = \hat{M}^*$.

-Nous allons maintenant donner une autre construction de $\hat{M}^*$ qui nous sera utile pour la démonstration des théorèmes suivants. Pour cela, définissons au préalable l'opérateur $\sigma^{\nu\mu}$ qui associe à toute sous-catégorie B^* de C^* la partie $\sigma^{\nu\mu}(B)$ telle que

$$\sigma^{\nu\mu}(B) = \sigma^\nu(B) \cup \sigma_\mu(B),$$

où $\sigma^\nu(B)$ est la classe associée à B relativement à (C^*, ν) dans la démonstration du théorème 5 et où $\sigma_\mu(B)$ est la classe $\sigma^{\mu*}(B)$ associée

d'une manière analogue à B relativement à $(C^*, \mu^*) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{A}*}$. Nous définissons par récurrence transfinie une suite transfinie $(\tilde{M}_\lambda)_{\lambda \leq \hat{\lambda}}$ de sous-catégories de C^* en posant :

- 1°) $\tilde{M}_1 = \hat{M}_1$;
- 2°) $\tilde{M}_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \tilde{M}_\xi$, si λ est de seconde espèce;
- 3°) $\tilde{M}_\lambda =$ sous-catégorie de C^* engendrée par $\sigma^\nu \mu(\tilde{M}_{\lambda'})$, si $\lambda = \lambda' + 1$.

On obtient ainsi une sous-catégorie $\tilde{M}_{\hat{\lambda}}$ de C^* . Un raisonnement semblable à celui utilisé pour prouver le théorème 5 montre que $\tilde{M}_{\hat{\lambda}}$ est une sous-catégorie de C^* stable pour ν et pour μ , et par suite $\hat{M} \subset \tilde{M}_{\hat{\lambda}}$. Inversement, il est évident que $\tilde{M}_1 \subset \hat{M}$ et que, si $\tilde{M}_\xi \subset \hat{M}$, on a aussi $\tilde{M}_{\xi+1} \subset \hat{M}$; d'où, par récurrence transfinie, $\tilde{M}_{\hat{\lambda}} \subset \hat{M}$. Donc $\hat{M} = \tilde{M}_{\hat{\lambda}}$. ■

COROLLAIRE. $Q^{\mathcal{A}}$ est un foncteur $\mathcal{A}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$. Les foncteurs $p^{\mathcal{A}}$ et $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{A}})$ admettent des adjoints.

En effet, la démonstration est analogue à celle du corollaire du théorème 5. ■

B. $p^{\mathcal{A}}$ -STRUCTURES LIBRES.

THEOREME 13. Tout $H^* \in \mathcal{F}_0$ engendre une $p^{\mathcal{A}}$ -structure libre (C^*, ν, μ) ayant les propriétés suivantes :

H^* est une sous-catégorie pleine de C^* et le foncteur somme de Lim^ν et de Lim^μ est injectif.

DEMONSTRATION. Soit $((C^*, \nu, \mu), J)$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}, p^{\mathcal{A}})$ -projecteur. Il en existe d'après le corollaire du théorème 12. Soit $\tilde{\mathcal{Q}}(H^*)$ la catégorie $\mathcal{N}(\mathcal{M}, H_+^*)^{\square}$, où H_+^* est la catégorie obtenue en ajoutant à H^* un élément initial 0, et soit $\tilde{\eta}_H$ le foncteur canonique

$$(\tilde{\mathcal{Q}}(H^*), \iota, \mathcal{Q}(H^*)) \cdot \eta_H \in \hat{\mathcal{F}}$$

de H^* vers $\tilde{\mathcal{Q}}(H^*)$ (nous reprenons les notations de la démonstration du théorème 6). Puisque $\mathcal{M}$ est une catégorie à $\mathcal{M}_0$ -limites projectives et à $\mathcal{M}_0$ -limites inductives, $\tilde{\mathcal{Q}}(H^*)$ est une catégorie à $\mathcal{A}$ -limites projectives

et à $\mathcal{J}$ -limites inductives, car $\mathcal{I} \cup \mathcal{J} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Soient Lim et $\text{Lim}_{\rightarrow}$ les foncteurs $\mathcal{I}$ -limite projective et $\mathcal{J}$ -limite inductive canoniques sur $\mathcal{M}$. Soit

$$\tilde{\Phi} \in \tilde{\mathcal{Q}}(H^{\bullet}). \hat{\mathcal{F}}.(\mathcal{I} \cup \mathcal{J}).$$

Pour tout $e \in (H_+)^{\bullet}_0$, désignons par $\tilde{\Phi}_e$ le foncteur (théorème 6) de $\alpha(\tilde{\Phi})$ vers $\mathcal{M}$ tel que

$$\tilde{\Phi}_e(k) = \tau_k(e) \text{ pour tout } k \in \alpha(\tilde{\Phi}), \text{ où } \tilde{\Phi}(k)(e) = \tau_k(e) \in (\boxplus \mathcal{M})_0.$$

Soient $l(\tilde{\Phi}_e)$ la limite projective de $\tilde{\Phi}_e$ formée des couples

$$(z, \tilde{\Phi}), \quad \text{où } z \in \text{Lim } \tilde{\Phi}_e,$$

et soit $l'(\tilde{\Phi}_e)$ la limite inductive de $\tilde{\Phi}_e$ dont les éléments sont les couples

$$(\tilde{\Phi}, z'), \quad \text{où } z' \in \text{Lim}_{\rightarrow} \tilde{\Phi}_e.$$

Il existe une limite projective $\text{Lim}^{\tilde{\nu}} \tilde{\Phi}$ (resp. limite inductive $\text{Lim}_{\rightarrow}^{\tilde{\mu}} \tilde{\Phi}$), qui est le foncteur de H_+^* vers $\mathcal{M}$ tel que

$$\text{Lim}^{\tilde{\nu}} \tilde{\Phi}(e) = l(\tilde{\Phi}_e) \quad (\text{resp. } \text{Lim}_{\rightarrow}^{\tilde{\mu}} \tilde{\Phi}(e) = l'(\tilde{\Phi}_e))$$

pour tout $e \in (H_+)^{\bullet}_0$; la transformation naturelle correspondante qui n'appartient pas à $\eta_H.(H)$, est notée $\tilde{\nu}(\tilde{\Phi})$ (resp. $\tilde{\mu}(\tilde{\Phi})$). Ainsi nous définissons sur $\tilde{\mathcal{Q}}(H^{\bullet})$ une application $\mathcal{I}$ -limite projective $\tilde{\nu} : \tilde{\Phi} \rightarrow \tilde{\nu}(\tilde{\Phi})$ et une application $\mathcal{J}$ -limite inductive $\tilde{\mu} : \tilde{\Phi} \rightarrow \tilde{\mu}(\tilde{\Phi})$. Donc

$$\tilde{S} = (\tilde{\mathcal{Q}}(H^{\bullet}), \tilde{\nu}, \tilde{\mu}) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}.$$

Si $d_1(\tilde{\Phi}) = d_2(\tilde{\Phi}_1)$, où $d_m = \text{Lim}^{\tilde{\nu}}$ ou $\text{Lim}_{\rightarrow}^{\tilde{\mu}}$, et si $\tilde{\Phi}_0(e)$ est un atome pour tout $e \in H_0^{\bullet}$, alors $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_1$ car $d_m(\tilde{\Phi})_0$ contient au moins un couple $(z, \tilde{\Phi})$ ou $(\tilde{\Phi}, z)$. La classe $\eta_H.(H) \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ admet une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion $\bar{S}$ dans $\tilde{S}$. (Remarquons que la saturante de $P^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(\bar{S})$ dans $\tilde{\mathcal{Q}}(H^{\bullet})$ est la complétion régulière gauche de $H^{\bullet}$ au sens de [12].) Etant donné que $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ est $\mathcal{M}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$ d'après le théorème 12, on a $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(\bar{S}) \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Par suite, il existe

$$\hat{u} = ((\tilde{\mathcal{Q}}'(H^{\bullet}), \tilde{\nu}', \tilde{\mu}'), \underline{u}, \bar{S}) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{I}\mathcal{J}}. \hat{\mathcal{F}}_{\gamma}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$$

et l'on peut supposer, en identifiant $H^{\bullet}$ à une sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{Q}}'(H^{\bullet})$,

$$(\tilde{Q}'(H \cdot), \underline{u} \eta_{H \cdot}, H \cdot) = (\tilde{Q}'(H \cdot), \iota, H \cdot).$$

Les relations

$$(\tilde{Q}'(H \cdot), \tilde{\nu}', \tilde{\mu}') \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}} \quad \text{et} \quad (\tilde{Q}'(H \cdot), \iota, H \cdot) \in \mathcal{F}$$

assurent l'existence d'un et d'un seul

$$\hat{F} = ((\tilde{Q}'(H \cdot), \tilde{\nu}', \tilde{\mu}'), \underline{F}, (C \cdot, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$$

tel que

$$F \cdot J = (\tilde{Q}'(H \cdot), \iota, H \cdot), \quad \text{où} \quad F = p^{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\hat{F}).$$

Il s'ensuit que J est injectif, de sorte que $J(H) \cdot$ est une sous-catégorie $M \cdot$ de $C \cdot$ et que $F' = (H \cdot, \underline{F} \iota, M \cdot)$ est un isomorphisme.

- Dans la fin de cette démonstration, les symboles d et d' peuvent être lus indifféremment Lim ou Lim , à condition de supposer que $I \cdot$ et $I_m \cdot$ appartiennent à $\mathcal{J}$ dans le premier cas, à $\mathcal{J}$ dans le deuxième cas. L'indice m prend les valeurs 1 et 2. Si $\Phi \in C \cdot \cdot \mathcal{F} \cdot I \cdot$, on a

$$F(d(\Phi)) = d(F \cdot \Phi) = \underline{u}(d(\tilde{Q}'(H \cdot), \underline{u}^{-1} \underline{F} \Phi, I \cdot)) \neq \underline{u}(\eta_{H \cdot}(H)) = H,$$

d'où $d(\Phi) \notin M$. Par construction d'une $p^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -structure libre, $(C \cdot, \nu, \mu)$ est la $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -complétion de M dans $(C \cdot, \nu, \mu)$, car c'est la $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -complétion de $M = J(H)$ dans un produit d'éléments de $\mathcal{F}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ (théorème 1). En vertu de la fin de la démonstration du théorème 12 dont nous reprenons les notations, on a $C = \bigcup_{\lambda < \hat{\lambda}} \tilde{M}_\lambda$.

Supposons

$$\Phi_m \in C \cdot \cdot \mathcal{F} \cdot I_m \cdot, \quad \Phi_1 \neq \Phi_2 \quad \text{et} \quad d(\Phi_1) = E = d(\Phi_2).$$

Soit λ le plus petit ordinal tel que $\Phi_1(I_1) \cup \Phi_2(I_2) \subset \tilde{M}_\lambda$ (la démonstration du théorème 12 prouve qu'il existe un tel $\lambda < \hat{\lambda}$). Nous pouvons supposer que l'on a $\Phi_2(I_2) \not\subset \tilde{M}_\xi$ pour tout $\xi < \lambda$. Soit $\hat{C} \cdot$ la catégorie obtenue par élargissement de $C \cdot$ telle que $\hat{C}_0 = C_0 \cup \{E'\}$ et que $E' \notin C$ soit isomorphe à E dans $\hat{C} \cdot$ (cette catégorie est construite au cours de la démonstration du théorème 6). Le foncteur $(\hat{C} \cdot, \iota, C \cdot)$ est à $\mathcal{J}$ -limites projectives et à $\mathcal{J}$ -limites inductives; E' étant isomorphe à E dans $\hat{C} \cdot$, on peut trouver des applications $\mathcal{J}$ -limite projective $\bar{\nu}$ et $\mathcal{J}$ -limite induc-

tive $\bar{\mu}$ sur $\hat{C}^*$ telles que

$$\begin{aligned} p_i^\nu(\hat{\Phi}) &= p_i^\nu(\Phi) \text{ et } s_i^\mu(\hat{\Phi}) = s_i^\mu(\Phi) \\ \text{si } \hat{\Phi}(I) &\subset C \text{ et } \Phi = (C^*, \hat{\Phi}, I^*) \neq \Phi_2, \\ d'(\hat{C}^*, \hat{\Phi}_2, I_2^*) &= E'. \end{aligned}$$

Des relations

$$(\hat{C}^*, \bar{\nu}, \bar{\mu}) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}\mathcal{G}} \quad \text{et} \quad (\hat{C}^*, \iota, C^*), J \in \mathcal{F},$$

il résulte l'existence d'un et d'un seul

$$\hat{G} = ((\hat{C}^*, \bar{\nu}, \bar{\mu}), \bar{G}, (C^*, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$$

tel que $\bar{G}, J = (\hat{C}^*, \iota, C^*), J$, où $\bar{G} = p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(\hat{G})$. En utilisant la construction de $\tilde{M}_{\xi+1}$ comme sous-catégorie de C^* engendrée par $\sigma^{\nu\mu}(\tilde{M}_{\xi})$, un raisonnement analogue à celui fait dans la démonstration du théorème 6 prouve, par récurrence transfinie, que la restriction de $\bar{G}$ à $\tilde{M}_{\lambda}$ est l'identité et que l'on a

$$E = G(d(\Phi_1)) = G(d(\Phi_2)) = E',$$

ce qui est impossible. Donc $\Phi_1 = \Phi_2$ et le foncteur somme de π^ν et de $\lim^\mu$ est injectif.

- Toutes les hypothèses du théo. 12 étant vérifiées relativement à M et à (C^*, ν, μ) , ce théorème affirme que M^* est une sous-catégorie pleine de C^* . Ceci achève la démonstration. ■

C. COMPLETION LIBRE.

Soit $\mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}_{\sim}$ (voir n° 2) formée des classes $F \bmod r$, où F est un foncteur à $\mathcal{I}$ -limites projectives et à $\mathcal{J}$ -limites inductives.

THEOREME 14. Si (C^*, ν, μ) est une $p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ -structure libre engendrée par $H^* \in \mathcal{F}_0$, alors C^* est une $(\mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}, \mathcal{F}_{\sim})$ -projection de H^* .

DEMONSTRATION. Le raisonnement est analogue à celui utilisé pour prouver le théorème 8. Il utilise les résultats suivants :

1°) (C^*, ν, μ) est la $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion d'une sous-catégorie M^*

isomorphe à H^* (théorème 13) et $C = \bigcup_{\lambda < \lambda'} \tilde{M}_\lambda$, où $\tilde{M}_{\lambda+1}$ est la sous-catégorie de C^* engendrée par $\sigma^{\nu\mu}(\tilde{M}_\lambda)$ (fin de la démonstration du théorème 12).

2°) Pour tout $\lambda < \lambda'$, toute unité E de $\tilde{M}_{\lambda+1} - \tilde{M}_\lambda$ est associée à un et un seul $\Phi \in C^* \cdot \mathcal{F} \cdot I^*$ tel que $\Phi(I) \subset M_\lambda$ et que $E = \lim^{\nu} \Phi$ ou $E = \lim^{\mu} \Phi$. ■

DEFINITION. Une $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F})$ -projection de $H^* \in \mathcal{F}_0$ est appelée $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ -complétion libre de H^* . Une $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}})$ -projection de $(H^*, \nu, \mu) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}}$ est appelée une $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ -complétion de (H^*, ν, μ) .

D'après les théorèmes 6 et 14, si $H^* \in \mathcal{F}_0$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie, elle admet une $(\mathcal{A}, \emptyset)$ -complétion libre qui est aussi une $\mathcal{U}$ -catégorie, $\mathcal{U}$ étant un univers contenant $p\mathcal{F}(\mathcal{A})$.

THEOREME 15. Tout $(H^*, \nu, \mu) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}}$ admet une $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ -complétion $(\tilde{H}^*, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ ayant les propriétés suivantes :

- 1°) H^* est une sous-catégorie de $\tilde{H}^*$;
- 2°) $(\tilde{H}^*, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ est une $q^{\mathcal{A}}$ -structure quasi-quotient d'une $p^{\mathcal{A}}$ -structure libre engendrée par H^* .

DEMONSTRATION. Soit $\hat{J}' \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \cdot \mathcal{J} \cdot (H^*, \nu, \mu)$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}})$ -projecteur; il en existe d'après le corollaire du théorème 12. On sait [12] qu'il existe une sous-catégorie $\mathcal{Q}_1(H^*)$ de la catégorie $\tilde{\mathcal{Q}}(H^*)$ (notation de la démonstration du théorème 13) telle que le foncteur $(\mathcal{Q}_1(H^*), \eta_{H^*}, H^*)$ soit à $\mathcal{J}$ -limites projectives et à $\mathcal{J}$ -limites inductives. ($\mathcal{Q}_1(H^*)$ est la «trans-complétion gauche de H^* » au sens de [12]). Choisissons une application $\mathcal{J}$ -limite projective $\bar{\nu}$ et une application $\mathcal{J}$ -limite inductive $\bar{\mu}$ sur $\mathcal{Q}_1(H^*)$ telles que

$$p_i^{\bar{\nu}}(\hat{\Phi}) = \eta_H \cdot (p_i^{\nu}(\Phi)) \quad (\text{resp. que } s_i^{\bar{\mu}}(\hat{\Phi}) = \eta_H \cdot (s_i^{\mu}(\Phi)))$$

si $\hat{\Phi}(I) \subset \eta_H \cdot (H)$ et si $\Phi = (H^*, \eta_H^{-1} \cdot \hat{\Phi}, I^*)$, où $I^* = \alpha(\hat{\Phi})$. Soit

$$(\mathcal{Q}_1(H^*), \bar{\nu}', \bar{\mu}')$$

la $(\mathcal{A}, \mathcal{J})$ -complétion de $\eta_H \cdot (H)$ dans $(\mathcal{Q}_1(H^*), \bar{\nu}, \bar{\mu}) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}}$. D'après

le théorème 12, on a $P\mathcal{F}(\mathcal{Q}_1(H^\bullet)) \in \tilde{\mathcal{M}}_o$, de sorte qu'il existe

$$\hat{u} \in \mathcal{F}_o^{\mathcal{A}\mathcal{B}} \cdot \hat{\mathcal{F}}_{\gamma}^{\mathcal{A}\mathcal{B}} \cdot (\mathcal{Q}_1(H^\bullet), \bar{\nu}', \bar{\mu}')$$

Puisque

$$\hat{F} = \hat{u} \cdot ((\mathcal{Q}_1(H^\bullet), \bar{\nu}', \bar{\mu}'), \eta_{H^\bullet}, (H^\bullet, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}},$$

il existe un et un seul $\hat{F}' \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ tel que $\hat{F} = \hat{F}' \cdot \hat{J}'$. Etant donné que $q^{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\hat{F})$ est une injection, il en sera de même pour $J' = q^{\mathcal{A}\mathcal{B}}(\hat{J}')$. Donc $J'(H)^\bullet$ est une catégorie isomorphe à $H^\bullet$, et on peut trouver un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ -projecteur vérifiant la condition 1.

- Soit $((C^\bullet, \nu, \mu), J)$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, p^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ -projecteur tel que $\alpha(J) = H^\bullet$. D'après le théorème 13, on peut supposer que $J = (C^\bullet, \iota, H^\bullet)$. Si $\nu(\Phi)$ (resp. $\mu(\Phi)$) est défini, posons

$$a_\nu(\Phi) = \lim^\nu (\coprod C^\bullet, \underline{\nu(\Phi)}, \alpha(\Phi))$$

$$(\text{resp. } a_\mu(\Phi) = \lim^\mu (\coprod C^\bullet, \underline{\mu(\Phi)}, \alpha(\Phi))).$$

Soit A la classe formée de tous les éléments $a_\nu(\Phi)$ et $a_\mu(\Phi)$ ainsi construits. Désignons par ρ la relation d'équivalence sur C engendrée par la relation (C, V', C) , où V' est la classe des couples $(b, \alpha(b))$ tels que $b \in A$. Puisque $Q^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ est un foncteur $\wedge$ -engendrant pour $\mathcal{M}$ et à $\tilde{\mathcal{M}}_o$ -limites projectives, il existe une $q^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -structure quasi-quotient $(\tilde{H}^\bullet, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ de $(C^\bullet, \nu, \mu)$ par ρ , en vertu du théorème 2. Une démonstration analogue à celle du théorème 10 prouve que $(\tilde{H}^\bullet, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ est une $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ -projection de $(H^\bullet, \nu, \mu)$. ■

REMARQUES. 1°) Tout élément de $\mathcal{F}_o^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ est identique à son $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -complétion. Si $H^\bullet \in \mathcal{F}_o$ et si $(\hat{H}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ est une $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -complétion de $(H^\bullet, \emptyset, \emptyset)$ les $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -complétions libres de $H^\bullet$ sont les catégories équivalentes à $\hat{H}^\bullet$.

2°) Le théorème 14 signifie que la $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -complétion libre de $H^\bullet$ résout le problème universel du plongement, à une équivalence près, de $H^\bullet$ dans une catégorie à $\mathcal{B}$ -limites projectives et à $\mathcal{A}$ -limites inductives. Le théorème 15 peut encore s'exprimer en disant que la $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -complétion de $(H^\bullet, \nu, \mu)$ est solution du problème universel du plongement de $H^\bullet$ dans une catégorie munie d'une application $\mathcal{B}$ -limite projective $\hat{\nu}$

et d'une application $\mathcal{J}$ -limite inductive $\hat{\mu}$, de sorte que le plongement soit compatible avec $(\nu, \hat{\nu})$ et avec $(\mu, \hat{\mu})$.

3°) Soit $H^* \in \mathcal{F}_0$ et (C^*, ν, μ) une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion libre de H^* . Si $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ est formée des catégories triviales finies, une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion libre $\hat{H}^*$ de H^* a été construite explicitement dans [18]. La construction de [18] peut se déduire du deuxième procédé indiqué dans le théorème 12 pour construire la $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion de H^* dans (C^*, ν, μ) par une « abstraction » analogue à celle qui a conduit du théorème 5 aux théorèmes 7 et 9. $\hat{H}^*$ est un élément minimal de la classe ordonnée par inclusion des parties K de C telles que $H \subset K$ et que K^* soit une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion libre de H^* .

4°) Appliqué à partir de l'univers $\mathcal{M}_0$ (en supposant qu'il existe un univers contenant $\mathcal{M}_0$ et admettant $\mathcal{M}_0$ pour élément), le théorème 15 prouve que tout élément de $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ admet une $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_0)$ -complétion appartenant à $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$. Le théorème 6 montre que, si $\mathcal{U}$ est un univers compris entre $\mathcal{M}_0$ et $\hat{\mathcal{M}}_0$ et si $H^* \in \hat{\mathcal{F}}_0$ est une $\mathcal{U}$ -catégorie, elle admet une $(\mathcal{M}_0, \emptyset)$ -complétion libre qui est une $\mathcal{U}$ -catégorie. On peut traduire comme suit les résultats précédents en termes de « petites » catégories et « grandes » catégories :

Appelons « ensemble » un élément de $\mathcal{M}_0$ et « classe » un élément de $\hat{\mathcal{M}}_0$. Si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont des ensembles de petites catégories, toute petite (resp. toute grande) catégorie peut être universellement plongée à une équivalence près dans une petite (resp. une grande) catégorie $\hat{H}^*$ à $\mathcal{I}$ -limites projectives et à $\mathcal{J}$ -limites inductives (à savoir son $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion libre); si H^* est une $\mathcal{M}_0$ -catégorie (i.e. au sens de [12], différent de celui de [5], si H^* est « localement petite »), il en est de même pour $\hat{H}^*$ lorsque l'un des ensembles $\mathcal{I}$ ou $\mathcal{J}$ est vide. De plus H^* peut aussi être universellement plongée dans une petite (resp. une grande) catégorie à $\mathcal{I}$ -limites projectives et à $\mathcal{J}$ -limites inductives, en conservant certaines limites choisies dans H^* .

1+

4. Adjonction de limites à une catégorie structurée.

Soit $P = (\mathcal{M}, \underline{P}, \hat{H})$ un foncteur d'homomorphismes saturé à pro-

duits fibrés finis et soit $p = (\mathbb{M}, P, \mathcal{H})$ la restriction de P à la sous-catégorie $\mathcal{H} = \bar{P}^{-1}(\mathbb{M})$ de $\hat{\mathcal{H}}$; nous supposons $\mathcal{H} \in \hat{\mathbb{M}}_0$. La saturante de $\mathcal{H}$ dans $\hat{\mathcal{H}}$ est notée $\tilde{\mathcal{H}}$. Soit Λ l'ordinal associé à l'univers $\mathbb{M}_0$ (i.e. $\Lambda = \sup_{M \in \mathbb{M}_0} \bar{M}$) et soit $\zeta < \Lambda$ un ordinal de seconde espèce. Si $S \in \hat{\mathcal{H}}_0$ et si $M \subset P(S)$ engendre une P -sous-structure s de S , nous poserons $s = S \upharpoonright M$.

DEFINITION. On dit que P est ζ - $\mathcal{H}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$ si P est $\mathcal{H}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$ et si la condition (D_ζ) suivante est vérifiée :

(D_ζ) Soient $S \in \hat{\mathcal{H}}_0$ et $(s_\xi)_{\xi < \zeta}$ une suite transfinie de type ζ de P -sous-structures de S telle que $P(s_\xi) \subset P(s_{\xi'}) \in \tilde{\mathbb{M}}_0$ si $\xi < \xi'$. Il existe une P -sous-structure $\hat{s}$ de S pour laquelle $P(\hat{s}) = \bigcup_{\xi < \zeta} P(s_\xi)$.

1

EXEMPLE. Un foncteur dénombrablement $\mathcal{H}$ -engendrant pour $\mathbb{M}[1]$ est ω - $\mathcal{H}$ -engendrant. Un foncteur $\mathcal{H}$ -étalant est ζ - $\mathcal{H}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$ pour tout ordinal de seconde espèce $\zeta < \Lambda$; il en est de même pour les foncteurs $P\mathcal{H}$ et $P\mathcal{G}$.

Soit $\mathcal{F}(p)$ la catégorie des foncteurs p -structurés [1] dont les éléments sont représentés par des triplets $\bar{F} = (\hat{C}^\bullet, f, C^\bullet)$ tels que

1°) $f \in \mathcal{H}$, $(C^\bullet, \alpha(f))$ et $(\hat{C}^\bullet, \beta(f))$ sont des catégories p -structurées;

2°) $F = (\hat{C}^\bullet, \underline{p(f)}, C^\bullet) \in \mathcal{F}$.

Soit $\hat{p}'$ le foncteur canonique de $\mathcal{F}(p)$ vers $\mathcal{F}$ qui associe F à $\bar{F}$.

Nous reprenons les notations des § 1 et 3. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux parties de $\mathcal{F}_0$ telles que $\mathcal{I} \in \tilde{\mathbb{M}}_0$ et $\mathcal{J} \in \tilde{\mathbb{M}}_0$. Soient $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ la catégorie produit fibré de $(p^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \hat{p}')$ ayant pour éléments les triplets

$$\hat{F} = ((\hat{C}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu}), f, (C^\bullet, \nu, \mu))$$

vérifiant les conditions

1°) $\bar{F} = (\hat{C}^\bullet, f, C^\bullet) \in \mathcal{F}(p)$;

2°) $((\hat{C}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu}), \underline{p(f)}, (C^\bullet, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$.

La classe des unités de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ est identifiée à la classe des éléments $(C^\bullet, s, \nu, \mu)$, où

$$(C^*, s) \in \mathcal{F}(p)_o \quad \text{et} \quad (C^*, \nu, \mu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}.$$

Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p)$ ayant pour unités les (C^*, s, ν, μ) dans lesquels $(C^*, \nu, \mu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$; c'est une catégorie produit fibré de $(p^{\mathcal{A}}, \hat{p}')$. La surjection $\hat{F} \rightarrow \hat{p}'(\bar{F})$ définit un foncteur $p^{\mathcal{A}}(p)$ de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p)$ vers $\mathcal{F}$, dont la restriction à $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p)$ est notée $p^{\mathcal{A}}(p)$. Soit $q^{\mathcal{A}}(p) = p_{\mathcal{F}} \cdot p^{\mathcal{A}}(p)$ le foncteur projection de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p)$ vers $\mathbb{M}$. Nous définissons de même à partir de l'univers $\tilde{\mathbb{M}}_o$ les catégories $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}}(P)$ et $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}}(P)$, les foncteurs $Q^{\mathcal{A}}(P)$ et $P^{\mathcal{A}}(P)$.

Soit $\lambda_{\mathcal{A}}$ l'ordinal borne supérieure des ordinaux $\bar{l}$ tels que

$$I \in p_{\mathcal{F}}(\mathcal{A} \cup \mathcal{J}).$$

A. THEOREME DE COMPLETION STRUCTUREE.

THEOREME 16. *S'il existe un ordinal initial régulier ζ tel que $\lambda_{\mathcal{A}} < \zeta < \Lambda$ et tel que P soit ζ - $\mathcal{A}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$, alors $Q^{\mathcal{A}}(P)$ est $\mathcal{A}$ -engendrant pour $(\mathbb{M}, X, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p))$, X étant la classe des $Q^{\mathcal{A}}(P)$ -monomorphismes de la forme*

$$\hat{F} = (u_2, f, u_1), \quad \text{avec} \quad f \in P_i^{\mathcal{A}}.$$

DEMONSTRATION. Supposons $u = (C^*, s, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}}(P)_o$. Pour toute sous-catégorie B' de C^* , $B \in \tilde{\mathbb{M}}_o$, désignons par $\hat{\sigma}^{\nu\mu}(B)$ la classe construite comme suit : Soit $\sigma^{\nu\mu}(B)$ la classe associée à B relativement à $(C^*, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}}_o$ dans la démonstration du théorème 12; nous savons que $\sigma^{\nu\mu}(B) \in \tilde{\mathbb{M}}_o$. Comme P est $\mathcal{A}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$, il existe une P -sous-structure $s_B \in \tilde{\mathcal{H}}_o$ de s engendrée par $\sigma^{\nu\mu}(B)$. Posons

$$\hat{\sigma}^{\nu\mu}(B) = p(s_B) \in \tilde{\mathbb{M}}_o.$$

-Supposons $M \subset C$ et $M \in \tilde{\mathbb{M}}_o$. Pour tout ordinal $\lambda < \zeta$, nous définissons par récurrence transfinie une sous-catégorie $M^{\mathcal{A}}_{\lambda}$ de C^* et une P -sous-structure s_{λ} de s de la manière suivante :

1°) $M^{\mathcal{A}}_1$ est la sous-catégorie de C^* engendrée par $p(s_1)$, où $s_1 = s \mid M \in \tilde{\mathcal{H}}_o$.

2°) Supposons trouvées deux suites transfinies $(M^{\mathcal{A}}_{\xi})_{\xi < \lambda}$ et $(s_{\xi})_{\xi < \lambda}$ de sous-catégories de C^* et de P -sous-structures

de s telles que

$$P(s_{\xi}) \subset M_{\xi} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0 \text{ et } M_{\xi'} \subset P(s_{\xi}) \text{ si } \xi' < \xi.$$

Soit $N_{\lambda} = \hat{\sigma}^{\nu\mu}(\bigcup_{\xi < \lambda} M_{\xi})$. Comme $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ est un univers et que $\lambda < \Lambda = \sup_{K \in \tilde{\mathfrak{M}}_0} K$, on a

$$\bigcup_{\xi < \lambda} M_{\xi} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0, \quad \text{d'où } N_{\lambda} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0.$$

Désignons par $M_{\lambda}^{\cdot}$ la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ engendrée par $P(s_{\lambda})$, où s_{λ} est la P -sous-structure

$$s_{\lambda} = s \upharpoonright N_{\lambda} \in \tilde{\mathfrak{H}}_0 \text{ de } s.$$

- Soit $\hat{M}^{\cdot}$ la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ réunion des sous-catégories $M_{\lambda}^{\cdot}$, pour $\lambda < \zeta$. Alors $\hat{M} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$, car $\zeta < \Lambda$. Par définition d'un foncteur ζ - $\mathcal{P}$ -engendrant, la suite transfinie $(s_{\lambda})_{\lambda < \zeta}$ de P -sous-structures de s détermine une P -sous-structure $\hat{s}$ de s telle que

$$P(\hat{s}) = \bigcup_{\lambda < \zeta} P(s_{\lambda}).$$

Des relations $M_{\lambda} \subset P(s_{\lambda+1}) \subset M_{\lambda+1}$ pour tout $\lambda < \zeta$, il vient $\hat{M} \subset P(\hat{s}) \subset \hat{M}$ c'est-à-dire $\hat{M} = P(\hat{s})$. Un raisonnement analogue à celui fait dans la démonstration du théorème 12 prouve que $\hat{M}$ est stable pour ν et pour μ , i.e. que $\hat{M} = \hat{\sigma}^{\nu\mu}(\hat{M})$, car par hypothèse ζ est un ordinal initial régulier et $\bar{I} < \zeta$ pour tout $I \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$. Donc $\hat{M}^{\cdot}$ définit une $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ -sous-structure $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ de $(C^{\cdot}, \nu, \mu)$. - Par ailleurs, $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{s})$ est une sous-catégorie P -structurée de $(C^{\cdot}, s)$ (th. 13-II [14]), i.e. une $P_{\mathcal{F}} \cdot \hat{P}^{\cdot}$ -sous-structure de $(C^{\cdot}, s)$. La catégorie $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ s'identifiant à la catégorie produit fibré $P_{\mathcal{F}} \cdot \hat{P}^{\cdot} \vee Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$, on en déduit (th. 9, chap. IV, C.S.) que $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{s}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ est une $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ -sous-structure de $(C^{\cdot}, s, \nu, \mu)$. C'est évidemment la $(Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P), X, K)$ -sous-structure de $(C^{\cdot}, s, \nu, \mu)$ engendrée par M , en désignant par K la saturante de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ dans $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$. Ceci montre que $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ est un foncteur $\mathcal{P}$ -engendrant pour $(\mathfrak{M}, X, K)$, et par suite pour $(\mathfrak{M}, X, \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P))$, car $Q^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ est un foncteur d'homomorphismes saturé. ■

COROLLAIRE 1. Si P est à $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ -produits et ζ - $\mathcal{P}$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$, 1

où ζ est un ordinal régulier tel que $\lambda_{\mathcal{A}} < \zeta < \Lambda$, les foncteurs $p^{\mathcal{A}}(p)$ et $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p), \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p))$ admettent des adjoints.

DEMONSTRATION. Puisque P est à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits et à produits fibrés finis, il est à $\hat{\mathcal{F}}_0$ -limites projectives. Sa restriction p à $\hat{P}^{-1}(\mathcal{M})$ est un foncteur à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives, car P est un foncteur d'homomorphismes saturé. Il s'ensuit (th. 1-3 [1]) que $\hat{p}'$ est aussi un foncteur à $\mathcal{M}_0$ -limites projectives. Par ailleurs, d'après la proposi. 22, $p^{\mathcal{A}}$ est un foncteur à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives. Comme $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p)$ est une catégorie produit fibré de $(\hat{p}', p^{\mathcal{A}})$, c'est une catégorie à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives, et les foncteurs $p^{\mathcal{A}}(p)$ et $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p), \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p))$ sont des foncteurs à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives. Les conditions du critère 1 d'existence d'un foncteur adjoint sont donc vérifiées relativement à ces deux derniers foncteurs, de sorte qu'ils admettent des adjoints. ■

- 1 COROLLAIRE 2. Si P est à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits et ζ - $\mathcal{A}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$, où $\zeta < \Lambda$, alors $\hat{p}'$ admet un adjoint.

En effet, supposons $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ vides; alors $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p)$ s'identifie à $\mathcal{F}(p)$ et $p^{\mathcal{A}}(p)$ à $\hat{p}'$. Or, dans la démonstration du théorème 16, le fait que ζ soit un ordinal régulier n'a été utilisé que pour montrer que $\hat{M}'$ est stable pour ν et pour μ , ce qui sera vrai ici pour toute sous-catégorie de C' . Donc le corollaire 2 résulte du corollaire 1. ■

COROLLAIRE 3. Soit $\hat{p}^{\mathcal{A}}$ le foncteur de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p)$ vers $\mathcal{F}(p)$ associant $(\hat{C}', f, C')$ à $((\hat{C}', \hat{\nu}, \hat{\mu}), f, (C', \nu, \mu))$. Si P est à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits et ζ - $\mathcal{A}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$, où ζ est un ordinal régulier et où $\lambda_{\mathcal{A}} < \zeta < \Lambda$, tout $(H', s) \in \mathcal{F}(p)_0$ engendre une $\hat{p}^{\mathcal{A}}$ -structure libre $(\hat{H}', \hat{s}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ telle que $H'_0 \subset \hat{H}'_0$.

DEMONSTRATION. $\hat{p}^{\mathcal{A}}$ est un foncteur à $\mathcal{M}_0$ -limites projectives, $P_{\mathcal{F}} \cdot \hat{p}' \cdot \hat{p}^{\mathcal{A}} = Q^{\mathcal{A}}(P)$ est $\mathcal{A}$ -engendrant pour $(\mathcal{M}, X, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p))$ (théorème 16). Donc le critère 1 affirme que $\hat{p}^{\mathcal{A}}$ admet un adjoint. Soit $(\hat{u}, \bar{J})$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p), \hat{p}^{\mathcal{A}})$ -projecteur tel que $\alpha(\bar{J}) = (H', s)$, et soit $\hat{u} = (\hat{H}', \hat{s}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$. Désignons par S^+ le groupe des couples $(H'_0 \times H'_0)^+$ associé à H'_0 . On sait (th. 2- II [14]) que $(S^+, s_0 \times s_0)$ est une catégorie p -structurée,

où s_o est la p -sous-structure de s définie par $H_o^\bullet$. De plus, par définition d'une catégorie p -structurée, il existe

$$f \in (s_o \times s_o) \cdot \mathcal{H} \cdot s \quad \text{tel que} \quad p(f) = [\beta, \alpha].$$

Ceci signifie

$$\bar{F} = (S^+, f, H \cdot) \in \mathcal{F}(p).$$

Comme S^+ est un groupoïde de couples il est à $\mathcal{I}$ -limites projectives et à $\mathcal{J}$ -limites inductives et, en choisissant deux applications $\mathcal{I}$ -limite projective ν' et $\mathcal{J}$ -limite inductive μ' sur S^+ , on a

$$u = (S^+, s_o \times s_o, \nu', \mu') \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)_o.$$

Par définition d'un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p), \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}})$ -projecteur, il existe un et un seul

$$\tilde{F}' = ((S^+, \nu', \mu'), f', (\hat{H}^\bullet, \hat{\nu}, \hat{\mu})) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$$

tel que $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(\tilde{F}') \cdot \bar{J} = \bar{F}$, d'où $p(f') \cdot \tilde{p}(\bar{J}) = p(f)$, où $\tilde{p} = p \mathcal{F} \cdot \hat{p}'$. La restriction de $p(f) = [\beta, \alpha]$ à $H_o^\bullet$ étant l'identité, la restriction de $\tilde{p}(\bar{J})$ à $H_o^\bullet$ sera aussi injective. Par suite $H_o^\bullet$ peut être identifié à

$$\tilde{p}(\bar{J})(H_o^\bullet) \subset \hat{H}_o^\bullet. \blacksquare$$

DEFINITION. Une $(\mathcal{M}, X, \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p))$ -sous-structure de $\hat{u} \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(P)$ engendrée par M est appelée $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion de M dans $\hat{u}$. Une $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p), \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p))$ projection de $u \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ est appelée $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion structurée de u . 1

Nous désignons par v le foncteur canonique de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ vers $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ associant $(e', \underline{p(f)}, e)$ à $(e', f, e) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$.

THEOREME 17. Supposons que P soit à $\hat{\mathcal{M}}_o$ -produits et ζ - $\mathcal{A}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$, où ζ est un ordinal régulier tel que $\lambda_{\mathcal{I}\mathcal{J}} < \zeta < \Lambda$, et que p admette une section maximale z (4 [1]). Tout $H^\bullet \in \mathcal{F}_o$ engendre une $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}(p)$ -structure libre $\hat{u}$ telle que $v(\hat{u})$ soit une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion libre de $H^\bullet$. Si u' est une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion structurée de u , alors $v(u')$ est une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion de $v(u)$. 2

DEMONSTRATION. Soit $K^\bullet \in \mathcal{F}_o$ et $s = z(K)$. Alors

$$a = z(K, \alpha, K) \in s \cdot \mathcal{H} \cdot s, \quad b = z(K, \beta, K) \in s \cdot \mathcal{H} \cdot s.$$

D'après la proposition 1-4 [1], $z(K \times K) = z(s) \times z(s)$ et $s * s =$

$= z(K^* * K^*)$ est une p -sous-structure de $z(s) \times z(s)$ en vertu du lemme 3 (appendice). Si $K^* = (K, \kappa)$, on a

$$z(K, \kappa, K^* * K^*) \in s.\mathcal{H}.s * s.$$

Comme p est un foncteur d'homomorphismes saturé et résolvant, il s'ensuit que $(K^*, z(K))$ est une catégorie p -structurée. - Supposons $H^* \in \mathcal{F}_o$ et soit $((C^*, \nu, \mu), J)$ un $(\mathcal{F}^{4g}, p^{4g})$ -projecteur tel que $J \in \mathcal{F}.H^*$ (il en existe d'après le théorème 13). En vertu du corollaire 1 du théorème 16, il existe un $(\mathcal{F}^{4g}(p), p^{4g}(p))$ -projecteur $(\hat{u}, J')$, où

$$\hat{u} = (\hat{H}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu}) \quad \text{et} \quad J' \in \mathcal{F}.H^*.$$

Les relations

$$(C^*, z(C), \nu, \mu) \in \mathcal{F}^{4g}(p) \quad \text{et} \quad J \in C^*.\mathcal{F}.H^*$$

assurent l'existence d'un et d'un seul

$$\tilde{F} = ((C^*, \nu, \mu), f, (\hat{H}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu})) \in \mathcal{F}^{4g}(p).\hat{u}$$

tel que $F.J' = J$, où $F = p^{4g}(p)(\tilde{F})$. Puisque

$$(\hat{H}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu}) \in \mathcal{F}^{4g} \quad \text{et} \quad J' \in \hat{H}^*.\mathcal{H}.H^*,$$

il existe un et un seul

$$\hat{F}' \in (\hat{H}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu}).\mathcal{F}^{4g}.(C^*, \nu, \mu)$$

tel que $F'.J = J'$, où $F' = p^{4g}(\hat{F}')$. Soit $\hat{F} = \nu(\tilde{F})$; on a

$$\hat{F}.\hat{F}' \in (C^*, \nu, \mu).\mathcal{F}^{4g}.(C^*, \nu, \mu)$$

et

$$p^{4g}(\hat{F}.\hat{F}').J = F.F'.J = F.J' = J.$$

Il en résulte $\hat{F}.\hat{F}' = (C^*, \nu, \mu)$, car $((C^*, \nu, \mu), J)$ est un $(\mathcal{F}^{4g}, p^{4g})$ -projecteur. Par ailleurs, on a $g = z(p\mathcal{F}(F')) \in z(\hat{H}).\mathcal{H}.z(C)$, d'où

$$\tilde{G} = ((\hat{H}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu}), g, (C^*, \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{4g}(p).\beta(\tilde{F}),$$

$$p^{4g}(p)(\tilde{G}) = F' \quad \text{et} \quad p^{4g}(p)(\tilde{G}.\tilde{F}) = F'.F.$$

Par définition d'une section maximale, il existe un $g_{\hat{s}} \in z(\hat{H}).\mathcal{H}.\hat{s}$ tel que $p(g_{\hat{s}}) = \hat{H}$, ce qui entraîne

$$\tilde{G}' = ((\hat{H}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu}), g_{\hat{s}}, (\hat{H}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu})) \in \beta(\tilde{G}).\mathcal{F}^{4g}(p).\hat{u}$$

et $p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p)(\tilde{G}') = \hat{H}'$. On obtient

$$p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p)(\tilde{G}, \tilde{F}), J' = F' \cdot F \cdot J' = F' \cdot J = J' = p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p)(\tilde{G}'), J',$$

et par suite $\tilde{G} \cdot \tilde{F} = \tilde{G}'$, car $(\hat{u}, J')$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p), p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p))$ -projecteur.

Ainsi

$$\hat{F}' \cdot \hat{F} = v(\tilde{G}, \tilde{F}) = v(\tilde{G}') = (\hat{H}', \hat{\nu}, \hat{\mu}).$$

Ceci prouve que $\hat{F}$ est l'inverse de $\hat{F}'$ dans $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$, i.e. que $(\hat{H}', \hat{\nu}, \hat{\mu})$ est aussi une $p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ -structure libre engendrée par H' .

-Supposons $u = (H', s, \nu, \mu) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p)_o$. D'après le théorème 15, il existe un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}})$ -projecteur $\hat{J} \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}} \cdot v(u)$; soit

$$(K', \nu', \mu') = \beta(\hat{J}).$$

En vertu du corollaire 1 du théorème 16, il existe un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p), \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p))$ -projecteur $\tilde{J}'' \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p) \cdot u$; posons $\beta(\tilde{J}'') = (\tilde{H}', \tilde{s}, \tilde{\nu}, \tilde{\mu})$ et $\hat{J}'' = v(\tilde{J}'')$. Puisque $\hat{J}'' \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}_o \cdot \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}} \cdot v(u)$, il existe un et un seul $\hat{M} \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ tel que $\hat{M} \cdot \hat{J} = \hat{J}''$. D'autre part, z étant une section maximale de p , il existe un $h_s \in z(s) \cdot \mathcal{H} \cdot s$ tel que $p(h_s) = H$; on a

$$k = z(q^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(\hat{J})), h_s \in \mathcal{H} \cdot s \quad \text{et} \quad p(k) = q^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(\hat{J}).$$

On en déduit

$$\tilde{N} = ((K', \nu', \mu'), k, (H', \nu, \mu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p)_o \cdot \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p)$$

et, $\tilde{J}''$ étant un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p), \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p))$ -projecteur, il existe un et un seul $\tilde{N}'$ tel que

$$\tilde{N}' \cdot \tilde{J}'' = \tilde{N}, \quad \text{d'où} \quad \hat{N}' \cdot \hat{J}'' = \hat{J} \quad \text{si} \quad \hat{N}' = v(\tilde{N}').$$

Les égalités

$$\hat{N}' \cdot \hat{M} \cdot \hat{J} = \hat{N}' \cdot \hat{J}'' = \hat{J}$$

entraînent $\hat{N}' \cdot \hat{M} = \beta(\hat{J})$. Il existe aussi un $h_{\tilde{s}} \in z(\tilde{H}'), \mathcal{H} \cdot \tilde{s}$ tel que $p(h_{\tilde{s}}) = \tilde{H}$, de sorte que l'on trouve

$$\tilde{M}'' = ((\tilde{H}', \tilde{\nu}, \tilde{\mu}), h_{\tilde{s}}, (\tilde{H}', \tilde{\nu}, \tilde{\mu})) \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p), \quad v(\tilde{M}'') = \beta(\hat{J}''),$$

$$\tilde{M}' = ((\tilde{H}', \tilde{\nu}, \tilde{\mu}), z(q^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(\hat{M})), (K', \nu', \mu')) \in \beta(\tilde{M}'') \cdot \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p) \cdot \beta(\tilde{N}')$$

et $v(\tilde{M}') = \hat{M}$. Il s'ensuit

$$v(\tilde{M}', \tilde{N}', \tilde{J}'') = \hat{M} \cdot \hat{N}' \cdot \hat{J}'' = \hat{M} \cdot \hat{J} = \hat{J}'' = v(\tilde{M}'', \tilde{J}'')$$

et, v étant fidèle,

$$\tilde{M}', \tilde{N}', \tilde{J}'' = \tilde{M}'', \tilde{J}''.$$

Etant donné que $\tilde{J}''$ est un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p), \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(p))$ -projecteur, on a donc

$$\tilde{M}', \tilde{N}' = \tilde{M}''.$$

Par suite

$$\hat{M} \cdot \hat{N}' = v(\tilde{M}', \tilde{N}') = \beta(\hat{J}''),$$

et $\hat{M}$ est l'inverse de $\hat{N}'$ dans $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$. Ceci signifie que $\hat{J}''$ est aussi un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}})$ -projecteur. ■

COROLLAIRE. Avec les hypothèses du théorème 17, tout $(H^*, s) \in \mathcal{F}(p)_o$ engendre une $\hat{p}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ -structure libre $\hat{u}$ telle que $v(\hat{u})$ soit une $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ -complétion libre de H^* .

En effet, ceci résulte du théorème 17, appliqué à l'élément

$$u = (H^*, s, \emptyset, \emptyset),$$

1 où $\emptyset$ est l'application vide. ■

EXEMPLES. 1°) Si p est le foncteur θ projection vers $\mathbb{M}$ de la catégorie $\mathcal{T}$ des applications continues relatives à l'univers $\mathbb{M}_o$, les conditions du théorème 17 sont remplies, car θ est $\wedge$ -étalant à section maximale. Par suite : Soit (H^*, T) une catégorie topologique, ν une application $\mathcal{G}$ -limite projective partielle et μ une application $\mathcal{G}$ -limite inductive partielle sur H^* ; si $(\hat{H}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ est la $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ -complétion de (H^*, ν, μ) , il existe un foncteur continu injectif $\bar{F}$ de (H^*, T) vers une catégorie topologique $(\hat{H}^*, \hat{T})$, compatible avec $(\nu, \hat{\nu})$ et $(\mu, \hat{\mu})$, solution du problème universel du plongement de (H^*, T, ν, μ) dans une catégorie topologique munie de deux applications $\mathcal{G}$ -limite projective et $\mathcal{G}$ -limite inductive. En effet, $(\hat{H}^*, \hat{T}, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ est la $(\mathcal{G}, \mathcal{G})$ -complétion topologique de (H^*, T, ν, μ) et $\hat{\theta}(\bar{F})$ est une injection, en vertu du théorème 13.

2°) Le théorème 16 et ses corollaires s'appliquent lorsque p est l'un des foncteurs $p\mathcal{H}$, $p\mathcal{H}_1$ ou $p\mathcal{F}$ projection vers $\mathbb{M}$ de la catégorie $\mathcal{N}$ des homomorphismes entre classes multiplicatives, $\mathcal{N}'$ des néofoncteurs,

$\mathcal{F}$ des foncteurs, car ces foncteurs sont ζ - $\mathcal{M}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$ pour tout ordinal ζ de seconde espèce tel que $\zeta < \Lambda$.

THEOREME 18. Soit $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ stable par produits dans $\mathcal{H}$ et vérifiant la condition (σ) relativement à $(\mathcal{M}', p)$ (chap. III, C.S.). Le théorème 16 et ses corollaires sont aussi vrais si on remplace partout $\mathcal{F}(p)$ par sa sous-catégorie pleine $\mathcal{F}_1(p)$ ayant pour unités les catégories $p(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ - (resp. $p((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$ -) structurées.

1

En effet, les démonstrations données plus haut s'appliquent sans changement, en utilisant les résultats suivants :

- 1°) $\mathcal{F}_1(p)$ est stable par produits dans $\mathcal{F}(p)$ (th. 1-II [14]);
- 2°) Si $(C', s) \in \mathcal{F}_1(p)_0$, si $\hat{s}$ est une p -sous-structure de s et si $p(\hat{s})$ définit une sous-catégorie $\hat{C}'$ de C' , on a

$$(\hat{C}', \hat{s}) \in \mathcal{F}_1(p)_0$$

et $(\hat{C}', \hat{s})$ est une $\hat{p}'$ -sous-structure de (C', s) , en désignant par $\hat{p}'$ la restriction de p à $\mathcal{F}_1(p)$ (II [14]). ■

B. ADJONCTION DE LIMITES A UNE CATEGORIE ORDONNEE.

Soit ω le foncteur canonique vers $\mathcal{M}$ de la catégorie Ω des applications ordonnées relative à l'univers $\mathcal{M}_0$, et Ω' la sous-catégorie de Ω formée des applications ordonnées strictes [15]. Le foncteur ω est $\mathcal{M}$ -étalant et Ω' est stable par produits et vérifie la condition (σ) relativement à $(\mathcal{M}', p)$. Ainsi Ω est ζ - $\mathcal{M}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$ pour tout ordinal $\zeta < \Lambda$. D'après le théorème 16 (resp. 18) le problème « universel » de l'adjonction de $\mathcal{J}$ -limites projectives et de $\mathcal{J}$ -limites inductives à une catégorie ω -structurée (resp. catégorie ordonnée) admet une solution.

Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ deux parties de $\mathcal{M}_0$ telles que $\mathcal{Q} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ et $\mathcal{Q}' \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. En fait $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$ interviendront seulement par les ordinaux

$$\lambda_{\mathcal{Q}} = \sup_{L \in \mathcal{Q}} (\bar{L} + 1) \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathcal{Q}'} = \sup_{L' \in \mathcal{Q}'} (\bar{L}' + 1).$$

DEFINITION. On appelle classe $\mathcal{Q}\mathcal{Q}'$ -inductive (resp. $\mathcal{Q}\mathcal{Q}'$ -sous-inductive) une classe ordonnée $(M, <)$ telle qu'une partie A (resp. A majorée dans $(M, <)$) de M admette un agrégat $\cup A$ (resp. un sous-agrégat $\bigcup^* A$ si

$A < x \in M$) lorsque l'ordinal $\bar{A}$ est inférieur à $\lambda_{\mathcal{Q}}$ et une intersection $\cap A$ si $\bar{A} < \lambda_{\mathcal{Q}}$.

Evidemment une classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -(resp. $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -sous-)inductive est aussi $\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{L}}'$ -(resp. $\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{L}}'$ -sous-) inductive si, pour tout $\hat{L} \in \hat{\mathcal{L}}$ et tout $\hat{L}' \in \hat{\mathcal{L}}'$, il existe $L \in \mathcal{L}$ et $L' \in \mathcal{L}'$ tels que $\hat{L} \subset L$ et $\hat{L}' \subset L'$.

Soit $\Omega(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $\Omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$) la sous-catégorie de Ω formée des

$$f = ((M', <), \underline{f}, (M, <))$$

vérifiant les conditions :

1°) Si $A \subset M$, $\bar{A} < \lambda_{\mathcal{Q}}$ et s'il existe $\cup A$ (resp. $\overset{x}{\bigcup} A$) dans $(M, <)$, alors $f(\cup A) = \cup f(A)$ (resp. $f(\overset{x}{\bigcup} A) = \overset{y}{\bigcup} f(A)$, où $y = f(x)$).

2°) Si $A \subset M$ (resp. $A < x \in M$), si $\bar{A} < \lambda_{\mathcal{Q}}$ et s'il existe $\cap A$ dans $(M, <)$, on a $f(\cap A) = \cap f(A)$.

Soit $\mathcal{P}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $\mathcal{P}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$) la catégorie des applications $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -inductives (resp. $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -sous-inductives), i.e. la sous-catégorie pleine de $\Omega(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. de $\Omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$) ayant pour unités les classes $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -inductives (resp. $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -sous-inductives). Soit $\omega(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $\omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$) la restriction de ω à cette sous-catégorie de Ω . Désignons par $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$, $\hat{\mathcal{P}}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$, $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ et $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ les catégories et foncteurs définis de même à partir de l'univers $\hat{\mathcal{M}}_0$, ces foncteurs étant des restrictions de $\hat{\omega} = (\hat{\mathcal{M}}, \hat{\omega}, \hat{\Omega})$.

THEOREME 19. $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ et $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ sont des foncteurs ζ - μ -engendrants pour $\hat{\mathcal{M}}$, pour tout ordinal régulier ζ tel que $\sup(\lambda_{\mathcal{Q}}, \lambda_{\mathcal{Q}'}) \leq \zeta < \Lambda$.

DEMONSTRATION. Soit $\hat{\gamma}$ l'isomorphisme canonique de $\hat{\Omega}$ sur la sous-catégorie pleine $\hat{\mathcal{F}}_{\omega}$ de $\hat{\mathcal{F}}$ qui associe à $(M, <)$ la catégorie des couples définissant $(M, <)$. Soit $\tilde{\mathcal{L}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{L}}'$) la classe des catégories triviales $\tilde{L}^0$ telles qu'il existe $L \in \mathcal{L}$ (resp. $\in \mathcal{L}'$) vérifiant $\tilde{L} \subset L$. Si $(M, <)$ est une classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -inductive, $C^* = \hat{\gamma}(M, <)$ est une catégorie à $\tilde{\mathcal{L}}$ -produits et à $\tilde{\mathcal{L}}'$ -sommes (chap. IV, C.S.). Comme tout inversible de C^* est une unité, il existe une seule application $\tilde{\mathcal{L}}$ -limite projective ν et une seule application $\tilde{\mathcal{L}}'$ -limite inductive μ sur C^* , de sorte que l'on a

$$\Gamma(M, <) = (C^*, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}^{\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathcal{L}}'}.$$

La surjection

$$((M', <), \underline{f}, (M, <)) \rightarrow (\Gamma(M', <), (\underline{f} \times \underline{f})_i, \Gamma(M, <))$$

définit un isomorphisme Γ de $\hat{\mathcal{P}}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ sur la sous-catégorie pleine $\hat{\mathcal{F}}_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ ayant pour unités les $(C', \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ tels que $C' \in \hat{\mathcal{F}}_{\omega}$. Soit $Q_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ la restriction de $Q^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ à $\hat{\mathcal{F}}_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$. D'après le théorème 12, $Q_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ est $\mathcal{M}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$; une démonstration analogue prouve que $Q_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ est $(\mathcal{M}^{\cup}, X, \mathcal{F}_{\omega}^{\mathcal{L}\mathcal{L}'})$ -engendrant, $P^{\mathcal{L}\mathcal{L}'}(X) =$ classe des $(C', \iota, \hat{C}')$. F où $\hat{C}'$ est pleine dans C' et $F \in \mathcal{F}_{\gamma}$. Donc $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ est $\mathcal{M}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$. - Soit ζ un ordinal régulier tel que

$$\lambda_{\mathcal{Q}} \leq \zeta < \Lambda \quad \text{et} \quad \lambda_{\mathcal{Q}'} \leq \zeta < \Lambda;$$

il en existe, par exemple l'ordinal initial d'indice $\sup(\lambda_{\mathcal{Q}}, \lambda_{\mathcal{Q}'}) + 1$. Soient $u = (M, <) \in \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{L}\mathcal{L}')_{\omega}$ et, pour tout $\lambda < \zeta$, $u_{\lambda} = (M_{\lambda}, <)$ une $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ -sous-structure de u vérifiant $M_{\xi} \subset M_{\xi'}$ si $\xi < \xi' < \zeta$. On montre (comme dans le théorème 3-4 [1]) que $(M_{\lambda}, <)$ est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -inductive de $(M, <)$, i.e. une classe ordonnée par la relation d'ordre induite par $(M, <)$ sur $M_{\lambda} \subset M$, telle que pour $A_{\lambda} \subset M_{\lambda}$, on ait $\cup A_{\lambda} \in M_{\lambda}$ si $\bar{A}_{\lambda} < \lambda_{\mathcal{Q}}$ et $\cap A_{\lambda} \in M_{\lambda}$ si $\bar{A}_{\lambda} < \lambda_{\mathcal{Q}'}$, où $\cup A_{\lambda}$ et $\cap A_{\lambda}$ sont calculés dans $(M, <)$. Posons $\hat{M} = \bigcup_{\lambda < \zeta} M_{\lambda}$. Soit $A \subset \hat{M}$ et $\bar{A} < \lambda_{\mathcal{Q}}$. Pour tout $a \in A$, il existe $\lambda_a < \zeta$ tel que $a \in M_{\lambda_a}$. Puisque la suite transfinie $(\lambda_a)_{a \in A}$, où $\lambda_a < \zeta$, est de type $\bar{A} < \lambda_{\mathcal{Q}} \leq \zeta$ et que ζ est régulier, on a

$$\lambda_A = \sup_{a \in A} \lambda_a < \zeta.$$

Il s'ensuit

$$A \subset M_{\lambda_A}, \quad \text{d'où} \quad \cup A \in M_{\lambda_A} \subset \hat{M},$$

car M_{λ_A} est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -inductive de $(M, <)$. On voit de même que, si $\bar{A} < \lambda_{\mathcal{Q}'}$, on a $\cap A \in \hat{M}$. Par suite $(\hat{M}, <)$ est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -inductive de $(M, <)$ et, a fortiori, une $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ -sous-structure de $(M, <)$. Ainsi $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ est ζ - $\mathcal{M}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$.

-Supposons $(M, <) \in \hat{\mathcal{P}}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')_{\omega}$. Les $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ -sous-structures de $(M, <)$ sont les sous-classes $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -sous-inductives de $(M, <)$, c'est-à-dire les sous-classes ordonnées $(M', <)$ telles que

$$((M, <), \iota, (M', <)) \in \hat{\mathcal{P}}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}').$$

Soit $K \subset M$. Désignons par K_Q (resp. par K_{Q_1}) la classe des couples (A, x) , où

$$A \subset K, \quad x \in K, \quad A < x \quad \text{et} \quad \bar{A} < \lambda_Q \quad (\text{resp.} < \lambda_{Q_1}).$$

Soit g (resp. g') la surjection associant à $(A, x) \in K_Q$ (resp. $\in K_{Q_1}$) l'élément $\bigcup^x A$ (resp. $\cap A$). Posons

$$\tau(K) = g(K_Q) \cup g'(K_{Q_1});$$

on trouve $K \subset \tau(K)$, car $x = \bigcup^x \{x\}$ pour tout $x \in K$. Pour que la sous-classe ordonnée $(K, <)$ de $(M, <)$ soit une sous-classe $\mathcal{Q}\mathcal{Q}'$ -sous-inductive de $(M, <)$, il faut et il suffit que $K = \tau(K)$. - Supposons $K \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Les relations

$$K_Q \subset \mathcal{P}(K) \times K \in \tilde{\mathcal{M}}_0 \quad \text{et} \quad K_{Q_1} \subset \mathcal{P}(K) \times K \in \tilde{\mathcal{M}}_0$$

entraînent, $\tilde{\mathcal{M}}_0$ étant un univers,

$$g(K_Q) \in \tilde{\mathcal{M}}_0, \quad g'(K_{Q_1}) \in \tilde{\mathcal{M}}_0 \quad \text{et} \quad \tau(K) \in \tilde{\mathcal{M}}_0.$$

Soit ζ un ordinal régulier tel que $\sup(\lambda_Q, \lambda_{Q_1}) \leq \zeta < \Lambda$. Soit $1 \leq \lambda < \zeta$ et supposons définie une partie K_ξ de M pour tout $\xi < \lambda$, de sorte que

$$K_1 = \tau(K), \quad K_\xi \in \tilde{\mathcal{M}}_0 \quad \text{et} \quad K_\xi \subset K_{\xi'}, \quad \text{si} \quad \xi < \xi'.$$

Posons $K_\lambda = \tau\left(\bigcup_{\xi < \lambda} K_\xi\right)$; on a

$$K_\lambda \in \tilde{\mathcal{M}}_0 \quad \text{et} \quad K_\xi \subset K_\lambda \quad \text{si} \quad \xi < \lambda.$$

Par récurrence transfinie, nous obtenons ainsi une suite transfinie $(K_\lambda)_{\lambda < \zeta}$ de parties de M . Soit $\hat{K} = \bigcup_{\lambda < \zeta} K_\lambda$. Etant donné que $\tilde{\mathcal{M}}_0$ est un univers admettant Λ pour ordinal associé, que $\zeta < \Lambda$ et que $K_\lambda \in \tilde{\mathcal{M}}_0$ pour tout $\lambda < \zeta$, on a $\hat{K} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$. Montrons que la sous-classe ordonnée $(\hat{K}, <)$ de $(M, <)$ est une sous-classe $\mathcal{Q}\mathcal{Q}'$ -sous-inductive de $(M, <)$, i.e., que $\tau(\hat{K}) = \hat{K}$. En effet, soit $(A, x) \in \hat{K}_Q$ (resp. $\in \hat{K}_{Q_1}$). Comme plus haut, on voit qu'il existe un ordinal $\lambda_A < \zeta$ tel que $A \subset K_{\lambda_A}$; il existe aussi $\lambda_x < \zeta$ tel que $x \in K_{\lambda_x}$; soit $\lambda = \sup(\lambda_A, \lambda_x)$; des relations $\lambda + 1 < \zeta$ et $(A, x) \in (K_\lambda)_Q$ (resp. $\in (K_\lambda)_{Q_1}$), on déduit

$$g(A, x) = \bigcup^x A \in K_{\lambda+1} \subset \hat{K} \quad (\text{resp.} \quad g'(A, x) = \cap A \in K_{\lambda+1} \subset \hat{K}),$$

d'où

$$\tau(\hat{K}) = g(\hat{K}\mathcal{Q}) \cup g'(\hat{K}\mathcal{Q}') = \hat{K}.$$

Ainsi $(\hat{K}, <)$ est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -sous-inductive de $(M, <)$. - Il est évident que $\hat{K} \subset K'$ si $(K', <)$ est une sous-classe $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -sous-inductive de $(M, <)$ et si $K \subset K'$. Donc $(\hat{K}, <)$ est la $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ -sous-structure de $(M, <)$ engendrée par K et, puisque $\hat{K} \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, le foncteur $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ est $\mathcal{L}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$. - Un raisonnement analogue à celui conduit ci-dessus prouve que, si $(M_\lambda, <)$ est une $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ -sous-structure de $(M, <)$ pour tout $\lambda < \zeta$, $(\bigcup_{\lambda < \zeta} M_\lambda, <)$ est aussi une $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ -sous-structure de $(M, <)$, de sorte que $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ est ζ - $\mathcal{L}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$. ■

COROLLAIRE 1. Soit $u \in \Omega_0$; alors u admet une $(\mathcal{P}(\mathcal{L}\mathcal{L}'), \Omega)$ - (resp. une $(\mathcal{P}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}'), \Omega)$ -, une $(\mathcal{P}(\emptyset\mathcal{L}'), \Omega(\emptyset\mathcal{L}'))$ -, ou une $(\mathcal{P}^s(\emptyset\mathcal{L}'), \Omega^s(\emptyset\mathcal{L}'))$ -) projection dont u est une sous-classe ordonnée (resp. ordonnée, l'injection canonique appartenant à $\Omega(\emptyset\mathcal{L}')$ ou à $\Omega^s(\emptyset\mathcal{L}')$).

DEMONSTRATION. Les foncteurs $\omega(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ et $\omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ sont des foncteurs d'homomorphismes saturés à $\mathcal{M}_0$ -limites projectives. Posons $\mathcal{K} = \mathcal{P}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $= \mathcal{P}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$); le foncteur $(\Omega, \iota, \mathcal{K})$ étant à noyaux et le foncteur $(\Omega, \iota, \hat{\mathcal{K}})$ à $\tilde{\mathcal{M}}_0$ -produits, le théorème 19 montre que les conditions du critère 1 sont vérifiées relativement à $(\Omega, \iota, \mathcal{K})$ et à $(\Omega(\mathcal{L}\mathcal{L}'), \iota, \mathcal{K})$ (resp. et à $(\Omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}'), \iota, \mathcal{K})$), de sorte que ces foncteurs admettent des adjoints. - Soit $u = (M, <) \in \Omega_0$ et soit $j = ((\hat{M}, <), j, u)$ un $(\mathcal{K}, \Omega)$ projecteur. Si on munit $\tilde{\mathcal{M}}_0$ de la relation d'ordre $\subset$:

$$M' < M \text{ si, et seulement si, } M' \subset M,$$

on trouve

$$(\tilde{\mathcal{M}}_0, \subset) \in \hat{\mathcal{P}}(\mathcal{L}\mathcal{L}') \subset \hat{\mathcal{P}}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}').$$

On définit une bijection $\underline{f}$ de M sur $M_1 \subset \tilde{\mathcal{M}}_0$ en associant à tout $x \in M$ la classe $x^>$ des minorants de x dans u , et on a

$$\underline{f} = ((\tilde{\mathcal{M}}_0, \subset), \underline{f}, (M, <)) \in \hat{\Omega}.$$

Puisque $\underline{f}(M) \in \tilde{\mathcal{M}}_0$, le théorème 19 assure l'existence d'un $g \in \mathcal{K}_0 \cdot \hat{\mathcal{K}}_\gamma$ tel que $\alpha(\underline{g})$ soit la $\hat{\omega}(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $\hat{\omega}^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ -) sous-structure de $(\tilde{\mathcal{M}}_0, \subset)$

engendrée par $\underline{f}(M)$. Il en résulte

$$f' = (\beta(g), \underline{g}\underline{f}, u) \in K_o, \Omega,$$

de sorte qu'il existe un $f'' \in K$ tel que $f'' \cdot j = f'$. Comme $\omega(f')$ est une injection, $\omega(j)$ sera aussi une injection, car $\omega(f'') \cdot \omega(j) = \omega(f')$. Soient

$$x \in M, \quad y \in M \quad \text{et} \quad \underline{j}(x) < \underline{j}(y)$$

dans $(\hat{M}, <)$; les relations

$$\underline{g}(x^>) = \underline{f}'(x) = \underline{f}''(\underline{j}(x)) < \underline{f}''(\underline{j}(y)) = \underline{g}(y^>)$$

entraînent $x^> \subset y^>$, g étant inversible, d'où $x < y$ dans $(M, <)$. Donc j définit un isomorphisme de u sur la sous-classe ordonnée $(j(M), <)$ de $(\hat{M}, <)$. Il s'ensuit que la classe ordonnée obtenue à partir de $(\hat{M}, <)$ en identifiant $j(M)$ à M est une (K, Ω) -projection de u , dont $(M, <)$ est une sous-classe ordonnée. - Supposons de plus $\mathbb{L} = \emptyset$. Si A est une partie (resp. partie majorée) de M telle que $\bar{A} < \lambda_{\mathbb{Q}}$, et s'il existe $x = \cap A$ dans $(M, <)$, on trouve

$$1 \quad x^> = \bigcap_{a \in A} a^> \quad \text{et par suite} \quad f \in \hat{\Omega}(\emptyset \mathbb{L}') \quad (\text{resp.} \in \hat{\Omega}^s(\emptyset \mathbb{L}')).$$

Un raisonnement analogue au précédent prouve donc que u est isomorphe à une sous-classe ordonnée dans $\Omega(\emptyset \mathbb{L}')$ (resp. $\Omega^s(\emptyset \mathbb{L}')$) de la $(K, \Omega(\emptyset \mathbb{L}'))$ - (resp. $(K, \Omega^s(\emptyset \mathbb{L}'))$ -) projection de u . ■

COROLLAIRE 2. Soit $p = \omega(\mathbb{L} \mathbb{L}')$ (resp. $= \omega^s(\mathbb{L} \mathbb{L}')$). Si $(C^*, <)$ est une catégorie p -structurée et si r est une relation d'équivalence sur C , il existe une catégorie p -structurée quasi-quotient de $(C^*, <)$ par r . La catégorie $\mathcal{F}^{\mathbb{A}\mathbb{J}}(p)$ est une catégorie à $\mathcal{F}^{\mathbb{A}\mathbb{J}}(p)$ -projections, si $\mathbb{J} \subset \mathcal{F}_o$, $\mathbb{J} \subset \mathcal{F}_o$ et $p\mathcal{F}(\mathbb{J} \cup \mathbb{J}) \in \tilde{\mathcal{M}}_o$.

DEMONSTRATION. Soit ζ l'ordinal initial régulier d'indice

$$\sup(\lambda_{\mathbb{Q}}, \lambda_{\mathbb{L}'}, \lambda_{\mathbb{J}\mathbb{J}}) + 1,$$

où $\lambda_{\mathbb{J}\mathbb{J}} = \sup_{I \in \mathbb{J} \cup \mathbb{J}} \bar{I}$; on a $\lambda_{\mathbb{J}\mathbb{J}} < \zeta < \Lambda$ et, d'après le théorème 19, P est ζ - $\mathcal{M}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$. Le théorème 16 affirme donc que $Q^{\mathbb{A}\mathbb{J}}(P)$ est $\mathcal{M}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$, et son corollaire 1 que $\mathcal{F}^{\mathbb{A}\mathbb{J}}(p)$ est une catégorie à $\mathcal{F}^{\mathbb{A}\mathbb{J}}(p)$ -projections car $X = Q^{\mathbb{A}\mathbb{J}}(P)_i^r$. Si $\mathbb{J} = \emptyset = \mathbb{J}$, le foncteur $Q^{\mathbb{A}\mathbb{J}}(P)$

s'identifie au foncteur Q projection canonique vers $\hat{\mathbb{M}}$ de $\mathcal{F}(P)$, de sorte que ce foncteur est $\mathcal{P}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$; étant aussi un foncteur d'homomorphismes saturé à $\hat{\mathbb{M}}_0$ -limites projectives (prop. 1-3 [1]), Q vérifie les conditions du théorème 2; par suite sa restriction à $\mathcal{F}(p)$ est à structures quasi-quotient. ■

REMARQUES. 1°) Si $\mathcal{L} = \emptyset$, la catégorie $\mathcal{P}^s(\emptyset\mathcal{L}')$ est isomorphe à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}\emptyset\mathcal{L}'$, où $\tilde{\mathcal{L}}'$ est la classe des catégories obtenues en ajoutant un élément initial aux catégories triviales L^0 telles que $L \subset L' \in \mathcal{L}'$. Par suite on peut aussi démontrer que $\omega^s(\emptyset\mathcal{L}')$ est ζ - $\mathcal{P}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$ par un raisonnement analogue à celui utilisé dans la première partie de la démonstration du théorème 19.

2°) Soit H^* la catégorie de couples associée à $(M, <) \in \Omega_0$. Soit $(\hat{H}^*, \hat{\nu}, \hat{\mu})$ l'élément de $\mathcal{F}\mathcal{L}'$ correspondant à la $(\mathcal{P}(\mathcal{L}\mathcal{L}'), \Omega)$ -projection $(\hat{M}, <)$ de $(M, <)$. Si (C^*, ν, μ) est une $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}}')$ -complétion de $(H^*, \emptyset, \emptyset)$, il existe un foncteur de C^* vers $\hat{H}^*$ compatible avec $(\nu, \hat{\nu})$ et avec $(\mu, \hat{\mu})$. Mais $\hat{H}^*$ n'est pas isomorphe à C^* , car C^* ne définit pas un ordre sur la classe de ses unités. En fait, $\hat{H}^*$ n'est pas une $(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}}')$ -complétion libre de C^* , comme on voit facilement lorsque $\mathcal{L} = \emptyset$, d'après la construction de la complétion $\mathcal{L}'$ -inductive libre canonique de C^* donnée au théorème 10.

Appelons *catégorie $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -inductive* (resp. *catégorie $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -sous-inductive*) une catégorie $p(\mathcal{H}', \alpha(p))$ -structurée, où $p = \omega(\mathcal{L}\mathcal{L}')$ (resp. $= \omega^s(\mathcal{L}\mathcal{L}')$) et $\mathcal{H}' = \alpha(p) \cap \Omega'$. Du corollaire 2 du théorème 19 et du théorème 18, il résulte qu'il existe une solution pour le problème « universel » de l'adjonction à une catégorie $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -inductive (resp. $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -sous-inductive) de $\mathcal{J}$ -limites projectives et de $\mathcal{J}$ -limites inductives, avec conservation de certaines limites données. En particulier, si $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ (resp. $\mathcal{L} = \emptyset$) et si $\mathcal{L}'$ est la classe des parties finies de l'ensemble des entiers, une application $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -sous-inductive est une application f -sous-inductive (resp. sous-préinductive) et une catégorie $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -inductive (resp. $\emptyset\mathcal{L}'$ -sous-inductive) est une catégorie f -inductive (resp. sous-préinductive) [1]. Ainsi le corollaire 2 du théorème 19 généralise le théorème 4-5 [1].

C. ADJONCTION DE LIMITES A DES CATEGORIES MULTIPLES.

Soit $p_{\mathcal{F}}^{[n]}$ le foncteur projection vers $\mathbb{M}$ de la catégorie $\mathcal{F}^{[n]}$ des foncteurs n -uples [14]. Soit $p_{\mathcal{F}}^{[n]}$ le foncteur de $\mathcal{F}^{[n]}$ vers $\hat{\mathbb{M}}$ associé de même à l'univers $\hat{\mathbb{M}}_0$.

THEOREME 20. $p_{\mathcal{F}}^{[n]}$ est un foncteur ζ - μ -engendrant pour $\mathbb{M}$, pour tout ordinal de seconde espèce $\zeta < \Lambda$.

DEMONSTRATION. Soit $(C^{\perp i})_{i \leq n}$ une catégorie n -uple telle que $C \in \hat{\mathbb{M}}_0$ et soit $B \subset C$. Désignons par $\sigma_i(B)^{\perp i}$ la sous-catégorie de $C^{\perp i}$ engendrée par B , pour tout $i \leq n$. Posons

$$\sigma^{[n]}(B) = \bigcup_{i \leq n} \sigma_i(B).$$

Si $B \in \hat{\mathbb{M}}_0$, on a $\sigma^{[n]}(B) \in \hat{\mathbb{M}}_0$, puisque $p_{\mathcal{F}}$ est μ -engendrant pour $\mathbb{M}$. Supposons

$$K \subset C \quad \text{et} \quad K \in \hat{\mathbb{M}}_0.$$

Par récurrence, nous construisons une suite croissante de sous-classes K_i de C telle que

$$K_1 = \sigma^{[n]}(K) \quad \text{et} \quad K_{j+1} = \sigma^{[n]}(K_j)$$

pour tout entier j . Posons $\hat{K} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$. Etant donné que $\hat{\mathbb{M}}_0$ est un univers, on a $\hat{K} \in \hat{\mathbb{M}}_0$. Montrons que $\hat{K}$ définit une sous-catégorie n -uple de $(C^{\perp i})_{i \leq n}$, c'est-à-dire (th. 5-II [14]) une sous-catégorie de $C^{\perp i}$ pour tout $i \leq n$. En effet, soient

$$x \in \hat{K}, \quad y \in \hat{K} \quad \text{et} \quad (y, x) \in C^{\perp i} * C^{\perp i}.$$

Il existe un entier j tel que $x \in K_j$ et $y \in K_j$. Puisque $\sigma_i(K_j)^{\perp i}$ est la sous-catégorie de $C^{\perp i}$ engendrée par K_j , on trouve

$$\alpha^{\perp i}(x) \in \sigma_i(K_j) \subset \sigma^{[n]}(K_j) = K_{j+1} \subset \hat{K},$$

$$\beta^{\perp i}(y) \in \sigma_i(K_j) \subset \hat{K} \quad \text{et} \quad y \perp_i x \in \sigma_i(K_j) \subset \hat{K}.$$

Par suite $\hat{K}^{\perp i}$ est une sous-catégorie de $C^{\perp i}$ pour tout $i \leq n$. Il est évident que $(\hat{K}^{\perp i})_{i \leq n}$ est la sous-catégorie n -uple de $(C^{\perp i})_{i \leq n}$ engendrée par K , de sorte que $p_{\mathcal{F}}^{[n]}$ est μ -engendrant pour $\mathbb{M}$.

- Soit $\zeta < \Lambda$ un ordinal de seconde espèce. Pour tout $\lambda < \zeta$, supposons donnée une sous-catégorie n -uple $(C_\lambda^{\perp i})_{i \leq n}$ de $(C^{\perp i})_{i \leq n} \in \mathcal{F}_o^{[n]}$, de manière que l'on ait

$$C_\lambda \subset C_{\lambda'} \quad \text{si} \quad \lambda < \lambda'.$$

Posons $\hat{C} = \bigcup_{\lambda < \zeta} C_\lambda$. Si

$$x \in \hat{C}, \quad y \in \hat{C} \quad \text{et} \quad (y, x) \in C^{\perp i} * C^{\perp i},$$

il existe un ordinal $\lambda < \zeta$ tel que $x \in C_\lambda$ et $y \in C_\lambda$. Par conséquent

$$\alpha^{\perp i}(x) \in C_\lambda \subset \hat{C}, \quad \beta^{\perp i}(x) \in \hat{C} \quad \text{et} \quad y \perp_i x \in C_\lambda \subset \hat{C}.$$

Ceci prouve que $(\hat{C}^{\perp i})_{i \leq n}$ est une sous-catégorie n -uple de $(C^{\perp i})_{i \leq n}$.

On en déduit que $p_{\mathcal{F}}^{[n]}$ est ζ - $\mathcal{R}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$. ■

COROLLAIRE 1. Soient $(C^{\perp i})_{i \leq n}$ une catégorie n -uple et r une relation d'équivalence sur C ; il existe une catégorie n -uple quasi-quotient de $(C^{\perp i})_{i \leq n}$ par r .

En effet, $p_{\mathcal{F}}^{[n]}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé à $\mathcal{F}$ -limites projectives et $\mathcal{R}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$; d'après le théorème 2, $p_{\mathcal{F}}^{[n]}$ est donc à structures quasi-quotient. ■

COROLLAIRE 2. La catégorie $\mathcal{F}^{[n]}(p_{\mathcal{F}}^{[n]})$ est à $\mathcal{F}^{[n]}(p_{\mathcal{F}}^{[n]})$ -projections, où $\mathcal{I} \subset \mathcal{F}_o$, $\mathcal{J} \subset \mathcal{F}_o$, $p_{\mathcal{F}}(\mathcal{I} \cup \mathcal{J}) \in \tilde{\mathbb{M}}_o$.

En effet, ce corollaire résulte du corollaire 1 du théorème 16, dont les hypothèses sont vérifiées, en vertu du théorème 20, en prenant par exemple pour ζ l'ordinal régulier $\tilde{\lambda}$ d'indice $(\sup_{I \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}} \bar{I}) + 1$. ■

Soit $\mathcal{F}^{[n]}[n]_o$ la classe ayant pour éléments les familles

$$e = (C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i)_{i \leq n}$$

vérifiant

$$p_i(e) = (C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i) \in \mathcal{F}_o^{[n]} \quad \text{et} \quad p_{[n]}(e) = (C^{\perp i})_{i \leq n} \in \mathcal{F}^{[n]}.$$

Soit $\mathcal{F}^{[n]}[n]_o$ la sous-classe de $\mathcal{F}^{[n]}[n]_o$ formée des e tels que $p_i(e) \in \mathcal{F}^{[n]}$ pour tout $i \leq n$. Soit $\mathcal{F}^{[n]}[n]$ la sous-catégorie de la catégorie produit $(\mathcal{F}^{[n]})^n$ formée des $(\hat{F}_i)_{i \leq n}$ tels que $(\beta(\hat{F}_i))_{i \leq n}$, $(\alpha(\hat{F}_i))_{i \leq n}$ sont dans

$$\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]_o, \quad q^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(\hat{F}_i) = q^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(\hat{F}_{i'}) \text{ si } i \leq n \text{ et } i' \leq n.$$

Nous identifions $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]_o$ à la classe des unités de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$. Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$ ayant $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]_o$ pour classe de ses unités. Désignons par $q^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$ le foncteur de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$ vers $\mathbb{M}$ associant $q^{\mathcal{A}\mathcal{G}}(\hat{F}_i)$ à $(\hat{F}_i)_{i \leq n}$. Soient $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$, $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$ et $Q^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$ les catégories et foncteur définis de même à partir de l'univers $\mathbb{M}_o$. On définit un foncteur $p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}_{[n]}$ de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$ vers $\mathcal{F}[n]$ en associant $((\hat{C}^{+i})_{i \leq n}, \underline{F}, (C^{+i})_{i \leq n})$ à

$$((\hat{C}^{+i}, \hat{\nu}_i, \hat{\mu}_i), \underline{F}, (C^{+i}, \nu_i, \mu_i))_{i \leq n} \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n].$$

THEOREME 21. Le foncteur $Q^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$ est $\mathcal{A}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$. La catégorie $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$ est une catégorie à $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]$ -projections et $p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}_{[n]}$ admet un adjoint.

DEMONSTRATION. Soit $\tilde{\lambda}$ l'ordinal régulier d'indice

$$\lambda_{\mathcal{A}\mathcal{G}} + 1, \text{ où } \lambda_{\mathcal{A}\mathcal{G}} = \sup_{I \in \mathcal{A} \cup \mathcal{G}} \bar{I}.$$

Supposons $e = (C^{+i}, \nu_i, \mu_i)_{i \leq n} \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}[n]_o$. Pour toute sous-catégorie n -uplet $(B^{+i})_{i \leq n}$ de $(C^{+i})_{i \leq n}$, désignons par $\hat{\sigma}_i(M)$ la sous-classe de C obtenue en appliquant à B l'opérateur σ^{+i, μ_i} relatif à $(C^{+i}, \nu_i, \mu_i) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}\mathcal{G}}$ (construit à la fin de la démonstration du théorème 12), et ce pour tout $i \leq n$. Soit

$$\sigma_{[n]}(B) = \bigcup_{i \leq n} \hat{\sigma}_i(B).$$

Si $B \in \tilde{\mathbb{M}}_o$, on a $\hat{\sigma}_i(B) \in \tilde{\mathbb{M}}_o$ d'après le théorème 12, et par suite

$$\sigma_{[n]}(B) \in \tilde{\mathbb{M}}_o.$$

Supposons $K \subset C$ et $K \in \tilde{\mathbb{M}}_o$. Par récurrence transfinie, nous construisons une sous-classe K_λ de C pour tout ordinal $\lambda < \tilde{\lambda}$ comme suit :

- 1°) $(K_1^{+i})_{i \leq n}$ est la $p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}_{[n]}$ -sous-structure de $(C^{+i})_{i \leq n}$ engendrée par K (qui existe d'après le théorème 20);
- 2°) $(K_\lambda^{+i})_{i \leq n}$ est la $p^{\mathcal{A}\mathcal{G}}_{[n]}$ -sous-structure de $(C^{+i})_{i \leq n}$ engendrée par $\sigma_{[n]}(\bigcup_{\xi < \lambda} K_\xi)$.

Du théorème 20, il résulte que l'on a $K_\lambda \in \tilde{\mathbb{M}}_0$ pour tout $\lambda < \tilde{\lambda}$. Posons $\hat{K} = \bigcup_{\lambda < \tilde{\lambda}} K_\lambda$; alors $\hat{K} \in \tilde{\mathbb{M}}_0$, car $\tilde{\mathbb{M}}_0$ est un univers et $\tilde{\lambda} < \Lambda$. Puisque K_λ définit une sous-catégorie de C^{+i} pour tout $\lambda < \tilde{\lambda}$ et tout $i \leq n$, la classe $\hat{K}$ définit une sous-catégorie n -uple de $(C^{+i})_{i \leq n}$. Montrons que $\hat{K}$ est stable pour ν_i et pour μ_i . En effet, soit $i \leq n$; si Φ est un foncteur de $I \in \mathcal{J}$ (resp. $\in \mathcal{J}$) vers C^{+i} tel que $\Phi(I) \subset \hat{K}$, en utilisant comme dans la démonstration du théorème 5 le fait que $\tilde{\lambda}$ est régulier, on voit qu'il existe un ordinal $\lambda < \tilde{\lambda}$ tel que $\Phi(I) \subset K_\lambda$; il en résulte

$$\text{Lim}^{\nu_i} \Phi \text{ (resp. } \text{Lim}^{\mu_i} \Phi) \in \hat{\sigma}_i(K_\lambda) \subset \sigma_{[n]}(K_\lambda) \subset K_{\lambda+1} \subset \hat{K}.$$

Donc $\hat{K}$ est stable pour ν_i (resp. pour μ_i) et définit une $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n]$ -sous-structure $e' = (\hat{K}^{+i}, \nu_i, \mu_i)_{i \leq n}$ de e . Il est évident que e' est la $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n]$ -sous-structure de e engendrée par K ; ainsi, $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n]$ est $\sim$ -engendrant pour $\mathbb{M}$. - Puisque $Q^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et $P_{\mathcal{F}}^{[n]}$ sont des foncteurs à $\hat{\mathcal{F}}_0$ -limites projectives, $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n], \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n])$ est à $\mathbb{M}_0$ -produits. Les conditions du critère 1 d'existence de foncteurs adjoints sont ainsi remplies relativement à $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n], \iota, \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}[n])$ et à $p_{[n]}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$, par conséquent ces deux foncteurs admettent un adjoint. ■

Soit π_n le foncteur de $\mathcal{F}^{[n]}$ vers $\mathcal{F}^{[n-1]}$ tel que

$$\pi_n((C^{+i})_{i \leq n}) = (C^{+i})_{i \leq n-1} \text{ et } p_{\mathcal{F}}^{[n-1]} \cdot \pi_n = p_{\mathcal{F}}^{[n]}.$$

Soit N l'ensemble des entiers positifs, Δ la sous-catégorie du groupoïde $(N \times N)^+$ associé à N formée des couples (i, j) tels que $i \leq j$. Nous définissons un foncteur π de Δ vers $\hat{\mathcal{F}}$ tel que

$$\pi(n, n) = \mathcal{F}^{[n]} \text{ et } \pi(n, n+1) = \pi_{n+1} \text{ pour tout } n \in N.$$

Soit $\mathcal{F}^{[\omega]}$ la catégorie limite projective de ce foncteur. Ses unités s'identifient aux suites $(C^{+i})_{i \in N}$ telles que :

- 1°) $C^{+i} \in \mathcal{F}_0$ pour tout $i \in N$;
- 2°) $(C^{+j}, \alpha^{+i}, C^{+j}) \in \mathcal{F}$ et $(C^{+j}, \beta^{+i}, C^{+j}) \in \mathcal{F}$ pour $i \in N, j \in N$;
- 3°) Axiome de permutabilité : Si les composés

$$(g' +_j f') +_i (g +_j f) \text{ et } (g' +_i g) +_j (f' +_i f)$$

sont définis, ils sont égaux, pour tout $i \in N$, $j \in N$, $i \neq j$.

Les morphismes de $\mathcal{F}[\omega]$ s'identifient aux triplets

$$((\hat{C}^{\perp i})_{i \in N}, f, (C^{\perp i})_{i \in N})$$

tels que

$$1^0) (C^{\perp i})_{i \in N} \in \mathcal{F}_0[\omega] \text{ et } (\hat{C}^{\perp i})_{i \in N} \in \mathcal{F}_0[\omega];$$

$$2^0) (\hat{C}^{\perp i}, f, C^{\perp i}) \in \mathcal{F} \text{ pour tout } i \in N.$$

1 DEFINITION. Une unité (resp. un morphisme) de $\mathcal{F}[\omega]$ est appelé une catégorie ω -uple (resp. appelé un foncteur ω -uple).

Soit $p_{\mathcal{F}}^{[\omega]}$ le foncteur projection de $\mathcal{F}[\omega]$ vers $\mathbb{M}$ associant C à $(C^{\perp i})_{i \in N}$. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux parties de $\mathcal{F}_0$ telles que $p_{\mathcal{F}}(\mathcal{I} \cup \mathcal{J}) \in \tilde{\mathbb{M}}_0$. Comme plus haut, définissons la sous-catégorie $\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}[\omega]$ de $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}})^N$ obtenue comme suit : ses unités sont les familles $e = (C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i)_{i \in N}$ telles que

$$p_i^{\omega}(e) = (C^{\perp i}, \nu_i, \mu_i) \in \mathcal{F}_0^{\mathcal{I}, \mathcal{J}} \text{ et } p_{[\omega]}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}(e) = (C^{\perp i})_{i \in N} \in \mathcal{F}[\omega],$$

les morphismes étant les $(\hat{F}_i)_{i \in N}$ tels que

$$(\alpha(\hat{F}_i))_{i \in N} \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}[\omega]_0, (\beta(\hat{F}_i))_{i \in N} \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}[\omega]_0 \text{ et } q^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}(\hat{F}_i) = q^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}(\hat{F}_j)$$

pour tout $i \in N$, $j \in N$. Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}[\omega]$ sa sous-catégorie pleine ayant pour unités les e tels que $p_i^{\omega}(e) \in \mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ pour tout $i \in N$. Désignons par $q^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}[\omega]$ et $p_{[\omega]}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ les foncteurs canoniques de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}[\omega]$ vers $\mathbb{M}$ et vers $\mathcal{F}$, par $Q^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}[\omega]$ et $P_{[\omega]}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ les foncteurs de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}[\omega]$ vers $\mathbb{M}$ obtenus de même à partir de $\hat{\mathbb{M}}_0$.

THEOREME 22. Le théorème 20, ses corollaires et le théorème 21 sont encore vrais si l'on remplace dans leurs énoncés n par ω .

En effet, les démonstrations sont analogues, $i \leq n$ devenant $i \in N$, ce qui conduit à poser

$$\sigma^{[\omega]}(B) = \bigcup_{i \in N} \sigma_i(B) \quad (\text{resp. } \sigma_{[\omega]}(B) = \bigcup_{i \in N} \hat{\sigma}_i(B))$$

dans la démonstration du théorème 20 (resp. théorème 21). ■

DEFINITION. Soit $\delta = n \in N$ (resp. $= \omega$). Une $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}[\delta], \mathcal{F}^{\mathcal{A}}[\delta])$ -projection de $e \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}[\delta]_0$ sera appelée complétion n -uple (resp. ω -uple) de e .

APPLICATIONS.

1°) Construction de foncteurs types : Soit $(C^*, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{A}}$ et soit $\mathfrak{N}_{C^*} = (\mathfrak{N}_{C^*}^{\square}, \mathfrak{N}_{C^*}^{\blacklozenge})$ la catégorie double des transformations naturelles entre foncteurs de C^* vers C^* . Alors $\mathfrak{N}_{C^*}$ définit un élément

$$e = (\mathfrak{N}_{C^*}, \hat{\nu}, \hat{\mu}) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}}(P\mathcal{C})$$

(appendice II, proposition 2, C.S.). Toute partie K de $\mathfrak{N}_{C^*}$ admet, en vertu des théorèmes 16 et 20, une $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion structurée

$$\hat{e} = (\hat{K}^{\square}, \hat{K}^{\blacklozenge}, \hat{\nu}^*, \hat{\mu}^*)$$

dans e (à savoir la $\mathcal{Q}^{\mathcal{A}}(P\mathcal{C})$ -sous-structure de e engendrée par K), et $\hat{K}$ est construite par la méthode exposée dans la démonstration du théorème 16. Supposons vérifiées les conditions suivantes : K admet pour seul élément la transformation naturelle définie par le triplet (Y, y, C^*) ; $\zeta < \Lambda$ est un ordinal de seconde espèce, $\mathcal{I}$ est la classe des catégories triviales I^0 telles que $\bar{I} < \zeta$ et $\mathcal{J}$ est la classe des catégories J^* telles que $\bar{J} < \zeta$ et que J^* définisse un bon ordre sur la classe de ses unités. On montre alors que la catégorie $\hat{K}^{\blacklozenge} = (\hat{K}^{\square} \square C^*)^{\blacklozenge}$ contient la catégorie des foncteurs de type (Y, y, ζ) (appendice II, C.S.); mais elle ne lui est pas identique, la construction des foncteurs types ne faisant pas intervenir les transformations naturelles projection canonique d'un produit parallèle de foncteurs naturalisés sur ses facteurs. Les éléments de la catégorie des triangles de $\hat{K}^{\square}$ de sommet C^* peuvent être appelés *transformations naturelles canoniques entre foncteurs types*. En particulier, lorsque $C^* = \mathfrak{M}$ et $(Y, y) = (\mathcal{P}, \gamma)$, où $\mathcal{P}$ est le foncteur «partie» et γ sa naturalisation canonique (C.S., app. II), on généralise ainsi les résultats de [8].

1

2°) Soit $C^* \in \mathcal{F}_0$ et soit (C^*, F) un couple w -dominant une espèce de structures (C.S., chap. II), où $w = (\mathfrak{M}, \underline{w}, H^*)$ est un foncteur fidèle. Soit $q = (H^*, \underline{q}, G^*)$ un foncteur admettant un foncteur adjoint injectif q' . Alors (C^*, q', F) est un couple w, q -dominant une espèce de structures,

2

«plongement universel» de (C^*, F) dans une espèce de structures w, q -dominée. Ce procédé s'applique lorsque w est l'un des foncteurs qui admettent des adjoints d'après les résultats de cette partie II. Par exemple, si $w = p\mathcal{C}$ et $q = p\mathcal{J}$, on plonge ainsi universellement une espèce de morphismes (C^*, F) (chap. II, C.S.) en une espèce de structures $q\mathcal{J}$ -dominée $(C^*, \hat{F})$, dite *espèce de morphismes $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -complétée*, de sorte que $\hat{F}(e)$ soit une $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -complétion libre de $F(e)$ pour tout $e \in C^*_\bullet$.

APPENDICE

Nous allons indiquer divers lemmes implicitement utilisés dans le texte précédent ou liés aux questions étudiées ci-dessus. Nous en déduirons aussi quelques généralisations de résultats de [1].

1. Image réciproque de sous-structures.

Dans ce §, nous désignons par p un foncteur $(\mathbb{M}, \underline{p}, H^*)$ d'homomorphismes saturé, à produits fibrés finis. Si $f \in H$, nous posons $\underline{f} = \underline{p(f)}$.

LEMME 1. 1°) Si p est à $\{I\}$ -produits fibrés et si s_i est une p -sous-structure de $S \in H_0^*$ pour tout $i \in I$, il existe une p -sous-structure $\bigcap_{i \in I} s_i$ de S telle que

$$p\left(\bigcap_{i \in I} s_i\right) = \bigcap_{i \in I} p(s_i).$$

2°) Si $f \in H$ et si $\hat{s}$ est une p -sous-structure de $\beta(f)$, il existe un $(\mathbb{M}, p)$ -sous-morphisme $f' \in \hat{s}.H$ de f tel que, en posant $\alpha(f') = \underline{f}^{-1}(\hat{s})$, on ait $p(\underline{f}^{-1}(\hat{s})) = \underline{f}^{-1}(p(\hat{s}))$.

DEMONSTRATION. Soit $h_i \in H$ et $\beta(h_i) = s$ pour tout $i \in I$. Si $(p(h_i), v_i)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé dans $\mathbb{M}$, il existe un produit fibré naturalisé $(h_i, \bar{v}_i)_{i \in I}$ dans H^* tel que $p(\bar{v}_i) = v_i$, si p est un foncteur d'homomorphismes saturé à $\{I\}$ -produits fibrés; de plus (démonstration de la proposition 4), on a $\bar{v}_i \in p^{-1}$ lorsque

$$h_{i'} \in p^{-1} \text{ pour } i' \in I \text{ et } i \neq i'.$$

En appliquant ce résultat au cas où $h_i = S \xleftarrow[p]{} s_i$, on obtient $\bigcap_{i \in I} s_i$, puisqu'il existe un produit fibré naturalisé

$$(p(h_i), (p(s_i), \iota, \bigcap_{i \in I} p(s_i)))_{i \in I}.$$

- On construit de même $\underline{f}^{-1}(\hat{s})$ en prenant $h_1 = \beta(f) \xleftarrow[p]{} \hat{s}$ et $h_2 = f$, étant donné qu'il existe un produit fibré naturalisé

$$(p(h_i), v_i)_{i=1,2} \text{ tel que } v_2 \in \mathbb{M} \cdot \underline{f}^{-1}(p(\hat{s})). \blacksquare$$

COROLLAIRE 1. Supposons p à $\{I\}$ -produits fibrés, $f_i \in H$ et $\beta(f_i) = s$ pour tout $i \in I$. S'il existe $S \in H_0^*$ tel que $\alpha(f_i) \xleftarrow[p]{} S$ et si $\hat{s} \xleftarrow[p]{} s$, il existe

une p -sous-structure s' de S sur la classe $\bigcap_{i \in I} \bar{f}_i^{-1}(p(\hat{s}))$.

En effet, avec les notations du lemme, on a $s' = \bigcap_{i \in I} \bar{f}_i^{-1}(\hat{s})$. ■

COROLLAIRE 2. Soit $b \in H$ et $f = (N, \bar{b}, M)$ une restriction de $p(b)$. Si M et N engendrent des p -sous-structures s' et s de $\alpha(b)$ et $\beta(b)$ respectivement, il existe un $(\bar{M}, p)$ -sous-morphisme $b' \in s.H$, s' de b .

En effet, d'après le lemme, il existe un p -sous-morphisme $g \in s.H$ de b tel que $\alpha(g) = \bar{b}^{-1}(s)$. Comme $f(M) \subset N$, on a

$$M \subset p(\bar{b}^{-1}(s)), \quad \text{d'où} \quad s' \bar{b}^{-1}(s).$$

Ainsi l'élément cherché est $b' = g.(b(s) \xleftarrow[p]{\bar{b}^{-1}} s')$. ■

Supposons que H^* admette un élément final a tel que $p(a) = \{\emptyset\}$. Si $s_i \in H_o^*$, il existe $f_i \in a.H.s_i$ et, p étant à produits fibrés finis, il existe un produit fibré naturalisé $((f_1, v_1), (f_2, v_2))$ dans $\bar{p}$ tel que $p(v_i)$ soit la projection canonique de $p(s_1) \times p(s_2)$ sur $p(s_i)$; l'élément $((v_1, v_2), \alpha(v_1))$ est donc un produit naturalisé dans p , de sorte que p est à produits finis. D'après le corollaire de la proposition 1, il s'ensuit que p est aussi résolvant à droite.

Comme dans [1], n° 3, nous désignons par :

$\mathcal{K}'(p)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie produit fibré $p \vee p\eta$, ayant pour unités les couples (C^*, s) tels que

$$C^* \in \mathcal{N}_o^*, \quad s \in H_o^*, \quad p(s) = C$$

et que $([C^*], s)$ soit un graphe p -structuré [15].

$\bar{\mathcal{N}}'(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}'(p)$ ayant pour unités les graphes multiplicatifs fortement p -structurés (i.e. les couples $(C^*, s) \in \mathcal{K}'(p)$ pour lesquels il existe $k \in s.H.s * s$, où $s * s \xrightarrow{p} s \times s$ et où $\underline{p(k)}$ est la loi de composition de C^*).

$\mathcal{N}(p)$ (resp. $\bar{\mathcal{N}}(p)$) la catégorie des homomorphismes entre classes multiplicatives p -structurées (resp. fortement p -structurées).

$\mathcal{N}'(p)$ la sous-catégorie de $\mathcal{N}(p)$ formée des néofoncteurs p -structurés; ses unités sont les graphes multiplicatifs p -structurés, i.e.

les triplets (C^*, s, s') tels que, κ étant la loi de composition de C^* , on ait:

a) $(C^*, s) \in \mathcal{K}(p)_o$ et il existe $k \in s.H.s'$ vérifiant $p(k) = (C, \kappa, C^* * C^*)$;

b) Il existe $v_i \in s.H.s'$ tel que $p(v_i) = (C, p_i, C^* * C^*)$, où p_i désigne la i -ème projection canonique de $C \times C$ sur C .

REMARQUE. La condition b (ajoutée dans [1] à la définition de graphe multiplicatif p -structuré introduite dans [15]) est nécessaire pour la validité de la proposition 5-3 [1] (et par suite du théorème 2-4 [1]). En effet, cette proposition repose sur le fait que la surjection $[\beta, \alpha]$ définit un néofoncteur p -structuré de (C^*, s, s') vers le groupoïde p -structuré $((C_o^* \times C_o^*)^+, s_o \times s_o)$, où $s_o \curvearrowright s$. Or cette propriété n'est plus vraie si (C^*, s, s') vérifie seulement la condition a. Par suite, il faut aussi supposer dans [16] (théorème 1-I et proposition 7-I) que, si (C^*, T, T') est un graphe multiplicatif prétopologique, alors T' est une topologie plus fine que la topologie induite par $T \times T$ sur $C^* * C^*$.

PROPOSITION 1. Supposons que $(C^*, s, s') \in \mathcal{N}(p)_o$ vérifie l'axiome b. Soit $\hat{s}$ une p -sous-structure de s et $\hat{C} = p(\hat{s})$. Il existe $\hat{s}' \curvearrowright_p s'$ telle que $(\hat{C}^*, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathcal{N}(p)_o$. 1

DEMONSTRATION. Soit $k \in s.H.s'$ tel que $p(k) = (C, \kappa, C^* * C^*)$. On a

$$\hat{C}^* * \hat{C}^* = (C^* * C^*) \cap \underline{v}_1^{-1}(\hat{C}) \cap \underline{v}_2^{-1}(\hat{C}) \cap \bar{\kappa}^{-1}(\hat{C}).$$

D'après le corollaire 1 du lemme 1 appliqué à la famille (v_1, v_2, k) , il existe $\hat{k} \in \hat{s}.H$ tel que

$$\alpha(\hat{k}) = \hat{s}' \curvearrowright s' \quad \text{et} \quad p(\hat{k}) = (\hat{C}, \kappa, \hat{C}^* * \hat{C}^*).$$

Donc (théorème 4-II [15]) $(\hat{C}^*, \hat{s}, \hat{s}')$ est une sous-classe multiplicative p -structurée de (C^*, s, s') . ■

COROLLAIRE 1. Si $(C^*, s) \in \overline{\mathcal{N}}(p)_o$ et si $\hat{s} \curvearrowright_p s$, on a $(\hat{C}^*, \hat{s}) \in \overline{\mathcal{N}}(p)$, où $\hat{C} = p(\hat{s})$.

En effet, la classe multiplicative p -structurée $(C^*, s, s * s)$, où $s * s \curvearrowright s \times s$, vérifie l'axiome b, de sorte que l'on construit un

$$(\hat{C}^\bullet, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathcal{N}(p), \quad \text{où} \quad \hat{s}' \longleftarrow s * s,$$

à l'aide de la proposition 1. Les relations

$$\hat{s}' \longleftarrow s * s, \quad s * s \longleftarrow s \times s, \quad \hat{s} \times \hat{s} \longleftarrow s \times s \quad \text{et} \quad p(\hat{s}') \subset p(\hat{s} \times \hat{s})$$

entraînent $\hat{s}' \longleftarrow \hat{s} \times \hat{s}$, d'où $(\hat{C}^\bullet, \hat{s}) \in \overline{\mathcal{N}}(p)$. ■

COROLLAIRE 2. Soit $(C^\bullet, s, s') \in \mathcal{N}'(p)_o$. Si $\hat{C}^\bullet$ est un sous-graphe multiplicatif de $C^\bullet$ et si $\hat{s} \longleftarrow s$ et $p(\hat{s}) = \hat{C}$, alors il existe un sous-graphe multiplicatif p -structuré $(\hat{C}^\bullet, \hat{s}, \hat{s}')$ de $(C^\bullet, s, s')$. Si de plus $(C^\bullet, s) \in \overline{\mathcal{N}}'(p)_o$, on a $(\hat{C}^\bullet, \hat{s}) \in \overline{\mathcal{N}}'(p)$.

En effet, d'après la proposition 1, il existe

$$(\hat{C}^\bullet, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathcal{N}(p)_o, \quad \text{où} \quad \hat{s}' \longleftarrow s'.$$

En vertu du théorème 8-II [15], $([\hat{C}^\bullet], \hat{s})$ est un sous-graphe p -structuré de $([C^\bullet], s)$. Donc $(\hat{C}^\bullet, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathcal{N}'(p)_o$. La deuxième affirmation se démontre comme dans le corollaire 1. ■

Supposons que $\mathbb{M}_o$ soit un univers et que p soit la restriction d'un foncteur d'homomorphismes saturé à produits fibrés finis $P = (\hat{\mathbb{M}}, \underline{P}, \hat{H}^\bullet)$ à $H = \hat{P}^1(\mathbb{M})$. Soit $\tilde{\mathbb{M}}$ la saturante de $\mathbb{M}$ dans $\hat{\mathbb{M}}$. Si $\mathcal{U} = \mathcal{K}', \mathcal{N}, \mathcal{N}', \overline{\mathcal{N}}$ ou $\overline{\mathcal{N}}'$, nous notons $\hat{P}_{\mathcal{U}}$ et $\hat{P}_{\mathcal{U}}^H$ les foncteurs projections canoniques de $\mathcal{U}(P)$ vers $\hat{\mathbb{M}}$ et vers $\hat{H}^\bullet$. Soit $X_{\mathcal{U}}$ la classe des $\hat{P}_{\mathcal{U}}$ -monomorphismes $\hat{j}$ tels que $\hat{P}_{\mathcal{U}}^H(\hat{j}) \in P_i^{\longleftarrow}$.

PROPOSITION 2. Supposons $\hat{j} \in X_{\mathcal{U}}$, où $\mathcal{U} = \mathcal{K}', \overline{\mathcal{N}}'$ ou $\mathcal{N}'$ (resp. $= \overline{\mathcal{N}}$); alors $\hat{P}_{\mathcal{U}}(\hat{j}) \in (P_{\mathcal{U}})_i^{\longleftarrow}$, en désignant par $\hat{P}_{\mathcal{U}}'$ le foncteur canonique de $\mathcal{U}(P)$ vers $\mathcal{U} = \hat{\mathcal{N}}'$ (resp. $= \hat{\mathcal{N}}$). On a $\overline{\mathcal{N}}'(P)_o \cdot X_{\mathcal{K}'} = X_{\overline{\mathcal{N}}'}$.

DEMONSTRATION. Puisque P est un foncteur d'homomorphismes saturé, $\hat{P}_{\mathcal{U}}$ en est aussi un, et il suffit de prouver l'affirmation lorsque $\hat{P}_{\mathcal{U}}(\hat{j}) \in \hat{\mathbb{M}}^i$. Supposons donc

$$J = \hat{P}_{\mathcal{U}}'(\hat{j}) = (C^\bullet, \iota, \hat{C}^\perp) \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{U}}^H(\hat{j}) = s \longleftarrow_P \hat{s}.$$

Soit $\hat{C}^\bullet$ la sous-classe multiplicative de $C^\bullet$ définie par $\hat{C}$. Si $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{N}}$, on a $(\hat{C}^\bullet, \hat{s}) \in \overline{\mathcal{N}}(P)$, d'après le corollaire 1 de la proposition 1. Comme

$(\hat{C}^\bullet, \hat{s})$ et $(\hat{C}^\perp, \hat{s})$ sont deux $\hat{P}_{\mathfrak{H}}$ -sous-structures de $(C^\bullet, s)$ sur la classe $\hat{C}$, elles sont égales; il s'ensuit

$$\hat{C}^\perp = \hat{C}^\bullet \quad \text{et} \quad J \in (P_{\mathfrak{H}})_i^\sim.$$

-Considérons le cas où J est un néofoncteur; alors $\hat{C}$ définit un sous-graphe multiplicatif $\hat{C}^\bullet$ de $C^\bullet$. - Si $\mathfrak{U} = \mathbb{K}'$, le couple $([\hat{C}^\bullet], \hat{s})$ est un graphe P -structuré (théorème 8-II [15]); ainsi $\hat{e} = (\hat{C}^\bullet, \hat{s}) \in \mathbb{K}'(P)$ est une $\hat{P}_{\mathbb{K}'}$ -sous-structure de $(C^\bullet, s)$. On en déduit $\hat{C}^\bullet = \hat{C}^\perp$ et $J \in (P_{\mathfrak{H}})_i^\sim$. Si de plus $(C^\bullet, s) \in \mathfrak{H}'(P)$, on a $\hat{e} \in \mathfrak{H}'(P)$ d'après le corollaire 2 de la proposition 1, d'où $\hat{j} \in X_{\mathfrak{H}'}$. - Si $\mathfrak{U} = \mathfrak{H}'$, on a de même $(\hat{C}^\bullet, \hat{s}) \in \mathfrak{H}'(P)$ et par suite

$$\hat{C}^\perp = \hat{C}^\bullet, \quad J \in (P_{\mathfrak{H}})_i^\sim \quad \text{et} \quad \hat{j} \in X_{\mathbb{K}'},$$

- Soit $\mathfrak{U} = \mathfrak{H}'$ et posons

$$\beta(\hat{j}) = (C^\bullet, s, s') = e'.$$

En vertu du corollaire 2 de la proposition 1, il existe une $\hat{P}_{\mathfrak{H}'}$ -sous-structure $\hat{e} = (\hat{C}^\bullet, \hat{s}, \hat{s}')$ de e' telle que $\hat{s}' \xrightarrow{P} s'$. Un raisonnement analogue au précédent entraîne

$$\hat{e} = \alpha(\hat{j}) \quad \text{et} \quad J \in (P_{\mathfrak{H}})_i^\sim. \quad \blacksquare$$

LEMME 2. Si $S \in \hat{H}_o$ et si s est une $(P_i^\sim, H)$ -sous-structure de S engendrée par M , alors s est une P -sous-structure de S engendrée par M .

DEMONSTRATION. P étant saturé, il revient au même (prop. 2-2 [1]) de montrer que, si s est une $(P_i^\sim, \tilde{H})$ -sous-structure de S engendrée par $M \subset P(S)$ et si $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$, s est une P -sous-structure de S engendrée par M , en désignant par $\tilde{H}$ la saturante $\tilde{P}^{-1}(\tilde{\mathfrak{M}})$ de H dans $\hat{H}^\bullet$. En effet, soit

$$s' \xrightarrow{P} S, \quad \text{et} \quad M \subset P(s').$$

D'après le lemme 1, il existe une P -sous-structure $\hat{s} = s \cap s'$ de S telle que

$$P(\hat{s}) = P(s') \cap P(s) \in \tilde{\mathfrak{M}}_o, \quad \hat{s} \xrightarrow{P} s' \quad \text{et} \quad \hat{s} \xrightarrow{P} s.$$

Des relations

$$\hat{s} \xrightarrow{P} S \quad \text{et} \quad M \subset P(\hat{s}) \in \tilde{\mathbb{M}}_o$$

on déduit $s \xrightarrow{P} \hat{s}$, par définition d'une $(P_i^{\leftarrow}, \tilde{H})$ -sous-structure engendrée, d'où $\hat{s} = s$ et $s \xrightarrow{P} s'$. Ceci achève la démonstration. ■

- 1 PROPOSITION 3. Si P est $\mathcal{P}$ -engendrant pour $\mathbb{M}$, il est $(\mathbb{M}, \mathcal{U})$ -résolvant ([1], définition 1-3) pour $\mathcal{U} = \mathcal{K}', \mathcal{N}', \mathcal{N}'$ ou $\mathcal{N}$.

DEMONSTRATION. Supposons $(C^*, s) \in \mathcal{K}'(P)_o$ et $M \subset C$, $M \in \tilde{\mathbb{M}}$. Il existe $\bar{a} \in s.\hat{H}.s$, $\bar{b} \in s.\hat{H}.s$ tels que

$$P(\bar{a}) = (C, \alpha, C) \quad \text{et} \quad P(\bar{b}) = (C, \beta, C).$$

Si $\bar{M} = M \cup \alpha(M) \cup \beta(M)$, on a $\bar{M} \in \tilde{\mathbb{M}}_o$, car $\mathbb{M}_o$ est un univers. Par hypothèse, $\bar{M}$ engendre une $(P_i^{\leftarrow}, \tilde{H})$ -sous-structure $\hat{s}$ de s qui, d'après le lemme 2, est une P -sous-structure de s engendrée par M . Comme

$$\alpha' = (\bar{M}, \alpha_i, \bar{M}) \in \tilde{\mathbb{M}} \quad \text{et} \quad \beta' = (\bar{M}, \beta_i, \bar{M}) \in \tilde{\mathbb{M}},$$

le corollaire 2 du lemme 1 assure l'existence de

$$\hat{\alpha}' = (\hat{M}, \alpha_i, \hat{M}), \hat{\beta}' = (\hat{M}, \beta_i, \hat{M}), \bar{a}' \in \hat{s}.\hat{H}.\hat{s} \quad \text{et} \quad \bar{b}' \in \hat{s}.\hat{H}.\hat{s}$$

tels que $p(\bar{a}') = \hat{\alpha}'$ et $p(\bar{b}') = \hat{\beta}'$. Ainsi $((\hat{M}, \hat{\beta}', \hat{\alpha}'), \hat{s})$ est un graphe p -structuré et l'on a $(\hat{M}^*, \hat{s}) \in \mathcal{K}'(P)_o$. Evidemment $(\hat{M}^*, \hat{s})$ est la $(X_{\mathcal{K}'}, \mathcal{K}'(P))$ -sous-structure de (C^*, s) engendrée par M , de sorte que P est $(\mathbb{M}, \mathcal{K}')$ -résolvant, d'après la proposition 2-2 [1]. - Supposons de plus

$$e = (C^*, s) \in \mathcal{N}'(P)_o \quad (\text{resp. } = (C^*, s, s') \in \mathcal{N}'(P)_o).$$

Du corollaire 2 de la proposition 1, il résulte

$$\hat{e} = (\hat{M}^*, \hat{s}) \in \mathcal{N}'(P) \quad (\text{resp. } = (\hat{M}^*, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathcal{N}'(P), \text{ où } \hat{s}' \xrightarrow{P} \hat{s}).$$

Ainsi $\hat{e}$ est la $(X_{\mathcal{U}}, \mathcal{U}(P))$ -sous-structure de e engendrée par M , pour $\mathcal{U} = \mathcal{N}'$ (resp. $= \mathcal{N}'$). - Si $(K^*, S) \in \mathcal{N}(P)_o$ et si

$$A \subset K \quad \text{et} \quad A \in \tilde{\mathbb{M}}_o,$$

on a $(\hat{K}^*, \hat{S}) \in \mathcal{N}(P)_o$ et $\hat{K} = P(\hat{S}) \in \tilde{\mathbb{M}}_o$, en désignant par $\hat{S}$ la P -sous-structure de S engendrée par A (corollaire 1 de la proposition 1). Par suite $(\hat{K}^*, \hat{S})$ est la $(X_{\mathcal{N}}, \mathcal{N}(P))$ -sous-structure de (K^*, S) engendrée

par A . ■

PROPOSITION 4. Si P est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$, alors $\hat{P}_{\mathfrak{H}}$ est $(\mathfrak{M}^{\cup}, X_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{M}}, \hat{P}_{\mathfrak{H}}^1(\mathfrak{M}))$ -engendrant, en désignant par $X_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{M}}$ la classe des

$$\hat{j} = ((C^{\bullet}, s, s'), j, (\tilde{C}^{\bullet}, \tilde{s}, \tilde{s}')) \in X_{\mathfrak{H}}$$

tels que $j' \in P_{\iota}^{\sim}$, où $j' \in s' \cdot \hat{H} \cdot \tilde{s}'$ et $P(j') = (C^{\bullet} * C^{\bullet}, j \times j_{\iota}, \tilde{C}^{\bullet} * \tilde{C}^{\bullet})$.

DEMONSTRATION. Soit $(C^{\bullet}, s, s') \in \mathfrak{N}(P)_o$ et $M \subset C$, $M \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$. On a :

$$k \in s \cdot \hat{H} \cdot s', \quad \text{où} \quad P(k) = (C, \kappa, C^{\bullet} * C^{\bullet}),$$

κ étant la loi de composition de $C^{\bullet}$. Puisque P est $\mathfrak{r}$ -engendrant pour $\mathfrak{M}$ et que

$$\kappa_1 = (M, \kappa_{\iota}, M^{\bullet} * M^{\bullet}) \in \tilde{\mathfrak{M}},$$

il existe, comme il est dit dans le lemme 2, des P -sous-structures s'_1 et s_1 de s' et s respectivement engendrées par $M^{\bullet} * M^{\bullet}$ et par M , et appartenant à la saturante $\tilde{H}$ de H dans $\hat{H}^{\bullet}$. Le corollaire 2 du lemme 1 assure l'existence d'un $k_1 \in s_1 \cdot \hat{H} \cdot s'_1$ tel que $P(k_1) \in \tilde{\mathfrak{M}}$ soit une restriction de $P(k)$. Pour tout entier $i < n$, supposons défini un $(\tilde{\mathfrak{M}}^{\iota}, P)$ -sous-morphisme $k_i \in s_i \cdot \hat{H} \cdot s'_i$ de k , tel que $P(k_i) \in \tilde{\mathfrak{M}}$ et que $k_{i'}$ soit un P -sous-morphisme de k_i pour tout $i' \leq i$. Définissons par récurrence k_n comme suit : Soient p_1 et p_2 les projections canoniques de $C \times C$ sur C et posons

$$M_n = P(s_{n-1}) \cup p_1(P(s'_{n-1})) \cup p_2(P(s'_{n-1})).$$

On a $M_n \in \tilde{\mathfrak{M}}_o$ et l'application $\kappa_n = (M_n, \kappa_{\iota}, M_n^{\bullet} * M_n^{\bullet}) \in \tilde{\mathfrak{M}}$ admet $P(k_{n-1})$ pour restriction. Il existe des P -sous-structures s'_n et s_n de s' et s engendrées par $M_n^{\bullet} * M_n^{\bullet}$ et par M_n respectivement, et par suite un P -sous-morphisme $k_n \in s_n \cdot \hat{H} \cdot s'_n$ de k tel que $P(k_n)$ soit une restriction de $P(k)$ et admette κ_n , et a fortiori $P(k_{n-1})$, pour restrictions. - Comme P est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$, il existe $\hat{s}'_{\mathfrak{P}} s'$ et $\hat{s}_{\mathfrak{P}} s$ telles que

$$P(\hat{s}') = \bigcup_{i \in N} P(s'_i) = \hat{M}' \quad \text{et} \quad P(\hat{s}) = \bigcup_{i \in N} P(s_i) = \hat{M}.$$

Les relations $\kappa(P(s'_i)) \subset P(s_i)$ pour tout $i \in N$ entraînant $\kappa(\hat{M}') \subset \hat{M}$, il existe

$$\hat{k} \in \hat{s} \cdot \hat{H} \cdot \hat{s}', \quad \text{avec} \quad P(\hat{k}) = (\hat{M}, \kappa, \hat{M}') \in \tilde{\mathcal{M}}.$$

Montrons que l'on a $\hat{M}' = \hat{M} \cdot \hat{M}'$. En effet, soit $(y, x) \in \hat{M}'$; on a $(y, x) \in P(s'_i)$ pour un certain entier i ; il en résulte

$$y \in M_{i+1} \subset \hat{M}, \quad x \in M_{i+1} \subset \hat{M} \quad \text{et} \quad y \cdot x \in M_{i+1} \subset \hat{M},$$

d'où $(y, x) \in \hat{M} \cdot \hat{M}'$. Inversement, si $(y', x') \in \hat{M} \cdot \hat{M}'$, il existe un entier n tel que

$$y' \in M_n, \quad x' \in M_n \quad \text{et} \quad y' \cdot x' \in M_n,$$

c'est-à-dire $(y', x') \in M_n \cdot M_n \subset P(s'_n) \subset \hat{M}'$. Ceci prouve que $\hat{M} \cdot \hat{M}' = \hat{M}'$, de sorte que $P(\hat{k})$ est la loi de composition de la sous-classe multiplicative $\hat{M}'$ de C' . On obtient donc

$$\hat{e} = (\hat{M}', \hat{s}, \hat{s}') \in \mathcal{N}(P)_0, \quad \hat{s} \overline{\hat{P}} s, \quad M \subset \hat{M} \in \tilde{\mathcal{M}},$$

et $\hat{e}$ est une $\hat{P}\mathcal{H}$ -sous-structure de e .

- Supposons que $\tilde{e} = (\tilde{C}', \tilde{s}, \tilde{s}')$ soit une $\hat{P}\mathcal{H}$ -sous-structure de (C', s, s') vérifiant

$$M \subset \tilde{C}, \quad \tilde{s} \overline{\tilde{P}} s \quad \text{et} \quad \tilde{s}' \overline{\tilde{P}} s'.$$

Soit $\tilde{k}$ l'élément de $\tilde{s} \cdot \hat{H} \cdot \tilde{s}'$ appliqué par P sur $(\tilde{C}, \kappa, \tilde{C}' \cdot \tilde{C}')$. Comme s_1 et s'_1 sont les P -sous-structures de s et s' engendrées respectivement par $M \subset \tilde{C}$ et par $M \cdot M \subset \tilde{C}' \cdot \tilde{C}'$, on trouve

$$s_1 \overline{\tilde{P}} \tilde{s} \quad \text{et} \quad s'_1 \overline{\tilde{P}} \tilde{s}'.$$

Supposons prouvé, pour tout $i < n$:

$$s_i \overline{\tilde{P}} \tilde{s} \quad \text{et} \quad s'_i \overline{\tilde{P}} \tilde{s}'.$$

Alors on trouve

$$M_n \subset P(\tilde{s}) \cup p_1(P(\tilde{s}')) \cup p_2(P(\tilde{s}')) = \tilde{C}$$

et $M_n \cdot M_n \subset \tilde{C}' \cdot \tilde{C}'$, de sorte que

$$s_n \overline{\tilde{P}} \tilde{s} \quad \text{et} \quad s'_n \overline{\tilde{P}} \tilde{s}'.$$

Par récurrence, on en déduit

$$P(\hat{s}) = \bigcup_{i \in N} P(s_i) \subset \tilde{C} \quad \text{et} \quad P(\hat{s}') = \bigcup_{i \in N} P(s'_i) \subset \tilde{C} * \tilde{C}.$$

Par suite $\hat{s} \xrightarrow{P} \tilde{s}$ et $\hat{s}' \xrightarrow{P} \tilde{s}'$. Ceci prouve que $(\tilde{C}, \hat{s}, \hat{s}')$ est la $(X_{\mathcal{H}}'', \mathcal{N}(P))$ -sous-structure de (C, s, s') engendrée par M . Le foncteur d'homomorphismes $\hat{P}_{\mathcal{H}}$ étant saturé, $\hat{P}_{\mathcal{H}}$ est $(\mathcal{M}^{\cup}, X_{\mathcal{H}}'', \hat{P}_{\mathcal{H}}^1(\mathcal{M}))$ -engendrant, en vertu de la proposition 2-2 [1], ce qu'il fallait démontrer. ■

REMARQUE. Les propositions 4 et 3 admettent la proposition 4-3 [1] pour cas particulier. Il en résulte le résultat suivant (dans l'énoncé duquel nous reprenons les notations du n° 3 [1]), qui généralise le théorème 1-3 [1].

COROLLAIRE. Supposons que $\hat{\mathcal{M}}_0$ soit un univers, que P soit (resp. soit dénombrablement) $\mathcal{P}$ -engendrant pour $\mathcal{M}$ et à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits et que $H \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Soit $\mathcal{U}(p)$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}(p)$ telle que $\mathcal{N}'(p) \subset \mathcal{U}(p)$, $\mathcal{N} \neq \mathcal{U}$ et $\mathcal{K} \neq \mathcal{U}$ (resp. de $\mathcal{U}(p)$). Si $e \in \mathcal{U}(p)_0$ et si r est une relation sur $\hat{p}_{\mathcal{U}}(e)$, il existe une $(\mathcal{U}(p), \hat{p}_{\mathcal{U}})$ -structure quasi-quotient de e par r . 1

En effet, la démonstration est analogue à celle du théorème 1-3 [1], le foncteur P étant $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$ -résolvant d'après la proposition 3 (resp. d'après le théorème 1-5 [1] si $\mathcal{U} = \mathcal{K}$ ou si $\mathcal{F}(p) \supset \mathcal{U}(p)$), et le foncteur $\hat{P}_{\mathcal{H}}$ est $(\mathcal{M}^{\cup}, X_{\mathcal{H}}'', \mathcal{N}(p))$ -engendrant en vertu de la proposition 4. ■

LEMME 3. Soit $q = (\mathcal{M}, q, K^*)$ un foncteur fidèle admettant une section maximale z (n° 4 [1]); alors $z(\mathcal{M}^i) \subset q^{\sim}$.

DEMONSTRATION. Soit $f \in \mathcal{M}^i$ et $j = z(f)$. Supposons

$$k \in \beta(j).K, \quad s = \alpha(k) \quad \text{et} \quad q(k) = f.g.$$

On a $z(q(k)) = j.z(g)$. Par définition d'une section maximale il existe $h \in z(s).K$, s tel que $q(h) = q(s)$. Comme q est fidèle, on trouve $k = z(q(k)).h$. Les relations

$$j.(z(g).h) = z(q(k)).h = k \quad \text{et} \quad q(z(g).h) = g$$

entraînent que j est un q -monomorphisme. ■

PROPOSITION 5. Supposons que p admette une section maximale z . Soit $\hat{p}'_{\mathcal{U}}$ le foncteur canonique de $\mathcal{U}(p)$ vers $\mathcal{U}$, où $\mathcal{U} = \mathcal{K}'$, $\mathcal{N}'$ ou $\mathcal{N}'$ et

$\mathcal{U} = \mathcal{N}'$ (resp. $\mathcal{U} = \mathcal{W} = \mathcal{F}, \mathcal{F}_g, \mathcal{G}$ ou $\mathcal{G}'$, resp. $\mathcal{U} = \mathcal{N}$ ou $\mathcal{N}$ et $\mathcal{W} = \mathcal{N}$).

1 Alors $\hat{p}'_{\mathcal{U}}$ admet une section maximale.

DEMONSTRATION. Soit $C^* \in \mathcal{N}_0$; posons

$$s = z(C), \quad j = z(C \times C, \iota, C^* * C^*) \quad \text{et} \quad k = z(C, \kappa, C^* * C^*)$$

où κ est la loi de composition de C^* . D'après la proposition 1-4 [1] $\beta(j) = s \times s$ et, en vertu du lemme 3, $j \in p^{\sim}$. Donc $(C^*, s) \in \mathcal{N}(p)_o$. Si de plus on suppose $C^* \in \mathcal{U}$, où $\mathcal{U} = \mathcal{N}'$ (resp. $= \mathcal{F}, \mathcal{F}_g, \mathcal{G}$ ou $\mathcal{G}'$), on obtient

$$z(C, \alpha, C) \in s.H.s \quad \text{et} \quad z(C, \beta, C) \in s.H.s,$$

de sorte que l'on a $(C^*, s) \in \mathcal{N}'(p)$ (resp. $\in \mathcal{U}(p)$). Ainsi on définit un foncteur section $z_{\mathcal{U}}$ de $\hat{p}'_{\mathcal{U}}$ en posant

$$z_{\mathcal{U}}(\hat{C}^*, \underline{g}, C^*) = (\hat{C}^*, z(\hat{C}, \underline{g}, C), C^*) \quad \text{si} \quad (\hat{C}^*, \underline{g}, C^*) \in \mathcal{U}.$$

- Soit $e = (C^*, \hat{s}, \hat{s}') \in \mathcal{U}(p)_o$. Par définition de z , il existe

$$b \in z(C).H.\hat{s} \quad \text{et} \quad b' \in z(C^* * C^*).H.\hat{s}'$$

tels que $p(b) = C$ et $p(b') = C^* * C^*$. Par suite, il existe aussi

$$\hat{b} \in (C^*, z(C)).\mathcal{U}(p).e \quad \text{tel que} \quad \hat{p}'_{\mathcal{U}}(\hat{b}) = C^*.$$

Ceci montre que $z_{\mathcal{U}}$ est une section maximale de $\hat{p}'_{\mathcal{U}}$. ■

REMARQUE. La proposition 5 généralise la proposition 2-4 [1].

2. Relation structurée engendrée par une relation.

Soit $\mathcal{M}'$ la catégorie des homomorphismes entre relations d'équivalence dont les éléments sont les triplets $\hat{b} = (r', b, r)$, où r et r' sont des relations d'équivalence sur M et M' respectivement et où $b = (M', b, M) \in \mathcal{M}$ est une application compatible avec (r', r) . Soit ρ le foncteur canonique de $\mathcal{M}'$ vers $\mathcal{M}$, qui associe b à $\hat{b}$. Dire que r est une relation d'équivalence compatible (resp. bicompatible) sur C^* , où $C^* \in \mathcal{N}_0$ (resp. $\in \mathcal{N}'_0$) signifie que l'on a

$$(C^*, r) \in \mathcal{N}(\rho)_o \quad (\text{resp.} \in \mathcal{N}'(\rho)_o).$$

LEMME 4. Soient $C^* \in \mathcal{N}'_0$ et $r = (C, A, C)$ une relation compatible avec

les applications source α et but β de C^* . La relation d'équivalence $\hat{r}$ compatible sur C^* engendrée par r est bicompatible sur C^* .

DEMONSTRATION. La relation d'équivalence engendrée par r est évidemment compatible avec α et β , de sorte que nous pouvons supposer directement que r est une relation d'équivalence. Soit r_0 la relation d'équivalence induite par r sur C_0^* et soit $\tilde{r}_0$ la surjection canonique de C_0^* sur C_0^*/r_0 . En désignant par S^+ le groupoïde des couples associé à C_0^*/r_0 , on trouve

$$F = (S^+, [\tilde{r}_0 \beta, \tilde{r}_0 \alpha], C^*) \in \mathcal{N};$$

puisque r est compatible avec α et β , le néofoncteur F est aussi compatible avec r . Soit J le $p\mathcal{H}$ -épimorphisme canonique de C^* sur la classe multiplicative $C^*/\hat{r}$ quotient de C^* par $\hat{r}$; on sait que J est une $p\mathcal{H}$ -quasi-surjection définissant $C^*/\hat{r}$ comme $p\mathcal{H}$ -structure quasi-quotient de C^* par r ; il s'ensuit qu'il existe un et un seul $F' \in \mathcal{N}$ tel que $F'.J = F$. Supposons

$$f \in C, \quad f' \in C \quad \text{et} \quad f' \sim f \text{ mod } \hat{r}.$$

On a $J(f) = J(f')$, d'où $F(f) = F(f')$ et

$$F(\alpha(f)) = \alpha(F(f)) = \alpha(F(f')) = F(\alpha(f')).$$

Par définition de F , l'égalité $F(\alpha(f)) = F(\alpha(f'))$ entraîne $\alpha(f) \sim \alpha(f') \text{ mod } r$ et, a fortiori, $\alpha(f) \sim \alpha(f') \text{ mod } \hat{r}$. On montre de même que l'on a $\beta(f) \sim \beta(f') \text{ mod } \hat{r}$. Donc $\hat{r}$ est bicompatible sur C^* . ■

Nous désignerons par N l'ensemble des entiers positifs.

PROPOSITION 6. Soit $C^* \in \mathcal{N}_0$ et $r = (C, A, C)$ une relation. La relation d'équivalence (resp. d'équivalence compatible sur C^*) engendrée par r peut être construite par récurrence.

DEMONSTRATION. Soit $S^+ = (S, \kappa^+)$ le groupoïde des couples associé à C . La relation symétrique engendrée par r est (C, B, C) , où $B = A \cup A^{-1}$, en désignant par A^{-1} la classe des inverses des éléments de A dans S^+ . La relation d'équivalence engendrée par r est la relation

$(C, e(A), C)$, où $e(A)^+$ désigne le sous-groupoïde de S^+ engendré par B_1 . Définissons B_n par récurrence pour tout entier n en posant :

$$B_1 = B \cup S_o^+ \quad \text{et} \quad B_n = \kappa^+(S^+ * S^+ \cap (B_{n-1})^2).$$

On obtient par récurrence

$$B_{n-1}^{-1} = B_{n-1} \subset B_n, \quad \text{d'où} \quad e(A) = \bigcup_{1 \leq n \in \mathbb{N}} B_n.$$

-Soit $P \cdot = (P, \kappa_2)$ la classe multiplicative produit $C \cdot \times C \cdot$. Si $M \subset C \times C$, posons

$$M^{*2} = (P \cdot * P \cdot) \cap (M \times M).$$

Construisons par récurrence pour tout entier n la partie A_n de $C \times C$ à l'aide des égalités :

$$A_1 = e(A) \quad \text{et} \quad A_{n+1} = e(\kappa_2(A_n^{*2}) \cup A_n).$$

Soit $\hat{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Montrons que la relation $\hat{r}$ compatible sur $C \cdot$ engendrée par r est $\hat{r}' = (C, \hat{A}, C)$. En effet, on a $\hat{r}' \subset \hat{r}$ et $\hat{r}'$ est une relation d'équivalence, car c'est la réunion d'une famille de relations d'équivalence croissantes. Il suffit donc de prouver que $\hat{r}'$ est compatible sur $C \cdot$. Or, si l'on a

$$(x', x) \in \hat{A}, \quad (y', y) \in \hat{A}, \quad (y', x') \in C \cdot * C \cdot \quad \text{et} \quad (y, x) \in C \cdot * C \cdot,$$

il existe un entier i tel que

$$\xi = ((y', y), (x', x)) \in A_i^{*2},$$

et par suite

$$\kappa_2(\xi) = (y' \cdot x', y \cdot x) \in A_{i+1} \subset \hat{A}.$$

Ainsi $\hat{r} = \hat{r}'$. ■

COROLLAIRE. Si $C \cdot$ est un graphe multiplicatif et $r' = (C, A', C)$ une relation, la relation d'équivalence bicompatible $\hat{r}$ sur $C \cdot$ engendrée par r' peut être construite par récurrence.

En effet, la relation compatible avec α et β engendrée par r' est la relation $r = (C, A, C)$, où

$$A = A' \cup \alpha^2(A') \cup \beta^2(A').$$

Du lemme 4, on déduit que $\hat{r}$ est la relation compatible sur C^* engendrée par r , relation qui a été construite par récurrence dans la démonstration précédente. ■

Soit $p = (\mathbb{M}, p, H^*)$ un foncteur d'homomorphismes saturé à produits fibrés finis. Soit X une partie de p_l contenant H_0^* .

DEFINITION. On appelle *relation (p, X) -structurée* un couple (s, r) tel que $s \in H_0^*$, que r soit une relation d'équivalence $(p(s), A, p(s))$ et qu'il existe $j \in s \times s, X$ vérifiant $p(\alpha(j)) = A$.

Soit $\mathbb{M}^r(p)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie produit fibré $p \vee \rho$ ayant pour unités les relations (p, X) -structurées. On définit un ordre sur $\mathbb{M}^r(p)_0$ en posant

$$(s', r') < (s, r) \text{ si, et seulement si, } s' = s \text{ et } r' \subset r.$$

Soit $s \in H_0^*$, $p(s) = C$ et (C, A, C) une relation r . S'il existe un plus petit élément $(s, \hat{r})$ dans la sous-classe ordonnée de $(\mathbb{M}^r(p)_0, <)$ formée des éléments (s, r') tels que $r \subset r'$, on appelle $\hat{r}$ la *relation (p, X) -structurée engendrée par r sur s* .

Soit $\rho(p)$ le foncteur de $\mathbb{M}^r(p)$ vers $\mathbb{M}$ associant à $(b, (r'', p(b), r'))$ l'application

$$(A'', \underline{b} \times \underline{b}_l, A'), \text{ où } r' = (C', A', C') \text{ et } r'' = (C'', A'', C'').$$

Soit Y la classe des $\hat{b} \in \mathbb{M}^r(p)$ tels que

$$\hat{b} = (s, (r'', C, r')), \quad s \in H_0^* \text{ et } p(s) = C.$$

Dire que $\hat{r}$ est la relation (p, X) -structurée engendrée par $r = (C, A, C)$ sur $s \in H_0^*$ signifie que $(s, \hat{r})$ est une $(Y, \mathbb{M}^r(p))$ -sous-structure de $(s, (C, C \times C, C))$ engendrée par A (relativement au foncteur $\rho(p)$).

LEMME 5. Si $\mathbb{M}_0$ est un univers et si $p' = (\mathbb{M}, p_l, X^*)$ est un foncteur à $\mathbb{M}_0$ -produits fibrés, $\rho(p)$ est $(\mathbb{M}, Y, \mathbb{M}^r(p))$ -engendrant.

DEMONSTRATION. Soient $s \in H_0^*$, $C = p(s)$ et $A \subset C \times C$. Désignons par J la classe des $j \in s \times s, X$ tels que $A \subset p(\alpha(j))$ et $(s, r') \in \mathbb{M}^r(p)_0$, où $r' = (C, p(\alpha(j)), C)$. D'après la proposition 11-I, on a $J \in \mathbb{M}_0$, de

sorte qu'il existe un produit fibré $\hat{s}'$ de $(j)_{j \in J}$ dans X^* . Il s'ensuit que $(s, \hat{r})$, où $\hat{r} = (C, p(\hat{s}'), C)$, est la relation (p, X) -structurée engendrée par (C, A, C) sur s , ce qui achève la démonstration, d'après la remarque précédant le lemme. ■

EXEMPLE. Soit X la sous-classe de $\mathcal{N}'$ formée des néofoncteurs $(C^*, \iota, \hat{C}^*)$ tels que $\hat{C}^*$ soit un sous-graphe multiplicatif stable de C^* . Soit $C^* \in \mathcal{N}'_0$ et r une relation sur C . Pour que (C^*, r) soit une relation $(p\eta_1, X)$ -structurée, il faut et il suffit que r soit une relation d'équivalence bicompatible sur C^* . Toute relation r sur C engendre une relation $(p\eta_1, X)$ -structurée sur C^* , à savoir la relation bicompatible sur C^* engendrée par r .

PROPOSITION 7. Supposons que $p' = (\mathbb{M}, p_1, X^*)$ soit un foncteur dénombrablement engendrant pour $\mathbb{M}$. Si $s \in H_0^*$, si $C = p(s)$ et si $r = (C, A, C)$ est une relation, on peut construire par récurrence la relation (p, X) -structurée engendrée par r sur s .

DEMONSTRATION. Nous désignons par $S^\perp = (S, \kappa)$ le groupoïde des couples associé à C . On sait [14] que $(S^\perp, s \times s)$ est un groupoïde p -structuré, de sorte qu'il existe $k \in s \times s.H$ vérifiant les conditions

$$p(k) = (S, \kappa, S^\perp * S^\perp) \quad \text{et} \quad \alpha(k) = \sigma_{p, s \times s} \times (s \times s).$$

De plus il existe $v_i \in s \times s.H.\sigma$, où $i = 1$ et 2 , tels que

$$p(v_i) = (S, p_i \iota, S^\perp * S^\perp),$$

en notant p_i les projections canoniques de $S \times S$ sur S . Puisque p' est r -engendrant pour $\mathbb{M}$, il existe une (X, H) -sous-structure s'_1 de $s \times s$ engendrée par

$$A \cup A^{-1} \cup S_0^\perp \subset p(s \times s).$$

D'après le corollaire 1 du lemme 1 il existe aussi une p -sous-structure σ_1 de σ telle que $\sigma_1 = \overset{-1}{v}_1(s'_1) \cap \overset{-1}{v}_2(s'_1)$. Supposons définies, pour tout entier $i < n$, des p -sous-structures s'_i et σ_i de $s \times s$ et σ respectivement, de sorte que

$$p(s'_{i-1}) \subset p(s'_i) \quad \text{et} \quad \sigma_i = v_1^{-1}(s'_i) \cap v_2^{-1}(s'_i).$$

Soit s'_n la (X, H) -sous-structure de $s \times s$ engendrée par

$$A_n \cup A_n^{-1}, \quad \text{où} \quad A_n = \kappa(p(\sigma_{n-1})),$$

et soit $\sigma_n = v_1^{-1}(s'_n) \cap v_2^{-1}(s'_n)$. Si $(y, x) \in p(s'_{n-1})$, on a

$$(x, x) \in p(s'_1) \subset p(s'_{n-1}),$$

d'où

$$\xi = ((y, x), (x, x)) \in p(\sigma_{n-1}) \quad \text{et} \quad (y, x) = \kappa(\xi) \in A_n \subset p(s'_n).$$

Ainsi nous avons construit par récurrence une suite croissante $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de p -sous-structures de $s \times s$. Comme p' est dénombrablement engendrant pour $\mathbb{M}$, il existe $\hat{s}' \in H_o$ et $\hat{j} \in s \times s, X, \hat{s}'$ tels que

$$\hat{A} = p(\hat{s}') = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p(s'_n).$$

Montrons que $\hat{r} = (C, \hat{A}, C)$ est une relation d'équivalence. En effet, on a

$$S_o^+ \subset \hat{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \hat{A}^{-1}, \quad \text{car} \quad S_o^+ \subset A_n \cup A_n^{-1} \subset p(s'_n) \subset A_{n+1}.$$

Si $(y', y) \in \hat{A}$ et $(y, x) \in \hat{A}$, il existe un entier n tel que

$$(y', y) \in A_n \quad \text{et} \quad (y, x) \in A_n;$$

on en déduit

$$\eta = ((y', y), (y, x)) \in p(\sigma_n) \quad \text{et} \quad (y', x) = \kappa(\eta) \in A_{n+1} \subset \hat{A}.$$

Donc $(s, \hat{r})$ est une relation (p, X) -structurée. - Soit (s, r'') une relation (p, X) -structurée, où $r \subset r'' = (C, A'', C)$; alors $A'' = p(s'')$ et $s'' \xrightarrow{p} s \times s$; de plus A'' définit un sous-groupe d'ordre de S^+ contenant A . On a $p(s'_1) \subset A''$. Si l'on a prouvé que $p(s'_{n-1}) \subset A''$, on obtient

$$p(\sigma_{n-1}) \subset A''^+ * A''^+, \quad A_n = \kappa(p(\sigma_{n-1})) \subset A'' \quad \text{et} \quad A_n^{-1} \subset A''.$$

Il s'ensuit $s'_n \xrightarrow{p} s''$ et, par récurrence, $\hat{s}' \xrightarrow{p} s''$. Ceci prouve que $\hat{r}$ est la relation (p, X) -structurée engendrée par r sur s . ■

1

COROLLAIRE. Supposons que p soit dénombrablement engendrant pour $\mathbb{M}$. Si $(C^*, s) \in \mathcal{U}(p)_o$, toute relation r sur C engendre une relation

$(p_{\mathcal{U}}, Y_{\mathcal{U}})$ -structurée sur (C^*, s) que l'on peut construire par récurrence, $Y_{\mathcal{U}}$ étant la classe des $\hat{p}_{\mathcal{U}}$ -monomorphismes $\hat{j}$ tels que $\hat{p}_{\mathcal{U}}(\hat{j}) \in p_i^{\sim}$ (notations § 1) si $\mathcal{U} \neq \mathcal{N}$ et $Y_{\mathcal{N}} = X_{\mathcal{N}}^{\sim}$.

En effet, si $\mathcal{U} = \mathcal{K}', \mathcal{N}', \overline{\mathcal{N}}'$ ou $\overline{\mathcal{N}}$ (resp. $= \mathcal{N}$, resp. si $\mathcal{U}(p) \subset \mathcal{F}(p)$), la démonstration de la proposition 3 (resp. proposition 4, resp. du théorème 1-5 [1]) montrent que $(\mathcal{N}, \hat{p}_{\mathcal{U}}, Y_{\mathcal{U}})$ est dénombrablement engendrant; le corollaire résulte de la proposition 7. ■

EXEMPLE. Soit $C^* \in \mathcal{N}_0'$ et $r = (C, A, C)$ une relation. D'après l'exemple donné plus haut, la proposition 7 permet de construire par récurrence la relation bicompatible $\hat{r}$ sur C^* engendrée par r . Remarquons que la construction est différente de celle indiquée dans la proposition 6. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 7, pour $p = p_{\mathcal{N}}$ et $s = C^*$. Si r est compatible avec α et β , alors $p(s'_1)$ est formée de tous les couples

$$(g_n \dots g_1, f_n \dots f_1) \text{ tels que } (g_j, f_j) \in A \cup A^{-1} \cup S_0^+$$

pour tout $j \leq n$ et $n \in \mathbb{N}$. Les propositions 37 et 52, chapitre III, C.S., signifient que, sous les hypothèses de ces propositions, $\hat{r}$ est la relation d'équivalence engendrée par $(C, p(s'_1), C)$.

Soit $[C]$ un graphe et L^* la catégorie libre des chemins propres de $[C]$; nous identifions C à une partie de L . Soit $r = (L, A, L)$ une relation ayant les propriétés suivantes :

1°) $A \subset (C^2 \times C) \cup \Delta_C$ où Δ_C est la diagonale de C ;

2°) Si $(y, x) \in A$, on a $\beta(y) = \beta(x)$ et $\alpha(y) = \alpha(x)$;

3°) Si $(y, x) \in A$ et $(y, x') \in A$, alors $x = x'$;

4°) Les conditions $(x'', x', x) \in C^3$, $((x'', x'), x_2) \in A$ et $((x', x), x_1) \in A$ assurent l'existence d'un $\hat{x} \in C$ tel que $(x'' \cdot x_1, \hat{x}) \in A$ et $(x_2 \cdot x, \hat{x}) \in A$.

PROPOSITION 8. Supposons les hypothèses précédentes vérifiées, et soit $\hat{r}$ la relation d'équivalence bicompatible sur L^* engendrée par r . Pour tout $m \in L$, la classe $m \bmod \hat{r}$ contient un chemin $\gamma(m)$ de longueur minimale (dit irréductible). Il existe une bijection de $L/\hat{r}$ sur $\gamma(L)$ et C s'identifie à une partie de $L/\hat{r}$.

DEMONSTRATION. Les symboles i, j et n représenteront des entiers positifs. Si $m \in L$, nous notons $l(m)$ la longueur de m , i.e. l'entier n tel que $m \in C^n$. Soit A' la classe formée des couples $(m^1, m^2) \in L \times L$ de la forme

$$m^i = g' \cdot y^i \cdot g, \quad i = 1 \text{ et } 2, \quad g \in L, \quad g' \in L, \quad y^1 \neq y^2 \text{ et } (y^1, y^2) \in A.$$

D'après la condition 1, on a

$$\begin{aligned} l(m^1) &= l(m^2) + 1 & \text{si } y^2 \notin L_0, \\ l(m^1) &= l(m^2) + 2 & \text{si } y^2 \in L_0. \end{aligned}$$

Soit $B = A' \cup A'^{-1} \cup \Delta_L$. Il résulte de la proposition 37, chap. III, C.S., que $\hat{r}$ est la relation d'équivalence engendrée par (L, B, L) ; autrement dit, on a $m \sim m' \text{ mod } \hat{r}$ si, et seulement si, il existe $(m_i)_{i \leq n}$ tels que

$$m_1 = m, \quad m_n = m' \quad \text{et} \quad (m_i, m_{i+1}) \in B \text{ pour tout } i < n.$$

-Supposons $m = (x_n, \dots, x_1) \in L$ et $l(m) = n$. Construisons par récurrence un chemin $\gamma(m)$ de la façon suivante :

1°) Soit $\gamma_0(m) = m$. S'il n'existe aucun couple $(m, m') \in A'$, posons $\gamma_1(m) = m$; en particulier $\gamma_1(m) = m$ lorsque $m \in C$.

2°) Sinon, soit i le plus petit entier tel que $((x_{i+1}, x_i), x^i) \in A$; posons

$$\gamma_1(m) = (x_n, \dots, x_{i+2}), x^i, (x_{i-1}, \dots, x_1) \in L.$$

Par hypothèse sur A , le chemin $\gamma_1(m)$ est bien défini et l'on a

$$(m, \gamma_1(m)) \in A', \quad l(\gamma_1(m)) < l(m).$$

3°) Supposons défini $\gamma_j(m)$ pour tout $j < i \leq n$ et posons

$$\gamma_i(m) = \gamma_1(\gamma_{i-1}(m)).$$

On a $l(\gamma_i(m)) \leq l(\gamma_{i-1}(m))$, l'égalité ayant lieu seulement si $\gamma_i(m) = \gamma_{i-1}(m)$.

4°) Puisque $(\gamma_i(m))_{i \leq n}$ est une suite de chemins de longueur décroissante, il existe un plus petit $\bar{j} < n$ tel que $\gamma_1(\gamma_{\bar{j}}(m)) = \gamma_{\bar{j}}(m)$. Nous noterons $\gamma(m)$ le chemin $\gamma_{\bar{j}}(m)$. Ainsi on obtient un chemin $\gamma(m)$ tel que

$$l(\gamma(m)) \leq l(m) - \bar{j} \quad \text{et} \quad \gamma(\gamma(m)) = \gamma(m),$$

de sorte que $\gamma : m \rightarrow \gamma(m)$ est une rétraction de L sur $\gamma(L)$. Des relations

$$(\gamma_i(m), \gamma_{i+1}(m)) \in A' \quad \text{pour tout } i < \bar{j},$$

on déduit $m \sim \gamma(m) \bmod \hat{r}$. Si de plus $m' \in L$ et $\gamma(m') = \gamma(m)$, on a $m' \sim m \bmod \hat{r}$, car $\hat{r}$ est une relation d'équivalence et

$$m' \sim \gamma(m') = \gamma(m) \sim m \bmod \hat{r}.$$

-Supposons $(m^1, m^2) \in A'$, où $m^i = g' \cdot y^i \cdot g$ et $i = 1$ et 2 . Montrons que l'on a $\gamma(m^1) = \gamma(m^2)$. Il suffit de prouver l'existence d'entiers i' et i'' tels que $\gamma_{i'}(m^1) = \gamma_{i''}(m^2)$, cette égalité entraînant $\gamma(m^1) = \gamma(m^2)$ par construction de γ . En effet, par définition, on a

$$(y^1, y^2) \in A \quad \text{et} \quad y^1 = (x'', x') \in C^2 \cap L.$$

Il existe un plus petit $j \geq 0$ tel que $\gamma_j(m^i) = g' \cdot y^i \cdot \gamma(g)$. Si $\gamma(g) \in L_0^*$, on obtient

$$\gamma_{j+1}(m^1) = g' \cdot y^2 = \gamma_j(m^2).$$

Supposons $\gamma(g) \notin L_0^*$; il existe $x \in C - L_0^*$ tel que $\gamma(g) = x \cdot g_1$, où $g_1 \in \gamma(L)$. Alors

$$\gamma_j(m^1) = g' \cdot x'' \cdot x' \cdot x \cdot g_1 \quad \text{et} \quad \gamma_j(m^2) = g' \cdot y^2 \cdot x \cdot g_1.$$

Deux cas se présentent :

1°) Si $((x', x), y) \notin A$ pour tout $y \in C$, on a

$$\gamma_{j+1}(m^1) = g' \cdot y^2 \cdot x \cdot g_1 = \gamma_j(m^2).$$

2°) S'il existe $((x', x), x_1) \in A$, on a

$$\gamma_{j+1}(m^1) = g' \cdot x'' \cdot x_1 \cdot g_1 = m_1^1,$$

et la propriété 4 assure l'existence de $(x'' \cdot x_1, \hat{x}) \in A$ et $(y^2, x, \hat{x}) \in A$. Il s'ensuit $\gamma_\varepsilon(m^2) = g' \cdot \hat{x} \cdot g_1 = m_1^2$, où $\varepsilon = j$ si $y^2 \in L_0^*$ et $\varepsilon = j+1$ si $y^2 \notin L_0^*$. Si $x_1 \in L_0^*$, on a $\hat{x} = x''$ et $m_1^1 = m_1^2$. Supposons $x_1 \notin L_0^*$. Alors $(m_1^1, m_1^2) \in A'$.

a) Si $\gamma(x_1 \cdot g_1) = x_1 \cdot g_1$, on obtient $\gamma_{j+2}(m^1) = \gamma_\varepsilon(m^2)$;

b) Si $l(\gamma(g)) = 1$, on a $g_1 \in L_0$ et, d'après a, $\gamma(m^1) = \gamma(m^2)$.

Supposons cette égalité déjà prouvée dès que $l(\gamma(g)) < \hat{n}$ et soit $l(\gamma(g)) = \hat{n}$. Comme $(m_1^1, m_1^2) \in A'$ et que

$$l(\gamma(g_1)) < l(\gamma(g)) = \hat{n},$$

on en déduit $\gamma(m_1^1) = \gamma(m_1^2)$, d'où $\gamma(m^1) = \gamma(m^2) = \gamma(m^2)$. Par récurrence, le résultat est ainsi prouvé.

En conclusion, $\gamma(m^1) = \gamma(m^2)$ lorsque $(m^1, m^2) \in A'$, et par suite lorsque $(m^1, m^2) \in B$.

-Supposons $m \sim m' \bmod \hat{r}$; il existe $(m_i)_{i \leq n}$ tels que $m = m_1$, $m' = m_n$ et $(m_i, m_{i+1}) \in B$. Il en résulte $\gamma(m_i) = \gamma(m_{i+1})$ pour tout $i < n$, d'où

$$\gamma(m) = \gamma(m_1) = \dots = \gamma(m_i) = \dots = \gamma(m_n) = \gamma(m'),$$

i.e. γ est compatible avec $\hat{r}$. De plus $l(\gamma(m)) \leq l(m')$, l'égalité ayant lieu seulement si $l(\gamma(m')) = l(m')$, c'est-à-dire si $m' = \gamma(m') = \gamma(m)$. Donc $\gamma(m)$ est l'unique élément de $m \bmod \hat{r}$ tel que $l(\gamma(m)) \leq l(m')$ pour tout $m' \in m \bmod \hat{r}$. Nous appelons $\gamma(m)$ le chemin irréductible (relativement à r) associé à $m \bmod \hat{r}$. On construit une bijection $\hat{\gamma}$ de $L/\hat{r}$ sur $\gamma(L)$ en associant $\gamma(m)$ à $m \bmod \hat{r}$. Cette bijection définit un isomorphisme de $L^*/\hat{r}$ sur la catégorie $\gamma(L)^+$ telle que

$$(m_2, m_1) \rightarrow \gamma(m_2 \cdot m_1) \text{ si, et seulement si, } \alpha(m_2) = \beta(m_1).$$

-Soit $m \in \gamma(L)$ et $m' \in \gamma(L)$. Comme $m = \gamma(m)$ et $m' = \gamma(m')$, on a $m \sim m' \bmod \hat{r}$ si, et seulement si, $m = m'$. Etant donné que $C \subset \gamma(L)$, l'application $f \mapsto f \bmod \hat{r}$, où $f \in C$, est une bijection de C sur une partie $\hat{C}$ de $L/\hat{r}$. ■

COROLLAIRE. La conclusion de la proposition 8 est valable si $[C] = [G_\lambda]$ et si $\hat{r}$ est la relation bicompatible $\hat{r}_\lambda$ sur $L^* = L[G_\lambda]$ considérée dans la démonstration du théorème 8-II.

DEMONSTRATION. Reprenons les notations de la première partie de la démonstration du théorème 8-II.- Si $\lambda' = 1$ et $\lambda = 2$, on a

$$(H_2 \cup H'_2 \cup K_2) \cap H = \emptyset,$$

de sorte que la relation r_2 sur $L[G_2]$ vérifie évidemment les propriétés 1, 2, 3 et 4; ainsi la proposition 8 s'applique dans ce cas. En particulier $[G_2]$ s'identifie à un sous-graphe de $[\hat{M}_2]$ et H^* à une sous-catégorie de $\hat{M}_2^* = L[G_2]^* / \hat{r}_2$; l'égalité

$$b_1 \cdot k_1 = b_2 \cdot k_2, \text{ où } k_i \in H_2 \text{ et } b_i \in H \text{ (resp. } \in H_2^* \text{)}$$

entraîne $b_1 = b_2$ et $k_1 = k_2$. Soit λ un ordinal de la forme $\lambda = \lambda' + 1$. Supposons construite, pour tout $\xi < \lambda$, une catégorie $\hat{M}_\xi^*$ de façon que, si $\xi = \xi' + 1$:

- a) $\hat{M}_\xi^*$ soit la catégorie quotient de $L[G_\xi]^*$ par $\hat{r}_\xi$ et que $[G_\xi]$ s'identifie à un sous-graphe de $[\hat{M}_\xi^*]$;
- b) si $b_1 \cdot k_1 = b_2 \cdot k_2$, où $k_i \in H_\xi$ et $b_i \in \hat{M}_\xi^*$, alors $b_1 = b_2$ et $k_1 = k_2$;
- c) si $(i, \Phi^*) \cdot b \in \hat{M}_\xi^*$, pour tout $i \in \alpha(\Phi)$, où $b \in \Phi^* \cdot \hat{M}_\xi^*$, on ait $b \in H_\xi^*$.

Soient $[G_\lambda]$, r_λ et $\hat{M}_\lambda^*$ les éléments définis dans le théorème 7-II. Posons

$$L^* = L[G_\lambda]^* \text{ et } r = (L, A, L), \text{ où } A = D_\lambda \cup D_\lambda',$$

- en désignant par D_λ' la classe des couples $((b \cdot (i, \Phi^*), \Psi^*), b \cdot \tau(i))$ tels que $(\hat{M}_\lambda^*, \Psi, \alpha(\Psi)^*)$ soit la transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{e})$ et que $\alpha(b) = \Phi(i)$. Un simple calcul montre que
- 1 possèdes les propriétés 1, 2, 3 et 4. Comme $\hat{r}_\lambda$ est aussi la relation $\hat{r}$ bi-compatible sur L^* engendrée par r , les conclusions de la proposition 8
 - 2 s'appliquent à cette relation. Il s'ensuit que les conditions a, b et c sont encore satisfaites pour $\xi = \lambda$, de sorte que, par récurrence transfinie, le corollaire est vrai pour tout $\lambda \leq \hat{\lambda}$. ■

EXEMPLE. Soit $[G]$ un graphe, $[C]$ un symétrisé de $[G]$ (n° 4 [1]) et L^* la catégorie libre $L[C]^*$. Soit r la relation (L, A, L) , où A est la classe des couples

$$(f, f), ((f^{-1}, f), \alpha(f)) \text{ et } ((f, f^{-1}), \beta(f))$$

tels que $f \in G - [G]_0$. Cette relation vérifie les propriétés 1, 2, 3 et 4. De plus $L^* / \hat{r}$, où $\hat{r}$ est la relation bicompatible sur L^* engendrée par r ,

est le groupoïde libre $\Gamma[G]^*$ associé à $[G]$ (i.e. la q -structure libre engendrée par $[G]$, en notant q le foncteur fidèle de $\mathcal{F}_g$ vers la catégorie $\mathcal{G}$ des morphismes entre graphes qui associe $[S^*]$ au groupoïde S^*), d'après le théorème 9, chapitre III, C.S. (voir aussi [1], n° 4). Par suite la proposition 8 montre comment est construit un élément de $\Gamma[G]^*$. 1

3. Lemmes relatifs au théorème 12-II.

Les notations sont celles des § 1 et 3, II.

LEMME 6. Soit $(C^*, \nu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{G}}$ tel que Lim^{ν} soit injectif. Soit M^* une sous-catégorie de C^* vérifiant la condition :

(A) Si $\Phi = (C^*, \Phi, I^*) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{G}}$ et si $\text{Lim}^{\nu} \Phi \in M$, on a $\Phi(I) \subset M$ et (M^*, Φ, I^*) admet $(\hat{\Phi} M^*, \underline{\nu}(\Phi), I^*)$ pour limite projective naturalisée.

Alors M^* est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}^*$, en notant $(\hat{M}^*, \hat{\nu})$ la complétion $\mathcal{G}$ -projective de M dans (C^*, ν) .

DEMONSTRATION. Bien que la condition (A) soit plus faible que la condition $\text{Lim}^{\nu} \Phi \in M$ du théorème 5-II, la démonstration du théorème 5-II (dont nous reprenons les notations) peut être utilisée sans modification pour prouver l'égalité $N_{\lambda} = M_{\lambda}$; il en résulte aussi que $M^* = M_1^*$ est une sous-catégorie pleine de M_2^* . Soit $\lambda \leq \hat{\lambda}$ et supposons montré

$$(M_{\xi^*})_0^* \cdot M_{\xi} \cdot M_0^* \subset M_{\xi^*} \text{ pour tout } \xi^* < \xi < \lambda.$$

Soit $f \in (M_{\xi^*})_0^* \cdot M_{\lambda} \cdot M_0^*$, où $\xi^* < \lambda$.

1°) Si λ est de seconde espèce, il existe $\xi < \lambda$ tel que $\xi^* \leq \xi$ et $f \in M_{\xi}$; l'hypothèse de récurrence entraîne $f \in M_{\xi^*}$.

2°) Supposons $\lambda = \lambda' + I$. On sait que $f = m'' \cdot m \cdot m' \in N_{\lambda}$. Comme $\alpha(f) \in M$, on a (démonstration du théorème 5-II) $m' \in C_0^*$ et $f \in M_{\lambda'} \cdot A_{\lambda'}' \cdot M_0^*$. Montrons $M_{\lambda'} \cdot A_{\lambda'}' \cdot M_0^* \subset M_{\lambda'} \cdot M_0^*$. En effet, soit $m_1 \in A_{\lambda'} \cdot M_0^*$ et $\beta(m_1) \in M_{\lambda'}$; alors $m_1 = \text{Lim}^{\nu} \Psi$, où Ψ est définie par le triplet (Φ, τ, ϵ) . Puisque $\text{Lim} \Phi \in M_{\lambda'}$ et que Lim^{ν} est injectif, il existe $\xi < \lambda'$ tel que $\beta(\Phi) \subset M_{\xi}$, de sorte que

$$p_i^{\nu}(\Phi) \cdot m_1 = \tau(i) \in M_{\xi} \cdot M_{\lambda'} \cdot M_0^* \subset M_{\xi}$$

pour tout $i \in \alpha(\underline{\Psi})$. Mais, par construction de M_{ξ} , il s'ensuit

$$m_1 \in M_{\xi+1} \subset M_{\lambda}, \text{ d'où } M_{\lambda} \cdot A_{\lambda} \cdot M_0 \subset M_{\lambda}.$$

-D'après la démonstration du théorème 5-II, on a $A_{\lambda} \cdot M_{\lambda} \subset A_{\lambda} \cup M_{\lambda}$ et, par définition de N_{λ} , il existe $m_i \in A_{\lambda}$ tels que $m = m_n \dots m_1$. Il s'ensuit $m_2 \cdot m_1 \in M_{\lambda} \cdot M_0$, car

$$m_2 \cdot m_1 \in A_{\lambda} \cdot (A_{\lambda} \cdot M_0) \subset A_{\lambda} \cdot M_{\lambda} \cdot M_0 \subset (A_{\lambda} \cup M_{\lambda}) \cdot M_0,$$

et, par récurrence finie, $m \in M_{\lambda}$. Donc

$$f = m'' \cdot m \in M_{\lambda} \text{ et } f \in (M_{\xi'})_0 \cdot M_{\lambda} \cdot M_0 \subset M_{\xi'}.$$

3°) Par récurrence transfinie, on obtient $(M_{\xi'})_0 \cdot M_{\lambda} \cdot M_0 \subset M_{\xi'}$, pour tout $\xi' < \lambda \leq \hat{\lambda}$. - En particulier, $M_0 \cdot \hat{M} \cdot M_0 \subset M$; autrement dit, M est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}$. ■

LEMME 7. Soient $(C, \nu, \mu) \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}}$, $\Phi \in C \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{A}$ et $\Phi' \in C \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{A}$. Si Ψ est une transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{E})$, où $E = \lim_{\rightarrow}^{\mu} \Phi'$, il existe Ψ' tel que $\lim_{\rightarrow}^{\nu} \Psi = \lim_{\rightarrow}^{\mu} \Psi'$.

DEMONSTRATION. Posons $I = \alpha(\Phi)$ et $J = \alpha(\Phi')$. Si $j \in J_0$, le triplet $(\Phi, \tau_j, \widehat{\Phi'(j)})$, où $\tau_j(i) = \tau(i) \cdot s_j^{\mu}(\Phi')$ pour tout $i \in I_0$ définit une transformation naturelle Ψ_j ; soit $\tau'(j) = \lim_{\rightarrow}^{\nu} \Psi_j$. Si $k \in j' \cdot J \cdot j$, on obtient

$$\begin{aligned} p_i^{\nu}(\Phi) \cdot \tau'(j') \cdot \Phi'(k) &= \tau(i) \cdot s_j^{\mu}(\Phi') \cdot \Phi'(k) = \tau(i) \cdot s_j^{\mu}(\Phi') = \\ &= p_i^{\nu}(\Phi) \cdot \tau'(j), \end{aligned}$$

pour tout $i \in I_0$, et par suite $\tau'(j') \cdot \Phi'(k) = \tau'(j)$. Ainsi le triplet $(\hat{E}, \tau', \Phi')$, où $\hat{E}$ est le foncteur constant sur $E = \lim_{\rightarrow}^{\nu} \Phi$, définit une transformation naturelle Ψ' et il existe $b = \lim_{\rightarrow}^{\mu} \Psi'$. Comme

$$p_i^{\nu}(\Phi) \cdot b \cdot s_j^{\mu}(\Phi') = p_i^{\nu}(\Phi) \cdot \tau'(j) = \tau_j(i) = \tau(i) \cdot s_j^{\mu}(\Phi')$$

pour tout $j \in J_0$, il s'ensuit $p_i^{\nu}(\Phi) \cdot b = \tau(i)$ pour tout $i \in I_0$, c'est-à-dire $b = \lim_{\rightarrow}^{\nu} \Psi$. ■

1

COROLLAIRE. Reprenons toutes les hypothèses du théorème 12-II et les notations de sa démonstration. Alors $\hat{M}_{\lambda}$ (resp. Alors M_{λ}) vérifie la

condition A du lemme 6 relativement à (C^*, ν) (resp. à (C^*, μ^*)) pour tout $\lambda = \lambda' + 1 < \hat{\lambda}'$.

DEMONSTRATION. M définit une sous-catégorie pleine M_1 de M_2 d'après le théorème 5-II. Si $\Phi^* \in C^* \cdot \hat{\mathcal{F}} \cdot \mathcal{J}$, on a $\lim_{\rightarrow}^{\mu} \Phi^* \notin M$ par hypothèse et $\lim_{\rightarrow}^{\mu} \Phi^* \notin M_2$, car le foncteur Z somme de $\lim^{\nu}$ et de $\lim^{\mu}$ est injectif; donc, en vertu du théorème 11-II, M_2 est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}_2$. Soit $\lambda = \lambda' + 1 < \hat{\lambda}'$. Supposons prouvé que $M_{\xi'+1}'$ et $\hat{M}_{\xi'+1}$ sont des sous-catégories pleines de $\hat{M}_{\lambda'}$ pour tout $\xi' < \lambda'$. Montrons que $\hat{M}_{\lambda'}$ vérifie la condition A relativement à (C^*, ν) . En effet, soit $\Phi = (C^*, \Phi, I^*)$ un foncteur et $E = \lim_{\rightarrow}^{\nu} \Phi \in \hat{M}_{\lambda'}$. Comme Z est injectif, il existe un $\xi' < \lambda'$ tel que $E \in M_{\xi'+1}' - M$, de sorte que l'on a

$$\Phi(I) \subset \hat{M}_{\xi'} \quad \text{et} \quad p_i^{\nu}(\Phi) \in M_{\xi'+1}',$$

$M_{\xi'+1}'$ étant stable pour ν . Soit Ψ une transformation naturelle définie par le triplet $(\Phi, \tau, \hat{E}')$ telle que $\beta(\Psi) \subset \square \hat{M}_{\lambda'}$. Posons $b = \lim_{\rightarrow}^{\nu} \Psi$. Il nous faut montrer que $b \in \hat{M}_{\lambda'}$. Plusieurs cas se présentent :

1°) S'il existe $\xi' + 1 \leq \lambda'$ tel que $\xi' \leq \xi$ et $E' \in M_{\xi'+1}'$, alors $\beta(\Psi) \subset \square M_{\xi'+1}'$ puisque $M_{\xi'+1}'$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}_{\lambda'}$ d'après l'hypothèse de récurrence. $M_{\xi'+1}'$ étant stable pour ν , il en résulte $b \in M_{\xi'+1}' \subset \hat{M}_{\lambda'}$. En particulier tel est le cas lorsque λ' est de seconde espèce.

2°) Dans le cas contraire, on a $\lambda' = \lambda'' + 1$ et $E' \in \hat{M}_{\lambda''} - M_{\lambda''}'$. En vertu du théorème 5-II appliqué à (C^*, μ^*) , on trouve

$$\hat{M}_{\lambda'} = \bigcup_{\xi' < \hat{\lambda}'} \hat{M}_{\lambda'}^{\xi'} \quad \text{et} \quad M_{\lambda',1}' = M_{\lambda'}'.$$

De plus $E' \in M_{\lambda', \xi'+1}'$ entraîne $E = \lim_{\rightarrow}^{\mu} \Phi^*$ où $\beta(\Phi^*) \subset M_{\lambda', \xi'}$.

a) Si $E' \in M_{\lambda', 2}'$, alors $M_{\lambda', 2}'$ étant pleine dans $\hat{M}_{\lambda'}$, on obtient

$$\tau_j(i) = \tau(i) \cdot s_j^{\mu}(\Phi^*) \in M_{\lambda'}'$$

pour tout $i \in I_0^*$ et tout $j \in \alpha(\Phi^*)_0$. Comme $M_{\lambda'}'$ est stable pour ν , la transformation naturelle Ψ_j définie par $(\Phi, \tau_j, \hat{\Phi}'(j))$ est telle que $\tau'(j) = \lim_{\rightarrow}^{\nu} \Psi_j \in M_{\lambda'}'$. D'après le lemme 7, on a $b = \lim_{\rightarrow}^{\mu} \Psi^*$, où Ψ^* est

définie par le triplet $(\hat{E}, \tau', \Phi')$. Donc, $\hat{M}_{\lambda'}$ étant stable pour μ , on en conclut $b \in \hat{M}_{\lambda'}$.

b) Supposons prouvé $b \in \hat{M}_{\lambda'}$ lorsque $E' \in M_{\lambda', \zeta'}$ et $\zeta' < \zeta$; soit $E' \in M_{\lambda', \zeta}$. Avec les mêmes notations que dans a, on trouve

$$\tau'(j) = \lim^{\nu} \Psi_j \in \hat{M}_{\lambda'}$$

d'après l'hypothèse de récurrence, la source de Ψ_j étant le foncteur constant sur $\Phi'(j) \in M_{\lambda', \zeta'}$ où $\zeta' < \zeta$. On en déduit $b = \lim^{\mu} \Psi' \in \hat{M}_{\lambda'}$, car $\hat{M}_{\lambda'}$ est stable pour μ .

c) Par récurrence transfinie sur ζ , on obtient $b \in \hat{M}_{\lambda'}$ dans tous les cas.

- Ainsi E est une limite projective de $(\hat{\Box} \hat{M}_{\lambda'}, \Phi, I')$. Autrement dit, $\hat{M}_{\lambda'}$ vérifie la condition A du lemme 6. Ce lemme affirme que $\hat{M}_{\lambda'}$ est une sous-catégorie pleine de $M'_{\lambda'}$. A fortiori, $\hat{M}_{\xi'+1}$ et $M'_{\xi'+1}$ sont des sous-catégories pleines de $M'_{\lambda'}$ lorsque $\xi' < \lambda'$.

- En utilisant le résultat précédent, une démonstration analogue prouve que $M'_{\lambda'}$ vérifie la condition A relativement à (C^*, μ^*) , de sorte que $M'_{\lambda'}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{M}_{\lambda'}$. On en conclut, par récurrence transfinie sur λ , que $\hat{M}_{\lambda'}$ est pleine dans $M'_{\lambda'}$ et $M'_{\lambda'}$ pleine dans $\hat{M}_{\lambda'}$ pour tout ordinal $\lambda = \lambda' + 1 < \hat{\lambda}'$. ■

BIBLIOGRAPHIE

C.S. = C. EHRESMANN, *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

- [1] C. EHRESMANN, *Structures quasi-quotient*, Math. Ann. (à l'impression); multigraphié, Paris, 1965, 93 pages.
- [2] A. GROTHENDIECK, *Textes réunis du Séminaire Bourbaki 1959-62*.
- [3] ECKMANN-HILTON, *Group-Like structures in general categories*, Math. Ann. I, 151, 1963, p. 150 - 186.
- [4] B. MITCHELL, *Theory of categories*, Academic Press, New-York, London, 1965.
- [5] P. FREYD, *Abelian categories*, Harper & Row, New-York, 1964.
- [6] D.M. KAN, *Adjoint functors*, Trans. A.M.S., 87, 1958, p. 294 - 329.
- [7] F. LAWVERE, *Functorial semantics of algebraic theories*, Thesis, Columbia Univ. 1963.
- [8] C. EHRESMANN, *Catégorie des foncteurs types*, Rev. Un. Mat. Arg. 20, 1960, p. 194 - 209.
- [9] J. BENABOU, *Structures algébriques dans les catégories*, Cahiers de topo. et Géo. Diff., 1967 (à l'impression); thèse multigraphiée Paris, 1966.
- [10] F. FOLTZ, *Sur les produits tensoriels*, Thèse 3e Cycle (à paraître).
- [11] C. EHRESMANN, *Cohomologie à valeurs dans une catégorie dominée*, Coll. de Topo. de Bruxelles, C.B.R.M. 1964, p. 21 - 80.
- [12] J.R. ISBELL, *Structure of categories*, Bull. A.M.S., 72, 1966, p. 619 - 655.
- [13] W. SIERPINSKI, *Leçons sur les nombres transfinis*, Gauthier-Villars, Paris, 1950.
- [14] C. EHRESMANN, *Catégories structurées*, Ann. Ec. Norm. Sup., 80, 1963, p. 349 - 426.
- [15] C. EHRESMANN, *Structures quotient*, Comm. Math. Helv. 38, 1963, p. 219 - 283.
- [16] C. EHRESMANN, *Catégories topologiques*, Proc. Neder. Akad. Amsterdam, A, 69, 1966, p. 133 - 175.
- [17] A. ROUX, *Un théorème de plongement des catégories*, C.R.A.S. Paris, 258, 1964, p. 4646.
- [18] M.S. TSALENKO, *Complétion des catégories par des produits directs et libres*, Mat. Sb. 60, 1963, p. 235 - 256.

- [19] J. LAMBEK, Completion of categories, Lecture Notes in Math., Springer 1966, 70 p.
- [20] V. TRNKOVA, Limits in categories and limit-preserving functors^{*)}, Comm. Math. Univ. Carolinae Prag., 7 - 1, 1966, p. 1-73.

^{*)} Cet article nous a été signalé par l'auteur lors de la correction des épreuves du présent travail. Bien que le problème abordé soit le même que celui considéré dans les § 1 et 3 de II, les méthodes et les résultats diffèrent complètement. En effet, dans [20] le but est d'obtenir un théorème de plongement à une équivalence près d'une catégorie H' telle que $\overline{H} \leq \Lambda$, dans une catégorie C' à limites telle que $\overline{C} \leq \Lambda$; pour cela les limites sont ajoutées «une à une». Ici le principal résultat est le théorème 13 de plongement, à un *isomorphisme* près d'une catégorie H' munie d'applications limite partielles ν et μ et telle que $\overline{H} < \Lambda$ dans une catégorie C' munie d'applications limite (totales) prolongeant ν et μ et telle que $\overline{C} < \Lambda$. Le seul résultat commun semble être le théorème 14 (auxiliaire dans les deux articles), encore que les conditions sur les ordinaux n'y soient pas les mêmes.

CONSTRUCTIONS DE STRUCTURES LIBRES

PAR CHARLES EHRESMANN

INTRODUCTION.

Le but de cet article est de donner un critère d'existence de p -structures libres et des applications de ce critère, qui fait intervenir un foncteur auxiliaire P dont p est une restriction; par exemple si p est le foncteur d'oubli relatif à l'univers $\mathfrak{M}_0$ de la catégorie des homomorphismes entre structures d'un certain type, P pourra être le foncteur analogue relatif à un univers $\hat{\mathfrak{M}}_0$ auquel appartient $\mathfrak{M}_0$. Contrairement au théorème d'existence d'adjoint de Freyd, ce critère impose des propriétés (telles que l'existence d'un «assez grand nombre» de produits) sur P , non sur le foncteur donné p . Les hypothèses peuvent en être généralisées (voir [1]), mais ici nous avons cherché à indiquer des conditions simples, réalisées dans la plupart des exemples.

Comme application, nous obtenons des théorèmes d'existence de limites inductives ou de structures quasi-quotients (voir aussi [1]), et un théorème de complétion «maximale» d'une catégorie en une catégorie à limites projectives et inductives d'une certaine espèce, avec conservation de limites données. Nous avons montré ailleurs [2] que ce dernier résultat a des conséquences intéressantes pour l'étude d'une notion générale de «structure algébrique» définie comme réalisation, dans une catégorie quelconque, d'une esquisse (i.e. d'un graphe multiplicatif muni d'une famille de transformations naturelles).

0. QUELQUES RAPPELS.

Nous nous plaçons dans le cadre de la Théorie des ensembles avec existence d'au moins deux univers $\mathfrak{M}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ tels que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$. Mais en

fait la plupart des raisonnements seraient aussi valables dans une théorie avec ensembles et classes, en prenant pour $\mathfrak{M}_0$ la classe de tous les ensembles et pour éléments de $\hat{\mathfrak{M}}_0$ des classes. Dans le dernier n°, l'axiome du choix est librement utilisé dans $\mathfrak{M}_0$.

La terminologie et les notations sont ceux de [3], dans l'index duquel se trouvent les mots non explicitement définis ici. Les autres notions que nous allons rappeler figurent dans le cours [4].

Univers. Ensemble $\mathfrak{M}_0$ d'ensembles tel que :

1° Si E appartient à $\mathfrak{M}_0$, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ de ses parties est un élément et une partie de $\mathfrak{M}_0$.

2° Si $(E_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathfrak{M}_0$ indexée par un élément I de $\mathfrak{M}_0$, sa réunion appartient à $\mathfrak{M}_0$.

3° Il existe un ensemble infini appartenant à $\mathfrak{M}_0$.

(Contrairement à la définition de Grothendieck, nous n'exigeons pas que $\mathfrak{M}_0$ soit un ensemble transitif.)

Application. Une application f de M dans M' est désignée par le triplet $(M', \underline{f}, M)$, où $\underline{f}$ est la surjection

$$x \mapsto f(x) \text{ de } M \text{ sur } f(M) \subset M'.$$

Si f est l'injection canonique de $M \subset M'$ dans M' , on écrit $f = (M', \iota, M)$.

Catégorie. La catégorie (C, κ) , où κ est la loi de composition

$$(y, x) \mapsto y.x \text{ de } M \subset C \times C \text{ dans } C,$$

est notée C^* (ou, parfois, C), et l'on pose $M = C^* * C^*$. La classe des unités de C^* est C_0^* , les applications source et but α et β , le graphe (C, β, α) sous-jacent [C*], le groupoïde des éléments inversibles C_γ^* . Si A et B sont des parties de C , l'ensemble des composés $y.x$ tels que $y \in B$ et $x \in A$ est désigné par $B.A$; on pose :

$$\{b\}.A = b.A \text{ et } B.\{a\} = B.a.$$

Foncteur. La surjection définissant le foncteur F de C^* vers H^* est notée $\underline{F}$, de sorte que $F = (H^*, \underline{F}, C^*)$, et l'on écrit :

$$\alpha(F) = C^*, \quad \beta(F) = H^*.$$

Transformations naturelles. La catégorie (longitudinale) des transformations naturelles entre foncteurs de C^* vers H^* est notée $\mathfrak{N}(H^*, C^*)^{\square}$; soit T un de ses éléments (F', t, F) . Si p est un foncteur de H^* vers K^* , la transformation naturelle $(p.F', p.t, p.F)$ est notée $p.T$. Si F' est le foncteur e^* constant sur l'unité e de H^* et si $h' \in H.e$, soit $h'T$ la transformation naturelle

$$(\beta(h')^*, t', F), \text{ où } t'(i) = h'.t(i) \text{ pour tout } i \in C_0^*.$$

De même, si $F = e^*$ et si $h \in e.H$, on note Th la transformation naturelle

$$(F', t'', \alpha(h)^*), \text{ où } t''(i) = t(i).h \text{ pour tout } i \in C_0^*.$$

Produits. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille d'unités de H^* admettant e pour produit dans H^* , la projection canonique de e vers e_i étant p_i , on appelle $((p_i)_{i \in I}, e)$ un produit naturalisé dans H^* ; dans ce cas, pour toute famille $(f_i)_{i \in I}$ de morphismes f_i de même source et de buts e_i , l'unique f tel que

$$f.p_i = f_i \text{ pour tout } i \in I$$

est noté $[f_i]_{i \in I}$.

Soit L un ensemble d'ensembles; H^* est à L -produits si toute famille d'unités $(e_i)_{i \in I}$, où $I \in L$, admet un produit dans H^* . Un foncteur p de H^* vers K^* est à L -produits si H^* et K^* sont à L -produits et si $((p(p_i))_{i \in I}, p(e))$ est un produit naturalisé dans K^* lorsque $((p_i)_{i \in I}, e)$ en est un dans H^* .

Noyaux. Une catégorie H^* est à noyaux si tout couple

$$(h', h), \text{ où } h \in H \text{ et } h' \in \beta(h).H.\alpha(h),$$

admet un noyau dans H^* . Un foncteur p de H^* vers K^* est à noyaux si H^* et K^* sont à noyaux et si $p(j)$ est un noyau de $(p(h), p(h'))$ dans K^* lorsque j est un noyau de (h, h') dans H^* .

Limites [1]. Une transformation naturelle $T = (e^*, t, F)$ telle que e soit une limite inductive de F (notée $\varinjlim F$) et que $t(i)$ soit, pour tout $i \in \alpha(F)_0$, l'injection canonique de $F(i)$ vers e est appelée limite induc-

tive naturalisée (de F). Dans ce cas, pour toute transformation naturelle $T' = (e'', t', F)$, on note $\lim^T T'$ (ou simplement $\lim T'$) l'unique k tel que $kT = T'$.

Définitions duales: limite projective naturalisée T et $\lim^T T'$.

Soit $\mathcal{J}$ un ensemble de catégories. Une application associant à certains (resp. à tous les) foncteurs F de $C' \in \mathcal{J}$ vers H' une limite inductive naturalisée de F est dite application $\mathcal{J}$ -limite inductive naturalisée partielle (resp. naturalisée) sur H' . Même définition pour une application $\mathcal{J}$ -limite projective naturalisée (partielle) sur H' .

p-structure libre. Soit p un foncteur de H' vers K' . On appelle p -projecteur un couple $(s, g) \in H'_0 \times K$ tel que $p(s) = \beta(g)$ et que, si $(s', g') \in H'_0 \times K$ et si g' appartient à $p(s') \cdot K \cdot \alpha(g)$, il existe un et un seul $h \in s' \cdot H \cdot s$ vérifiant $p(h) \cdot g = g'$; on dit alors que s est une p -structure libre associée à $\alpha(g)$.

Si, à toute unité e de K' , est associée une p -structure libre $p'(e)$, l'application $e \mapsto p'(e)$ se prolonge en un foncteur adjoint p' de p .

Si p est le foncteur injection canonique vers K' de sa sous-catégorie H' et si p admet un adjoint, K' est dite catégorie à H -projections.

p-injection. Soit p un foncteur de H' vers K' . Un élément j de H est une p -injection si, pour tout élément h de $\beta(j) \cdot H$ tel que

$$p(h) = p(j) \cdot k, \text{ où } k \in K,$$

il existe un et un seul $h' \in H$ vérifiant

$$h = j \cdot h' \text{ et } p(h') = k.$$

Si de plus $p(j)$ est un monomorphisme de K' , on appelle j un p -monomorphisme.

Par dualité, on obtient les p -surjections et les p -épimorphismes.

Structures quasi-quotients. Soit p un foncteur de H' vers la catégorie $\mathfrak{M}$ d'applications. Soit s une unité de H' (ou p -structure sur l'ensemble $p(s)$) et r une relation d'équivalence sur $p(s)$. On se donne une sous-catégorie pleine H'' de H' . On dit que $\hat{s} \in H'$ est une (H', p) -struc-

ture quasi-quotient de s par r (voir [5]) s'il existe un élément j de $\hat{s}.H.s$ (appelé (H', p) -quasi-surjection) vérifiant les conditions : 1

1° $p(j)$ est compatible avec r .

2° Si $h \in H'.H.s$ et si $p(h)$ est compatible avec r , il existe un et un seul $h' \in H'$ tel que $h = h'.j$.

Cette définition signifie que $\hat{s}$ est une H' -projection de (s, r) dans une certaine catégorie $p^?$ (voir [5]).

Si, pour toute unité s de H^* et toute relation d'équivalence r sur $p(s)$, il existe une p -structure quasi-quotient (i.e. une (H, p) -structure quasi-quotient) de s par r , on dit que p est un foncteur à structures quasi-quotients. 2

Si j est une p -quasi-surjection définissant $\hat{s}$ comme p -structure quasi-quotient de s par r et si $p(j)$ est la surjection canonique $\tilde{r}$ de $p(s)$ sur l'ensemble quotient $p(s)/r$, on appelle $\hat{s}$ une p -structure quotient de s par r .

Cas particulier: Catégories quotients d'une catégorie. 3

Sous-morphismes engendrés. Soit p un foncteur de H^* vers K^* , et soit X une partie de H . Si S est une unité de H^* et si $f \in p(S).K$, on dit que j est un (X, p) -sous-morphisme de S engendré par f s'il vérifie les conditions suivantes :

1° $j \in S.X$ et il existe un $k \in K$ tel que $f = p(j).k$.

2° Si $j' \in S.X$ et s'il existe un $k' \in K$ tel que $f = p(j').k'$, il existe un et un seul $h \in H$ vérifiant :

$$j'.h = j \quad \text{et} \quad p(h).k = k'.$$

Graphe multiplicatif. C'est un système multiplicatif C^* pour lequel il existe un graphe (C, β, α) ayant les propriétés :

1° Si $\gamma.x$ est défini, on a

$$\alpha(\gamma) = \beta(x), \quad \alpha(\gamma.x) = \alpha(x) \quad \text{et} \quad \beta(\gamma.x) = \beta(\gamma).$$

2° Pour tout $x \in C$, les composés $x.\alpha(x)$ et $\beta(x).x$ sont définis et égaux à x .

La classe $\alpha(C)$ des unités de C^* est notée C_0^* .

Néofoncteur. C'est un triplet $F = (K^*, \underline{F}, C^*)$, où C^* et K^* sont des graphes multiplicatifs et où $(K, \underline{F}, C)$ est une application f telle que :

1° $f(C_0^*) \subset K_0^*$.

2° Si $y.x$ est défini dans C^* , le composé $f(y).f(x)$ est défini dans K^* et l'on a : $f(y.x) = f(y).f(x)$.

Nous désignons par $\mathcal{N}'$ (resp. par $\mathcal{F}$) la catégorie des néofoncteurs (resp. des foncteurs) associée à l'univers $\mathfrak{M}_0$.

1. THÉORÈME D'EXISTENCE DE STRUCTURES LIBRES.

Soit p un foncteur de H^* vers K^* et e une unité de K^* . Nous allons donner des conditions suffisantes pour qu'il existe une p -structure libre associée à e .

HYPOTHESES. 1° p est la restriction d'un foncteur P de $\hat{H}^*$ vers $\hat{K}^*$ à des sous-catégories pleines H^* de $\hat{H}^*$ et K^* de $\hat{K}^*$.

2° Désignons par I l'ensemble des couples

$$(s, g), \text{ où } s \in H_0^* \text{ et } g \in p(s).K.e;$$

le couple $i = (s, g)$ sera noté (s_i, g_i) . On suppose qu'il existe un couple $(S, \hat{g})$, où S est une unité de $\hat{H}^*$ et $\hat{g} \in P(S).\hat{K}.e$, tel que, pour tout $i \in I$, il existe un $p_i \in s_i.\hat{H}.S$ vérifiant $P(p_i).\hat{g} = g$.

3° Soit X un ensemble de monomorphismes de $\hat{H}^*$. Il existe un $(X.H_0^*, P)$ -sous-morphisme j de S engendré par $\hat{g}$; on note $\hat{s} = \alpha(j)$.

4° Si h et h' sont deux éléments de H de source $\hat{s}$ et de même but, il existe un monomorphisme n de H^* tel que $h.n = h'.n$, $X.n \subset X$ et que $p(n)$ soit un noyau de $(p(h'), p(h))$ dans K^* .

PROPOSITION 1. Si les hypothèses 1, 2, 3 et 4 sont vérifiées, $\hat{s}$ est une p -structure libre associée à e .

Δ . D'après la définition d'un $(X.H_0^*, P)$ -sous-morphisme engendré, il existe un $k \in \hat{K}$ tel que $\hat{g} = P(j).k$; puisque

$$\alpha(k) = \alpha(\hat{g}) = e \quad \text{et} \quad \beta(k) = P(\hat{s}) \in K$$

et que K^* est une sous-catégorie pleine de $\hat{K}^*$, on a $k \in K$. Montrons que $(\hat{s}, k)$ est un p -projecteur. En effet, si $i = (s_i, g_i)$ est un élément de I , on trouve, avec les notations de la condition 2,

$$g_i^! = p_i \cdot j \in s_i \cdot \hat{H} \cdot \hat{s} = s_i \cdot H \cdot \hat{s}$$

et

$$p(g_i^!).k = P(p_i) \cdot P(j) \cdot k = P(p_i) \cdot \hat{g} = g_i.$$

D'autre part, supposons qu'il existe aussi

$$g_i'' \in s_i \cdot H \cdot \hat{s} \text{ avec } p(g_i'').k = g_i.$$

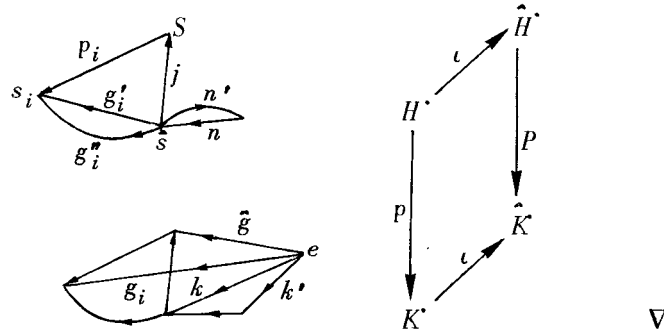
En utilisant la condition 4 pour $h = g_i'$ et $h' = g_i''$, on obtient un monomorphisme n tel que $g_i' \cdot n = g_i'' \cdot n$, $X \cdot n \subset X$ et que $p(n)$ soit un noyau de $(p(g_i'), p(g_i''))$ dans K^* . Cette dernière condition entraîne l'existence d'un k' vérifiant $p(n) \cdot k' = k$, car

$$k \in K \text{ et } p(g_i') \cdot k = g_i = p(g_i'') \cdot k.$$

Il s'ensuit $j \cdot n \in X$ et

$$P(j \cdot n) \cdot k' = P(j) \cdot P(n) \cdot k' = P(j) \cdot k = \hat{g}.$$

Par définition de j , il existe un $n' \in H$ tel que $j = (j \cdot n) \cdot n'$. Or, j étant un monomorphisme, il résulte de cette égalité $n \cdot n' = \hat{s}$, d'où $n' = n^{-1}$ vu que n est un monomorphisme. Donc n est inversible, et $g_i' = g_i''$. Ceci prouve que $(\hat{s}, k)$ est un p -projecteur.



CAS PARTICULIERS. A. Supposons que la condition 1 soit vérifiée et qu'il existe un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ de $(s_i)_{i \in I}$ dans P (i. e.

un produit naturalisé dans $\hat{H}^*$ tel que $((P(p_i))_{i \in I}, P(S))$ soit un produit naturalisé dans $\hat{K}^*$; en prenant pour $\hat{g}$ l'unique élément

$$\hat{g} = [g_i]_{i \in I} \text{ tel que } P(p_i) \cdot \hat{g} = g_i \text{ pour tout } i \in I,$$

la condition 2 est remplie.

B. La condition 4 est satisfaite lorsque p est un foncteur à noyaux et que $X \cdot n \subset X$ pour tout noyau n .

C. Supposons vérifiées les hypothèses 1 et 2, et soit Q un foncteur de $\hat{K}^*$ vers L^* . Soit X un ensemble de monomorphismes de $\hat{H}^*$ tel que $P(X)$ soit formé de monomorphismes de $\hat{K}^*$. S'il existe un (X, H_0^*, Q, P) -sous-morphisme j de S engendré par $Q(\hat{g})$ et si $P(j)$ est une Q -injection, alors j est un (X, H_0^*, P) -sous-morphisme de S engendré par $\hat{g}$, de sorte que l'hypothèse 3 est remplie. En effet, il existe un k tel que l'on ait $Q \cdot P(j) \cdot k = Q(\hat{g})$ et, $P(j)$ étant une Q -injection, il existe un unique $\hat{g}'$ vérifiant

$$Q(\hat{g}') = k \text{ et } P(j) \cdot \hat{g}' = \hat{g}.$$

Par ailleurs, si

$$j' \in S \cdot X \text{ et } P(j') \cdot \hat{g}'' = \hat{g},$$

on trouve $Q \cdot P(j') \cdot Q(\hat{g}'') = Q(\hat{g})$ et, par définition d'un (X, H_0^*, Q, P) -sous-morphisme, il existe un $h \in H$ vérifiant $j' \cdot h = j$; il en résulte alors $P(h) \cdot \hat{g}' = \hat{g}''$, ce qui prouve l'affirmation.

1 2. EXISTENCE DE STRUCTURES QUASI-QUOTIENTS.

Nous nous donnons deux univers $\mathfrak{M}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ tels que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ et $\mathfrak{M}_0 \subset \hat{\mathfrak{M}}_0$. Soit $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ les catégories d'applications correspondantes. Nous supposons que Q est un foncteur de $\hat{H}^*$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ et que q est un foncteur de H^* vers $\mathfrak{M}$ restriction de Q à la sous-catégorie pleine H^* de $\hat{H}^*$. Soit H'' une sous-catégorie pleine de H^* . Nous allons indiquer des conditions suffisantes pour l'existence d'une (H'', q) -structure quasi-quotient de s par r , où s est une unité de H^* et r une relation d'équivalence sur $q(s)$.

HYPOTHESES. 1° Soit I l'ensemble des $i \in H_0'' \cdot H \cdot s$ tels que $q(i)$ soit

compatible avec r . Il existe un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ de $(\beta(i))_{i \in I}$ dans Q . Soit $\hat{g} = [i]_{i \in I}$ l'unique élément de H tel que $p_i \cdot \hat{g} = i$ pour tout $i \in I$.

2° X étant un ensemble donné de Q -monomorphismes, il existe un (X, H'_0, Q) -sous-morphisme j de S engendré par $Q(\hat{g})$; posons $\hat{s} = \alpha(j)$.

3° Si $h' \in H'$ et $h'' \in H'$ ont même source $\hat{s}$ et même but, il existe un noyau n de (h', h'') dans H' vérifiant $\alpha(n) \in H'$ et $X \cdot n \subset X$.

PROPOSITION 2. Si les hypothèses précédentes sont vérifiées, $\hat{s}$ est une (H', q) -structure quasi-quotient de s par r .

Δ . Par définition de j , on a $\alpha(j) \in H'$ et il existe un k tel que : $Q(j) \cdot k = Q(\hat{g})$. Comme j est un Q -monomorphisme, il existe un et un seul $g \in H$ vérifiant

$$Q(g) = k \quad \text{et} \quad j \cdot g = \hat{g}.$$

Si $i \in I$, dire que $Q(i)$ est compatible avec r signifie que $Q(i) = i' \cdot \tilde{r}$, où $\tilde{r}$ est la surjection canonique de $Q(s)$ sur $Q(s)/r$; l'égalité

$$Q(\hat{g}) = [Q(i)]_{i \in I} = [i']_{i \in I} \cdot \tilde{r}$$

entraîne que $Q(\hat{g})$ est compatible avec r ; l'application $Q(j)$ étant une injection, $Q(g)$ est aussi compatible avec r . De plus, pour tout $i \in I$,

$$p_i \cdot j \in H' \quad \text{et} \quad (p_i \cdot j) \cdot g = p_i \cdot \hat{g} = i.$$

Par ailleurs, supposons $h' \cdot g = h'' \cdot g$, où h' et h'' appartiennent à H' . En utilisant l'hypothèse 3, on trouve $j \cdot n \in X$ et, n étant un noyau de (h', h'') il existe un g' tel que $n \cdot g' = g$. Il s'ensuit

$$Q(j \cdot n) \cdot Q(g') = Q(j) \cdot Q(g) = Q(\hat{g}),$$

de sorte que, j étant un (X, H'_0, Q) -sous-morphisme de S engendré par $\hat{g}$, il existe un n' vérifiant $(j \cdot n) \cdot n' = j$. On en déduit

$$n \cdot n' = \hat{s} \quad \text{et} \quad n' = n^{-1},$$

car j et n sont des monomorphismes. Donc $h' = h''$ et g est une (H', q) -structure quasi-quotient de s par r . $\square$

REMARQUE. La Proposition 2 peut se déduire de la Proposition 1 appli-

- quée au foncteur canonique p de H'' vers la catégorie q^a servant à définir
- 1 les q -structures quasi-quotients, si q est compatible avec les noyaux. En effet, on montre facilement que, en identifiant $\hat{H}'$ à une sous-catégorie de Q^a , l'élément S est un produit de $(\beta(i))_{i \in I}$ dans Q^a , que n est un noyau de (h', h'') dans q^a et que j est un (X, H'_0, P) -sous-morphisme de S engendré par $(\hat{g}, r)$, si P désigne le foncteur canonique de $\hat{H}'$ vers Q^a .

Considérons toujours les foncteurs Q et q (le plus souvent nous aurons $H = Q^{-1}(\mathbb{M})$). Soit X un ensemble de Q -monomorphismes. Nous notons $\tilde{\mathbb{M}}_0$ la saturante de $\mathbb{M}_0$ dans $\hat{\mathbb{M}}_0$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\hat{\mathbb{M}}_0$ qui sont équipotents à un élément de $\mathbb{M}_0$; on montre que $\tilde{\mathbb{M}}_0$ est un univers.

DEFINITION. On dit que Q est $(\mathbb{M}, X)$ -engendrant si, pour tout $S \in \hat{H}_0$ et tout $f \in Q(S) \cdot \tilde{\mathbb{M}} \cdot \mathbb{M}_0$, il existe un (X, Q) -sous-morphisme de S engendré par f .

- PROPOSITION 3. Q est $(\mathbb{M}, X)$ -engendrant ssi, pour tout $S \in \hat{H}_0$ et toute
- 2 partie M de $Q(S)$ équipotente à un élément de $\mathbb{M}_0$, il existe un (X, Q) -sous-morphisme de S engendré par l'injection canonique $(Q(S), \iota, M)$.

Δ . Supposons $S \in \hat{H}_0$ et $f \in Q(S) \cdot \tilde{\mathbb{M}}$. - Si Q est $(\mathbb{M}, X)$ -engendrant, et si $f = (Q(S), \iota, M)$, où $M \in \tilde{\mathbb{M}}_0$, il existe une bijection g d'un $M' \in \mathbb{M}_0$ sur M et un (X, Q) -sous-morphisme j de S engendré par $f \cdot g$. Il est clair que j est un (X, Q) -sous-morphisme de S engendré par f . - Inversement supposons vérifiée la condition de la proposition et soit

$$f = (Q(S), \underline{f}, A) \in \tilde{\mathbb{M}} \cdot \mathbb{M}_0.$$

En posant $M = f(A)$, on a $M \in \tilde{\mathbb{M}}_0$, car M est équipotent au quotient de A par la relation d'équivalence associée à f , lequel quotient appartient à l'univers $\tilde{\mathbb{M}}_0$. De plus $f = i \cdot f'$, où

$$i = (Q(S), \iota, M) \text{ et } f' = (M, \underline{f}, A).$$

Comme il existe un (X, Q) -sous-morphisme j' de S engendré par i , on obtient $i = Q(j') \cdot k$. Il s'ensuit

$$f = i \cdot f' = Q(j') \cdot (k \cdot f').$$

Si $j'' \in S.X.s$ et $f = Q(j'').k'$, l'ensemble M est contenu dans l'image $Q(j'')(Q(s))$ et $Q(j'')$ est une bijection $(M', \underline{j}'', Q(s))$. Il en résulte $i = Q(j'').k''$, où k'' est la restriction à M de la bijection $\underline{j}''^{-1}$. Donc il existe un h vérifiant $j' = j''.h$, et j' est un (X, Q) -sous-morphisme de S engendré par f . Ceci prouve que Q est $(\mathbb{M}, X)$ -engendrant. ∇

Des Propositions 1, 2 on déduit :

COROLLAIRE. Supposons que Q soit à $\mathcal{P}(H)$ -produits, que q soit à noyaux et que Q soit $(\mathbb{M}, X.H_0)$ -engendrant. Si $X.n \subset X$ pour tout noyau n dans q , alors q admet un adjoint et q est à structures quasi-quotients. 1

En effet, les hypothèses des Propositions 1 et 2 sont évidemment vérifiées. ∇

Application.

Dans la plupart des exemples, les foncteurs Q et q et l'ensemble X possèdent les propriétés :

(1) Q est fidèle, $Q(s.\hat{H}_Y.H_0) = Q(s).\hat{\mathbb{M}}_Y.\mathbb{M}_0$ pour tout $s \in \hat{H}_0$ et $X.\hat{H}_Y \subset X$.

Dans la fin de ce paragraphe, nous supposons cette condition remplie et nous notons Y l'ensemble des $j \in X$ tels que $Q(j)$ soit une injection canonique ayant pour source un élément de $\hat{\mathbb{M}}_0$. Soit $S \in \hat{H}_0$. Si $j \in S.X.H_0$, il existe un $\hat{g} \in \hat{H}_Y.a(j)$ tel que $Q(\hat{g})$ soit la bijection $\underline{j}$ définissant l'injection $Q(j)$, et l'on a

$$j = j'.\hat{g}, \text{ où } j' = j.\hat{g}^{-1} \in Y.$$

Par suite $X.H_0 = Y.\hat{H}_Y.H_0$. Il en résulte que, si M est une partie de $Q(S)$, alors j est un $(X.H_0, Q)$ -sous-morphisme de S engendré par $(Q(S), \iota, M)$ ssi j' est un (Y, Q) -sous-morphisme de S engendré par $(Q(S), \iota, M)$. Ceci permet de poser la

DEFINITION. Soit $S \in \hat{H}_0$ et M une partie de $Q(S)$. S'il existe un (Y, Q) -sous-morphisme j de S engendré par $(Q(S), \iota, M)$, on appelle $a(j)$ une $(X.H_0, Q)$ -sous-structure de S engendrée par M .

Grâce à la propriété (1), on déduit facilement de la Proposition 3

et de la remarque précédente que Q est $(\mathbb{M}, X, H_o^*)$ -engendrant ssi pour tout $S \in \hat{H}_o^*$ et toute partie M de $Q(S)$ appartenant à $\tilde{\mathbb{M}}_o$, il existe une (X, H_o^*, Q) -sous-structure de S engendrée par M .

EXEMPLES. Prenons pour Q le foncteur $P_{\mathcal{F}}$ d'oubli vers $\hat{\mathbb{M}}$ de la catégorie $\hat{\mathcal{F}}$ des foncteurs, pour H l'ensemble $\mathcal{F}$ des foncteurs associés à $\mathbb{M}_o$, pour X l'ensemble des $P_{\mathcal{F}}$ -monomorphismes. La propriété (1) est vérifiée. Soit $C^* \in \hat{\mathcal{F}}_o$ et M une partie de C appartenant à $\tilde{\mathbb{M}}_o$. La sous-catégorie B^* de C^* engendrée par M est une $(X, \mathcal{F}_o, P_{\mathcal{F}})$ -sous-structure de C^* engendrée par M . En effet, B^* est la $P_{\mathcal{F}}$ -sous-structure de C^* engendrée par M . Vu la Proposition 2-3-II [4], B^* est un quotient de la catégorie libre $L[\hat{M}]$, où $[\hat{M}]$ est le sous-graphe de $[C^*]$ engendré par M . Comme $\tilde{\mathbb{M}}_o$ est un univers, on a

$$\hat{M} = M \cup \alpha(M) \cup \beta(M) \in \tilde{\mathbb{M}}_o, \quad L[\hat{M}] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{M}^n \in \tilde{\mathbb{M}}_o,$$

de sorte que le quotient B de $L[\hat{M}]$ appartient aussi à $\tilde{\mathbb{M}}_o$. Donc $P_{\mathcal{F}}$ est $(\mathbb{M}, X, \mathcal{F}_o)$ -engendrant. En utilisant ce résultat, on montre que les foncteurs d'oubli $P_{\mathcal{H}}$ relatifs aux «structures algébriques usuelles» (Chapitre II [4]) sont $(\mathbb{M}, X, \mathcal{H}_o)$ -engendrants, si X est l'ensemble des $P_{\mathcal{H}}$ -monomorphismes.

1 3. EXISTENCE DE LIMITES INDUCTIVES.

Soit encore $\mathbb{M}$ et $\hat{\mathbb{M}}$ les catégories d'applications associées aux univers $\mathbb{M}_o$ et $\hat{\mathbb{M}}_o$ vérifiant

$$\mathbb{M}_o \in \hat{\mathbb{M}}_o \quad \text{et} \quad \mathbb{M}_o \subset \hat{\mathbb{M}}_o.$$

Supposons donné un foncteur Q de $\hat{H}_o^*$ vers $\hat{\mathbb{M}}$ et sa restriction q vers $\mathbb{M}$ d'une sous-catégorie pleine H^* de $\hat{H}^*$ telle que H soit équipotent à un élément de $\hat{\mathbb{M}}_o$.

PROPOSITION 4. *Supposons que Q soit à $\hat{\mathbb{M}}_o$ -produits et $(\mathbb{M}, X, H_o^*)$ -engendrant, où X est un ensemble de Q -monomorphismes. Si tout couple de morphismes de H^* de même source et même but admet un noyau n dans H^* tel que $X \cdot n \subset X$, alors H^* est une catégorie à C^* -limites inductives, pour toute catégorie C^* vérifiant $C \in \tilde{\mathbb{M}}_o$.*

Δ . Soit F un foncteur de C^* vers H^* . Considérons l'ensemble I de toutes les transformations naturelles $i = (s_i^*, t_i, F)$ de F vers un foncteur s_i^* constant sur $s_i \in H_0^*$. La surjection $i \mapsto (t_i(c))_{c \in C_0^*}$ définit une bijection de I sur une partie de $H^{C_0^*}$. Comme H et C_0^* sont équipotents à des éléments de $\mathbb{M}_0$, ce produit l'est aussi, et il existe un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ de $(s_i)_{i \in I}$ dans Q . Si Φ est un foncteur de C^* vers H^* (resp. vers $\mathbb{M}$), notons $\bar{\Phi}$ le foncteur de C^* vers $\hat{H}^*$ (resp. vers $\hat{\mathbb{M}}$) défini par la surjection Φ ; nous utilisons une notation analogue pour les transformations naturelles.

- Le foncteur $q.F$ admet une limite inductive naturalisée canonique σ , car $\mathbb{M}$ est une catégorie à C^* -limites inductives; désignons par σ_c l'injection canonique de $q.F(c)$ dans $M = \lim_{\rightarrow} q.F$. Par construction de σ , la transformation naturelle $\bar{\sigma}$ est une limite inductive naturalisée du foncteur $\overline{q.F}$ de C^* vers $\hat{\mathbb{M}}$.

- Pour tout $c \in C_0^*$, il existe un crochet $t(c) = [t_i(c)]_{i \in I}$, de source $F(c)$, de but S . Si $m \in c'.C.c$, on trouve

$$\begin{aligned} t(c').F(m) &= [t_i(c')]_{i \in I}.F(m) = [t_i(c').F(m)]_{i \in I} = \\ &= [t_i(c)]_{i \in I} = t(c), \end{aligned}$$

de sorte que $T = (S^*, t, \bar{F})$ est une transformation naturelle et

$$p_i T = \bar{t} \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Soit k l'application $\lim_{\rightarrow} \bar{\sigma} QT$ de M dans $Q(S)$ telle que $k\bar{\sigma} = QT$. Le foncteur Q étant $(\mathbb{M}, X, H_0^*)$ -engendrant et M appartenant à $\mathbb{M}_0$, il existe un (X, H_0^*, Q) -sous-morphisme j de S engendré par M . Montrons que s source de j est une limite inductive de F . Or il existe k' tel que l'on ait $Q(j).k' = k$; il s'ensuit

$$Q(t(c)) = k.\sigma_c = Q(j).k'.\sigma_c$$

et, j étant un Q -monomorphisme, il existe un unique $t'(c)$ vérifiant

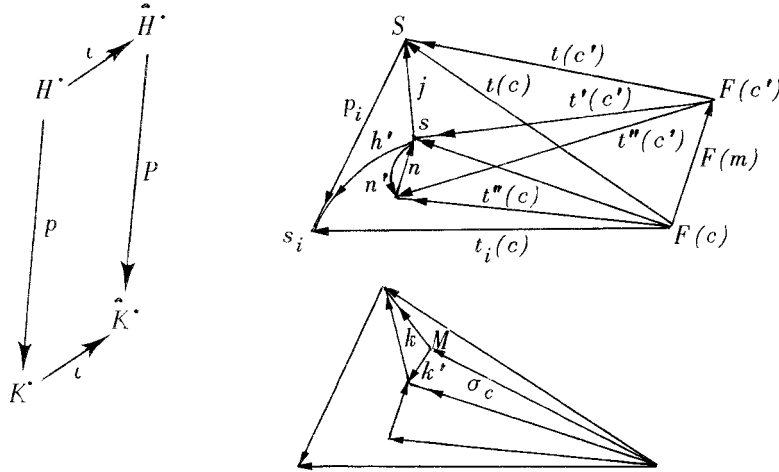
$$Q(t'(c)) = k'.\sigma_c \quad \text{et} \quad t(c) = j.t'(c),$$

ce pour tout $c \in C_0^*$. Si $m \in c'.C.c$, on obtient

$$j \cdot t'(c') \cdot F(m) = t(c') \cdot F(m) = t(c) = j \cdot t'(c),$$

d'où $t'(c') \cdot F(m) = t'(c)$, car j est un monomorphisme. Ceci montre que $T' = (s^{\wedge}, t', F)$ est une transformation naturelle qui satisfait les égalités

$$Q \bar{T}' = k' \bar{\sigma} \quad \text{et} \quad j \bar{T}' = T.$$



Montrons que T' est une limite inductive naturalisée. Pour cela, soit $i = (s_i^{\wedge}, t_i, F) \in I$. En posant $h = p_i \cdot j$, on a

$$h \bar{T}' = p_i (j \bar{T}') = p_i T = \bar{i}, \quad \text{d'où} \quad h T' = i.$$

Supposons aussi $h' T' = i$. Par hypothèse, il existe un noyau n de (h', h) dans H' avec $X \cdot n \subset X$. Soit $c \in C_0'$. Comme

$$h \cdot t'(c) = t_i(c) = h' \cdot t'(c),$$

il existe un unique $t''(c)$ vérifiant $n \cdot t''(c) = t'(c)$. Si $m \in c' \cdot C \cdot c$, on obtient

$$n \cdot t''(c') \cdot F(m) = t'(c') \cdot F(m) = t'(c) = n \cdot t''(c).$$

Il s'ensuit, n étant un monomorphisme, $t''(c') \cdot F(m) = t''(c)$. Par suite $T'' = (\alpha(n)^{\wedge}, t'', F)$ est une transformation naturelle, et $n T'' = T'$. Si $k'' = \lim_{\rightarrow}^{\sigma} Q T''$, on trouve

$$(Q(j \cdot n) \cdot k'') \bar{\sigma} = Q(j \cdot n) Q \bar{T}'' = Q(j(n \bar{T}'')) = Q(j \bar{T}') = Q T = k \bar{\sigma}$$

et, $\bar{\sigma}$ étant une limite inductive naturalisée, $Q(j \cdot n) \cdot k'' = k$. Par défini-

tion de j , il existe n' tel que $(j, n).n' = j$. Cette relation a pour conséquence $n' = n^{-1}$, car j et n sont des monomorphismes. Par suite $h = h'$, et T' est une limite inductive naturalisée de F . ∇

REMARQUES. 1° On pourrait déduire la Proposition 4 de la Proposition 1, en prenant pour p le foncteur canonique de H' vers la catégorie de transformations naturelles $\mathfrak{N}(H', C')$ ^[1]; dans ce cas, il faut montrer que les conditions de la Proposition 1 sont satisfaites, ce qui est aussi difficile que de prouver directement la Proposition 4.

2° Avec les hypothèses de la Proposition 4, et en supposant que C' est une catégorie discrète, on voit que H' est une catégorie à $\mathfrak{M}_0$ -sommes. La Proposition 2 affirmant que, sous ces hypothèses, q est un foncteur à structures quasi-quotients, on déduit de cette seule assertion que H' est à C' -limites inductives pour toute catégorie C' vérifiant $C \in \mathfrak{M}_0$, à l'aide de la Proposition 6.5.I [4]. Mais la démonstration de la Proposition 4 ne se simplifie guère en y supposant C' discrète.

4. COMPLÉTION D'UNE CATÉGORIE.

Soit $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ les catégories d'applications considérées dans les deux paragraphes précédents. Nous supposons donnés deux ensembles $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ de catégories I' telles que $I \in \mathfrak{M}_0$.

Désignons par $\mathcal{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$ l'ensemble des triplets $u = (C', \mu, \nu)$, où C' est un graphe multiplicatif, où $C \in \mathfrak{M}_0$ et où μ (resp. où ν) est une surjection associant à certains néofoncteurs F de $I' \in \mathfrak{I}$ (resp. $I' \in \mathfrak{J}$) vers C' une transformation naturelle de la forme

$$\mu(F) = (F, t, e^\wedge) \quad (\text{resp.} \quad \nu(F) = (e^\wedge, t, F)),$$

en notant $e^\wedge$ le néofoncteur de I' vers C' constant sur $e \in C'_0$. Soit $\mathcal{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$ l'ensemble des triplets (u', ϕ, u) , où

$$u = (C', \mu, \nu) \in \mathcal{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}, \quad u' = (C'', \mu', \nu') \in \mathcal{S}_0^{\mathfrak{I}\mathfrak{J}}$$

et où Φ est un néofoncteur de C' vers C'' vérifiant la condition :

Si $\mu(F)$ est défini, $\mu'(\Phi.F)$ est défini et égal à $\Phi\mu(F)$; si $\nu(F')$

est défini, $\nu'(\Phi, F')$ est défini et égal à $\Phi\nu(F')$.

$\mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ devient une catégorie pour la loi de composition :

$$(u'', \Phi', \hat{u}').(u', \Phi, u) = (u'', \Phi'.\Phi, u) \quad \text{ssi} \quad \hat{u}' = u'.$$

Nous identifions $\mathcal{S}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ à la classe de ses unités. La surjection

$$(u', \Phi, u) \mapsto p_{\mathcal{H}}(\Phi) = (C', \Phi, C)$$

définit un foncteur $p''^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ de $\mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ vers $\mathcal{M}$. Soit $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ ayant pour unités les triplets $u = (C^*, \mu, \nu)$ tels que C^* soit une catégorie et que μ soit une application $\mathcal{J}$ -limite projective naturalisée partielle, ν une application $\mathcal{J}$ -limite inductive naturalisée partielle, sur C^* . Soit $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ ayant pour unités les triplets $u = (C^*, \mu, \nu) \in \mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ tels que μ et ν soient des applications $\mathcal{J}$ -limite projective naturalisée et $\mathcal{J}$ -limite inductive naturalisée respectivement sur C^* . Nous notons $p'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ les foncteurs de $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ respectivement vers $\mathcal{M}$ restrictions de $p''^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$.

De même nous définissons à partir de l'univers $\hat{\mathcal{M}}_0$ les catégories $\hat{\mathcal{S}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$, $\hat{\mathcal{F}}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$, les foncteurs $\hat{p}''^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$, $\hat{p}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et $\hat{p}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ (toujours relatifs aux mêmes ensembles $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$).

PROPOSITION 5. Les foncteurs $p^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$, $p'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et $p''^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ sont à $\mathcal{M}_0$ -produits, ainsi que les foncteurs injections canoniques de $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ vers $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et de $\mathcal{F}'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ vers $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$.

Δ . Supposons

$$u_d = (C_d^*, \mu_d, \nu_d) \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}} \quad \text{pour tout } d \in D, \text{ où } D \in \mathcal{M}_0.$$

Soit C^* le graphe multiplicatif produit $\prod_{d \in D} C_d^*$ et p_d le néofoncteur projection canonique de C^* sur C_d^* . Soit $\alpha(\mu)$ l'ensemble des néofoncteurs F de $I^* \in \mathcal{J}$ vers C^* tels que $\mu_d(p_d.F) = (F_d, t_d, e_d^*)$ soit défini pour tout $d \in D$. Si $i \in I_0^*$, notons $t(i)$ la famille $(t_d(i))_{d \in D}$; le triplet

$$(F, t, e^*), \quad \text{où } e = (e_d)_{d \in D}$$

est une transformation naturelle $\mu(F)$. De même si F' est un néofoncteur de $J^* \in \mathcal{J}'$ vers C^* et si $\nu_d(p_d.F') = (e_d^*, t_d', F_d')$ est défini pour tout

$d \in D$, nous désignons par $\nu(F')$ la transformation naturelle (e'', t', F') définie par

$$e' = (e'_d)_{d \in D} \quad \text{et} \quad t'(i) = (t'_d(i))_{d \in D} \quad \text{pour } i \in I_0.$$

Nous obtenons ainsi deux surjections μ et ν et $u = (C', \mu, \nu)$ est un élément de $\mathcal{S}_0^{\mathcal{A}}$. Montrons que u est un produit de $(u_d)_{d \in D}$ dans $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$. En effet, par construction, on a

$$\Pi_d = (u_d, p_d, u) \in \mathcal{S}^{\mathcal{A}} \quad \text{pour tout } d \in D.$$

Supposons

$$\Phi_d = (u_d, \phi_d, u') \in \mathcal{S}^{\mathcal{A}} \quad \text{pour tout } d \in D,$$

où $u' = (C'', \mu', \nu')$; soit $\phi = [\phi_d]_{d \in D}$ le néofoncteur canonique de C'' vers C' . Si $\mu'(F') = (F', t', e'')$ est défini, $\mu_d(\phi_d \cdot F')$ est défini pour tout $d \in D$. Comme $\phi_d \cdot F' = p_d \cdot \phi \cdot F'$, la transformation naturelle $\mu(\phi \cdot F')$ est définie et égale à $(\phi \cdot F', t, e'')$, si

$$t(i) = (\phi_d(t'(i)))_{d \in D} = \phi(t'(i)) \quad \text{pour tout } i \in I_0,$$

c'est-à-dire à $\phi \mu'(F')$. On voit de même que, si $\nu'(F'')$ est défini, $\nu(\phi \cdot F'')$ est défini et égal à $\phi \nu'(F'')$. Par suite $\Phi = (u, \phi, u')$ appartient à $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ et l'on a $\phi_d = p_d \cdot \phi$ pour tout $d \in D$. Ceci prouve que le foncteur $p''^{\mathcal{A}}$ est à $\mathbb{M}_0$ -produits.

- Supposons de plus $u_d \in \mathcal{F}'^{\mathcal{A}}$ pour tout $d \in D$. Avec les notations précédentes, C' est une catégorie. Montrons que, si $\mu(F) = (F, t, e^*)$ est défini, c'est une limite projective naturalisée. En effet, soit $\psi = (F, t', e'')$ une transformation naturelle. Etant donné que $\mu_d(p_d \cdot F)$ est une limite projective naturalisée et que $p_d \psi$ est une transformation naturelle vers $p_d \cdot F$, il existe

$$k_d = \lim_{\leftarrow} p_d \psi \quad \text{tel que} \quad \mu_d(p_d \cdot F) k_d = p_d \psi;$$

en posant $k = [k_d]_{d \in D}$, on voit que k est l'unique élément de C vérifiant $\mu(F)k = \psi$. Donc $\mu(F)$ est une limite projective naturalisée. On montre d'une manière analogue que ν est une application $\mathcal{J}$ -limite inductive naturalisée partielle sur C' . Il en résulte $u \in \mathcal{F}'^{\mathcal{A}}$, et u est aussi le produit de $(u_d)_{d \in D}$ dans $\mathcal{F}'^{\mathcal{A}}$. Ainsi $p'^{\mathcal{A}}$ et $(\mathcal{S}^{\mathcal{A}}, \iota, \mathcal{F}'^{\mathcal{A}})$ sont des

foncteurs à $\mathbb{M}_0$ -produits.

- Enfin si $u_d \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ pour tout $d \in D$, la limite $\mu(F)$ est définie pour tout foncteur F de $I' \in \mathcal{A}$ vers C' et $\nu(F')$ est définie pour tout foncteur F' de $J' \in \mathcal{B}$ vers C' . Il en résulte que u appartient à $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ et c'est le produit de $(u_d)_{d \in D}$ dans $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$. ∇

PROPOSITION 6. Les foncteurs $p^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$, $p'^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$, $p''^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ sont à noyaux, de même que les foncteurs injections canoniques de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ vers $\mathcal{F}'^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ et de $\mathcal{F}'^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ vers $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$.

Δ . Supposons que $\Phi = (\hat{u}, \phi, u)$ et $\Phi' = (\hat{u}', \phi', u)$ soient deux éléments de $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$, où $u = (C', \mu, \nu)$ et $\hat{u} = (\hat{C}', \hat{\mu}, \hat{\nu})$. Soit G' le graphe multiplicatif noyau de (ϕ, ϕ') , qui est formé des

$$x \in C' \text{ tels que } \phi(x) = \phi'(x).$$

Soit η le néofoncteur injection canonique de G' vers C' . Soit F' un néofoncteur de $I' \in \mathcal{A}$ vers G' , et F le néofoncteur $\eta \cdot F'$. Supposons que $\mu(F) = (F, t, e^{\wedge})$ soit défini; alors

$$\hat{\mu}(\phi \cdot F) = \phi \mu(F) \text{ et } \hat{\mu}'(\phi' \cdot F) = \phi' \mu(F).$$

Les égalités

$$\phi \cdot F = \phi \cdot \eta \cdot F' = \phi' \cdot \eta \cdot F' = \phi' \cdot F$$

entraînent

$$\phi \mu(F) = \phi' \mu(F), \text{ d'où } t(I'_0) \subset G'.$$

Il s'ensuit que $(F', t, e^{\wedge})$ est aussi une transformation naturelle, que nous notons $\mu'(F')$; on a $\eta \mu'(F') = \mu(F)$. De même si $\nu(F)$ est défini et égal à $(e'^{\wedge}, t', F)$, on voit que $(e'^{\wedge}, t', F')$ est une transformation naturelle, désignée par $\nu'(F')$. De cette façon, on construit deux surjections μ' et ν' , et

$$u' = (G', \mu', \nu') \in \mathcal{S}_0^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \text{ et } \bar{\eta} = (u, \eta, u') \in \mathcal{S}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}.$$

Supposons $\Phi'' = (u, \phi'', u'') \in \mathcal{S}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$, où

$$u'' = (C'', \mu'', \nu'') \text{ et } \Phi \cdot \Phi'' = \Phi' \cdot \Phi''.$$

La surjection ϕ'' définit un néofoncteur ϕ''_I de C'' vers G' vérifiant $\eta \cdot \phi''_I = \phi''$. Soit F'' un néofoncteur de I' vers C'' tel que $\mu''(F'')$ soit

défini, et posons

$$F' = \phi_1'' \cdot F'' \quad \text{et} \quad F = \phi'' \cdot F'' ;$$

alors $F = \eta \cdot F'$. Puisque Φ'' appartient à $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$, la transformation naturelle $\mu(F)$ est définie et égale à $\phi''\mu''(F'')$. On en déduit que $\mu'(F')$ est défini et égal à $\phi_1''\mu''(F'')$. D'une manière analogue, si $\nu''(F'')$ est défini, alors $\nu'(\phi_1'' \cdot F'')$ est défini et vaut $\phi_1''\nu''(F'')$. Par conséquent, (u', ϕ_1'', u'') appartient à $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$, et c'est l'unique élément Φ_1'' de $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ pour lequel $\bar{\eta} \cdot \Phi_1'' = \Phi''$. Ceci signifie que $\bar{\eta}$ est un noyau de (Φ, Φ') dans $p^{\mathcal{A}}$. - Supposons de plus que Φ et Φ' appartiennent à $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$, et montrons que $u' \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$. En effet, il suffit de montrer que si $\mu'(F')$ est défini, c'est une limite projective naturalisée. Or soit ψ une transformation naturelle (F', τ, e^*) , et $F = \eta \cdot F'$. Etant donné que ψ est une transformation naturelle et que $\mu(F) = \eta\mu'(F')$ est une limite projective naturalisée, il existe k tel que $\mu(F)k = \eta\psi$. Les égalités

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(\phi \cdot F) \phi(k) &= \phi(\mu(F)k) = (\phi \cdot \eta)\psi = \\ &= (\phi' \cdot \eta)\psi = \phi'(\mu(F)k) = \hat{\mu}(\phi' \cdot F)\phi'(k) \end{aligned}$$

ont pour conséquence

$$\phi(k) = \lim_{\leftarrow} (\phi \cdot \eta)\psi = \phi'(k), \quad \text{d'où} \quad k \in G \quad \text{et} \quad \mu'(F')k = \psi.$$

Ainsi $\mu'(F')$ est une limite projective naturalisée. On prouve de même que $\nu'(F'')$ est une limite inductive naturalisée lorsque cette transformation naturelle est définie. Donc $u' \in \mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ et $\bar{\eta}$ est un noyau de (Φ, Φ') dans $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$.

- Enfin lorsque Φ et Φ' appartiennent à $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$, la construction de u' entraîne que c'est un élément de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$, de sorte que $\bar{\eta}$ est un noyau du couple (Φ, Φ') dans $p^{\mathcal{A}}$. ∇

DEFINITION. Soit C^* une catégorie et μ une application $\mathcal{A}$ -limite projective naturalisée partielle sur C^* . On dit qu'une partie M de C est saturée pour μ si elle vérifie la condition : Lorsque $\mu(F) = (F, t, e^*)$ est défini pour un foncteur F de I^* vers C^* et que $F(I) \subset M$, on a

$$t(I_0^*) \subset M \quad \text{et} \quad \lim_{\leftarrow} \mu^{(F)} \psi \in M$$

pour toute transformation naturelle $\psi = (F, t', e'^{\wedge})$ vérifiant $t'(I_0) \subset M$. On définit d'une façon analogue la notion d'une partie M saturée pour ν , si ν est une application $\mathcal{J}$ -limite inductive naturalisée partielle sur C^* .

Soit X' l'ensemble des

$$\Phi = ((C^*, \mu, \nu), \phi, (G^*, \mu', \nu')) \in \hat{\mathcal{F}}, \mathcal{A}\mathcal{J}$$

tels que ϕ soit un foncteur injectif, que $\mu'(F')$ soit défini ssi $\mu(\phi.F')$ est défini et que $\nu'(F')$ soit défini dans le seul cas où $\nu(\phi.F')$ est défini.

PROPOSITION 7. Soit $u = (C^*, \mu, \nu) \in \mathcal{F}_0, \mathcal{A}\mathcal{J}$ et ϕ un foncteur de G^* vers C^* . On a $P_{\mathcal{F}}(\phi) \in P, \mathcal{A}\mathcal{J}(u, X')$ ssi ϕ est un foncteur injectif et si $\phi(G)$ est saturé pour μ et pour ν . Tout élément de X' est un $P, \mathcal{A}\mathcal{J}$ -monomorphisme.

Δ . Supposons

$$\Phi = ((C^*, \mu, \nu), \phi, (G^*, \mu', \nu')) \in X';$$

alors ϕ est injectif et $M = \phi(G)$ définit une sous-catégorie M^* de C^* . Soit ξ l'isomorphisme de M^* sur G^* défini par la bijection ϕ^{-1} . Supposons $\mu(F) = (F, t, e^{\wedge})$ défini pour un foncteur F de $I^* \in \mathcal{J}$ vers C^* tel que $F(I) \subset M$. Comme

$$F = \phi.F', \text{ où } F' = \xi.(M^*, \underline{F}, I^*),$$

par définition de X' la limite projective naturalisée $\mu'(F')$ est définie. L'égalité $\mu(F) = \phi\mu'(F')$ prouve que

$$\mu'(F') = (F', \xi t, s^{\wedge}), \text{ où } e = \phi(s);$$

il s'ensuit

$$t(I_0) = \phi(\xi t(I_0)) \subset \phi(G) = M.$$

Soit ψ une transformation naturelle $(F, t', e'^{\wedge})$ vérifiant $t'(I_0) \subset M$; si ψ' est la transformation naturelle

$$(F', \xi t', s'^{\wedge}), \text{ où } \phi(s') = e',$$

il existe $k' = \lim_{\leftarrow} \mu'(F') \psi' \in G$. Les relations

$$\phi\psi' = \psi \quad \text{et} \quad \phi\mu'(F') = \mu(F)$$

entraînent

$$\lim_{\leftarrow} \mu(F) \psi = \lim_{\leftarrow} \mu(F) \phi\psi' = \phi(\lim_{\leftarrow} \mu'(F') \psi') = \phi(k') \in M.$$

Donc M est saturé pour μ . On montre de même que M est saturé pour ν .

- Avec les notations précédentes, prouvons que Φ est un $P^{\mathcal{A}\mathcal{J}}$ -monomorphisme. Pour cela, soit

$$\Phi' = ((C', \mu, \nu), \phi', (K', \tilde{\mu}, \tilde{\nu})) \in \hat{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}\mathcal{J}} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{F}}(\phi') = P_{\mathcal{F}}(\phi) \cdot f''.$$

D'après la Proposition 4-2-II [4], f'' définit un néofoncteur ϕ'' de K' vers G' . Si $\tilde{\mu}(F_1) = (F_1, t_1, e_1^*)$ est défini, $\mu(\phi' \cdot F_1)$ est défini et l'égalité $\phi' \cdot F_1 = \phi \cdot (\phi'' \cdot F_1)$ assure que $\mu'(\phi'' \cdot F_1)$ est aussi défini. Puisque

$$\phi\mu'(\phi'' \cdot F_1) = \mu(\phi' \cdot F_1) = \phi'\tilde{\mu}(F_1) = \phi(\phi''\tilde{\mu}(F_1))$$

et que ϕ est injectif, on trouve $\mu'(\phi'' \cdot F_1) = \phi''\tilde{\mu}(F_1)$. D'une manière analogue, si $\tilde{\nu}(F'_1)$ est défini, $\nu'(\phi'' \cdot F'_1)$ est défini et égal à $\phi''\tilde{\nu}(F'_1)$. Par suite

$$((G', \mu, \nu), \phi'', (K', \tilde{\mu}, \tilde{\nu}))$$

est l'unique élément Φ'' de $\hat{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}\mathcal{J}}$ tel que

$$\Phi \cdot \Phi'' = \Phi' \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{F}}(\phi'') = f''.$$

Autrement dit, Φ est un $P^{\mathcal{A}\mathcal{J}}$ -monomorphisme.

- Inversement, supposons que ϕ soit un foncteur injectif de G' vers C' et que $\phi(G) = M$ soit saturé pour μ et pour ν . L'ensemble M définit une sous-catégorie de C' . Si F est un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers C' tel que $F(I) \subset M$ et que $\mu(F) = (F, t, e^*)$ soit défini, et si F_1 est le foncteur de I' vers M' défini par F , le triplet (F_1, t, e^*) est une limite projective naturalisée ψ , car M est saturé pour μ . En notant ξ l'isomorphisme canonique de M' sur C' défini par ϕ^{-1} , la transformation naturelle $\xi\psi$ est aussi une limite projective naturalisée, que nous noterons $\mu'(\phi \cdot F_1)$. Soit μ' la surjection associant, à tout foncteur F' de $I' \in \mathcal{J}$ vers G' tel que $\mu(\phi \cdot F')$ soit défini, la limite projective naturalisée

$$\mu'(\xi \cdot (\phi F')_1) = \mu'(F').$$

De même, si F'' est un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers G' et si $\nu(\phi, F'')$ est défini, notons $\nu'(F'')$ l'unique limite inductive naturalisée vérifiant l'égalité $\phi \nu'(F'') = \nu(\phi, F'')$. Il est évident que

$$((C', \mu, \nu), \phi, (G', \mu', \nu')) \in X',$$

et c'est l'unique élément de $u.X'$ appliqué par $P'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ sur $P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}(\phi)$, ce qui achève la démonstration. ∇

COROLLAIRE. $X = X' \cap \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ est l'ensemble des $P^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ -monomorphismes.

Δ . Soit Φ un $P^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ -monomorphisme $((C', \mu, \nu), \phi, (G', \mu', \nu'))$; ϕ est un foncteur injectif. Soit F' un foncteur de $I' \in \mathcal{J}$ vers G' ; comme μ et μ' sont des applications $\mathcal{J}$ -limite projective naturalisées, $\mu(\phi, F')$ et $\mu'(F')$ sont définis et, Φ appartenant à $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$, on a $\mu(\phi, F') = \phi \mu'(F')$. De même $\nu'(F'')$ est l'unique transformation naturelle vérifiant $\nu(\phi, F'') = \phi \nu'(F'')$ pour tout foncteur F'' de $I' \in \mathcal{J}$ vers G' . Donc $\Phi \in X$.

- Inversement, tout élément de X est un $P^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ -monomorphisme, car c'est un $P'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ -monomorphisme (Proposition 7) et $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$. ∇

PROPOSITION 8. Si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont équipotents à des éléments de $\mathfrak{M}_0$, le foncteur $P'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ est $(\mathfrak{M}, X', \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}})$ -engendrant et $P^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ est $(\mathfrak{M}, X, \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}})$ -engendrant.

1

Δ . Soit $u = (C', \mu, \nu) \in \hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et soit M une partie de C appartenant à la saturante $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ de $\mathfrak{M}_0$ dans $\tilde{\mathfrak{M}}_0$. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties B de C définissant une sous-catégorie de C' et saturées pour μ et ν . Il est clair que l'intersection G de $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{B}$. Le foncteur $P'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ vérifiant la propriété (1) du n° 2, pour prouver que $P'^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ est $(\mathfrak{M}, X', \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}})$ -engendrant, il suffit de montrer qu'il existe une $(X', \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}}, P'^{\mathcal{J}\mathcal{J}})$ -sous-structure de u engendrée par M . Or, d'après la Proposition 7, si une telle sous-structure existe, elle est de la forme (G', μ', ν') , et G appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}_0$, nous sommes donc ramenés à montrer que G est équipotent à un élément de $\mathfrak{M}_0$. Pour cela, nous allons construire G par récurrence transfinie.

- Nous aurons à utiliser quelques notions sur les (nombres) ordinaux que nous allons rappeler. Soit λ un ordinal et O_λ l'ensemble bien ordonné des ordinaux inférieurs à λ . Si λ n'a pas de prédécesseur dans O_λ , on l'appelle un ordinal limite. On dit que λ est un ordinal régulier si, dans O_λ , on a $\sup_{\xi < \lambda} \lambda_\xi < \lambda$ pour toute suite transfinie $(\lambda_\xi)_{\xi < \lambda}$, telle que $\lambda_\xi < \lambda$ et $\lambda' < \lambda$.

A tout ensemble A , nous associons l'ordinal $\bar{A}$, qui est le plus petit ordinal équipotent à A ; un tel ordinal est appelé ordinal initial. Il existe une bijection γ du sous-ensemble bien ordonné de $O_{\bar{A}}$ formé des ordinaux initiaux $\xi < \bar{A}$ sur une section commençante de $O_{\bar{A}}$; l'ordinal $\gamma^{-1}(\lambda)$ est dit ordinal initial d'indice λ , et noté ω_λ . Si λ admet un prédécesseur ω_λ est régulier. Si ω_λ est régulier tandis que λ est un ordinal limite, on dit que ω_λ est inaccessible; dans ce cas, on montre que $\lambda = \omega_\lambda$. Soit Λ l'ordinal borne supérieure des ordinaux $\bar{A}$, où $A \in \mathfrak{M}_0$; on a aussi $\Lambda = \sup_{A \in \mathfrak{M}_0} \bar{A}$. Comme $\mathfrak{M}_0$ est un univers, on prouve que Λ est un ordinal inaccessible. Si $I^* \in \mathcal{I} \cup \mathcal{J}$, on a $\bar{I}^* < \Lambda$; soit Λ' l'ordinal borne supérieure des ordinaux $\bar{I}$, où I^* décrit $\mathcal{I} \cup \mathcal{J}$. L'hypothèse

$$\mathcal{I} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{J} \in \tilde{\mathfrak{M}}_0$$

entraînant $\overline{\mathcal{I} \cup \mathcal{J}} < \Lambda$ et Λ étant régulier, Λ' est strictement inférieur à Λ ; a fortiori

$$\Lambda' + I < \Lambda, \quad \text{d'où} \quad \omega_{\Lambda' + I} < \omega_\Lambda = \Lambda.$$

Notons $\hat{\lambda}$ l'ordinal initial régulier $\omega_{\Lambda' + I}$.

- Soit M_0^* la sous-catégorie de C^* engendrée par M . Nous avons vu (fin n° 3) que M_0^* appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}_0$. Soit λ un ordinal inférieur ou égal à $\hat{\lambda}$ et supposons définie une suite transfinie $(M_\xi)_{\xi < \lambda}$ vérifiant la condition:

(σ) M_λ appartient à $\tilde{\mathfrak{M}}_0$ et définit une sous-catégorie de C^* ; on a

$$M_{\xi'} \subset M_\xi \quad \text{lorsque} \quad \xi' < \xi < \lambda.$$

Définissons M_λ comme suit:

1^{er} cas: Si λ est un ordinal limite, on pose $M_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} M_\xi$. Evidem-

ment M_λ définit une sous-catégorie de C^* contenant M_ξ et, λ étant l'ordinal associé à un élément de $\mathfrak{M}_0$, on a $M_\lambda \in \mathfrak{M}_0$.

2^{ème} cas: $\lambda = \xi + 1$. Si F est un foncteur de I^* vers C^* tel que $F(I) \subset M_\lambda$ et que $\mu(F) = (F, t, e^*)$ soit défini, notons A_F l'ensemble formé des éléments $t(i)$, où $i \in I_0^*$, et des éléments $h = \lim_{\leftarrow}^{\mu(F)} \psi$, pour toute transformation naturelle

$$\psi = (F, t_I, e_I^*) \text{ telle que } t_I(I_0^*) \subset M_\xi.$$

La surjection telle que

$$i \mapsto t(i), \quad (t_I(i))_{i \in I_0^*} \mapsto h$$

applique une partie U_F de $I \cup (M_\xi)^{I_0^*}$ sur A_F . Puisque I et M_ξ appartiennent à $\mathfrak{M}_0$, on a $U_F \in \mathfrak{M}_0$, d'où $A_F \in \mathfrak{M}_0$. Si F' est un foncteur de J^* vers C^* tel que l'on ait $F'(J) \subset M_\xi$ et que $\nu(F') = (e'^*, t', F')$ soit défini, notons $A_{F'}$ l'ensemble formé des éléments $t'(i)$, où $i \in J_0^*$, et des éléments $\lim_{\rightarrow}^{\nu(F')} \psi'$ pour toute transformation naturelle

$$\psi' = (e'^*, t'_I, F') \text{ vérifiant } t'_I(J_0^*) \subset M_\xi;$$

on trouve encore $A_{F'} \in \mathfrak{M}_0$. Soit M'_ξ l'ensemble réunion des ensembles

$$A_F, \text{ où } F \in \alpha(\mu), \text{ et } A_{F'}, \text{ où } F' \in \alpha(\nu).$$

Nous noterons M'_λ la sous-catégorie de C^* engendrée par M'_ξ . La bijection $F \mapsto (F(i))_{i \in I}$ appliquant $\alpha(\mu)$ sur une partie de $\bigcup_{I \in \mathfrak{J}} (M_\xi)^I \in \mathfrak{M}_0$, on a $\overline{\alpha(\mu)} < \Lambda$. Il en résulte que l'ensemble réunion M'_ξ appartient à $\mathfrak{M}_0$, car, de même, $\overline{\alpha(\nu)} < \Lambda$. A fortiori, $M'_\lambda \in \mathfrak{M}_0$.

• Dans les deux cas nous avons ainsi construit une suite transfinie $(M'_\xi)_{\xi \leq \lambda}$ vérifiant (σ) . Par récurrence transfinie, on obtient de cette façon une suite transfinie croissante $(M'_\xi)_{\xi \leq \hat{\lambda}}$ de sous-catégories de C^* telle que l'on ait $M'_\lambda \in \mathfrak{M}_0$. Posons $A = M'_\lambda$; par définition de A , on voit que A est contenu dans tout élément de $\mathfrak{B}$. Montrons que A est saturé pour μ et pour ν , d'où il résultera que A est l'intersection G de $\mathfrak{B}$. En effet, supposons $\mu(F) = (F, t, e^*)$ défini pour un foncteur F de I^* vers C^* tel que $F(I)$ soit contenu dans A . Pour tout $i \in I$, il existe un

$$\xi_i < \hat{\lambda} \text{ tel que } F(i) \in M_{\xi_i};$$

étant donné que $I \in \mathbb{M}_0$ entraîne $\bar{I} < \hat{\lambda}$ et que $\hat{\lambda}$ est un ordinal régulier, on a $\xi = \sup_{i \in I} \xi_i < \hat{\lambda}$. Par suite $F(I) \subset M_\xi$ et, par construction de $M_{\xi+1}$, on obtient

$$t(I_0) \subset M'_\xi \subset M_{\xi+1} \subset A.$$

De plus, si ψ est une transformation naturelle

$$(F, t', e'^*) \text{ telle que } t'(I_0) \subset A,$$

il existe pour la même raison un ordinal ξ' vérifiant $\xi < \xi' < \hat{\lambda}$ tel que

$$t'(I_0) \subset M_{\xi'}, \text{ d'où } \lim_{\rightarrow} \mu^{(F)} \psi \in M_{\xi'} \subset A$$

Ceci prouve que A est saturé pour μ . Un raisonnement analogue montre que A est saturé pour ν . Donc $A \in \mathcal{B}$, de sorte que $G = A$, c'est-à-dire que G appartient à $\mathbb{M}_0$. Ainsi $P'^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ est $(\mathbb{M}, X', \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ -engendrant.

- Si l'on suppose dans ce qui précède que u appartient à $\hat{\mathcal{F}}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$, le corollaire de la Proposition 7 entraîne que G définit également une $(X, \mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, p^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ sous-structure (G', μ', ν') de u engendrée par M . Par suite, $p^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ est $(\mathbb{M}, X, \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ -engendrant, ce qui achève la démonstration. ∇

PROPOSITION 9. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à $\mathbb{M}_0$, la catégorie $\mathcal{S}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ est à $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -projections et à $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -projections; la catégorie $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ est à $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -projections.

1

Δ . Nous nous ramènerons au théorème général d'existence de structures libres. Pour cela, montrons d'abord que $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ est équipotent à un élément de $\mathbb{M}_0$. En effet, soit $u = (C, \mu, \nu)$ un élément de $\mathcal{S}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$. Notons U_μ l'ensemble des couples

$$(F, (t(i))_{i \in \alpha(F)_0}) \in \mathcal{N}' \times \bigcup_{I \in \mathcal{A}} C^{I_0} = U_C$$

tels que $\mu(F) = (F, t, e^*)$ soit défini, et U_ν l'ensemble des couples

$$(F', (t'(i))_{i \in \alpha(F')_0}) \in \mathcal{N}' \times \bigcup_{I \in \mathcal{B}} C^{I_0} = U'_C$$

tels que $(e'^*, t', F') = \nu(F')$ soit défini. La surjection

$$\gamma: u \mapsto (C', U_\mu, U_\nu)$$

est une bijection de $\mathcal{S}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ sur une partie de $U = \mathcal{N}_0' \times \bigcup_{C \in \mathcal{M}_0} (U_C \times U_C')$.

Comme $\hat{\mathcal{M}}_0$ est un univers, les relations

$$\mathcal{N}' \in \hat{\mathcal{M}}_0, \quad I' \in \mathcal{M}_0 \text{ si } I' \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \in \hat{\mathcal{M}}_0, \quad \mathcal{M} \in \hat{\mathcal{M}}_0$$

entraînent

$$U_C \in \hat{\mathcal{M}}_0, \quad U_C' \in \hat{\mathcal{M}}_0 \text{ et } U \in \hat{\mathcal{M}}_0.$$

Par suite l'ensemble $\mathcal{S}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ est équipotent à un élément de $\hat{\mathcal{M}}_0$. Le foncteur $p^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ étant fidèle, $\mathcal{S}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ (et a fortiori $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ et $\mathcal{F}'^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$) est équipotent à un élément de $\hat{\mathcal{M}}_0$.

- Posons

$$p = (\mathcal{S}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \iota, \mathcal{F}'^{\mathcal{A}\mathcal{B}}) \text{ et } P = (\mathcal{S}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \iota, \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}).$$

D'après la Proposition 5, P est à $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits, de sorte que P est aussi à $\mathcal{P}(\mathcal{S}^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ -produits. Par ailleurs p est à noyaux en vertu de la Proposition 6; la démonstration de cette proposition signifie que tout noyau n appartient à X' et, X' définissant une sous-catégorie de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$, il s'ensuit

$$X'.n \subset X'.X' \subset X'.$$

Enfin la Proposition 8 affirme que $P^{\mathcal{A}\mathcal{B}} = P^{\mathcal{A}\mathcal{B}}.P$ est un foncteur qui est $(\mathcal{M}, X', \mathcal{F}_0^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ -engendrant, et la Proposition 7 que $P(X') \subset X'$ est formé de $P^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -monomorphismes. Des cas particuliers (n° 1) de la Proposition 1, il résulte que p admet un adjoint, i.e. que $\mathcal{S}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ est à $\mathcal{F}'^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ -projections.

- On démontre les deux autres assertions d'une façon analogue, en prenant pour p le foncteur injection canonique respectivement de $\mathcal{F}'^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ vers $\mathcal{S}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ et de $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ vers $\mathcal{F}'^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$. ∇

Soit $(\hat{u}, \phi, u)$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \mathcal{S}^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ -projecteur, où $u = (C', \mu, \nu)$. En général, ϕ n'est pas injectif. Mais, si u appartient à $\mathcal{F}'^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$, on montre que

1 ϕ est injectif, de sorte qu'il existe également un $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{A}\mathcal{B}})$ -projecteur

$$(u', \eta, u), \text{ où } u' = (C'', \mu', \nu'),$$

tel que C' soit une sous-catégorie de C'' et que η soit le foncteur injection canonique de C' vers C'' . Dans ce cas, on appelle u' une $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -

complétion de u . Supposons de plus que μ et ν soient les surjections 1
vides; u' est aussi appelé $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion libre de C^* . Cette définition
est justifiée car, si q désigne le foncteur projection canonique de $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$
vers $\mathcal{F}$, on voit facilement que u' est une q -structure libre associée à C^* . 2

REFERENCES.

1. Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* IX, 1 et 2 (1967), 33-186.
2. Esquisses et types de structures algébriques, *Bul. Inst. Polit. Iași* XIV (XVIII) 1-2 (1968), 1-14.
3. *Catégories et Structures*, Dunod, Paris, 1965.
4. *Algèbre C3*, Centre de Documentation Universitaire - S. E. D. E. S., Paris, 1968.
5. Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), 293-363.

SUR LE PLONGEMENT D'UN PROTOTYPE DANS UN TYPE

par Andrée et Charles EHRESMANN

Nous désignons par $\mathcal{U}$ un univers, par $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ des ensembles de catégories I dont l'ensemble $\underline{I}$ des morphismes appartient à $\mathcal{U}$, par $\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}$ et $\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{I}}$ les catégories des morphismes entre $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -types et entre $(\mathcal{J}, \mathcal{I})$ -prototypes associées à $\mathcal{U}$. Enfin on suppose que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont équipotents à des éléments de $\mathcal{U}$. Le but va être de prouver que tout $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{I}})$ -projecteur est injectif. Au passage on montrera le «théorème du faisceau associé» (Corollaire, Théorème 3) pour les structures définies par un prototype projectif. 1

1. AUTRE FORMULATION DU PROBLÈME.

DEFINITION. Si (C, μ, ν) est un $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -prototype et H une catégorie, on appelle *réalisation vague de (C, μ, ν) dans H* un foncteur F de C vers H tel que $F\mu(\phi)$ (resp. $F\nu(\phi)$) soit une limite projective naturalisée (resp. inductive naturalisée) dès que ϕ est un foncteur vers C tel que $\mu(\phi)$ (resp. que $\nu(\phi)$) soit défini. 2

PROPOSITION 1. Soit (C, μ, ν) un $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -prototype, où C appartient à $\mathcal{U}$. Soit $V = ((\bar{C}, \bar{\mu}, \bar{\nu}), v, (C, \mu, \nu))$ un $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{I}})$ -projecteur. Alors v est injectif ssi il existe un foncteur F de C vers une catégorie H vérifiant les conditions suivantes :

- 1° F est un foncteur injectif;
- 2° H est une catégorie à $\mathcal{I}$ -limites projectives et $\mathcal{J}$ -limites inductives;
- 3° F est une réalisation vague de (C, μ, ν) dans H .

Δ . Si V est injectif (i.e. est défini par une injection), v vérifie les conditions 1, 2 et 3. Inversement, soit F un foncteur de C vers H vérifiant les conditions de l'énoncé (on ne suppose rien sur la «grandeur» de

la catégorie H).

1° Construisons un $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -type (H, μ', ν') de la façon suivante: Soit ϕ' un foncteur de J vers H .

a) Soit $J \in \mathcal{J}$; si $\phi'(J)$ est contenu dans $F(\underline{C})$, il existe un et un seul foncteur ϕ de J vers C tel que $F \cdot \phi = \phi'$, car F est injectif et $F(\underline{C})$ définit une sous-catégorie de H . Lorsque $\mu(\phi)$ est défini, on pose: $\mu'(\phi') = F\mu(\phi)$. Dans tous les autres cas, on choisit une limite projective naturalisée de ϕ' (il en existe, vu la condition 2), qu'on appelle $\mu'(\phi')$. Ceci définit l'application μ' .

b) Soit $J \in \mathcal{J}$. D'une manière analogue, on note $\nu'(\phi')$ une limite inductive naturalisée, choisie arbitrairement, de ϕ' , sauf dans le cas où $\phi'(J)$ est contenu dans $F(\underline{C})$ et où il existe un foncteur ϕ de J vers C tel que $\nu(\phi)$ soit défini et que $F \cdot \phi = \phi'$; dans ce cas, on pose $\nu'(\phi') = F\nu(\phi)$.

c) On obtient ainsi un $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -type (H, μ', ν') et, par construction,

$$\bar{F} = ((H, \mu', \nu'), F, (C, \mu, \nu))$$

est un morphisme entre $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -prototypes.

2° Soit $\hat{\mathcal{U}}$ un univers auquel appartiennent $\mathcal{U}$ et H , et soit $\hat{p}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ le foncteur d'oubli canonique de la catégorie $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ des $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -types associée à $\hat{\mathcal{U}}$ vers la catégorie $\hat{\mathcal{M}}$ des applications associées à $\hat{\mathcal{U}}$. Alors (H, μ', ν') est un objet de $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ et $F(\underline{C})$ est équipotent à un élément de $\mathcal{U}$ (car on a $\underline{C} \in \mathcal{U}$). Sous ces conditions, on sait qu'il existe un $(\hat{X}, \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}}, \hat{p}^{\mathcal{J}\mathcal{J}})$ -sous-morphisme

$$\bar{G} = ((H, \mu', \nu'), G, (\bar{H}, \bar{\mu}', \bar{\nu}'))$$

de (H, μ', ν') engendré par $F(\underline{C})$ (on note $\hat{X}$ l'ensemble des $\hat{p}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$ -mono-morphismes); il existe aussi un et un seul

$$\bar{F}' = ((\bar{H}, \bar{\mu}', \bar{\nu}'), F', (C, \mu, \nu)) \in \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}$$

tel que $G \cdot F' = F$. Comme F et G sont injectifs, F' l'est aussi. De plus V étant in $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}}, \mathcal{F}^{\mathcal{J}\mathcal{J}})$ -projecteur, il existe un et un seul

$$\bar{F}'' \in \hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}\mathcal{J}} \cdot \mathcal{F}_0^{\mathcal{J}\mathcal{J}} \text{ tel que } \bar{F}'' \cdot V = \bar{F}'.$$

Puisque F' est injectif, v l'est également, car $F'' \cdot v = F'$. ∇

2. SOLUTION DANS LE CAS PROJECTIF.

Soit C une catégorie telle que $\underline{C}$ appartienne à $\mathcal{U}$. Nous noterons N la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de la duale C^* de C vers la catégorie $\mathbb{M}$ des applications associée à $\mathcal{U}$; nous identifions les unités de N aux foncteurs de C^* vers $\mathbb{M}$.

Nous désignons par Y le plongement de Yoneda de C vers N . Si e est une unité de C , le foncteur $Y(e)$ est identique à $\text{Hom}_C(e, -)$; si $f \in e' \cdot C \cdot e$, on a $Y(f) = (Y(e'), t_f, Y(e))$, où

$$t_f(e'') = \text{Hom}_C(f, e'') \quad \text{pour tout } e'' \in C_0.$$

On sait que Y est un foncteur injectif de C vers N et que $Y(\underline{C})$ définit une sous-catégorie pleine de N .

PROPOSITION 2. *N est une catégorie à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives et à $\mathcal{F}_0$ -limites inductives. Une transformation naturelle T dans C est une limite projective naturalisée ssi $\text{Hom}_C(-, e)T$ en est une pour tout $e \in C_0$. Le foncteur Y est compatible avec les limites projectives.*

Δ . Comme $\mathbb{M}$ est une catégorie à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives et inductives (i.e. à J -limites projectives et inductives, pour toute catégorie J vérifiant $J \in \mathcal{U}$) il en est de même pour la catégorie N des transformations naturelles vers $\mathbb{M}$. Pour toute unité e' de C , notons $p_{e'}$, le «foncteur d'omission» de N vers $\mathbb{M}$ associant $t(e')$ à $T = (F', t, F) \in N$. On a

$$p_{e'} \circ Y = \text{Hom}_C(-, e').$$

La construction «terme à terme» des limites projectives dans N montre que Y est compatible avec les J -limites projectives ssi $\text{Hom}_C(-, e')$ l'est pour tout e' . Or soit $T = (\phi, t, e^*)$ une transformation naturelle issue du foncteur constant e^* dans C . La limite projective canonique de $\text{Hom}(-, e') \cdot \phi$ est l'ensemble B des familles $x = (x_i)_{i \in J_0}$, où J est la source de ϕ , telles que

$$\begin{aligned} x_i &\in \text{Hom}(\phi(i), e') \quad \text{pour tout } i \in J_0, \\ \phi(k) \cdot x_i &= \text{Hom}(\phi(k), e')(x_i) = x_i, \quad \text{si } k \in i' \cdot J \cdot i. \end{aligned}$$

Ces conditions signifient que (ϕ, t_x, e^*) , où

$$t_x(i) = x_i \text{ pour tout } i \in J_0,$$

est un cône projectif T_x . Il s'ensuit que $\text{Hom}(-, e)T$ est une limite projective naturalisée ssi il existe une bijection g de B sur $\text{Hom}(e, e')$ associant à x (donc à T_x) un morphisme $g(x)$ tel que $T_x = Tg(x)$, c'est-à-dire ssi T est une limite projective naturalisée dans C . ∇

COROLLAIRE. Si $\mathcal{J}$ est vide, tout $(\mathcal{F}^{\mathcal{J}}, \mathcal{F}'^{\mathcal{J}})$ -projecteur est injectif.

Δ . Dans ce cas, Y vérifie les conditions de la Proposition 1. ∇

3. RESTRICTIONS DE Y COMPATIBLES AVEC LES LIMITES INDUCTIVES

CONVENTION. Si $T = (e^\wedge, t, \phi)$ est une limite inductive naturalisée d'un foncteur ϕ d'une catégorie J vers C et si F est un foncteur de la duale C^* vers une catégorie K , nous noterons FT le cône projectif

$$(F \cdot \phi^*, \underline{F}t, F(e)^\wedge), \text{ où } \phi^* = \text{dual de } \phi.$$

PROPOSITION 3. Soit p un foncteur de C vers H et $T = (e^\wedge, t, \phi)$ une limite inductive naturalisée d'un foncteur ϕ de J vers C . Alors pT est une limite inductive naturalisée ssi $(\text{Hom}(s, -) \cdot p^*)T$ est une limite projective naturalisée pour toute unité s de H .

Δ . Ceci résulte de la Proposition 2 appliquée à la duale de H et au cône projectif «dual» de pT . ∇

PROPOSITION 4 (Lemme de Yoneda). Soit F un foncteur de la duale C^* de C vers $\mathfrak{M}$. Alors F est équivalent au foncteur $\text{Hom}_N(F, -) \cdot Y^*$, où Y est le plongement de Yoneda de C vers N .

Δ . L'équivalence g de $\text{Hom}_N(F, -) \cdot Y^*$ vers F associe à l'unité e de C la bijection

$$g(e): \text{Hom}_N(F, Y(e)) \rightarrow F(e): (F, t, Y(e)) \mapsto t(e)(e). \quad \nabla$$

PROPOSITION 5. Soit (C, μ, ν) un $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -prototype tel que $\underline{C}$ appartienne à $\mathcal{U}$ et soit L une sous-catégorie pleine de N vérifiant les conditions:

- 1° L contient $Y(\underline{C})$ et est stable par $\mathcal{J}$ -limites projectives dans N ;
- 2° Si F est un objet de L et si $\nu(\phi)$ est défini, alors $F\nu(\phi)$ est

une limite projective naturalisée dans $\mathfrak{M}$.

Alors la restriction $Y': C \rightarrow L$ de Y est une réalisation vague de (C, μ, ν) .

Δ . Y' est compatible avec les $\mathfrak{J}$ -limites projectives, puisque Y l'est (Proposition 2) et que L est stable par $\mathfrak{J}$ -limites projectives dans N (ce qui signifie que le foncteur injection canonique de L vers N est à $\mathfrak{J}$ -limites projectives). Pour tout objet F de L , on a

$$\text{Hom}_L(F, -) \cdot Y'^* = \text{Hom}_N(F, -) \cdot Y^*,$$

car L est une sous-catégorie pleine de N ; d'après le Lemme de Yoneda ce dernier foncteur est équivalent à F . On en déduit à l'aide de la condition 2 que, si $\nu(\phi)$ est défini, alors $(\text{Hom}_L(F, -) \cdot Y'^*)_{\nu(\phi)}$ est une limite projective naturalisée. Il en résulte, en utilisant la Proposition 3, que $Y'_{\nu(\phi)}$ est une limite inductive naturalisée. ∇

La Proposition 5 ramène le problème initial à la recherche des sous-catégories pleines de N vérifiant les conditions 1 et 2 et à $\mathfrak{J}$ -limites inductives.

4. ÉTUDE D'UNE SOUS-CATÉGORIE DE N .

Nous désignons par (C, μ, ν) un $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$ -prototype tel que $\underline{C}$ appartienne à $\mathfrak{U}$, par N la catégorie des transformations naturelles de C^* vers $\mathfrak{M}$, par Y le plongement de Yoneda de C vers N .

DEFINITION. Soit F un foncteur de C^* vers une catégorie d'applications $\hat{\mathfrak{M}}$. On appelle *sous-foncteur strict* de F un foncteur F' de C^* vers $\hat{\mathfrak{M}}$ tel que $F'(f)$ soit une restriction de $F(f)$ pour tout $f \in C$. Un foncteur F'' équivalent à un sous-foncteur strict de F est appelé *sous-foncteur* de F .

On voit que F'' est un sous-foncteur de F ssi il existe une transformation naturelle (F, t, F'') telle que $t(e)$ soit une injection pour toute unité e de C .

Nous désignerons par L la sous-catégorie pleine de N ayant pour objets les foncteurs F de C^* vers $\mathfrak{M}$ vérifiant les conditions:

(1) $F_{\nu(\phi)}$ est une limite projective naturalisée lorsque $\nu(\phi)$ est défini.

(2) Il existe une famille $(e_i)_{i \in K}$ d'unités de C telle que F soit un sous-foncteur du foncteur $\prod_{i \in K} Y(e_i)$ (produit dans N).

- 1 PROPOSITION 6. L est une sous-catégorie de N stable par $\mathcal{F}_0$ -limites projectives dans N et contenant $Y(\underline{C})$; la restriction Y' de Y à (L, C) est une réalisation vague de (C, μ, ν) dans L .

Δ . L est une sous-catégorie pleine de N contenant $Y(\underline{C})$. Tout foncteur équivalent à un objet F de L vérifie les conditions (1) et (2), de sorte que L est une sous-catégorie saturée de N (i.e. tout objet isomorphe à un objet de L dans N appartient à L).

1° Montrons que L est stable par $\mathcal{U}$ -produits. Soit $(F_j)_{j \in J}$ une famille d'objets de L telle que J appartienne à $\mathcal{U}$; pour tout $j \in J$ il existe une famille $(e_i^j)_{i \in K_j}$ d'unités de C telle que le foncteur F_j soit un sous-foncteur de $\prod_{i \in K_j} Y(e_i^j)$. Soit $F = \prod_{j \in J} F_j$; on vérifie que F est un sous-foncteur du foncteur

$$\prod_{(i,j) \in K} Y(e_i^j), \text{ où } K = \prod_{j \in J} K_j.$$

De la commutation des produits avec les limites projectives, il résulte que F , produit de foncteurs transformant $\nu(\phi)$ en une limite projective naturalisée, a la même propriété. Par suite F est un objet de L et c'est le produit de $(F_j)_{j \in J}$ dans L . Ainsi L est stable par $\mathcal{U}$ -produits dans N .

2° Soit w un foncteur de J vers L tel que $J \in \mathcal{U}$. Comme L est stable par $\mathcal{U}$ -produits dans N , le foncteur $F = \prod_{i \in J_0} w(i)$ appartient à L . Par construction une limite projective F' de w est un sous-foncteur de F . Du Théorème de commutation des limites projectives entre elles, il résulte que $F' \nu(\phi)$ est une limite projective naturalisée lorsque $\nu(\phi)$ est défini puisque $w(i) \nu(\phi)$ en est une pour tout $i \in J_0$. Donc F' appartient à L , et c'est la limite projective de F dans L .

3° Nous avons prouvé que L vérifie les conditions de la Proposition 5; il s'ensuit que Y' est une réalisation vague de (C, μ, ν) dans L . ∇

COROLLAIRE. Si N est une catégorie à L -projections, Y' est une réalisation vague de (C, μ, ν) dans une catégorie à $\mathcal{F}_0$ -limites projectives et inductives, et par suite tout $(\mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{F}^{\mathcal{A}})$ -projecteur est injectif (Prop. 1).

Δ . Soit q un foncteur adjoint au foncteur injection canonique de L dans N ayant pour restriction le foncteur identique de L . Comme q est compatible avec les limites inductives, si w est un foncteur de $J \in \mathcal{F}_0$ vers L , il existe une limite inductive naturalisée T du foncteur $(N, \underline{w}, J)$ et le cône qT est une limite inductive naturalisée de $(L, \underline{qw}, J)$, lequel est identique à w , par choix de q . Donc N est à $\mathcal{F}_0$ -limites inductives. ∇

Pour résoudre le problème initial, nous n'avons plus qu'à montrer que N est une catégorie à L -projections.

5. THÉORÈME DU FAISCEAU ASSOCIÉ.

Nous reprenons les notations du n° 4 et nous allons montrer, à l'aide du Théorème d'existence de structures libres, que N est une catégorie à L -projections. Nous désignerons par $\hat{\mathcal{U}}$ un univers tel que

$$\mathcal{U} \in \hat{\mathcal{U}} \text{ et } \mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{U}},$$

par $\hat{N}$ la catégorie des transformations naturelles de C^* vers la catégorie $\hat{\mathcal{M}}$ des applications associée à $\hat{\mathcal{U}}$. Nous identifions N à la sous-catégorie pleine de $\hat{N}$ ayant pour objets les foncteurs F de C^* vers $\hat{\mathcal{M}}$ tels que $F(e) \in \mathcal{U}$ pour toute unité e de C .

PROPOSITION 7. N appartient à $\hat{\mathcal{U}}$.

Δ . Soit F et F' des objets de N . En associant à la transformation naturelle (F', t, F) la famille $(t(e))_{e \in C_0}$ on définit une bijection de $F' \boxtimes N \boxtimes F$ sur une partie de $\mathcal{M}^{C_0}$. Puisque $C_0 \subset \underline{C}$ appartient à $\mathcal{U}$ et que $\mathcal{M} \in \hat{\mathcal{U}}$, le produit $\mathcal{M}^{C_0}$ appartient à l'univers $\mathcal{U}$, de même que $F' \boxtimes N \boxtimes F$. Par ailleurs, on sait que $\mathcal{F}_0$ appartient à $\hat{\mathcal{U}}$, ce qui entraîne

$$\mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_0 \in \hat{\mathcal{U}} \text{ et } N = \bigcup_{(F', F) \in \mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_0} F' \boxtimes N \boxtimes F \in \hat{\mathcal{U}}. \quad \nabla$$

On définit un foncteur P de $\hat{N}$ vers $\hat{\mathcal{M}}$ en associant à (F', t, F) l'application produit $\prod_{e \in C_0} t(e)$ du produit cartésien $\prod_{e \in C_0} F(e)$ dans $\prod_{e \in C_0} F'(e)$. La restriction de P à N prend ses valeurs dans $\mathcal{M}$.

Soit $\hat{L}$ la sous-catégorie pleine de $\hat{N}$ définie de manière analogue à L , mais à partir de l'univers $\hat{\mathcal{U}}$. Soit P' le foncteur de $\hat{L}$ vers $\hat{\mathcal{M}}$ res-

triction de P . On note X l'ensemble des P' -monomorphismes, qui sont simplement les transformations naturelles $(F', t, F) \in \hat{L}$ telles que $t(e)$ soit une injection pour tout $e \in C_0$. Soit $\tilde{\mathcal{U}}$ l'ensemble des éléments de $\hat{\mathcal{U}}$ équipotents à un élément de $\mathcal{U}$ et $\tilde{L}$ la sous-catégorie pleine de $\hat{L}$ ayant pour objets les foncteurs $F \in \hat{L}_0$ tels que $F(e) \in \tilde{\mathcal{U}}$ pour toute unité e de C .

PROPOSITION 8. Si $\mathcal{J} \in \tilde{\mathcal{U}}$, le foncteur P' est $(\mathcal{M}, X, L_0)$ -engendrant.

Δ . Soit $\hat{F}$ un objet de $\hat{L}$ et A une partie de $P'(\hat{F})$. Comme $P'(F) = \prod_{e \in C_0} F(e)$ pour tout objet F de $\hat{L}$, il existe une (X, L_0, P') -sous-structure de $\hat{F}$ engendrée par A ssi il en existe une engendrée par $\prod_{e \in C_0} A(e)$, en notant $A(e)$ l'image de A par la projection canonique du produit $\tilde{F}(e)$ sur $\hat{F}(e)$ pour tout $e \in C_0$. Par ailleurs, si $F \in \hat{L}$ est un sous-foncteur strict de $\hat{F}$ et si $P'(F) \in \tilde{\mathcal{U}}$, on peut choisir pour toute unité e une bijection $g(e)$ de $F(e)$ sur un élément $F'(e)$ de $\mathcal{U}$, et il existe un sous-foncteur F' de $\hat{F}$ tel que (F', g, F) soit une équivalence (à savoir :

$$F'(f) = g(e'). F(f). g(e)^{-1} \quad \text{si } f \in e. C. e').$$

Ceci prouve qu'il suffit de démontrer le résultat suivant :

Soit $\hat{F}$ un objet de $\hat{L}$ et $(E(e))_{e \in C_0}$ une famille telle que

$$E(e) \subset \hat{F}(e) \quad \text{et} \quad E(e) \in \tilde{\mathcal{U}} \quad \text{pour tout } e \in C_0.$$

Alors il existe un sous-foncteur strict F de $\hat{F}$ vérifiant les conditions suivantes :

- (1) F est un objet de $\hat{L}$ et $E(e) \subset F(e) \in \tilde{\mathcal{U}}$ pour tout $e \in C_0$,
- (2) si F' est un sous-foncteur strict de F objet de $\hat{L}$ et si l'on a $E(e) \subset F'(e) \in \tilde{\mathcal{U}}$ pour tout $e \in C_0$, alors $F(e) \subset F'(e)$ (ce qui entraîne que F est un sous-foncteur strict de F').

Pour cela, nous allons construire F par récurrence transfinie :

1° Soit S l'ensemble des suites $s = (E'(e))_{e \in C_0}$ telles que

$$E(e) \subset E'(e) \subset \hat{F}(e) \quad \text{et} \quad E'(e) \in \tilde{\mathcal{U}} \quad \text{pour tout } e \in C_0.$$

Nous allons définir une application u de S dans S . Pour cela, supposons $s = (E'(e))_{e \in C_0} \in S$ et $e \in C_0$. Posons

PLONGEMENT D'UN PROTOTYPE DANS UN TYPE 9

$$s(e) = \bigcup_{f \in C.e} \hat{F}(f)(E'(\beta(f))) \subset \hat{F}(e)$$

(rappelons que $\hat{F}$ est un foncteur de la duale de C vers $\mathfrak{M}$). Soit $a(\nu)_e$ l'ensemble des foncteurs ϕ de $J \in \mathfrak{J}$ vers C tels que $\nu(\phi)$ soit défini et ait e pour sommet, i.e. tels que $\nu(\phi) = (e^\wedge, t, \phi)$. Pour tout $\phi \in a(\nu)_e$, soit

$$s(\phi) = \{x \in \hat{F}(e) \mid \hat{F}(t(i))(x) \in E'(\phi(i)) \text{ pour tout } i \in J_\theta\}.$$

Ecrivons

$$E''(e) = s(e) \cup \bigcup_{\phi \in a(\nu)_e} s(\phi) \quad \text{et} \quad u(s) = (E''(e))_{e \in C_\theta}.$$

Montrons que $u(s)$ appartient à S .

a) Par construction, $E''(e)$ est une partie de $\hat{F}(e)$ contenant $E'(e)$, et a fortiori $E(e)$, car

$$\hat{F}(e)(E'(e)) = E'(e) \subset s(e).$$

Pour tout $f \in e', C.e$, l'image $\hat{F}(f)(E'(e'))$ par $\hat{F}(f)$ de $E'(e') \in \tilde{\mathfrak{U}}$ appartient à l'univers $\tilde{\mathfrak{U}}$; il s'ensuit que $s(e)$, réunion d'éléments de $\tilde{\mathfrak{U}}$ indexée par $C.e \subset C \in \underline{C} \in \tilde{\mathfrak{U}}$, appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$.

b) Soit $\phi \in a(\nu)_e$; l'application

$$x \mapsto (x_i)_{i \in J_\theta} \quad \text{où } x \in s(\phi) \text{ et } x_i = \hat{F}(t(i))(x) \in E'(\phi(i))$$

(en posant $\nu(\phi) = (e^\wedge, t, \phi)$), est une bijection de $s(\phi)$ sur une partie du produit $\prod_{i \in J_\theta} E'(\phi(i))$; comme

$$E'(\phi(i)) \in \tilde{\mathfrak{U}} \quad \text{pour tout } i \in J_\theta \in \tilde{\mathfrak{U}},$$

le produit appartient à l'univers $\tilde{\mathfrak{U}}$ et, a fortiori, $s(\phi) \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Par ailleurs $a(\nu)_e$ est une partie de

$$C.\mathfrak{F}.\mathfrak{J} = \bigcup_{J \in \mathfrak{J}} C.\mathfrak{F}.J;$$

or $C.\mathfrak{F}.J$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$ pour tout $J \in \mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J} \in \tilde{\mathfrak{U}}$, ce qui donne $C.\mathfrak{F}.\mathfrak{J}$ dans $\tilde{\mathfrak{U}}$. Il en résulte

$$\phi \in a(\nu)_e \implies s(\phi) \in \tilde{\mathfrak{U}}, \text{ d'où } E''(e) \in \tilde{\mathfrak{U}} \text{ et } u(s) \in S.$$

2° Soit $\hat{\lambda}$ l'ordinal borne supérieure $\hat{\lambda} = \sup_{J \in \mathfrak{J}} \bar{J}$, où $\bar{J}$ désigne l'ordi-

nal initial (ou cardinal) de $\underline{J}$. Soit Λ' l'ordinal $\omega_{\hat{\lambda}+I}$ d'indice $\hat{\lambda}+I$; c'est un ordinal initial régulier. Comme J et $\mathfrak{J}$ appartiennent à $\tilde{\mathfrak{U}}$, l'ordinal $\hat{\lambda}$ est strictement inférieur à l'ordinal Λ associé à l'univers $\mathfrak{U}$ (et aussi à $\tilde{\mathfrak{U}}$). L'ordinal Λ étant inaccessible, on trouve $\Lambda' < \Lambda$. Par récurrence transfinie, on construit une suite transfinie $(s_\lambda)_{\lambda \leq \Lambda'}$, telle que

- (a) $s_0 = (E(e))_{e \in C_0}$, $s_\lambda = (E_\lambda(e))_{e \in C_0}$ pour tout $\lambda \leq \Lambda'$,
- (b) $s_\lambda = u(s_\xi)$ si $\lambda = \xi + I$,
- (c) $E_\lambda(e) = \bigcup_{\xi < \lambda} E_\xi(e)$ si λ est un ordinal limite et $e \in C_0$.

Posons $F(e) = E_{\Lambda'}(e)$ pour toute unité e de C .

3° Définissons un sous-foncteur strict de $\hat{F}$. Soit $f \in e'.C.e$. Pour tout $y \in F(e')$, il existe un ordinal $\xi < \Lambda'$ tel que $y \in E_\xi(e')$; il s'ensuit

$$\hat{F}(f)(y) \in \hat{F}(f)(E_\xi(e')) \subset E_{\xi+I}(e) \subset F(e).$$

Ainsi il existe une application $F(f)$ de $F(e')$ dans $F(e)$ restriction de $\hat{F}(f)$; on en déduit que l'application $f \mapsto F(f)$ de C dans $\hat{\mathfrak{M}}$ définit un sous-foncteur strict F de $\hat{F}$ tel que $F(e) = E_{\Lambda'}(e)$ pour tout $e \in C_0$.

4° Soit $\phi \in a(\nu)_e$ et $\nu(\phi) = (e^*, t, \phi)$. Montrons que $F\nu(\phi)$ est une limite projective naturalisée. Par hypothèse, $\hat{F}$ appartenant à $\hat{L}$, la transformation naturelle $\hat{F}\nu(\phi) = (\hat{F}. \phi, \hat{F}t, \hat{F}(e)^*)$ est une limite projective naturalisée. $\hat{F}. \phi$ étant un foncteur vers $\hat{\mathfrak{M}}$ et $F. \phi$ un sous-foncteur de celui-ci, on montre facilement que $F. \phi$ admet pour limite projective naturalisée $(F. \phi, t', B^*)$, où B est l'ensemble des $x \in \hat{F}(e)$ tels que: $\hat{F}(t(i))(x) \in F(\phi(i))$, et où $t'(i)$ est l'application de B dans $F(\phi(i))$ restriction de $\hat{F}(t(i))$, pour tout $i \in J_0$. Montrons que $B = F(e)$ ce qui prouvera que $F\nu(\phi)$ est une limite projective naturalisée de $F. \phi$ et, a fortiori, que $\hat{F}$ est un objet de $\hat{L}$.

a) Si $x \in F(e)$, pour tout $i \in J_0$ on a

$$\hat{F}(t(i))(x) = F(t(i))(x) \in F(\phi(i)),$$

d'où $F(e) \subset B$.

b) Soit $x \in B$ et $x_i = \hat{F}(t(i))(x)$ pour tout $i \in J_0$. Comme

$$x_i \in F(\phi(i)) = \bigcup_{\xi < \Lambda'} E_\xi(\phi(i)),$$

Il existe un ordinal $\xi_i < \Lambda'$ tel que

$$x_i \in E_{\xi_i}(\phi(i)) \text{ pour tout } i \in J_0.$$

L'ordinal $\lambda = \sup_{i \in J_0} \xi_i$ vérifie $\lambda < \Lambda'$, car Λ' est régulier,

$$\xi_i < \Lambda' \text{ et } \bar{J}_0 \leq \bar{J} \leq \hat{\lambda} < \Lambda'.$$

Par suite $x_i \in E_{\lambda}(\phi(i))$ pour toute unité i de J , ce qui entraîne

$$x \in s_{\xi}(\phi) \subset E_{\xi+1}(e) \subset F(e).$$

Au total $B = F(e)$. Comme $\hat{F}$ est un sous-foncteur d'un foncteur de la forme $\prod_{i \in K} Y(e_i)$, où les e_i sont des unités de C , le foncteur F l'est aussi. Donc $\hat{F}$ est un objet de $\hat{L}$ et F est une P' -sous-structure de $\hat{F}$. De plus,

$$E(e) \subset F(e) \text{ pour tout } e \in C_0.$$

Soit F' un sous-foncteur de $\hat{F}$ tel que $E(e) \subset F'(e)$ pour toute unité e de C . Montrons que $F'(e)$ contient $F(e)$, ce qui prouvera que F est un sous-foncteur de F' . Or $E_0(e) = E(e) \subset F'(e)$. Soit λ un ordinal tel que $\xi \leq \lambda$ et supposons que $E_{\xi}(e)$ soit contenu dans $F'(e)$ pour tout $\xi < \lambda$ et toute unité e de C .

a) Si λ est un ordinal limite, on obtient

$$E_{\lambda}(e) = \bigcup_{\xi < \lambda} E_{\xi}(e) \subset F'(e).$$

b) Soit $\lambda = \xi + 1$ et $E_{\xi}(e) \subset F'(e)$. Si $f \in e' \cdot C \cdot e$, on a

$$\hat{F}(f)(E_{\xi}(e')) \subset \hat{F}(f)(F'(e')) = F'(f)(F'(e')) \subset F'(e),$$

F' étant un foncteur, ce qui entraîne $s_{\xi}(e) \subset F'(e)$. Soit $\phi \in a(\nu)_e$ et $\nu(\phi) = (e^{\wedge}, t, \phi)$. Comme F' appartient à $\hat{L}_0$ et est un sous-foncteur de $\hat{F}$, la transformation naturelle $F'\nu(\phi)$ est une limite projective naturalisée et, d'après ce que nous avons vu précédemment, $F'(e)$ est l'ensemble des $x' \in \hat{F}(e)$ tels que

$$F'(t(i))(x') \in F'(\phi(i)) \text{ pour tout } i \in J_0.$$

Si x appartient à $s_{\xi}(\phi)$, on en déduit $x \in F'(e)$, puisque

$$F'(t(i))(x) = \hat{F}(t(i))(x) \in E_{\xi}(\phi(i)) \subset F'(\phi(i))$$

pour tout $i \in J_0$. Par suite

$$E_{\lambda}(e) = s_{\xi}(e) \cup \bigcup_{\phi \in a(\nu)_e} s_{\xi}(\phi) \subset F'(e)$$

pour toute unité e de C .

c) Par récurrence transfinie, ceci montre que $F(e) = E_{\lambda}(e)$ est contenu dans $F'(e)$ pour tout $e \in C_0$. Ainsi F est la $(P', X, \tilde{L}_0)$ -sous-structure de $\hat{F}$ engendrée par $A = \prod_{e \in C_0} E(e)$, et il existe un objet de L , équivalent à F , qui est une (P', X, L_0) -sous-structure de $\hat{F}$ engendrée par A . ∇

THEOREME 1. N est une catégorie à L -projections, si $\mathcal{J} \in \mathcal{U}$.

Δ . Ceci résulte des Propositions 7 et 8 et du Théorème d'existence de structures libres: Si G est un foncteur de C^* vers $\mathbb{M}$, on considère l'ensemble D des transformations naturelles $T_i = (F_i, t_i, G)$, où F_i est un objet de L . De la Proposition 7 il résulte que D , partie de $\underline{N}$, appartient à $\hat{\mathcal{U}}$ de sorte qu'il existe un produit $\hat{F} = \prod_{T_i \in D} F_i$ dans $\hat{N}$ et, $\hat{L}$ étant stable par produits dans $\hat{N}$, le foncteur $\hat{F}$ est un objet de $\hat{L}$; soit $(\hat{F}, \hat{t}, G)$ le $\hat{N}$ -crochet de $(T_i)_{T_i \in D}$. Alors G admet pour (L, N) -projection une (X, L_0, P') -sous-structure de $\hat{F}$ engendrée par $\prod_{e \in C_0} \hat{t}(e)(G(e))$. ∇

COROLLAIRE 1. Si C est une catégorie telle que $\underline{C}$ appartienne à $\mathcal{U}$, la catégorie N est une catégorie à L' -projections, où L' est la sous-catégorie pleine de N ayant pour objets les sous-foncteurs des foncteurs

$$\prod_{i \in K} Y(e_i), \text{ où } e_i \in C_0.$$

Δ . Il suffit d'appliquer le théorème au cas où $\mathcal{J}$ est vide. ∇

COROLLAIRE 2. Soit C une catégorie telle que $\underline{C}$ appartienne à $\mathcal{U}$ et soit L' la sous-catégorie pleine de N ayant pour objets les foncteurs de C^* vers $\mathbb{M}$ qui sont sous-foncteurs d'un foncteur $\prod_{i \in K} Y(e_i)$, où les e_i sont des unités de C , et qui sont compatibles avec les $\mathcal{J}$ -limites inductives. Alors N est une catégorie à L' -projections.

Δ . Soit K l'ensemble des foncteurs d'une catégorie appartenant à $\mathcal{J}$ vers C ayant une limite inductive. Si $\phi \in K$, choisissons une limite inductive de ϕ , que nous noterons $\nu(\phi)$. Considérons le prototype $(C, \emptyset, \nu)$

ainsi obtenu. Deux limites inductives de ϕ étant des foncteurs équivalents un foncteur F de C^* vers $\mathbb{M}$ est compatible avec les $\mathcal{J}$ -limites projectives ssi $F\nu(\phi)$ est une limite projective pour tout $\phi \in K$. Par suite L' est la catégorie L associée plus haut au prototype $(C, \emptyset, \nu)$ (ou d'ailleurs au prototype (C, μ, ν) quel que soit μ). ∇

THEOREME 2. Si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont équipotents à des éléments de $\mathcal{U}$, tout $(\mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}}, \mathcal{F}^{\mathcal{I}\mathcal{J}})$ -projecteur est injectif.

Δ . Ceci résulte du Corollaire de la Proposition 6 et du Théorème 1. ∇

COMPLEMENTS.

Dans la preuve de la Proposition 8, le fait que $\hat{F}$ soit un sous-foncteur d'un foncteur $\prod_{i \in K} Y(e_i)$ produit de foncteurs représentables n'a été utilisé que pour affirmer qu'il en est de même pour F . Par suite :

THEOREME 3. Soit C une catégorie et ν une application $\mathcal{J}$ -limite inductive partielle sur C . Soit L_ν la sous-catégorie pleine de N ayant pour objets les foncteurs F de C^* vers $\mathbb{M}$ tels que $F\nu(\phi)$ soit une limite projective naturalisée, lorsque $\nu(\phi)$ est défini. Alors :

- 1° L_ν contient $Y(\underline{C})$ et est stable par limites projectives dans N ;
- 2° La restriction $Y_\nu : C \rightarrow L_\nu$ de Y est une réalisation vague de (C, μ, ν) quelle que soit l'application $\mathcal{J}$ -limite projective partielle μ ;
- 3° Si $\underline{C}$ appartient à $\mathcal{U}$ et $\mathcal{J}$ à $\tilde{\mathcal{U}}$, la catégorie N est à L_ν -projections, et par suite L_ν est à $\mathcal{J}$ -limites inductives.

Δ . Il suffit de remplacer dans les pages précédentes L par L_ν . ∇

COROLLAIRE. Soit (H, μ) un $\mathcal{J}$ -prototype projectif (i. e., (H, μ) means $(H, \mu, \emptyset)$). Soit L' la sous-catégorie pleine de la catégorie N' des transformations naturelles de H vers $\mathbb{M}$ ayant pour objets les réalisations vagues de (H, μ) dans $\mathbb{M}$. Alors N' est à L' -projections, si $\underline{H} \in \mathcal{U}$, $\mathcal{J} \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Δ . Il suffit d'appliquer le Théorème 3 en prenant pour C la duale de H et pour ν l'application telle que $\nu(\phi)$ soit défini et égal à $(e^\wedge, t, \phi)$ ssi $\mu(\phi^*)$ est défini et égal à $(\phi^*, t, e^\wedge)$, où ϕ^* est le dual de ϕ . ∇

CAS PARTICULIER. Soit (E, T) un espace topologique, H la sous-catégorie du groupoïde des couples d'ouverts de T formée des couples (U', U) tels que $U' \subset U$. Un préfaisceau sur T est un foncteur de H vers $\mathbb{M}$. Un faisceau est un préfaisceau transformant certaines limites projectives en limites projectives. Du Corollaire du Théorème 3 on déduit l'existence d'un «faisceau associé à un préfaisceau», i. e. l'existence d'un faisceau projection d'un préfaisceau dans la catégorie des faisceaux sur (E, T) . C'est pourquoi on appelle le Corollaire du Théorème 3: *Théorème du faisceau associé*.

REMARQUE. La catégorie L' du Corollaire 2 du Théorème 1 est la catégorie ¹ *transcomplétion de C* , utilisée par Lambek et Isbell (dans le cas où $\mathcal{J}$ est l'ensemble des catégories associées à un univers appartenant à $\mathcal{U}$). Remarquons que, pour prouver le Théorème 2, nous aurions pu nous servir de la catégorie $L_{\mathcal{V}}$ du Théorème 3 au lieu de L .

/146_{IV}.1/

COMPLÉTION D'UN FONCTEUR

par Charles EHRESMANN

Etant donné un foncteur p de H^* vers K^* fidèle et tel que la restriction p_γ de p au groupoïde des éléments inversibles de H^* soit bien fidèle, un problème important consiste à chercher un foncteur $\bar{p}$ de $\bar{H}^*$ vers K^* , vérifiant ces mêmes propriétés mais tel que, de plus, $\bar{p}$ vérifie l'une des conditions suivantes :

1° $\bar{p}$ est K^* -étalant, c'est-à-dire : K^{**} est une sous-catégorie de K^* et, pour tout $s \in \bar{H}_0^*$ (= ensemble des unités de $\bar{H}^*$) et tout $f \in p(s) \cdot K^*$, il existe un et un seul $\bar{f} \in s \cdot \bar{H}$ tel que $\bar{p}(\bar{f}) = f$ et que $\bar{f}$ soit une $\bar{p}$ -injection.

2° Soit $\mathcal{J}$ une classe de catégories et μ une application $\mathcal{J}$ -limite projective multiforme, c'est-à-dire : pour tout foncteur ϕ de I^* vers K^* , où $I^* \in \mathcal{J}$, $\mu(\phi)$ est une classe (éventuellement vide) de limites projectives naturalisées de but ϕ . Alors on demande que $\bar{p}$ soit μ -compatible, i.e. qu'il existe une application $\mathcal{J}$ -limite projective multiforme $\bar{\mu}$ sur $\bar{H}^*$ appliquée par $\bar{p}$ sur μ (autrement dit : si $\bar{\Phi}$ est un foncteur de $I^* \in \mathcal{J}$ vers $\bar{H}^*$, et si θ est un élément de $\mu(\bar{p} \cdot \bar{\Phi})$, il existe une limite projective naturalisée $\bar{\theta}$ de $\bar{\Phi}$ appliquée par $\bar{p}$ sur $\bar{\theta}$; comme $\bar{p}_\gamma$ est bien fidèle, $\bar{\theta}$ est déterminée d'une façon unique; then $\bar{\theta} \in \bar{\mu}(\bar{\Phi})$). 1+

Ce problème se pose, en particulier, lorsque K^* est une catégorie d'applications, d'autant plus que, dans la théorie des catégories $\bar{p}$ -structurées, de nombreux théorèmes généraux sont valables si $\bar{p}$ vérifie l'une des conditions précédentes : existence de catégories $\bar{p}$ -structurées quasi-quotients, existence de limites projectives ou inductives dans la catégorie des foncteurs $\bar{p}$ -structurés,

Le problème posé admet des solutions : il admet même des solutions maximales et des solutions minimales, définies respectivement comme des 2

structures libres ou colibres relativement à un certain foncteur. Ici nous allons construire la solution minimale explicitement dans le deuxième cas.

CONSTRUCTION D'UN FONCTEUR $\bar{p}$.

Soit p un foncteur de H^* vers K^* qui soit fidèle et tel que p_γ soit bien fidèle. Soit μ une application $\mathcal{J}$ -limite projective multiforme sur K^* . Associons à p le foncteur $\bar{p}$ de $\bar{H}^*$ vers K^* construit comme suit :

1° Soit A la classe des couples (Φ, θ) , où Φ est un foncteur de I^* vers H^* , où $I^* \in \mathcal{J}$ et où $\theta \in \mu(p, \Phi)$. Si $(\Phi, \theta) \in A$, pour toute unité s de H^* désignons par $E_s(\Phi, \theta)$ la classe des $f \in K$ tels qu'il existe une transformation naturelle χ du foncteur constant s^* vers Φ , vérifiant la condition $p \chi = \theta f$, c'est-à-dire

$$p(\chi(i)) = \theta(i) \cdot f \text{ pour tout } i \in I^*.$$

Soit r la relation d'équivalence sur A telle que

$$(\Phi, \theta) \sim (\Phi', \theta') \text{ ssi } E_s(\Phi, \theta) = E_s(\Phi', \theta') \text{ pour tout } s \in H^*.$$

Posons $\hat{H}^* = A/r \cup H^*$ (on suppose H^* disjoint de A/r). Si σ désigne la classe $(\Phi, \theta) \bmod r$, on pose

$$E_s(\sigma) = E_s(\Phi, \theta) \text{ et } \hat{p}(\sigma) = e \text{ où } e = \text{source de } \theta.$$

Si σ est dans H^* , on pose :

$$E_s(\sigma) = p(\sigma, H, s) \text{ et } \hat{p}(\sigma) = p(\sigma).$$

Soit $\hat{H}$ la classe des triplets (σ', g, σ) , où $g \in \hat{p}(\sigma') \cdot K \cdot \hat{p}(\sigma)$, vérifiant la condition :

Pour tout $f \in E_s(\sigma)$, on a $g \cdot f \in E_s(\sigma')$ (i.e., $g \cdot E_s(\sigma) \subset E_s(\sigma')$), et notons $\hat{p}(\sigma', g, \sigma) = g$.

On montre que $\hat{H}^*$ est une catégorie pour la loi de composition

$$(\sigma'', g', \sigma') \cdot (\sigma', g, \sigma) = (\sigma'', g' \cdot g, \sigma)$$

et que l'application $(\sigma', g, \sigma) \mapsto g$ définit un foncteur fidèle $\hat{p}$ de $\hat{H}^*$ vers K^* . On identifie H^* à la sous-catégorie pleine de $\hat{H}^*$ ayant H^* pour classe de ses unités. On montre que, si Φ est un foncteur vers H^* qui admet une limite projective s préservée par p , alors s est aussi une limite projective de Φ considéré comme foncteur à valeurs dans $\hat{H}^*$.

Le procédé de construction de $\hat{p}$ à partir de p décrit ci-dessus sera appelé *construction canonique*.

2° En général, $\hat{p}$ n'est pas μ -compatible. Par récurrence transfinie, on construit un foncteur $\bar{p}$ de $\bar{H}^*$ vers K^* qui est μ -compatible :

Soit $\hat{\lambda}$ l'ordinal borne supérieure des ordinaux $\bar{l}$ associés aux ensembles I tels que $I^* \in \mathcal{J}$. Soit Λ l'ordinal initial régulier $\omega_{\hat{\lambda}+1}^*$, d'indice $\hat{\lambda}+1$. Posons $L_{\hat{l}}^* = H^*$ et $q_{\hat{l}} = p$.

Soit $\lambda \leq \Lambda$. Supposons définis L_{ξ}^* et q_{ξ} pour tout ordinal $\xi < \lambda$. Nous définissons alors L_{λ}^* et q_{λ} comme suit :

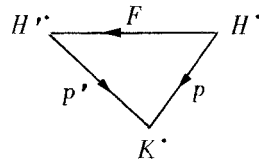
- a) Si $\lambda = \lambda' + 1$, alors q_{λ} est le foncteur obtenu à partir de $q_{\lambda'}$ par la construction canonique, et L_{λ}^* est sa source.
- b) Si λ n'a pas de prédécesseur, posons $L_{\lambda}^* = \bigcup_{\xi < \lambda} L_{\xi}^*$; alors L_{λ}^* est une catégorie dont L_{ξ}^* est une sous-catégorie pour tout $\xi < \lambda$, et q_{λ} est l'unique foncteur de L_{λ}^* vers K^* admettant les q_{ξ} pour restrictions.

Par récurrence transfinie, on obtient ainsi une catégorie $\bar{H}^*$, à savoir L_{Λ}^* , et un foncteur $\bar{p}$ de $\bar{H}^*$ vers K^* , à savoir q_{Λ} .

3° On montre que $\bar{p}$ est une solution du problème proposé: $\bar{p}$ est fidèle, $\bar{p}_{\gamma}$ est bien fidèle et $\bar{p}$ est μ -compatible. De plus $\bar{p}$ admet p pour restriction à la sous-catégorie pleine H^* de $\bar{H}^*$.

LE FONCTEUR $\bar{p}$ COMME STRUCTURE COLIBRE.

Nous allons montrer que $\bar{p}$ est une solution «minimale» du problème proposé. Soit $\mathfrak{M}_0$ un univers, $\mathfrak{M}$ la catégorie pleine des applications et $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs correspondantes. Supposons $K \in \mathfrak{M}_0$. Soit $\mathcal{H}$ la catégorie formée des triplets (p', F, p) , où p et p' sont des foncteurs vers K^* fidèles, tels que p_{γ} et p'_{γ} soient bien fidèles, et où $F \in \mathcal{F}$ est un foncteur vérifiant $p' \cdot F = p$.



Soit μ une application $\mathcal{I}$ -limite projective multiforme sur K^* . Soit $\mathcal{K}^\mu$ la sous-catégorie de $\mathcal{H}$ formée des $(p', F, p) \in \mathcal{H}$ tels que, si Θ est une limite naturalisée dans la source de p et si $p\Theta \in \mu(\phi)$, alors $F\Theta$ est une limite naturalisée dans la source de p' . Soit $\mathcal{H}^\mu$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}^\mu$ ayant pour objets les foncteurs μ -compatibles.

Soit $\mathcal{H}''^\mu$ la catégorie ayant pour objets les couples (q, C) , où q est un foncteur de $\hat{C}^*$ vers K^* appartenant à $\mathcal{H}_0^\mu$ et où $\hat{C}^*$ est la plus petite des sous-catégories G^* de $\hat{C}^*$ contenant C^* comme sous-catégorie pleine et telles que la restriction de q à G^* appartienne à $\mathcal{H}_0^\mu$. Les morphismes de $\mathcal{H}''^\mu$ sont les triplets

$$\hat{F} = ((q_2, C_2), F', (q_1, C_1)), \text{ où } (q_i, C_i) \in \mathcal{H}_0''^\mu,$$

où $(q_2, F', q_1) \in \mathcal{H}^\mu$ et où la restriction F de F' à C_1^* est un isomorphisme sur C_2^* . Soit Y le foncteur de $\mathcal{H}''^\mu$ vers le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{K}^\mu$ associant à $\hat{F}$ le triplet (p_2, F, p_1) , où p_i est la restriction de q_i à C_i^* .

THEOREME. *Y admet un co-adjoint, si $\mathcal{I}$ est une partie de $\mathcal{F}_0$ équipotente à un élément de $\mathcal{M}_0$. Tout foncteur $p \in \mathcal{H}_0$ engendre comme Y-structure colibre le couple $(\bar{p}, H)$ construit plus haut.*

EXISTENCE D'UNE SOLUTION MAXIMALE.

THEOREME. *Tout $p \in \mathcal{H}_0$ admet également une $(\mathcal{H}^\mu, \mathcal{K}^\mu)$ -projection $\tilde{p}$ et engendre une $(\mathcal{H}, \iota, \mathcal{H}^\mu)$ -structure libre, telles que p soit une restriction de chacune d'elles.*

Ce dernier théorème, qui résulte d'un théorème général d'existence de structures libres, signifie que p admet un prolongement «maximal» en un foncteur μ -compatible $\tilde{p}$ tel que le plongement de p dans $\tilde{p}$ soit compatible avec les $\mathcal{I}$ -limites projectives pouvant exister dans p et se projetant sur un élément de l'un des $\mu(\phi)$.

TEXTE D'UNE CONFÉRENCE FAITE A
SAINT-QUENTIN, LE 27 AVRIL 1972

/ 146_{IV}.2 /

LES CATÉGORIES DANS L'ENSEIGNEMENT

par Charles EHRESMANN

Je me propose de parler de quelques aspects de la théorie des catégories, surtout des aspects qui montrent l'intérêt de cette théorie pour l'enseignement des Mathématiques.

1. La notion de catégorie peut être considérée comme une *notion unificatrice* des Mathématiques dans l'état actuel de leur développement. Celles des Grecs dans l'Antiquité étaient réduites, essentiellement, à l'*Arithmétique* des nombres entiers et à la *Géométrie* de l'espace de notre intuition spatiale, dont Euclide nous a laissé un exposé, qui est le prototype d'une théorie axiomatique. Avec la découverte des *géométries non euclidiennes* au XVIII^e siècle, on a senti la nécessité de formuler un principe général permettant de définir les diverses géométries comme des exemples d'une théorie plus générale. Ainsi on a mis en évidence la notion de *groupe* et celle de *groupe de transformations*, et les géométries considérées étaient ramenées à la théorie des *espaces homogènes*, c'est-à-dire des ensembles munis d'un groupe transitif de transformations. Mais par contre les *espaces de Riemann*, introduits à la même époque, ne rentraient pas dans ce cadre, ce qui a conduit ultérieurement à la définition générale des *espaces topologiques*. Par la *théorie des ensembles*, Cantor a créé une *base* et un *langage* pour les mathématiques modernes. La voie était ainsi ouverte pour le développement extraordinaire des Mathématiques. De nombreuses théories ont vu le jour : *anneaux*, *corps*, *groupes de Lie*, *variétés différentiables réelles* ou *complexes* munies de structures infinitésimales variées.....

Pour éviter la confusion devant tout ce foisonnement d'idées, une *conception globale* des mathématiques a été recherchée par *Bourbaki*, ce qui l'a conduit à la clarification de la notion générale de *structure mathé-*

1

matique sur un ensemble, et par conséquent à l'étude des relations entre structures de même espèce ou d'espèces différentes. Ainsi la théorie des structures mathématiques conduit logiquement à la *théorie des catégories de morphismes* entre structures d'une même espèce et des relations entre différentes catégories de morphismes.

En 1945 enfin, la notion de *catégorie* a été dégagée par Eilenberg-Mac Lane et depuis une quinzaine d'années la théorie des catégories a fait l'objet de nombreuses recherches et publications. Cependant cette théorie, en plein développement, est encore souvent méconnue et contestée; en particulier, on entend parfois dire qu'elle ne représente qu'un *langage*. C'est effectivement un de ses grands mérites de fournir un langage commun à l'Algèbre, à la Topologie, à la Topologie algébrique, à la Géométrie différentielle, et d'éviter ainsi aux mathématiciens la confusion dans laquelle se sont perdus les constructeurs de la Tour de Babel. Mais naturellement ce n'est pas son seul mérite: au cours des dernières années, la théorie des catégories s'est développée d'une façon extraordinaire pour elle-même et pas seulement pour les applications.

2. La notion de catégorie généralise celle de groupe et celle de structure d'ordre. L'exemple fondamental d'une catégorie, on pourrait dire le prototype, est la *catégorie formée des applications entre ensembles*; un autre exemple est la *catégorie des relations entre ensembles*. Donnons une définition précise des catégories:

Appelons *graphe orienté* un triplet (C, β, α) , où C est un ensemble, α et β des rétractions de C sur une partie C_0 de C , c'est-à-dire

$$\alpha(x) = \beta(x) = x \text{ pour tout } x \in C_0.$$

Un élément de C_0 est appelé *sommet* du graphe, un élément f de C tel que $\alpha(f) = x$ et $\beta(f) = x'$ est dit *flèche de source x , de but x'* .

Une *catégorie* est un couple (C, k) , où C est un ensemble et k une loi de composition partiellement définie sur C , c'est-à-dire une application d'une partie A de $C \times C$ dans C ; si (g, f) appartient à A , on dit que le couple (g, f) est *composable*, et on pose $g.f = k(g, f)$. On suppo-

se de plus qu'il existe un graphe orienté (C, β, α) vérifiant les axiomes suivants :

1° $g.f$ est défini ssi $\alpha(g) = \beta(f)$; dans ce cas

$$\alpha(g.f) = \alpha(f), \quad \beta(g.f) = \beta(g).$$

2° Pour tout f dans C , on a $\beta(f).f = f = f.\alpha(f)$.

3° Si $\alpha(h) = \beta(g)$ et $\alpha(g) = \beta(f)$, on a $h.(g.f) = (h.g).f$ (Associativité).

On montre qu'un élément e de C est un sommet du graphe (C, β, α) ssi e est une unité pour k , c'est-à-dire si :

$$f.e = f \quad \text{et} \quad e.g = g,$$

dès que $f.e$ ou $e.g$ est défini. De plus $\alpha(f)$ est l'unique unité telle que $f.\alpha(f)$ soit défini, et $\beta(f)$ l'unique unité telle que $\beta(f).f$ soit défini. Il s'ensuit que le graphe (C, β, α) est déterminé de façon unique par la donnée de k . La catégorie (C, k) sera souvent désignée par une seule lettre C , l'ensemble C dont les éléments sont aussi appelés *morphismes* de C par $\subseteq$, l'ensemble des couples composables A par $C * C$, le graphe (C, β, α) par $[C]$, l'ensemble de ses sommets ou *unités* de C par C_0 .

Un morphisme f de C est dit *inversible* s'il existe un f' tel que

$$f'.f = \alpha(f) \quad \text{et} \quad f.f' = \beta(f);$$

si f' existe, il est unique; on le note alors f^{-1} et on l'appelle l'*inverse* de f ; dans ce cas, on dit aussi que f est un *isomorphisme* de C .

On appelle *groupoïde* une catégorie dont tous les morphismes sont inversibles.

En particulier, un groupoïde n'ayant qu'une seule unité e est simplement un *groupe*; on a alors $\alpha(f) = e = \beta(f)$ et $C * C = \subseteq \times \subseteq$.

Si E est un ensemble, on obtient un groupoïde sur $E \times E$ en munissant $E \times E$ de la loi partielle $\circ$:

$$(y', x') \circ (y, x) = (y', x) \quad \text{ssi} \quad x' = y;$$

on l'appelle le *groupoïde des couples* associé à E . Si P est le graphe d'une relation de préordre sur E , on définit une catégorie sur P en consi-

dérant une restriction de la loi $\circ$. Inversement, une catégorie telle qu'il y ait au plus un morphisme de source e et de but e' définit un préordre sur l'ensemble de ses unités, en notant :

$$e' \leq e \text{ ssi il existe un morphisme de source } e, \text{ de but } e'.$$

Ce préordre est un ordre si les unités sont les seuls inversibles de la catégorie.

3. La catégorie la plus fondamentale est sans doute la *catégorie des applications*. Soit $\mathcal{U}$ un ensemble d'ensembles, $\mathcal{M}$ l'ensemble de toutes les applications entre éléments de $\mathcal{U}$. Alors $\mathcal{M}$ devient une catégorie pour la loi de composition partielle ;

$$(f', f) \vdash f' \circ f \text{ ssi } f \text{ est une application de } E \text{ dans } E' \text{ et } f' \text{ une application de } E' \text{ dans } E'',$$

où $f' \circ f$ est l'application composée (au sens usuel) de (f', f) . La source de f est l'application identique de E , son but, l'application identique de E' . Les unités de cette catégorie sont donc les applications identiques des éléments de $\mathcal{U}$. L'application $E \mapsto \text{identité de } E$ est alors une bijection de $\mathcal{U}$ sur l'ensemble des unités de $\mathcal{M}$; on dit que $\mathcal{U}$ est une classe d'objets pour la catégorie $\mathcal{M}$.

Certes cette catégorie dépend du choix de l'ensemble $\mathcal{U}$ et on aimerait pouvoir parler de «la catégorie de toutes les applications entre ensembles quelconques». Mais ici on rencontre une difficulté majeure. Nous avons dit qu'une catégorie est formée d'un *ensemble* d'éléments, ses morphismes, et d'une loi partielle ; or la classe de tous les ensembles n'est pas un ensemble, et la classe de toutes les applications non plus. On peut contourner cette difficulté de deux manières :

1° En se plaçant dans le cadre de la *théorie des ensembles* au sens de Von Neumann-Gödel-Bernays, où l'on distingue entre «ensembles» et «classes», une classe propre étant une sous-classe de la classe de tous les ensembles qui n'est pas elle-même un ensemble ; dans cette axiomatique, une classe propre ne peut être élément d'aucune classe. Dans ce cas, on définit les «grandes» catégories, telle la catégorie de toutes les appli-

cations, dont les morphismes forment une classe propre; les «*petites*» catégories sont au contraire celles définies sur un ensemble.

2° L'inconvénient de la méthode précédente est qu'il est impossible de former des classes propres; la construction de nouvelles catégories est ainsi sérieusement limitée. C'est pourquoi on peut se placer dans le cadre 1 de la *théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel* et éviter de parler de la catégorie de toutes les applications. On supposera que $\mathcal{U}$ est un ensemble d'ensembles vérifiant les conditions suivantes:

- 1° Si E est élément de $\mathcal{U}$, toute partie de E est élément de $\mathcal{U}$.
- 2° L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E de $\mathcal{U}$ est dans $\mathcal{U}$.
- 3° Si I est un élément de $\mathcal{U}$ et E_i un élément de $\mathcal{U}$ pour tout $i \in I$, la réunion de la famille $(E_i)_{i \in I}$ d'ensembles appartient à $\mathcal{U}$.
- 4° Il existe un ensemble infini appartenant à $\mathcal{U}$.

En d'autres termes, $\mathcal{U}$ est un ensemble d'ensembles qui est stable par toutes les opérations de la théorie des ensembles, c'est-à-dire qui est 2 un modèle de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. Un tel $\mathcal{U}$ est appelé un *univers*. On ajoute aux axiomes de Zermelo-Fraenkel l'*axiome des univers*:

Tout ensemble est élément d'un univers.

En particulier, on montre que l'ensemble vide et l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels appartiennent à tout univers. Il existe un plus petit univers, appelé l'univers classique. Pour beaucoup de questions, on peut se borner à la considération de cet univers classique; tous les ensembles construits explicitement dans les Mathématiques classiques y appartiennent.

Ainsi à chaque univers $\mathcal{U}$ correspond une catégorie d'applications $\mathfrak{M}$, dont les objets sont les éléments de $\mathcal{U}$. Cette catégorie est souvent appelée catégorie des ensembles, et notée $\mathfrak{E}_{\mathcal{U}}$. Cependant plusieurs catégories peuvent avoir la même classe d'objets: ainsi la catégorie dont les morphismes sont toutes les relations entre éléments de $\mathcal{U}$, munie de la composition usuelle des relations, admet aussi $\mathcal{U}$ pour classe d'objets. Il me paraît donc préférable de désigner une catégorie d'après le nom de ses morphismes et non d'après celui de ses objets.

4. Etant donné deux catégories C et K , on appelle *foncteur* de C vers K un triplet $F = (K, \underline{F}, C)$, où $\underline{F}$ est une application de $\underline{C}$ vers $\underline{K}$ telle que :

1° Si e est une unité de C , alors $F(e)$ est une unité de K .

2° Si (g, f) est un couple composable dans C , le couple $(F(g), F(f))$ est composable dans K et on a $F(g) \cdot F(f) = F(g \cdot f)$.

Exemple : Un homomorphisme d'un groupe C vers un groupe K .

Si C est la catégorie de couples correspondant à un ensemble ordonné $(E, \leq)$ et K celle associée à $(E', \leq')$, les applications ordonnées b de $(E, \leq)$ vers $(E', \leq')$ correspondent biunivoquement aux foncteurs de C vers K (en associant à b le foncteur F tel que

$$F(y, x) = (b(y), b(x)).$$

Soit $\mathcal{U}$ un univers, $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des catégories C telles que $\underline{C}$ soit élément de $\mathcal{U}$. L'ensemble de tous les foncteurs entre catégories appartenant à $\mathcal{F}_0$ est muni d'une structure de catégorie $\mathcal{F}$, la loi de composition étant

$$(\hat{K}, \hat{\underline{F}}, \hat{C}) \circ (K, \underline{F}, C) = (K, \underline{F}' \circ \underline{F}, C) \text{ ssi } \hat{K} = \hat{C}.$$

L'application associant à $(K, \underline{F}, C) \in \mathcal{F}$ l'application $\underline{F}$ définit un foncteur «d'oubli» de $\mathcal{F}$ vers la catégorie $\mathcal{M}$ des applications.

On définit ensuite une nouvelle catégorie dont les *objets* sont les foncteurs, les morphismes étant les *transformations naturelles*. On obtient ainsi la catégorie des transformations naturelles; c'est d'ailleurs une catégorie double, la deuxième loi ayant les catégories pour objets. Cette catégorie joue un grand rôle.

5. Soit p un foncteur d'une catégorie H vers une catégorie C (le plus souvent C sera la catégorie des applications). Si s est une unité de H et si $e = p(s)$, on appellera s une *p-structure* sur e . Toutes les structures habituellement considérées en Mathématiques rentrent dans ce cadre. On dit souvent que p est un *foncteur d'oubli* (il «oublie» la structure s pour ne conserver que l'unité sous-jacente e); un foncteur d'oubli est généralement fidèle, i. e. deux morphismes h et h' de H , de même source, de

même but et tels que $p(h) = p(h')$ sont identiques.

EXEMPLES. On prend pour C la catégorie $\mathcal{M}$ des applications. Soit H la catégorie $\mathcal{G}$ dont les morphismes sont les homomorphismes entre groupes dont les ensembles sous-jacents appartiennent à l'univers $\mathcal{U}$; en associant à un homomorphisme de G vers G' l'application sous-jacente, de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{M}$, on définit un foncteur d'oubli fidèle de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{M}$. On définit d'une façon analogue le foncteur d'oubli vers $\mathcal{M}$ de la catégorie des homomorphismes entre anneaux dont l'ensemble sous-jacent appartient à $\mathcal{U}$; ou encore le foncteur d'oubli de la catégorie des applications linéaires entre espaces vectoriels sur un corps, entre modules sur un anneau, entre algèbres, ... Un autre foncteur d'oubli est le foncteur vers $\mathcal{M}$ de la catégorie des applications continues entre *espaces topologiques* (E, T) tels que E soit un ensemble appartenant à $\mathcal{U}$ (et T une topologie sur E).

Etant donné un foncteur p de H vers C , on peut définir d'une manière générale les notions de *p-sous-structure* d'une *p-structure* (on retrouve ainsi les sous-groupes, les sous-anneaux, les sous-modules, les sous-espaces topologiques, ...), de *p-structure quotient* d'une *p-structure* (groupes quotients, anneaux quotients, modules quotients, espaces topologiques quotients, ...), *p-sous-structure engendrée* (sous-groupes engendrés, ...).

6. Soit p un foncteur de H vers C . Si e est une unité (ou un objet) de C , on appelle *p-structure libre engendrée par e* une *p-structure s* telle que :

Il existe un morphisme j de C de source e , de but $p(s)$ tel que, si s' est une *p-structure* et f' un morphisme de C de source e , de but $p(s')$, alors il existe un et un seul morphisme h de H de source s et de but s' tel que $f' = p(h) \cdot j$.

On dit aussi que (s, j) est un *p-projecteur*.

Si pour toute unité e de C on s'est donné un *p-projecteur* (s_e, j_e) tel que j_e ait pour source e , il existe un foncteur q de C vers H tel que l'on ait $q(e) = s_e$ et que $q(f)$ vérifie $p(q(f)) \cdot j_e = j_{e'} \cdot f$, si f a e pour source et e' pour but. Ce foncteur q est appelé *foncteur adjoint de p* .

Par dualité (on remplace C et H par les catégories duales C^* et

H^* , obtenues en « inversant le sens des flèches », de sorte que le composé $f * g$ est défini dans C^* et égal à $g \cdot f$ ssi $g \cdot f$ l'est dans C), on obtient les notions d'objet *colibre*, de *coprojecteur* et de *foncteur coadjoint*.

Un cas particulier fréquemment utilisé est celui où p est le foncteur injection canonique vers C d'une sous-catégorie H (i.e. H est une partie de C et la loi de H est la restriction de celle de C); on parle alors de *projection* et d'*éjection*.

Voici quelques applications des notions de structure libre et de foncteur adjoint:

1° Soit $\mathcal{J}$ la catégorie des applications continues associée à l'univers $\mathcal{U}$. Soit $\mathcal{J}_c$ la catégorie formée des applications continues entre espaces topologiques compacts (E, T) tels que E appartienne à l'univers $\mathcal{U}$, et soit p le foncteur injection canonique de $\mathcal{J}_c$ vers $\mathcal{J}$. Tout espace topologique (E, T) admet alors une p -structure libre: c'est le *compactifié de Stone-Čech* de (E, T) . Le foncteur d'oubli de $\mathcal{J}$ vers $\mathcal{M}$ admet aussi un adjoint, qui associe à un ensemble l'espace topologique obtenu en le munissant de la *topologie discrète*; la *topologie grossière* apparaît, quant à elle, comme une structure colibre relativement à ce même foncteur.

2° Soit $\mathcal{S}$ la catégorie des foncteurs entre *monoïdes* C tels que $C \subseteq \mathcal{U}$ (un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition partout définie associative ayant une unité; c'est aussi une catégorie ayant une seule unité). Soit p son foncteur d'oubli vers $\mathcal{M}$. Si E est un ensemble, il engendre une p -structure libre, à savoir le *monoïde libre* sur E (qui est formé des suites finies d'éléments de E , y compris la suite vide qui est son unité, sa loi de composition étant la concaténation:

$$(y_m, \dots, y_1) \cdot (x_n, \dots, x_1) = (y_m, \dots, y_1, x_n, \dots, x_1).$$

Cet exemple se généralise comme suit:

3° Si (C, β, a) et (C', β', a') sont deux graphes orientés appelons *homomorphisme de (C, β, a) vers (C', β', a')* un triplet

$$((C', \beta', a'), \underline{F}, (C, \beta, a))$$

tel que $\underline{F}$ soit une application de C dans C' vérifiant

$$\underline{F}(\alpha(f)) = \alpha'(f) \text{ et } \underline{F}(\beta(f)) = \beta'(f) \text{ pour tout } f \in C.$$

Soit Γ la catégorie des homomorphismes entre graphes orientés dont les ensembles sous-jacents appartiennent à $\mathcal{U}$. Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs associée à $\mathcal{U}$. En associant au foncteur F de C vers C' l'homomorphisme $([C'], \underline{F}, [C])$ défini par la même application, on obtient un foncteur q de $\mathcal{F}$ vers Γ . Si $[G] = (G, \beta, \alpha)$ est un graphe orienté, il engendre une q -structure libre, appelée *catégorie libre des chemins sur $[G]$* . Elle est construite comme suit: appelons *chemin du graphe $[G]$* une suite $(f_n, \dots, f_1)$ d'éléments de G telle que

$$\alpha(f_{i+1}) = \beta(f_i) \text{ pour tout } i < n.$$

Le chemin est dit réduit si aucun des f_i n'est un sommet. Considérons l'ensemble formé des chemins réduits et des sommets. Il devient une catégorie si on le munit de la loi:

$$\begin{cases} (g_m, \dots, g_1) \cdot (f_n, \dots, f_1) = (g_m, \dots, g_1, f_n, \dots, f_1) \text{ ssi } \alpha(g_1) = \beta(f_n) \\ (f_n, \dots, f_1) \cdot \alpha(f_1) = (f_n, \dots, f_1) = \beta(f_n) \cdot (f_n, \dots, f_1). \end{cases}$$

Les unités de cette catégorie sont les sommets du graphe.

Si le graphe a un seul sommet, la catégorie libre est un monoïde, et c'est aussi le monoïde libre engendré par l'ensemble des flèches du graphe autres que le sommet.

CAS PARTICULIER. Si E est le singleton $\{\emptyset\}$, le monoïde libre engendré par E s'identifie au monoïde additif N des nombres entiers. Ainsi ce monoïde est caractérisé à un isomorphisme près par la condition:

Pour tout monoïde C et pour tout élément x de C , il existe un unique homomorphisme de N vers C appliquant 1 sur x .

4° Si $\mathcal{S}$ est la catégorie des homomorphismes entre monoïdes associée à $\mathcal{U}$ et si $\mathcal{G}$ est sa sous-catégorie formée des homomorphismes entre groupes, tout monoïde C admet une projection, qui est le groupe associé à C . En particulier, le groupe associé au monoïde additif N des entiers est le *groupe additif Z des entiers relatifs (positifs ou négatifs)*. L'ensemble N_* des entiers naturels autres que 0 muni de la multiplication forme aussi un

monoïde; le groupe projection de ce monoïde est le groupe multiplicatif des *nombre rationnels positifs*. De même, le *corps des rationnels* apparaît comme le corps libre de caractéristique 0 associé au singleton $\{0\}$.

D'autres exemples très importants de structures libres ou colibres sont: les produits et les sommes d'une famille d'unités dans une catégorie, les limites projectives ou inductives d'un foncteur, ...

7. Ces exemples, qu'il serait facile de multiplier, montrent la grande portée de certaines notions de la théorie des catégories. Ces notions sont des idées directrices qui donnent aux Mathématiques un style nouveau (on s'intéresse plus aux «morphisms» qu'aux structures elles-mêmes) et une unité qui facilitent et approfondissent la compréhension des différentes théories particulières. Très souvent, les questions posées à l'occasion d'une certaine étude et les démonstrations données utilisent seulement quelques propriétés catégoriques; elles ont alors leur analogue, et des applications, dans d'autres branches. On peut ainsi augmenter considérablement la portée d'un résultat ou d'une preuve en dégagant son sens général du point de vue catégorique; et cette opération peut conduire à de nouveaux théorèmes (unification des différentes théories de l'homologie par l'homologie dans les catégories abéliennes, par exemple).

1 La théorie des catégories influencera certainement *l'enseignement des Mathématiques dans les Universités*; on commence à l'enseigner très explicitement dans le second cycle, parfois à utiliser son langage et ses premières notions dans le premier cycle. Dans l'enseignement *secondaire*, il ne sera sans doute pas possible d'introduire explicitement les notions générales de cette théorie, car les structures considérées en Algèbre et en Géométrie sont en nombre trop limité pour fournir assez d'exemples concrets. Cependant si les *professeurs* sont familiarisés avec la théorie générale, le style de l'enseignement en sera influencé: les résultats en Algèbre et en Géométrie pourront être exposés d'une manière plus nette. Je pense par exemple à la *théorie des ensembles* qui apparaîtra comme la théorie de la catégorie des applications et de la catégorie des relations. L'ensemble

des entiers muni de sa structure d'*ensemble de Peano* pourra être caractérisé à un isomorphisme près comme une structure libre ; de même le *monoïde additif des entiers naturels*, le *groupe additif des entiers relatifs*, le *corps des rationnels*. L'*algèbre linéaire* pourra être présentée comme l'étude de la catégorie des applications linéaires. Quant à la *Géométrie*, beaucoup de questions me semblent ouvertes et il serait intéressant, pour les *professeurs*, *sinon pour les élèves*, d'étudier les catégories de morphismes entre *espaces euclidiens*, entre *espaces affines*, entre *espaces projectifs réels ou complexes*, et leurs différents foncteurs d'oubli. On pourra essayer de donner des caractérisations axiomatiques de ces catégories, d'interpréter comme structures libres l'espace projectif déduit d'un espace affine par adjonction des points à l'infini, l'espace des vecteurs libres d'un espace vectoriel... Voici quelques problèmes auxquels on commence à s'intéresser, semble-t-il.

8. Mais la théorie des catégories *n'a pas seulement un rôle unificateur*, actuellement, cette théorie se développe considérablement et elle se *diversifie* elle-même très fortement. Comme on est passé de la théorie des groupes proprement dite à celle des groupes topologiques, des groupes de Lie, ..., on étudie actuellement les catégories « enrichies » de structures supplémentaires : Catégories additives et modules généralisés, catégories exactes et catégories abéliennes, catégories monoïdales, monoïdales fermées et catégories cartésiennes fermées, catégories structurées (ou « objet de catégorie dans une catégorie ») : *catégories doubles ou multiples*, *catégories topologiques*, *groupoïdes topologiques* (intervenant dans la théorie des espaces fibrés), *catégories différentiables* (à la base de toute la Géométrie différentielle), *catégories algébriques*, ...

C'est cette diversification même qui compromet un peu l'unité qu'on pouvait espérer obtenir grâce aux catégories. Mais cela montre que l'évolution des Mathématiques ne sera jamais terminée et il ne faudra jamais relâcher les efforts en vue de l'approfondissement et de l'unification de nos conceptions mathématiques.

COMMENTS ON PART IV-1

by *Andrée CHARLES EHRESMANN*

INTRODUCTION

The general comments aim to point out necessary corrections, motivations, more intuitive or stronger statements, connections between the papers and other literature, subsequent developments and possible prolongations.

The following Synopsis contains a motivated summary of the reprinted papers and may be used as a «guide» for the reading of the papers and of the main Comments.

The style and terminology of the papers are very personal (later we adopted more usual notations); they were intended to be as rigorous as possible even if heavy.

The essential difference with common notations comes from the way morphisms are written: If C is a category, the set of morphisms from e to e' is denoted by $e'.C.e$ or $Hom(e', e)$, with the right object e at the right (and not $Hom(e, e')$ as is usual). This notation (we dropped with regrets in our last papers because it confused outsiders) is perfectly coherent when diagrams are drawn from right to left

$$e'' \xleftarrow{g} e' \xleftarrow{f} e$$

so that the composite $g.f$ is in the same order as on the figure.

Similarly, a map (or functor, ...) $h: E \rightarrow E'$ is denoted by the triple $(E', \underline{h}, E)$ (with its domain E at the right), where $\underline{h}$ is its graph or the onto map $x \mapsto h(x)$. If F and F' are functors, a natural transformation $T: F \Rightarrow F'$ is represented by (F', T, F) .

Other characteristic notations are the following ones:

- Categories are thought of as «classes» equipped with a composi-

COMMENTS

tion; so they are named by their morphisms instead of their objects: the category $\mathfrak{M}$ of maps, $\mathcal{F}$ of functors, ... (and not *Set*, *Cat*, ...).

- A category is often denoted by C^* , where C is the class of its morphisms and « $\cdot$ » the symbol of its composition; C_0^* is the class of its objects (often identified with their identities and called «units»). The domain and codomain are suggestively called *source* and *target* (a morphism being looked at as an arrow), and denoted by α and β .

- In the category $\mathfrak{M}$ of maps (or of sets), the *canonical limits* are: the cartesian product, the equalizer (called *kernel*) of two parallel morphisms as a subset of their source, the pullback as a subset of a product.

In the Comments, we try to avoid ambiguous notations, and generally standard terminology (e.g. Mac Lane's book) is adopted.

English language is used, except for the terms in French to be replaced in the original papers: I hope this may make Charles' papers accessible to a wider audience, in spite of the deficiencies of my english.

CONVENTIONS.

The symbol $Y.X$ preceding a comment means that it is the X^{th} comment on page Y . The number X is to be found in the outer margin of page Y , beside the line or just after the paragraph which the comment is about. Sometimes X is followed by the symbol:

- ¶ warning of real flaws or omissions,
- + indicating more substantial addenda.

For instance, **31.2+** points out the second comment on page 31, which is not just a brief remark.

Numbers between // refer to the *Liste des Publications de Charles Ehresmann* at the beginning of the Volume, numbers between square brackets to the final Bibliography.

Read ... instead of is abbreviated into R. ... i.o. .

O. refers to other parts of these «Oeuvres».

GENERAL COMMENTS

ON / 88 / : ADJONCTION DE LIMITES AUX CATÉGORIES STRUCTURÉES.

This Note is developed in / 102 /, Part II, to which we refer for comments.

- 3.1. So ν is a (partial) choice of limit-cones in H indexed by categories belonging to $\mathcal{J}$.
- 3.2. $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ is the category of categories with a partial choice of limit-cones (called prototypes in / 106 /) and the morphisms preserve choices.
- 4.1. $R. \text{ } \text{Lim}^{\nu}$ est injectif et à valeurs dans $\hat{M}\text{-}M$ i.o. ν est injective.
- 4.2. $R. \text{ } \mathcal{U}$ est un univers contenant $p\mathcal{F}(\mathcal{J})$ i.o. $\mathcal{U} = p\mathcal{F}(\mathcal{J})$ est un univers. For the proof (intricate enough), cf. / 102 /, Theorem 2.
- 4.3. $R. \text{ } \text{Lim}^{\hat{\nu}}$ i.o. $\hat{\nu}$.
- 4.4. $R.$ est contenu dans un i.o. est un. Cf. / 102 /, Theorem 5.
- 5.1. Cf. / 102 /, Theorem 10.
- 5.2. Cf. / 102 /, Theorems 12, 13, 15.
- 6.1. The preceding theorem does not imply a concrete functor to *Set* is extended into a functor from the completion. But completions of concrete functors are constructed in / 107 /.
- 6.2. $\mathcal{F}(p)$ is equivalent to the category of internal categories in H ; cf. / 113 / (O, III-2).
- 6.3. Cf. / 102 /, Corollary 3, Theorem 16. This theorem is made more precise and the following examples are treated in / 102 /.

ON / 97 / : PROBLÈMES UNIVERSELS RELATIFS AUX CATÉGORIES n -AIRES.

This Note has not been developed; it was written as a complement to a Note by Topentcharov [126] published in the same *Compte-Rendus*.

7.1 + n -ary structures:

Structures defined by a (partial) n -ary operation were introduced in [126] as a generalization of the n -semigroups (studied e. g. by Wagner)

7.1... similar to the passage from semigroups to multiplicative graphs (or neocategories), quasi-categories, categories... (obtained for $n = 2$). They are not to be confused with the n -fold structures given by n commuting binary operations.

To fix the terminology, we record that a n -ary neocategory $G_n^\bullet = (G, U, k)$ is formed by a set G , a sequence $U = (u_i)_{i < n}$ of n retractions $u_i: G \rightarrow (G_n^\bullet)_0$ from G onto the set of poles and a partial n -ary operation $k: *G_n^\bullet \rightarrow G$, where $*G_n^\bullet$ is a subset of the set

$$\{(f_i)_{i < n} \in G^n \mid u_i(f_j) = u_j(f_i) \ \forall i < n, j < n\}$$

(denoted by $\varprojlim F_U$); the unique axiom is

$$u_j(k((f_i)_{i < n})) = u_j(f_j) \quad \text{for each } j < n.$$

It is a non-associative n -ary quasi-category if $*G_n^\bullet = \varprojlim F_U$.

The other structures are defined by adding an identity and/or an associativity axiom as in the case $n = 2$; they are sketched structures for appropriate sketches, so that their properties may be deduced from general theorems on sketched structures /98, 106/.

Their theory is developed in a series of papers by Topentcharov and his students, by Dekov [31,32]. Other notions of n -ary categories have been considered, e.g. by M. Hasse [67]. In [97], Lair describes an algorithm for deducing n -ary structures from a given sketched structure, so that n -ary categories be obtained from categories.

An important example is the n -ary category M_n^1 of n -simplices of a set M , which is the product M^n equipped with its projections (considered as retractions on its diagonal) and with the n -ary operation:

$$((m_i^j)_{i < n})_{j < n} \mapsto (m_i^i)_{i < n} \quad \text{iff } m_i^j = m_j^i \text{ for each } i < n, j < n.$$

It leads to the n -ary category of n -relations [126].

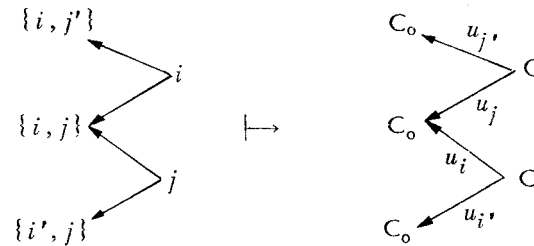
8.1. The proof is straightforward. For the last assertion, we consider the n -ary quasi-neofunctor V from $G_n^\bullet$ to the n -ary category $(G_n^\bullet)_0^1$ of n -simplices (Comment 7.1), which maps h on $(u_i(h))_{i < n}$; it is compatible with A , and a fortiori with $\hat{r}$. So V factors through the canonical $R: G_n^\bullet \rightarrow G_n^\bullet / \hat{r}$. The restriction V_0 of V to the poles is the

bijjective diagonal map and it factors through R_0 ; hence R_0 is 1-1.

8.2. $\text{Erase} = e$, which is the supplementary condition for $\langle f \rangle_j$ to be in $*C_n^\bullet$.

8.3¶ R. $C_n^\bullet$ i.o. C_n^1 . This error was pointed out by Dekov [31].

8.4. F_U is the functor



for any i, j, i', j' lesser than n .

9.1. The first assertion comes from general results on sketched structures /98/. For the second assertion, the proof given in /102/ Section 4-I, for $n = 2$ carries on.

ON /98/ : SUR LES STRUCTURES ALGÈBRIQUES.

Sections 1-3 are developed in /106/ to which we refer for general comments on sketched structures. From 1966 on, Charles gave many lectures and courses where he developed this theory.

11.1. $\mathfrak{N}_K$ is the exponential by K' functor on Cat .

11.2. When the reflector $\hat{p}(U)$ of U into a category is 1-1, U is called a *base of category*.

12.1. This condition means that U is equipped with a *partial choice of cones* (at most one cone with a given basis). It was added for technical reasons, so that the completion theorems of /102/ may be applied. The theorem is also valid without this assumption, as proved in /115/, thanks to a more constructive proof.

12.2. H' -structure is taken in the sense of internal structure in H' (not enriched in H').

13.1. This result comes from the commutativity of limits.

13.2 ¶ R. ζ -engendrant pour $\mathfrak{M}$, où ζ est un ordinal supérieur à l'ordinal

13.2 ... de toute catégorie indexant un cône distingué, et si $U \in \mathbb{M}_0$, $\zeta \in \mathbb{M}_0$, i.o. dénombrablement engendrant pour $\mathbb{M}$; for ζ -generating, cf. p. 217.

13.3 ¶ $\hat{F}$ is not a model of σ ; it is only the subfunctor of F generated by C ; moreover this functor is obtained at the first step, because $F(k)$ admits a submorphism $s_2(u) \rightarrow s_2(u')$ for each $k: u \rightarrow u'$ in U (cf. /102/, Appendix, Corollary 2 of Lemma 1); hence $\hat{F}(u) = s_2(u)$.

The substructure G of F generated by C is defined by the following transfinite induction: $G(u) = \bigcup_{\lambda < \zeta} s_\lambda(u)$, where $(s_\lambda(u))_{\lambda < \zeta}$ is the increasing sequence of P -substructures of $F(u)$ such that:

$s_1(u)$ is generated by $C(u)$,

$s_\alpha(u)$ is generated by $\bigcup_{\lambda < \alpha} C_\lambda(u)$, where $C_\lambda(u) = P(s_\lambda(u))$,

for each limit ordinal α ,

$s_{\lambda+1}(u)$ is generated by the union of:

$P F(k)(C_\lambda(u'))$, for each $k: u' \rightarrow u$ in U ,

$\{x \in P F(u) \mid P(\psi_i)(x) \in C_\lambda(\phi(i)) \ \forall i \in I_0\}$,

for each distinguished cone $\psi: u \Rightarrow \phi$ indexed by I .

If P is ζ -generating, this construction stops at the ordinal ζ , because unions of increasing transfinite sequences commute with limits in $\hat{Set}$, and $P(G(u)) = \bigcup_{\lambda < \zeta} C_\lambda(u)$ by hypothesis.

For a similar proof in the case $H = Set$, cf. /114/, Proposition 8 and Theorem 3.

13.4 + It is deduced from the preceding Theorem, via the existence theorems for quasi-quotients and colimits of /102/ (or the simplified ones given in /108/). Similarly, we get:

PROPOSITION (Associated Sheaf Theorem). If $U \in \mathbb{M}_0$, if $P: \hat{H} \rightarrow \hat{\mathbb{M}}$ is a concrete functor which lifts limits and is ζ -generating for $\mathbb{M}$ and if $H = \bar{P}^1(\mathbb{M}) \in \hat{\mathbb{M}}_0$, then $S(H)$ is a reflective subcategory of H^U .

For other versions of the Associated Sheaf Theorem, e.g. when H admits a «good» factorization, cf. Comments 155.2 and 305.2.

14.1. Cf. /106/ and Comments 31.2, 31.3 and 31.4.

ON /99/ : ADJONCTION DE LIMITES À UN FONCTEUR FIDÈLE OU À UNE CATÉGORIE.

This Note is a summary of /107/ to which we refer for further comments and for recent results on initial completions of concrete functors.

- 15.1. $R. p \in \mathcal{F}$ i.o. p .
- 15.2. So $\mathcal{H}$ is the category of small concrete functors over K' . The smallness condition is weakened in /107/.
- 15.3. p is K' -spreading iff p admits initial lifts of singleton sources $(k: e \rightarrow p(s), s)$ with k in K' .
- 16.1. Natural transformations, in particular cones, are looked at as functors to a category of quartets K^2 (or commutative squares).
- 16.2. Cf. /107/, Theorem 10 and the corresponding comments. The plan adopted in /107/, where this theorem is only given at the end of the paper, is more logical, because the construction made in the following section is used to prove that p is a restriction of $p_{\mathcal{H}}^{\epsilon}$ and p_K^{ϵ} .
- 17.1. Cf. /107/, Theorems 5 and 6 and their comments, which explain why $p_{\mathcal{H}}^{\epsilon}$ is the «Mac Neille ϵ -completion» of p .
- 17.2. Cf. Comments 94.1, 76.1 for the justification of the terms «minimal» and «maximal».
- 18.1. The theorem is taken in a larger universe.
- 18.2. Cf. /107/, Theorem 8.

ON /106/ : ESQUISSES ET TYPES DES STRUCTURES ALGÈBRIQUES.

This paper has been developed in a series of (unpublished) lectures from 1967 on, as well as in several Theses.

19.1+ *Algebraic structures and sketched structures.*

What is a mathematical structure? This question has aroused widespread interest since the thirties, and it preoccupied Charles very early. In the fifties, he simultaneously introduced the axiomatic theory of species of structures over a category and of local structures /36, 47, 55/ and he gave a constructive definition of structures via the type functors /52/ as a categorical version of Bourbaki's theory (cf.

19.1 ... Comment 116.1).

In the sixties, his general results on structured (or concrete internal) categories, groupoids, groups, ..., actions of categories (O, III) triggered the problem of including them in a theory of internal structures which so could be studied in a unified setting (Comment 593.1, O, III-2). Such a theory for the algebraic structures of universal algebra was meanwhile developed, following Lawvere's lead [103], by Linton [107], Beck [8], Bénabou [9] (who pointed [103] to us), ..., on a syntactic basis (equational presentation, algebraic theory) and on a semantic basis (characterization and properties of algebraic categories, of equational categories, of monadic categories); cf. the exposition of Manes [109].

This dual aspect carries on to the more general theory of sketched structures, initiated in /93, 98/, which unites structures defined by partial operations such as categories and their actions, sheaves over a Grothendieck topology (Bénabou [9]) and many other structures (cf. Comment 31.2):

1. Syntax (Comment 31.4): The sketch provides a graphical equational presentation of the structure; two such presentations are equivalent if their sketches have the same type, which is the analogue of the algebraic theory; the type of a sketch is defined in /98, 115/.

2. Semantic (Comment 31.3): The realizations - or models - of a sketch in a category H are called (internal) *sketched structures in H* ; hence a categorical study of categories of sketched structures.

19.2+ On the definition of sketches.

In /93/, a very general definition of sketches was adopted to cover most usual structures. In /98/ a (projective) sketch σ is defined as a pointed base of category U with distinguished projective cones; the models of σ in a category H are the neofunctors $U \rightarrow H$ which send the distinguished cones on limit-cones and the distinguished morphisms on monomorphisms (condition which might also be given by cones); the type of σ is its reflection in pointed $\mathcal{J}$ -complete categories with a choice of $\mathcal{J}$ -limits; it is proved to exist only if σ has

19.2... a partial choice of cones (there is at most one distinguished cone with a given basis).

In this paper a presketch is a pointed base of category with a partial choice of projective cones and of inductive cones (a «mixed» sketch). A prototype is a pointed category with a partial choice of limits and of colimits; a type is a pointed $\mathcal{J}$ -complete and $\mathcal{J}$ -cocomplete category with a choice of $\mathcal{J}$ -limits and of $\mathcal{J}$ -colimits. The reflections of σ in the prototypes and in the types are proved to exist; σ is a sketch if the reflectors are 1-1. The models of σ in H are the morphisms from σ to a given type on H .

In / 115 / (O, IV-2) sketches are replaced by mixed cone-bearing neocategories σ and there are constructed reflections of σ into mixed limit-bearing categories, into loose types (i. e., categories with a multiple choice of $\mathcal{J}$ -limits and $\mathcal{J}$ -colimits), into prototypes and into types. The models of σ in H are the neofunctors sending the distinguished (co)cones on (co)limits. A theory of such mixed sketches is being developed by Guitart & Lair [63].

Sketches with cylinders i.o. cones have been studied by several authors; e. g.: Freyd & Kelly [49], and Kelly [86] in an enriched setting; Isbell [77] who calls them pretheories.

The variance in the definition may be explained as follows:

1. The definition of / 93 / is too general for obtaining deep results.
2. The restriction to projective cones ensures the category of sketched structures has nice properties: however it eliminates important structures, as fields or topologies; whence the mixed sketches.
3. The partial choice of cones was introduced as a purely technical device to apply the completion theorems of / 102 /; it is dropped in / 115 / where constructive (i.o. existential) methods lead to more general completion theorems. The condition that a sketch be a base of category or be sent 1-1 in its prototype comes from the desire of obtaining «cheaper» presentations of the structures; but it is difficult to check it; whence more computable conditions devised by Lair [93] to cut off the clearly useless data.

19.2... 4. The distinguished morphisms and the realizations in a pointed type give categories of sketched structures which are isomorphic (not only equivalent) to the usual categories; e. g., the category of topological categories as defined in /50, 92/ is only equivalent to the category of internal categories in *Top*. But for semantic problems, «equivalence» is a good notion, so that it's easier to work with limit-bearing categories and their models in a category, as we did in /115/ Part III and in /117, 119/, specially for regular sketches.

20.1. For these sketches, cf. /93/ (O, III-2).

21.1. R. de $U^{\mathcal{C}}$ i.o. $U^{\mathcal{C}}$.

21.2. $U^{\mathcal{C}}$ is the dual of a subcategory of the simplicial category /113/.

23.1. R. $\tilde{p}^I(\mathbb{M}^I) \cap R_g(H^*)$ i.o. $\tilde{p}^I(\mathbb{M}^I)$.

27.1. This theorem is also valid if $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ is the category of cone-bearing neocategories (not necessarily with a partial choice of cones), $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ the category of limit-bearing categories, and $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}$ the category of $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ -complete limit-bearing categories; cf. /115/, Propositions 13 and 15.

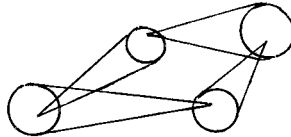
28.1. For the injectivity of $U \rightarrow \hat{H}$, cf. /114/.

29.1 ¶ R. $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ sont à $\mathcal{F}_0$ - i.o. est à $\mathcal{F}_0$ -

The insertion $\mathcal{S}^{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{S}^{\mathcal{A}}$ may not preserve inductive limits, since the injectivity-in-the-prototype condition is not preserved by inductive limits.

29.2. R. prototype i.o. prototype.

30.1 ¶ This assertion is not valid unless conditions are laid on the form of $\bar{\sigma}$, e. g. to eliminate «cycles of distinguished cones», such as



31.1. R. but O , de source i.o. source O , de but.

In the following comments, the term «sketch» means «mixed cone-bearing neocategory»; it's a projective sketch if all the distinguished cones are projective, a mixed sketch otherwise.

31.2+ *Examples of sketched structures.*

They may be constructed in several ways :

- To explicitly describe a sketch by abstraction of the literal definition of a structure, each axiom being «sketched» (hence the term). For instance an equational presentation of an algebraic structure is such a sketch (and its type is the algebraic theory).
- To characterize a category A as belonging to some class of sketched structures (algebraic categories, locally presentable categories, localizable categories, ...); cf. Comment 31.3.
- To construct a sketch from other sketches (by syntactic operations, Comment 31.4) or a category of sketched structures by general processes; these two methods are more or less intertwined; e.g. if σ and σ' are sketches, their tensor product $\sigma \otimes \sigma'$ may be directly defined (Conduché [26], Lair [98]) or axiomatically characterized by the condition $H^{\sigma \otimes \sigma'} \simeq (H^{\sigma})^{\sigma'}$, where H^{σ} is the category of models of σ in H .

Here is a list of concrete examples .

1. *Projectively sketched structures* : General algebraic structures, such as categories, groupoids, ... /93/, ringoids (Lellahi [106]), relations (Barthélémy [7]). Dominated categories (A. Burroni [19]) and discretely structured ones (E. Burroni [21]). Prototypes and types (A. Burroni [19], C. Lair [99]). Action of a category on a set (A. Burroni [19]) or a category (Horrent [73]), distributors (Vaugelade [128], /117/), join of two categories (A. Burroni [19]). Sheaves for a Grothendieck topology (Bénabou [9], who calls a projective sketch a projective topology). Algebras of a monad with rank in a locally presentable category (Gabriel & Ulmer [50]).

2. *Mixed sketched structures* : Fields. Cartesian closed categories, toposes (Conduché, A. Burroni [20] via his graphical languages). Limit-spaces and topologies (A. Burroni [19]), whose sketches are simplified thanks to the notion of typification, which sketches any endofunctor of *Set* (as colimit of representable functors). Local rings, total orders, metric spaces, euclidean spaces, Banach spaces, which

31.2... Diers describes [34] thanks to sketches with «local limits» i.o. limits; but a *local sketch* on U is equivalent to a usual sketch with coproducts and projective cones on the free coproduct completion of U (cf. [39] and Guitart-Lair [63]); notice that in these local examples, the sketched morphisms are very strict (local homomorphisms, ..., isometries). Models in Set of a site [9].

31.3+ *Semantic problems.*

They concern the category H^σ of models in a category H of a sketch σ on U .

1. *Properties of H^σ* : In /98/ and Lair [94], existence theorems for limits and colimits are proved and forgetful functors from H^σ (e.g. evaluation functors to H , or Set when H is concrete) are studied. For a mixed sketch, Guitart & Lair [63] obtain pointwise computations of limits, colimits, ultraproducts, and prove the existence of local limits (in the sense «limits in the free cocompletion») and of locally free structures (whence a strengthening of Diers's work on the spectrum). The associated sheaf Theorem (cf. Comment 305.2) gives conditions for H^σ to be reflective in H^U ; conversely, each reflective subcategory K of H^U generates a category H^σ for some inductive sketch on U (Conduché [26]). Internal structures in H are «indexed σ -structures over H »; more precisely, H^σ is equivalent to the full subcategory of $(Set^\sigma)^{H^{op}}$ whose objects are the $F: H^{op} \rightarrow Set^\sigma$ such that $p_e F$ (where p_e is evaluation at e) be representable for each object e of a σ -generating subset of U (/115/, section 0-B). Monoidal closed structures on H^σ are constructed from monoidal closed structures in H : via double structures, in /115/ (O, IV-2, to which we refer for comments) or via double costructures in Foltz & Lair [46] whose general existence criteria imply that the categories of magmas, semigroups, groups, rings, have no monoidal biclosed structure [47].

2. *Characterizations of Set^σ* : When is a category L sketchable, i.e., equivalent to some Set^σ ? Lair [94] proves that, if L is sketchable, then it is also sketched by the canonical (large) type on Set^L for σ mixed, and by a sketch on L^{op} for σ projective. This

31.3... last result is linked with the several characterizations of projectively sketchable categories given by Gabriel & Ulmer [50]: locally presentable categories, categories of extreme continuous functors, categories of functors $t: \mathbf{U}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ such that $\text{Hom}(s, t)$ be a bijection for each s in a given subclass of $\mathbf{Set}^{\mathbf{U}^{op}}$. Diers's localizable categories [34] (i.e., categories $\mathbf{Set}^\sigma$, σ a local sketch) are exactly the categories of *Set*-models of sketches with projective limits and coproducts, cf. Guitart & Lair [63] who characterize the mixed sketchable categories as the axiomatizable categories of Andreka & Nemeti [3].

3. *Comparison functors* $H^\phi: H^\sigma \rightarrow H^{\sigma'}$, where $\phi: \sigma' \rightarrow \sigma$ is a morphism between sketches are studied by Burroni [19], Conduché [26], Lair [100], Guitart & Lair [63], who give conditions for H^ϕ to admit a coadjoint or an adjoint. Adapting Beck's tripleability theorem, Lair [99] proves that the category of types is monadic over *Cat*, thanks to an appropriate description of the sketch of types. Burroni [20] gives many examples of sketchable categories which are monadic over *Graph*, in particular the category of toposes (with distinguished objects and limits).

31.4 + Syntactic problems.

They center around properties of the categories of sketches and constructions based on the «form» of the sketch, whence a geometrical and a logical theory of sketches.

1. *Ideas or minimal presentations* are defined in a very general setting in /93/ (O, III-2). A constructive definition is given by Lair [93] who characterizes sketches admitting an idea (maquettes) and constructs all the sketches with a given idea; this leads to comparisons between structures (e.g. categories are «finer than» quasi-categories); in the more logical frame considered by Mijoule [111], the idea is seen as a language and the corresponding sketches are described by formulas on it. Now in [29], Coste describes his *lim*-theories (which are but projective sketches whose distinguished cones are indexed by finite categories) and the corresponding types via a calculus of sequents with

31.4... «good» formulas written with finite conjunction and existential quantifications.

2. *Coherence problems.* Often a sketch σ is given by the data of an idea S (i.e. a graph) and relations and cones on the type T of S . The type T' of σ is a quasi-quotient of T by relations (or axioms). To give an explicit description of T' from S requires to solve a «word problem» for recognizing which diagrams commute. It may be called the coherence problem for the sketched by σ structures, by analogy with the coherence problems studied by Mac Lane, Kelly [108,88,85] and several authors (cf. [25]). The structures they consider, e.g. monoidal (closed) categories, are 2-sketchable, so that it would be necessary to solve the word problem for 2-sketches (Comment 32.1); notice that the club of Kelly [83] plays the same role as a 2-sketch. In [85] Kelly gives a more concrete interpretation of coherence problems, as being the word problem for free models (which he solves for compact closed categories).

3. *Construction of sketches:* Lair [99] associates to a sketch σ the sketch of the «total» σ -structures, whose distinguished cones are indexed by discrete categories (e.g., the sketch of monoids so corresponds to the sketch of categories); on this total sketch, associativity, unitarity, commutativity, ... are easily defined; these supplementary axioms are transported back on σ . A more closed study of commutativity is done [96], thanks to the product of the groups of isomorphisms of the indexing categories of the distinguished cones; the class of dual to σ species forms a homogeneous space on this group, whence a formalization of the two kinds of duality (right and left modules, a category and its dual). In [97] Lair constructs n -ary structures corresponding to a σ -structure (generalizing the n -ary categories /97/); they are not to be confused with the n -uple structures of species σ whose sketch is the tensor product $\bigotimes^n \sigma$ and which lead to applications in homotopy [95].

4. *Calculus on internal formulas* (Guitart & Lair [63]): To a mixed

31.4... sketch σ , there is associated a concrete sketch (in the terminology of [62]) formed by a graph S and projective cones on Set^S such that the models of σ in Set be those functors $M: S \rightarrow Set$ which «validate» each cone (each morphism from the vertex of the cone to M factors through a canonical projection, unique up to a zigzag in the base). A logical calculus on internal formulas, which are inductive systems of projective cones (or cylinders in the free cocompletion $(Set^S)^{op}$) is developed, one of the tools being the exact squares defined by Guittart [60]. Given a family $(\phi_i: \sigma \rightarrow \sigma_i)_{i < n}$ of «pseudo-dense» morphisms between sketches and a boolean formula $P(x_0, \dots, x_{n-1})$, there is constructed a sketch σ' such that

$$F \models \sigma' \iff P(F \models \sigma_0, \dots, F \models \sigma_{n-1}),$$

where $F \models \sigma'$ means F is a Set -model of σ which extends into a model of σ' (cf. [65]).

5. Morphisms between sketches. The categories of sketches and morphisms which preserve the distinguished cones are studied in /98, 115/ and [98, 99]: reflectivity of some subcategories, representability of the corresponding 2-categories, monoidal closed structures. The morphisms are very strict: e.g. there is no morphism from the sketch of categories to the sketch of monoids, since the indexing categories of the distinguished cones are preserved. Morphisms with a «change of indexing» $F: (U, \Gamma) \rightarrow (U', \Gamma')$ may be defined by the data of a neo-functor $F: U \rightarrow U'$, a map $\phi: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ and a family

$$(\phi_\gamma: I_\gamma \rightarrow I_{\phi(\gamma)})_{\gamma \in \Gamma}$$

of functors, where I_γ is the indexing category of the cone $\gamma \in \Gamma$, such that $F\gamma = \phi(\gamma)\phi_\gamma$ for each $\gamma \in \Gamma$. To construct n -arisations in [97] Lair defines n -differentiated sketches, which are semi-simplicial objects in the category formed by these morphisms. Another generalization is afforded by the lax morphisms (cf. Comment 32.1).

32.1 + Some generalizations of sketches.

1. Enriched sketches and lax models: Foltz [43, 45] proved the asso-

32.1 ... ciated sheaf Theorem for dominated projective sketches and the reflection of V-prototypes into V-types, where V is a monoidal closed category. Kelly [86,87] has undertaken a general theory of V-sketches with cylinders (Associated sheaf Theorem, characterization of V-categories of V-models). For $V = Cat$, examples of 2-sketched structures include monads (the 2-sketch being the simplicial 2-category, E. Burroni [21]), algebras on a monad, adjoint functors (Auderset [5]). Other examples are obtained by the following method, which leads to descriptions of structures involving diagrams which commute up to an equivalence i.o. up to the nose: To a 2-sketch Σ on C there is associated a 2-sketch $lax \Sigma$ on the 2-category which makes 2-functors out of lax functors from C (constructed by Vaugelade [128], Gray [53], Bénabou); the 2-models of $lax \Sigma$ are called lax models of Σ or, if Σ is the trivial 2-sketch on a usual sketch σ , lax models of σ . In particular, monoidal categories are lax models of the sketch of monoids, Bénabou's bicategories [11] and double up to isomorphism categories (Chamaillard [22], Moreau [112]) are lax models of the sketch of categories. More general indexed 2-sketches (with cones replaced by indexed limits) are defined in Comment 491.2 (O, III-2), in Street [123].

2. *Internal sketches and lax morphisms*: An internal sketch (resp. internal prototype, type) in a category H is a model in H of the sketch of sketches (resp. σ_{pro} of prototypes, σ_{type} of types). If H admits $\mathfrak{J}$ -limits which commute with colimits of ζ -sequences, where ζ is an ordinal greater than the ordinal of each category I in $\mathfrak{J}$, any internal $\mathfrak{J}$ -prototype freely generates an internal $\mathfrak{J}$ -type in H (Burroni [19]). Internal sketches in Cat are called double sketches; 2-sketches may also be viewed as special double sketches. Let Σ be a double prototype on the double category Q (defined by

$$\sigma_{Cat} \hookrightarrow \sigma_{pro} \xrightarrow{\Sigma} Set);$$

since

$$Cat^{\sigma_{pro}} \approx (Set^{\sigma_{Cat}})^{\sigma_{pro}} \approx (Set^{\sigma_{pro}})^{\sigma_{Cat}},$$

Σ determines a category in the category of prototypes; its object of

32.1 ... morphisms is a prototype Σ^1 on the first category Q^1 of Q and its object of objects a prototype Σ^0 on the first category H of 1-morphisms of Q . If σ is a sketch, the models ϕ of σ in Σ^1 form a category (σ, Σ) for a composition deduced from the second composition of Q ; the domain $\alpha\phi$ and codomain $\beta\phi$ of ϕ are models of σ in Σ^0 and Σ is called (/ 117 /, Section 2-D) a Q -wise lax morphism from $\alpha\phi$ to $\beta\phi$, by analogy with the case Q is the double category of squares of the 2-category Cat , in which lax functors are so obtained. (σ, Σ) contains H^σ to which it reduces if Σ is the canonical prototype on the double category H^2 . In [64], Guitart & Lair give conditions for H^σ to be coreflective in (σ, Σ) . Dually, they consider categories of lax morphisms between models of σ in H associated to the data of a cocategory on the category of sketches (or, equivalently, to an internal sketch in Cat^{op}) with σ as its object of morphisms.

3. *Theories relative to a corpus* (Bénabou [12]). A corpus is a stable enough sub-2-category $\mathcal{K}$ of Cat , such that each category D has an up to equivalence reflection $G(D)$ in $\mathcal{K}$. A relative to $\mathcal{K}$ theory is obtained by equipping $G(D)$ with axioms to identify some objects and some parallel morphisms and with a class J of distinguished morphisms (to be sent on iso). Whence a sketch on the $\mathcal{K}$ -quasi-quotient $\hat{D}$ of $G(D)$ by the axioms, whose distinguished cones are the cones

$$\begin{array}{c} \text{Diagram of a cone with two parallel arrows} \\ \rho(j) \end{array} \quad \forall j \in J,$$

where $\rho : G(D) \rightarrow \hat{D}$ is the canonical $\mathcal{K}$ -morphism (Bénabou asks the axioms and J to be finite, but this is not essential). A model of the theory in an object X of $\mathcal{K}$ is a $\mathcal{K}$ -morphism $\hat{D} \rightarrow X$ which is a model of this sketch. The interest of these theories and their models is their versatility, depending on the choice of the corpus: they include structures sketched by projective, local or mixed sketches for $\mathcal{K}$ the corpus of complete, complete with coproducts, complete and cocomplete categories resp.; internal $\mathfrak{J}$ -types in a «good» category H (Section 2) for

32.1 ... $\mathcal{K}$ the corpus of internal $\mathcal{G}$ -complete categories; V -enriched types for $\mathcal{K}$ the corpus of complete V -categories; geometric theories for $\mathcal{K}$ the corpus of regular categories admitting universal finite unions of subobjects, ...

4. *Machines* (Guitart [57]). Let $\sigma = (U, \Gamma)$ be a sketch, where U is a category and Γ a class of cones (or cylinders) on U . Then Γ generates a subcategory C of the category DU of diagrams in U ; to the insertion $C \hookrightarrow DU$, the adjunction (Diagram-Crossed product) (cf. Comment 440.2, O, III-2) associates a span

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\Sigma} & \\ \pi_F \swarrow & & \searrow \\ C & & U \end{array}$$

where the cofibration π_F is deduced from the functor

$$F = (C \hookrightarrow DU \xrightarrow{\text{base}} Cat).$$

So a sketch becomes a peculiar machine; we recall that a machine [57] with input G and output U is any span

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{\Sigma} & \\ p \swarrow & & \searrow \\ G & & U \end{array}$$

with p a cofibration; for G and U monoids, it reduces to a Mealy machine; if p is a discrete cofibration, it is a «preferential control system» [37]. Conversely, a general machine, identified to the corresponding functor $G \rightarrow DU$, may be interpreted as a sketch U with cylinders G which are «organized in a category». Machines form a bicategory embedded in the bicategory of 2-profunctors [57].

32.2. R. Ac. Sci. i.o. Aci .

32.3. R. catégories n -aires i.o. catégories .

ON / 107 / : PROLONGEMENTS UNIVERSELS D'UN FONCTEUR PAR ADJONCTION DE LIMITES.

35.1. In modern terms: p is faithful and amnestic, hence it is a *concrete functor*.

35.2. Also called transportable concrete functors.

35.3 + *Geometrical motivations.*

This paper stemmed from problems in Differential Geometry. The concrete category $\mathcal{D}^r$ of r -differentiable manifolds (finite dimensional or Banach manifolds) admits finite products, but it's not finitely complete: If f and g are differentiable maps from M to M' , the equation $f(m) = g(m)$ does not define a submanifold of M ; two differentiable maps which are not transversal have no pullback,... The lack of pullbacks led Charles to define a differentiable category as an internal category in $\mathcal{D}^r$ whose domain and codomain are submersions / 50/. This condition is satisfied by the differentiable categories of jets; recently Kock has proved it has a real meaning in Synthetic Differential Geometry.

However, some problems suggest to consider on any subset of a manifold M , or at least on those subsets defined by equations, the «differentiable structure induced by M ». Charles gave a specific sense to this sentence by constructing the following concrete category $\tilde{\mathcal{D}}^r$: if M is a manifold, A a subset, a map $h: N \rightarrow A$ from a manifold N is admissible for (A, M) if $N \xrightarrow{h} A \hookrightarrow M$ is differentiable. Then the objects of $\tilde{\mathcal{D}}^r$ are the equivalence classes $/A, M/$ of pairs (A, M) for the relation:

$(A, M) \sim (A', M')$ if they have the same admissible maps.

A morphism $k: /A, M/ \rightarrow /A', M'/$ is a map $k: A \rightarrow A'$ whose composite with each admissible map $h: N \rightarrow A$ for (A, M) is an admissible map for (A', M') .

The concrete category $\tilde{\mathcal{D}}^r$ admits initial lifts of finite sources, in particular finite limits. So internal categories in $\tilde{\mathcal{D}}^r$ satisfy general theorems on concrete internal categories (O, III-1). Internal groupoids are the Lie groupoids as defined by Ngo Van Qué [113]. Later on, $\tilde{\mathcal{D}}^r$ has been studied (in a non-categorical setting) by Aronszajn and Marshall [110]. It would be interesting to obtain an axiomatic characterization of usual manifolds among the objects of $\tilde{\mathcal{D}}^r$ (or of other com-

35.3... pletions of $\mathcal{D}^r$). Specialists of Differential Geometry have exhibited larger categories than $\mathcal{D}^r$, smaller than $\tilde{\mathcal{D}}^r$; for instance, the category of Q-varieties of Pradines [116].

Initially, Charles intended to describe $\tilde{\mathcal{D}}^r$ in his paper /105/ on differentiable categories; but he thought this point of view would not be well understood by geometers, and he decided to publish it separately. When writing down the details, it became clear the same construction applied to any concrete functor and other completion theorems were deduced from it. Whence the present paper, which was about unnoticed in its time. Several years later, the theory of initial completions of concrete functors has been extensively investigated to generalize results on completions of posets and to study cartesian closed complete extensions of *Top* and similar categories over *Set* (useful for applications in Algebraic Topology and Analysis). A good summary and bibliography are to be found in Herrlich [69] (cf. also Comment 76.1). The constructions given here are related to the Mac Neille completion (Theorems 3, 6 and Comment 76.1), the largest completion and the universal completion (Theorem 10 and Comment 94.1).

35.4. p is K' -spreading iff it admits initial lifts for singleton sources $(k': e \rightarrow p(s), s)$ with $k' \in K'$.

36.1. Here p is associated to a generator a of H means that p is a concrete functor equivalent to $\text{Hom}(a, -): H \rightarrow \text{Set}$, where a is a final object of H .

37.1. In /115/, this result is generalized to the case where ν is a multi-map. The problem of embedding a category into a $\mathcal{J}$ -complete and $\mathcal{J}$ -co-complete category, with preservation of a given class of limits and colimits, is also solved in /102, 115/.

37.2. A quartet is just a commutative square.

37.3. F_γ is well-faithful iff F is amnestic.

38.1. Notice the order in which C and $\hat{C}$ are written.

38.2. δ is the Yoneda embedding $C \rightarrow \text{Set}^{C^{op}}$.

39.1. With usual notations, $\delta_{q,H}(\sigma) = \text{Hom}_L(q-, \sigma)$.

39.2. $j: s \rightarrow S$ is a U -monomorphism means that $U(j)$ is a monomorphism which admits j as an initial lift.

39.3. A «foncteur d'homomorphismes saturé» means a transportable concrete functor.

40.1 + *Why three universes?*

Elements of $\mathfrak{M}_0$ are to be thought of as small sets, while elements of $\hat{\mathfrak{M}}_0$ are large sets. The initial problem was to extend the concrete functor from the category of small differentiable manifolds. This functor is a large functor, so the completion problem had to be solved for large functors, which are objects of a category $\mathcal{H}^\epsilon$ of functors. It is transposed into the existence of an adjoint for some functor from $\mathcal{H}^\epsilon$; solutions are either constructed (in which case $\hat{\mathfrak{M}}_0$ is useless, as in Theorem 2, 3) or proved to exist via the Adjoint functor Theorem of /102, 108/; in the latter case, there is considered as an auxiliary tool the «same» category as $\mathcal{H}^\epsilon$, but relative to a larger universe than $\hat{\mathfrak{M}}_0$, namely $\hat{\hat{\mathfrak{M}}}_0$.

40.2. $\nabla_{K'} \hat{\mathcal{F}}$ is the category of large functors over K' , and $\mathcal{H}$ is its full subcategory of concrete functors over K' .

40.3. $\hat{C}'$ is an enlargement of C' iff C' is the smallest subcategory of $\hat{C}'$ closed under isomorphisms which contains C .

41.1. $R: L_Y' \rightarrow L$ i.o. L .

43.1. q is K' -right solving iff it lifts the equalizers which lie in K' ; cf. Comment 221.2 (O, III-1).

43.2. In other terms, q is K' -spreading iff its restriction $(K', q)^\sim \rightarrow K'$ is a discrete fibration.

45.1. The fact that K' is a subcategory (and not any subset) is used here.

48.1 + Theorem 1 is still valid if K' is not a subcategory of K . However, then the proof must be modified, taking for H' the union of the sequence (H'_n) , where H'_{n+1} is the full subcategory of $\hat{H}$ with objects the domains of the P -injections whose codomains are in H'_n .

48.2 + *Finally dense subcategories.*

Let $q: L \rightarrow K$ be a faithful functor and H a full subcategory of L .

48.2... L is q -generated by H iff L is the largest category with a faithful functor to K and with $L.H_0$ as its class of morphisms with domains in H . Such is the reason why Charles introduced this notion. However, there is an equivalent useful well-known characterization:

Say H is *finally dense for q* if each object S of L is the final lift of some q -sink with domain in H . Then:

PROPOSITION. L is q -generated by H iff H is finally dense for q .

Δ . If L is q -generated by H , then the object S of L is the final lift of the q -sink:

$$(s_i, q(h_i) \mid s_i \in H_0, h_i: s_i \rightarrow S).$$

Conversely, suppose S is the final lift of the q -sink

$$(s_i, f_i: q(s_i) \rightarrow q(S) \mid i \in I)$$

with s_i in H , and let $g: q(S) \rightarrow q(S')$ satisfy

$$g.q(S.L.s) \subset q(S'.L.s) \text{ for each } s \text{ in } H.$$

Then $g.f_i$ lifts into a morphism $s_i \rightarrow S'$ in L for each $i \in I$, whence g lifts into a morphism $S \rightarrow S'$ from the final lift S of the sink. It follows that L is q -generated by H . ∇

48.3. R à H , où $\hat{\mathcal{M}}_0$ contient les Hom de L i.o. à H .

49.1. In other terms: the insertion in L of a finally dense subcategory H (cf. Comment 48.2) preserves the concrete limits (i.e., the limits preserved by the concrete functor). A similar proof shows that it preserves all existing initial lifts.

53.1. The insertion of H in L preserves all initial and final lifts, a fortiori all limits and colimits (Comment 49.1).

54.1. $\tilde{q}$ is considered later on (in Theorem 10, with the symbol p_K^e).

54.2. For a justification of «smallest», cf. Comments 58.1 and 76.1.

55.1. $\tilde{\mathcal{Q}}$ is useless (it comes from the older way Charles defined coadjoints through coreflections).

58.1. What means «maximal»?

The construction of $p_{\mathcal{K}}^f = q$ may be sketched as follows: q is the

58.1 ... amnesic functor associated to the faithful functor $\hat{q}: \hat{L} \rightarrow K'$ which satisfies the conditions:

1. The objects of $\hat{L}$ are the «formal lifts» (s, k) , where $k \in p(s) \cdot K'$, and $(s, p(s))$ is identified to the object s of H ;
2. k defines a morphism $(s, k) \rightarrow s$; for this morphism to be a $\hat{q}$ -injection (i.e., an initial lift), the morphisms from the object s' of H to (s, k) are defined by those g such that

$$k \cdot g = p(h), \text{ for some } h: s \rightarrow s' \text{ in } H;$$

3. The Hom set from (s, k) to (s', k') is the «largest» possible; more specifically, it is chosen so that $\hat{q}$ be p -generated by H (which determines it uniquely from 2).

In the passage from $\hat{q}$ to q , the «largest number» of objects are identified, since condition 3 implies there is the largest number of isomorphisms over an identity; but the Hom are unmodified. Hence q is the K' -spreading extension of p which has the smallest class of objects and the largest Hom sets. For precise optimality properties of q , cf. Comment 76.1.

61.1. Add si p en est un .

61.2. $p_a = \text{Hom}(a, -): H' \rightarrow \text{Set}$ is defined if the Hom in H are small sets.

62.1. Then a is a final object of H' and p admits atoms in the sense of / 77 / (O, III-2). This condition is satisfied by most functors occurring in Topology.

62.2. So p lifts constant maps.

63.1 + Finally dense subcategories and functor categories.

PROPOSITION. If $q: L \rightarrow \text{Set}$ is a concrete functor, H is a finally dense subcategory of L and q is equivalent to $\text{Hom}(a, -)$ for some final object a of H , then $\delta_{q,H}: L \rightarrow \text{Set}^{H^{op}}$ defines an isomorphism onto a full subcategory and it preserves concrete limits.

The proof of Theorem 4 generalizes to this setting. In fact, the fullness follows from the fact that each natural transformation

$$\Psi: \delta_{q,H}(S) \rightarrow \delta_{q,H}(S') \text{ with } S \text{ and } S' \text{ objects of } L,$$

63.1 ... is a substructure of $Hom(q-, g)$, where

$$g: S \rightarrow S': x \mapsto \Psi(a)(\hat{x}), \quad \hat{x} = \text{constant map on } x.$$

As $\delta_{q,H}$ factorizes as

$$L \xrightarrow{q} Set \xrightarrow{Yoneda} Set^{Set^{op}} \xrightarrow{Set^{(qi)^{op}}} Set^{H^{op}}$$

where the two last functors preserve limits, $\delta_{q,H}$ preserves concrete limits (i.e., limits which are preserved by q).

63.2. Here is a quicker proof: If S' is closed under isomorphisms, it is closed under equalizers, so that the equalizer closures $\hat{A}$ and $\bar{A}$ of A in S and S' are equal. In any case, $\bar{A}$ is equivalent to the equalizer closure of A in the isomorphism-closure of S' , hence to $\hat{A}$.

66.1. R. (Φ, k, σ) i.o. (σ, k, s) .

68.1. A more striking description of P is given in /146_{IV.1}/.

76.1 + Mac Neille μ -completions.

Theorems 2-3 and 5-6 are particular cases of a slightly more general completion theorem, which also encompasses recent results on (initial) completions of concrete functors (cf. [69]). Indeed the proofs of Sections 5 and 6 carry on if μ distinguishes any cones (i.o. limit-cones), which are to be lifted into initial cones; the only modification consists in replacing the limits in the domain by initial lifts. To make the comparison with other papers more striking, and to emphasize in what sense the constructions are optimal, we state the corresponding results with a terminology suggested by Herrlich's one. For more details, cf. [40].

Let K be a category, $\mathcal{J}$ a class of categories, μ a multi-choice of (projective) cones on K ; i.e., μ associates to each functor $\phi: I \rightarrow K$ with $I \in \mathcal{J}$ a (may-be void) set $\mu(\phi)$ of cones with base ϕ . Suppose $p: H \rightarrow K$ is a concrete functor (denoted $\check{p}: \check{H} \rightarrow \check{K}$ in Sections 5-6). We say that $P': H' \rightarrow K$ is a μ -completion of p if it is a concrete functor which admits p as a full restriction and which is μ -complete, i.e., for each P' -cone (θ, Φ) where $\Phi: I \rightarrow H'$ is a functor and $\theta \in \mu(P', \Phi)$,

76.1 ... there exists an initial cone θ' with base Φ such that $P'\theta' = \theta$; to say that θ' is an initial cone means that τ factors through θ' if τ is a cone with base Φ such that $P'\tau$ factors through θ . This μ -completion P' is *finally dense* if H is finally dense for P' (Comment 48.2), (*fully*) μ -*generated* if H' is the (full) (μ, P') -closed subcategory of H' generated by H (Proposition 10 and Definition page 72 are valid for initial cones i.o. limits), *weakly dense* if

$$P'(S'.H'.S) = P'(S''.H'.S) \text{ for each } S \in H_0 \text{ implies } S' = S''.$$

If P' is both finally dense and fully μ -generated (resp. weakly dense and μ -generated), then P' is called a (resp. a weak) *Mac Neille μ -completion* of p .

The proof of Theorem 6 only uses the final density of P in Part 1, the weak density of $\hat{P}$ in Part 2; so it extends to give:

PROPOSITION A. Let $P': H' \rightarrow K$ and $P'': H'' \rightarrow K$ be two μ -completions of p . In each of the two following cases;

- (i) P' is fully μ -generated and P'' is finally dense,
- (ii) P' is μ -generated and P'' is weakly dense,

there exists a unique morphism $F': P' \rightarrow P''$ which is the identity on H and preserves initial lifts of P' -cones (θ, Φ) with $\theta \in \mu(P', \Phi)$ (abbreviated into: P' is μ -smaller than P'').

(For a stronger statement, cf. Comment 77.1.)

The construction of F' (proof of Theorem 6) shows that it maps $S.H'.S'$ 1-1 onto $S.H''.F'(S')$ for each object S of H ; if P' also is finally dense, it follows that $F': P' \rightarrow P''$ is a morphism which extends the identity on H and is a full embedding (abbreviated into: P' is smaller than P'' , following Herrlich). Whence:

COROLLARY. A Mac Neille μ -completion of P is both a smallest finally dense μ -completion and a μ -largest fully μ -generated μ -completion of p .

The constructions of P and $\hat{P}$ in Theorems 5, 6 are still valid (cf. also Comment 307.1), so that:

76.1 ... PROPOSITION B. *The concrete functor p admits, unique up to isomorphism, a Mac Neille μ -completion P and a weak Mac Neille μ -completion $\hat{P}$. If $\mathcal{J}$ and its elements live in the same universe as p then so do P and $\hat{P}$.*

Corollary, Theorem 6, may be easily generalized as follows: μ is called *commutative* if the conditions:

$\phi: I \rightarrow K$, $\theta \in \mu(\phi)$, $\theta_i \in \mu(\phi_i)$ with vertex $\phi(i)$, base $\phi_i: I_i \rightarrow K$ for each $i \in I_0$ imply $\gamma \in \mu(\psi)$, where

$$\psi \in \sum_{i \in I_0} I_i \rightarrow K: (i, j) \vdash \phi_i(j), \gamma(i, j) = \theta_i(j) \cdot \theta(i) \text{ for } j \in I_i.$$

PROPOSITION C. *If μ is commutative, the Mac Neille μ -completion $P: \bar{H} \rightarrow K$ is constructed in one step and each object of $\bar{H}$ is the initial lift of a P -cone (θ, Φ) where Φ takes its values in H and θ is in $\mu(P, \Phi)$ (in other terms: P is μ -initially dense).*

This Proposition suggests another construction of the Mac Neille μ -completion P (cf. [40]): If μ is commutative, P is the concrete functor associated to the faithful functor obtained by adding to p «formal initial lifts» of the p -cones (θ, Φ) with $\theta \in \mu(p, \Phi)$. In any case, μ generates a smallest commutative partial multi-choice of cones μ° , and P is the μ -generated by p restriction of the μ° -completion of p .

Here are some applications of Propositions A, B, C:

1. Let K' be a class of morphisms of K ; take $\mathcal{J} = \{1\}$ and let μ distinguish all the morphisms of K' (considered as singleton cones); then μ is commutative iff K' is a subcategory of K ; in this case, the Mac Neille K' -completion of $p: H \rightarrow K$ is the functor $p_{H'}^e$ of Theorem 3, which is K' -initially dense. If K' is not a subcategory, the Mac Neille K' -completion is only $\hat{K}'$ -initially dense where $\hat{K}'$ is the subcategory generated by K' . Corollary, Proposition A, stresses its optimality.

2. Suppose $\mathcal{J}$ is formed by the unique category



76.1 ... and μ distinguishes the equalizers which are in a subclass K' of K . The Mac Neille μ -completion of $p: H \rightarrow K$ is then the functor $p_{\mathcal{H}}^n$, of Theorem 4, whose optimality is still emphasized by Corollary, Proposition A.

3. Leaving aside size conditions, we can take for $\mathcal{J}$ the class of small discrete categories and for $\mu(\phi)$ all the sources (= discrete cones) with base ϕ ; this μ is commutative. A μ -completion is then called an *initial completion*. Proposition B asserts that there exists a unique (up to isomorphism) Mac Neille initial completion $P: \bar{H} \rightarrow K$ of p , which may not live in the same universe as p . Proposition C proves that P is initially dense, so that an object S of $\bar{H}$ is a class of P -sources (θ, Φ) with Φ valued in H ; the union of these sources is a closed source in Herrlich's sense [69], which belongs to S and determines it. So P «is» the Mac Neille initial completion p_4 of p constructed by Herrlich, who proves that it is the smallest initial completion of p (i.o. the smallest finally dense one, as in Corollary, Proposition A). This stronger result comes from the Duality Theorem for initially complete functors, which has no analogue for a general μ .

Since 1976, Mac Neille completions of concrete functors (which generalize Mac Neille completions of posets, whence their name) have been studied by several authors, e.g., Adamek, Brümmer, Herrlich, Hoffmann, Porst, Strecker, Tholen [1, 4, 15, 18, 68, 71, 72, 114, 125]; their results are summarized in [69] where a good bibliography is to be found. We just point out the two following properties:

1. p has a reflective Mac Neille completion $P: \bar{H} \rightarrow K$, i. e., $\bar{H}$ is reflective in H , iff p is a semi-topological functor, and then P is also the Mac Neille K' -completion of p , where K' is formed by the semi-final p -morphisms (cf. [71]).

2. p has a small (resp. reflective) Mac Neille initial completion iff H can be fully (resp. fully and reflectively) embedded in the structure category $S(G)$ associated to a set-valued functor G (cf. [1]). Here small means in the same universe as p .

77.1 + Extension of morphisms.

The proof of Theorem 6 is still valid if the isomorphism F is replaced by a functor $F: C^* \rightarrow H^*$ which lifts $\mathfrak{J}$ -cones, in the sense that F is left-surjective and for each functor $\Phi: I^* \rightarrow C^*$, $I^* \in \mathfrak{J}$ and each cone γ with base $F\Phi$, there exists a cone γ' with base Φ such that $F\gamma' = \gamma$. More precisely, with the hypotheses and terminology set up in Comment 76.1, its Proposition A may be strengthened into:

PROPOSITION. *Let Q be a μ -completion of a concrete functor q to K ; let P be a μ -completion of p and $F: q \rightarrow p$ be a morphism which lifts $\mathfrak{J}$ -cones. In either of the following cases, F extends into a unique morphism $F': Q \rightarrow P$ preserving initial lifts of Q -cones (θ, Φ) with $\theta \in \mu(Q, \Phi)$.*

1. Q is fully μ -generated and P is finally dense;
2. Q is μ -generated and P is weakly generated.

If μ singles out equalizers in K' (Example 2, Comment 76.1), F lifts $\mathfrak{J}$ -cones iff it is left-surjective, and this proposition gives back the co-universality of $p_{\mathfrak{H}}^n$, in Theorem 3.

77.2. This assertion follows from the more general proposition given in Comment 63.1, since H is finally dense for P .

79.1. In fact, the solution constructed in /102/ is universal.

79.2. L is fully generated by H iff each object σ of L is the colimit of the base functor from the comma category $(H \hookrightarrow L) \downarrow \sigma$ to L , iff H is colimit-dense in L , iff id_L is the Kan extension of $H \hookrightarrow L$ along itself. It implies that the insertion $H \hookrightarrow L$ preserves limits.

80.1. This proposition amounts to the Yoneda Lemma and to the fact that the Yoneda embedding is colimit-dense.

87.1 + Mac Neille completion of a category.

The parallelism between Sections 5 and 6 on completions of concrete functors and Section 7 on completions of categories is emphasized by singling out the optimality of $\mathfrak{N}_{\mathfrak{J}}$ as in Comment 76.1, with an analogous terminology.

87.1 ... Let H be a subcategory of a category L . We say that L is an $\mathcal{J}$ -completion of H , where $\mathcal{J}$ is a given class of categories, if L is $\mathcal{J}$ -complete: each functor $I \rightarrow L$ with $I \in \mathcal{J}$, admits a limit. The $\mathcal{J}$ -completion is *codense* if L is colimit-dense in L (Comment 79.2); it is (fully) $\mathcal{J}$ -generated if L is the (full) $\mathcal{J}$ -limit closure of H . A *Mac Neille $\mathcal{J}$ -completion* of H is a codense and fully $\mathcal{J}$ -generated $\mathcal{J}$ -completion.

The first part of the proof of Theorem 8 gives:

PROPOSITION A. *If H is a colimit-dense full subcategory of L , if $\hat{C}$ is an $\mathcal{J}$ -generated $\mathcal{J}$ -completion of C and if $F: C \rightarrow H$ is a functor which lifts $\mathcal{J}$ -cones (Comment 77.1), then F extends into a (unique up to equivalence) $\mathcal{J}$ -limit preserving functor $F': \hat{C} \rightarrow L$.*

Notice that the proof of Theorem 8 follows the same lines as the proof of Theorem 6, if the finality of H for P is replaced by the colimit density of H in L . In fact, Proposition A could be deduced from Proposition, Comment 77.1, with $P' = \delta_{C, \hat{C}}$,

$$P'' = (L \xrightarrow{\delta_{L, H}} \text{Set}^{H^{op}} \xrightarrow{\text{Set}^{F^{op}}} \text{Set}^{C^{op}}),$$

and μ distinguishing all limit-cones on $\text{Set}^{C^{op}}$.

From Theorem 8 and Proposition A, it follows:

PROPOSITION B. 1. *H admits a unique up to equivalence Mac Neille $\mathcal{J}$ -completion $H_{\mathcal{J}}^{\odot}$, equivalent to $\mathcal{N}_{\mathcal{J}}$, which is (up to an equivalence) the smallest codense $\mathcal{J}$ -completion of H and its largest fully $\mathcal{J}$ -generated one.*

2. *H admits a largest (up to an equivalence) $\mathcal{J}$ -generated $\mathcal{J}$ -completion $H_{\mathcal{J}}^{\bullet}$.*

The order on the $\mathcal{J}$ -completions of H is defined by:

$L' \leq L''$ iff there exists an $\mathcal{J}$ -limit preserving functor $F: L' \rightarrow L''$ which extends the identity on H .

H may not be limit-dense in its Mac Neille $\mathcal{J}$ -completion though it is e.g. if $\mathcal{J}$ consists of discrete categories and is closed under coproducts. If H «is» an order, its (usual) Mac Neille completion «is» the Mac Neille $\mathcal{J}$ -completion of H for $\mathcal{J}$ = all discrete categories.

87.1 ... Other optimal $\mathcal{J}$ -completions of H are formed by its universal $\mathcal{J}$ -completions (with or without preservations of limits) constructed in /102/ ; they correspond to the universal completions of concrete functors (Comment 94.1).

87.2. In this case, $\mathcal{N}_{\mathcal{J}}$ is equivalent to the Mac Neille μ -completion of p , where μ distinguishes the canonical $\mathcal{J}$ -limit cones on Set (cf. Theorem 7). Whatever be p , thanks to the maximality of $\mathcal{N}_{\mathcal{J}}$ among the fully $\mathcal{J}$ -generated $\mathcal{J}$ -completions of H (Comment 87.1), there exist unique (up to an equivalence) $\mathcal{J}$ -limit preserving functors

$$H_{\mathcal{J}} \longrightarrow \bar{H} \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{J}},$$

where $H_{\mathcal{J}}$ is the universal $\mathcal{J}$ -completion of H (cf. /102/).

88.1. As indicated in Comment 76.1, both cases are encompassed in the common setting where μ distinguishes any cones (i.o. limit-cones), to lift into initial cones. The results of this section then extend.

88.2 ¶ Erase $\hat{\mathcal{M}}_0$ -products (it's not true).

89.1. A pullback over K° is always a product in the category of objects over K° .

89.2 ¶ v_j is not left surjective if not all the p_j are, so that K^e does not admit products. However, p_j preserves K' -initial lifts if all the p_j are K' -spreading.

89.3 ¶ Proposition 20 /102/ says that Θ is a limit cone in the product category $\prod H_j$ iff all its factors are. But here we take a subcategory H' of the product, and we may ensure only that Θ is a limit-cone if each $v_j \Theta$ is. Hence K^{μ} does not admit products. However, if all the p_j are in $\mathcal{H}_0^e$, then p is a product of $(p_j)_{j \in J}$ both in $\mathcal{H}^e$ and in K^e .

94.1 + *Universal μ -completions of a concrete functor.*

Section 8 carries on in the frame set up in Comment 76.1, the terminology of which we use. Then the cases $\epsilon = e$ and $\epsilon = \mu$ are united, as well as recent results on universal (initial) completions of concrete functors. The proof of Theorem 10 via Existence Theorems is easily transposed to get the slightly more general proposition:

94.1 ... Let $\mathcal{J}$ be a class of categories, μ be a multi-choice of cones on K , indexed by categories in $\mathcal{J}$. Suppose $p: H \rightarrow K$ is a concrete functor and Δ is a given class of initial cones for p sent by p on μ -distinguished cones.

PROPOSITION A. *There exists a μ -completion $p_\Delta: H_\Delta \rightarrow K$ of p such that the insertion $J: p \hookrightarrow p_\Delta$ maps (the cones of) Δ on initial cones and that, for any morphism $F: p \rightarrow q$ to a μ -complete concrete functor with F mapping Δ on initial cones, there exists a unique morphism $F': p_\Delta \rightarrow q$ which preserves initial lifts of μ -distinguished cones.*

p_Δ is called the *universal (Δ, μ) -completion* of p . In [40], it is explicitly constructed, by a one-step process if μ is commutative (the objects being Δ -complete p -sources), otherwise as a restriction of the (Δ, μ°) -completion of p , where μ° is the commutative hull of μ .

Defining the categories $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}^\mu$ and $\mathcal{K}^\mu$ associated to $\hat{\mathcal{M}}_0$ as in Section 8 (but for the present μ), we get:

COROLLARY. *If $\mathcal{J}$, its elements and p live in the universe $\hat{\mathcal{M}}_0$, then $\mathcal{H}^\mu$ is a reflective subcategory of both $\mathcal{H}$ and $\mathcal{K}^\mu$.*

Indeed, the reflection of p from $\mathcal{H}$ is the universal $(\emptyset, \mu)$ -completion of p , called the *free μ -completion* of p . Its reflection from $\mathcal{K}^\mu$, called the *universal μ -completion* of p , is the universal (Δ_μ, μ) -completion, where Δ_μ is the class of all initial cones sent by p on μ -distinguished cones. As in Theorem 10, it is proved that p_Δ , for any Δ , is a quasi-quotient of the free μ -completion.

Proposition A implies p_Δ is the μ -smallest μ -completion of p such that the insertion maps Δ on initial cones. It has also the following «maximal» property (cf. also Comment 95.1):

A (Δ, μ) -*expansion* of p is defined as a pair (Q, μ') with $Q: L \rightarrow K$ a concrete functor which admits p as a full restriction and μ' a multi-choice of cones in L such that

$$Q_{\mu'}(\Phi) \subset \mu(Q \cdot \Phi) \text{ for each } \Phi: I \rightarrow L, I \in \mathcal{J},$$

$$id_L \text{ is the universal } (\Delta, \mu')\text{-completion of } H \hookrightarrow L.$$

94.1 ... (Notice that Q may not be μ -complete.)

PROPOSITION B. *Let $p_\Delta : H_\Delta \rightarrow K$ be the universal (Δ, μ) -completion of p and μ_Δ the multi-choice of initial cones on H_Δ sent by p on μ -distinguished cones; then (p_Δ, μ_Δ) is the μ -largest (Δ, μ) -extension of p .*

The proof is similar to that of Theorem 3.5, Synopsis (O, III-2) which corresponds to the case where $\mathcal{J}$ is reduced to 1, but for internal functors.

EXAMPLES. 1. If $\mathcal{J} = \{1\}$ and μ distinguishes the morphisms of a subcategory K' of K , or if μ is a multi-choice of limit-cones, the free and universal μ -completions are given by Theorem 10.

2. Let K be complete and μ distinguish all small limit-cones. Then p_Δ is initially dense (cf. [40], last Corollary and Adamek & Koubek [2]). Though $\mathcal{J}$ is large the universal completion of p lives in the same universe than p ; its one-step construction by Herrlich in [70] has suggested the construction given in [40].

3. If μ distinguishes all discrete cones, the free and universal initial completions of p , which may only live in a larger universe than p , are the p_2 and p_3 constructed by Herrlich [68]; he proves that p_2 is the largest initial completion, while p_3 is the largest preserving initial lifts one; this is a stronger result than Proposition B; it may be partially extended to other μ (cf. [40]). In [71], Herrlich & Strecker prove that the universal initial completion of p is reflective iff p is a topologically-algebraic functor, and in this case it is also the universal K' -completion of p , where K' is formed by the semi-universal morphisms; the free initial completion is never reflective. For more properties of initial completions, cf. [69] and its bibliography.

SOME GENERALIZATIONS. 1. If ν is a multi-choice of cocones on K , the problem of embedding p into a concrete functor which is both μ -complete and ν -cocomplete (dual definition) has also a universal solution, whose existence is proved as in Theorem 10. A transfinite

94.1 ... construction of it is given by Adamek & Koubek [2].

2. Smallest and universal *cartesian closed initial completions* of a concrete functor have been considered by several authors (cf. [69] for a bibliography) after Antoine (whose work stemmed from [36] where limit-spaces are used to get a cartesian closed category of infinitely differentiable maps) and Brown [16] (who introduced the cartesian closed category of k -spaces). More generally, Chartrelle [24] constructs universal (monoidal) closed (μ, ν) -completions of a functor.

3. If K is a locale, if μ distinguishes all joins and if p is a pre-local map (in the sense of /55,86/), then the universal μ -completion of p contains the local completion of p (which, viewed upside-down, is equivalent to the sheaf associated to the presheaf defined by p), obtained by Charles as a special case of the important Complete Enlargement Theorem for local functors /47,55,85,110/ which gives a method for constructing structures defined by atlases, such as manifolds, fibre bundles,... (O, II). Local functors are particular cases of double functors, whence the problem of «completing» an internal functor in a concrete category C (for instance a double functor) into an internal functor in C whose underlying functor is μ -complete for some multi-choice μ of limits. An existence theorem for such universal internal completions is given by Leblond [105].

95.1. M «is» the full subcategory of the comma category $p \downarrow K$ with objects the «formal lifts» (s, k) , $k \in p(s).K'$; the free K' -completion $\hat{p}$ is the amnesic functor associated to the restriction $\hat{q}: H \rightarrow K$ of the base functor $p \downarrow K \rightarrow K$. So $\hat{p}$ may be described as the MacNeille K' -completion was in Comment 58.1, except that the Hom sets of M are required to be the smallest (i.o. the largest) possible ones. It follows that $\hat{p}$ is the K' -completion of p with the «smallest Hom sets» and the «largest class of objects».

96.1. An extended version of these lecture notes has been published [38]. It contains e.g. the equivalence between the axiom of universes and the axiom of transitive universes.

ON /52/ : CATÉGORIE DES FONCTEURS TYPES.

This paper was begun in Buenos Aires in 1959 and finished during our four-months stay in São Paulo in 1960; though much older than the other papers in this volume, it is included here because of its links with the papers on completions, especially /102/.

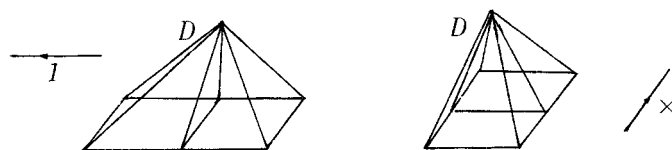
102.1. Otherwise, $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ is an acting category on the category $\mathcal{N}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\mathcal{C}}$.

103.1. Here is the first definition of the 2-category of natural transformations (reduced to $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$); the permutability axiom, which englobes the Godement calculus on functors [52], provided a motivation for defining double categories in /57/. The general 2-category of natural transformations (to-day denoted by $\mathcal{Cat}$) was introduced by Charles in /58/ along with the double category of its squares (called «quintets» in /58/). Cf. (O, III-1).

103.2. They are called pointed endofunctors of $\mathcal{C}$ by Kelly [84] who gives conditions for their categories of algebras to be reflective in $\mathcal{C}$.

The category of naturalized categories, whose objects are the pairs formed by a category $\mathcal{C}$ and a naturalized functor on $\mathcal{C}$, is studied in Charraud's Thesis [23], as well as its subcategory formed by the categories equipped with a monad.

104.1. To any double category D there is associated /120/ the triple category of its squares (for the first composition D^1); for each vertex D of D , it gives the double category of objects of D^1 under D .



In particular, if D is the 2-category $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$, its double category of objects under $Id_{\mathcal{C}}$ is $\mathcal{N}_{\nu}(\mathcal{C})$ (which is a 2-category).

104.2. Notice the notation $\tilde{\mathcal{E}}$ (which reminds of «ensemble») for the category of sets; later on, Charles preferred to name a category by its morphisms i.o. by its objects (as explained in /146_{IV.2}/).

- 105.1. The parallel product of functors is their product in $\mathfrak{N} = \text{Set}^{\text{Set}}$.
 105.2. It is the product in the category $\mathfrak{N}_\nu$ of objects of Set^{Set} under Id .
 106.1. Ψ is the inductive limit functor $Lim: \text{Set}^\Omega \rightarrow \text{Set}$.
 107.1. $\lim \Theta$ is the (pointwise) inductive limit of $\Theta: \Omega \rightarrow \text{Set}^{\text{Set}}$, since $\bar{\Phi}: \text{Set} \rightarrow \text{Set}^\Omega$ is the functor canonically associated with Θ .
 107.2. $\lim \bar{\Theta}$ is the inductive limit of $\bar{\Theta}$ in the category $\mathfrak{N}_\nu$ of objects of Set^{Set} under Id ; the hypothesis Ω is filtered is used to define ϕ . More generally, let $\mathcal{C}$ be any category and $F: J \rightarrow \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}$ be a functor to the category of objects under $\mathcal{C}$; if

$$\bar{F} = (J \xrightarrow{F} \mathcal{C} \setminus \mathcal{C} \xrightarrow{base} \mathcal{C})$$

has an inductive limit and if J is connected, then F has an inductive limit, namely

$$C \xrightarrow{F(j)} F(j) \xrightarrow{can_j} \lim \bar{F}.$$

110.1 + *Type functors and double completions.*

The construction of the monoid $\mathfrak{F}_\tau$ is carried on in the frame of a theory of sets and classes, as Charles favored in the late fifties; cf. /47/ and Comment 24.1 (O, III-1). If Λ is a regular ordinal and if the definition is restricted to families indexed by an ordinal lesser than Λ , then $\mathfrak{F}_\tau = \mathfrak{F}_\tau^\Lambda$. In particular, $\hat{\mathfrak{F}}_\tau$ is the monoid corresponding to the first uncountable ordinal.

Similarly, the monoid $\mathfrak{F}_\tau(Y, y, \Lambda)$ of functors of type (Y, y, Λ) is defined in /123/, Appendix 2, with (Y, y) any naturalized functor on a category $\mathcal{C}$ (we just replace $(\mathcal{P}, y)$ by (Y, y) everywhere).

Now let $\mathfrak{J}$ be the class of discrete categories whose ordinal is lesser than Λ and $\mathfrak{J}$ be the class of all ordinals lesser than Λ (looked at as categories). For a subclass $\mathfrak{A}$ of a double category $\mathfrak{D}$ there is constructed the double $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$ -completion of $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{D}$ (cf. /102/, Definition page 221). If $\mathfrak{D}$ is the 2-category $\mathfrak{N}_\nu(\mathcal{C})$ of objects of $\mathcal{C}^\mathcal{C}$ under Id and if $\mathfrak{A} = \{(Y, y)\}$, this double $(\mathfrak{J}, \mathfrak{J})$ -completion contains $\mathfrak{F}_\tau(Y, y, \Lambda)$ as a submonoid of its monoid M of 1-morphisms. If $\Lambda = N$ it is proved in [23] that $\mathfrak{F}_\tau(Y, y, N) = M$.

- 110.1 ... Equivalently, we may consider the $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -completion $\mathcal{B}$ of the set reduced to $y: Id \rightarrow Y$ in the 2-category $\mathcal{C}^{\mathcal{C}}$, take the 2-category $\mathcal{B}/Id$ of objects under $Id_{\mathcal{C}}$ and look at $\mathcal{F}_\tau(Y, y, \Lambda)$ as a submonoid of the monoid of 1-morphisms of $\mathcal{B}/Id$ (cf. /102/, Application 1, page 237 where the morphisms of $\mathcal{B}$ are called canonical natural transformations between type functors).
- 110.2. This is true if $\tau_{ij}(E)$ is an injection and the preorder is a total order (Charraud [23]).
- 110.3. A more detailed proof of a and b is given in [23]. For c, the delicate enough proof is carried out in Blanc's Thesis [13].
- 111.1. $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ is the free object generated by the graph $\mathcal{B}$ with respect to the forgetful functor $Cat \rightarrow Graph$ (which is monadic). Free categories are just the free objects relative to this functor.
- 111.2. Free groupoids are the free objects relative to the forgetful functor from the category of groupoids to $Graph$.
- 112.1. A more detailed proof is given in Blanc [13].
- 112.2. The definition of $\mathcal{N}_\tau$ is not precise enough: its morphisms are the $((\Phi', \phi'), \tau, (\Phi, \phi))$ such that (Φ, ϕ) and (Φ', ϕ') are type functors and there exists a (necessarily unique) type functor (Ψ, ψ) such that $\tau = \psi \circ \Phi$ (whence $(\Phi', \phi') = (\Psi, \psi) \times (\Phi, \phi)$).
- 113.1. Sum means sum of ordinals (as well-ordered sum).
- 113.2. These are the canonical equivalences deduced from the commutativity between products, between limits, between products and limits.
- 113.3. It is the product of the equivalences in the category of objects of Set^{Set} under Id .
- 114.1. R. $\tau'_i(E)$ i.o. $\tau_i(E)$, where $\tau'_i: \Psi_i \rightarrow \Psi'_i$ is inductively defined
 $\tau'_0 = \tau_0, \quad \tau'_{i+1} = \tau_{i+1} \times \tau'_i,$
 $\tau'_i = \tau_i \times \lim(\tau'_j)_{j < i}$ if i is a limit ordinal, where
 $\lim(\tau'_j)_{j < i}(E): \lim \Psi_j(E) \rightarrow \lim \Psi'_j(E): (j, \gamma) \mapsto (j, \tau'_j(\gamma)).$
- 114.2. $\mathcal{N}'_{\mathcal{C}}$ is the smallest sub-2-category of $\mathcal{N}_{\mathcal{V}}$ containing the elementary equivalences and the canonical injections, which is closed by the pro-

duct functors and the lateral limit functors ; $\mathcal{N}_c$ is the groupoid of its equivalences. Notice that $\mathcal{N}_c$ does not admit products (nor limits), since the projections of a product are not in it.

114.3. An inductive category is an internal category in the category of complete meet-lattices.

115.1. (Φ', ϕ') is a (strict) naturalized sub-functor of (Φ, ϕ) . The notation $(\Phi', \phi') < (\Phi, \phi)$ has not the same meaning as at the end of Section III (since τ is not in $\mathcal{N}_\tau$, cf. Comment 112.2).

115.2 ¶ $\mathcal{F}$ is only a subinductive category, and $\mathcal{F}_\nu$ a subinductive class (the intersection, or meet, of a family $(\Phi_i, \phi_i)_{i \in I}$ is not always defined, unless the family is bounded).

115.3. A product or a filtered limit of injections is an injection.

116.1 + *Categorical constructions of structures.*

These remarks lead to a categorical description of structures, which encompasses Bourbaki's definition via scales of sets and Quine's formative constructions on a language (cf. [119], and Houdebine [74]). It transposes nicely in any topos (not only *Set*), in a fuzzy logic,...

Such a constructive theory of structures over *Set* has been developed by Blanc [13], whose main tool is the notion of *structural natural transformations*. To define them, he proves first that two type functors are equal if they have the same restriction to the groupoid $\tilde{\mathcal{E}}$ of isomorphisms of $\tilde{\mathcal{E}}$ ($= \text{Set}$), called a γ -type functor. The structural natural transformations between γ -type functors form the smallest subcategory $\mathcal{S}$ of $\tilde{\mathcal{E}}^{\tilde{\mathcal{E}}}$ which is closed under finite products, power- and inverse power-extension (i.e. if $t: T \rightarrow T'$ are in $\mathcal{S}$, so are $\mathcal{P}t: \mathcal{P}T \rightarrow \mathcal{P}T'$ and

$$t^*: \mathcal{P}T' \rightarrow \mathcal{P}T, \quad t_E^*: \mathcal{P}T'(E) \rightarrow \mathcal{P}T(E); A' \vdash t_E^{-1}(A')),$$

and which contains the natural transformations :

$$(a) \text{ projection: } \prod_{i \in I} T_i \rightarrow \prod_{j \in J} T_j, \text{ for any } J \subset I,$$

$$(b) \text{ complement: } \mathcal{P}T \rightarrow \mathcal{P}T, \quad \text{intersection: } \mathcal{P}T^n \rightarrow \mathcal{P}T,$$

$$(c) \text{ valuation } v: T \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{P}T, \text{ where}$$

$$v_E: T(E) \rightarrow \mathcal{P}\mathcal{P}T(E); x \vdash \{ X \subset T(E) \mid x \in X \},$$

116.1 ... (d) constant $c: T' \rightarrow \mathcal{P}(T \times \mathcal{P}T)$, where

$$c_E: T'(E) \rightarrow \mathcal{P}(T(E) \times \mathcal{P}T(E)): x \mapsto \{(a, A) \mid A \in \mathcal{P}T(E), a \in A\},$$

for any γ -type functors T, T', T_i (the restriction to γ -type functors is necessary for (b) to define natural transformations).

If $t: T \rightarrow \mathcal{P}T'$ is a structural natural transformation, a *t-structure* on a set E is an element S of $T(E)$ such that $t_E(S) = \emptyset$. Blanc proves the so-defined structures are the same as the structures defined by a *typified formula*.

What are the properties of the power-functor on *Set* used to define type functors and the corresponding structures? This question prompted Guitart to introduce his involutive monads (or standard constructions [56,58]) in 1970. Later on, he refined them into *algebraic universes* which give [61] the appropriate frame for transposing the theory of type functors and Blanc's above cited result. Algebraic universes include Lawvere-Tierney toposes [78] (and therefore Grothendieck toposes or categories of sheaves), but also fuzzy logics, ... They are well suited to study topological and logical problems (cf. [61] for details).

116.2 + *On species of structures.*

This paragraph refers to the construction of species of structures over products of subcategories of *Set* given in /47/.

To get an axiomatic definition of structures, Charles introduced species of structures over a category $\mathcal{C}$ (and local species of structures) in 1957 and he proved the equivalence between their three definitions: action of $\mathcal{C}$ on a set, discrete fibration over $\mathcal{C}$, functor F from $\mathcal{C}$ to *Set* with disjoint fibres. In particular, if $\mathcal{C}$ is a subgroupoid of the groupoid of isomorphisms of *Set*, or a product of such subgroupoids, the functor F may be the restriction of a type functor, or a product of such restrictions; whence species of structures of type μ , if μ is the smallest ordinal such that the considered type functor(s) be in $\mathcal{F}_\tau^\mu$. Such species of structures are constructed in /47/, where Charles takes in account only the type functors generated from $\mathcal{P}$ by

116.2... composition and products (without using lateral limits as here).

Recently, A. Joyal [80] has developed a fine combinatoric theory of species of structures over a groupoid, viewed as a generalization of formal series. He so obtains a kind of algebra on species of structures akin to the geometric algebra of Grassmann (and Leibniz).

ON /102/ : SUR L'EXISTENCE DE STRUCTURES LIBRES ET DE FONCTEURS ADJOINTS.

The dedication recalls this paper was written during our six-months stay in Kansas. The second (and most important) part was triggered by simultaneous work on sketched structures /93/.

118.1. For canonical properties of such subcategories, cf. Comments 87.1 and 199.1.

124.1. The results of Sections 1, 2, 3 precise the theory of reflections and of generated substructures undertaken in /100/, Section 2 and in /91/. Unhappily the intricate technical hypotheses somewhat hinder their impact. The idea was to cover an as wide as possible variety of cases. The applications at the end of Sections 2 and 3 show where the hypotheses come from. A simplified version of the main existence theorems is given in /108/.

127.1. $\hat{C}$ is the comma category $(K'_0 \hookrightarrow K') \downarrow P$.

143.1. Add: avec $M \neq \emptyset$.

146.1. A $(H, \hat{H}, \tilde{H}')$ -projector $g: e \rightarrow e'$ is almost a reflector into H , except that e' is not required to be in H but only in $\hat{H}$. One of the motivating examples (in /92/) is the case of a small topological category C for which there exists a topological functor $F: C \rightarrow \hat{C}$ into a universal large compact category $\hat{C}$, through which factors every topological (i.e., internal to Top) functor from C to a small compact category; but $\hat{C}$ might not be small.

147.1. $\tilde{H}'$ is the comma category $\hat{K} \downarrow P$. It is introduced to define free objects from reflections (as Charles usually did in the sixties) and, similarly, the more general (H, P) -projectors from «up to the size» re-

flectors (Comment 146.1).

149.1. Add , si $e \in K_0^*$,.

153.1. This condition is a «solution-set» condition; for a case where it is satisfied, cf. Comment 155.2.

154.1. A more informal comparison with usual existence criteria is made in Comment 277.1 (O, III-1).

155.1. Remark 3 is also valid if Q' is only $(\hat{\mathcal{M}}, \hat{X}, \hat{H})$ -generating for a closed under pullbacks subcategory X of Q -monomorphisms, and if s , in condition a, is the $(\hat{X}, \hat{H})$ -substructure generated by M' .

Informally, condition a means that the size of a generated substructure is just determined by the size of the generating set, independently from the structure in which it is generated. It may be verified in most applications where the generated substructure is explicitly constructed (by transfinite induction). So Remark 3 gives a practical way for proving existence of adjoints without taking a higher universe. An important example is the following one.

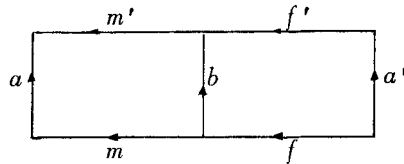
155.2+ *Categories with a good factorization lead to generating functors.*

Several authors have given existence criteria for free objects (e.g., for free algebras [84]) in terms of a given factorization system on the category. The following proposition proves this data is more peculiar than the notion of a subgenerating functor used by Charles, so that their results could be deduced from Remark 3.

Let A be a category. A *factorization* (E, M) in A consists of two subcategories of A containing all the isomorphisms, such that each morphism factorizes as $m \cdot f$, with $m \in M$ and $f \in E$, and that, if

$$a \cdot m \cdot f = m' \cdot f' \cdot a' \text{ with } m, m' \text{ in } M, f, f' \text{ in } E,$$

there exists a unique b rendering commutative the diagram



155.2... It is proper if M is formed of monomorphisms and E of epimorphisms. Such factorizations are studied by Freyd & Kelly [49], whose terminology we use (cf. also Barr [6], Isbell [75]). If A admits small coproducts, a generator for (E, M) is a small set G of objects G of A such that, for each object A of A , the cofactor through the coproduct of the family $(h_G: G \rightarrow A \mid G \in G)$ be in E .

PROPOSITION. Let A be a category admitting small coproducts and a proper factorization (E, M) with a generator G . Let q be the functor $\prod_{G \in G} \text{Hom}(G, -): A \rightarrow \text{Set}$. Then:

1. M is included in the class of q -monomorphisms and, if q sends E into epimorphisms, equal to it;
2. q is a faithful (Set, M, A) -generating functor;
3. If A is E -cowell-powered, for each ordinal ξ , there exists an ordinal $\lambda(\xi)$ such that the ordinal of $q(S)$ is lesser than $\lambda(\xi)$ if S is a (M, A) -substructure generated by a set whose ordinal is lesser than ξ .

Δ . q is faithful ([49], Proposition 2.5.3) and sends M into monos.

1. a) Each $m: S \rightarrow A$ in M is a q -monomorphism. Indeed, suppose $h: A' \rightarrow A$ in A and $q(h) = q(m) \cdot k$; for $G \in G$ and $(h_G)_{G \in G} \in q(A')$ we have the commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{h'_G} & G \\ m \downarrow & \searrow h' & \downarrow h_G \\ A & \xrightarrow{h} & A' \end{array}$$

where $k((h_G)_{G \in G}) = (h'_G)_{G \in G}$. By the initial definition of a generator [49], it follows there exists a unique h' such that

$$m \cdot h' = h \quad \text{and} \quad q(h') = k.$$

b) Conversely, let $j: S \rightarrow A$ be a q -monomorphism and $j = m \cdot f \in M \cdot E$ its canonical factorization. As m is also a q -monomorphism, so is f ; if $q(f)$ is an epi, it is a bijection; then f is an isomorphism and $j \in M$.

155.2.... 2. Let C be a subset of $q(A)$. We are going to construct a (M, A) substructure A_C of A generated by C .

a) Let G_C be the coproduct of the family

$$(A_{G,c} \mid G \in G, c \in C), \text{ where } A_{G,c} = G \text{ for each } c = (c_G)_{G \in G} \in C,$$

let $v_{G,c}: G \rightarrow G_C$ be the canonical injection and $v: G_C \rightarrow A$ the cofactor of the family $(c_G \mid G \in G, c \in C)$. If $v = m \cdot f$ is the canonical factorization, then the domain of m may be taken as A_C . It comes from the fact that the insertion $C \hookrightarrow q(A)$ factorizes as

$$q(m'), k \text{ for some } m': S' \rightarrow A \text{ in } M$$

iff there exists $c'_G: G \rightarrow S'$ with $m' \cdot c'_G = c_G$ for each $c \in C, G \in G$, i.e., iff $v = m' \cdot g$, where g is the cofactor of the family

$$(c'_G \mid G \in G, c \in C);$$

and then, there exists a unique d rendering commutative the diagram

$$\begin{array}{ccc} S' & \xrightarrow{g} & G_C \\ m' \downarrow & \searrow d & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{m} & A_C \end{array}$$

b) Suppose A is E-cowell-powered. The above construction shows A_C is an E-quotient of G_C ; hence the ordinal $\overline{q(A_C)}$ of $q(A_C)$ is lesser than the ordinal

$$\lambda(\bar{C}) = \bar{C} \vee \sup \{ \overline{q(S)} \mid S \text{ any E-quotient of } G_C \}.$$

This ordinal does not depend upon C but only $\bar{C}$, since G_C is isomorphic to $G_{C'}$, if C' is any set with $\bar{C}' = \bar{C}$ and if $C' \subset q(A')$ for any object A' of A . Moreover, if D is a subset of $q(A')$ such that $\bar{D} \leq \bar{C} \leq \overline{q(A')}$, there exists a subset C' of $q(A')$ with $D \subset C'$ and $\bar{C}' = \bar{C}$; by definition of a generated substructure, there is an m in M from A'_D to A'_C , which implies

$$\overline{q(A'_D)} \leq \overline{q(A'_C)} \leq \lambda(\bar{C}).$$

Therefore, $\overline{q(S)} \leq \lambda(\bar{C})$ whatever be the (M, A) -substructure S generated by a set whose ordinal is lesser than $\bar{C}$. $\forall$

155.2... COROLLARY. *If A satisfies the hypotheses of the above proposition and is ordinally bounded [49], then there exists an ordinal ζ such that q be ζ -(Set, M, A)-generating.*

Indeed, for each G in G , there exists an ordinal ζ_G such that the functor $Hom(G, -)$ preserves ζ_G -unions of (M, A) -substructures and we can take for ζ the ordinal $\sup(\zeta_G \mid G \in G)$.

Suppose A satisfies the hypotheses of this Corollary and is complete. As an application, we get another proof of Theorem 4.1.3 [49]: If Δ is a small set of morphisms of A , its *orthogonal subcategory* $\Delta^\perp$ is *reflective* in A . Indeed, from the proposition we deduce, via a transfinite construction up to ζ , that the restriction q' of q to $\Delta^\perp$ is $(Set, M \cap \Delta^\perp, \Delta^\perp)$ -generating and verifies the conditions of Remark 3. Similarly, we prove that the category of models in A of a small sketch on U (with cones or cylinders) is reflective in A^U and admits colimits, which gives back Theorem 5.2.1 of [49]; or still that the *category of F -algebras* is *reflective* in A , where F is a (pointed) endofunctor on A which preserves ζ -unions of M -subobjects [84].

But this method of proof may be applied more generally to get the same results when A is equipped with any ζ -generating functor to Set satisfying the conditions of Remark 3, and not only with the functor associated to the generator of a proper factorization on A .

Another kind of generalization is obtained by Kelly [84], who finds back these applications without any completeness assumption on A , thanks to a more constructive approach (unifying methods of Barr [6], Gabriel & Ulmer [50], Koubek & Reiterman [92], Schubert [121]...). It does not seem his theorems are a consequence of the criteria given here, where products are essential.

156.1. The «diagonal functor» preserves products.

157.1. *q -inductive limits and semi-final lifts.*

From Theorem C, Comment 233.3 (O, III-1), it follows that $\hat{s}$ is a « q -inductive limit» of (ϕ, Φ_0) iff it is a semi-final lift of the q -sink

$(\Phi_0(i), \text{inj}_i: \phi(i) \rightarrow \varinjlim \phi \mid i \in I_0)$. So Theorems A, B of the same comment, which give criteria for the existence of semi-final lifts generalize the following corollary.

158.1. f may be called a «multi-morphism», since it generalizes the notion of a multi-linear map.

160.1 + *On tensor products.*

The problem of defining tensor products in a category has aroused much interest in the sixties. Mac Lane's monoidal categories [108] (or Benabou's multiplicative categories [10]) only retain its (up to isomorphisms) associativity and unitarity, and they stress the coherence problem (cf. Comment 31.4). In [42], Foltz defines the tensor product of objects in a concrete category as a universal solution to the problem of making a morphism out of a multi-morphism (as here), and he constructs it as a quasi-quotient of a coproduct. In [44], he generalizes his definition to the case of a non-faithful functor, with special kinds of multi-morphisms. Pumplün [118] gives a similar definition in a concrete category H and his main result (translated in modern language) asserts that, if H is a closed category with a generator I , there exists such a tensor product with unit I iff H is monoidal closed.

Kelly [82] also takes a concrete category with an internal Hom , and his tensor product must be such that $- \otimes A$ be an adjoint of the partial Hom -functor $\text{Hom}(A, -)$; then he discusses the associativity, unitarity and commutativity of this $\otimes$. His paper (published in 1965) is a precursor of his famous joint paper with Eilenberg [41], which has opened the way to enriched structures.

Explicit constructions of tensor products have been given by several authors. E. g., Freyd [48] defines the tensor product of algebraic theories T, T' so that $\text{Set}^{T \otimes T'}$ be equivalent to $(\text{Set}^T)^{T'}$, and he uses it to compute the tensor product of the corresponding algebras. Guitart [59] gives an explicit construction of the tensor product as a coequalizer in the category K^P of algebras for a monoidal monad P on a monoidal category K ; he improves results of Day [30], Keigher

160.1 ... [81], Kock [91], Porst & Wischnewsky [115]. Monoidal (closed) structures on categories of sketched structures have been investigated in / 115, 118-121 / and by Foltz & Lair [46,101] (cf. Comments, O, IV-2). Greve, Szigeti & Tholen [54,55] lift monoidal structures along pre-semitopological functors and generalize Pumplün's results.

161.1. Most ideals are such p -ideals; in this case, computations on short exact sequences are reduced to operations on quasi-quotient structures (Proposition 17). For instance, if H admits a proper factorization with a generator G and if $p = \prod_{G \in G} \text{Hom}(G, -): H \rightarrow \text{Set}$ (cf. Comment 155.2), then there exists a canonical p -ideal; it is associated to the map r which, to a p -monomorphism $h: S' \rightarrow S$, associates the relation $r(h)$ on $p(S')$ such that

$$(h \cdot f_G)_{G \in G} = (h \cdot f'_G)_{G \in G} \text{ for any } f_G, f'_G: G \rightarrow S'.$$

170.1. $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ is the category of categories with a partial choice of $\mathcal{J}$ -limits, the morphisms being the functors which preserve these choices. $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$ is the full subcategory of categories with a choice of $\mathcal{J}$ -limits. Or, with the terminology of / 106 /, $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ is the category of $\mathcal{J}$ -prototypes, and $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$ the category of $\mathcal{J}$ -types.

170.2. $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ also admits $\mathbb{M}_0$ -projective limits, and $Q^{\mathcal{J}}$ is sub-generating for $\hat{\mathbb{M}}$. Moreover, if $\mathcal{J}$ is a $\mathbb{M}_0$ -class (i.e., is small enough), $Q^{\mathcal{J}}$ and $\hat{Q}^{\mathcal{J}}$ are sub-generating for $\mathbb{M}$ (not only for $\hat{\mathbb{M}}$); cf. Theorem 6.

171.1. If $\hat{F}$ and $\hat{F}'$ are in $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$ (i.o. $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$), their equalizer in $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$ is (N, ν') where $\nu'(\Phi)$ is defined iff the limit-cone $\nu(\Phi)$ is defined and included in N (i.e., iff all its projections $p_i^{\nu}(\Phi)$ are equalized by F and F').

172.1. If $\mathcal{J}$ is a $\mathbb{M}_0$ -class, $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ is reflective in $\hat{\mathcal{F}}^{\mathcal{J}}$ (Corollary, Theorem 5).

173.1. It's easier to identify an ordinal λ to the class formed of the ordinals $\mu < \lambda$ (Von Neumann's definition) and a cardinal to an initial ordinal, as it is done in / 108, 114 /.

181.1. R. un des i.o. le . (There may exist several i with the same projection and one has to be chosen.)

182.1. η_{K^*} is the composite

$$K^* \hookrightarrow K_+ \xrightarrow{\text{Yoneda}} \hat{\mathcal{Q}}(K^*).$$

The addition of 0 to K is not essential, though it simplifies the proof $\text{Lim}_{\nu}^{\mathcal{J}} K^*$ is 1-1.

183.1. Φ_e is the composite of Φ with evaluation at e .

187.1. The last assertion is precised as follows: Let B be the set consisting of the $\underline{Y}^*$, where Y is any functor in $\hat{\mathcal{F}}.\mathcal{J}$. There exists a bijection g from the (may-be void) set $B \cap H$ on a set B' disjoint from $B \cup H$. Then we replace $\underline{Y}^*$ by $g(\underline{Y})$ for each Y in $B \cap H$.

The following construction may be sketched as follows: $\hat{M}_{\lambda+1}$ is deduced from $\hat{M}_{\lambda}$ by adding «formal limits» Φ^* of functors Φ from $\mathcal{J}$ to $\hat{M}_{\lambda}$, formal projections (Φ^*, i) from this limit to $\Phi(i)$, $\forall i \in I_0$, and formal factors $\underline{\Psi}^*$ for every cone Ψ with base Φ . The axioms ensure the formal factors become real factors. A functor from a category in $\mathcal{J}$ to $\hat{M}_{\lambda+1}$ which does not take its values in $\hat{M}_{\lambda}$ may not have a limit. So the construction is reiterated up to an ordinal $\hat{\lambda}$ large enough for any functor from a category in $\mathcal{J}$ to $\hat{M}_{\lambda}^*$ to be valued in a $\hat{M}_{\xi}^*$, $\xi < \hat{\lambda}$.

196.1. More precisely, the condition is necessary and sufficient for the existence of an isomorphism $\gamma: N^* \rightarrow N' \subset \hat{\mathcal{Q}}(H^*)$ such that the reflector $H^* \hookrightarrow N^* \xrightarrow{\gamma} N'$ be a restriction of the Yoneda embedding.

198.1. R. H^* avec une restriction de η_H . pour projecteur i.o. H^* .

199.1 + *Other constructions of the free completion. Applications.*

Let H be a small category and $\mathcal{J}$ a class of small categories. Various constructions of the free $\mathcal{J}$ -completions of H are known:

1. *Street's construction* [122]. Any functor $\Phi: I \rightarrow H$ factorizes as $E(\Phi). \Phi'$, where $E(\Phi)$ is a discrete fibration and Φ' a final functor (cf. Comment 470.1, O, III-2); and Φ admits a limit iff $E(\Phi)$ admits one. Whence the idea of Street: i.o. adding formal limits of all functors as in the construction of Theorem 5 it is sufficient to only add limits of discrete fibrations. More precisely, he inductively defines the class $\mathcal{J}_{\xi}$ of categories, for each ordinal ξ , as follows:

199.1 ... $\mathcal{J}_0 = \{1\}$; $\mathcal{J}_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \mathcal{J}_\xi$ for each limit ordinal λ ,

$\mathcal{J}_{\lambda'+1}$ consists of the domains J of the discrete fibrations $\pi: J \rightarrow I$ such that $I \in \mathcal{J}_\lambda \cup \{1\}$ and that each fibre of π is the codomain of a final functor with domain in $\mathcal{J}_\lambda$.

Then he constructs transfinitely the free completion, exactly as in Theorem 5, the only change being that, in the step from $\hat{M}_\lambda$ to $\hat{M}_{\lambda'+1}$, he adds as objects the discrete fibrations with domain in $\mathcal{J}_{\lambda'+1}$ i.o. all the functors with domain in $\mathcal{J}$.

Now a discrete fibration over I may also be looked at upside-down as a functor $I \rightarrow \text{Set}$, so that the objects of the so-defined free completion may be identified to set-valued functors. So Street's construction is related with the following one, given by Gabriel & Ulmer [50] (dualy, for free co-completions):

2. *The free $\mathcal{J}$ -completion of H as a subcategory of $(\text{Set}^H)^{op}$* : Let $\mathcal{J}$ be a *stable class* of small categories, i.e., $\mathcal{J}$ contains: 1, the co-limit of any functor $F: I \rightarrow \text{Cat}$, where I and $F(I)$, for each $I \in I_0$, are in $\mathcal{J}$, and J if $G: I \rightarrow J$ is a final functor with $I \in \mathcal{J}$. Then, the small category H admits as a free $\mathcal{J}$ -completion the full subcategory $H_{\mathcal{J}}$ of $(\text{Set}^H)^{op}$ whose objects are the $\mathcal{J}$ -indexed colimits in Set^H of representable functors $H \rightarrow \text{Set}$; the reflector (into $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}^H$, up to equivalence) is the restriction $H \rightarrow H_{\mathcal{J}}$ of the Yoneda embedding, and it is $\mathcal{J}$ -limit-dense ([50], 15.3). This does not contradict the second assertion of Theorem 6 which concerns $\text{Set}^{H^{op}}$ and not $(\text{Set}^H)^{op}$. For instance, $\mathcal{J}$ might be the class of all categories whose ordinal is lesser than a given regular ordinal; or the class of small cofiltered categories, in which case, $H_{\mathcal{J}}$ is equivalent to the category of pro-objects $\text{Pro } H$, (Duskin [35]). If $\mathcal{J}$ is the class Cat_0 of all small categories, $H_{\mathcal{J}}$ is equal to $(\text{Set}^H)^{op}$ itself, and its universality has been emphasized by Roux [120] (in the dual case).

If H is not small, $(\text{Set}^H)^{op}$ has large Hom-sets; then the free Cat_0 -completion of H is its full subcategory whose objects are the bounded functors (Conduché [26]).

199.1 ... 3. *Pro-objects and atlases*: If $\mathcal{J}$ is the class of small cofiltered categories, H admits as a free $\mathcal{J}$ -completion the category $\text{Pro } H$ of pro-objects [35], defined as follows:

- (i) Its objects are the functors $F: I \rightarrow H$ with $I \in \mathcal{J}$;
- (ii) $\text{Hom}(F, G) = \varprojlim_J \varinjlim_I \text{Hom}_H(F-, G_-)$, where $G: J \rightarrow H$.

More explicitly, a morphism from F to G is defined as a J_0 -indexed family of equivalence classes of morphisms $F(I) \rightarrow G(J)$, or as an equivalence class of J_0 -indexed families of such morphisms [79].

Now suppose $\mathcal{J}$ is any stable (cf. 2 above) class of small categories. Then Vincent [129] (cf. also [50], 15.4) proves that H admits as a free $\mathcal{J}$ -completion the category $\text{Pro}_{\mathcal{J}} H$ formally defined by the same conditions (i) and (ii). This category $\text{Pro}_{\mathcal{J}} H$ is also considered by Deleanu & Hilton [33] (with $\mathcal{J} = \text{Cat}_0$) in view of applications to Shape Theory.

We are going to give a new slightly different description of the morphisms of $\text{Pro}_{\mathcal{J}} H$ as atlases (which amounts to replace an indexed family of equivalence classes by its «union»).

DEFINITION. Let $F: I \rightarrow H$ and $G: J \rightarrow H$ be functors. An *atlas* from F to G is defined as a class A of triples (J, a, I) , written $a: I \rightarrow J$, which satisfies the conditions:

- (a) $I \in I_0$, $J \in J_0$ and $a: F(I) \rightarrow G(J)$ in H ;
- (b) $G(j), a: I \rightarrow J'$ belongs to A for each $j: J \rightarrow J'$ in J ;
- (c) For each object J of J , the set

$$J.A = \{ a: I \rightarrow J \text{ in } A \mid I \in I_0 \}$$

is the class of objects of a component of the comma category $F \downarrow J$.

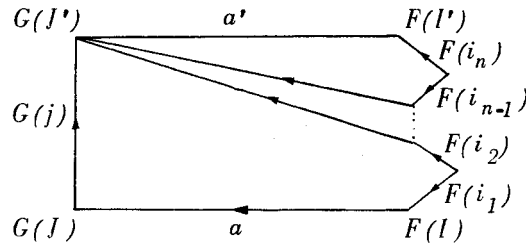
So $J.A \neq \emptyset$ and, for $a: I \rightarrow J$ in A , $j: J \rightarrow J'$ in J , we have:

$a': I' \rightarrow J'$ is in A iff there exist a zig-zag

$$I' \xrightarrow{i_n} \dots \xrightarrow{i_{n-1}} \dots \xrightarrow{i_2} \dots \xrightarrow{i_1} I$$

in I and a commutative diagram in H of the form:

199.1 ...



If I and J are groupoids, atlases of /78/ are recovered (they were introduced in /47, 55/ for defining local structures, as manifolds). A morphism $h: S \rightarrow S'$ of H is identified to the atlas from the functor $S^*: I \rightarrow H$ with value S to $S'^*: I \rightarrow H$ consisting of the single $h: 0 \rightarrow 0$.

PROPOSITION. H admits as a free $\mathcal{J}$ -completion the category $\text{Pro}_{\mathcal{J}}H$, whose morphisms are the atlases between $\mathcal{J}$ -indexed functors; the object $F: I \rightarrow H$ is the limit of the functor $I \xrightarrow{F} H \hookrightarrow \text{Pro}_{\mathcal{J}}H$.

Δ . The composite of the atlases $A: F \rightarrow G$ and $B: G \rightarrow G'$ is the well-defined atlas $C: F \rightarrow G'$ generated by the class consisting of the composites:

$$b, a: I \rightarrow J', \text{ with } a: I \rightarrow J \text{ in } A \text{ and } b: J \rightarrow J' \text{ in } B.$$

If $\Phi: K \rightarrow \text{Pro}_{\mathcal{J}}H$ is a functor, its limit is the functor $F\Phi: I\Phi \rightarrow H$, defined as follows: $I\Phi$ contains as a subcategory the disjoint union of the categories I_K domain of $\Phi(K)$, for each $K \in K_0$, and its other morphisms from $I \in I_{K_0}$ to $I' \in I_{K'_0}$ are the $a: I \rightarrow I'$ which belong to the atlas $\Phi(k)$ for some $k: K \rightarrow K'$ in K ; the functor $F\Phi$ extends the functors $\Phi(K)$ and maps $a: I \rightarrow I'$ on a . ∇

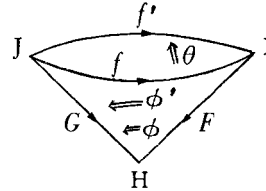
4. Complete categories as algebras of a monad. When $\mathcal{J}$ is stable, there is still another free $\mathcal{J}$ -completion $\Delta_{\mathcal{J}}H$ of H , described as follows by Prochasson [117] (in the dual case): Let $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}H$ be the category of $\mathcal{J}$ -codiagrams of H (which is the dual of the category of diagrams indexed by $\mathcal{J}$ of H^{op}): its objects are the functors $F: I \rightarrow H$ with $I \in \mathcal{J}$; a morphism from F to G is defined by a pair (f, ϕ) , where $f: J \rightarrow I$ is a functor and $\phi: F.f \rightarrow G$ a natural transformation. $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}H$ is the category of 1-morphisms of the 2-category $D_{\mathcal{J}}H$ whose 2-cells from

199.1 ...

$$(f, \phi): F \rightarrow G \text{ to } (f', \phi'): F \rightarrow G$$

are defined by the natural transformations $\theta: f \rightarrow f'$ such that

$$\phi' \sqcup F\theta = \phi .$$



$\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ is the *lax-completion* of $\mathcal{H}$ (Guitart & Van den Bril [66]).

Let $\Delta_{\mathcal{H}}$ be the quasi-quotient category of $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ by the relation

$$(f, \phi) \sim (f', \phi'): F \rightarrow G \text{ iff there exists a 2-cell between them,}$$

so that $\Delta_{\mathcal{H}}$ is the category of components of the 2-category $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$.

PROPOSITION. *There is a functor $\Delta_{\mathcal{H}} \rightarrow \text{Pro}_{\mathcal{H}}$ which is the identity on objects, and $\Delta_{\mathcal{H}}$ is also a free $\mathcal{H}$ -completion of $\mathcal{H}$.*

Indeed, the class of $(f, \phi): F \rightarrow G$ is mapped onto the atlas from F to G generated by the class

$$\{ \phi(J): f(J) \rightarrow J \mid J \in \mathcal{J}_0 \}.$$

$\Delta_{\mathcal{H}}$ is small if $\mathcal{H}$ is small.

Let $\mathcal{H}$ be small and denote by $\mathcal{F}_{\sim}$ the quotient category of $\mathcal{F}$ ($= \text{Cat}$) by the relation «two functors are equivalent». Then the correspondance $\mathcal{H} \rightarrow \Delta_{\mathcal{H}}$ extends into an endofunctor $\Delta_{\mathcal{H}}$ on $\mathcal{F}_{\sim}$. Prochasson proves $\Delta_{\mathcal{H}}$ is the endofunctor of a monad on $\mathcal{F}_{\sim}$, whose category of algebras is isomorphic to $\mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{H}}$, so that the functor $\mathcal{F}_{\sim} \hookrightarrow \mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{H}}$ is *monadic* [117] (for a related result, cf. Kock [90] and, when $\mathcal{H}$ is the class of discrete categories, Lawvere [104]).

There is no choice of $\mathcal{H}$ -limits on $\Delta_{\mathcal{H}}$ making it into a free object for the forgetful functor $p^{\mathcal{H}}: \mathcal{F}_{\sim}^{\mathcal{H}} \rightarrow \mathcal{F}_{\sim}$. However, Lair [99] proves that $p^{\mathcal{H}}$ is also *monadic*, thanks to a general Tripleability Theorem for categories of sketched structures and to an adequate construction of the sketch of $\mathcal{H}$ -types.

200.1 ¶ $\mathcal{F}'$ does not admit equalizers.

200.2. In this reference, $(Set^{H'})^{op}$ is proved to be a free completion for all small limits (Comment 199.1); it's only the wording which is somewhat ambiguous.

201.1. The subcategory of $Set^{H^{op}}$ considered by Bénabou, Isbell, Lambek, ... is the «Mac Neille $\mathcal{J}$ -completion» of H' (cf. /107/, section 8 and Comment 87.1). It is not to be confused with the subcategory of the dual of $Set^{H'}$ which is a free $\mathcal{J}$ -completion of H' (Comment 199.1).

201.2. In [14], Borceux proves that H' is a full subcategory of $\tilde{H}'$ thanks to a weakening of the hypotheses taken in Theorem 5:

Lim^ν injective is replaced by $Lim^\nu \Phi = e$ for at most one Φ when e is an object of C' not in M ;

$Lim^\nu \Phi \notin M$ is replaced by condition A, Lemma 6, Appendix.

203.1+ *Loose $\mathcal{J}$ -completions of a category.*

If $(\hat{H}, \hat{\mu})$ is a $p^{\mathcal{J}}$ -free object generated by the category H , then $\hat{H}$ is also a free $\mathcal{J}$ -completion of H , i. e., a reflection of H into $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}$ (Theorem 8). A similar result is valid for universal completions with preservation of some limits. It is proved in /115/ (Corollary Proposition 10) that:

If $(\tilde{H}, \tilde{\mu})$ is a (universal up to isomorphism) $\mathcal{J}$ -completion of (H, μ) , then $\tilde{H}$ is also a loose $\mathcal{J}$ -completion of (H, μ) ,

which means that $\tilde{H}$ is a universal (up to equivalence) solution of the problem: To embed H into an $\mathcal{J}$ -complete category, so that the cones distinguished by μ become limit-cones. The proof lies on an explicit (transfinite) construction of the $\mathcal{J}$ -completion of (H, μ) , more generally done in /115/ (O, IV-2) for μ any multi-choice of cones indexed by categories in $\mathcal{J}$ (cf. Comment 216.1).

Another transfinite construction of a loose $\mathcal{J}$ -completion of (H, μ) is given by Coppey [27]: it is the union of the H_λ 's, where $H_{\lambda+1}$ is the $\mathcal{J}$ -completion of H_λ in $Set^{H_\lambda^{op}}$.

Gabriel & Zisman [51] construct a loose $\mathcal{J}$ -completion of (H, μ) as the category of fractions of a free $\mathcal{J}$ -completion C of H by the class A

203.1 ... consisting of the factors through a limit-cone in C of a μ -distinguished cone (in fact, they suppose μ distinguishes all small limit-cones in H and they take $C = (Set^H)^{op}$). With the notations of Theorem 10, it implies that $\tilde{H} = \tilde{H}^*$, which is a quasi-quotient of C by

$$A = \{ a(\Phi) \mid \mu(\Phi) \text{ is defined} \},$$

is equivalent to the category of fractions of C by A .

203.2. This category is deduced from H by adding a final object $\emptyset_H$.

204.1. N has only one non-identity morphism.

207.1. It's also true if $\hat{F}$ and $\hat{F}'$ are in $\mathcal{F}^{\mathcal{J}, \mathcal{J}}$ (cf. Comment 171.1).

211.1. $\tilde{\Phi}_e$ is the composite:

$$I^* \xrightarrow{\tilde{\Phi}} \tilde{\mathcal{Q}}(H^*) \xrightarrow{eval_e} \mathfrak{M}.$$

214.1. Borceux [14] has proved H is a full subcategory of $\tilde{H}^*$.

214.2. This category is explicitly constructed in / 114 /.

216.1 + *Some generalizations.*

The completion theorems given here, in particular Theorem 15, are generalized in / 115 / (Propositions 13, 14, 15), where it is shown that an $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -cone-bearing category H (i.e., a category equipped with a set of cones indexed by $\mathcal{J}$ and a set of cocones indexed by $\mathcal{J}$) is universally sent:

1° up to an isomorphism, into an $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -limit-bearing category, into an $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -prototype (object of $\mathcal{F}^{\mathcal{J}, \mathcal{J}}$) and into an $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -type (object of $\mathcal{F}^{\mathcal{J}, \mathcal{J}}$) $(H_{type}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$;

2° up to an equivalence, into an $\mathcal{J}$ -complete and $\mathcal{J}$ -cocomplete category (called a *loose $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -type*) H_{ltype} in which the distinguished (co)cones become (co)limits.

Moreover, if H is a prototype, then H_{ltype} is equivalent to H_{type} . The proof lies on an explicit transfinite construction of these completions.

In Section 4, completion theorems are given for internal categories. On the other hand, «*enriched*» completion theorems for V -categories have been proved by several authors. If V is a complete and cocom-

216.1 ... plete symmetric monoidal category in which $- \otimes V$ preserves colimits, Foltz [45] proves the existence of universal $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -completions for V -categories and V -sketches when the base functor $V \rightarrow \text{Set}$ has good enough properties; and he constructs the free $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -completion when this functor preserves ζ -unions and $\mathcal{J}$ -limits commute with ζ -unions, where the ordinal ζ is greater than the ordinal of all the categories in $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}$. Results of the same kind are given by Kelly [86].

For $V = \text{Ab}$, G. & M. Weidenfeld [130] obtain the Ab -prototype generated by a cone-bearing additive category C as a subcategory of $\text{Ab}^{C^{op}}$ (via the additive associated Sheaf Theorem), and they deduce from it a construction of the prototype associated to any sketch.

217.1. Let $(s_\xi)_{\xi < \zeta}$ be a ζ -sequence of P -substructures of S . If P is sub-generating, it admits an union $s = \bigcup_{\xi < \zeta} s_\xi$, namely s is the P -substructure of S generated by the union M of the $P(s_\xi)$, $\xi < \zeta$. The condition (D_ζ) means P preserves such unions, i.e., $P(s) = M$. It follows that ζ -unions of P -substructures commute with limits preserved by P (cf. Comment 155.2).

219.1. P lifts limits because, by the initial assumption (valid in all this Section 4), P is a concrete transportable functor which lifts pullbacks.

220.1. When P is countably generating, this corollary is proved in /100/.

221.1. This definition is very weak, since the «structure» and the limits are not linked.

A more precise notion of internal completion consists in replacing $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_{(p)}$ and $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}_{(p)}$ by the categories of internal $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -prototypes and internal $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -types in H^* . Theorem 17 is still valid in this case as well as in the case H^* admits small limits and colimits of ζ -sequences which commute (Burroni [19]).

221.2. The condition ζ -generating may be omitted, since it follows from the existence of a maximal section, which implies P is spreading (cf. Comment 247.1, O, III-1).

224.1. The proof is complicated. It follows from the general lemma (Synopsis (O, III-2), Section 5, Corollary 1 of Theorem 2):

224.1 ... If $U: \hat{A} \rightarrow A$ is a functor admitting a maximal section Z , if

$$U': \hat{A}' \rightarrow A' \quad \text{and} \quad Z': A' \rightarrow \hat{A}'$$

are restrictions of U and Z resp. to reflective subcategories, then a reflector into $\hat{A}'$ is mapped by U on a reflector into A' .

It is applied to the forgetful functor $\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p) \rightarrow \mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p)$ with a maximal section deduced from Z , and to its restrictions

$$\mathcal{F}^{\mathcal{A}}(p) \rightarrow \mathcal{F}^{\mathcal{A}} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathcal{F}.$$

225.1. For the terminology, cf. /63/ (O, III-1). The theorem is used later on, in the case of ordered categories.

227.1. This assertion follows from the preceding one, because the substructures of $(M, <)$ are its $\mathcal{L}\mathcal{L}'$ -inductive subclasses (as it is said in the sequel of the proof), hence correspond to full subcategories of the category associated to $(M, <)$.

230.1. The hypothesis $\mathcal{L} = \emptyset$ is used here, because f does not preserve joins.

236.1. The category $\mathcal{F}[\omega]$ is proved to be monoidal closed in /119/. In [17], Brown & Higgins study ω -fold groupoids with a view to applications in Algebraic Topology.

237.1. Cf. /52/ and Comment 1101.

237.2. It may be necessary to disjoin the fibres, which is possible if w transports isomorphisms.

240.1. This corollary is a particular case of Proposition 9.

241.1. The propositions of this section strengthen some results of /100/.

244.1. The definition of $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$ -solving has to be precised. Here it means that $\hat{P}_{\mathcal{U}}$ is $(\mathcal{M}, \mathcal{X}_{\mathcal{U}}, \hat{P}_{\mathcal{M}}^{-1}(\mathcal{M}))$ -generating; it follows that $\hat{P}_{\mathcal{U}}$ is also $(\mathcal{M}, \mathcal{X}_{\mathcal{U}}, \mathcal{U}(p) \cap \mathcal{U}(P))$ -generating. However, it may not be $(\mathcal{M}, \mathcal{X}_{\mathcal{U}}, \mathcal{U}(p))$ -generating (as defined in /100/), since $\mathcal{U}(p)$ is not included in $\mathcal{U}(P)$ when there exist p -injections which are not P -injections.

247.1. For $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{N}}'$ or $\bar{\mathcal{N}}$, the proposition only asserts the existence of $(\mathcal{U}(p) \cap \mathcal{U}(P), \hat{p}_{\mathcal{U}})$ -quasi-quotient structures, except if we add the hypothesis $p_i^{-} \subset P_i^{-}$, in which case $\mathcal{U}(p) \subset \mathcal{U}(P)$ (cf. Comments

235.1 (O, III-1) and 244.1.

248.1. More generally, if σ is a projective sketch and Z a maximal section of $p: H \rightarrow \text{Set}$, then $Z^\sigma: \text{Set}^\sigma \rightarrow H^\sigma$ is a maximal section of the functor $p^\sigma: H^\sigma \rightarrow \text{Set}^\sigma$.

251.1. (p, X) -structured relations are objects of $\mathcal{M}(p)$. If X is closed under pullbacks, they are also morphisms of a category of relations considered by several authors, e. g. Coppey and Davar-Panah [28].

253.1. $\hat{A}$ defines the structured subgroupoid of $(S^+, s \times s)$ which is X -generated by $A \cup S_o^+$, whence the following alternative construction:

$\hat{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} p(S_n)$, where S_n is the (X, H) -substructure of $s \times s$ generated by B_n , with $B_0 = A$ and

$$B_{n+1} = p(S_n) \cup p(S_n)^I \cup \{g \cdot f \mid f, g \in p(S_n)\}.$$

258.1. The only delicate point is proving 4 for elements of the form:

$$(h.(i, \Phi), \Psi, \Psi_I);$$

then the common composite is $h.h_i.\Psi_I(i')$, where $\Psi(i) = h_i.(i', \Phi_I)$ (with the notations on page 188).

258.2. b is satisfied because $(h.(i, \Phi))$ is an irreducible path hence is not equal to another irreducible path by the proof of Proposition 8.

259.1. This construction generalizes the usual construction of the free group on a set of generators.

260.1. More briefly, Ψ' is defined as $\Psi' = \lim^\nu \Psi.\mu(\Phi)$.

ON / 108 / : CONSTRUCTIONS DE STRUCTURES LIBRES.

This paper takes back some results of /100/ (O, III-1) and /102/ (to which we refer for further comments) with simplified hypotheses, satisfied in most of the applications. From part 1 on, it was multigraphed in Paris as lecture notes of a «cours de troisième cycle», written as an additional chapter to the booklet /123/. Part 0 was added to make the text self-contained for its inclusion in the Proceedings of the Seattle Conference (1968, Part II, preprinted in Lecture Notes for Mathematics 92); finally Charles did not participate in this Conference because of the turmoil

in May 68. The text has been specially recomposed on Varityper.

- 265.1. Universal would be more justified than «maximal» (Comment 87.1).
- 266.1. The transitivity condition is added for a universe to be a model of Set Theory; it is not necessary here.
- 268.1. More usual terminology: H is a reflective subcategory of K^* .
- 268.2. A p -injection $j: s \rightarrow s'$ is an initial lift of the p -source $(s, p(j))$.
- 269.1. A (H, p) -quasi-surjection is a semi-final lift of a singleton source.
- 269.2. To compare with the notion of a semi-topological functor, cf. Comment 212.3 (O, III-1).
- 269.3. Constructions of quotient categories are given in /91/, Section 3.
- 270.1. For more general results, cf. /102/, Section 3-1.
- 272.1. Cf. also /100/, Section 2 and /102/, Theorem 2.
- 274.1. This method is used in /100/, Theorem 1-2.
- 274.2. Cf. Proposition 2-2 /100/.
- 275.1. This corollary is used to obtain existence theorems for quasi-quotient sketched structures /98/, e. g. for quasi-quotient internal categories in /100/, and for quasi-quotient n -ary structures in /97/.
- 276.1. For this section, cf. /100/, Theorem 3-2 and /102/, Theorem 2.
- 279.1. This method is used in /100/, Theorem 3-2.
- 279.2. For this section, cf. /102/, Part II, and /106/.
- 280.1. $\mathcal{S}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ is the category of neocategories with partial choices of projective and inductive cones, $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ is the category of $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -prototypes and $\mathcal{F}^{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ is the category of $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -types (cf. /106/).
- 280.2. Cf /102/, Proposition 22.
- 282.1. Cf. /102/, Proposition 22.
- 286.1. Cf. /102/, Theorem 12.
- 287.1. All these assertions are proved in [38].
- 289.1. Cf. /102/, Theorem 15, for the last assertion.
- 290.1. Cf. /102/, Theorem 15, and /114/.
- 291.1. R. universelle de u i. o. de u .
- 291.2. The free completion is explicitly constructed in /102/ (cf. also Comment 199.1). Other properties of the universal completion are given in /102/ and non-universal completions are studied in /107/.

ON / 114/ : SUR LE PLONGEMENT D'UN PROTOTYPE DANS UN TYPE.

This text is a sequel of / 108/ ; it was multigraphed as a part of a «cours de troisième cycle de l'Université Paris VII», which developed the theory of sketched structures along the lines of / 106/. It has been composed on Varityper for inclusion in this volume.

293.1. As in / 106/ an $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -prototype means a category C with a partial choice μ of cones indexed by elements of $\mathcal{J}$ and a partial choice ν of cocones indexed by elements of $\mathcal{J}$. It's an $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -type if the choices are total i.o. partial. The prototype is projective if ν is void.

293.2. The term «lax» is not to be taken in a 2-categorical sense (as at the end of / 117/); it just precises that no type structure is used on H , so that all limits and colimits are distinguished. To-day we'll say that it is a realization - or a model - of (C, μ, ν) in H .

294.1. Cf. / 108/, Proposition 8.

298.1. The consideration of L follows from Lambek [102] and Isbell [76]; it might be replaced by the smallest subcategory of N satisfying the conditions of Proposition 5, which is the category L_ν of Theorem 3.

302.1. Cf. / 108/, Proof of Proposition 8 for more details.

305.1. L_ν is the category of co-models of the inductive prototype (C, ν) in Set , i.e., the category of Set -models of its dual projective prototype (C^*, ν^*) .

305.2+ The Associated Sheaf Theorem.

This corollary, called the Associated Sheaf Theorem (as said on page 306), has been proved by several authors, e.g., Gabriel & Ulmer [50], Kennison [89], Bénabou ([9] page 51 and [26] Appendix).

More generally, if σ is a sketch on H equipped with a small class of cones (or cylinders), the category A^σ of its models in a category A is reflective in A^H in each of the following cases :

1° A is equipped with a concrete functor satisfying the conditions of the proposition of Comment 13.4 or the conditions at the end of Comment 155.2; the proof is «existential» (not constructive).

2° A admits a proper factorization (E, M) with a generator (cf.

305.2... Comment 155.2), is cocomplete, bounded and M-well-powered (Kelly [84], Theorem 12.1, who strengthens Freyd & Kelly's [49]; the associated sheaf - or free model - is constructed as a colimit of a transfinite sequence, via the Orthogonalisation Theorem, and A need not be complete).

3° A is complete and admits ζ -indexed colimits which commute with $\mathcal{J}$ -limits, where $\mathcal{J}$ consists of the indexing categories of the distinguished cones and the ordinal ζ is greater than the ordinal of each element of $\mathcal{J}$ (Burroni [19], Foltz [43], Ulmer [127]).

Enriched associated sheaf theorems have been proved by Foltz [43] (who takes an enrichment in a closed category with a faithful base functor) and by Kelly [86] whose models are enriched in a monoidal closed category.

For mixed sketches, the category of models (even in Set) is no more reflective in the category of all functors. However Guitart & Lair [63] prove the following related result: If σ is a small mixed «c-injective» sketch (e.g., if the inductive cones are discrete), then each Set -model of the underlying projective sketch generates a small locally free diagram in Set^σ . This result leads to a spectral analysis of first order theories.

306.1. Cf. Lambek [102] and Isbell [76].

ON /146_{IV}.1/ : COMPLÉTION D'UN FONCTEUR.

This is the text of a lecture delivered by Charles at the «Journées mathématiques sur l'Algèbre des catégories» (Dijon-Paris, 1967). It was not published in the Proceedings of this Conference (Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle X-3, 1968) because it's just a summary of the paper /107/, and near enough of the Note /99/ (written three months earlier). However this lecture is more striking than /99/: the problem of completion of a concrete functor is well presented, and the construction of the Mac Neille completion is very clear. So it might be helpful as an introduction to the intricate paper /107/. The manuscript has been varityped for inclusion here.

307.1 + Initial completions as a generalization.

As emphasized in Comments 76.1 and 94.1 (to which we refer for more details), all the results of this Note are still valid if μ is a multi-choice of cones on K (i.o. a multi-choice of limit-cones) to be lifted into initial cones. In this way the first mentioned problem appears as a special case of the second: μ distinguishes the singleton cones in K' . The only modifications are the following ones:

- p. 307 and 310: μ is a multi-choice of $\mathcal{J}$ -cones (i.o. $\mathcal{J}$ -limit cones); i.e., for each functor $\phi: I' \rightarrow K'$ with $I' \in \mathcal{J}$, $\mu(\phi)$ is a - may-be void - class of cones in K' with base ϕ ;
- p. 307: $\bar{\mu}$ is a multi-choice of $\bar{p}$ -initial $\mathcal{J}$ -cones (i.o. limit-cones);
- p. 308, l. -1, -2: s is an initial lift of (Φ, θ) for p and $\bar{p}$ (i.o. a limit of Φ);
- p. 310, l. 3: Θ and $F\Theta$ are initial cones (i.o. limit-cones);
- p. 310, l. -3: the embedding of H into $\tilde{H}$ preserves the initial lifts (i.o. the lifted limits) of cones distinguished by μ .

Then the two theorems englobe more recent results on (initial) completions of concrete functors, e. g., Herrlich's constructions [68, 70] which suggests to call $\bar{p}$ the *Mac Neille μ -completion of p* and $\tilde{p}$ its *universal μ -completion*.

308.2. The terms «maximal» and «minimal» are not explained by this sentence; a precise meaning is given in Comments 58.1, 76.1, 94.1, 95.1.

ON / 146_{IV}.2/ : LES CATÉGORIES DANS L'ENSEIGNEMENT.

This text is a lecture given by Charles in Saint-Quentin, on the invitation of the «Association des Professeurs de Mathématiques». As it was primarily intended for teachers in a secondary school, the exposition is more mathematical than in /94/ (designed for a wider audience) though the basic ideas are similar. In particular, it gives a clear insight on the way Charles introduced category theory and conceived its importance in didactics as well as in advanced research. The manuscript was prepared to be multigraphed; it has been varityped for inclusion in this volume.

- 311.1. Charles participated in Bourbaki up to 1947. For his ideas on mathematical structures, cf. Comments 19.1, 116.1, 116.2.
- 312.1. At the time of this lecture, there was much criticism in France against categoricians (specially against our research team).
- 315.1. In his first papers on categories /47, 52/, Charles adopted the first viewpoint; later on, he took over the second (cf. O, III-1).
- 315.2. To be really a model of set theory, $\mathcal{U}$ should be transitive, but this property is not useful for applications to category theory. The notion of a transitive universe is due to Tarski [124]; many authors, following Grothendieck, use the term universe in the sense of a transitive universe. Notice the two «axioms of universes»:
- Each set belongs to a universe,
 - Each set belongs to a transitive universe
- are proved to be equivalent in [38].
- 320.1. The booklet /123/ was written as an introduction to category theory for students in the «second cycle». Charles taught it in his (undergraduate) Maîtrise course on General Topology (based on the study of the categories of topological spaces and of uniform spaces and their reflective or coreflective subcategories), on Differential Geometry (in which the categories of jets and their actions played a central role), on Algebraic Topology (with homology in abelian categories and for simplicial objects) /128/.
- 321.1. Charles often suggested a thorough study of the categories of affine and projective spaces (e.g. for the stage report of N. Penon, Paris, 1973). In his last years, he exposed some of their properties as an introduction to non-euclidean geometry in his course /129/ and he got some (unpublished) results. A categorically-minded course on affine and projective spaces has been given by Bourbaki in Amiens (1980).
- 321.2. The unity and simplicity of Mathematics were essential ideas of Charles, which led him to discover powerful notions: fibre bundles, foliations, jets, infinitesimal connections, almost-complex manifolds, differentiable categories, local structures, internal categories and their actions, sketched structures....

COMMENTS

SYNOPSIS

0. MOTIVATION AND CLASSIFICATION OF THE PAPERS.

The main papers contained in Part IV-1 were written in 1966 /67; they originated (cf. Comment 19.1) in the problem of giving a categorical description of structures, fit to translate in the internal world, versatile enough to englobe most usual structures (universal algebra, categories, sheaves, metric spaces, ...), yet strict enough for leading to general theorems similar to those on internal categories (O, III) or on internal n -ary structures /97/.

The solution Charles proposed is the theory of sketched structures, which he introduced in /93/ (O, III-2), refined and developed in /98,106, 114/; the sketch affords an equational presentation via limits of a structure, its models in a category H are the sketched structures in H .

The connected problem of completing a category (/102/, Part II summed up in /88/) or a concrete functor (/107/, summed up in /99/, /146_{IV.1}/) arose:

- to obtain complete presentations, called types (or theories), so that two sketches with the same type define equivalent structures,
- to optimally replace the category H in which models are valued by a complete category, in which general theorems on categories of sketched structures are available.

The existence of universal completions comes from a general existence theorem for free objects, which refines the usual Adjoint Functor Theorems thanks to the notion of a subgenerating functor. This theorem admits a variety of applications (/102/, Part I), even in the simplified, whence more striking, version given in /108/ to obviate the technicity of /102/.

A much older paper /52/ has been included here: it may be seen as a former example of double completion /102/ and it offers another categorical description of structures via type functors (Comments 116.1, 116.2).

Finally Charles's views on categories and didactics are expressed

in /146_{IV}.2/.

The papers, which use notions introduced in O, Part III, contain a series of deep theorems with explicit proofs. The technicity of some parts, allied with unorthodox and heavy (because rigorous) notations have somewhat hindered their diffusion. It's a pity for most results still retain an actual value, and many ideas have not yet been developed.

1. EXISTENCE THEOREMS.

Theorem 1 of /102/ and Proposition 1 of /108/ generalize the existence criteria devised in /100/ (O, III-1) to study quasi-quotients and colimits of internal categories. They imply several adjoint functor Criteria, based on the notion of a subgenerating functor developed in /102/, Sections 1, 2.

A concrete functor Q from A to the category of (large) sets is called (small) M -generating for an adequate class M of monomorphisms of A if, for each object A of A and each (small) subset C of $Q(A)$, there exists a (small) Q -substructure A' of A generated by C with $A' \hookrightarrow A$ in M . This condition is satisfied by most usual forgetful functors, e.g., by the functor $\prod_{G \in G} \text{Hom}(G, -)$ associated to a generator G of a proper factorization (E, M) on A (Comment 155.2).

Let $p: H \rightarrow K$ be a functor; an object E of K generates a free p -object s in each of the following cases:

1. There exists an extension $\hat{p}: \hat{H} \rightarrow \hat{K}$ of p and a concrete functor $q: \hat{K} \rightarrow \hat{Set}$ to large sets such that H and K are subcategories mapped by $q \cdot \hat{p}$ and q on small sets, q and $q \cdot \hat{p}$ lift large limits and $q \cdot \hat{p}$ is small M -generating; let S be the large set of all «possible solutions».

2. There exist a concrete functor $q: K \rightarrow Set$ such that q and $q \cdot p$ lift small limits and $q \cdot p$ is M -generating, and a solution set S (Remark 3, page 155 and Comment 155.1 give a practical condition for S to exist); then we write $\hat{H} = H$ and $\hat{p} = p$.

In either case, s is constructed as follows; write

$$S = \{ (S_i, f_i: E \rightarrow p(S_i)) \mid i \in I \};$$

there exists a product S of $(S_i)_{i \in I}$ in $\hat{H}$ and s is the $q.\hat{p}$ -substructure of S which is M -generated by the factor $[q(f_i)]_{i \in I}: q(E) \rightarrow q\hat{p}(S)$.

Criteria 1, 2 of /102/, Section 3 are linked to the first case. Criteria 3, 4, which englobe Freyd's Theorem, to the second one, which is satisfied e.g., if H is a complete category admitting a proper factorization with a generator (Proposition, Comment 155.2).

Several applications are given :

- Existence of quasi-quotients, colimits and semi-final lifts (/102/, Theorem 1 ; /108/, Propositions 2, 3);
- Existence of tensor products for a concrete functor, where a tensor product is a universal solution of the problem to make morphisms out of multimorphisms (/102/, Theorem 3 and Comment 165.1);
- Existence of quasi-cohomology functors valued in an enriched concrete category with an ideal (/102/, Theorem 4, which strengthens /93/);
- Reflectivity of orthogonal categories and of categories of algebras for a pointed endofunctor (Comment 155.2, which generalizes results of several authors, e.g. Barr [6], Freyd & Kelly [49]).

Other applications are indicated in the next sections.

3. COMPLETIONS OF A CATEGORY.

Let H be a small category, $\mathcal{I}$ and $\mathcal{J}$ small classes of small categories. A (partial) choice of $\mathcal{I}$ -limits is a map μ associating to (some) functors $\Phi: I \rightarrow H$ with $I \in \mathcal{I}$ a limit-cone $\mu(\Phi)$ with base Φ .

A category equipped with (partial) choices of $\mathcal{I}$ -limits and $\mathcal{J}$ -colimits is called an $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -(proto-)type; a category with partial choices of $\mathcal{I}$ -cones and $\mathcal{J}$ -cocones is called an $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -presketch /106/.

Let $\mathcal{S}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$, $\mathcal{T}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ and $\mathcal{F}^{\mathcal{I}, \mathcal{J}}$ be the categories of small $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -presketches, prototypes and types, the morphisms being the functors which preserve the (partial) choices.

The preceding existence theorems imply the *Universal $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -completion Theorem* (/102/, Theorem 15; /106/, Theorem 5; /108/, Propo-

sition 9; /114/); $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ is a reflective subcategory of $\mathcal{S}^{\mathcal{J}}$ and $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$ is a reflective subcategory of $\mathcal{F}^{\mathcal{J}}$; the reflector $(H, \mu, \nu) \rightarrow (\hat{H}, \hat{\mu}, \hat{\nu})$ from an $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -prototype to its $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -type is 1-1.

In /102/, Section 2-II, this theorem is precised when $\mathcal{J}$ is void and μ is void (no cones are distinguished on H):

1. *Construction of the $\mathcal{J}$ -type $(\hat{H}, \hat{\mu})$ of H* by transfinite induction, the generic step consisting in adding «formal» $\mathcal{J}$ -limits, their projections and the factors through them (Theorems 7, 9).

2. *Free $\mathcal{J}$ -completion*: If $(\hat{H}, \hat{\mu})$ is the $\mathcal{J}$ -type of H , then $\hat{H}$ is also a universal solution (up to an equivalence i.o. an isomorphism) of the problem to embed H in an $\mathcal{J}$ -complete category (Theorem 8).

3. *Other constructions of a free $\mathcal{J}$ -completion of H* are given in Comment 199.1, namely:

- the $\mathcal{J}$ -limit closure of H in $(\text{Set}^H)^{op}$ (Gabriel & Ulmer);
- the category of $\mathcal{J}$ -pro-objects, whose morphisms may be described as *atlases* between functors with domains in $\mathcal{J}$;
- the category of components of the 2-category of codiagrams in H ; it is used by Prochasson [117] to prove $\mathcal{J}$ -complete categories are the algebras of the «co-diagram» monad on the quotient category of Cat by the relation «two functors are equivalent».

4. *The universal $\mathcal{J}$ -completion - or $\mathcal{J}$ -type - of an $\mathcal{J}$ -prototype (H, ν)* is a quasi-quotient $(\tilde{H}, \tilde{\nu})$ of a free $\mathcal{J}$ -completion $\hat{H}$ of H (Theorem 10); $\tilde{H}$ is a universal solution, up to an equivalence, of the problem to embed H in an $\mathcal{J}$ -complete category with preservation of the ν -distinguished limits (Loose $\mathcal{J}$ -completion Theorem, Comment 203.1). This problem also admits a minimal solution, the *Mac Neille $\mathcal{J}$ -completion of H* , which is the $\mathcal{J}$ -closure of H in $\text{Set}^{H^{op}}$ (/107/, Theorem 8 and Comment 87.1).

All these completion theorems are generalized in /115/ (O, IV-2), where *multi-choices* of cones are taken i.o. partial choices.

Section 3-II /102/ is devoted to a similar universal $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ -completion theorem for *internal categories* in a good concrete category (Theorem 18, Corollary 3), e. g. for some ordered categories (Theorem 19, Corollary

2) and for multiple categories, whence double completions. Other generalizations are indicated in Comment 216.1.

3. COMPLETIONS OF A FUNCTOR.

Theorems on internal categories in H often require some completeness assumptions on H . In particular, they are not valid for differentiable categories, because the category of differentiable manifolds does not admit enough limits. It is one of the motivations which led Charles to construct completions of concrete functors (Comment 35.1). Recently this problem has been thoroughly studied (cf. [69] and Comments 76.1 and 94.1).

We sum up the results of /107/ in the slightly more general frame set up in Comments 76.1, 94.1 to which we refer for definitions and details (the proofs are similar to that given in /107/).

Let $p: H \rightarrow K$ be a concrete functor, $\mathcal{J}$ a class of small categories, and μ a multi-choice of $\mathcal{J}$ -cones on K . A μ -completion of p is a concrete functor $P: \bar{H} \rightarrow K$ admitting p as a full restriction and which is μ -complete: each P -cone (θ, Φ) with $\Phi: I \rightarrow \bar{H}$ and $\theta \in \mu(P, \Phi)$ has an initial lift. Then we have the following results:

1. *Mac Neille μ -completion* (Theorems 5, 6; Propositions A, B of Comment 76.1): there is transfinitely constructed a μ -completion $P: \bar{H} \rightarrow K$ of p which is the smallest finally dense μ -completion of p and its μ -largest μ -generated one (i.e., $\bar{H}$ is the closure of H in $\bar{H}$ under initial lifts of μ -distinguished cones). If p , $\mathcal{J}$ and its elements live in a universe $\mathcal{U}$, so does P . If μ is «commutative», P is initially dense and it may be constructed in one step (Corollary Theorem 6; Proposition C Comment 76.1).

2. *Universal (Δ, μ) -completion* (Theorem 10; Propositions A, B, of Comment 94.1). Let Δ be a class of initial cones lifting μ -distinguished cones; there exists a universal solution $p_\Delta: H_\Delta \rightarrow K$ of the problem to embed p in a μ -completion so that the cones of Δ remain initial cones; p_Δ has also a «maximal» characterization. If Δ is void, p_Δ is called the *free μ -completion of p* ; if Δ consists of all initial cones lifting μ -distinguished cones, then p_Δ is the *universal μ -completion of p* .

SYNOPSIS 6

The following particular cases are considered:

1. K' is a subcategory of K and μ distinguishes the singleton cones in K' ; the Mac Neille K' -completion is the minimal K' -spreading prolongation of p , constructed in one step (Theorems 2, 3); the free K' -completion is constructed in Proposition 13.
2. μ distinguishes equalizers in K' (Theorems 2, 3, 10).
3. K is $\mathcal{J}$ -complete and μ distinguishes all $\mathcal{J}$ -limit-cones: the Mac Neille completion, called smallest prolongation, is constructed by induction using 1 (Theorems 5, 6 well summed up in /146_{IV}.1/). The free completion and the universal completion, or largest prolongation, are proved to exist (Theorem 10; for constructions, cf. Comment 94.1).
4. μ distinguishes all small discrete cones (or sources): the Mac Neille initial completion of p , as well as its free and universal ones, may live in a higher universe; recently they have been thoroughly studied (Comments 76.1, 94.1 and [69]).

4. THEORY OF SKETCHED STRUCTURES.

To get good definitions of mathematical structures has always been a central problem for Charles. In the forties he defined fibre bundles, foliations, manifolds with supplementary structures; in the fifties, to unite these notions, he introduced local structures, the axiomatization of which led him to species of structures over a category, i.e. category actions (Comment 116.2). The category of type functors he constructs in /52/ (where double categories of natural transformations are considered for the first time) was devised to obtain a categorical description of species of structures over sets via axioms; it precises Bourbaki and Quine structures and may be translated in algebraic universes, e.g. toposes (Comment 116.1). In the sixties, he founded the theory of sketches to give a unified setting for studying internal «general algebraic structures» (Comment 19.1).

A *sketch* σ is a neocategory U equipped with distinguished cones and cocones; its models in a category H are the neofunctors $U \rightarrow H$ which map the distinguished (co)cones on (co)limits, whence the *category* H^σ of

sketched structures in H .

The sketch gives one presentation of the structure; it is often constructed via a minimal presentation, or idea, and axioms (coherence problem, Comment 31.4). The sketch may be replaced by its prototype (reflection in the category of prototypes, Section 2) more adapted for semantic problems (Comment 31.3); or by its type which is a canonical maximal presentation common to the various sketches defining the same structures. The existence of the prototype and type of a sketch comes from the general universal completion Theorem /115/ (O, IV-2); in /98,106/, it is obtained for sketches whose distinguished (co)cones form a partial choice (and the term sketch has a more precise meaning, Comment 19.2). The univocity of the embedding of a prototype in its type is proved in /114/.

Most usual structures may be recognized as sketched structures (Comment 31.2), either by constructing a sketch (Syntactic aspect, Comment 31.4) or thanks to characterizations of sketchable categories (Semantic aspect, Comment 31.3).

Properties of categories H^σ of sketched structures are given in /98, 106/, in the case σ is a projective sketch (there are no distinguished cocones). From the Existence Theorems (Section 1) and the transfinite construction of generated submodels (/98/, Comment 13.3; /114/ Proposition 8), it is deduced H^σ is cocomplete and reflective in H^U (Associated Sheaf Theorem) when H is equipped with a good subgenerating concrete functor (/98, 114/; Comments 13.4, 155.2, 305.2).

The theory of projectively sketched structures (or locally presentable categories) has been developed in the seventies by several authors e.g. Gabriel & Ulmer [50] and Lair [99]. Mixed sketched structures have been studied by Burroni [19, 20], Diers ([34] where the cocones are discrete), and recently by Guitart & Lair [63]. Cf. Comments 31.3, 31.4.

For various generalizations of sketches, cf. Comment 32.1.

/97/ is devoted to the example of n -ary structures: existence of colimits and quasi-quotient n -ary structures, construction of the free n -ary (non associative quasi-)category on an n -graph.

COMMENTS

BIBLIOGRAPHY

ABBREVIATIONS. *CRAS* = Compte-Rendus de l'Académie des Sciences, Paris.

CTGD = Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle.

EM = Esquisses Mathématiques, Amiens.

JPAA = Journal of Pure and Applied Algebra.

LN = Lecture Notes in Mathematics, Springer.

1. J. ADAMEK, H. HERRLICH & G. E. STRECKER, The structure of initial completions, *CTGD* XX-4 (1979), 333-352.
2. J. ADAMEK & V. Koubek, Completions of concrete categories, *CTGD* XXII-2 (1981), 209-228.
3. H. ANDREKA & I. NEMETI, Formulas and ultraproducts in categories, *Beit. zur Alg. und Geom.* 8 (1979).
4. P. ANTOINE, Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bull. Soc. Math. Belgique* 18 (1966), 142-164 and 387.
5. C. AUDERSET, Adjonctions et monades au niveau des 2-catégories, *CTGD* XV-1 (1974), 3-20.
6. M. BARR, Coequalizers and free triples, *Math. Z.* 116 (1970), 307-322 (and manuscript, Mc Gill Univ., Montreal, 1979).
7. J.-P. BARTHELEMY, Esquisses pointées, *EM* 12 (1972).
8. J. BECK, *Triples, algebras and cohomology*, Dissertation Columbia Univ. 1967.
9. J. BENABOU, Structures algébriques dans les catégories, *CTGD* X-1 (1968), 1-126.
10. J. BENABOU, Catégories avec multiplication, *CRAS* 256 (1963), 1887-1890.
11. J. BENABOU, Introduction to bicategories, *LN* 47 (1967), 1-77.
12. J. BENABOU, Théories relatives à un corpus, *CRAS* 281 (1975), 831-834.
13. G. BLANC, Foncteurs types et structures, *EM* 14 (1972).
14. F. BORCEUX, Complétion universelle des catégories, *CTGD* XIII-4 (1972), 369-376.
15. R. BÖRGER & W. THOLEN, Remarks on topologically algebraic functors, *CTGD* XX-2 (1979), 155-178.
16. R. BROWN, *Some problems of algebraic topology; a study of function spaces, function complexes and FD-complexes*, Thesis Oxford Univ. 1961.
17. R. BROWN & P. HIGGINS, The equivalence of ω -groupoids and cubical T-complexes, *CTGD* XXII-4 (1981).

BIBLIOGRAPHY

18. G. C. L. BRÜMMER & R.-E. HOFFMANN, An external characterization of topological functors, *LN* 540 (1976), 136-151.
19. A. BURRONI, Esquisses des catégories à limites et des quasitopologies, *EM* 5 (1970).
20. A. BURRONI, Langages graphiques, *CTGD* XXII-3 (1981).
21. E. BURRONI, Catégories discrètement structurées, triples, *EM* 4 (1970).
22. D. CHAMAILLARD, Catégories structurées par une catégorie non associative, *EM* 6 (1970).
23. N. CHARRAUD, *Catégories de foncteurs types*, Thèse 3^e cycle Univ. Paris VII 1971.
24. M. CHARTRELLE, Complétion des catégories monoïdales fermées, *CTGD* XIV-2 (1973), 117-142.
25. Coherence in categories, *LN* 281 (1972).
26. F. CONDUCHÉ, Sur les structures définies par $\lim$, projectives, *EM* 11 (1971).
27. L. COPPEY, Théories algébriques et extension de préfaisceaux, *CTGD* XIII (1972), 3-40 and 265-274.
28. L. COPPEY & DAVAR-PANAH, Décompositions et catégories de relations, *CTGD* XVI-2 (1975), 135-148.
29. M. COSTE, *Localisation dans les catégories de modèles*, Thèse Univ. Paris XIII, 1977.
30. B. DAY, On closed categories of functors, *LN* 137 (1970).
31. D. V. DEKOV, Projections des classes n -polaires, *C.-R. Ac. Bulg. Sci.* 30-6 (1977), 801-804.
32. D. V. DEKOV, *Problèmes universels relatifs aux classes n -aires*, Preprint 1979.
33. A. DELEANU & P. HILTON, Borsuk shape and Grothendieck categories of pro-objects, *Math. Proc. Cambridge* 79 (1976), 473-482.
34. Y. DIERS, *Catégories localisables*, Thèse Univ. Paris VI, 1977.
35. J. DUSKIN, Pro-objects (d'après Verdier), *Séminaire Heidelberg-Strasbourg* (1966/67), Exposé 6.
36. A. EHRESMANN (-Bastiani), Applications différentiables et variétés de dimension infinie, *J. Analyse Math. Jérusalem* XIII (1964), 1-114.
37. A. EHRESMANN (-Bastiani), Systèmes guidables et problèmes d'optimisation, *Rapports Labo. Automatique Théorique* Univ. Caen (1963-65).
38. A. EHRESMANN (-Bastiani), *Théorie des ensembles*, C.D.U. Paris, 1970.
39. A. C. EHRESMANN, *Charles Ehresmann and the categories*, Preprint, 1980.

BIBLIOGRAPHY

40. A.C. EHRESMANN, Partial completions of concrete functors, *CTGD* XXII-3 (1981), 315-328.
41. S. EILENBERG & G.M. KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on cat. Algebra La Jolla*, Springer, 1966.
42. F. FOLTZ, Produit tensoriel généralisé, *CTGD* X-3 (1968), 309-332.
43. F. FOLTZ, Sur la catégorie des foncteurs dominés, *CTGD* XI-2 (1970), 101.
44. F. FOLTZ, Sur la domination des catégories, *CTGD* XII (1971), 93 and 375.
45. F. FOLTZ, Complétion des V-catégories, *CTGD* XIV-1 (1973), 41-114.
46. F. FOLTZ & C. LAIR, Fermeture standard des catégories algébriques, *CTGD* XIII-3 (1972), 275-308 (corrected in *Constructions et tests standards* [99]).
47. F. FOLTZ, G.M. KELLY & C. LAIR, Algebraic categories with few monoidal structures or none, *JPAA* 17 (1980), 171-177.
48. P. FREYD, Algebra-valued functors in general and tensor products in particular, *Colloq. Math.* XIV (1966), 89-105.
49. P. FREYD & G.M. KELLY, Categories of continuous functors I, *JPAA* 2 (1970) 169-191.
50. P. GABRIEL & F. ULMER, Lokal präsentierbare Kategorien, *LN* 221 (1971).
51. P. GABRIEL & M. ZISMAN, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer, 1967.
52. R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.
53. J.W. GRAY, Formal category theory I, *LN* 391 (1974).
54. G. GREVE, Lifting closed and monoidal structures along semitopological functors, *LN* 719 (1979), 74-83.
55. G. GREVE, J. SZIGETI & W. THOLEN, Lifting tensorproducts along non-adjoint functors, *CTGD* (to appear).
56. R. GUITART, Relations, fermetures, continuités, *EM* 1 (1970).
57. R. GUITART, Remarques sur les machines et les structures, *CTGD* XV-2 (1974) 113-144.
58. R. GUITART, Monades involutives complémentées, *CTGD* XVI-1 (1975) 17-101.
59. R. GUITART, Tenseurs et machines, *CTGD* XXI-1 (1980), 5-62.
60. R. GUITART, Relations et carrés exacts, *Ann. Sc. Math. Québec* IV-2 (1980), 103-125.
61. R. GUITART, Qu'est-ce que la logique dans une catégorie? *CTGD* XXIII-1 (1982).
62. R. GUITART, The theory of sketches (revisited), *Journées Faisceaux et Logique*, Univ. Paris XIII, May 1981.

BIBLIOGRAPHY

63. R. GUITART & C. LAIR, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, *Diagrammes* 4, Paris (1980), 1-100.
64. R. GUITART & C. LAIR, Esquisse de morphisme; critères de rigidification des morphismes souples entre structures internes, *Diagrammes* 5 (1981).
65. R. GUITART & C. LAIR, La continuité pour représenter les formules, Manuscript, Paris, 1981.
66. R. GUITART & L. VANDENBRIL, Décompositions et lax-complétions, *CTGD* XVIII-4 (1977), 333-407.
67. M. HASSE, Eine Verallgemeinerung des Kategorienbegriffs, *Tech. Univ. Dresden Informationes* 07-35 (1977).
68. H. HERRLICH, Initial completions, *Math. Z.* 150 (1976), 101-110.
69. H. HERRLICH, Initial and final completions, *LN* 719 (1979), 137-149.
70. H. HERRLICH, Universal completions of concrete categories, *Proc. Conf. on categ. aspects of Topology and Analysis*, Ottawa (1980).
71. H. HERRLICH & G. E. STRECKER, Semi-universal maps and universal initial completions, *Pacific J. Math.*
72. R.-E. HOFFMANN, Note on semitopological functors, *Math. Z.* 160 (1978), 69.
73. J.-J. HORRENT, Sur les espèces de morphismes, *EM* 18 (1972).
74. J. HOUDEBINE, Classes et ensembles, *CTGD* VI (1964).
75. J. ISBELL, Subobjects, adequacy, completeness and categories of algebras, *Rozprawy Math.* 36 (1964), 124-142.
76. J. ISBELL, Structure of categories, *Bull. A.M.S.* 72 (1966), 619-655.
77. J. ISBELL, General functorial semantics I, *Amer. J. Math.* XCIV (1972), 535.
78. P. T. JOHNSTONE, *Topos Theory*, Acad. Press, 1977.
79. P. T. JOHNSTONE & A. JOYAL, Continuous categories and exponentiable toposes, Preprint, 1981.
80. A. JOYAL, Une théorie combinatoire des séries formelles, Preprint Univ. Sydney, 1980.
81. W. F. KEIGHER, Symmetric monoidal closed categories generated by commutative adjoint monads, *CTGD* XIX-3 (1978), 269-294.
82. G. M. KELLY, Tensor products in categories, *J. Algebra* 2 (1965), 15-37.
83. G. M. KELLY, An abstract approach to coherence, *LN* 281 (1972), 106-147.
84. G. M. KELLY, A unified treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves, and so on, *Bull. Austr. Math. Soc.* 22-1 (1980), 1-160.
85. G. M. KELLY, Coherence for compact closed categories, *JPAA* (1980), 193-213.

BIBLIOGRAPHY

86. G.M. KELLY, *The basic concepts of enriched category theory*, Sydney, 1981.
87. G.M. KELLY, Les théories ehresmanniennes finitaires dans les catégories enrichies, 3^e Coll. sur les Cat. dédié à C. Ehresmann, *CTGD* (to appear).
88. G.M. KELLY & S. MAC LANE, Coherence in closed categories, *JPAA* 1 (1971) 97-140.
89. J.F. KENNISON, On limit-preserving functors, *Ill. J. Math.* 12 (1968), 616-619.
90. A. KOCK, Limit monads in categories, *Aarhus Univ. Math. Preprint Series* 6 (1967).
91. A. KOCK, Strong functors and monoidal monads, *Archiv der Math.* XXIII (1972), 113.
92. V. KOUBEK & J. REITERMAN, Categorical constructions of free algebras, co-limits, and completions of partial algebras, *JPAA* 14 (1979), 195-231.
93. C. L AIR, Idées et maquettes de structures algébriques, *CTGD* XII-1 (1971), 29-56.
94. C. L AIR, Foncteurs d'omission de structures algébriques, *CTGD* XII-2 (1971), 147-186.
95. C. L AIR, Structures n -uples de Hurewicz, *CRAS* 273 (1971), 700-703.
96. C. L AIR, Dualité pour les structures algébriques esquissées, *CTGD* XV-4 (1974), 353-376.
97. C. L AIR, Algorithmes de n -arisation pour les structures algébriques esquissées, *CRAS* 278 (1974), 219-222.
98. C. L AIR, Etude générale de la catégorie des esquisses, *EM* 23 (1975).
99. C. L AIR, *Esquissabilité des structures algébriques*, Thèse Univ. Amiens 1977.
100. C. L AIR, Conditions syntaxiques de triplabilité d'un foncteur algébrique esquissé et Conditions syntaxiques d'existence de co-adjoints aux foncteurs algébriques, *Diagrammes* 1, Paris (1979).
101. C. L AIR, Fermeture standard des catégories algébriques II, *CTGD* XVIII-1 (1977), 3-60.
102. J. L AMBEK, Completions of categories, *LN* 24 (1966), 1-70.
103. F.W. LAWVERE, *Functorial semantics of algebraic theories*, Dissertation Columbia Univ. 1963.
104. F.W. LAWVERE, Equational doctrines and ordinal sums, *LN* 80 (1967).
105. M.-C. LEBLOND, Complétion d'un foncteur structuré, *CTGD* XIII-4 (1972), 377-392.
106. K. L ELLAHI, Catégories préadditives structurées, *EM* 7 (1970).
107. F.E.J. LINTON, An outline of functorial semantics, *LN* 80 (1969).

BIBLIOGRAPHY

108. S. MAC LANE, Natural associativity and commutativity, *Rice Univ. Studies* 49 (1963), 28-46.
109. E.G. MANES, *Algebraic Theories*, Springer, 1976.
110. C. MARSHALL, Calculus on sub-cartesian spaces, *J. Diff. Geom.* 10 (1975), 551-573.
111. R. MIJOLE, Notion catégorique de langage et formule, *CRAS* 279 (1974), 753-756.
112. G. MOREAU, Catégories doubles à isomorphismes près, *Thèse 3^e cycle Univ. Paris VII* (1975).
113. NGO VAN QUE, Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* (1967), 157-224.
114. H.E. PORST, Characterization of Mac Neille completions and topological functors, *LN* 719 (1979), 201-220.
115. H.E. PORST & M.B. WISCHNEWSKY, Existence and applications of monoidally closed structures in topological categories, *LN* 719 (1979), 277-292.
116. J. PRADINES, Echelles et faisceaux sur les quotients de feuilletages, *CTGD* XXII-1 (1980), 73-84.
117. D. PROCHASSON, Catégories complètes à gauche et triples, *EM* 12 (1972).
118. D. PUMPLUN, Das Tensorprodukt als universelle Problem, *Math. Ann.* 171 (1967), 247-262.
119. W.V.O. QUINE, *Set theory and its logic*, Harvard Univ. Press, 1963.
120. A. ROUX, Un théorème de plongement des catégories, *CRAS* 258 (1964), 4646.
121. H. SCHUBERT, *Catégories* (translated by E. Gray), Springer, 1972.
122. R. STREET, The comprehensive construction of free colimits, *Macquarie Univ. Report* 79.0002 (1979).
123. R. STREET, Cosmoi of internal categories, *Trans. A.M.S.* (1980).
124. TARSKI, Über unerreichbare Kardinalzahlen, *Fund. Math.* 30 (1938).
125. W. THOLEN, Mac Neille completion of concrete categories with local properties, *Comment. Math. Univ. St Pauli* 28 (1980), 179-202.
126. V. TOPENTCHAROV, Eléments d'une théorie de catégories *n*-aires, *CRAS* 264 (1967), 269-272.
127. F. ULMER, On the existence and exactness of the associated sheaf functor, Preprint Univ. Zürich, 1971.
128. E. VAUGELADE, Application des bicatégories à l'étude des catégories internes, *EM* 21 (1975).
129. P. VINCENT, Limites et complétions, *Thèse Univ. Paris*, 1968.
130. G. & M. WEIDENFELD, Faisceaux et complétions un., *CTGD* XV-1 (1974), 83.

INDEX DU VOLUME IV-I

- Action of a category 333, 360
- Algebra of a monad 333
 - » of an endofunctor 356, 365
- Algebraic structure 12, 30, 329
 - » theory 330
 - » universe 360
- Application limite inductive 5, 204
 - » » partielle 5, 204
 - » » projective 3, 169
 - » » multiforme 65
 - » » partielle 3, 169
- Associated sheaf Theorem 305, 328, 365, 379
- Atlas 370
- Base de catégorie 23, 327
- Calculus on formulas 336
- Cartesian closed initial completion 355
- Catégorie 312
 - » des applications 314
 - » des esquisses 29, 337
 - » des foncteurs naturalisés 103
 - » des types 109
 - » des (proto)types 28
 - » des pro-objets 370
 - » des relations 314
 - » des structures esquissées 12, 30, 334
 - » esquissables 335
 - » latérale des transformations naturelles 102
 - » libre 111, 319
 - » localement présentable 334
 - » localisable 334
 - » longitudinale des transformations naturelles 101
 - » n-aire 7, 326
 - » des n-simplexes 326
 - » des n-relations 326
 - » libre 8
 - » des dédales 9
 - » quasi-quotient 9
 - » pleinement engendrée 75, 350
- Catégorie sous-inductive 231
 - » ω -uple 236
- 2-catégorie des transformations naturelles 102
- Choice of (limit-)cones 346
- Classe sous-inductive 225
- Club 336
- Codense completion 351
- Coéjecteur (strict) 124-126
- Coherence problems 336
- Colimites 13, 156, 276
- Commutative choice 348
- Compactification 318
- Comparison functor 335
- Complétion 351
 - » d'une catégorie multiple 233
 - » » sous-inductive 231
 - » » structurée 221
 - » inductive universelle 205
 - » projective libre 182, 195, 368
 - » » minimale 81, 356
 - » relative 4, 172
 - » » universelle 4, 25, 201, 373
- $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complétion libre 188, 291
 - » relative 207
 - » universelle 214, 291, 373
- Complétion d'un foncteur:
 - minimale 16, 77, 307, 346, 381
 - maximale 16, 94, 307, 381
 - universelle 94, 307, 353
- Concrete sketch 337
- Construction of:
 - free n-ary (quasi)category 9
 - » completion of H 187, 196, 368
 - » » of a functor 353
 - generated structured relation 252
 - » sub-model 328
 - loose completions 373
 - Mac Neille completion of H 81, 356
 - » of p 16, 77, 307, 346
 - quotient categories 254

INDEX

- Construction of sketches 336
 - » structures 359
 - » type functors 105, 237
- Coprojecteur strict 124-126
- Corpus 339
- Critères d'existence d'adjoints 152...
- Cylinder 331
- D**édales 9
- Définition de structures 116, 359
- Differentiable manifold 341
- Double completion 237, 357
- E**jecteur (strict) 124-126
- Enriched completion 374
 - » sketch 337
- Equivalence naturelle canonique 114
 - » élémentaire 113
- Espace affine, projectif 321
- Espèce de structures 116, 360
- Esquisse 11, 29, 330
 - » des catégories 21
 - » » classes multiplicatives 20
 - » » graphes 20
 - » » (proto)types 333
 - » double 338
 - » enrichie 337
 - » inteme 338
 - » locale 333
- Examples of sketches 333
 - » of sketched structures 333
- Existence of associated sheaf 305, 379
 - » » (proto)type 28
 - » colimits 156, 276
 - » free algebras 356, 365
 - » » completion 182, 193, 210, 213, 214
 - » » object 148..., 270, 362
 - » quasi-cohomology functor 166
 - » quasi-quotients 156, 273
 - » tensor products 158, 366
 - » universal completion 25, 201
 - » » of a functor 92, 310, 352
- Factorization 362
- Finally dense 343, 345, 347
- Foncteur à noyaux 120
 - » à produits (fibrés) 120
 - » associé à un générateur 362
 - » bien surjectif 43
 - » μ -compatible 16, 65, 307
 - » de (quasi-)cohomologie 164
 - » $\sim$ -engendrant 144
 - » ζ - $\sim$ -engendrant 6, 217
 - » $(\mathbb{M}, X, H)$ -engendrant 136, 274, 363
 - » q -engendré 48, 343
 - » K' -étalant 15, 43
 - » naturalisé 103
 - » partie 105
 - » type 109, 237, 357
 - » typique 115
- Formule inteme 336
 - » typifiée 360
- Free n -ary (quasi)category 8
 - » completion of a category 187, 196, 368
 - » » functor 353
- G**énérateur d'une catégorie 111
 - » factorisation 363
- μ -generated completion 347
- Grande catégorie 314
- Graphe 312
 - » (multiplicatif) structuré 240
- Groupeïde 313
 - » libre 111, 259
- Idéal 9, 161
- Idée d'une esquisse 31, 335
- Image 141
 - » réciproque de sous-structure 239
- Initial completion 349
- Initially dense 348
- p -injection 268
- Injection naturelle canonique 114
 - » type 112
- Internal formula 336
 - » sketch 338
 - » structure 330

INDEX

- L**ax completion 372
 - » morphism of sketches 337
- Lemme de Yoneda 80, 296
- Limite de foncteurs naturalisés 107
- Local functor 355
- Localizable category 334, 335
- Locally presentable category 334
- Loose completion 373
 - » type 374
- M**achine 340
- Mac Neille completion of H 81, 350
 - » μ -completion of p 77, 346
- Mixed sketch 28
- Modèle d'une esquisse 30, 331
- Monoïde libre 348
- Morphisme d'esquisses 9, 337
 - » distingué 128
 - » engendré 128
- Multi-choice of cones 346
- N**oyau 120
- O**rthogonal subcategory 365
- P**artial choice of cones 327
- Permutabilité 103
- Petite 135, 314
- Pré-esquisse 28
- Produit (fibré) naturalisé 120
 - » parallèle 105, 113
 - » tensoriel 158, 366
- Projecteur (strict) 124-126, 146
- Projective sketch 11, 330
 - » sketched structure 333
- Prolongement minimal 16, 58, 79, 347
 - » maximal 16, 94, 307, 353
- Pro-object 370
- Proper factorization 362
- Propre pour la quasi-cohomologie 9, 164
- Prototype 28
- Q**uasi-catégorie n -aire 9, 326
 - » des dédales 9
- Quasi-cohomologie 9, 164
- Quasi-quotient 156, 273
 - » de structures n -aires 9
 - » » algébriques 13
 - » (néo)catégories structurées 247
- Quotient de catégories libres 254
- R**eflective completion 349, 354
- Relation bicompatible engendrée 248
 - » n -compatible 7
 - » structurée (engendrée) 251
- S**emantic problems 334
- Semi-final lift 365
- Set condition 153, 362
- Sketch 11, 20, 29, 330
- Sketchable category 334
- Sketched structure 30, 329, 333
- Sous-catégorie stable (μ, Q) -engendrée 72
 - » stable par (K', p) -injections 47
 - » $\mathcal{J}$ -limites 81, 173
 - » (K', p) -noyaux 47
- Sous-foncteur strict 297
 - » K' -étalant engendré 44
- Sous-modèle engendré 13
- Sous-morphisme engendré 268
- Sous-structure engendrée 39, 144, 275
- Species of structures 116, 360
- Stable class 129, 369
- Structure n -aire 7, 325
 - » » libre 8
 - » » quasi-quotient 9
 - » algébrique mixte 30, 333
 - » » projective 12, 333
 - » esquissée 333
 - » libre 147, 268, 317
 - » quasi-quotient 156, 268, 273
- Structured natural transformations 359
- Suite exacte courte 163
- Syntactic problems 335
- T**ensor product 158, 366
- Théorème de Freyd 154
 - » de complétion libre 187, 193, 213, 368

INDEX

- | | |
|---|---|
| <p>Théorème de complétion structurée 221</p> <p>» » universelle 201, 214, 373</p> <p>» » minimale d'un foncteur 77, 307, 346</p> <p>» » maximale d'un foncteur 94, 307</p> <p>» d'existence d'algèbre libre 365</p> <p>» » de limite inductive 156, 276</p> <p>» » de produit tensoriel 158, 366</p> <p>» » quasi-quotient 156, 273</p> <p>» » structure libre 148, 270</p> <p>» du faisceau associé 305, 379</p> <p>Théorie algébrique 329</p> <p>» relative à un corpus 339</p> | <p>Transcomplétion 306</p> <p>Transformation naturelle canonique 114, 237</p> <p>» » structurale 359</p> <p>Type 12, 28, 338, 374</p> <p>» functor 109, 237</p> <p>Typical functor 115</p> <p>Typified formula 360</p> <p>Universal completion 182, 187, 193, 213, 368</p> <p>» μ-completion 94, 307</p> <p>Univers 266, 315, 343, 382</p> <p>» algébrique 360</p> |
|---|---|

Les références renvoient indifféremment au mot français et/ou anglais.

TABLE DES MATIERES DU VOLUME IV-I

	Pages
INTRODUCTION	VII
REMERCIEMENTS	IX
PHOTOGRAPHIE	XI
FAC SIMILE	XII
LISTE DES PUBLICATIONS	XV
DE 1970 A 1979	XXIII
/ 88/ Adjonction de limites aux catégories structurées	
1. Notations	3 325
2. Complétion $\mathcal{I}$ -projective d'une catégorie	» »
3. Adjonction de $\mathcal{I}$ -limites projectives	4 »
4. Adjonction de $\mathcal{I}$ -limites projectives et $\mathcal{I}$ -limites inductives	5 »
5. Catégories structurées $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ -complètes	» »
/ 97/ Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires	
1. Existence de structures quasi-quotients	7 325
2. Projections des quasi-catégories n-aires non associatives	8 326
3. Catégories n-aires libres	» »
4. Construction d'une structure n-aire quasi-quotient	9 327
5. Cas particulier	» »
/ 98/ Sur les structures algébriques	
1. Esquisses algébriques projectives	11 327
2. Type d'une esquisse algébrique	12 »
3. Structures algébriques $\mathcal{I}$ -projectives	» »
4. Foncteur projection de $\mathcal{S}(H')$ vers $\mathcal{M}$	13 »
5. Exemples de structures algébriques	14 328
/ 99/ Adjonctions de limites à un foncteur fidèle ou à une catégorie	
1. Prolongement maximal d'un foncteur en un foncteur K' -étalant ou μ -compatible	15 329
2. Prolongements minimaux d'un foncteur en un foncteur K' -étalant ou μ -compatible	16 »
3. Complétion minimale d'une catégorie	18 »
/ 106/ Esquisses et types des structures algébriques	
1. Introduction	19 329
2. Exemples de définition d'une structure comme réalisation d'une esquisse	» 332

TABLE DES MATIERES

3. Complétion d'une base de catégorie	23	332
4. Type et prototype d'une esquisse	28	»
5. Cas particuliers, Problèmes	30	»
/ 107/ Prolongements universels d'un foncteur par adjonction de limites		
Table des matières	34	
Introduction	35	340
0. Conventions	37	342
1. Foncteurs K' -éta lants et K' -résolvants à droite	40	343
2. Construction d'un prolongement K' -éta lant d'un foncteur	48	»
3. Prolongement minimal d'un foncteur en un foncteur K' -éta lant	55	344
4. Cas des foncteurs vers une catégorie d'applications	59	345
5. Prolongement d'un foncteur en un foncteur à limites projectives	64	346
6. Prolongement minimal d'un foncteur en un foncteur à limites projectives	70	»
7. Plongement minimal d'une catégorie dans une catégorie à limites projectives	78	350
8. Prolongements maximaux d'un foncteur	88	352
Bibliographie	97	
Index des notations	98	
Index de la terminologie	99	
/ 52/ Catégorie des foncteurs types		
I. Foncteurs naturalisés	101	356
II. Construction de foncteurs naturalisés	105	357
III. Catégorie des foncteurs types	109	»
IV. Catégorie des transformations naturelles canoniques	112	358
V. Foncteurs typiques	114	359
Références	116	
/ 102/ Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints		
Introduction	117	361
I. Existence de structures libres		
1. Morphismes engendrés	120	»
2. Foncteurs engendrant s	135	»
3. Existence de structures libres engendrées	146	»
4. Quasi-cohomologie	160	367
II. Adjonction de limites à une catégorie		
1. Adjonction de limites projectives	168	367
2. Construction de complétions projectives	187	368
3. Adjonction de limites inductives et limites projectives	204	374
4. Adjonction de limites à une catégorie structurée	216	»

TABLE DES MATIERES

Appendice		
1. Image réciproque de sous-structures	239	376
2. Relation structurée engendrée par une relation	248	»
3. Lemmes relatifs au Théorème 12-II	259	377
Bibliographie	263	
/ 108/ Constructions de structures libres		
Introduction	265	377
0. Quelques rappels	»	»
1. Théorème d'existence de structures libres	270	378
2. Existence de structures quasi-quotients	272	»
3. Existence de limites inductives	276	»
4. Complétion d'une catégorie	279	»
/ 114/ Sur le plongement d'un prototype dans un type		
1. Autre formulation du problème	293	379
2. Solution dans le cas projectif	295	»
3. Restrictions de $\mathbf{Y}$ compatibles avec les limites inductives	296	»
4. Etude d'une sous-catégorie de $\mathbf{N}$	297	»
5. Théorème du faisceau associé	299	»
/ 146_{IV.1}/ Complétion d'un foncteur	307	380
Construction d'un foncteur $\tilde{p}$	308	381
Le foncteur $\tilde{p}$ comme structure colibre	309	»
Existence d'une solution maximale	310	»
/ 146_{IV.2}/ Les catégories dans l'enseignement	311	381
COMMENTS ON PART IV - 1		
Introduction	323	
General comments	325	
SYNOPSIS		
0. Motivation and classification of the papers.	383	
1. Existence theorems	384	
2. Completions of a category	385	
3. Completions of a functor	387	
4. Theory of sketched structures	388	
Bibliography	390	
INDEX DU VOLUME IV - 1	397	

Le second nombre renvoie à la page correspondante des « Comments »