

# **Charles Ehresmann œuvres complètes et commentées**

**CATÉGORIES ORDONNÉES  
APPLICATIONS DES ORDRES EN TOPOLOGIE**

PARTIE II.2

Éditée et commentée par Andrée CHARLES EHRESMANN

AMIENS 1982

Ce livre constitue le

SUPPLÉMENT N° 1 au VOLUME XXIII (1982) des

**CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE**

publication périodique, créée par Charles EHRESMANN en 1958,  
actuellement dirigée et éditée par :

**Madame A. C. EHRESMANN**

**U. E. R. de Mathématiques, 33 rue Saint-Leu**

**80039 AMIENS CEDEX. FRANCE.**

IMPRIMERIE EVRARD. AMIENS.

Dépôt Légal: 3<sup>e</sup> Trimestre 1982

Tous droits de traduction, reproduction et adaptation  
réservés pour tous pays

## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidée pendant la réalisation de ce volume :

- Les mathématiciens qui m'ont encouragée par leurs critiques bienveillantes, leurs envois de documents ou leur aide pratique, en particulier M. Georges REEB;

- Mes collègues de l'U. E. R. de Mathématiques d'Amiens, qui ont bien voulu me décharger cette année des tâches administratives; les souscripteurs qui me témoignent leur confiance; et l'Imprimerie Evrard qui assure l'impression avec soin;

- Et surtout, pour leur ferme soutien et leurs conversations stimulantes, les D<sup>rs</sup> Jean-François de FRÉMONT, François de la SIMONE, et plus encore Jean-Paul VANBREMEERSCH grâce à qui j'ai eu la force de poursuivre ce travail.

*Andrée CHARLES EHRESMANN*

*Amiens, Juin 1982*

Definitions of foliation.

$V_n$  partition in connected submanifolds of dim  $p$ ;  
 On  $U$ , open set of  $V_n$ , if we have the induced partition, by the components of the sections or intersections with  $U$  of the submanifolds.

Each  $x \in V_n$  has an open neighborhood  $U'$  such that the induced partition is equivalent with the partition of an open set  $U'$  of  $R^n$ , induced by the partition of  $R^n$  by the parallel lin. subspaces, parallel to  $R^p$ .

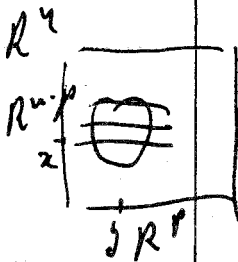
Canonical foliation on  $R^n$ .

Distinguished maps of  $R^n$  on  $V_n$ .

$\Gamma$  pseudogroup of local automorphisms of the canonical foliation of  $R^n$ .

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & \dots & x_p & x_{p+1} & \dots & x_n \\ x'_{p+1} & \dots & x'_n & x_{p+1} & \dots & x_n \\ x'_1 & \dots & x'_p & x_1 & \dots & x_n \end{array}$$

$(x, y) \rightarrow (\psi(x), \psi(x, y))$   
 pseudogroup generated by these transformations



A foliation on  $V_n$  can be defined by an atlas of  $R^n$  on  $V_n$  compatible with this pseudogroup.

~~If we restrict the pseudogroup~~

The foliation of  $R^n$  defines a topology  $\mathcal{O}'$  of  $R^n$ , namely of the leaves, & top. ord. topology of  $R^n$ .

$\Gamma$  is the set of local automorphisms for both topologies.

On  $V_n$  the atlas will define also a topology  $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ .

The leaves of the foliation are the components of  $\mathcal{O}'$ .

The leaves are  $p$ -dim submanifolds.

More general: On  $E$  ~~but not consider~~ two topologies  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$ ,  $\mathcal{O}'$  finer than  $\mathcal{O}$ ; the identity map being ~~locally~~ locally a homeomorphism (of a neighborhood of each point on a <sup>rel.  $\mathcal{O}'$</sup>   $m$ -plane rel.  $\mathcal{O}$ ).

The couple  $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$  defines a foliation. The components of  $\mathcal{O}'$  are the leaves.

Mesma



Les mémoires originaux faisant l'objet de cette Partie II-2 sont reproduits ci-après par procédé photographique. Le cours /81 /, qui avait été seulement multigraphié, a été recomposé sur machine Varityper. Le volume débute par quatre articles d'ordre général, qui forment la suite logique de la Partie II-1 ; les trois suivants (dont l'un est plus ancien) donnent des applications.

Les numéros rajoutés dans les marges extérieures réfèrent aux commentaires situés à la fin du livre (cf. page 705).





/ 62 /

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Complétion des catégories ordonnées.*  
 Note (\*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Jean Leray.

Cette Note et la suivante étudient le problème du plongement d'une catégorie ordonnée dans une catégorie quasi-inductive, généralisant les théorèmes de complétion relatifs aux groupoïdes sous-préinductifs démontrés dans (2).

1. CATÉGORIES ORDONNÉES. — Soit  $\mathcal{M}_0$  une classe de classes contenant : avec une classe toutes ses sous-classes; avec deux classes, leur classe produit. Soit  $\mathcal{M}$  la catégorie des applications  $(M', F, M)$ , où  $M \in \mathcal{M}_0$  et  $M' \in \mathcal{M}_0$ . Soit  $\tilde{\Omega}$  la catégorie des triplets  $((M', <), F, (M, <))$  tels que  $(M, <)$  et  $(M', <)$  soient des classes ordonnées,  $(M', F, M) \in \mathcal{M}$  et que les conditions :  $x \in M, x' \in M$  et  $x' < x$  entraînent  $F(x') < F(x)$ .

Soient  $\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}''$  et  $\tilde{\Omega}_2$  les sous-catégories de  $\tilde{\Omega}$  formées des triplets  $((M', <), F, (M, <))$  vérifiant respectivement les conditions suivantes, où  $x \in M, x' \in M$  et  $y \in M'$  :

$\tilde{\Omega}'$  : Si  $x' < x$  et  $f(x') = f(x)$ , on a  $x' = x$ .

$\tilde{\Omega}''$  : Si  $y < f(x)$ , il existe  $x' < x$  tel que  $f(x') = y$ .

$\tilde{\Omega}_2$  : Si  $y < f(x)$ , la classe des  $x' < x$  tels que  $f(x') < y$  admet un plus grand élément  $x_y$  pour lequel  $F(x_y) = y$ .

DÉFINITION. — On appelle *catégorie ordonnée* (1) une catégorie  $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$ -structurée (1). Une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée est dite *semi-régulière* si elle est  $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}'', \tilde{\Omega}''), \tilde{\Omega})$ -structurée; elle est dite *assez régulière* (resp. *régulière*) si elle est  $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_2), \tilde{\Omega})$ -structurée [resp.  $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_2), \tilde{\Omega}'')$ -structurée]. Définition analogue en remplaçant le mot catégorie par groupoïde.

DÉFINITION. — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée; soient  $g \in \mathcal{C}$  et  $f \in \mathcal{C}$ ; soit  $\langle g, f \rangle$  la classe des couples composables  $(g', f')$  tels que  $g' < g$  et  $f' < f$ . Si  $\langle g, f \rangle$  admet un plus grand élément  $(\bar{g}, \bar{f})$  pour l'ordre induit par l'ordre produit  $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, <)$ , on dira que  $g$  et  $f$  admettent  $\bar{g} \cdot \bar{f}$  pour *pseudoproduit* dans  $(\mathcal{C}, <)$  et l'on écrira :  $\bar{g} \cdot \bar{f} = gf$ .

PROPOSITION. — Pour qu'une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée  $(\mathcal{C}, <)$  soit assez régulière, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition suivante :

(R) Soit  $f \in \mathcal{C}$ ; pour tout  $e \in \mathcal{C}_0$  tel que  $e < \alpha(f)$  [resp.  $e < \beta(f)$ ], le pseudo-produit  $fe$  (resp.  $ef$ ) est défini et l'on a  $\alpha(fe) = e$  [resp.  $\beta(ef) = e$ ].

Soit  $(M, <) \in \tilde{\Omega}_0$  et  $C \subset M$ . Si  $C$  admet une borne inférieure dans  $(M, <)$ , on l'appelle intersection de  $C$  et on la note  $\bigcap C$ . Si  $C$  est majoré par  $f \in \mathcal{C}$  et si  $C$  admet une borne supérieure dans la classe  $f^\rceil$  des minorants de  $f$ , cette borne supérieure est appelée sous-agrégat de  $C$  et notée  $\bigcup C$ .

**PROPOSITION.** — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée assez régulière; soient  $f \in \mathcal{C}$  et  $g \in \mathcal{C}$ ; le pseudoproduit  $gf$  est défini si, et seulement si,  $e = \alpha(g) \cap \beta(f)$  est défini; dans ce cas,  $gf = (ge) \cdot (ef)$ . Si  $(\mathcal{C}, <)$  est régulière et si les pseudoproduits  $h(gf)$  et  $(hg)f$  sont définis, on a

$$h(gf) = (hg)f.$$

1

Soit  $\tilde{\Omega}'$  la sous-catégorie pleine de  $\tilde{\Omega}$  ayant pour objets les classes sous-inductives  $(M, <)$ , c'est-à-dire <sup>(2)</sup> les classes ordonnées  $(M, <)$  telles que toute sous-classe majorée de  $M$  admette une intersection et que  $M$  possède un plus petit élément. Soit  $\mathcal{J}^u$  la sous-catégorie de  $\tilde{\Omega}$  formée des applications *quasi-inductives*, qui sont les triplets  $((M', <), F, (M, <)) \in \tilde{\Omega}'$  tels que, si  $\bigcup C$  est défini dans  $(M, <)$ , on ait

$$F\left(\bigcup C\right) = \bigcup F(C).$$

**DÉFINITION.** — Une catégorie  $\mathcal{J}^u$  ( $\mathcal{J}^u \cap \tilde{\Omega}'$ ,  $\mathcal{J}^u$ )-structurée sera appelée *catégorie quasi-inductive*. Une catégorie sous-préinductive <sup>(3)</sup>  $(\mathcal{C}, <)$  telle que  $(\mathcal{C}, <)$  soit une classe préinductive <sup>(2)</sup> est appelée *catégorie préinductive*.

**PROPOSITION.** — Si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie ordonnée régulière et si  $(\mathcal{C}, <)$  est une classe sous-inductive, alors  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière.

2

Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée assez régulière.

**DÉFINITION.** — On appelle *sous-catégorie régulière* de  $(\mathcal{C}, <)$  une sous-catégorie  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{C}$  vérifiant les conditions suivantes :

1° Si  $f \in \mathcal{C}_1$ ,  $e \in (\mathcal{C}_1)_0$  et  $e < \alpha(f)$  [resp.  $e < \beta(f)$ ], on a  $fe \in \mathcal{C}_1$  (resp.  $ef \in \mathcal{C}_1$ ).

2° Si  $e \in (\mathcal{C}_1)_0$  et  $e' \in (\mathcal{C}_1)_0$ ; si  $e \cap e'$  est défini, on a  $e \cap e' \in (\mathcal{C}_1)_0$ .

**PROPOSITION.** — Soit  $\mathcal{C}'$  une sous-catégorie régulière de  $(\mathcal{C}, <)$ ; alors on a  $\mathcal{C}_1 \mathcal{C}' \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}'$ , où  $\mathcal{C}_1 \mathcal{C}'$  désigne la classe des pseudoproduits  $gf$ ,  $g \in \mathcal{C}_1$  et  $f \in \mathcal{C}'$ ; si  $(\mathcal{C}, <)$  est régulière,  $(\mathcal{C}', <)$  est une catégorie ordonnée régulière.

2. **FUSÉES STRICTES RÉGULIÈRES.** — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée régulière telle que le groupoïde  $\mathcal{C}'$  des éléments inversibles de  $\mathcal{C}$ , muni de la relation d'ordre induite par  $(\mathcal{C}, <)$ , soit un groupoïde ordonné semi-régulier  $(\mathcal{C}', <)$ .

**DÉFINITION.** — On appelle *fusée stricte neutre* de  $(\mathcal{C}, <)$  une sous-catégorie régulière  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{C}$  vérifiant les conditions suivantes, où  $f \in \mathcal{B}$  et  $f' \in \mathcal{B}$  :

1° Si  $\alpha(f) = \alpha(f')$ , il existe  $f_1 \in \mathcal{B}$  et  $g \in \mathcal{B}'$  tels que :

$$\alpha(f_1) = \alpha(f), \quad f_1 < f \quad \text{et} \quad g \cdot f_1 < f'.$$

2° Si  $\beta(f) = \beta(f')$ , il existe  $f'_1 \in \mathcal{B}$  et  $g' \in \mathcal{B}'$  tels que :

$$\beta(f'_1) = \beta(f), \quad f'_1 < f' \quad \text{et} \quad f'_1 \cdot g' < f.$$

En particulier, si  $(\mathcal{C}, <)$  est un groupoïde ordonné régulier, tout sous-groupoïde régulier de  $\mathcal{C}$  est une fusée stricte neutre de  $(\mathcal{C}, <)$ .

**DÉFINITION.** — On appelle *fusée stricte régulière* de  $(\mathcal{C}, <)$  un triplet  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  vérifiant les conditions suivantes :

1°  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont des fusées neutres strictes de  $(\mathcal{C}, <)$  telles que  $(\mathcal{B}_\gamma, <)$  et  $(\mathcal{B}'_\gamma, <)$  soient des groupoïdes semi-réguliers.

2°  $F$  est une sous-classe de  $\mathcal{C}$  pour laquelle on a

$$\alpha(F) = \alpha(\mathcal{B}), \quad \beta(F) = \alpha(\mathcal{B}') \quad \text{et} \quad F\mathcal{B} = F = \mathcal{B}'F.$$

3° Soient  $f \in F$  et  $f' \in F$ . Si  $\alpha(f) = \alpha(f')$ , il existe  $f_1 \in F$  et  $g' \in \mathcal{B}'_\gamma$  tels que

$$f_1 < f, \quad \alpha(f_1) = \alpha(f) \quad \text{et} \quad g' \cdot f_1 < f'$$

si  $\beta(f) = \beta(f')$ , il existe  $f'_1 \in F$  et  $g \in \mathcal{B}_\gamma$  tels que

$$\beta(f'_1) = \beta(f), \quad f'_1 < f \quad \text{et} \quad f'_1 \cdot g < f'.$$

THÉORÈME. — Soit  $\mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <)$  la classe des fusées strictes régulières de  $(\mathcal{C}, <)$ . Munie de la loi de composition définie par

$$(\mathcal{B}'' , F', \mathcal{B}'_1) \cdot (\mathcal{B}' , F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}'' , F' \cdot F, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,  $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1$ ,

et de la relation d'ordre :

$$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}' , F, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,  $\mathcal{B}'_1$  (resp.  $\mathcal{B}_1$ ) est une sous-catégorie pleine saturée par induction de  $\mathcal{B}'$  (resp.  $\mathcal{B}$ ) et si  $F_1 \subset F$ ,

$(\mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}^s(\mathcal{I}^U, \tilde{\Omega}^s)$ -structurée assez régulière. 1

Les unités de  $\mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <)$  seront identifiées à des fusées strictes neutres en identifiant  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B})$  avec  $\mathcal{B}$ .

THÉORÈME. —  $\mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <)$  admet une catégorie quotient strict (\*) par la relation d'équivalence  $\rho$  définie par

$$(\mathcal{B}' , F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}' , F_2, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,

$$(\mathcal{B}' , F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <).$$

où  $F_1 \cup F_2$  désigne la classe réunion de  $F_1$  et  $F_2$ .

De plus,  $\mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <)/\rho$  est isomorphe à la classe  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$  des fusées strictes régulières  $(\mathcal{B}' , F, \mathcal{B})$  telles que les relations

$$(\mathcal{B}' , F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad F \subset F_1,$$

entraînent  $F = F_1$ . 2

On utilise le fait que  $\rho$  est aussi définie par

$$(\mathcal{B}' , F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}' , F_2, \mathcal{B})$$

si, et seulement si, pour tout  $f_i \in F_i$ , il existe  $f_j \in F_j$  et  $f'_j \in F_j$  tels que

$$f_j < f_i, \quad f'_j < f_i, \quad \alpha(f_i) = \alpha(f_j) \quad \text{et} \quad \beta(f_i) = \beta(f'_j).$$

où  $i, j = 1, 2$  et  $i \neq j$ .

La bijection  $\sigma$  de  $\mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <)/\rho$  sur  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$  est définie par

$$(\mathcal{B}' , F, \mathcal{B}) \text{ mod } \rho \rightarrow (\mathcal{B}' , \tilde{F}, \mathcal{B}),$$

où  $\tilde{F}$  est la classe réunion des  $F_i$  tels que  $(\mathcal{B}' , F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}' , F_i, \mathcal{B})$  modulo  $\rho$ .

$\sigma$  définit sur  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$  une structure de catégorie quotient  $\Sigma(\mathcal{C}, <)^1$  de  $\mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <)$ .

( 4 )

DÉFINITION. — Un élément de  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$  est appelé *fusée stricte maximale*.

THÉORÈME. —  $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière, la relation d'ordre étant celle induite par  $(\mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <), <)$  sur la sous-classe  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$ . De plus,  $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$  est une catégorie quotient  $\tilde{\Omega}^r$ -structurée (\*) de  $(\mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <), <)$ .

1

La démonstration, assez délicate, utilise le fait suivant : Supposons

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma(\mathcal{C}, <), \quad \mathcal{B}_1 < \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'.$$

Soit  $F_1 = \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1$ . Si

$$\alpha(F_1) = \alpha(\mathcal{B}_1) \quad \text{et} \quad \beta(F_1) = \alpha(\mathcal{B}'_1),$$

alors on a

$$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <).$$

### 3. APPLICATIONS.

THÉORÈME. — Si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie préinductive régulière telle que  $(\mathcal{C}, <)$  soit un groupoïde ordonné semi-régulier, l'application  $c$

$$f \rightarrow (\beta(f)^{\triangleright}, f^{\triangleright}, \alpha(f)^{\triangleright}),$$

2

est une équivalence de  $\mathcal{C}$  sur une sous-catégorie régulière de  $\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}$ .

La sous-classe  $\bar{\mathcal{C}}$  de  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$  formée des éléments majorés par un élément de  $c(\mathcal{C})$  est une sous-catégorie saturée par induction de  $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$

3

et  $(\bar{\mathcal{C}}^{\perp}, <)$  est une catégorie inductive (\*) régulière.

Soit  $(\mathcal{C}, <)$  un groupoïde ordonné régulier.

DÉFINITION. — On appelle *atlas* de  $(\mathcal{C}, <)$  une sous-classe  $F$  de  $\mathcal{C}$  telle que

$$F(F^{-1}F) \subset F.$$

En particulier, un atlas complet (2) d'un groupoïde sous-préinductif  $(\mathcal{C}, <)$  est un atlas de  $(\mathcal{C}, <)$ , qui est  $\bigcup$ -saturé.

THÉORÈME. — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  un groupoïde ordonné régulier.  $\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}$  et  $\mathcal{F}^{r'}(\mathcal{C}, <)$  sont identiques. L'application  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \rightarrow F$  est une bijection de  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$  sur la classe des atlas de  $(\mathcal{C}, <)$  et  $\mathcal{C}$  s'identifie à un sous-groupoïde régulier du groupoïde quasi-inductif régulier  $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$ .

4

THÉORÈME. — Si  $(\mathcal{C}, <)$  est un groupoïde fonctoriellement ordonné (\*) [resp. sous-préinductif (2), resp. préinductif (3)], alors  $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$  est un groupoïde sous-inductif (resp. sous-inductif, resp. inductif).

5

(\*) Séance du 16 décembre 1963.

(1) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1963; *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 1198, 1891, 2080 et 2280.

(2) *Élargissements de catégories*, Sém. Topologie et Géométrie différentielle (Ehresmann), III, Paris, 1961. — *Groupoïdes sous-inductifs*, multigraphié, Paris; *Ann. Inst. Fourier* (sous presse).

(3) *Sous-structures et catégories ordonnées*, multigraphié, Paris, avril 1963; *Fund. Math.* (sous presse).

(4) *Structures quotient*, multigraphié, Paris, juin 1963; *Comm. Mat. Helv.* (sous presse); *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 5031 (la définition du foncteur  $Z$ , p. 5032, doit être modifiée, mais la caractérisation d'une  $\mathcal{H}_1$ -projection est correcte; voir article précédent).

6

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Complétion des catégories sous-prélocales.*  
 Note (\*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Catégories quasi-inductives de superfusées. Solution du « problème universel » du plongement d'une catégorie sous-prélocale régulière vérifiant la condition (P) dans une catégorie sous-locale régulière; cas particuliers : catégories prélocales, groupoïdes sous-prélocaux.

Cette Note fait suite à (1) dont la terminologie et les notations sont utilisées. Une catégorie ordonnée  $(\mathcal{C}, <)$  est dite sous-prélocale (resp. prélocale, resp. sous-locale, resp. locale) si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie sous-préinductive (resp. préinductive, resp. sous-inductive, resp. inductive) (2) et si  $(\mathcal{C}, <)$  est une classe sous-prélocale (3).

1. SUPERFUSÉES. — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée régulière telle que  $(\mathcal{C}', <)$  soit un groupoïde ordonné semi-régulier (4).

DÉFINITION. — On appellera *superfusée* de  $(\mathcal{C}, <)$  un triplet  $(\mathcal{B}', \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1°  $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est une fusée stricte régulière (1) de  $(\mathcal{C}, <)$ ;
- 2°  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}'_1$ ) est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ), saturée par induction dans  $(\mathcal{B}, <)$  [resp.  $(\mathcal{B}', <)$ ];
- 3° Pour tout  $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$  [resp.  $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$ ], il existe  $f \in \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1$  tel que  $\alpha(f) < e$  [resp.  $\beta(f) < e'$ ].

Cette définition entraîne que  $F_1 = \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1$  est une sous-classe de  $F$ , saturée par induction dans  $(F, <)$ , et que  $F_1 = \mathcal{B}'_1 F \mathcal{B}_1$ .

*Cas particulier.* — Supposons que les conditions

$$f \in \mathcal{C}, \quad f' < f \quad \text{et} \quad \alpha(f') = \alpha(f) \quad [\text{resp. } \beta(f') = \beta(f)]$$

entraînent  $f = f'$  [ce qui est vérifié par exemple si  $(\mathcal{C}, <)$  est un groupoïde fonctoriellement ordonné (5)].  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$  est une superfusée de  $(\mathcal{C}, <)$  si, et seulement si,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$  sont des fusées strictes régulières de  $(\mathcal{C}, <)$  et si  $\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}$  dans  $(\mathcal{F}' (\mathcal{C}, <), <)$ . 14

Soit  $\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$  la classe des superfusées de  $(\mathcal{C}, <)$ . Nous munirons  $\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$  de la loi de composition :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}') . (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}' . \mathcal{F})$$

si, et seulement si,  $\overline{\mathcal{B}}_1 = \mathcal{B}'_1$  et si le composé  $\mathcal{F}' . \mathcal{F}$  est défini dans la catégorie  $\mathcal{F}' (\mathcal{C}, <)$  (1).

THÉORÈME. —  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière, la relation d'ordre étant définie par

$$(\overline{\mathcal{B}}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}') < (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$$

si, et seulement si,  $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$  et si  $\overline{\mathcal{B}}_1$  (resp.  $\overline{\mathcal{B}}'_1$ ) est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}'_1$ ) saturée par induction dans  $(\mathcal{B}_1, <)$  [resp.  $(\mathcal{B}'_1, <)$ ]. 2

## 2. CATÉGORIES VÉRIFIANT LA CONDITION (P).

DÉFINITION. — On dira qu'une catégorie ordonnée régulière  $(\mathcal{C}, <)$  vérifie la condition (P) si  $(\mathcal{C}_\gamma, <)$  est un groupoïde ordonné semi-régulier et si les conditions

$$f \in \mathcal{C} \text{ et } \alpha(f) = \bigcup^e E \left[ \text{resp. } \beta(f) = \bigcup^e E \right], \quad \text{où } E \subset \mathcal{C}_0,$$

$$\text{entraînent } f = \bigcup^f fE \left[ \text{resp. } f = \bigcup^f Ef \right].$$

Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée régulière telle que  $(\mathcal{C}_\gamma, <)$  soit un groupoïde ordonné semi-régulier. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée,  $(\mathcal{C}, <)$  vérifie la condition (P) :

- 1° Si  $f \in \mathcal{C}$ ,  $f' \in \mathcal{C}$ ,  $f < f'$  et  $\alpha(f) = \alpha(f')$  [resp.  $\beta(f) = \beta(f')$ ], on a  $f = f'$ ;  
 2°  $(\mathcal{C}, <)$  est sous-prélocale. Si  $e \in \mathcal{C}_0$ ,  $e' \in \mathcal{C}_0$ ,  $e' < e$  et  $e' \neq e$ , il existe  $e'' \in \mathcal{C}_0$  tel que  $e'' \neq 0$ ,  $e'' < e$  et  $e' \cap e'' = 0$ .

Nous supposons désormais que  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie sous-prélocale régulière vérifiant la condition (P).

Si H est une sous-classe de  $\mathcal{C}$  et K une partie de H, nous désignerons par  $(\overline{K})_H$  la classe des  $h \in H$  tels que h soit un sous-agrégat d'une partie de K.

DÉFINITION. — On appellera (P)-superfusée de  $(\mathcal{C}, <)$  une superfusée  $(\mathcal{B}', \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$  de  $(\mathcal{C}, <)$  vérifiant la condition :

4° Soit  $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ ; on a

$$\alpha(\mathcal{B}_1) = (\overline{\alpha(F_1)})_{\alpha(F)} \quad \text{et} \quad \beta(\mathcal{B}_1) = (\overline{\beta(F_1)})_{\beta(F)}, \quad \text{où } F_1 = \mathcal{B}' \cdot F \cdot \mathcal{B}.$$

Soit  $\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$  la sous-classe de  $\mathcal{Y}(\mathcal{C}, <)$  formée des (P)-superfusées de  $(\mathcal{C}, <)$ .

PROPOSITION. — L'application  $\tau : (\mathcal{B}', \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{B}' \cdot F \cdot \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$  est une bijection de  $\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$  sur la classe des couples  $(F_1, \mathcal{F})$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1°  $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est une fusée stricte régulière de  $(\mathcal{C}, <)$ ;  
 2°  $F_1$  est une partie de F saturée par induction dans  $(F, <)$  et  $(\overline{F_1})_F = F_1$ ;  
 3° On a  $\beta(F_1) \cdot \mathcal{B}' \cdot F_1 = F_1 = F_1 \cdot \mathcal{B} \cdot \alpha(F_1)$ .

Si  $f \in \mathcal{C}$ , le triplet  $(\beta(f) \rangle, f \rangle, \alpha(f) \rangle)$ , où  $f \rangle$  désigne la classe des minorants de f dans  $(\mathcal{C}, <)$ , est une fusée stricte régulière, que nous représenterons par  $c(f)$ . Soit  $\mathcal{Y}''(\mathcal{C}, <)$  la sous-classe de  $\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$  formée des (P)-superfusées de  $(\mathcal{C}, <)$  de la forme  $(\mathcal{B}', \mathcal{B}_1, c(f))$ , où  $f \in \mathcal{C}$ .

PROPOSITION. —  $\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$  [resp.  $\mathcal{Y}''(\mathcal{C}, <)$ ] définit une sous-catégorie ordonnée (resp. saturée par induction) de  $(\mathcal{Y}(\mathcal{C}, <), <)$ . De plus,

$(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière et  $(\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie sous-inductive régulière <sup>(3)</sup>.

Soit  $\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <)$  la classe des couples  $(F, f)$  tels que  $f \in \mathcal{C}$  et  $(F, c(f)) \in \tau(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <))$ .

PROPOSITION. —  $\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <)$  est la classe des couples  $(F, f)$  tels que  $f \in \mathcal{C}$  et que  $F$  soit une partie de  $\mathcal{C}$  saturée par induction, majorée par  $f$  et contenant  $\bigcup_f C$ , pour toute partie  $C$  de  $F$  telle que  $\bigcup_f$  existe.

Nous désignerons par  $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <)$  la catégorie sous-inductive régulière isomorphe à  $(\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <), <)$  par l'isomorphisme

$$(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, c(f)) \rightarrow (\mathfrak{A}_1 \cdot f, \mathfrak{B}_1, f).$$

Sa loi de composition est donc définie par

$$(F', f') \bullet (F, f) = ((F' \cdot F)_{c>}, g), \quad \text{où } g = f' \cdot f,$$

si, et seulement si,

$$\alpha(f') = \beta(f) = e \quad \text{et} \quad (\alpha(F'))_{c>} = (\beta(F))_{c>},$$

et sa relation d'ordre par  $(F', f') < (F, f)$  si, et seulement si,  $f' = f$  et  $F' \subset F$ .

THÉORÈME. —  $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <)$  admet une catégorie sous-inductive régulière quotient <sup>(4)</sup>,  $(J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <)$ , relativement à la relation d'équivalence  $\sim$  définie par :

$(F, f) \sim (F', f')$  si, et seulement si,  $F = F'$  et s'il existe  $\hat{f} \in \mathcal{C}$  tel que  $F < \hat{f}$ ,  $\hat{f} < f$  et  $\hat{f} < f'$ ;

$(J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <)$  est une catégorie sous-locale et l'application  $p : f \rightarrow \{(f, f)\}$  identifie  $(\mathcal{C}, <)$  à une sous-catégorie régulière de  $(J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <)$ .

COROLLAIRE. — Si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie prélocale,  $(J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <)$  est une catégorie locale.

### 3. THÉORÈMES DE COMPLÉTION.

DÉFINITION. — Soient  $(S, <)$  et  $(\hat{S}, <)$  deux catégories sous-préinductives. On dira que  $\Phi = ((\hat{S}, <), \Phi, (S, <))$  est un *foncteur inductif* si les conditions suivantes sont vérifiées :

1°  $\Phi$  est un foncteur quasi-inductif, c'est-à-dire  $\mathcal{J}^U$ -structuré  $[(1), (2)]$ ;

2° Si  $f_i \in S$ ,  $f \in S$  et  $f_i < f$ , où  $i = 1, 2$ , on a

$$\Phi(f_1 \cap f_2) = \Phi(f_1) \cap \Phi(f_2).$$

Soit  $\bar{\mathcal{J}}^{\sigma p}$  (resp.  $\bar{\mathcal{J}}^p$ ) la sous-catégorie de la catégorie des foncteurs  $\mathcal{J}^U$ -structurés <sup>(2)</sup> formée des foncteurs inductifs  $((\hat{S}, <), \Phi, (S, <))$  tels que  $(\hat{S}, <)$  et  $(S, <)$  soient des catégories sous-prélocales (resp. prélocales) régulières vérifiant la condition (P). Soit  $\bar{\mathcal{J}}^{\sigma}$  (resp.  $\bar{\mathcal{J}}$ ) la sous-

catégorie pleine de  $\bar{\mathcal{J}}^{s\rho}$  (resp.  $\bar{\mathcal{J}}^\rho$ ) ayant pour objets les catégories sous-locales (resp. locales) régulières vérifiant la condition (P).

THÉORÈME DE COMPLÉTION. —  $\bar{\mathcal{J}}^{s\rho}$  est une catégorie à  $\bar{\mathcal{J}}^s$ -projections admettant pour application  $(\bar{\mathcal{J}}^s, \bar{\mathcal{J}}^{s\rho})$ -projection naturalisée [(<sup>2</sup>), (<sup>3</sup>)] l'application  $\pi$  telle que, pour tout  $(\mathcal{C}, <) \in \bar{\mathcal{J}}_0^{s\rho}$

$$\pi(\mathcal{C}, <) = ((\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))^\bullet, <), p. (\mathcal{C}, <).$$

$\bar{\mathcal{J}}^\rho$  est une catégorie à  $\bar{\mathcal{J}}$ -projections, admettant pour application  $(\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}^\rho)$ -projection naturalisée la restriction de  $\pi$  à  $\bar{\mathcal{J}}_0^\rho$ .

1 Il résulte de ce théorème que, si  $(\mathcal{C}, <) \in \bar{\mathcal{J}}_0^s$ , alors  $\pi(\mathcal{C}, <)$  est un isomorphisme.

4. CAS PARTICULIERS. — Supposons de plus  $(\mathcal{C}, <)$  prélocale. Si  $M$  est une partie de  $\mathcal{C}$ , soit  $\bar{M}$  la classe des agrégats des parties de  $M$  [on a  $\bar{M} = (\bar{M})_{\mathcal{C}}$ ]. Soit  $\check{\mathcal{C}}$  la classe des parties  $F$  de  $\mathcal{C}$  saturées par induction, majorées et  $\mathcal{U}$ -saturées (<sup>6</sup>) dans  $(\mathcal{C}, <)$ . Munissons  $\check{\mathcal{C}}$  de la loi de composition définie par

$$(F', F) \rightarrow F' \bullet F = \overline{F' \cdot F} \quad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha(F') = \beta(F),$$

et de la relation d'ordre

$$F' < F \quad \text{si, et seulement si,} \quad F' \subset F.$$

L'application  $F \rightarrow (F, f) \bmod \nu$ , où  $F < f$ , définit un isomorphisme de  $(\check{\mathcal{C}}^\bullet, <)$  sur  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))^\bullet, <)$ . Par suite :

THÉORÈME. — Si  $(\mathcal{C}, <) \in \bar{\mathcal{J}}_0^\rho$ , alors  $(\mathcal{C}, <)$  admet la catégorie locale  $(\check{\mathcal{C}}^\bullet, <)$  pour  $(\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{J}}^\rho)$ -projection. De plus, la catégorie inductive  $(\mathcal{C}^\perp, <)$  de (<sup>4</sup>) admet  $(\check{\mathcal{C}}^\bullet, <)$  pour catégorie inductive quotient.

2 Soit  $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}^{s\rho})$  [resp.  $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}^\rho)$ ] la sous-catégorie pleine de  $\bar{\mathcal{J}}^{s\rho}$  (resp.  $\bar{\mathcal{J}}^\rho$ ) ayant pour objets les groupoïdes sous-prélocaux (resp. prélocaux). Soit  $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}) = \mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}^\rho) \cap \bar{\mathcal{J}}$  et  $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}^s) = \mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}^{s\rho}) \cap \bar{\mathcal{J}}^s$ . Du théorème de complétion on déduit :

THÉORÈME. —  $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}^{s\rho})$  est une catégorie à  $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}^s)$ -projections.  $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}^\rho)$  est une catégorie à  $\mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}})$ -projections, une  $(\mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}), \mathcal{G}(\bar{\mathcal{J}}^\rho))$ -projection de  $(\mathcal{C}, <)$  étant  $(\check{\mathcal{C}}^\bullet, <)$ .

3 La deuxième partie de ce théorème a été démontrée dans [(<sup>4</sup>), (<sup>6</sup>)].

(\*) Séance du 20 juillet 1964.

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus*, 257, 1963, p. 4110.

(<sup>2</sup>) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1963, p. 349-426.

(<sup>3</sup>) *Fund. Math.*, 54, 1964, p. 211-228.

(<sup>4</sup>) *Comm. Math. Helv.*, 1963, p. 219-283.

(<sup>5</sup>) *Catégories et structures*, cours multigraphié, Paris, 1964; *Cahiers Sém. Topologie* (Ehresmann), 6, Paris, 1964.

(<sup>6</sup>) *Ann. Inst. Fourier*, 13, 1963, p. 1-60.

(Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre Curie, Paris, 5<sup>e</sup>.)



## CATÉGORIES ORDONNÉES, HOLONOMIE ET COHOMOLOGIE

par Charles EHRESMANN (Paris)

### Introduction.

Le but de cet article était de développer une théorie de la cohomologie d'une catégorie ordonnée à valeur dans une catégorie et de l'appliquer au cas d'un espace feuilleté. Mais comme l'exposé complet de cette théorie s'est révélé trop long, il a fallu remanier le plan, de sorte que seules les cohomologies d'ordre 0 et 1 sont considérées ici.

Deux possibilités s'offrent pour définir la cohomologie dans le cas considéré : 1) Généraliser les méthodes utilisées dans le cas de la cohomologie pour un faisceau, en définissant les classes de cohomologie par un procédé de récurrence à partir des classes d'ordre 0. Il faut pour cela munir la classe de cohomologie d'un certain ordre d'une structure de même espèce que la structure initiale. Cela est possible en partant d'une catégorie quasi-inductive, à condition d'utiliser une nouvelle catégorie, à savoir celle des fusées. C'est la construction de cette catégorie des fusées, qui est très longue, qu'il nous a fallu supprimer et qui sera publiée ultérieurement. 2) Généraliser la construction de la cohomologie d'un groupe, à l'aide des foncteurs  $\text{Ext}^n$ . Le n° 4 indique rapidement comment construire ainsi la cohomologie d'ordre 1. Nous montrerons ailleurs que cette construction peut aussi se faire pour les ordres supérieurs.

Comme ces deux méthodes, pour les cohomologies d'ordre supérieur, ne s'appliquent que si l'on part d'une catégorie quasi-inductive, le premier problème est de plonger une catégorie ordonnée dans une catégorie quasi-inductive. Nous montrons que la catégorie des atlas réguliers résout cette question

*Colloque Grenoble.*

pour les groupoïdes ordonnés réguliers. Dans le cas général, il faut utiliser des catégories quotient de la catégorie des fusées et ceci se trouvera dans la suite du présent article.

1 Dans les n<sup>os</sup> 1 et 2 les résultats sur les atlas obtenus dans le cas des groupoïdes sous-préinductifs [1] sont étendus au cas des catégories et des catégories ordonnées régulières. Dans le n<sup>o</sup> 3 est construit le groupoïde d'holonomie complet associé à un feuilletage localement simple, qui est un quotient d'un sous-groupoïde du groupoïde des atlas du groupoïde d'holonomie. Le n<sup>o</sup> 4 est l'étude de la cohomologie d'ordre 0 d'une espèce de structures (ordonnée). Le n<sup>o</sup> 5 est consacré à la cohomologie d'ordre 1 d'une catégorie munie d'une catégorie ordonnée d'opérateurs, ce qui généralise les résultats connus dans le cas des groupes. Enfin quelques applications aux structures feuilletées sont simplement esquissées (ces questions seront reprises ultérieurement).

2 Nous reprenons les notations de [3] : une catégorie sur la classe  $C$  est désignée par  $C'$ , le composé de  $f$  et  $g$  étant noté  $g.f$ . La classe des couples composables est  $C' * C'$ , la classe des unités  $C_0$ , le groupoïde des éléments inversibles  $C'_i$ , les applications source et but sont  $\alpha$  et  $\beta$ , la loi de composition est notée  $\cdot$ . Le mot foncteur signifie foncteur covariant. Si  $A \subset C$  et  $B \subset C$ , on désigne par  $A.B$  la classe des  $a.b$ , où  $a \in A$ ,  $b \in B$ , par  $A_0$  la classe  $A \cap C_0$ .

### 1. — Atlas dans une catégorie.

Soit  $C'$  une catégorie.

DÉFINITION 1. — Soit  $\mathcal{B}$  un sous-groupoïde de  $C'$ . On appelle atlas de  $C'$  compatible à droite (resp. à gauche) avec  $\mathcal{B}$  une sous-classe  $F$  de  $C'$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1)  $\mathcal{B}_0 \subset \alpha(F)$  et  $F.\mathcal{B} = F$  (resp.  $\mathcal{B}_0 \subset \beta(F)$  et  $\mathcal{B}.F = F$ ).
- 2) Pour tout  $f \in F$  et tout  $f' \in F$  tels que  $\beta(f) = \beta(f')$  (resp.  $\alpha(f) = \alpha(f')$ ), il existe  $g \in \mathcal{B}$  tel que  $f = f'.g$  (resp.  $f = g.f'$ ).

Si  $F$  est un atlas de  $C'$  compatible à droite avec  $\mathcal{B}$ , on a  $\alpha(F) = \mathcal{B}_0$ , puisque d'après la condition 2 pour tout  $f \in F$  il existe  $g \in \mathcal{B}$  tel que  $f.g = f$ .

*Remarque.* — Si tous les éléments de  $F$  sont des monomorphismes (resp. des épimorphismes), il existe un et un seul  $g \in \mathcal{B}$  tel que  $f = f' \cdot g$  (resp.  $f = g \cdot f'$ ) si  $F$  est un atlas compatible à droite (resp. à gauche) avec  $\mathcal{B}$ .

**PROPOSITION 1.** — *Soit  $C$  une sous-classe de  $\mathcal{C}$ ; soit  $\mathcal{B}$  un sous-groupoïde de  $\mathcal{C}$  tel que  $\mathcal{B}$  soit la composante de  $\alpha(C)$  dans  $\mathcal{B}$ ; si  $C$  vérifie la condition 2 de la définition 1 (dans laquelle on remplace  $F$  par  $C$ ), alors  $C \cdot \mathcal{B}$  est un atlas compatible à droite avec  $\mathcal{B}$ .*

En effet, on a :  $(C \cdot \mathcal{B}) \cdot \mathcal{B} = C \cdot \mathcal{B}$ . Supposons  $f_i \cdot g_i \in C \cdot \mathcal{B}$ , où  $i = 1, 2$ ,  $g_i \in \mathcal{B}$ ,  $f_i \in C$  et  $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ . Il existe  $g \in \mathcal{B}$  tel que  $f_1 = f_2 \cdot g$  et on trouve :  $f_1 \cdot g_1 = f_2 \cdot g_2 \cdot (g_2^{-1} \cdot g \cdot g_1)$ , donc  $C \cdot \mathcal{B}$  est compatible à droite avec  $\mathcal{B}$ .

**PROPOSITION 2.** — *Soit  $F$  un atlas de  $\mathcal{C}$  compatible à droite avec  $\mathcal{B}$  et à gauche avec  $\mathcal{B}'$ . Si  $\tilde{\mathcal{B}}$  (resp.  $\tilde{\mathcal{B}}'$ ) est un sous-groupoïde de  $\mathcal{C}$  contenant  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ) comme sous-groupoïde plein et si  $A$  (resp.  $A'$ ) est la composante de  $\mathcal{B}$  dans  $\tilde{\mathcal{B}}$  (resp. de  $\mathcal{B}'$  dans  $\tilde{\mathcal{B}}'$ ), alors  $A' \cdot F \cdot A$  est un atlas compatible à droite avec  $A$  et à gauche avec  $A'$ .*

*Démonstration.* — Soit  $e \in A_0$ ; il existe  $g \in \tilde{\mathcal{B}}$  tel que  $\alpha(g) = e$  et  $\beta(g) \in \mathcal{B}_0$ . Soit  $f \in F$  tel que  $\alpha(f) = \beta(g)$ ; on a  $f \cdot g \in A' \cdot F \cdot A$ , d'où  $A_0 \subset \alpha(A' \cdot F \cdot A)$ . On trouve évidemment :

$$(A' \cdot F \cdot A) \cdot A = A' \cdot F \cdot A \quad \text{et} \quad A' \cdot (A' \cdot F \cdot A) = A' \cdot F \cdot A.$$

Soient  $g'_1 \cdot f_1 \cdot g_1 \in A' \cdot F \cdot A$  et  $g'_2 \cdot f_2 \cdot g_2 \in A' \cdot F \cdot A$ , où  $g_i \in A$ ,  $f_i \in F$  et  $g'_i \in A'$ , tels que  $\beta(g'_1) = \beta(g'_2)$ . Comme  $\mathcal{B}'$  est plein dans  $\tilde{\mathcal{B}}'$ , on a :

$$g'^{-1}_1 \cdot g'_2 \in \mathcal{B}', \quad \text{d'où} \quad g'^{-1}_1 \cdot g'_2 \cdot f_2 \in \mathcal{B}' \cdot F = F;$$

$F$  étant compatible à droite avec  $\mathcal{B}$ , il existe  $g \in \mathcal{B}$  tel que :

$$f_1 \cdot g = g'^{-1}_1 \cdot g'_2 \cdot f_2;$$

posons  $\bar{g} = g^{-1}_1 \cdot g \cdot g_2$ ; on obtient :  $\bar{g} \in A$  et :

$$(g'_1 \cdot f_1 \cdot g_1) \cdot \bar{g} = g'_1 \cdot f_1 \cdot g_1 \cdot g^{-1}_1 \cdot g \cdot g_2 = g'_1 \cdot g'^{-1}_1 \cdot g'_2 \cdot f_2 \cdot g_2 = g'_2 \cdot f_2 \cdot g_2.$$

Donc  $A' \cdot F \cdot A$  est compatible à droite avec  $A$ . On montre de même que  $A' \cdot F \cdot A$  est compatible à gauche avec  $A'$ .

**PROPOSITION 3.** — Soit  $F$  un atlas de  $\mathcal{C}$  compatible à droite avec  $\mathfrak{B}$  et à gauche avec  $\mathfrak{B}'$ . Soit  $B$  une sous-classe de  $F$ . Soient  $\mathfrak{B}_1$  et  $\mathfrak{B}'_1$  les sous-groupoïdes pleins de  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{B}'$  respectivement ayant  $\alpha(B)$  et  $\beta(B)$  pour classes d'unités. Alors  $F' = \mathfrak{B}'_1 \cdot B \cdot \mathfrak{B}_1$  est un atlas de  $\mathcal{C}$  compatible à droite avec  $\mathfrak{B}_1$  et à gauche avec  $\mathfrak{B}'_1$ .

*Démonstration.* — On a évidemment

$$F' \cdot \mathfrak{B}_1 = F' \quad \text{et} \quad \alpha(\mathfrak{B}_1) = \alpha(B) \subset \alpha(F').$$

Soient  $g'_i \cdot f_i \cdot g_i \in F'$ , où  $i = 1, 2$ ,  $g_i \in \mathfrak{B}_1$ ,  $g'_i \in \mathfrak{B}'_1$ ,  $f_i \in B$  et  $\beta(g'_1) = \beta(g'_2)$ . Comme  $F' \subset F$ , il existe  $g \in \mathfrak{B}$  tel que

$$g'_2 \cdot f_2 \cdot g_2 = (g'_1 \cdot f_1 \cdot g_1) \cdot g;$$

les relations :

$$\alpha(g) = \alpha(g_2) \in \alpha(B) \quad \text{et} \quad \beta(g) = \alpha(g_1) \in \alpha(B)$$

entraînent  $g \in \mathfrak{B}_1$ . Par suite  $F'$  est un atlas compatible à droite avec  $\mathfrak{B}_1$ . On montre de même que  $F'$  est compatible à gauche avec  $\mathfrak{B}'_1$ .

**COROLLAIRE.** — Avec les hypothèses de la proposition 3, si  $A$  désigne la composante de  $\alpha(B)$  dans  $\mathfrak{B}$  et  $A'$  la composante de  $\beta(B)$  dans  $\mathfrak{B}'$ , alors  $A' \cdot B \cdot A$  est un atlas compatible à droite avec  $A$  et à gauche avec  $A'$ .

En effet,  $\mathfrak{B}_1$  et  $\mathfrak{B}'_1$  sont des sous-groupoïdes pleins de  $A$  et  $A'$  respectivement et le corollaire résulte de la proposition 2.

*Remarque.* — Avec les hypothèses de la proposition 3 et de son corollaire, les atlas  $\mathfrak{B}'_1 \cdot B \cdot \mathfrak{B}_1$  et  $A' \cdot B \cdot A$  sont resp. le plus petit atlas et le plus grand atlas contenus dans  $F$  et contenant  $B$ .

**THÉORÈME 1.** — Soit  $\mathcal{C}$  un groupoïde. Pour qu'une sous-classe  $F$  de  $\mathcal{C}$  soit un atlas compatible à droite avec un sous-groupoïde  $\mathfrak{B}$  de  $\mathcal{C}$ , il faut et il suffit que l'on ait :  $F \cdot (F^{-1} \cdot F) = F$ ; dans ce cas,  $\mathfrak{B}$  est égal à  $F^{-1} \cdot F$  et  $F$  est aussi compatible à gauche avec  $F \cdot F^{-1}$ .

*Démonstration.* — Soit  $F$  un atlas de  $\mathcal{C}$  compatible à droite avec  $\mathfrak{B}$ . Les conditions  $f \in F$ ,  $f' \in F$  et  $\beta(f) = \beta(f')$  entraînent :

$$\begin{aligned} f &= f' \cdot (f'^{-1} \cdot f) & \text{et} & & f &= f' \cdot g, & \text{où} & & g &\in \mathfrak{B}, \\ \text{d'où} & & & & f'^{-1} \cdot f &= g \in \mathfrak{B}. & & & & \end{aligned}$$

Soit  $g' \in \mathfrak{B}$ ; comme  $\beta(g') \in \alpha(F)$ , il existe  $f'' \in F$  tel que  $\alpha(f'') = \beta(g')$ ; par suite  $f'' \cdot g' \in F$  et  $g' = f''^{-1} \cdot (f'' \cdot g') \in F^{-1} \cdot F$ . Ainsi on trouve  $\mathfrak{B} = F^{-1} \cdot F$ . — Inversement, supposons que  $F$  soit une sous-classe de  $\mathcal{C}$  vérifiant la condition :  $F = F \cdot (F^{-1} \cdot F)$ . La relation :

$$(F^{-1} \cdot F) \cdot (F^{-1} \cdot F) = F^{-1} \cdot (F \cdot F^{-1}) \cdot F = F^{-1} \cdot F$$

montre que  $F^{-1} \cdot F$  est un groupoïde tel que  $\alpha(F^{-1} \cdot F) = \alpha(F)$ ; la condition 2 de la définition 1 est évidemment vérifiée par  $F$ . Donc  $F$  est un atlas compatible à droite avec  $F^{-1} \cdot F$ . De plus comme

$$(F \cdot F^{-1}) \cdot F = F \cdot (F^{-1} \cdot F) = F,$$

$F$  est aussi un atlas compatible à gauche avec  $F^{-1} \cdot F$ .

**COROLLAIRE.** — Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Si  $F$  est un atlas de  $\mathcal{C}$  contenu dans  $\mathcal{C}_\gamma$  et compatible à droite avec un sous-groupoïde  $\mathfrak{B}$  de  $\mathcal{C}$ , alors  $F$  est un atlas de  $\mathcal{C}_\gamma$  compatible à droite avec  $F^{-1} \cdot F$  et on a  $\mathfrak{B} = F^{-1} \cdot F$ .

*Remarque.* — Le théorème 1 signifie que, si  $\mathcal{C}$  est un groupoïde,  $F$  est un atlas de  $\mathcal{C}$  si, et seulement si, la classe réunion de  $F$  et de  $0$  est un atlas complet [1] du groupoïde obtenu en munissant le groupoïde somme de  $\mathcal{C}$  et d'une unité  $0$  de la relation d'ordre définie par :

$$f' < f \quad \text{si, et seulement si,} \quad f' = f \quad \text{ou si} \quad f' = 0.$$

Soit  $F$  un atlas de  $\mathcal{C}$  compatible à droite avec chacun des groupoïdes  $\mathfrak{B}_i$ , où  $i \in I$ . Alors  $F$  est aussi compatible à droite avec le sous-groupoïde  $\mathfrak{B}$  de  $\mathcal{C}$  engendré par les sous-groupoïdes  $\mathfrak{B}_i$ . Le plus grand sous-groupoïde  $a(F)$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $F$  soit compatible à droite avec  $a(F)$  est formé des  $g \in \mathcal{C}_\gamma$  tels que  $F \cdot g \subset F$ .

**DÉFINITION 2.** — On appelle atlas de  $\mathcal{C}$  une sous-classe  $F$  de  $\mathcal{C}$  telle que  $F$  soit un atlas de  $\mathcal{C}$  compatible à droite avec le sous-groupoïde  $a(F)$  de  $\mathcal{C}_\gamma$  formé des  $g \in \mathcal{C}_\gamma$  tels que  $F \cdot g \subset F$ , et compatible à gauche avec le sous-groupoïde  $b(F)$  de  $\mathcal{C}_\gamma$  formé des  $g'$  tels que  $g' \cdot F \subset F$ .

Pour que  $F$  soit un atlas de  $\mathcal{C}$ , il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées, où  $f \in F$  et  $f' \in F$  :

1) Si  $\beta(f) = \beta(f')$ , il existe  $g \in \mathcal{C}_\gamma$  tel que  $F.g \subset F$  et  $f.g = f'$ ;

2) Si  $\alpha(f) = \alpha(f')$ , il existe  $g' \in \mathcal{C}_\gamma$  tel que  $g'.F \subset F$  et  $g'.f = f'$ .

Il en résulte qu'un atlas de  $\mathcal{C}$  compatible à droite avec  $\mathcal{B}$  et à gauche avec  $\mathcal{B}'$  est un atlas de  $\mathcal{C}$ . D'après le théorème 1, si  $\mathcal{C}$  est un groupoïde et si  $F$  est un atlas de  $\mathcal{C}$  compatible à droite avec  $\mathcal{B}$  et à gauche avec  $\mathcal{B}'$ , on a  $\mathcal{B} = a(F)$  et  $\mathcal{B}' = b(F)$  et  $F$  est simplement un atlas de  $\mathcal{C}$ .

Si  $\mathcal{C}$  n'est pas un groupoïde et si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille d'atlas de  $\mathcal{C}$ , alors la classe intersection des  $F_i$  peut ne pas être un atlas de  $\mathcal{C}$ .

Soit  $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  la classe de tous les triplets  $(\mathcal{B}', A, \mathcal{B})$  tels que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  soient des sous-groupoïdes de  $\mathcal{C}$  et  $A$  un atlas de  $\mathcal{C}$  compatible à droite avec  $\mathcal{B}$  et à gauche avec  $\mathcal{B}'$ .

**THÉORÈME 2.** —  $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  est une catégorie pour la loi de composition définie par:  $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}'_1) \cdot (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$  si, et seulement si,  $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'$ ; le groupoïde des éléments inversibles de  $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  est le groupoïde  $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}_\gamma)$ .

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{B}$  un sous-groupoïde de  $\mathcal{C}$ ; on a:  $\mathcal{B}.\mathcal{B} = \mathcal{B}$ ; les conditions  $g \in \mathcal{B}$ ,  $g' \in \mathcal{B}$ ,  $\beta(g) = \beta(g')$  entraînent  $g^{-1}.g' \in \mathcal{B}$ ; par suite  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ . On a:

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \cdot (\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}') \cdot (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

car  $F$  est compatible à droite avec  $\mathcal{B}$  et à gauche avec  $\mathcal{B}'$ . Ainsi  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  admet  $(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B})$  et  $(\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}')$  respectivement pour unités à droite et à gauche dans  $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ . Soient

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C});$$

on a:

$$\mathcal{B}'' \cdot (F'.F) = (\mathcal{B}'' \cdot F') \cdot F = F' \cdot F = (F' \cdot F) \cdot \mathcal{B}.$$

Supposons  $f'.f \in F'.F$ ,  $\bar{f}'.\bar{f} \in F'.F$  et  $\beta(f') = \beta(\bar{f}')$ ; il existe  $g' \in \mathcal{B}'$  tel que  $f' = \bar{f}'.g'$ ; comme  $g'.f \in \mathcal{B}' \cdot F = F$  et  $\alpha(\bar{f}') = \beta(g') = \beta(\bar{f})$ , il existe  $g \in \mathcal{B}_\gamma$  tel que  $g'.f = \bar{f}.g$ ; on en déduit:

$$f'.f = \bar{f}'.g'.f = \bar{f}'.\bar{f}.g;$$

donc  $F'.F$  est un atlas compatible à droite avec  $\mathcal{B}$ ; de même on voit que  $F'.F$  est compatible à gauche avec  $\mathcal{B}''$ , d'où

$$(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}).$$

Par conséquent  $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$  est une catégorie, dont la classe des unités sera identifiée à la classe des sous-groupoïdes de  $\mathcal{C}^\cdot$ , en identifiant  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$  avec  $\mathfrak{B}$ .

— Soit  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$  tel que  $F \subset \mathcal{C}_\gamma$ . On a :

$$F^{-1} \cdot \mathfrak{B}' = (\mathfrak{B}' \cdot F)^{-1} = F^{-1} = \mathfrak{B} \cdot F^{-1}$$

et  $F^{-1}$  est un atlas compatible à droite avec  $\mathfrak{B}'$ , à gauche avec  $\mathfrak{B}$ . Comme d'après le corollaire du théorème 1, on a  $\mathfrak{B} = F^{-1} \cdot F$  et  $\mathfrak{B}' = F \cdot F^{-1}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{B}, F^{-1}, \mathfrak{B}') = (\mathfrak{B}', F \cdot F^{-1}, \mathfrak{B}') = (\mathfrak{B}', \mathfrak{B}, \mathfrak{B}') \\ \text{et } & (\mathfrak{B}, F^{-1}, \mathfrak{B}') \cdot (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, F^{-1} \cdot F, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Il en résulte que  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$  admet  $(\mathfrak{B}, F^{-1}, \mathfrak{B}')$  pour inverse dans  $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$ . Inversement, supposons que  $(\mathfrak{B}, F^{-1}, \mathfrak{B}')$  soit l'inverse de  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$  dans  $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$ . Soit  $e \in \alpha(F)$ ; comme  $F' \cdot F = \mathfrak{B}$ , il existe  $f \in F$  et  $f' \in F'$  tels que  $e = f' \cdot f = \alpha(f)$ ; puisque  $F \cdot F' = \mathfrak{B}'$ , il existe  $\bar{f} \in F$  et  $\bar{f}' \in F'$  tels que  $\bar{f} \cdot \bar{f}' = \beta(f)$ . La condition  $\beta(f) = \beta(\bar{f})$  assure l'existence de  $g \in \mathfrak{B}$  tel que  $\bar{f} = f \cdot g$ . Par suite  $f \cdot (g \cdot \bar{f}') = \bar{f} \cdot \bar{f}' = \beta(f)$ . L'élément  $f$ , qui admet  $f'$  pour inverse à gauche et  $(g \cdot \bar{f}')$  pour inverse à droite dans  $\mathcal{C}^\cdot$ , est inversible dans  $\mathcal{C}^\cdot$ . Pour tout  $f_1 \in F$  tel que  $\alpha(f_1) = e$ , il existe  $g' \in \mathfrak{B}'$  satisfaisant à  $f_1 = g' \cdot f$ , d'où  $f_1 \in \mathcal{C}_\gamma$ . Il en résulte  $F \subset \mathcal{C}_\gamma$  et  $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$  admet  $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C}_\gamma)$  pour groupoïde de ses éléments inversibles.

COROLLAIRE. — Soit  $\mathfrak{A}(\mathcal{C}^\cdot)$  la classe des atlas de  $\mathcal{C}^\cdot$ . L'application :  $F \rightarrow (b(F), F, a(F))$ , où  $F \in \mathfrak{A}(\mathcal{C}^\cdot)$ , identifie  $\mathfrak{A}(\mathcal{C}^\cdot)$  à une sous-catégorie de  $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$  contenant  $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C}_\gamma)$ . Si  $\eta$  désigne l'application :  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) \rightarrow F$  de  $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$  sur  $\mathfrak{A}(\mathcal{C}^\cdot)$ , alors  $(\eta, \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C}^\cdot))$  est une extension inessentielle de  $\mathfrak{A}(\mathcal{C}^\cdot)$  (définition 5-2-III, 1) [2].

## 2. — Catégories ordonnées.

Soit  $\mathfrak{M}_0$  une classe de classes contenant avec une classe toutes ses sous-classes, avec deux classes leur produit. Soit  $\mathfrak{M}$  la catégorie des applications  $(M', f, M)$ , où  $M \in \mathfrak{M}_0$ ,  $M' \in \mathfrak{M}_0$  et où  $f$  est une surjection de  $M$  sur une partie de  $M'$ .

Soit  $\tilde{\Omega}_0$  la classe des classes ordonnées  $(M, <)$ , où  $M \in \mathcal{M}_0$  et où  $<$  est une relation d'ordre sur  $M$ . Soit  $\tilde{\Omega}$  la catégorie des triplets

$$((M', <), f, (M, <))$$

tels que  $(M, <) \in \tilde{\Omega}_0$ ,  $(M', <) \in \tilde{\Omega}_0$ ,  $(M', f, M) \in \mathcal{M}$  et que, si  $x \in M$ ,  $x' \in M$  et  $x' < x$ , on ait  $f(x') < f(x)$ . Soit  $\omega$  l'application :

$$((M', <), f, (M, <)) \rightarrow (M', f, M)$$

de  $\tilde{\Omega}$  dans  $\mathcal{M}$ . Alors  $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}_\gamma)$  est une catégorie d'homomorphismes résolvente à droite, à produits finis [3]. Si

$$(M, <) \in \tilde{\Omega}_0$$

et si  $M_1$  est une partie de  $M$ , le symbole  $(M_1, <)$  désignera la sous-structure de  $(M, <)$  au-dessus de  $M_1$ , c'est-à-dire la classe  $M_1$  munie de la structure d'ordre induite par  $(M, <)$ .

Soit  $\tilde{\Omega}'$  la sous-catégorie de  $\tilde{\Omega}$  formée des

$$((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}$$

vérifiant la condition :

2 Si  $x \in M$ ,  $x' \in M$ ,  $x' < x$  et  $f(x) = f(x')$ , alors on a  $x = x'$ .  
Soit  $\tilde{\Omega}'_1$  la sous-catégorie de  $\tilde{\Omega}'$  formée des

$$((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}$$

satisfaisant à l'axiome :

Si  $x \in M$ ,  $x' \in M$ ,  $x'' \in M$ ,  $x' < x$ ,  $x'' < x$  et  $f(x') = f(x'')$ , alors  $x' = x''$ .

3+ Rappelons [3] qu'une catégorie  $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$ -structurée est appelée *catégorie ordonnée*. Pour que  $(\mathcal{C}, <)$  soit une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée (resp. catégorie ordonnée), il faut et il suffit que les axiomes  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  (resp.  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  et  $O_4$ ) suivants soient vérifiés :

$O_1$ )  $\mathcal{C}$  est une catégorie et  $(\mathcal{C}, <) \in \tilde{\Omega}_0$ .

$O_2$ ) Soient  $f \in \mathcal{C}$  et  $f' \in \mathcal{C}$ ; si  $f' < f$ , on a  $\alpha(f') < \alpha(f)$  et  $\beta(f') < \beta(f)$ .

$O_3$ ) Soient  $(g, f) \in \mathcal{C} * \mathcal{C}$  et  $(g', f') \in \mathcal{C} * \mathcal{C}$ ; si  $f' < f$  et  $g' < g$ , alors  $g' \cdot f' < g \cdot f$ .

$O_4$ ) Soient  $f \in \mathcal{C}$  et  $f' \in \mathcal{C}$ ; les conditions :  $f' < f$ ,  $\alpha(f) = \alpha(f')$  et  $\beta(f) = \beta(f')$  entraînent  $f = f'$ .



D'après la proposition 18, II [3], tout groupoïde  $\tilde{\Omega}$ -structuré est ordonné.

Une catégorie  $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$ -structurée est appelée catégorie *s-ordonnée*.

Soit  $\tilde{\Omega}''$  la sous-catégorie de  $\tilde{\Omega}$  formée des

$$((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}$$

vérifiant la condition :

Soit  $x \in M$ ; pour tout  $y \in M'$  tel que  $y < f(x)$ , il existe  $x' < x$ ,  $x' \in M$  pour lequel on ait  $f(x') = y$ . 1

DÉFINITION 1. — On dira qu'une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée est semi-régulière si elle est  $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}'', \tilde{\Omega}''), \tilde{\Omega})$ -structurée.

Pour qu'une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée  $(\mathcal{C}, <)$  soit semi-régulière, il faut et il suffit que soit vérifié l'axiome :

O<sub>6</sub>) Soit  $f \in \mathcal{C}$ ; si  $e < \alpha(f)$ ,  $e \in \mathcal{C}_0$ , il existe  $f' < f$  tel que  $\alpha(f') = e$ ; si  $e' \in \mathcal{C}_0$  et  $e' < \beta(f)$ , il existe  $f'' < f$  tel que  $\beta(f'') = e'$ .

Soit  $(M, <) \in \tilde{\Omega}_0$ . Soit C une sous-classe de M. Si C admet une borne inférieure dans  $(M, <)$ , nous l'appellerons *l'intersection* de C et la noterons  $\bigcap C$ . Si C est majoré par  $x \in M$  et si C admet une borne supérieure dans la sous-classe des  $x' \in M$  tels que  $x' < x$ , nous appellerons cette borne supérieure le

*x-agrégat* de C et nous la noterons  $\bigcup_x C$ ; la classe des *x-agrégats* de C, où  $x \in M$ , est appelée *congrégation* de C dans M et désignée par  $\overline{\bigcup C}$ ; un élément de  $\bigcup_x C$  est aussi appelé sous-agrégat de C. Si pour tout majorant  $x$  de C il existe  $\bigcup_x C$  et si  $\bigcup_x C = y$ , on dira que  $y$  est *l'agrégat* de C dans M, noté  $\bigcup C$ . 2

Soit  $\tilde{\Omega}_0^s$  la sous-classe de  $\tilde{\Omega}_0$  formée des classes sous-inductives, c'est-à-dire [1 b] des classes ordonnées  $(M, <) \in \tilde{\Omega}_0$  admettant un plus petit élément 0 et telles que toute partie C de M, majorée dans  $(M, <)$ , admette une intersection; alors C admet un *x-agrégat*, pour tout majorant  $x$ . Soit  $\tilde{\Omega}^s$  la sous-catégorie pleine de  $\tilde{\Omega}$  ayant  $\tilde{\Omega}_0^s$  pour classe des unités. 3

Soit  $\mathcal{J}^u$  la sous-catégorie de  $\tilde{\Omega}^s$  formée des applications

quasi-inductives, c'est-à-dire des triplets  $((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}^s$  tels que, pour toute partie C de M on ait :

$$f(\overline{\bigcup} C) \subset \overline{\bigcup} (f(C)).$$

Cette dernière condition est équivalente à :

(U) Si C est une partie de M majorée par  $x \in M$ , on a :

$$f(\overset{x}{\bigcup} C) = \overset{z}{\bigcup} f(C), \quad \text{où} \quad z = f(x).$$

1 DÉFINITION 2. — Une catégorie  $\mathfrak{J}^U(\mathfrak{J}^U \cap \tilde{\Omega}', \mathfrak{J}^U)$ -structurée sera appelée catégorie quasi-inductive. Une catégorie sous-préinductive [3]  $(\mathcal{C}, <)$  telle que  $(\mathcal{C}, <)$  soit une classe préinductive [1] est appelée catégorie préinductive.

PROPOSITION 1. — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée. Pour que  $(\mathcal{C}, <)$  soit une catégorie quasi-inductive, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

Q<sub>1</sub>)  $(\mathcal{C}, <)$  est une classe sous-inductive.

Q<sub>2</sub>) Soit F une partie de  $\mathcal{C}$  majorée par  $f \in \mathcal{C}$ ; on a :

$$\overset{\alpha(f)}{\bigcup} \alpha(F) = \alpha\left(\overset{f}{\bigcup} F\right) \quad \text{et} \quad \overset{\beta(f)}{\bigcup} \beta(F) = \beta\left(\overset{f}{\bigcup} F\right).$$

2 La démonstration est analogue à celle du théorème 5 de [3].

Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée.

DÉFINITION 3. — Soient  $g \in \mathcal{C}$  et  $f \in \mathcal{C}$ ; soit  $\langle g, f \rangle$  la classe des couples composables  $(g', f') \in \mathcal{C} \cdot * \mathcal{C}$  tels que  $g' < g$  et  $f' < f$ . Si  $\langle g, f \rangle$  admet un plus grand élément  $(\bar{g}, \bar{f})$  dans  $(\mathcal{C} \cdot * \mathcal{C}, <)$ , on dira que  $g$  et  $f$  ont  $\bar{g} \cdot \bar{f}$  pour pseudoproduit dans  $(\mathcal{C}, <)$  et on posera :  $gf = \bar{g} \cdot \bar{f}$ .

Cette définition entraîne que, si  $gf$  est défini, alors  $gf$  est le plus grand élément de la classe  $\alpha(\langle g, f \rangle)$ .

PROPOSITION 2. — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}'_1, \tilde{\Omega}'_1), \tilde{\Omega}'')$ -structurée. Soient  $g \in \mathcal{C}$  et  $f \in \mathcal{C}$ ; si la classe  $\alpha(\langle g, f \rangle)$  admet un plus grand élément  $\bar{g} \cdot \bar{f}$ , alors on a  $\bar{g} \cdot \bar{f} = gf$ .

Démonstration. — Soit  $(g', f') \in \langle g, f \rangle$ ; comme  $g' \cdot f' < \bar{g} \cdot \bar{f}$ , on a :

$$g' \cdot f' = g_1 \cdot f_1, \quad \text{où} \quad g_1 < \bar{g} \quad \text{et} \quad f_1 < \bar{f},$$

car  $((\mathcal{C}, <), \times, (\mathcal{C} \cdot * \mathcal{C}, <)) \in \tilde{\Omega}''$ . Les relations :  $f_1 < f, f' < f$  et  $\alpha(f_1) = \alpha(f')$  entraînent  $f_1 = f'$ , puisque

$$((\mathcal{C}, <), \alpha, (\mathcal{C}, <)) \in \tilde{\Omega}'_1.$$

De même  $g_1 = g'$ ; donc  $f' < \bar{f}, g' < \bar{g}$  et  $(\bar{g}, \bar{f})$  est le plus grand élément de  $\langle g, f \rangle$ , c'est-à-dire  $g$  et  $f$  ont  $\bar{g}, \bar{f}$  pour pseudo-produit.

**COROLLAIRE.** — Si  $(\mathcal{C}, <)$  est un groupoïde fonctoriellement ordonné [3], le pseudoproduit  $gf$  est défini si, et seulement si, la classe  $\times(\langle g, f \rangle)$  admet un plus grand élément.

En effet, les conditions de la proposition 2 sont vérifiées, en vertu de la proposition 20, II [3].

**PROPOSITION 3.** — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie quasi-inductive. Soient  $f \in \mathcal{C}$  et  $g \in \mathcal{C}$ ; si  $\alpha(g) \cap \beta(f)$  est défini, alors le pseudoproduit  $gf$  est défini.

*Démonstration.* — Soit  $G$  (resp.  $F$ ) la classe des  $g'$  (resp.  $f'$ ) tels qu'il existe  $(g', f') \in \langle g, f \rangle$ ; posons  $E = \alpha(G) = \beta(F)$ .

Soit  $\bar{g} = \bigcup^g G$  et  $\bar{f} = \bigcup^f F$ . On a :

$$\alpha(\bar{g}) = \bigcup^{\alpha(g)} E \quad \text{et} \quad \beta(\bar{f}) = \bigcup^{\beta(f)} E.$$

Puisque  $E$  est majorée par  $e = \alpha(g) \cap \beta(f)$ , il existe  $\bigcup^e E$  et on a :

$$\bigcup^e E = \alpha(\bar{g}) = \beta(\bar{f}).$$

Donc  $(\bar{g}, \bar{f})$  est le plus grand élément de  $\langle g, f \rangle$  et on trouve  $gf = \bar{g} \cdot \bar{f}$ .

**COROLLAIRE.** — Si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie inductive, deux éléments quelconques ont un pseudoproduit.

*Remarque.* — Dans [3], nous disons que  $gf$  est le pseudoproduit de  $g$  et  $f$  dans la catégorie sous-préinductive  $(\mathcal{C}, <)$  si, et seulement si,  $gf$  est le plus grand élément de la classe  $\times(\langle g, f \rangle)$ . En général cette propriété n'entraîne pas que  $gf$  soit le pseudoproduit de  $g$  et  $f$  au sens de la définition 3; mais si le pseudoproduit au sens de la définition 3 existe

aussi, les deux pseudoproduits sont égaux. Toutefois, il résulte des propositions 3 et 2 que les deux notions sont identiques dans le cas des groupoïdes fonctoriellement ordonnés et des catégories inductives.

1+

**PROPOSITION 4.** — Soient  $f \in \mathcal{C}$  et  $e \in \mathcal{C}_0$ ; si le pseudoproduit  $fe$  est défini, alors  $fe$  est le plus grand élément de la classe  $F$  des  $f' < f$  tels que  $\alpha(f') < e$ .

En effet, on a  $(fe, \alpha(fe)) \in \langle f, e \rangle$ . Comme les conditions  $f' < f$  et  $\alpha(f') < e$  entraînent  $(f', \alpha(f')) \in \langle f, e \rangle$ , on obtient  $f' < fe$ . Donc  $fe$  est le plus grand élément de  $F$ .

**PROPOSITION 5.** — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$  ( $\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}''$ )-structurée; soient  $h \in \mathcal{C}$ ,  $g \in \mathcal{C}$  et  $f \in \mathcal{C}$ ; si  $(hg)f$  et  $h(gf)$  sont définis, on a  $(hg)f = h(gf)$ .

En effet, on a  $(hg)f = k.f_1$ , où  $k < hg$  et  $f_1 < f$ , d'où :

$$k = h_1.g_1, \quad h_1 < h \quad \text{et} \quad g_1 < g.$$

Par suite  $g_1.f_1 < gf$  et  $(hg)f = h_1.g_1.f_1 < h(gf)$ . De même  $h(gf) < (hg)f$ .

Soit  $\tilde{\Omega}_2$  la sous-classe de  $\tilde{\Omega}$  formée des triplets

$$((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}$$

vérifiant la condition suivante :

Soit  $x \in M$ ; pour tout  $y < f(x)$ , la classe des  $x' < x$  tels que  $f(x') < y$  admet un plus grand élément  $x_y$  vérifiant  $f(x_y) = y$ .

$\tilde{\Omega}_2$  est évidemment une sous-classe de  $\tilde{\Omega}''$ .

**PROPOSITION 6.** —  $\tilde{\Omega}_2$  est une sous-catégorie de  $\tilde{\Omega}$ , stable par produit dans  $\tilde{\Omega}$  (définition 2-II [3]).

*Démonstration.* — Soit

$$((M'', <), f', (M', <)) \in \tilde{\Omega}_2 \quad \text{et} \quad ((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}_2;$$

supposons  $x \in M$  et  $z < f'f(x)$ . Soit  $y_z$  le plus grand élément de la classe des  $y' \in M'$  tels que  $y' < f(x)$  et  $f'(y') < z$ ; soit  $x_{yz}$  le plus grand élément de la classe des  $x' \in M$  tels que  $x' < x$  et  $f(x') < y_z$ ; on a :

$$f'f(x_{yz}) = f'(y_z) = z.$$

La condition  $x'' < x$  entraîne  $f(x'') < f(x)$ ; de plus si  $f'f(x'') < z$ , on a  $f(x'') < y_z$ , d'où  $x'' < x_{yz}$ . Donc  $x_{yz}$  est le plus grand élément de la classe des  $x'' < x$  tels que  $f'f(x'') < z$  et on trouve  $((M'', <), f'f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}_2$ . Ainsi  $\tilde{\Omega}_2$  est une sous-catégorie de  $\tilde{\Omega}$ , laquelle est évidemment stable par produit.

DÉFINITION 4. — On dira qu'une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée  $(\mathcal{C}, <)$  est assez régulière (resp. régulière) si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_2), \tilde{\Omega})$ -structurée (resp.  $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_2), \tilde{\Omega}'')$ -structurée).

PROPOSITION 7. — Pour qu'une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée  $(\mathcal{C}, <)$  soit assez régulière (resp. soit régulière), il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions  $R_d$  et  $R_g$  (resp.  $R_d, R_g$  et  $R_p$ ) suivantes :

- ( $R_d$ ) Pour tout  $f \in \mathcal{C}$  et tout  $e \in \mathcal{C}_0$  tel que  $e < \alpha(f)$ , le pseudo-produit  $fe$  est défini et on a  $\alpha(fe) = e$ .
- ( $R_g$ ) Pour tout  $f \in \mathcal{C}$  et tout  $e' \in \mathcal{C}_0$  tel que  $e' < \beta(f)$ , le pseudo-produit  $e'f$  est défini et on a  $\beta(e'f) = e'$ .
- ( $R_p$ ) Soit  $(g, f) \in \mathcal{C} * \mathcal{C}$  et  $k < g.f$ ; on a  $k = g'.f'$ , où  $g' < g$  et  $f' < f$ .

Démonstration. — Soient  $f \in \mathcal{C}$ ,  $e \in \mathcal{C}_0$  et  $e < \alpha(f)$ . Supposons les conditions  $R_d$  et  $R_g$  vérifiées. D'après la proposition 4,  $fe$  est le plus grand élément de la classe des  $f' < f$  tels que  $\alpha(f') < e$ , c'est-à-dire on a :  $((\mathcal{C}_0, <), \alpha, (\mathcal{C}, <)) \in \tilde{\Omega}_2$ ; de même

$$((\mathcal{C}_0, <), \beta, (\mathcal{C}, <)) \in \tilde{\Omega}_2.$$

L'axiome ( $R_p$ ) entraîne  $((\mathcal{C}, <), \alpha, (\mathcal{C} * \mathcal{C}, <)) \in \tilde{\Omega}''$ , puisque  $(\mathcal{C}, <)$  est  $\tilde{\Omega}$ -structurée. Les conditions sont donc suffisantes. Inversement soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée régulière. Soient  $f \in \mathcal{C}$  et  $e < \alpha(f)$ ; soit  $(f', h) \in \langle f, e \rangle$ . Comme  $h < e$ , on a  $\beta(h) = \alpha(f') < e$  et  $f'$  est majoré par le plus grand élément  $f_e$  de la classe des  $f' < f$  tels que  $\alpha(f') < e$ . Par définition  $\alpha(f_e) = e$ , donc  $(f_e, e)$  est le plus grand élément de  $\langle f, e \rangle$ . Par conséquent  $f$  et  $e$  admettent  $f_e$  pour pseudoproduit. On voit de même que la condition ( $R_g$ ) est vérifiée.

**COROLLAIRE.** — Pour qu'un groupoïde  $\tilde{\Omega}$ -structuré  $(\mathcal{C}, \langle)$  soit régulier, il faut et il suffit que la condition  $R_d$  soit vérifiée. Par suite tout groupoïde  $\tilde{\Omega}$ -structuré assez régulier est un groupoïde ordonné régulier.

*Démonstration.* — Montrons que la condition  $R_d$  est suffisante. En effet, soient  $f \in \mathcal{C}$  et  $e' \in \mathcal{C}_0$ ; on a :  $e'f = (f^{-1}e')^{-1}$ , car  $f' < f$  entraîne  $f'^{-1} < f^{-1}$ . Si  $k < g.f$ , on trouve :

$$k = g'.(f\alpha(k)), \quad \text{où} \quad g' = k.(f\alpha(k))^{-1} < g.f.f^{-1} = g.$$

**PROPOSITION 8.** — Soit  $(\mathcal{C}, \langle)$  une catégorie ordonnée assez régulière. Soient  $e \in \mathcal{C}_0$  et  $e' \in \mathcal{C}_0$ ;  $e \cap e'$  est défini si, et seulement si,  $e$  et  $e'$  admettent une intersection  $\bar{e}$  dans  $(\mathcal{C}_0, \langle)$ , et on a :  $\bar{e} = e \cap e'$ .

*Démonstration.* — Supposons  $e \cap e'$  défini; on a :

$$\alpha(e \cap e') < e \cap e' \quad \text{et} \quad \beta(e \cap e') < e \cap e',$$

d'où

$$\alpha(e \cap e') < \beta(e \cap e') \quad \text{et} \quad \beta(e \cap e') < \alpha(e \cap e'),$$

c'est-à-dire  $\alpha(e \cap e') = \beta(e \cap e')$ ; il en résulte

$$e \cap e' = \alpha(e \cap e') = \bar{e},$$

car  $(\mathcal{C}, \langle)$  est ordonnée. Inversement supposons  $\bar{e}$  défini. Puisque  $(\mathcal{C}, \langle)$  est une catégorie ordonnée régulière, il existe  $e\bar{e}$  tel que  $\alpha(e\bar{e}) = \bar{e}$ ; comme  $\bar{e} < e\bar{e}$ , on a  $\bar{e} < \beta(e\bar{e})$  et il existe  $\bar{e}(e\bar{e})$  pour lequel  $\beta(\bar{e}(e\bar{e})) = \bar{e}$ . La relation  $\bar{e} < \bar{e}(e\bar{e})$  entraîne  $\alpha(\bar{e}(e\bar{e})) = \bar{e}$ , donc  $\bar{e}(e\bar{e}) = \bar{e}$ . Soit  $h$  un minorant de  $e$  et de  $e'$  dans  $(\mathcal{C}, \langle)$ ;  $\alpha(h)$  et  $\beta(h)$  étant majorés par  $e$  et  $e'$ , on trouve  $\alpha(h) < \bar{e}$  et  $\beta(h) < \bar{e}$ , d'où

$$h < e\bar{e} \quad \text{et} \quad h < \bar{e}(e\bar{e}) = \bar{e}.$$

Par conséquent  $\bar{e} = e \cap e'$ .

**PROPOSITION 9.** — Soit  $(\mathcal{C}, \langle)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée assez régulière; soit  $g \in \mathcal{C}$  et  $f \in \mathcal{C}$ ; le pseudoproduit  $gf$  est défini si, et seulement si,  $\alpha(g)$  et  $\beta(f)$  admettent une intersection

$$e = \alpha(g) \bigcap_{\mathcal{C}_0} \beta(f) \quad \text{dans} \quad (\mathcal{C}_0, \langle);$$

dans ce cas, on a  $gf = (ge).(ef)$ .

*Démonstration.* — Supposons  $e$  défini; d'après la proposition 7, il existe  $ef$  et  $ge$  et on a :

$$\alpha(ge) = e = \beta(ef), \quad \text{d'où} \quad (ge, ef) \in \langle g, f \rangle.$$

Soit  $(g', f') \in \langle g, f \rangle$ ; on trouve  $\alpha(g') < e$ , car  $\alpha(g')$  est majoré par  $\alpha(g)$  et  $\beta(f)$ . Il en résulte :  $g' = g'.\alpha(g') < ge$  et  $f' < ef$ ; par suite  $g$  et  $f$  admettent  $(ge).(ef)$  pour pseudoproduit. Inversement, supposons  $gf$  défini et désignons par  $(\bar{g}, \bar{f})$  le plus grand élément de  $\langle g, f \rangle$ . Alors  $\alpha(\bar{g}) < \alpha(g)$  et  $\alpha(\bar{g}) < \beta(f)$ . Soit  $e' \in \mathcal{C}_0$  tel que  $e' < \alpha(g)$  et  $e' < \beta(f)$ ; comme  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée assez régulière, il existe  $e'f < f$ ,  $ge' < g$  et on a :  $\beta(e'f) = e' = \alpha(ge')$ . On en déduit :

$$(ge', e'f) \in \langle g, f \rangle, \quad ge' < \bar{g}, \quad e'f < \bar{f} \quad \text{et} \quad e' < \alpha(\bar{g}).$$

Par suite

$$\alpha(\bar{g}) = \alpha(g) \bigcap_{\mathcal{C}_0} \beta(f).$$

**COROLLAIRE 1.** — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée assez régulière; soient  $g \in \mathcal{C}$  et  $f \in \mathcal{C}$ ; le pseudoproduit  $gf$  est défini si, et seulement si,  $e = \alpha(g) \cap \beta(f)$  est défini.

Ce corollaire résulte des propositions 8 et 9.

**COROLLAIRE 2.** — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée régulière telle que  $(\mathcal{C}, <)$  soit une classe sous-préinductive. Soient  $f \in \mathcal{C}$ ,  $g \in \mathcal{C}$  et  $h \in \mathcal{C}$ ; si  $gf$  et  $hg$  sont définis, alors  $h(gf)$  et  $(hg)f$  sont définis et égaux.

En effet, comme  $\alpha(h) \cap \beta(g)$  est défini et majoré par  $\beta(g)$  et que  $\beta(gf) < \beta(g)$ , l'intersection  $(\alpha(h) \cap \beta(g)) \cap \beta(gf)$  est définie et par suite égale à  $\alpha(h) \cap \beta(gf)$ . Donc  $h(gf)$  est défini; de même  $(hg)f$  est défini et, en vertu de la proposition 5, ces deux pseudoproduits sont égaux.

**PROPOSITION 10.** — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée assez régulière; alors  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie s-ordonnée. Si  $(\bar{\mathcal{C}}, <)$  est aussi une catégorie ordonnée assez régulière, la catégorie ordonnée produit  $(\mathcal{C} \times \bar{\mathcal{C}}, <)$  est assez régulière.

*Démonstration.* — Supposons

$$f \in \mathcal{C}, \quad f' < f, \quad f'' < f, \quad \alpha(f') = \alpha(f'') = e \quad \text{et} \quad \beta(f') = \beta(f'') = e'.$$

Il existe  $fe$  et on a  $\alpha(fe) = e$ ,  $f' < fe$ . Il existe  $e'(fe)$  et on a  $\beta(e'(fe)) = e'$  et  $f' < e'(fe)$ . Les relations :

$$e = \alpha(f') < \alpha(e'(fe)) \quad \text{et} \quad \alpha(e'(fe)) < \alpha(fe) < e$$

entraînent  $e = \alpha(e'(fe))$ ; de même  $e' = \beta(e'(fe))$ . Comme  $(\mathcal{C}, <)$  est ordonnée, des conditions :

$$f' < e'(fe), \quad \alpha(e'(fe)) = \alpha(f') \quad \text{et} \quad \beta(e'(fe)) = \beta(f')$$

il résulte  $f' = e'(fe)$ ; de même  $f'' = e'(fe)$ . Donc  $f' = f''$  et  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie  $s$ -ordonnée. La deuxième partie de la proposition se déduit du théorème 13 [3] et de la proposition 6.

**PROPOSITION 11.** — *Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie quasi-inductive. Pour que  $(\mathcal{C}, <)$  soit assez régulière, il faut et il suffit que  $(\mathcal{C}, <)$  soit semi-régulière.*

*Démonstration.* — La condition est évidemment nécessaire. Si elle est vérifiée soient  $f \in \mathcal{C}$ ,  $e \in \mathcal{C}_0$  et  $e < \alpha(f)$ . D'après la proposition 3, le pseudoproduit  $fe$  est défini et  $\alpha(fe) < e$ . Puisque  $(\mathcal{C}, <)$  est semi-régulière, il existe  $f' < f$  tel que  $\alpha(f') = e$ ; comme  $f' < fe$  en vertu de la proposition 4, on trouve  $e = \alpha(f') < \alpha(fe)$ , d'où  $\alpha(fe) = e$ . On montre de même que si  $e' < \beta(f)$  on a  $\beta(e'f) = e'$ .

**PROPOSITION 12.** — *Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée assez régulière. Soit  $\mathcal{C}$  une sous-classe de  $\mathcal{C}$  admettant un sous-agrégat  $g$ ; alors  $\alpha(g)$  et  $\beta(g)$  sont des sous-agrégats de  $\alpha(\mathcal{C})$  et  $\beta(\mathcal{C})$  respectivement dans  $(\mathcal{C}_0, <)$ .*

En effet,  $\alpha(g)$  est un majorant de  $\alpha(\mathcal{C})$ ; soit  $e \in \mathcal{C}_0$  un autre majorant de  $\alpha(\mathcal{C})$  tel que  $e < \alpha(g)$ . Comme  $(\mathcal{C}, <)$  est régulière on a  $e = \alpha(ge)$ . Pour tout  $c \in \mathcal{C}$ , on trouve :  $c < ge < g$ . Par suite  $ge = g$  et  $e = \alpha(g)$  est un sous-agrégat de  $\alpha(\mathcal{C})$  dans  $(\mathcal{C}_0, <)$ .

**COROLLAIRE 1.** — *Si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée assez régulière, et si  $(\mathcal{C}, <)$  est une classe sous-inductive, alors  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}^s(\mathcal{J}^0, \tilde{\Omega}^s)$ -structurée.*

En effet, soit  $E$  une partie de  $\mathcal{C}_0$  majorée par  $e \in \mathcal{C}_0$ ; soit  $h = \bigcup_e E$ ; on a  $\alpha(h) = \bigcup_e E$  dans  $(\mathcal{C}_0, <)$  et  $(\mathcal{C}_0, <)$  est une



classe sous-inductive. Si  $(g, f) \in \mathcal{C} \cdot * \mathcal{C} \cdot$ ,  $(g_i, f_i) \in \mathcal{C} \cdot * \mathcal{C} \cdot$  et  $(g_i, f_i) < (g, f)$  pour tout  $i \in I$ , alors :

$$\alpha\left(\bigcup^g g_i\right) = \bigcup^{\alpha(g)} \alpha(g_i) = \bigcup^{\beta(f)} \beta(f_i) = \beta\left(\bigcup^f f_i\right),$$

d'où  $\left(\bigcup_{i \in I}^g g_i, \bigcup_{i \in I}^f f_i\right) \in \mathcal{C} \cdot * \mathcal{C} \cdot$  et  $(\mathcal{C} \cdot * \mathcal{C} \cdot, <) \in \tilde{\Omega}^s$ . Le corollaire résulte donc de la proposition 12.

**COROLLAIRE 2.** — *Si  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est une catégorie ordonnée assez régulière et si  $(\mathcal{C}, <)$  est une classe sous-inductive,  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est une catégorie quasi-inductive.*

En effet, soit  $E$  une sous-classe de  $\mathcal{C}_0$  majorée par  $e \in \mathcal{C}_0$ .

Soit  $h = \bigcup^e E$ ; comme  $\alpha(h)$  et  $\beta(h)$  sont les  $e$ -agrégats de  $E$  dans  $(\mathcal{C}_0, <)$ , on a :  $\alpha(h) = \beta(h)$  et  $\alpha(h) < h$ , d'où  $h \in \mathcal{C}_0$ , puisque  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est une catégorie ordonnée. Le corollaire 2 résulte alors des propositions 1 et 12.

Soit  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée assez régulière.

Une sous-catégorie  $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_2), \tilde{\Omega})$ -structurée de  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est une sous-catégorie  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{C} \cdot$  qui, munie de la relation d'ordre et de la loi de composition induites par  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée assez régulière  $(\mathcal{C} \cdot, <)$ . Nous aurons à considérer des sous-catégories plus particulières de  $(\mathcal{C} \cdot, <)$ , à savoir :

**DÉFINITION 5.** — *On appelle sous-catégorie régulière de  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  une sous-catégorie  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{C} \cdot$  vérifiant les conditions suivantes :*

1) *Soient  $f \in \mathcal{C}$  et  $e \in \mathcal{C}_0$ ; si  $e < \alpha(f)$  (resp.  $e < \beta(f)$ ), on a :  $fe \in \mathcal{C}$  (resp.  $ef \in \mathcal{C}$ ).*

2) *Si  $e \in \mathcal{C}_0$  et  $e' \in \mathcal{C}_0$  et si  $e \bigcap_{\mathcal{C}_0} e'$  est défini, on a  $e \bigcap_{\mathcal{C}_0} e' \in \mathcal{C}_0$ .*

Si  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{C} \cdot$ , saturée par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$ , alors  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie régulière de  $(\mathcal{C} \cdot, <)$ .

Si  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie régulière de  $(\mathcal{C} \cdot, <)$ , alors  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée assez régulière.

**PROPOSITION 13.** — *Soit  $\tilde{\mathcal{C}}$  une classe de sous-catégories régulières de la catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée régulière  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  telles*

*Colloque Grenoble.*

que  $C_0 = B$  pour tout  $C \in \tilde{C}$ . Alors la catégorie  $\mathcal{C}_{\tilde{C}}$  engendrée par la classe réunion des  $C \in \tilde{C}$  est une sous-catégorie régulière de  $(\mathcal{C}, <)$ .

*Démonstration.* — Un élément de  $\mathcal{C}_{\tilde{C}}$  est de la forme  $f_n \dots f_2 \cdot f_1$ , où  $f_i \in C_i$ , et  $C_i \in \tilde{C}$ . Soit  $e < \alpha(f_1)$ ,  $e \in B$ ; on a :  $(f_2 \cdot f_1)e = f_2(f_1e)$ , d'après la proposition 5 et :

$$(f_2 \cdot f_1)e = (f_2\beta(f_1e)) \cdot (f_1e)$$

en vertu de la proposition 9. Comme  $f_1e \in C_1$ , on en déduit :

$$\beta(f_1e) \in B = \alpha(C_2), \quad \text{d'où} \quad f_2\beta(f_1e) \in C_2.$$

Par suite  $(f_2 \cdot f_1)e \in \mathcal{C}_{\tilde{C}}$ . Par récurrence, on démontre

$$(f_n \dots f_2 \cdot f_1)e \in \mathcal{C}_{\tilde{C}}.$$

**PROPOSITION 14.** — Si  $C$  est une sous-catégorie régulière de  $(\mathcal{C}, <)$ , alors  $C$  est stable par pseudoproduit.

En effet, soient  $g \in C$  et  $f \in C$  tels que  $gf$  soit défini; en vertu de la proposition 9, on a  $gf = (ge) \cdot (ef)$ , où  $e = \alpha(g) \bigcap_{C_0} \beta(f)$ ; comme  $e \in C_0$ ,  $ge \in C$  et  $ef \in C$ , on en déduit  $gf \in C$ .

**THÉORÈME 1.** — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée régulière. Si  $C$  est une sous-catégorie régulière de  $(\mathcal{C}, <)$ , alors  $(C, <)$  est une catégorie ordonnée régulière.

*Démonstration.* — Il suffit de montrer que, si  $k < g \cdot f$ , où  $g \in C$ ,  $f \in C$  et  $k \in C$ , il existe  $g'' \in C$  et  $f'' \in C$  tels que  $f'' < f$ ,  $g'' < g$  et  $k = g'' \cdot f''$ . En effet, puisque  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'')$ -structurée, il existe  $g' < g$  et  $f' < f$ ,  $g' \in \mathcal{C}$  et  $f' \in \mathcal{C}$  tels que  $k = g' \cdot f'$ . Comme  $\alpha(k) \in C_0$  et  $\beta(k) \in C_0$ , on a  $f\alpha(k) \in C$ . Soit  $e' = \beta(f\alpha(k)) \in C_0$ ; les relations  $f' < f$  et  $\alpha(f') = \alpha(k)$  entraînent  $f' < f\alpha(k)$  et  $\alpha(g') = \beta(f') < e'$ . Puisque  $e' < \alpha(g)$ , on a  $ge' \in C$ ,  $\alpha(ge') = e'$  et  $g' < ge'$ , d'où

$$\beta(k) = \beta(g') < \beta(ge').$$

Par suite le pseudoproduit  $\beta(k)(ge') = g''$  appartient à  $C$ ; cet élément vérifie les conditions :  $g' < g''$  et  $\beta(g'') = \beta(k)$ . Soit  $e'' = \alpha(g'') < e'$ ; il existe  $f'' = e''(f\alpha(k)) \in C$ ; des relations :

$$\beta(f') = \alpha(g') < e'' \quad \text{et} \quad f' < f\alpha(k),$$

il résulte  $f' < f''$ , d'où  $\alpha(k) = \alpha(f') < \alpha(f'')$  et  $\alpha(f'') = \alpha(k)$ , car  $\alpha(f'') < \alpha(k)$ . Ceci prouve que  $g'' \cdot f'' < g \cdot f$  est défini et tel que :

$$\alpha(g'' \cdot f'') = \alpha(k) \quad \text{et} \quad \beta(g'' \cdot f'') = \beta(k).$$

En vertu de la proposition 10,  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est  $s$ -ordonnée, de sorte que l'on a :  $k = g'' \cdot f''$ , où  $g'' \in \mathcal{C}$  et  $f'' \in \mathcal{C}$ . Par conséquent  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est une catégorie ordonnée régulière.

**THÉORÈME 2.** — Soit  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  une catégorie  $\bar{\Omega}$ -structurée. La catégorie  $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C} \cdot)$  (théorème 2-1) munie de la relation d'ordre :  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  si, et seulement si,  $F_1 \subset F$  et si  $\mathcal{B}_1$  (resp.  $\mathcal{B}'_1$ ) est un sous-groupe plein saturé par induction de  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ), est une catégorie quasi-inductive régulière.

*Démonstration.* — Soient

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C} \cdot) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C} \cdot).$$

Montrons que si  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ , alors  $F_1$  est une sous-classe saturée par induction de  $F$  et on a :  $F_1 = \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1)$ . En effet,  $F_1 \subset F$  entraîne  $F_1 \subset \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1)$ . Soit

$$f \in \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1).$$

Il existe  $f_1 \in F_1$  tel que  $\alpha(f) = \alpha(f_1)$ . Comme  $F$  est compatible à gauche avec  $\mathcal{B}'$ , il existe  $g' \in \mathcal{B}'$  tel que  $f = g' \cdot f_1$ ; le sous-groupe plein  $\mathcal{B}'_1$  étant plein dans  $\mathcal{B}'$ ,  $g'$  appartient à  $\mathcal{B}'_1$  et par suite  $f \in \mathcal{B}'_1 \cdot F_1 = F_1$  et  $\beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1) \subset F_1$ . Ainsi

$$F_1 = \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1).$$

De plus les conditions  $f_1 \in F_1$  et  $f \in F, f < f_1$  entraînent  $\alpha(f) \in \mathcal{B}_1$  et  $\beta(f) \in \mathcal{B}'_1$ , car  $\alpha(\mathcal{B}_1)$  et  $\alpha(\mathcal{B}'_1)$  sont saturées par induction dans  $\alpha(\mathcal{B})$  et  $\alpha(\mathcal{B}')$  respectivement, d'où :

$$f = \beta(f) \cdot f \cdot \alpha(f) \in \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1) = F_1.$$

Donc  $F_1$  est saturée par induction dans  $F$ .

— Les relations  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  et

$$(\mathcal{B}'_1, F_2, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$$

entraînent  $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$  et

$$F_1 = \alpha(\mathcal{B}'_1) \cdot F \cdot \alpha(\mathcal{B}_1) = \beta(F_2) \cdot F \cdot \alpha(F_2) = F_2.$$

Si on suppose aussi  $(\mathfrak{B}'_1, F'_1, \mathfrak{B}'_1) < (\mathfrak{B}'', F', \mathfrak{B}')$ , on trouve :  
 $F'_1.F_1 \subset F'.F$  et

$$(\mathfrak{B}'_1, F'_1, \mathfrak{B}'_1) \cdot (\mathfrak{B}_1, F_1, \mathfrak{B}_1) < (\mathfrak{B}'', F', \mathfrak{B}') \cdot (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}).$$

Par conséquent  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$  est une catégorie *s*-ordonnée.

— Soit  $\tilde{H}$  une sous-classe de  $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot)$  majorée par  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$  dans  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$ . Le sous-groupeïde plein  $\mathfrak{B}_H$  (resp.  $\mathfrak{B}'_H$ ) de  $\mathfrak{B}$  (resp.  $\mathfrak{B}'$ ) ayant pour classe de ses unités la classe réunion des classes  $\alpha(F_i)$  (resp.  $\beta(F_i)$ ), où  $(\mathfrak{B}'_i, F_i, \mathfrak{B}_i) \in H$ , est un sous-agrégat de la classe  $\alpha(H)$  (resp.  $\beta(H)$ ) dans  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$ . Soit  $F_H$  la classe réunion des  $F_i$ ; posons :

$$\tilde{H} = (\mathfrak{B}_H, \mathfrak{B}'_H.F_H.\mathfrak{B}_H, \mathfrak{B}_H).$$

Puisque  $\alpha(F_H) = \alpha(\mathfrak{B}_H)$  et  $\beta(F_H) = \alpha(\mathfrak{B}'_H)$ , on a  $\tilde{H} \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot)$ , en vertu de la proposition 3-1. On en déduit que  $\tilde{H}$  est le  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ -agrégat de  $H$  dans  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$ .

— Soient  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot)$  et  $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}$ . Soit  $\mathfrak{B}'_1$  le sous-groupeïde plein de  $\mathfrak{B}'$  ayant  $\beta(F.\mathfrak{B}_1)$  pour classe de ses unités. On a :

$$F.\mathfrak{B}_1 = F.\alpha(\mathfrak{B}_1), \quad \alpha(F.\mathfrak{B}_1) = \alpha(\mathfrak{B}_1)$$

et

$$\mathfrak{B}'_1.(F.\mathfrak{B}_1).\mathfrak{B}_1 = F.\mathfrak{B}_1.$$

D'après la proposition 3-1, il en résulte

$$(\mathfrak{B}'_1, F.\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot).$$

Si  $(\mathfrak{B}'_2, F_1, \mathfrak{B}_1) < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ , on a :  $F_1 = \beta(\mathfrak{B}'_2).F.\alpha(\mathfrak{B}_1)$ , d'où  $F_1 \subset F.\mathfrak{B}_1$  et  $\mathfrak{B}'_2 < \mathfrak{B}'_1$ . Par suite  $(\mathfrak{B}'_1, F.\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1)$  est le pseudo-produit de  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$  et de  $\mathfrak{B}_1$  dans  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$ . De même si  $\mathfrak{B}'_1 < \mathfrak{B}'$ , le pseudoproduit  $\mathfrak{B}'_1(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$  est défini et admet  $\mathfrak{B}'_1$  pour unité à gauche, de sorte que  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$  est une catégorie quasi-inductive assez régulière.

— Supposons  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot)$ ,  $(\mathfrak{B}'', F', \mathfrak{B}') \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot)$ ,  $(\mathfrak{B}'_1, K, \mathfrak{B}_1) \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot)$  et  $(\mathfrak{B}'_1, K, \mathfrak{B}_1) < (\mathfrak{B}'', F', \mathfrak{B}')$ . Soit  $E'$  la classe des  $e' \in \mathfrak{B}'_0$  tels qu'il existe  $f \in F$  et  $f' \in F'$  vérifiant les conditions :

$$\alpha(f') = \beta(f) = e', \quad \alpha(f) \in \alpha(K) \quad \text{et} \quad \beta(f') \in \beta(K).$$

Soit  $\mathfrak{B}'_1$  le sous-groupeïde plein de  $\mathfrak{B}'$  ayant  $E'$  pour classe des

unités. Pour tout  $e \in \alpha(K)$ , il existe  $k \in K \subset F'.F$  tel que  $\alpha(k) = e$ , d'où  $k = f'.f$ ,  $f \in \mathfrak{B}'_1.F.\mathfrak{B}_1$  et  $f' \in \mathfrak{B}'_1.F'.\mathfrak{B}'_1$ . On en déduit, en vertu de la proposition 3-1 et de ce qui précède :

$$\hat{F}' \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), \quad \hat{F} \in \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot) \quad \text{et} \quad \hat{F}' \cdot \hat{F} < (\mathfrak{B}'', F'.F, \mathfrak{B}),$$

en posant :

$$\hat{F}' = (\mathfrak{B}''_1, \mathfrak{B}'_1.F'_1.\mathfrak{B}'_1, \mathfrak{B}'_1) \quad \text{et} \quad \hat{F} = (\mathfrak{B}'_1, \mathfrak{B}'_1.F.\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1).$$

Comme  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$  est une catégorie  $s$ -ordonnée d'après la proposition 10, les atlas  $\hat{F}' \cdot \hat{F}$  et  $(\mathfrak{B}''_1, K, \mathfrak{B}_1)$ , qui ont mêmes unités à droite et à gauche  $\mathfrak{B}_1$  et  $\mathfrak{B}''_1$  respectivement, et qui sont majorés par  $(\mathfrak{B}'', F'.F, \mathfrak{B})$ , sont égaux. Par conséquent  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière, car on a  $\hat{F}' < (\mathfrak{B}'', F', \mathfrak{B}')$  et  $\hat{F} < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ .

**COROLLAIRE 1.** —  $\mathfrak{A}(\mathcal{C} \cdot)$  est une sous-catégorie saturée par induction de  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$  et la relation d'ordre induite par  $<$  sur  $\mathfrak{A}(\mathcal{C} \cdot)$  est définie par :

$F_1 < F$  si, et seulement si,  $\alpha(F_1)$  et  $\beta(F_1)$  sont des sous-classes saturées par induction dans  $\alpha(F)$  et  $\beta(F)$  respectivement et si  $F_1$  est plein dans  $F$ , c'est-à-dire si

$$F_1 = \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1).$$

*Démonstration.* — Soit  $F \in \mathfrak{A}(\mathcal{C} \cdot)$  et  $(\mathfrak{B}'_1, F_1, \mathfrak{B}_1) < F$  dans  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$ . Montrons que l'on a  $\mathfrak{B}_1 = \alpha(F_1)$  et  $\mathfrak{B}'_1 = \beta(F_1)$ . En effet, soit  $g \in \alpha(F_1)$ . Comme

$$\alpha(g) \in \alpha(F_1) \subset \alpha(F) \quad \text{et} \quad \beta(g) \in \alpha(F_1),$$

il existe  $f_1 \in F_1$  tel que  $\alpha(f_1) = \beta(g)$  et on a  $f_1 \cdot g \in F_1 \cdot \alpha(F_1) = F_1$ . Soit  $f \in F$  et  $\alpha(f) = \beta(g)$ ; il existe  $g' \in \beta(F)$  tel que  $f = g' \cdot f_1$ , d'où :

$$f \cdot g = g' \cdot f_1 \cdot g \in \beta(F) \cdot F_1 \subset F.$$

On en déduit  $g \in \alpha(F)$  et  $g \in \mathfrak{B}_1$ , car  $\mathfrak{B}_1$  est un sous-groupeïde plein de  $\alpha(F)$ . De même  $\mathfrak{B}'_1 = \beta(F_1)$ , de sorte que

$$(\mathfrak{B}'_1, F_1, \mathfrak{B}_1) \in \mathfrak{A}(\mathcal{C} \cdot)$$

et  $\mathfrak{A}(\mathcal{C} \cdot)$  est une sous-catégorie saturée par induction de  $(\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{C} \cdot), <)$ .

— Montrons que la relation d'ordre induite par  $(\mathcal{A}(\mathcal{C} \cdot), <)$  sur  $\mathcal{A}(\mathcal{C} \cdot)$  est définie par :

$$1 \quad F_1 < F \quad \text{si, et seulement si,} \quad F_1 = \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1).$$

En effet, si  $F_1 < F$ , on a vu au cours de la démonstration du théorème 2 que l'on a  $F_1 = \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1)$ . Inversement  
 1 soient  $F$  et  $F_1$  deux atlas de  $\mathcal{C} \cdot$  tels que  $F_1 = \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1)$ . Soit  $g \in \alpha(F_1) \cdot a(F) \cdot \alpha(F_1)$ ; si  $f_1 \in F_1$  et  $\alpha(f_1) = \beta(g)$ , on a :

$$f_1 \cdot g \in F_1 \cdot a(F) \cdot \alpha(F_1) \subset \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1) = F_1,$$

d'où  $g \in a(F_1)$ . De même  $\beta(F_1) \cdot b(F) \cdot \beta(F_1) \subset b(F_1)$ . Comme  $F_1 \subset F$ , il en résulte

$$(\beta(F_1) \cdot b(F) \cdot \beta(F_1), F_1, \alpha(F_1) \cdot a(F) \cdot \alpha(F_1)) < F$$

dans  $\mathcal{A}(\mathcal{C} \cdot)$ , et, d'après le début de la démonstration,  $F_1 < F$  dans  $(\mathcal{A}(\mathcal{C} \cdot), <)$ .

2 COROLLAIRE 2. — Soit  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  un groupoïde ordonné régulier; alors  $(\mathcal{A}(\mathcal{C} \cdot), <)$  est un groupoïde quasi-inductif régulier admettant pour sous-groupoïde un sous-groupoïde  $\mathcal{C}^>$  équivalent à  $\mathcal{C} \cdot$ , sur lequel  $(\mathcal{A}(\mathcal{C} \cdot), <)$  induit une structure d'ordre isomorphe à  $(\mathcal{C}, <)$ .

Démonstration. —  $(\mathcal{A}(\mathcal{C} \cdot), <)$  est évidemment un groupoïde ordonné. Soit  $f \in \mathcal{C}$  et  $f^>$  la classe des minorants de  $f$  dans  $(\mathcal{C}, <)$ ; si  $f_1 < f$ ,  $f_2 < f$  et  $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ , on a  $f_1^{-1} \cdot f_2 < \alpha(f)$ ; si de plus  $f_3 < f$  et  $\alpha(f_3) = \alpha(f_1)$ , on obtient :  $f_3 \cdot f_1^{-1} \cdot f_2 < f \cdot f^{-1} \cdot f = f$ , donc  $f^> \in \mathcal{A}(\mathcal{C} \cdot)$ , en vertu du théorème 1-1. Soient  $f \in \mathcal{C}$  et  $f' \in \mathcal{C}$ . Si  $\alpha(f') = \beta(f)$ , on a :

$$f'^> \cdot f^> = (f' \cdot f)^>,$$

car  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est un groupoïde ordonné régulier. Supposons  $f' < f$  dans  $(\mathcal{C}, <)$ ; soit  $f'_1 < f$  tel que  $\alpha(f'_1) < \alpha(f')$  et

$$\beta(f'_1) < \beta(f').$$

On a :

$$f'_1 = \beta(f'_1)(f\alpha(f'_1)) < \beta(f')(f\alpha(f')) = f'$$

et par suite  $f'^>$  est plein dans  $f^>$ , d'où  $f'^> < f^>$  dans  $(\mathcal{A}(\mathcal{C} \cdot), <)$ . Enfin, si  $e \in \mathcal{C}_0$  et  $e < \alpha(f)$ , on trouve, par définition du pseudo-produit

$$f^>e^> = (fe)^>.$$

Ceci montre que la bijection:  $f \rightarrow f^>$  identifie  $\mathcal{C}$  à un sous-groupe régulier de  $(\mathcal{A}(\mathcal{C}), <)$ .

Soit  $(\mathcal{C}, <)$  un groupe ordonné régulier.

DÉFINITION 6. — On appellera atlas régulier de  $(\mathcal{C}, <)$  un atlas  $F$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $a(F)$  et  $b(F)$  soient des sous-groupe réguliers de  $(\mathcal{C}, <)$  et que l'on ait:  $Fa(F) \subset F$  et  $b(F)F \subset F$ .

PROPOSITION 15. — Pour qu'une sous-classe  $F$  de  $\mathcal{C}$  soit un atlas régulier de  $(\mathcal{C}, <)$ , il faut et il suffit que l'on ait:

$$F(F^{-1}F) \subset F.$$

Démonstration. — Supposons  $F(F^{-1}F) \subset F$ . On a:

$$F.(F^{-1}.F) \subset F(F^{-1}F) \subset F,$$

donc  $F$  est un atlas de  $\mathcal{C}$ , en vertu du théorème 1-1. De plus:

$$Fa(F) \subset F(F^{-1}F) \subset F.$$

Supposons  $e \in \alpha(F)$ ,  $e' \in \alpha(F)$  et  $e \cap e'$  défini; il existe  $f \in F$  tel que  $\alpha(f) = e$  et il existe  $f' \in F$  tel que  $e' = \alpha(f')$ ; comme  $fe' \in Fa(F) \subset F$ , on a  $\alpha(fe') = e \cap e' \in \alpha(F)$ . Supposons  $g \in \alpha(F)$ ,  $e \in \alpha(F)$  et  $e < \beta(g)$ ; soit  $f \in F$  tel que  $\alpha(f) = \beta(g)$ . Les relations:

$$fe \in F \quad \text{et} \quad (fe)g \in Fa(F) \subset F$$

entraînent  $h = (fe)^{-1}.(fe)g \in F^{-1}.F$ . Comme le pseudoproduit est associatif, en vertu de la proposition 5, on obtient:

$$h = ef^{-1}feg = eg, \quad \text{car} \quad e\alpha(f)e = e.$$

Donc  $a(F)$  est un sous-groupe régulier de  $(\mathcal{C}, <)$ ; on a aussi:

$$(FF^{-1})F \subset F(F^{-1}F) \subset F,$$

car  $Fa(F) \subset F$  entraîne

$$FF^{-1} = F.F^{-1};$$

ceci permet, par un raisonnement analogue, de démontrer que  $b(F)$  est un sous-groupe régulier de  $(\mathcal{C}, <)$  et que  $b(F)F \subset F$ , de sorte que  $F$  est un atlas régulier de  $(\mathcal{C}, <)$ .

— Inversement, soit  $F$  un atlas régulier de  $(\mathcal{C}, <)$ . On a  $Fa(F) \subset F$ . Montrons que  $a(F) = F^{-1}F$ , d'où résultera la

proposition. En effet, soient  $f \in F$  et  $f' \in F$ . Si  $f^{-1}f'$  est défini, on a :

$$\beta(f)f' \in \beta(F)F \subset F, \quad \beta(f')f \in F$$

et

$$f^{-1}f' = (\beta(f')f)^{-1} \cdot (\beta(f)f') \in F^{-1} \cdot F,$$

d'où

$$F^{-1}F \subset F^{-1} \cdot F.$$

Comme  $F^{-1} \cdot F \subset F^{-1}F$ , on en déduit  $a(F) = F^{-1} \cdot F = F^{-1}F$  et  $F(F^{-1}F) = Fa(F) \subset F$ .

**THÉORÈME 3.** — *La classe  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  des atlas réguliers de  $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  est un sous-groupe saturé par induction de*

$$(\mathcal{A}(\mathcal{C}), \langle \rangle) \quad \text{et} \quad (\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle), \langle \rangle),$$

*est un groupe quasi-inductif régulier à un sous-groupe duquel s'identifie  $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$ .*

*Démonstration.* — Supposons  $F \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  et  $F_1 < F$  dans  $(\mathcal{A}(\mathcal{C}), \langle \rangle)$ . Les sous-groupes  $a(F_1)$  et  $b(F_1)$  de  $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  sont réguliers, car ils sont saturés par induction dans les sous-groupes réguliers  $a(F)$  et  $b(F)$ . Comme  $F_1$  est saturé par induction dans  $F$ , on a  $F_1 a(F_1) \subset F_1$ , d'où  $F_1 \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  et  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  est une sous-classe saturée par induction de  $(\mathcal{A}(\mathcal{C}), \langle \rangle)$ . On a aussi  $F^{-1} \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$ , car  $F^{-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$  et :

$$F^{-1}((F^{-1})^{-1}F^{-1}) = (FF^{-1}F)^{-1} \subset F^{-1},$$

en vertu de la proposition 15. Supposons de plus  $F' \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  et  $a(F') = b(F)$ . On a  $F' \cdot F \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$  et les groupes

$$a(F' \cdot F) = a(F) \quad \text{et} \quad b(F' \cdot F) = b(F')$$

sont réguliers. Soient  $f \in F$  et  $f' \in F$  tels que  $f'f$  soit défini. On a :

$$f'f = (f'\beta(f)) \cdot (\alpha(f')f) \in F' \cdot F,$$

de sorte que  $F'F \subset F' \cdot F$ . Évidemment,  $F' \cdot F \subset F'F$ , d'où  $F' \cdot F = F'F$ . Il en résulte :

$$(F'F)a(F) = F'(Fa(F)) = F'F = F' \cdot F$$

et

$$b(F')(F'F) = (b(F')F')F = F' \cdot F.$$

Par suite  $F' \cdot F \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  et  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  est un sous-groupe de  $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ .



**COROLLAIRE.** — Soit  $\bar{\mathcal{C}}_f$  la sous-classe de  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$  formée des atlas saturés par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$ . Alors  $(\bar{\mathcal{C}}_f, <)$  est un sous-groupeïde saturé par induction de  $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$ , à un sous-groupeïde duquel s'identifie  $\mathcal{C}$ . La relation d'ordre induite par  $(\mathcal{A}(\mathcal{C}), <)$  sur  $\bar{\mathcal{C}}_f$  est définie par :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, on a } F' = \beta(F') \cdot F \cdot \alpha(F').$$

*Démonstration.* — Soient  $F \in \bar{\mathcal{C}}_f$  et  $F' \in \bar{\mathcal{C}}_f$ . Si  $F' < F$ , on a  $F' = \beta(F') \cdot F \cdot \alpha(F')$ . Inversement si  $F' = \beta(F') \cdot F \cdot \alpha(F')$ , on obtient  $F' \subset F$  et,  $\alpha(F')$  et  $\beta(F')$  étant des sous-classes saturées par induction de  $(\mathcal{C}_0, <)$ , elles sont aussi saturées par induction dans  $\alpha(F')$  et  $\beta(F')$  respectivement. Donc, en vertu du corollaire 1 du théorème 2, on a  $F' < F$ . Le reste du corollaire est évident.

**THÉORÈME 4.** — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  un groupeïde fonctoriellement ordonné. Alors  $(\hat{\mathcal{C}}, <)$  est un groupeïde sous-inductif, où  $\hat{\mathcal{C}}$  est le sous-groupeïde plein de  $\bar{\mathcal{C}}_f$  dont les unités sont majorées dans  $(\mathcal{C}, <)$  (et par suite dans  $(\mathcal{C}_0, <)$ ). 1+

*Démonstration.* — Supposons  $(\mathcal{C}, <)$  fonctoriellement ordonné; alors  $(\mathcal{C}, <)$  est un groupeïde ordonné régulier [3]. Soit  $\mathcal{B} \in \hat{\mathcal{C}}_0$  et  $F < \mathcal{B}$ . Comme  $\mathcal{B}$  est majoré par  $e \in \mathcal{C}_0$ , on a  $F \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}_0$  et  $(\hat{\mathcal{C}}, <)$  est fonctoriellement ordonné. Comme  $\hat{\mathcal{C}}$  est saturé par induction dans  $(\bar{\mathcal{C}}_f, <)$ ,  $(\hat{\mathcal{C}}, <)$  est un groupeïde quasi-inductif (théorème 3), donc sous-inductif.

*Remarque.* — Le groupeïde  $\mathcal{H}(\mathcal{C})$  des atlas faibles complets d'un groupeïde sous-préinductif  $(\mathcal{C}, <)$  considéré dans [1] est un sous-groupeïde saturé par induction de

$$(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$$
2+

### 3. — Groupeïde d'holonomie complet.

Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique localement simple (nous supposons connues les notions de [4]). 3

**DÉFINITION 1.** — Soient  $W$  et  $W'$  deux ouverts simples tels que  $W'$  soit distingué dans  $W$  et que l'ouvert obtenu par saturation

de  $W'$  relativement à la relation d'équivalence sous-jacente à  $(T, T')_W$  soit identique à  $W$ . Alors nous dirons que le couple  $(W', W)$ , ou le couple  $(W, W')$ , est un chaînon pur. On appelle chaîne pure une suite  $\Gamma = (W_n, \dots, W_1)$  telle que, pour tout  $i < n$ , le couple  $(W_i, W_{i+1})$  soit un chaînon pur.

Cette définition est différente formellement de celle de [4]. A une chaîne pure  $(W_n, \dots, W_1)$  correspond la chaîne pure au sens de [4] :  $(W_1, \dots, W_n; W'_{1,2}, \dots, W'_{n-1,n})$ , où  $W'_{i,i+1}$  est contenu dans  $W_i$  et dans  $W_{i+1}$  et égal à l'un de ces deux ouverts. Inversement si on a une chaîne pure

$$(W_1, \dots, W_n; W_{1,2}, \dots, W_{n-1,n})$$

au sens de [4], alors la suite

$$(W_1, W_{1,2}, W_2, W_{2,3}, \dots, W_{n-1,n}, W_n)$$

est une chaîne pure.

Soit  $\mathcal{J}'$  le groupoïde formé des triplets  $(U', f, U)$  tels que  $U$  et  $U'$  soient deux ouverts simples et  $f$  un homéomorphisme de l'espace transverse  $\check{U}$  sur l'espace transverse  $\check{U}'$ , muni de la loi de composition :

$$(U'_1, f_1, U_1) \cdot (U', f, U) = (U'_1, f_1 f, U)$$

si, et seulement si,  $U' = U_1$ .  $\mathcal{J}'$  est un groupoïde ordonné pour la relation d'ordre :

$(U'_1, f_1, U_1) < (U', f, U)$  si, et seulement si,  $U'_1$  est distingué dans  $U'$ ,  $U_1$  est distingué dans  $U$  et  $u'f_1 = fu$ , où  $u$  et  $u'$  sont les injections canoniques de  $\check{U}_1$  dans  $\check{U}$  et de  $\check{U}'_1$  dans  $\check{U}'$  respectivement. La classe des unités de  $\mathcal{J}'$  est identifiée à la classe des ouverts simples.

Soit  $H'$  le groupoïde d'holonomie, qui est le sous-groupoïde de  $\mathcal{J}'$  engendré par les triplets  $(U', f, U)$  tels que  $(U', U)$  soit un chaînon pur et que  $f$  soit la bijection canonique de  $\check{U}$  sur  $\check{U}'$ .

**PROPOSITION 1.** —  $(H', <)$  est un groupoïde ordonné régulier, la relation d'ordre étant celle induite par  $(\mathcal{J}', <)$ .

En effet,  $H'$  est évidemment un groupoïde ordonné. Supposons  $U < U_1$  et  $h = (U'_1, f_1, U_1)$ . On a  $hU = (U', f, U)$ , où  $f$  est la restriction de  $f_1$  à  $U$  et  $U'$  est la réunion des plaques de  $U'_1$  appartenant à  $f_1(\check{U})$ .

DÉFINITION 2. — On appellera groupoïde d'holonomie faiblement complet le sous-groupoïde  $(\bar{H}'_f, <)$  de  $(\mathcal{A}_b(H', <), <)$  formé des atlas  $F$  saturés par induction dans  $(H', <)$ .

D'après le corollaire du théorème 3-2,  $(\bar{H}'_f, <)$  est un groupoïde quasi-inductif régulier et  $H'$  s'identifie à un sous-groupoïde de  $(\bar{H}'_f, <)$ , en identifiant  $h \in H'$  à la classe des minorants de  $h$  dans  $(H', <)$ .

En particulier, soit  $U$  un ouvert simple de  $(T, T')$  et soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts saturés de  $U$ , telle que

$$\bigcup_{i \in I} U_i = U.$$

Soit  $A$  la classe formée des minorants d'un élément quelconque des  $U_i$ . Alors  $A$  est un élément de  $\bar{H}'_f$ ; mais les éléments  $A$  et  $U^>$  sont différents, si  $U \neq U_i$  pour tout  $i \in I$ . Toutefois du point de vue holonomie ces deux éléments doivent généralement être considérés comme égaux. Nous allons montrer qu'on peut construire un groupoïde quasi-inductif régulier quotient de  $(\bar{H}'_f, <)$  dans lequel ces deux éléments sont confondus.

Si  $f \in H'$ , nous désignerons par  $\check{f}$  l'isomorphisme de  $\alpha(f)^u$  sur  $\beta(f)^u$  tel que  $f = (\beta(f), \check{f}, \alpha(f))$ .

DÉFINITION 3. — Soit  $C$  une sous-classe saturée par induction de  $(H', <)$ . On dira que  $C$  admet  $f$  pour sous-agrégat admissible si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1)  $C$  est majorée par  $f$ .
- 2) Soient  $x \in \alpha(f)$  et  $y$  un point de la plaque  $\check{f}(x)$  de  $\beta(f)$ ; il existe  $g \in C$  tel que  $x \in \alpha(g)$  et  $y \in \beta(g)$ .

En particulier si  $f \in H'$ , alors  $f$  est le seul sous-agrégat admissible de la classe des minorants de  $f$ .

PROPOSITION 2. — Si  $f$  est un sous-agrégat admissible de  $C$ ,  $f$  est le  $f$ -agrégat de  $C$  et  $\alpha(f)$  (resp.  $\beta(f)$ ) est l'ouvert réunion des ouverts appartenant à  $\alpha(C)$  (resp. à  $\beta(C)$ ).

En effet, soit  $f'$  un majorant de  $C$  tel que  $f' < f$ ; pour tout  $x \in \alpha(f)$ , il existe  $g \in C$  tel que  $x \in \alpha(g)$ ; il en résulte  $x \in \alpha(f')$ , donc  $\alpha(f') = \alpha(f)$ . De même  $\beta(f') = \beta(f)$ ; d'où  $f' = f$ . Ceci prouve que  $f$  est un sous-agrégat de  $C$ .

*Remarque.* — Si une classe  $C$  saturée par induction admet un sous-agrégat  $f$  tel que  $\alpha(f) = \bigcup \alpha(C)$  et  $\beta(f) = \bigcup \beta(C)$  dans  $\tilde{\mathcal{C}}$ , il n'en résulte pas que  $f$  est un sous-agrégat admissible de  $C$ .

**PROPOSITION 3.** — *Si  $C$  (resp.  $C'$ ) admet un sous-agrégat admissible  $f$  (resp.  $f'$ ) et si  $f'.f$  est défini, alors  $f'.f$  est un sous-agrégat admissible de la classe  $C'.C$  des composés  $g'.g$ , où  $g \in C$  et  $g' \in C'$ .*

*Démonstration.* — Soient

$$x \in \alpha(f), \quad y \in \check{f}(\check{x}) \quad \text{et} \quad y' \in \check{f}'(\check{y}) = (\check{f}'.\check{f})(\check{x}).$$

Il existe  $g \in C$  tel que  $x \in \alpha(g)$  et  $y \in \beta(g)$ ; il existe  $g' \in C'$  tel que  $y \in \alpha(g')$  et  $y' \in \beta(g')$ . Soit  $U$  un ouvert distingué dans  $\alpha(g')$  et dans  $\beta(g)$ , contenant  $y$ ; on a :  $(g'U).(Ug) \in C'.C$ ,  $x \in \alpha(Ug)$  et  $y' \in \beta(g'U)$ , donc  $f'.f$  est un sous-agrégat admissible de  $C'.C$ .

**DÉFINITION 4.** — *On dira que  $C$  est une sous-classe complète de  $(H', <)$  si  $C$  est une sous-classe de  $H'$  saturée par induction et telle que  $f \in C$  si  $f$  est un sous-agrégat admissible d'une sous-classe  $C'$  de  $C$ . L'intersection  $\bar{A}$  des sous-classes complètes contenant une partie  $A$  de  $H'$  sera appelée sous-classe complète engendrée par  $A$ .*

**PROPOSITION 4.** — *Si  $C$  est une sous-classe de  $H'$  saturée par induction, la sous-classe complète engendrée par  $C$  est la classe  $\bar{C}$  des sous-agrégats admissibles des sous-classes de  $C$ .*

*Démonstration.* — Il suffit de montrer que  $\bar{C}$  est saturée par induction. Soient  $f \in \bar{C}$ ,  $f = \bigcup^f C'$  et  $f' < f$ . Soit  $C''$  la classe des  $g' \in C'$  tels que  $g' < f'$ . Soient  $x \in \alpha(f')$  et  $y \in \check{f}'(\check{x})$ . Comme  $y \in \check{f}(\check{x})$ , il existe  $g \in C$  tel que  $x \in \alpha(g)$  et  $y \in \beta(g)$ . Soit  $U$  un ouvert distingué dans  $\alpha(g)$  et dans  $\alpha(f')$  et soit  $x \in U$ ; on a  $y \in \beta(gU)$  et  $y \in \beta(f'U)$ . Soit  $U'$  un ouvert contenant  $y$  et distingué dans  $\beta(gU)$  ainsi que dans  $\beta(f'U)$ ; les éléments  $U'(gU)$  et  $U'(f'U)$  sont égaux, car ils sont majorés par  $f$ , ont même unité à droite  $U_1$  et même unité à gauche  $U'$ . Il en résulte  $U'(gU) \in C''$ , donc  $f'$  est un sous-agrégat admissible de  $C''$  et  $f' \in \bar{C}$ .

DÉFINITION 5. — On appelle atlas complet saturé de  $H'$  un atlas  $A$  de  $H'$  tel que  $A$  soit une sous-classe complète de  $(H', <)$ .

Soit  $\bar{H}'$  la classe des atlas complets saturés de  $H'$ . Si  $A \in \bar{H}'$ , nous désignerons par  $\bar{a}(A)$  (resp.  $\bar{b}(A)$ ) la classe complète engendrée par  $a(A)$  (resp. par  $b(A)$ ).

PROPOSITION 5. — Soit  $A \in \bar{H}'$ ; alors  $\bar{a}(A)$  et  $\bar{b}(A)$  sont des groupoïdes tels que  $A.\bar{a}(A) = \bar{b}(A).A = A$ .

En effet, les conditions  $\bar{h} \in \bar{b}(A)$ ,  $\bar{h}' \in \bar{b}(A)$  et  $\alpha(\bar{h}') = \beta(\bar{h})$  entraînent  $\bar{h}'.\bar{h} \in \bar{b}(A)$ , en vertu des propositions 3 et 4. Donc  $\bar{b}(A)$  est un groupoïde. Si  $f \in A$  et  $\beta(f) = \alpha(\bar{h})$ ,  $\bar{h}.f$  est le sous-agrégat admissible de la classe des composés  $h''.f''$ , où  $f'' < f$ ,  $h'' < \bar{h}$  et  $h'' \in b(A)$ . Comme  $h''.f'' \in A$ , on trouve  $\bar{h}.f \in A$  et  $\bar{b}(A).A \subset A$ . D'où  $\bar{b}(A).A = A$  et de même  $A.\bar{a}(A) = A$ .

PROPOSITION 6. — Si  $A$  est une sous-classe de  $H'$  saturée par induction et si  $A.A^{-1}.A = A$ , la sous-classe complète  $\bar{A}$  engendrée par  $A$  est un atlas complet saturé tel que  $\bar{a}(\bar{A}) = A^{-1}.A$  et  $\bar{b}(\bar{A}) = A.A^{-1}$ .

Démonstration. — Soient  $\bar{f} \in \bar{A}$ ,  $\bar{f}' \in \bar{A}$  et  $\bar{f}'' \in \bar{A}$ . Si

$$g = \bar{f}''.\bar{f}'^{-1}.\bar{f}$$

est défini,  $g$  est le sous-agrégat admissible de la classe des composés  $f''.f'^{-1}.f \in A.A^{-1}.A = A$  tels que  $f < \bar{f}$ ,  $f' < \bar{f}'$  et  $f'' < \bar{f}''$ , en vertu de la proposition 3. Donc  $\bar{A}.(A^{-1}.\bar{A}) \subset \bar{A}$ . Comme  $\bar{A}$  est saturé par induction, il en résulte  $\bar{A}(\bar{A}^{-1}\bar{A}) \subset \bar{A}$  et par suite  $\bar{A}$  est un atlas complet saturé. De même la sous-classe complète engendrée par  $A.A^{-1}$  est identique à la sous-classe complète  $\bar{b}(\bar{A})$  engendrée par  $\bar{A}.\bar{A}^{-1}$ .

THÉORÈME 1. —  $(\bar{H}', <)$  est un groupoïde quasi-inductif régulier, la loi de composition étant définie par :

$(A', A) \rightarrow A' \odot A = A'.A$  si, et seulement si,  $\bar{a}(A') = \bar{b}(A)$  et la relation d'ordre par :

$$A' < A \quad \text{si, et seulement si,} \quad A' = \beta(A').A.\alpha(A').$$

$(\bar{H}', <)$  est un groupoïde quasi-inductif quotient [5] de  $(\bar{H}_f, <)$  par la relation d'équivalence  $\rho$ :

$$F' \sim F \quad \text{si, et seulement si,} \quad \bar{F}' = \bar{F}.$$

1° Tout élément de  $\bar{H}'$  est un sous-agrégat d'éléments de  $H'$ .

*Démonstration.* — Si  $A \in \bar{H}'$ , on a évidemment  $A^{-1} \in \bar{H}'$ . Supposons  $A' \in \bar{H}'$  et  $\bar{a}(A') = \bar{b}(A)$ . La classe  $A'.A$  est saturée par induction, car  $(H', <)$  est régulier. De plus :

$$A'.A.(A'.A)^{-1}.A'.A = A'.A.A^{-1}.A'^{-1}.A'.A \subset A'.\bar{b}(A).\bar{a}(A').A$$

et

$$A'.\bar{b}(A).\bar{a}(A').A = A'.\bar{a}(A').A = A'.A.$$

La proposition 6 entraîne  $A' \odot A \in \bar{H}'$  et

$$\begin{aligned} \bar{a}(A' \odot A) &= \overline{(A'.A)^{-1}.(A'.A)} = \overline{A^{-1}.\bar{a}(A').A} \\ &= A^{-1}.\bar{b}(A).A = \overline{A^{-1}.A} = \bar{a}(A). \end{aligned}$$

Si  $A_1 = A'' \odot (A' \odot A)$  est défini,  $A_1$  est la sous-classe complète engendrée par  $A''.A'.A$ , en vertu de la proposition 3, donc  $A_1 = (A'' \odot A') \odot A$ , et la loi de composition  $\odot$  est associative. Par suite  $\bar{H}'$  est un groupoïde. Soit  $\tilde{\rho}$  l'application:  $F \rightarrow \bar{F}$  de  $\bar{H}_f$  sur  $\bar{H}'$ . On a :

$$\tilde{\rho}(a(F)) = \bar{a}(F) = \bar{a}(\bar{F}), \quad \text{pour tout } F \in \bar{H}_f,$$

$$\text{et} \quad \tilde{\rho}(F'.F) = \bar{F}'.\bar{F} = \bar{F}' \odot \bar{F} = \tilde{\rho}(F') \odot \tilde{\rho}(F),$$

si  $F' \in \bar{H}_f$  et  $a(F') = b(F)$ . Donc  $\tilde{\rho}$  définit un foncteur de  $\bar{H}_f$  sur  $\bar{H}'$  et, en vertu de la proposition 23 [5],  $\bar{H}'$  est un groupoïde quotient de  $\bar{H}_f$ .

— D'après le corollaire du théorème 3-2, la relation d'ordre indiquée sur  $\bar{H}'$  est celle induite par  $(\bar{H}_f, <)$ . Une famille  $(A_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\bar{H}'$ , majorée par  $A \in \bar{H}'$ , admet pour sous-agrégat dans  $(\bar{H}', <)$  l'atlas  $\bar{A}_I$  où  $A_I$  est le  $A$ -agrégat de  $(A_i)_{i \in I}$  dans  $\bar{H}_f$ . Donc  $(\bar{H}', <)$  est une classe sous-inductive. De plus, on a  $((\bar{H}', <), \tilde{\rho}, (\bar{H}_f, <)) \in \mathcal{J}^U$ .

— Soient  $A \in \bar{H}'$  et  $A' \in \bar{H}'$ . Supposons  $A' < A$ . Comme  $a(A') = \alpha(A').a(A).\alpha(A')$ , on obtient, en utilisant la proposition 3 :

$$\bar{a}(A') = \overline{\alpha(A').a(A).\alpha(A')} = \alpha(\bar{a}(A')).\bar{a}(A).\alpha(\bar{a}(A')),$$

c'est-à-dire  $\bar{a}(A') < \bar{a}(A)$ . De même  $\bar{b}(A') < \bar{b}(A)$ . Supposons de plus  $A_1 \in \bar{H}'$ ,  $A'_1 \in \bar{H}'$ ,  $A'_1 < A_1$ ,  $\bar{a}(A_1) = \bar{b}(A)$  et  $\bar{a}(A'_1) = \bar{b}(A')$ . Puisque  $A'_1 \odot A'$  est la sous-classe complète engendrée par :

$$(\beta(A'_1) \cdot A_1 \cdot \alpha(A'_1)) \cdot (\beta(A') \cdot A \cdot \alpha(A')),$$

elle est contenue dans la sous-classe complète engendrée par

$$C = \beta(A'_1) \cdot A_1 \cdot A \cdot \alpha(A').$$

Soient  $f_1 \in A_1$ ,  $f \in A$  et  $f_1 \cdot f \in C$ . Il existe  $f' \in A'$  tel que

$$\alpha(f') = \alpha(f)$$

et on a :  $g' = f \cdot f'^{-1} \in \bar{b}(A)$ . Il existe une sous-classe E de  $\alpha(A'_1)$  dont  $\alpha(g')$  est un sous-agrégat admissible, car

$$\alpha(g') \in \beta(A') \subset \bar{a}(A'_1).$$

Pour tout  $e \in E$ , on a  $f_1 g' e \in A'_1$ , puisque  $A'_1$  est plein dans  $A_1$ , de sorte que  $f'_1 = f_1 \cdot g'$  est un sous-agrégat admissible de la classe  $f_1 g' E$  et appartient à  $A'_1$ . Il en résulte :

$$f_1 \cdot f = (f'_1 \cdot g'^{-1}) \cdot (g' \cdot f') = f'_1 \cdot f' \in A'_1 \cdot A'.$$

Donc  $A'_1 \odot A' = \bar{C}$  et  $A'_1 \odot A' < A_1 \odot A$ . Ceci montre que  $(\bar{H}', <)$  est ordonné.

— Supposons  $G < \bar{a}(A)$  et  $G \in \bar{H}'_0$ . On a  $A \cdot G \in \bar{H}'_1$ , et  $A \cdot G$  est le pseudoproduit de  $A$  et de  $G$  dans  $\bar{H}'_1$ . On en déduit  $\overline{A \cdot G} \in \bar{H}'$  et par suite  $\overline{A \cdot G}$  est le pseudoproduit  $AG$  dans  $(\bar{H}', <)$ ; on a :

$$\overline{\overline{A \cdot G}} = \overline{G^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \cdot G} = G.$$

De même si  $G' < \bar{b}(A)$  et  $G' \in \bar{H}'_0$ , on trouve  $G'A = \overline{G' \cdot A}$  et  $\bar{b}(G'A) = G'$ . Par conséquent  $(\bar{H}', <)$  est un groupoïde ordonné régulier et, à l'aide de ce qui précède et du corollaire 2 de la proposition 12-2, on voit que  $(\bar{H}', <)$  est un groupoïde quasi-inductif régulier.  $H'$  s'identifie au sous-groupoïde de  $\bar{H}'$  formé des  $f^>$ , où  $f \in H'$ . Tout  $A \in \bar{H}'$  est le  $A$ -agrégat de la classe des  $f^>$ ,  $f \in A$ . 19

**DÉFINITION 6.** — Avec les notations du théorème 1, on appellera  $(\bar{H}', <)$  le groupoïde d'holonomie complet.

*Remarque.* —  $(\bar{H}', <)$  n'est pas un groupoïde sous-inductif, car les relations  $A' < A$  et  $A'' < A$  n'entraînent pas :

$$\bar{b}(A' \cap A'') = \bar{b}(A') \cap \bar{b}(A'').$$

#### 4. — 0-cocycle au-dessus d'une catégorie.

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Soit  $\Sigma$  une classe. Nous supposons que  $\mathcal{C}$  est une catégorie d'opérateurs [1 a] sur  $\Sigma$  relativement à la loi de composition  $K$ . Soit  $\eta = [\mathcal{C}, \pi, \Sigma]$  l'espèce de structures correspondante, où  $\pi$  est l'application :  $z \rightarrow e$  si  $K(z, e)$  est défini, de  $\Sigma$  dans  $\mathcal{C}_0$ . Si  $K(f, z)$  est défini, nous poserons :

$$K(f, z) = fz.$$

Soit  $\bar{\Sigma}$  la catégorie des hypermorphismes associée à  $\eta$ , dont les éléments [1 a] sont les couples  $(f, z) \in \mathcal{C} \times \Sigma$  tels que  $K(f, z)$  soit défini, la loi de composition étant définie par :

$$(f', z') \cdot (f, z) = (f' \cdot f, z) \quad \text{si, et seulement si,} \quad z' = fz.$$

Nous identifions la classe des unités de  $\bar{\Sigma}$  à  $\Sigma$ , en identifiant  
1  $(e, z)$  avec  $z$ ; soit  $\bar{\pi}$  le foncteur de  $\bar{\Sigma}$  sur  $\mathcal{C}$  défini par :  $(f, z) \rightarrow f$ .

**DÉFINITION 1.** — On appelle 0-cocycle sur une sous-catégorie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{C}$  un foncteur  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B})$  tel que  $\bar{\pi}\Phi(f) = f$  pour tout  $f \in \mathcal{B}$ . Si  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B})$  est un 0-cocycle, la sous-classe  $\Phi(\mathcal{B}_0)$  de  $\Sigma$  est appelée une  $\eta$ -section sur  $\mathcal{B}$ .

Si  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B})$  est un 0-cocycle, alors  $\Phi(\mathcal{B})$  est une sous-catégorie de  $\bar{\Sigma}$ .

**PROPOSITION 1.** — Pour qu'une sous-classe  $\bar{\mathcal{B}}_0$  de  $\Sigma$  soit une  $\eta$ -section sur  $\mathcal{B}$ , il faut et il suffit que la restriction  $\pi/\bar{\mathcal{B}}_0$  de  $\pi$  à  $\bar{\mathcal{B}}_0$  soit une bijection sur  $\mathcal{B}_0$  et que  $[\mathcal{B}, \pi/\bar{\mathcal{B}}_0, \bar{\mathcal{B}}_0]$  soit une sous-espèce de structures [1 a] de  $[\mathcal{C}, \pi, \Sigma]$ .

*Démonstration.* — Pour que  $[\mathcal{B}, \pi/\bar{\mathcal{B}}_0, \bar{\mathcal{B}}_0]$  soit une sous-espèce de structures de  $[\mathcal{C}, \pi, \Sigma]$ , il faut et il suffit que, pour tout  $f \in \mathcal{B}$ , on ait :

$$\begin{array}{ll} s' = fs, & \text{si } s \in \bar{\mathcal{B}}_0, \quad s' \in \bar{\mathcal{B}}_0, \\ \pi(s) = \alpha(f) & \text{et } \pi(s') = \beta(f). \end{array}$$



Si  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B})$  est un 0-cocycle, on a :

$$\Phi(f) = (f, s), \quad \text{où} \quad s = \Phi(\alpha(f))$$

et

$$s' = \Phi(\beta(f)) = \beta(\Phi(f)) = fs.$$

— Inversement si les conditions de la proposition sont vérifiées, alors l'application  $\Phi : f \rightarrow (f, s)$ , où  $f \in \mathfrak{B}$ ,  $s \in \bar{\mathfrak{B}}_0$  et  $\pi(s) = \alpha(f)$ , définit un 0-cocycle  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B})$ .

Nous désignerons par  $Z^0(\Sigma)$  la classe des 0-cocycles sur les sous-catégories de  $\mathcal{C}$ . En particulier,  $Z^0(\Sigma)$  contient la classe des 0-cocycles  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{C})$ . Soit  $Z_g^0(\Sigma)$  la sous-classe des 0-cocycles  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B})$  tels que  $\mathfrak{B}$  soit un sous-groupeïde de  $\mathcal{C}$ .

**THÉORÈME 1.** — *La sous-catégorie pleine  $\bar{Z}^0(\mathcal{C})$  de  $\bar{\mathfrak{A}}(\mathcal{C})$  formée des atlas  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$  tels qu'il existe un 0-cocycle sur  $\mathfrak{B}$  opère sur la classe  $Z_g^0(\Sigma)$  relativement à la loi de composition :*

$$((\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}_1), (\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B})) \rightarrow (\bar{\Sigma}, \Phi', \mathfrak{B}')$$

si, et seulement si,

$$\begin{array}{l} \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}, \quad \text{où} \quad \Phi'(g') = (g', fs) \\ \text{si} \quad f \in F, s = \Phi(\alpha(f)) \quad \text{et} \quad \beta(f) = \alpha(g'). \end{array}$$

La catégorie des hypermorphisms  $\bar{Z}^0(\mathcal{C}) * Z_g^0(\Sigma)$  est équivalente à une sous-catégorie de  $\bar{\mathfrak{A}}(\bar{\Sigma})$ .

1+

*Démonstration.* — Soit  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B}) \in Z_g^0(\Sigma)$  et  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) \in \bar{Z}^0(\mathcal{C})$ . Soit  $g' \in \mathfrak{B}'$ ; il existe  $f \in F$  tel que  $\beta(f) = \alpha(g')$  et le composé  $fs$ , où  $s = \Phi(\alpha(f))$ , est défini. Posons :  $\Phi'(g') = (g', fs)$ . Soit  $f' \in F$  tel que  $\beta(f') = \alpha(g')$  et  $s_1 = \Phi(\alpha(f'))$ . Il existe  $g \in \mathfrak{B}$  tel que  $f = f' \cdot g$ . Comme  $\Phi$  définit un foncteur, on a :  $s_1 = gs$ . Il en résulte :

$$f's_1 = f'(gs) = (f' \cdot g)s = fs;$$

par suite  $\Phi'(g')$  ne dépend pas du choix de  $f \in F$ . Soit aussi  $g'' \in \mathfrak{B}'$  tel que  $\alpha(g'') = \beta(g')$ . On trouve :

$$\Phi'(g'') = (g'', (g' \cdot f)s),$$

car  $g' \cdot f \in F$ , et :

$$\Phi'(g'' \cdot g') = (g'' \cdot g', fs) = \Phi'(g'') \cdot \Phi'(g').$$

Donc  $(\bar{\Sigma}, \Phi', \mathfrak{B}')$  est un 0-cocycle.

*Colloque Grenoble.*

— Supposons de plus  $(\mathfrak{B}'', F', \mathfrak{B}') \in \bar{Z}^0(\mathcal{C})$ ; on a :

$$(\mathfrak{B}'', F', F, \mathfrak{B}) \in \bar{Z}^0(\mathcal{C}),$$

de sorte que, pour tout  $(\bar{\Sigma}', \Phi, \mathfrak{B}') \in Z_g^0(\Sigma)$ , le composé :

$$(\bar{\Sigma}', \Phi'', \mathfrak{B}'') = (\mathfrak{B}'', F', F, \mathfrak{B})(\bar{\Sigma}', \Phi, \mathfrak{B}')$$

est défini. Puisque :

$$(f' \cdot f)s = f'(fs), \quad \text{si } f \in F, \quad f' \in F' \quad \text{et } s \in \Sigma,$$

on obtient :

$$(\bar{\Sigma}', \Phi'', \mathfrak{B}'') = (\mathfrak{B}'', F', \mathfrak{B}')(\bar{\Sigma}', \Phi', \mathfrak{B}').$$

On en déduit que  $\bar{Z}^0(\mathcal{C})$  est une catégorie d'opérateurs sur  $Z_g^0(\Sigma)$ .

— Soit  $((\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}), (\bar{\Sigma}', \Phi, \mathfrak{B}')) \in \bar{Z}^0(\mathcal{C}) * Z_g^0(\Sigma)$  un couple composable dont le composé est  $(\bar{\Sigma}', \Phi', \mathfrak{B}')$ . Posons  $\bar{\mathfrak{B}} = \Phi(\mathfrak{B})$  et  $\bar{\mathfrak{B}}' = \Phi'(\mathfrak{B}')$ . Soit  $\bar{F}$  la classe des couples  $(f, s) \in \bar{\Sigma}$ , où  $f \in F$  et  $s \in \bar{\mathfrak{B}}_0$ . Montrons que  $(\bar{\mathfrak{B}}', \bar{F}, \bar{\mathfrak{B}}) \in \bar{\mathfrak{B}}(\bar{\Sigma}')$ . En effet,  $\bar{\mathfrak{B}}$  et  $\bar{\mathfrak{B}}'$  sont des sous-groupoïdes de  $\bar{\Sigma}'$  et on a :

$$\alpha(\bar{F}) = \bar{\mathfrak{B}}_0 \quad \text{et} \quad \beta(\bar{F}) = \bar{\mathfrak{B}}'_0.$$

Soit  $(f, s) \in \bar{F}$  et  $(g', fs) \in \bar{\mathfrak{B}}'$ . On a :

$$(g', fs) \cdot (f, s) = (g' \cdot f, s) \in \bar{F}, \quad \text{car } g' \cdot f \in F;$$

si  $(g, s_1) \in \bar{\mathfrak{B}}$  et  $gs_1 = s$ , on obtient de même :

$$(f, s) \cdot (g, s_1) = (f \cdot g, s_1) \in \bar{F}.$$

Soient  $(f, s) \in \bar{F}$  et  $(f', s) \in \bar{F}$ . Il existe  $g' \in \mathfrak{B}'$  tel que  $f' = g' \cdot f$  et par suite :

$$(f', s) = (g', fs) \cdot (f, s), \quad \text{où } (g', fs) = \Phi'(g') \in \bar{\mathfrak{B}}'.$$

Enfin, si  $(f', s_1) \in \bar{F}$  et  $f's_1 = fs$ , il existe  $g \in \mathfrak{B}$  tel que  $f = f' \cdot g$  et il s'ensuit :

$$(f, s) = (f', s_1) \cdot (g, s), \quad \text{où } (g, s) = \Phi(g) \in \bar{\mathfrak{B}}.$$

Donc  $(\bar{\mathfrak{B}}', \bar{F}, \bar{\mathfrak{B}}) \in \bar{\mathfrak{B}}(\bar{\Sigma}')$ . Soit  $\mu$  l'application :

$$h = ((\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}), (\bar{\Sigma}', \Phi, \mathfrak{B}')) \rightarrow (\bar{\mathfrak{B}}', \bar{F}, \bar{\mathfrak{B}})$$

de  $\bar{Z}^0(\mathcal{C}\cdot) * Z_g^0(\Sigma)$  dans  $\bar{\mathcal{A}}(\bar{\Sigma}\cdot)$ . Si on a aussi :

$$h' = ((\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}'), (\bar{\Sigma}\cdot, \Phi', \mathcal{B}'\cdot)) \in \bar{Z}^0(\mathcal{C}\cdot) * Z_g^0(\Sigma),$$

on trouve :

$$\mu(h'. h) = (\bar{\mathcal{B}}'', \bar{F}', \bar{F}, \bar{\mathcal{B}}) = \mu(h') \cdot \mu(h),$$

car la restriction de  $\bar{\pi}$  à  $\bar{F}$  et à  $\bar{F}'$  est une bijection sur  $F$  et  $F'$  respectivement. Par conséquent  $\mu$  définit un foncteur de  $\bar{Z}^0(\mathcal{C}\cdot) * Z_g^0(\Sigma)$  sur la sous-catégorie pleine de  $\bar{\mathcal{A}}(\bar{\Sigma}\cdot)$  ayant pour unités les groupoïdes  $\bar{\mathcal{B}}$  tels que la restriction de  $\bar{\pi}$  à  $\bar{\mathcal{B}}$  soit une bijection sur  $\bar{\pi}(\bar{\mathcal{B}})$ .

Nous désignerons par  $\bar{Z}^0(\eta)$  l'espèce de structures  $(\bar{Z}^0(\mathcal{C}\cdot), Z^0(\pi), Z_g^0(\Sigma))$  où  $Z^0(\pi)$  est l'application :

$$(\bar{\Sigma}\cdot, \Phi, \mathcal{B}\cdot) \rightarrow \mathcal{B}.$$

**COROLLAIRE.** —  $\bar{Z}^0(\eta)$  admet pour sous-espèce de structures l'espèce de structures  $(Z^0(\mathcal{C}\cdot), Z^0(\pi), Z_g^0(\Sigma))$ , où  $Z^0(\mathcal{C}\cdot)$  désigne la sous-catégorie de  $\bar{Z}^0(\mathcal{C}\cdot)$  dont les éléments sont les atlas de  $\mathcal{C}\cdot$  ; la catégorie des hypermorphisms correspondante est équivalente à une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}(\bar{\Sigma}\cdot)$ . 1

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer que, si

$$(\bar{\mathcal{B}}', \bar{F}, \bar{\mathcal{B}}) \in \mu(Z^0(\mathcal{C}\cdot) * Z_g^0(\Sigma))$$

alors on a :  $\bar{\mathcal{B}} = a(\bar{F})$  et  $\bar{\mathcal{B}}' = b(\bar{F})$ , le reste du corollaire résultant facilement de ce qui précède. Soit donc  $\bar{g} \in \bar{\Sigma}$  tel que :

$$\bar{f} \cdot \bar{g} \in \bar{F} \quad \text{pour tout } \bar{f} \in \bar{F}.$$

Soit  $g = \bar{\pi}(\bar{g})$ . Si  $f \in F$  et  $\alpha(f) = \beta(g)$ , on a, par construction :

$$(f, \beta(\bar{g})) \in \bar{F},$$

d'où  $\bar{f}' = (f, \beta(\bar{g})) \cdot \bar{g} \in \bar{F}$  et  $\bar{\pi}(\bar{f}') \in F$ .

Par suite  $\bar{\pi}(\bar{g}) \in a(F)$  et  $\bar{g} \in \bar{\mathcal{B}}$ . Il en résulte  $\bar{\mathcal{B}} = a(\bar{F})$ . De même  $\bar{\mathcal{B}}' = b(\bar{F})$ .

*Application.* — Soit  $\mathcal{S}$  la classe des parties  $A$  de  $\Sigma$  telles que  $A \subset \bar{\pi}^{\sharp}(e)$ , où  $e \in \mathcal{C}_0$ . La catégorie  $\mathcal{C}\cdot$  opère sur  $\mathcal{S}$  relativement à la loi de composition :

$$(f, A) \rightarrow fA = \text{classe des } fa, \quad \text{où } a \in A,$$

si, et seulement si,

$$\pi(A) = \{\alpha(f)\}.$$

Soit  $H$  l'espèce de structures  $[\mathcal{C}, \pi, \mathcal{F}]$  correspondante,  $\pi$  désignant aussi la projection canonique de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{C}_0$ :  $A \rightarrow e$ , si  $A \in \pi^{-1}(e)$ . Soit  $\bar{\mathcal{F}}$  la catégorie des hypermorphisms associée à  $H$ .

**PROPOSITION 2.** — *Il existe une bijection canonique  $\chi$  de  $Z_g^0(\mathcal{F})$  sur la classe des sous-espèces de structures  $[\mathcal{B}, \pi', S]$  de  $\eta$  telles que  $\mathcal{B}$  soit un sous-groupeïde de  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(\bar{\mathcal{F}}, \Phi, \mathcal{B})$  un 0-cocycle de  $H$  et soit  $S = \bigcup_{e \in \mathcal{C}_0} \Phi(e)$ . Supposons  $z \in S$ ,  $g \in \mathcal{B}$  et  $\pi(z) = \alpha(g)$ . Comme  $z \in \Phi(\alpha(g))$  et que  $\Phi$  définit un foncteur de  $\mathcal{B}$  vers  $\bar{\mathcal{F}}$ , on a  $gz \in \Phi(\beta(g)) \in S$ . Donc  $[\mathcal{B}, \pi', S]$  est une sous-espèce de structures de  $\eta$ , en désignant par  $\pi'$  la restriction de  $\pi$  à  $S$ . Inversement, soit  $[\mathcal{B}, \pi', S]$  une sous-espèce de structures de  $\eta$  sur le sous-groupeïde  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{C}$ . Pour tout  $e \in \mathcal{C}_0$ , posons :

$$\Phi(e) = S \cap \pi^{-1}(e).$$

Soit  $g \in \mathcal{B}$ ,  $e = \alpha(g)$  et  $e' = \beta(g)$ . Si  $z \in \Phi(e)$ , on a  $gz \in S$ , d'où  $gz \in \Phi(e')$ . Si  $z' \in \Phi(e')$ , on a de même  $g^{-1}z' \in \Phi(e)$  et  $z' = g(g^{-1}z') \in g\Phi(e)$ . Par suite  $\Phi(e') = g\Phi(e)$  et  $\Phi$  définit un 0-cocycle.

**COROLLAIRE.** — *Soit  $E$  la classe des sous-espèces de structures  $[\mathcal{B}, \pi', S]$  de  $\eta$  telles que  $\mathcal{B}$  soit un sous-groupeïde de  $\mathcal{C}$ . La catégorie  $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  est une catégorie d'opérateurs sur  $E$ , ainsi que la catégorie  $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ .*

*Démonstration.* — Pour tout sous-groupeïde  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{C}$ , le triplet  $[\mathcal{B}, \pi', \pi^{-1}(\mathcal{B})]$  est une sous-espèce de structures de  $\eta$ , de sorte que, en vertu du théorème 1,  $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  est la catégorie d'opérateurs sur  $Z_g^0(\mathcal{F})$  de l'espèce de structures  $\bar{Z}^0(H)$ . Comme  $\chi$  est une bijection de  $Z_g^0(\mathcal{F})$  sur  $E$ , la catégorie  $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  opère aussi sur  $E$ , la loi de composition étant définie par :

$$2+ \quad ((\mathcal{B}', F, \mathcal{B}_1), [\mathcal{B}, \pi', S]) \rightarrow [\mathcal{B}', \pi'', S'],$$

si, et seulement si,  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ , en désignant par  $S'$  la classe des  $fz$

tels que  $z \in S$ ,  $f \in F$  et  $(f, z) \in \bar{\Sigma}$ . En utilisant le corollaire du théorème 1, on voit de même que  $\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot)$  opère sur  $E$ .

Rappelons [3] qu'on appelle  $\tilde{\Omega}$ -espèce de structures un triplet  $[(\mathcal{C}^\cdot, <), \pi, (\Sigma, <)]$  vérifiant les conditions suivantes :

1)  $\mathcal{C}^\cdot$  est une catégorie d'opérateurs sur  $\Sigma$  relativement à  $K$  et  $[(\mathcal{C}^\cdot, \pi, \Sigma)]$  est l'espèce de structures correspondante.

2)  $(\mathcal{C}^\cdot, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée et

$$((\mathcal{C}_0^\cdot, <), \pi, (\Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}.$$

3) On a :  $\tilde{K} = ((\Sigma, <), K, (\mathcal{C}^\cdot * \Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}$ , où  $\mathcal{C}^\cdot * \Sigma$  est la catégorie des hypermorphisms associée à  $[(\mathcal{C}^\cdot, \pi, \Sigma)]$ , la relation d'ordre étant la relation induite par  $(\mathcal{C}^\cdot, <) \times (\Sigma, <)$ .

**DÉFINITION 2.** — On dira que  $\tilde{\eta} = ((\mathcal{C}^\cdot, <), \pi, (\Sigma, <))$  est une espèce de structures ordonnée si  $\tilde{\eta}$  est une  $\tilde{\Omega}$ -espèce de structures, si  $(\mathcal{C}^\cdot, <)$  est une catégorie ordonnée et si on a  $\tilde{\eta}_0 = ((\mathcal{C}_0^\cdot, <), \pi, (\Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}'$ . On dira que  $\tilde{\eta}$  est une espèce de structures quasi-inductive (resp. sous-inductive) si  $\tilde{\eta}$  est une espèce de structures ordonnée, si  $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{J}^U$  (resp.  $\in \tilde{J}^s$ ) et si  $(\mathcal{C}^\cdot, <)$  est une catégorie quasi-inductive (resp. sous-inductive).

**PROPOSITION 3.** — Si  $\tilde{\eta}$  est une espèce de structures quasi-inductive (resp. sous-inductive) on a :  $\tilde{K} \in \tilde{J}^U$  (resp.  $\in \tilde{J}^s$ ).

*Démonstration.* — Soient  $(f_i, z_i) \in \mathcal{C}^\cdot * \Sigma$  et  $(f, z) \in \mathcal{C}^\cdot * \Sigma$ . Supposons  $z_i < z$  et  $f_i < f$  pour tout  $i \in I$ . Comme  $(\mathcal{C}^\cdot, <)$  est une catégorie quasi-inductive il existe  $\bigcup_f f_i$ ; comme  $(\Sigma, <)$  est une classe sous-inductive, il existe  $\bigcup_z z_i$  et on a, puisque  $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{J}^U$  :

$$\alpha\left(\bigcup_f f_i\right) = \bigcup_e \alpha(f_i) = \bigcup_e \pi(z_i) = \pi\left(\bigcup_z z_i\right), \quad \text{où } e = \alpha(f);$$

donc  $g = \left(\bigcup_f f_i\right)\left(\bigcup_z z_i\right)$  est défini. Les relations :

$$\begin{aligned} \pi(g) &= \bigcup_{e'} \beta(f_i) = \beta\left(\bigcup_f f_i\right), \quad \text{où } e' = \beta(f), \\ \pi\left(\bigcup_{fz} f_i z_i\right) &= \bigcup_{e'} \pi(f_i z_i) = \bigcup_{e'} \beta(f_i) = \pi(g) \end{aligned}$$

et  $f_i z_i < g$  pour tout  $i \in I$  entraînent  $\bigcup^{fz} f_i z_i < g$ , d'où, en utilisant la relation  $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{\Omega}'$ ,  $\bigcup^{fz} f_i z_i = g$ . Donc  $\tilde{K} \in \mathfrak{J}^U$ .

— Supposons que  $\tilde{\eta}$  soit une espèce de structures sous-inductive. Supposons  $(f', z') \in \mathcal{C} \cdot * \Sigma$ ,  $(f'', z'') \in \mathcal{C} \cdot * \Sigma$ ,  $(f, z) \in \mathcal{C} \cdot * \Sigma$ ,  $f' < f$ ,  $f'' < f$ ,  $z' < z$  et  $z'' < z$ . Puisque :

$$\alpha(f' \cap f'') = \alpha(f') \cap \alpha(f'') = \pi(z') \cap \pi(z'') = \pi(z' \cap z''),$$

on a  $(f' \cap f'', z' \cap z'') \in \mathcal{C} \cdot * \Sigma$ . De plus les relations :

$$\bar{z} = (f' \cap f'')(z' \cap z'') < f' z' \cap f'' z''$$

et

$$\pi(\bar{z}) = \beta(f' \cap f'') = \beta(f') \cap \beta(f'') = \pi(f' z' \cap f'' z'')$$

entraînent

$$\bar{z} = f' z' \cap f'' z'' \quad \text{et} \quad \tilde{K} \in \mathfrak{J}^s.$$

Cette proposition signifie que  $\tilde{\eta}$  est une espèce de structures quasi-inductive (resp. sous-inductive) si, et seulement si,  $\tilde{\eta}$  est une  $\mathfrak{J}^U$ - (resp.  $\mathfrak{J}^s$ -) espèce de structures, si  $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{\Omega}'$  et si  $(\mathcal{C}, <)$  est ordonnée.

**THÉORÈME 2.** — Si  $\tilde{\eta}$  est une espèce de structures ordonnée (resp. quasi-inductive, resp. sous-inductive), alors  $((\mathcal{C} \cdot * \Sigma) \cdot, <)$  est une catégorie ordonnée (resp. quasi-inductive, resp. sous-inductive) et on a :

$$((\mathcal{C}, <), \bar{\pi}, (\mathcal{C} \cdot * \Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}' \quad (\text{resp.} \in \mathfrak{J}^U, \text{ resp.} \in \mathfrak{J}^s),$$

où  $\bar{\pi}(f, z) = f$ .

*Démonstration.* — D'après un théorème de [3],  $((\mathcal{C} \cdot * \Sigma) \cdot, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée (resp.  $\mathfrak{J}^U$ -structurée, resp.  $\mathfrak{J}^s$ -structurée). Supposons  $(f, z) \in \mathcal{C} \cdot * \Sigma$ ,  $(f', z') \in \mathcal{C} \cdot * \Sigma$ ,  $f' < f$ ,  $z' < z$ ,  $\alpha(f, z) = z'$  et  $\beta(f, z) = \beta(f', z')$ . Ces conditions entraînent :

$$z = z', \quad \alpha(f) = \alpha(f'), \quad \beta(f) = \beta(f') \quad \text{et} \quad fz = f' z'.$$

Comme  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie ordonnée, il en résulte  $f = f'$ , d'où  $(f, z) = (f', z')$  et  $((\mathcal{C} \cdot * \Sigma) \cdot, <)$  est une catégorie ordonnée. D'après le même théorème de [3], on a aussi :

$$((\mathcal{C}, <), \bar{\pi}, (\mathcal{C} \cdot * \Sigma, <)) \in \tilde{\Omega} \quad (\text{resp.} \in \mathfrak{J}^U, \text{ resp.} \in \mathfrak{J}^s).$$

Si  $(f', z') < (f, z)$  et  $\bar{\pi}(f', z') = \bar{\pi}(f, z)$ , on trouve :

$$f = f', \quad z' < z \quad \text{et} \quad \pi(z') = \pi(z), \quad \text{d'où} \quad z' = z$$

et

$$((\mathcal{C}, <), \bar{\pi}, (\mathcal{C} * \Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}'.$$

1

Soit  $\tilde{\eta} = [(\mathcal{C}, <), \pi, (\Sigma, <)]$  une espèce de structures ordonnée. Posons :  $\eta = [\mathcal{C}, \pi, \Sigma]$  et  $\bar{\Sigma} = (\mathcal{C} * \Sigma)$ . Désignons par  $\bar{\pi}$  la projection canonique :  $(f, z) \rightarrow f$  de  $\bar{\Sigma}$  sur  $\mathcal{C}$ . Soit  $Z^0(\eta)$  l'espèce de structures construite ci-dessus à partir de  $\eta$  (théorème 1).

**DÉFINITION 3.** — On appelle 0-cocycle ordonné au-dessus de  $(\mathcal{C}, <)$  un 0-cocycle  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B})$  tel que

$$((\bar{\Sigma}, <), \Phi, (\mathfrak{B}, <)) \in \tilde{\Omega}.$$

**PROPOSITION 4.** — Pour qu'un 0-cocycle  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B})$  soit ordonné, il faut et il suffit que les conditions :  $e \in \mathfrak{B}_0, e' \in \mathfrak{B}_0$  et  $e' < e$  entraînent  $\Phi(e') < \Phi(e)$ .

En effet, la condition est nécessaire. Si elle est vérifiée, soient  $g \in \mathfrak{B}, g' \in \mathfrak{B}$  et  $g' < g$ . On a :

$$\Phi(\alpha(g')) < \Phi(\alpha(g)), \quad \Phi(g) = (g, \Phi(\alpha(g)))$$

et

$$\Phi(g') = (g', \Phi(\alpha(g'))) < \Phi(g).$$

**PROPOSITION 5.** — Soit  $\tilde{\eta}$  une espèce de structures quasi-inductive (resp. sous-inductive). Si  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B})$  est un 0-cocycle ordonné et si  $(\mathfrak{B}, <)$  est une partie sous-inductive faible, on a :

$$\tilde{\Phi} = ((\bar{\Sigma}, <), \Phi, (\mathfrak{B}, <)) \in \mathcal{J}^U$$

(resp.  $\in \mathcal{J}^s$ ).

*Démonstration.* — Les conditions  $g_i \in \mathfrak{B}, g \in \mathfrak{B}$  et  $g_i < g$

pour tout  $i \in I$  entraînent  $g' = \bigcup^g g_i \in \mathfrak{B}$  et :

$$\Phi(g_i) < \Phi(g') < \Phi(g).$$

Comme  $(\bar{\Sigma}, <)$  est une classe sous-inductive, il existe :

$$\bigcup^{\Phi(g)} \Phi(g_i) = (h, s) \in \bar{\Sigma}$$

et on a :

$$\bar{\pi}(h, s) = h = \bar{\pi} \left( \bigcup^{\Phi(g)} \Phi(g_i) \right) = \bigcup^g \bar{\pi} \Phi(g_i) = g',$$

en vertu du théorème 2. Puisque :

$$(h, s) < \Phi(g') \quad \text{et} \quad \bar{\pi}(h, s) = \bar{\pi}(\Phi(g')) = g',$$

il résulte du théorème 2 :  $(h, s) = \Phi(g')$ . Donc  $\tilde{\Phi} \in \mathcal{J}^0$ .

— Supposons de plus  $\tilde{\eta}$  sous-inductive. Soient  $g \in \mathcal{B}$ ,  $g' \in \mathcal{B}$ ,  $g'' \in \mathcal{B}$ ,  $g' < g$  et  $g'' < g$ . On a  $g' \cap g'' \in \mathcal{B}$  et, les éléments  $\Phi(g')$  et  $\Phi(g'')$  étant majorés par  $\Phi(g)$ , il existe

$$\Phi(g') \cap \Phi(g'') = (h', s') \in \bar{\Sigma};$$

on a :  $\Phi(g' \cap g'') < (h', s')$ . D'après le théorème 2,

$$((\mathcal{C}, <), \bar{\pi}, (\bar{\Sigma}, <)) \in \mathcal{J}^s,$$

de sorte que l'on obtient :

$$h' = \bar{\pi}(h', s') = \bar{\pi} \Phi(g') \cap \bar{\pi} \Phi(g'') = g' \cap g'' = \bar{\pi} \Phi(g' \cap g'').$$

On en déduit  $(h', s') = \Phi(g' \cap g'')$  et  $\tilde{\Phi} \in \mathcal{J}^s$ .

Soit  $\tilde{Z}^0(\Sigma)$  la classe des 0-cocycles ordonnés  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B})$  tels que  $\mathcal{B}$  soit un sous-groupeïde de  $\mathcal{C}$  et que  $(\mathcal{B}, <)$  soit un groupeïde ordonné semi-régulier. Soit  $\tilde{Z}^0(\mathcal{C})$  la classe des atlas  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1)  $(\mathcal{B}, <)$  et  $(\mathcal{B}', <)$  sont des groupeïdes semi-réguliers.
- 2) Si  $f \in F$ ,  $e \in \mathcal{B}_0$  et  $e < \alpha(f)$ , il existe  $f' \in F$  tel que  $f' < f$  et  $\alpha(f') = e$ .
- 3) Si  $f \in F$ ,  $e' \in \mathcal{B}'_0$  et  $e' < \beta(f)$ , il existe  $f'' \in F$  tel que  $f'' < f$  et  $\beta(f'') = e'$ .
- 4) Il existe des 0-cocycles ordonnés  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B})$  et  $(\bar{\Sigma}, \Phi', \mathcal{B}')$ .

**THÉORÈME 3.** — Avec les hypothèses précédentes,  $\bar{Z}^0(\eta)$  admet pour sous-espèce de structures l'espèce de structures  $[\tilde{Z}^0(\mathcal{C}), \tilde{Z}^0(\pi), \tilde{Z}^0(\Sigma)]$ . De plus

$$\tilde{Z}^0(\tilde{\eta}) = [(\tilde{Z}^0(\mathcal{C}), <), \tilde{Z}^0(\pi), (\tilde{Z}^0(\Sigma), <)]$$

est une espèce de structures ordonnée, la relation d'ordre sur  $\tilde{Z}^0(\Sigma)$  étant définie par :  $(\bar{\Sigma}, \Phi', \mathcal{B}') < (\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B})$  si, et seule-



ment si,  $\mathcal{B}' < \mathcal{B}$  et si  $\Phi'$  est une restriction de  $\Phi$ . Les hypermorphisms correspondants s'identifient à des atlas de  $\bar{\Sigma}$  vérifiant les conditions 1, 2, 3.

*Démonstration.* — Montrons que  $\tilde{Z}^0(\mathcal{C}\cdot)$  est une sous-catégorie de  $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C}\cdot)$ . En effet, soient

$$(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \tilde{Z}^0(\mathcal{C}\cdot) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \tilde{Z}^0(\mathcal{C}\cdot).$$

Soient  $f \in F$ ,  $f' \in F'$ ,  $\alpha(f') = \beta(f)$  et  $e < \alpha(f)$ . Il existe  $f_1 \in F$  tel que  $f_1 < f$  et  $\alpha(f_1) = e$ ; comme on a

$$\beta(f_1) = e' \in \alpha(F') = \beta(F) \quad \text{et} \quad e' < \alpha(f'),$$

il existe  $f'_1 \in F'$  tel que  $f'_1 < f'$  et  $\alpha(f'_1) = e'$ . Il en résulte  $f'_1 \cdot f_1 \in F' \cdot F$ ,  $f'_1 \cdot f_1 < f' \cdot f$  et  $\alpha(f'_1 \cdot f_1) = e$ . De même si  $e'' < \beta(f')$ , il existe  $f'_2 \cdot f_2 \in F' \cdot F$  tel que  $f'_2 \cdot f_2 < f' \cdot f$  et

$$\beta(f'_2 \cdot f_2) = e''.$$

Donc  $(\mathcal{B}'', F' \cdot F, \mathcal{B})$  appartient à  $\tilde{Z}^0(\mathcal{C}\cdot)$  et  $\tilde{Z}^0(\mathcal{C}\cdot)$  est une sous-catégorie de  $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C}\cdot)$ . De plus  $(\tilde{Z}^0(\mathcal{C}\cdot), <)$  est une catégorie ordonnée.

— Supposons  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \tilde{Z}^0(\mathcal{C}\cdot)$  et  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B}) \in \tilde{Z}^0(\Sigma)$  et montrons qu'alors le 0-cocycle (théorème 1) :

$$(\bar{\Sigma}, \Phi', \mathcal{B}'\cdot) = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B}\cdot)$$

est ordonné. En effet, soient  $e' \in \mathcal{B}'_0$ ,  $e'_1 \in \mathcal{B}'_0$  et  $e'_1 < e'$ . Soit  $f \in F$  et  $\beta(f) = e'$ . Il existe  $f_1 \in F$  tel que  $f_1 < f$  et  $\beta(f_1) = e'_1$ . Si  $s = \Phi(\alpha(f))$  et  $s_1 = \Phi(\alpha(f_1))$ , on a  $s_1 < s$ . Puisque  $\bar{\eta}_1$  est une espèce de structures ordonnée, les conditions :  $s_1 < s$  et  $f_1 < f$  entraînent  $f_1 s_1 < f s$ . Par construction :  $f s = \Phi'(e')$  et  $f_1 s_1 = \Phi'(e'_1)$ , de sorte que  $\Phi'(e'_1) < \Phi'(e')$  et  $(\bar{\Sigma}, \Phi', \mathcal{B}'\cdot)$  est un 0-cocycle ordonné. Il en résulte que  $\tilde{Z}^0(\mathcal{C}\cdot)$  opère sur  $\tilde{Z}^0(\Sigma)$ , la loi de composition étant la restriction de celle de  $\bar{Z}^0(\eta)$ .

— Supposons  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'_2, F_2, \mathcal{B}_2)$  dans  $(\tilde{Z}^0(\mathcal{C}\cdot), <)$  et :

$$(\bar{\Sigma}\cdot, \Phi_1, \mathcal{B}_1\cdot) < (\bar{\Sigma}\cdot, \Phi_2, \mathcal{B}_2\cdot) \quad \text{dans} \quad (\tilde{Z}^0(\Sigma), <).$$

Soit :

$$(\bar{\Sigma}\cdot, \Phi'_i, \mathcal{B}'_i\cdot) = (\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i)(\bar{\Sigma}\cdot, \Phi_i, \mathcal{B}_i\cdot), \quad \text{où} \quad i = 1, 2.$$

Pour tout  $e' \in \alpha(\mathfrak{B}'_1)$ , il existe  $f'_1 \in F_1$  tel que  $\beta(f'_1) = e'$  et on a :

$$\Phi'_1(e') = f'_1\Phi_1(e) = f'_1\Phi_2(e) = \Phi'_2(e'), \quad \text{où} \quad e = \alpha(f'_1),$$

car  $f'_1 \in F_2$  et  $\Phi_1$  et une restriction de  $\Phi_2$ . On en déduit :

$$(\bar{\Sigma} \cdot, \Phi'_1 \cdot, \mathfrak{B}'_1 \cdot) < (\bar{\Sigma} \cdot, \Phi'_2 \cdot, \mathfrak{B}'_2 \cdot).$$

Puisque  $\tilde{Z}^0(\pi)$  :

$$(\bar{\Sigma} \cdot, \Phi \cdot, \mathfrak{B} \cdot) \rightarrow \mathfrak{B}$$

définit évidemment un homomorphisme strict,  $\tilde{Z}^0(\tilde{\eta})$  est une espèce de structures ordonnée.

— Soit  $\mu((\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}), (\bar{\Sigma} \cdot, \Phi, \mathfrak{B} \cdot)) = (\bar{\mathfrak{B}}', \bar{F}, \bar{\mathfrak{B}})$  (notations théorème 1). La restriction de  $\bar{\pi}$  à  $\bar{F}$ ,  $\bar{\mathfrak{B}}$  et  $\bar{\mathfrak{B}}'$  étant une bijection sur  $F$ ,  $\mathfrak{B}$ , et  $\mathfrak{B}'$  respectivement,  $(\bar{\mathfrak{B}}', \bar{F}, \bar{\mathfrak{B}})$  vérifie les conditions 1, 2 et 3.

*Remarque.* — En général  $\tilde{Z}^0(\tilde{\eta})$  n'est pas une espèce de structures quasi-inductive car  $\tilde{Z}^0(\mathcal{C} \cdot)$  n'est pas une catégorie quasi-inductive.

**DÉFINITION 4.** — *On dira qu'une espèce de structures ordonnée  $\tilde{\eta}$  est régulière si  $(\bar{\Sigma} \cdot, <)$  et  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  sont régulières.*

**PROPOSITION 6.** — *Si  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est un groupoïde ordonné régulier (resp. si  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est une catégorie ordonnée régulière et si  $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{\Omega}'' \cap \tilde{\Omega}'_1$ ), alors l'espèce de structures ordonnée  $\tilde{\eta}$  est régulière.*

*Démonstration.* — Soit  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  une catégorie ordonnée régulière. Soient  $(f, z) \in \bar{\Sigma}$  et  $z' < z$ . Comme  $\pi(z') < \pi(z)$ , il existe  $f' = f\pi(z') \in \mathcal{C}$  et on a  $(f', z') \in \bar{\Sigma}$ . Si  $(f_1, z_1) \in \bar{\Sigma}$ ,  $z_1 < z'$  et  $f_1 < f$ , on trouve  $f_1 < f'$ , d'où  $(f_1, z_1) < (f', z')$ . Donc  $(f', z')$  est le pseudoproduit de  $(f, z)$  et de  $z'$  dans  $(\bar{\Sigma} \cdot, <)$ . Si  $(\mathcal{C} \cdot, <)$  est un groupoïde ordonné régulier, alors  $(\bar{\Sigma} \cdot, <)$  est un groupoïde ordonné, et, en vertu du corollaire de la proposition 7-2,  $(\bar{\Sigma} \cdot, <)$  est un groupoïde ordonné régulier; ainsi  $\tilde{\eta}$  est une espèce de structures ordonnée régulière. Supposons  $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{\Omega}'' \cap \tilde{\Omega}'_1$ . Soit  $z'' < fz$  et  $f'' = \pi(z'')f$ . On a  $\alpha(f'') < \alpha(f)$  et, puisque la restriction de  $\pi$  à la classe des minorants de  $z$  est une bijection

sur  $\alpha(f)$ , il existe  $z_1 < z$  tel que  $\pi(z_1) = \alpha(f'')$ . Par suite  $(f'', z_1) \in \bar{\Sigma}$ . Les relations :

$$z'' < fz, \quad f''z_1 < fz \quad \text{et} \quad \pi(f''z_1) = \beta(f'') = \pi(z'')$$

entraînent  $f''z_1 = z''$ . Comme tout minorant de  $f$  est l'image par  $\bar{\pi}$  d'un minorant de  $(f, z)$ , l'élément  $(f'', z_1)$  est le pseudo-produit  $z''(f, z)$  dans  $(\bar{\Sigma}, <)$  et  $(\bar{\Sigma}, <)$  est assez régulière. Soient de plus :

$$(f_1, fz) \in \bar{\Sigma} \quad \text{et} \quad (g, \bar{z}) < (f_1 \cdot f, z).$$

On a :  $g = \bar{f}_1 \cdot \bar{f}$ , où  $\bar{f}_1 < f$  et  $\bar{f} < f$ , donc :

$$(g, \bar{z}) = (\bar{f}_1, \bar{f}\bar{z}) \cdot (\bar{f}, \bar{z})$$

et  $(\bar{\Sigma}, <)$  est régulière.

*Remarque.* —  $(\mathcal{C}, <)$  peut être une catégorie ordonnée régulière sans que  $\tilde{\eta}$  soit régulière, car l'axiome  $(R_g)$  peut ne pas être satisfait dans  $(\bar{\Sigma}, <)$ .

**DÉFINITION 5.** — *On appelle espèce de structures ordonnée (resp. quasi-inductive) étalée une espèce de structures ordonnée (resp. quasi-inductive)  $\tilde{\eta}$  telle que l'on ait  $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{\Omega}'' \cap \tilde{\Omega}'$ .* 1

Cette définition généralise la notion d'espèce de structures sous-préinductive étalée définie dans [1 a].

Soit  $\tilde{\eta}$  une espèce de structures ordonnée régulière telle que  $(\mathcal{C}, <)$  soit un groupoïde ordonné régulier. Soit  $Z_r^0(\Sigma)$  la classe des 0-cocycles ordonnés  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B})$  tels que  $\mathcal{B}$  soit un sous-groupoïde régulier de  $(\mathcal{C}, <)$ . Soit  $Z_r^0(\mathcal{C})$  le sous-groupoïde plein de  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$  (théorème 2-3) ayant pour unités les sous-groupoïdes réguliers  $\mathcal{B}$  tels qu'il existe un 0-cocycle

$$(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B}) \in Z_r^0(\Sigma).$$

**THÉORÈME 4.** —  $[Z_r^0(\mathcal{C}), Z_r^0(\pi), Z_r^0(\Sigma)]$  est une sous-espèce de structures de  $\tilde{Z}^0(\tilde{\eta})$  et  $Z_r^0(\tilde{\eta}) = [(Z_r^0(\mathcal{C}), <), Z_r^0(\pi), (Z_r^0(\Sigma), <)]$  est une espèce de structures quasi-inductive régulière; la catégorie des hypermorphisms correspondante est équivalente à un sous-groupoïde de  $\mathcal{A}^r(\bar{\Sigma}, <)$ .

*Démonstration.* — Soient  $\mathfrak{B} \in Z_r^0(\mathcal{C})_0$  et  $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}$  dans  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$ . Il existe  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B}) \in Z_r^0(\Sigma)$  et on a

$$(\bar{\Sigma}, \Phi_1, \mathfrak{B}_1) \in Z_r^0(\Sigma),$$

où  $\Phi_1$  est la restriction de  $\Phi$  à  $\mathfrak{B}_1$ . Donc  $Z_r^0(\mathcal{C})$  est un sous-groupeïde saturé par induction de  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$  et  $(Z_r^0(\mathcal{C}), <)$  est un groupeïde quasi-inductif régulier, en vertu du théorème 3-2. De plus  $Z_r^0(\tilde{\eta})$  est une espèce de structures ordonnée.

— Si  $(\bar{\Sigma}, \Phi_i, \mathfrak{B}_i) \in Z_r^0(\Sigma)$ ,  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B}) \in Z_r^0(\Sigma)$  et :

$$(\bar{\Sigma}, \Phi_i, \mathfrak{B}_i) < (\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B}) \quad \text{pour tout } i \in I,$$

la classe des  $(\bar{\Sigma}, \Phi_i, \mathfrak{B}_i)$  admet  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B})$  pour sous-agrégat,

où  $\mathfrak{B}_I = \bigcup_{\mathfrak{B}} \mathfrak{B}_i$  et  $\Phi_I$  est la restriction de  $\Phi$  à  $\mathfrak{B}_I$ . Ainsi  $(Z_r^0(\Sigma), <)$  est une classe sous-inductive et on a :  $Z_r^0(\tilde{\eta}) \in \mathcal{J}^u$ . Ceci montre que  $Z_r^0(\tilde{\eta})$  est une espèce de structures quasi-inductive. Comme  $(Z_r^0(\mathcal{C}), <)$  est un groupeïde ordonné régulier, il résulte de la proposition 6 que  $Z_r^0(\tilde{\eta})$  est régulière.

— Si  $(\bar{\mathfrak{B}}', \bar{F}, \bar{\mathfrak{B}}) \in \mu(Z_r^0(\mathcal{C}) * Z_r^0(\Sigma))$  (notation du théorème 1), on a :

$$\bar{F} \in \mathcal{A}^r(\bar{\Sigma}, <),$$

car  $\bar{F}$  est un atlas de  $\bar{\Sigma}$  d'après le corollaire de théorème 1 et que, si  $z' < z$ , on a :  $\bar{\pi}(f, z) z' = \bar{\pi}(f, z) \bar{\pi}(z')$ , en vertu de la démonstration de la proposition 6. La restriction de  $\mu$  à  $Z_r^0(\mathcal{C}) * Z_r^0(\Sigma)$  définit une équivalence de la catégorie des hypermorphisms associée à  $Z_r^0(\tilde{\eta})$  sur le sous-groupeïde plein de  $\mathcal{A}^r(\bar{\Sigma}, <)$  formé des atlas réguliers  $\bar{F}$  tels que la restriction de  $\bar{\pi}$  à  $\bar{\mathfrak{B}} = a(\bar{F})$  (et par suite aussi à  $\bar{\mathfrak{B}}' = b(\bar{F})$ ) soit une bijection sur  $\bar{\pi}(\bar{\mathfrak{B}})$  (resp. sur  $\bar{\pi}(\bar{\mathfrak{B}}')$ ).

**COROLLAIRE.** — Soit  $\tilde{\eta}$  une espèce de structures ordonnée étalée.  $Z_r^0(\tilde{\eta})$  admet pour sous-espèce de structures l'espèce de structures quasi-inductive régulière

$$\tilde{\eta}_f = [(\hat{\mathcal{C}}_f, <), \pi_f, (Z_f^0(\Sigma), <)],$$

où  $\hat{\mathcal{C}}_f$  est la sous-catégorie pleine de  $\bar{\mathcal{C}}_f$  (corollaire, théorème 3-2) dont les unités sont majorées dans  $\mathcal{C}_0$  et où  $Z_f^0(\Sigma)$  est la classe des 0-cocycles ordonnés  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathfrak{B})$  tels que  $\mathfrak{B} \in (\hat{\mathcal{C}}_f)_0$ . De plus  $\tilde{\eta}$  s'identifie à une sous-espèce de structures de  $\tilde{\eta}_f$ .

*Démonstration.* — Comme  $\hat{\mathcal{C}}_f$  est un sous-groupe saturé par induction du groupe quasi-inductif régulier  $(\bar{\mathcal{C}}_f, <)$  défini dans le corollaire du théorème 3-2,  $(\hat{\mathcal{C}}_f, <)$  est un groupe quasi-inductif régulier. Soit  $\mathcal{B} \in (\hat{\mathcal{C}}_f)_0$ ; il existe  $e \in \mathcal{C}_0$  tel que  $\mathcal{B} < e^>$ ; la restriction de  $\pi$  à la classe des minorants d'un élément  $z$  tel que  $\pi(z) = e$  étant une bijection sur la classe des minorants de  $e$  dans  $\mathcal{C}_0$ , l'application:  $g \rightarrow (g, z')$ , où  $g \in \mathcal{B}$ ,  $z' < z$  et  $\pi(z') = \alpha(g)$  définit un 0-cocycle  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B})$ . Par suite  $\mathcal{B} \in Z_f^0(\Sigma)$ . Soit  $F \in \hat{\mathcal{C}}_f$  et  $(\bar{\Sigma}, \Phi, a(F)\cdot) \in Z_f^0(\Sigma)$ . On a :

$$F(\bar{\Sigma}, \Phi, a(F)\cdot) = (\bar{\Sigma}, \Phi', b(F)\cdot) \in Z_f^0(\Sigma),$$

puisque l'image par  $\Phi'$  d'une sous-classe saturée par induction de  $(\mathcal{C}, <)$  est saturée par induction dans  $(\bar{\Sigma}, <)$ . Donc  $\tilde{\eta}_f$  est une sous-espèce de structures quasi-inductive régulière de  $Z_f^0(\tilde{\eta})$ . De plus  $\tilde{\eta}$  s'identifie à une sous-espèce de structures de  $\tilde{\eta}_f$ , en identifiant  $f \in \mathcal{C}$  à  $f^> \in \hat{\mathcal{C}}_f$  et  $z \in \Sigma$  au 0-cocycle

$$(\bar{\Sigma}, \Phi, (\pi(z)^>)\cdot)$$

tel que  $\Phi(e') = z' < z$ , si  $e' = \pi(z')$ .

*Remarque.* — Si  $\tilde{\eta}$  n'est pas une espèce de structures étalée,  $\tilde{\eta}$  ne s'identifie pas une sous-espèce de structures de  $Z_f^0(\tilde{\eta})$ .

### 5. — Cohomologie d'ordre 1.

Soit  $\Sigma$  une catégorie; soit  $\mathcal{C}$  une catégorie d'opérateurs sur la classe  $\Sigma$ , relativement à la loi de composition  $K$ . Supposons vérifiées les conditions suivantes, dans lesquelles nous désignons par  $\mathcal{C} * \Sigma$  la classe des couples  $(f, z)$  tels que  $K(f, z)$  soit défini et où nous posons  $K(f, z) = fz$ , si  $(f, z) \in \mathcal{C} * \Sigma$ :

- 1) Si  $s \in \Sigma_0$ , on a  $fs \in \Sigma_0$ , si  $(f, s) \in \mathcal{C} * \Sigma$ .
- 2) Soit  $(z', z) \in \mathcal{C} * \mathcal{C}$  on a  $(f, z'.z) \in \mathcal{C} * \Sigma$  si, et seulement si,  $(f, z) \in \mathcal{C} * \Sigma$  et  $(f, z') \in \mathcal{C} * \Sigma$ ; dans ce cas:  $f(z'.z) = fz'.fz$ .

**DÉFINITION 1.** — Si les conditions précédentes sont vérifiées, on dit que  $\Sigma$  est une catégorie munie d'une catégorie d'opérateurs  $\mathcal{C}$  relativement à la loi de composition  $K$ .

Les conditions 1 et 2 signifient que l'espèce de structures déterminée par  $(\mathcal{C}^\cdot, \Sigma, K)$  est sous une espèce de morphismes [3]  $(\mathcal{C}^\cdot, F)$  et que la catégorie  $\Sigma^\cdot$  est la catégorie somme des catégories  $F(e)$ , où  $e \in \mathcal{C}_0^\cdot$ .

DÉFINITION 2. — *On dira que  $(\Sigma^\cdot, <)$  est une catégorie munie d'une catégorie ordonnée (resp. quasi-inductive, resp. sous-inductive) d'opérateurs  $(\mathcal{C}^\cdot, <)$  la loi de composition étant  $K$ , si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1)  $\Sigma^\cdot$  est une catégorie munie de la catégorie d'opérateurs  $\mathcal{C}^\cdot$ , relativement à la loi de composition  $K$ .

2)  $\tilde{\eta} = [(\mathcal{C}^\cdot, <), \pi, (\Sigma, <)]$  est une espèce de structures ordonnée (resp. quasi-inductive, resp. sous-inductive) régulière, où  $[\mathcal{C}^\cdot, \pi, \Sigma]$  est l'espèce de structures déterminée par  $(\mathcal{C}^\cdot, \Sigma, K)$ .

3)  $(\Sigma^\cdot, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée assez régulière.

Dans la suite, nous supposons que  $(\Sigma^\cdot, <)$  est une catégorie munie d'une catégorie ordonnée d'opérateurs  $(\mathcal{C}^\cdot, <)$  relativement à la loi de composition  $K$ . Nous désignons par  $[\mathcal{C}^\cdot, \pi, \Sigma] = \eta$  l'espèce de structures déterminée par  $(\mathcal{C}^\cdot, \Sigma, K)$  et par  $\tilde{\eta}$  l'espèce de structures ordonnée  $[(\mathcal{C}^\cdot, <), \pi, (\Sigma, <)]$ . Soit  $\eta' = [\mathcal{C}^\cdot, \pi', \Sigma_0^\cdot]$  la sous-espèce de structures de  $\eta$  telle que  $\pi'$  soit la restriction de  $\pi$  à  $\Sigma_0^\cdot$ . Soit  $\bar{\Sigma}^\cdot$  la catégorie des hypermorphismes  $(\mathcal{C}^\cdot * \Sigma)^\cdot$  associée à  $\eta$  et  $S^\cdot$  la catégorie des hypermorphismes  $(\mathcal{C}^\cdot * \Sigma_0^\cdot)^\cdot$  associée à  $\eta'$ . Soient  $\bar{\pi}$  et  $\bar{\pi}'$  respectivement les foncteurs canoniques  $(f, z) \rightarrow f$  de  $\bar{\Sigma}^\cdot$  et  $S^\cdot$  sur  $\mathcal{C}^\cdot$ .

PROPOSITION 1. —  *$(\Sigma^\cdot, <)$  est une catégorie fonctoriellement ordonnée [3]. Si  $\tilde{\eta}$  est une espèce de structures quasi-inductive (resp. sous-inductive),  $(\Sigma^\cdot, <)$  est une catégorie quasi-inductive (resp. sous-inductive).*

Démonstration. — Soient  $z \in \Sigma$ ,  $z' \in \Sigma$ ,  $z' < z$  et  $\alpha(z') = \alpha(z)$ . Les conditions :  $z' < z$  et :

$$\pi(z) = \pi(\alpha(z)) = \pi(\alpha(z')) = \pi(z')$$

entraînent  $z = z'$ , puisque  $\tilde{\eta}$  est ordonnée. De même  $z' < z$  et  $\beta(z') = \beta(z)$  entraîne  $z = z'$ . Il en résulte que  $(\Sigma^\cdot, <)$  est une catégorie ordonnée. Soit  $s \in \Sigma_0^\cdot$  et  $z < s$ . Il existe  $z' = s\alpha(z)$  et on a  $\alpha(z') = \alpha(z)$ . Comme  $z < z'$ , il en résulte  $z = z'$ . Puisque  $\alpha(z) < s\alpha(z)$  on a  $\alpha(z) < z$ , d'où  $z = \alpha(z)$ .

Ainsi un élément de  $\Sigma$  majoré par une unité  $s \in \Sigma_0$  est une unité de  $\Sigma$ . Supposons  $z_1 \in \Sigma$ ,  $\alpha(z_1) = \beta(z)$  et  $z'' < z_1.z$ . Il existe des pseudoproduits  $z\alpha(z'')$  et  $\bar{z} = (z_1.z)\alpha(z'')$  tels que

$$\alpha(z\alpha(z'')) = \alpha(z'') = \alpha(\bar{z}),$$

car  $(\Sigma, <)$  est assez régulière. On a  $s' = \beta(z\alpha(z'')) < \beta(z)$ , de sorte qu'il existe un pseudoproduit  $z_1s'$  tel que  $\alpha(z_1s') = s'$ . Les éléments :

$$z'' \text{ et } z_2 = (z_1s').(z\alpha(z''))$$

sont majorés par  $\bar{z}$  et on a  $\alpha(z_2) = \alpha(\bar{z}) = \alpha(z'')$ . En vertu du début de la démonstration, il en résulte  $z_2 = \bar{z} = z''$ . Donc l'application :  $z \rightarrow z^>$  définit un foncteur généralisé de  $\Sigma$  vers  $\Sigma$  et  $(\Sigma, <)$  est une catégorie fonctoriellement ordonnée. 1+

— Soit  $\tilde{\eta}$  une espèce de structures quasi-inductive; alors  $(\Sigma, <)$  est une classe sous-inductive et, en vertu du corollaire 2 de la proposition 12-2,  $(\Sigma, <)$  est une catégorie quasi-inductive.

— Soit  $\tilde{\eta}$  une espèce de structures sous-inductive. Supposons  $z' < z$  et  $z'' < z$ . On a :

$$\alpha(z' \cap z'') < \alpha(z') \cap \alpha(z'')$$

et

$$\begin{aligned} \pi(\alpha(z' \cap z'')) &= \pi(z' \cap z'') = \pi(z') \cap \pi(z'') \\ &= \pi(\alpha(z')) \cap \pi(\alpha(z'')) = \pi(\alpha(z') \cap \alpha(z'')) \end{aligned}$$

d'où  $\alpha(z' \cap z'') = \alpha(z') \cap \alpha(z'')$ . De même

$$\beta(z' \cap z'') = \beta(z') \cap \beta(z'').$$

Par conséquent  $(\Sigma, <)$  est une catégorie sous-inductive.

Soit  $\tilde{\Sigma}$  la classe des triplets  $(z, f, s)$  tels que :

$$z \in \Sigma, \quad (f, s) \in S \quad \text{et} \quad \alpha(z) = fs.$$

THÉORÈME 1. —  $(\tilde{\Sigma}, <)$  est une catégorie ordonnée régulière, la loi de composition étant définie par :

$$(z', f', s').(z, f, s) = (z'.f'z, f'.f, s)$$

si, et seulement si,  $s' = \beta(z)$  et la relation d'ordre étant définie par :

$$(z', f', s') < (z, f, s)$$

si, et seulement si,  $f' < f$ ,  $z' < z$  et  $s' < s$ .  $(\Sigma', <)$  et  $(S', <)$  s'identifient à des sous-catégories régulières de  $(\tilde{\Sigma}', <)$ . De plus  $(\mathcal{C}', <)$  est une catégorie ordonnée quotient [5] de  $(\tilde{\Sigma}', <)$ ,  
 1 le foncteur projection  $\tilde{\pi}$  étant défini par:  $(z, f, s) \rightarrow f$ .

*Démonstration.* — Montrons d'abord que  $\tilde{\Sigma}'$  est une catégorie. Soient :

$$h = (z, f, s) \in \tilde{\Sigma}' \quad \text{et} \quad h' = (z', f', s') \in \tilde{\Sigma}'.$$

Si  $s' = \beta(z)$ , on a :

$$\alpha(z'.f'z) = \alpha(f'z) = f'\alpha(z) = (f'.f)s,$$

de sorte que  $(z'.f'z, f'.f, s) \in \tilde{\Sigma}'$ . Prouvons que  $\tilde{\Sigma}'$  admet pour unités les triplets  $(s, e, s)$  tels que  $e \in \mathcal{C}'_0$ . En effet, si  $h.(s, e, s)$  est défini, on a :

$$h.(s, e, s) = (z.fs, f.e, s) = h,$$

puisque  $fs \in \Sigma'_0$ . Si  $(s, e, s).h'$  est défini, on trouve :

$$s = \beta(z') \quad \text{et} \quad (s, e, s).h' = (s.ez', e.f', s') = h'.$$

Par suite  $(s, e, s)$  est une unité;  $h$  admet pour seule unité à droite  $(s, \alpha(f), s)$  et pour seule unité à gauche  $(s', \beta(f), s')$ , où  $s' = \beta(z)$ . Le composé  $h'.h$  est défini si, et seulement si,  $\alpha(h') = (s', \alpha(f'), s') = \beta(h)$ . Dans ce cas, on a :

$$\alpha(h'.h) = \alpha(h) \quad \text{et} \quad \beta(h'.h) = \beta(h').$$

Soit de plus  $h'' = (z'', f'', s'')$ . Si les composés  $h''.(h'.h)$  et  $(h''.h').h$  sont définis, ils sont respectivement égaux à :

$$\begin{aligned} h''.(h'.h) &= (z'', f'', s'').(z'.f'z, f'.f, s) = (z''.f''(z'.f'z), f''.f'.f, s) \\ (h''.h').h &= (z''.f''z', f''.f', s').(z, f, s) \\ &= (z''.f''z'.(f''.f')z, f''.f'.f, s). \end{aligned}$$

Comme  $f''(z'.f'z) = f''z'.(f''.f')z$  et que la loi de composition dans  $\Sigma'$  est associative, il en résulte :

$$h''.(h'.h) = (h''.h').h$$

et  $\tilde{\Sigma}'$  est une catégorie;  $\tilde{\pi}$  est un foncteur dont le noyau est la



sous-catégorie de  $\tilde{\Sigma}$  formée des triplets  $(z, \pi(z), \alpha(z))$ ; nous identifierons cette sous-catégorie à  $\Sigma$ , en identifiant

$$(z, \pi(z), \alpha(z)) \quad \text{avec} \quad z;$$

en particulier les unités de  $\tilde{\Sigma}$  sont ainsi identifiées aux unités de  $\Sigma$ .

—  $S$  s'identifie à la sous-catégorie de  $\tilde{\Sigma}$  formée des triplets  $(fs, f, s)$ , où  $(f, s) \in S$ .

— Soit  $(z', f', s') < (z, f, s)$  dans  $(\tilde{\Sigma}, <)$ ; on a :

$$\alpha(z', f', s') = s' < s = \alpha(z, f, s)$$

et

$$\beta(z', f', s') = \beta(z') < \beta(z) = \beta(z, f, s).$$

Supposons aussi  $(z'_1, f'_1, s'_1) < (z_1, f_1, s_1)$ ,  $s'_1 = \beta(z')$  et  $s_1 = \beta(z)$ . Comme  $\tilde{\eta}$  est ordonnée, les relations :  $f' < f$  et  $z' < z$  entraînent  $f'z' < fz$ . Les catégories  $(\Sigma, <)$  et  $(\mathcal{C}, <)$  étant  $\tilde{\Omega}$ -structurées, on trouve :

$$z'_1 \cdot f'_1 z' < z_1 \cdot f_1 z \quad \text{et} \quad f'_1 \cdot f' < f_1 \cdot f.$$

Donc  $(z'_1, f'_1, s'_1) \cdot (z', f', s') = (z'_1 \cdot f'_1 z', f'_1 \cdot f', s') < (z_1, f_1, s_1) \cdot (z, f, s)$  et  $(\tilde{\Sigma}, <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée.

— Si  $(z', f', s') < (z, f, s)$  dans  $(\tilde{\Sigma}, <)$  et si on a

$$s' = s \quad \text{et} \quad \beta(z') = \beta(z),$$

les conditions :  $f's < fs$  et

$$\pi(f's) = \pi(\beta(z')) = \pi(\beta(z)) = \pi(fs)$$

ont pour conséquence  $f's = fs$ , d'où  $\beta(f') = \beta(f)$ . La catégorie  $(\mathcal{C}, <)$  étant ordonnée, on en déduit  $f' = f$ . En vertu de la proposition 1, on a aussi  $z' = z$ . Par suite  $(z', f', s') = (z, f, s)$  et  $(\tilde{\Sigma}, <)$  est ordonnée.

— Soit  $(z, f, s) \in \tilde{\Sigma}$ . Soit  $s' \in \Sigma_0$  et  $s' < s$ . Puisque  $(\mathcal{C}, <)$  est régulière, il existe  $f' = f\pi(s')$  et on a :  $\alpha(f') = \pi(s')$ ; il en résulte  $(f', s') \in S$  et  $f's' < \alpha(z)$ .  $(\Sigma, <)$  étant assez régulière, il existe  $z' = z(f's')$  et on a :  $\alpha(z') = f's'$ ; par conséquent  $(z', f', s') \in \tilde{\Sigma}$ . Supposons :

$$h = (\bar{z}, \bar{f}, \bar{s}) < (z, f, s), \quad h' = (\bar{z}, \bar{f}, \bar{s}) < s' \quad \text{et} \quad \alpha(h) = \beta(h').$$

*Colloque Grenoble.*

On a  $\tilde{\pi}(h) < f$  et  $\tilde{\pi}(h') < \pi(s')$ , d'où  $\tilde{\pi}(h.h') < f'$  et  $\bar{f} < f'$ ; on trouve  $\bar{f}\bar{z} < f's'$  et  $\bar{z}.\bar{f}\bar{z} < z(f's') = z'$ ; par suite  $h.h' < (z', f', s')$ . Ainsi  $(z', f', s')$  est le pseudoproduit de  $(z, f, s)$  et de  $s'$  dans  $(\tilde{\Sigma}, <)$ . Soit  $s'' \in \Sigma_0$  et  $s'' < \beta(z)$ . Il existe  $z'' = s''z$  et on a  $\alpha(z'') < fs$ ; par définition  $(\tilde{\Sigma}, <)$  est régulière, de sorte qu'il existe  $(f'', s') = \alpha(z'')(f, s)$  et que  $f''s' = \alpha(z'')$ . Il s'ensuit  $(z'', f'', s') \in \tilde{\Sigma}$  et un raisonnement analogue au précédent prouve que  $(z'', f'', s')$  est le pseudoproduit  $s''(z, f, s)$ . Ceci montre que  $(\tilde{\Sigma}, <)$  est assez régulière.

— Supposons  $g = (z', f', s').(z, f, s)$  défini dans  $\tilde{\Sigma}$  et

$$g'' = (z'', f'', s'') < g.$$

Il existe  $f_1 < f$  et  $f'_1 < f'$  tels que  $f'' = f'_1.f_1$ , car  $(\mathcal{C}, <)$  est régulière; on a :  $h = (z_1, f_1, s'') \in \tilde{\Sigma}$ , où  $z_1 = z(f_1 s'')$ . De l'égalité :

$$\pi(z_1) = \pi(\alpha(z_1)) = \beta(f_1),$$

il résulte  $h' = (z'_1, f'_1, \beta(z_1)) \in \tilde{\Sigma}$ , où  $z'_1 = z'(f'_1 \beta(z_1))$ . On trouve :  $z'' = z'_1.f'_1 z_1$ , d'après la proposition 1, car :

$$\alpha(z'') = f''s'' = f'_1(f_1 s'') = \alpha(f'_1 z_1), \quad z'' < z'.f'z$$

et

$$z'_1.f'_1 z_1 < z'.f'z.$$

Donc  $h'.h = g''$  et  $(\tilde{\Sigma}, <)$  est une catégorie ordonnée régulière.

**THÉORÈME 2.** — Si  $\tilde{\eta}$  est une espèce de structures quasi-inductive (resp. sous-inductive),  $(\tilde{\Sigma}, <)$  est une catégorie quasi-inductive (resp. sous-inductive) et  $\tilde{\pi}$  est un foncteur quasi-inductif (resp. sous-inductif).

*Démonstration.* — Soient

$$h_i = (z_i, f_i, s_i) \in \tilde{\Sigma}, \quad h = (z, f, s) \in \tilde{\Sigma} \quad \text{et} \quad h_i < h$$

pour tout  $i \in I$ . Comme  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie quasi-inductive, il existe  $\bar{f} = \bigcup^f f_i$ ; puisque  $(\Sigma, <)$  est quasi-inductive, en vertu de la proposition 1, il existe  $\bar{z} = \bigcup^z z_i$  et  $s = \bigcup^s s_i$ .

D'après le théorème 2-4 on a  $(\bar{f}, \bar{s}) \in S$  et :

$$\bar{f}\bar{s} = \bigcup^{fs} f_i s_i = \bigcup^{\alpha(z)} \alpha(z_i) = \alpha(\bar{z});$$

il en résulte  $\bar{h} = (\bar{z}, \bar{f}, \bar{s}) \in \tilde{\Sigma}$  et  $\bar{h}$  est le  $h$ -agrégat des  $h_i$ . Donc  $(\tilde{\Sigma}, <)$  est une classe sous-inductive et, en vertu du corollaire 2 de la proposition 12-2,  $(\tilde{\Sigma}, <)$  est une catégorie quasi-inductive. De plus  $\tilde{\pi}$  est un foncteur quasi-inductif.

— Supposons  $\tilde{\eta}$  sous-inductive. Soient  $h_i = (z_i, f_i, s_i) \in \tilde{\Sigma}$  et  $h_i < h \in \tilde{\Sigma}$ , où  $i = 1, 2$ . Il existe  $f_1 \cap f_2 \in \mathcal{C}$ ,  $z_1 \cap z_2$  et  $s_1 \cap s_2$ , car  $(\mathcal{C}, <)$  et  $(\Sigma, <)$  sont des classes sous-inductives. En utilisant le théorème 2-4, on obtient :

$$(f_1 \cap f_2)(s_1 \cap s_2) = f_1 s_1 \cap f_2 s_2 = \alpha(z_1) \cap \alpha(z_2) = \alpha(z_1 \cap z_2),$$

puisque  $(\Sigma, <)$  est sous-inductive (proposition 1). On en déduit :

$$h' = (z_1 \cap z_2, f_1 \cap f_2, s_1 \cap s_2) \in \tilde{\Sigma} \quad \text{et} \quad h' = h_1 \cap h_2.$$

Comme :  $\alpha(h') = s_1 \cap s_2 = \alpha(h_1) \cap \alpha(h_2)$  et :

$$\beta(h') = \beta(z_1 \cap z_2) = \beta(z_1) \cap \beta(z_2) = \beta(h_1) \cap \beta(h_2),$$

$(\tilde{\Sigma}, <)$  est une catégorie sous-inductive.

Soit  $(\Sigma_i, <)$  une autre catégorie munie d'une catégorie ordonnée d'opérateurs  $(\mathcal{C}_i, <)$  relativement à  $K_1$ , l'espèce de structures (resp. ordonnée) correspondante étant  $\eta_1$  (resp.  $\tilde{\eta}_1$ ).

**DÉFINITION 3.** — On appelle application covariante ordonnée de  $((\mathcal{C}, <), (\Sigma, <), K)$  vers  $((\mathcal{C}_1, <), (\Sigma_1, <), K_1)$  un couple  $(p, \psi)$  vérifiant les conditions :

1)  $\bar{p} = (\mathcal{C}_1, p, \mathcal{C})$  et  $\bar{\psi} = (\Sigma_1, \psi, \Sigma)$  sont des foncteurs.

2)  $(\eta_1, (p, \psi), \eta)$  est une application covariante [1 a], c'est-à-dire on a :

$$\psi(fz) = p(f)\psi(z) \quad \text{si} \quad (f, z) \in \Sigma.$$

3)  $\bar{p} = ((\mathcal{C}_1, <), p, (\mathcal{C}, <)) \in \tilde{\Omega}$  et

$$\bar{\psi} = ((\Sigma_1, <), \psi, (\Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}.$$

PROPOSITION 2. — Si  $(p, \psi)$  est une application covariante ordonnée de  $((\mathcal{C}, <), (\Sigma, <), \mathbf{K})$  vers

$$((\mathcal{C}_1, <), (\Sigma_1, <), \mathbf{K}_1),$$

l'application  $\psi \times_{\mathbf{K}} p$ :

$$(z, f, s) \rightarrow (\psi(z), p(f), \psi(s)), \quad \text{où } (z, f, s) \in \tilde{\Sigma},$$

définit un foncteur ordonné de  $(\tilde{\Sigma}, <)$  vers  $(\tilde{\Sigma}_1, <)$

Démonstration. — Soit  $h = (z, f, s) \in \tilde{\Sigma}$ ; on a  $(p(f), \psi(s)) \in S_1$  et :

$$\alpha(\psi(z)) = \psi(\alpha(z)) = \psi(fs) = p(f)\psi(s),$$

d'où  $(\psi(z), p(f), \psi(s)) \in \tilde{\Sigma}_1$ . En particulier  $\psi \times_{\mathbf{K}} p(s) = \psi(s)$ , si  $s \in \Sigma_0$ . Soit  $h' = (z', f', s') \in \tilde{\Sigma}$  et  $s' = \beta(z)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \psi \times_{\mathbf{K}} p(h'.h) &= (\psi(z'.f'z), p(f'.f), \psi(s)) \\ &= (\psi(z') \cdot \psi(f'z), p(f') \cdot p(f), \psi(s)) \\ &= \psi \times_{\mathbf{K}} p(h') \cdot \psi \times_{\mathbf{K}} p(h), \end{aligned}$$

car  $\psi(f'z) = p(f')\psi(z)$ . Donc  $\psi \times_{\mathbf{K}} p$  définit un foncteur.

DÉFINITION 4. — Avec les hypothèses du théorème 1, on appelle  $(\tilde{\Sigma}, <)$  le produit croisé ordonné de  $(\mathcal{C}, <)$  et de  $(\Sigma, <)$  et on pose :  $(\tilde{\Sigma}, <) = (\Sigma \times_{\mathbf{K}} \mathcal{C}, <)$ . Si  $(p, \psi)$  est une application covariante ordonnée de  $((\mathcal{C}, <), (\Sigma, <), \mathbf{K})$  vers  $((\mathcal{C}_1, <), (\Sigma_1, <), \mathbf{K}_1)$ , on appelle  $(\tilde{\Sigma}_1, \psi \times_{\mathbf{K}} p, \tilde{\Sigma})$  (proposition 2) le produit croisé de  $(p, \psi)$ .

PROPOSITION 3. — Soit  $\mathbf{C}$  une sous-catégorie de  $\mathcal{C}$ . Pour que  $(\tilde{\Sigma}, \Phi, \mathbf{C})$  soit un foncteur tel que  $\pi\Phi(f) = f$  pour tout  $f \in \mathbf{C}$ , il faut et il suffit que l'on ait :  $\Phi(f) = (\varphi(f), f, \varphi(\alpha(f)))$ , où  $\varphi$  est une application de  $\mathbf{C}$  dans  $\Sigma$  vérifiant les conditions :

$$(H) \quad \pi\varphi = \beta; \quad \varphi(\mathbf{C}_0) \subset \Sigma_0$$

et

$$1 \quad \varphi(f'.f) = \varphi(f') \cdot f' \varphi(f), \quad \text{si } (f', f) \in \mathbf{C} * \mathbf{C}.$$

Démonstration. — Soit  $(\tilde{\Sigma}, \Phi, \mathbf{C})$  un foncteur tel que  $\pi\Phi(f) = f$ . Posons :

$$\varphi(f) = z, \quad \text{si } \Phi(f) = (z, f, s).$$

On a  $\pi\varphi(f) = \beta(f)$ . Si  $e \in C_0$ , la relation  $\Phi(e) \in \tilde{\Sigma}_0$  entraîne  $\varphi(e) \in \Sigma_0$ . Soit  $f \in C$ ,  $f' \in C$  et  $\alpha(f') = \beta(f)$ . On trouve :

$$\Phi(f' \cdot f) = (\varphi(f' \cdot f), f' \cdot f, s) = \Phi(f') \cdot \Phi(f) = (\varphi(f') \cdot f' \varphi(f), f' \cdot f, s)$$

de sorte que (H) est vérifiée. Inversement soit  $\varphi$  une application de  $C$  dans  $\Sigma$  satisfaisant à la condition (H). Soit  $f \in C$  et  $\alpha(f) = e$ . Posons :  $\Phi(f) = (\varphi(f), f, \varphi(e))$ . On obtient :

$$\varphi(f) = \varphi(f \cdot e) = \varphi(f) \cdot f \varphi(e), \quad \text{d'où} \quad \alpha(\varphi(f)) = f \varphi(e)$$

et  $\Phi(f) \in \tilde{\Sigma}$ . Si de plus  $f' \in C$  et  $\alpha(f') = \beta(f)$ , on a :

$$\Phi(f') \cdot \Phi(f) = (\varphi(f') \cdot f' \varphi(f), f' \cdot f, \varphi(e)) = \Phi(f' \cdot f).$$

Par suite  $(\tilde{\Sigma}, \Phi, C)$  est un foncteur.

**COROLLAIRE.** — Si  $(S, \Phi, C)$  est un 0-cocycle de  $\eta'$ , l'application :  $f \rightarrow \Phi(\beta(f))$ , où  $f \in C$ , vérifie la condition (H).

**DÉFINITION 5.** — On dira qu'une sous-catégorie  $C$  de  $\mathcal{C}$  engendre  $(\mathcal{C}, <)$  si  $C$  est une sous-classe saturée par induction de  $(\mathcal{C}, <)$  et si, pour tout  $f \in C$ , il existe une sous-classe  $F$  de  $C$  telle que  $f = \bigcup F$ .

Remarquons que cette définition est surtout intéressante dans le cas où  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie quasi-inductive.

Si  $C_1$  et  $C_2$  sont deux sous-catégories de  $\mathcal{C}$  engendrant  $(\mathcal{C}, <)$ , alors  $C_1 \cap C_2$  engendre aussi  $(\mathcal{C}, <)$ . 19

**DÉFINITION 6.** — On appelle 1-cocycle ordonné un triplet  $(\Sigma, \varphi, C)$ , où  $C$  est une sous-catégorie engendrant  $(\mathcal{C}, <)$  et où  $\varphi$  est une application de  $C$  dans  $\Sigma$  vérifiant la condition (H). Le foncteur  $(\tilde{\Sigma}, \Phi, C)$  correspondant sera appelé foncteur croisé associé à  $(\Sigma, \varphi, C)$ . 2

Nous désignerons par  $Z^1(\Sigma, \mathcal{C})$  la classe de tous les 1-cocycles ordonnés  $\bar{\varphi} = (\Sigma, \varphi, C)$  et par  $\mathfrak{Z}$  l'application :  $\bar{\varphi} \rightarrow (\tilde{\Sigma}, \Phi, C)$ , où  $(\tilde{\Sigma}, \Phi, C)$  est le foncteur croisé associé à  $(\Sigma, \varphi, C)$ . Nous écrirons aussi  $\bar{\varphi}(f)$  au lieu de  $\varphi(f)$ , si  $f \in C$ .

D'après le corollaire de la proposition 4, tout 0-cocycle  $\bar{\Phi}$  de  $\eta'$  sur une sous-catégorie  $C$  engendrant  $(\mathcal{C}, <)$  détermine un 1-cocycle ordonné, qui sera dit associé à  $\bar{\Phi}$ .

DÉFINITION 7. — On appelle *équivalence croisée ordonnée* un triplet  $(\bar{\varphi}_2, \tau, \bar{\varphi}_1)$  vérifiant les conditions suivantes :

1)  $\bar{\varphi}_i = (\Sigma^*, \varphi_i, C_i)$ , où  $i = 1, 2$ , sont des 1-cocycles ordonnés. Soit  $C = C_1 \cap C_2$ .

2)  $\tau$  est une application de  $C_0$  dans  $\Sigma_1^*$  telle que

$$1 \quad \tau(e') \cdot \varphi_1(f) = \varphi_2(f) \cdot f\tau(e) \quad \text{si} \quad f \in C, \quad e = \alpha(f), \quad e' = \beta(f).$$

Dans la suite nous dirons *équivalence croisée* au lieu de « *équivalence croisée ordonnée* ».

PROPOSITION 4. — Soient  $\bar{\varphi}_i = (\Sigma^*, \varphi_i, C_i)$  deux 1-cocycles ordonnés et  $C = C_1 \cap C_2$ . Pour que  $(\bar{\varphi}_2, \tau, \bar{\varphi}_1)$  soit une *équivalence croisée*, il faut et il suffit que  $(\Phi_2, \tau, \Phi_1)$  soit une *équivalence naturelle*, où  $\Phi_i$  est le foncteur restriction de  $\mathcal{Z}(\bar{\varphi}_i)$  à  $C$ .

En effet, soit  $f \in C$ ,  $e = \alpha(f)$  et  $e' = \beta(f)$ . On a :

$$\tau(e') \cdot (\varphi_1(f), f, \varphi_1(e)) = (\varphi_2(f), f, \varphi_2(e)) \cdot \tau(e)$$

si, et seulement si,  $\tau(e') \cdot \varphi_1(f) = \varphi_2(f) \cdot f\tau(e)$ .

THÉORÈME 3. — Soit  $\bar{\varphi} = (\Sigma^*, \varphi, C) \in Z^1(\Sigma^*, C)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1)  $((\Sigma^*, \varphi', C), \tau, \bar{\varphi})$  est une *équivalence croisée*.

2)  $\tau$  est une application de  $C_0$  dans  $\Sigma_1^*$  telle que  $\alpha(\tau(e)) = \varphi(e)$  pour tout  $e \in C_0$  et  $\varphi'$  est l'application de  $C$  dans  $\Sigma$  définie par :

$$\text{si} \quad \begin{aligned} \varphi'(f) &= \tau(e') \cdot \varphi(f) \cdot f\tau(e)^{-1}, \\ f \in C, \quad e &= \alpha(f), \quad e' = \beta(f). \end{aligned}$$

Démonstration. — Si la condition 1 est vérifiée, la condition 2 est évidemment satisfaite. Inversement supposons la condition 2 vérifiée et montrons qu'alors  $(\Sigma^*, \varphi', C)$  est un 1-cocycle ordonné. En effet, soit  $e \in C_0$ . On a :

$$\varphi'(e) = \tau(e) \cdot \varphi(e) \cdot \tau(e)^{-1} = \beta(\tau(e)) \in \Sigma_0^*.$$

Soit  $f \in C$ ,  $e = \alpha(f)$  et  $e' = \beta(f)$ . Comme  $\bar{\varphi}$  est un homomorphisme croisé, on trouve :

$$\alpha(\tau(e')) = \varphi(e') = \beta(\varphi(f)), \quad \alpha(f\tau(e)) = f\varphi(e) = \alpha\varphi(f),$$

de sorte que  $\tau(e') \cdot \varphi(f) \cdot f\tau(e)^{-1}$  est défini. Supposons

$$(f', f) \in C \cdot * C \quad \text{et} \quad \beta(f') = e''.$$

Le composé  $\varphi'(f').f'\varphi'(f)$  est défini, car :

$$\beta(f'\varphi'(f)) = \beta(f'\tau(e')) = \alpha(\varphi'(f')),$$

et on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(f').f'\varphi'(f) &= \tau(e'').\varphi(f').f'\tau(e')^{-1}.f'(\tau(e')).\varphi(f).f\tau(e)^{-1} \\ &= \tau(e'').\varphi(f').f'\varphi(f).(f'.f)\tau(e)^{-1} = \varphi'(f'.f). \end{aligned}$$

Ainsi  $\varphi'$  définit un 1-cocycle ordonné et  $(\bar{\varphi}', \tau, \bar{\varphi})$  est une équivalence croisée, où  $\bar{\varphi}' = (\Sigma', \varphi', C')$  car :

$$\tau(e').\varphi(f) = \varphi'(f).f\tau(e).$$

**COROLLAIRE.** — Soit  $C$  une sous-catégorie engendrant  $(C', <)$ . Soit  $\tau$  une application de  $C_0$  dans  $\Sigma'_1$  telle que :

$$\alpha(\tau(e')) = f\alpha(\tau(e)) \quad \text{si} \quad f \in C, \quad e = \alpha(f), \quad e' = \beta(f).$$

Soit  $\varphi_\tau$  l'application :  $f \rightarrow \tau(e').f\tau(e)^{-1}$ . Alors  $(\bar{\varphi}_\tau, \tau, \overline{\alpha\tau\beta})$  est une équivalence croisée, où  $\bar{\varphi}_\tau = (\Sigma', \varphi_\tau, C')$ .

En effet, l'application :  $f \rightarrow (f, \alpha(\tau(e)))$  définit un 0-cocycle de  $\eta'$  et, en vertu du corollaire de la proposition 3, l'application  $\alpha\tau\beta$  de  $C$  dans  $\Sigma$  définit un 1-cocycle ordonné. Le corollaire résulte donc du théorème 3.

**DÉFINITION 8.** — On appelle 1-cobord ordonné un 1-cocycle ordonné  $\bar{\varphi}$  tel qu'il existe une équivalence croisée  $(\bar{\varphi}, \tau, \mathfrak{S}^{-1}(\Phi))$ , où  $\Phi$  est un 0-cocycle ordonné de  $\tilde{\eta}'$ .

Les 1-cobords ordonnés sont donc les 1-cocycles ordonnés  $\bar{\varphi}_\tau$  du corollaire du th. 3 tels que  $((\Sigma', <), \alpha\tau, (C_0, <)) \in \tilde{\Omega}$ . Si  $\tau'$  est un 0-cocycle ordonné de  $\tilde{\eta}$  tel que  $\beta\tau' = \alpha\tau$ , alors le 1-cobord  $\bar{\varphi}_\tau$  peut aussi être représenté par le symbole  $\bar{\varphi}_{\tau,\tau'}$ .

Soit  $B^1(\Sigma', C')$  la classe des 1-cobords ordonnés. En vertu de la proposition 3,  $\bar{\varphi}$  est un 1-cobord ordonné si, et seulement si, il existe un 0-cocycle ordonné  $\Phi$  de  $\tilde{\eta}'$  et une équivalence naturelle  $(\mathfrak{Z}(\bar{\varphi}), \tau, \Phi)$ .

**PROPOSITION 5.** — La relation  $\rho$  définie sur  $Z^1(\Sigma', C')$  par :  $\bar{\varphi} \sim \bar{\varphi}'$  si, et seulement si, il existe une équivalence croisée  $(\bar{\varphi}', \tau, \bar{\varphi})$ , est une relation d'équivalence et  $B^1(\Sigma', C')$  est saturée relativement à  $\rho$ .

19

*Démonstration.* —  $\rho$  est réflexive car  $(\bar{\varphi}, \bar{\varphi}_0, \bar{\varphi})$  est une équivalence croisée, où  $\bar{\varphi}_0(e) = \bar{\varphi}(e)$  pour tout  $e \in C_0$ . Soit  $(\bar{\varphi}', \tau, \bar{\varphi})$

une équivalence croisée; les relations :

$$\tau(e') \cdot \bar{\varphi}(f) = \bar{\varphi}'(f) \cdot f\tau(e) \quad \text{et} \quad \tau(e) \in \Sigma_{\gamma}$$

entraînent :

$$f\tau(e) \in \Sigma_{\gamma} \quad \text{et} \quad \bar{\varphi}(f) \cdot f\tau(e)^{-1} = \tau(e')^{-1} \cdot \bar{\varphi}'(f),$$

de sorte que  $(\bar{\varphi}, \tau^{-1}, \bar{\varphi}')$  est une équivalence croisée, où

$$\tau^{-1}(e) = \tau(e)^{-1}.$$

Ainsi  $\rho$  est symétrique. Soient  $(\bar{\varphi}_2, \tau, \bar{\varphi}_1)$  et  $(\bar{\varphi}_3, \tau', \bar{\varphi}_2)$  deux équivalences croisées et  $\bar{\varphi}_i = (\Sigma, \varphi_i, C_i)$ . Posons

$$1 \quad C = C_1 \cap C_2 \cap C_3.$$

Soit  $f \in C$ ,  $e = \alpha(f)$  et  $e' = \beta(f)$ ; on a :

$$\begin{aligned} \tau'(e') \cdot \tau(e) \cdot \varphi_1(f) &= \tau'(e') \cdot \varphi_2(f) \cdot f\tau(e) = \varphi_3(f) \cdot f\tau'(e') \cdot f\tau(e) \\ &= \varphi_3(f) \cdot f(\tau'(e') \cdot \tau(e)). \end{aligned}$$

Donc  $(\bar{\varphi}_3, \tau' \cdot \tau, \bar{\varphi}_1)$  est une équivalence croisée et  $\bar{\varphi}_1 \sim \bar{\varphi}_3$ . Ainsi  $\rho$  est une relation d'équivalence.

**DÉFINITION 9.** — On appelle classe de cohomologie d'ordre 1 une classe d'équivalence  $\bar{\varphi} \bmod \rho$ , où  $\bar{\varphi} \in Z^1(\Sigma, \mathcal{C})$ . Soit  $H^1(\Sigma, \mathcal{C})$  la classe des classes de cohomologie d'ordre 1.

2 Soit  $\bar{\varphi} = (\Sigma, \varphi, C)$  un 1-cocycle ordonné. Il résulte du théorème 3 que la classe  $\bar{\varphi} \bmod \rho$  est la classe des triplets  $(\Sigma, \varphi', C_1)$  construits de la façon suivante: soit  $C_1$  une sous-catégorie engendrant  $(\mathcal{C}, <)$  et soit  $C_2 = C \cap C_1$ ; soit  $\tau$  une application de  $(C_2)_0$  dans  $\Sigma_{\gamma}$  telle que  $\alpha(\tau(e)) = \varphi(e)$  pour tout  $e \in \alpha(C_2)$ ; alors  $\varphi'$  est une application de  $C_1$  dans  $\Sigma$  vérifiant la condition (H) et telle que, pour tout  $f \in C_2$  on ait :

$$\varphi'(f) = \tau(e') \cdot \varphi(f) \cdot f\tau(e)^{-1}, \quad \text{où} \quad e = \alpha(f), \quad e' = \beta(f).$$

Supposons que  $\tilde{\eta}$  soit une espèce de structures quasi-inductive. Soit  $\mathcal{B}$  une sous-catégorie régulière de  $(\mathcal{C}, <)$  telle que  $(\mathcal{B}, <)$  soit quasi-inductive. Soit  $\Sigma/\mathcal{B} = \bar{\pi}^{-1}(\mathcal{B}_0)$ . Alors

$$((\Sigma/\mathcal{B}), <)$$

admet  $(\mathcal{B}, <)$  pour catégorie ordonnée d'opérateurs; soient



$Z^1(\Sigma/\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\cdot)$  et  $H^1(\Sigma/\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\cdot)$  la classe des 1-cocycles ordonnés et la classe de cohomologie d'ordre 1 correspondantes.

Soit  $N^U(\mathcal{C}, <)$  la classe des triplets  $(\Psi, \psi, \mathfrak{B})$  tels que :

1)  $\Psi$  est un foncteur quasi-inductif de la sous-catégorie  $\mathfrak{B}\cdot$  sur une sous-catégorie  $\mathfrak{B}'\cdot$  de  $\mathcal{C}\cdot$ .

2)  $(i_{\mathfrak{B}'}\cdot\Psi, \psi, i_{\mathfrak{B}})$  est une transformation naturelle, où  $i_{\mathfrak{B}}$  désigne le foncteur injection de  $\mathfrak{B}\cdot$  dans  $\mathcal{C}\cdot$ .

3)  $((\mathcal{C}, <), \psi, (\mathfrak{B}_0, <)) \in \mathcal{J}^U$ .

$N^U(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie pour la loi de composition :

$$(\Psi', \psi', \mathfrak{B}') \cdot (\Psi, \psi, \mathfrak{B}) = (\Psi' \cdot \Psi, \psi' \cdot \psi, \mathfrak{B})$$

si, et seulement si,

$$\mathfrak{B}' = \Psi(\mathfrak{B}), \quad \text{où} \quad (\psi' \cdot \Psi)(e) = \psi'(\Psi(e)) \cdot \psi(e)$$

(c'est-à-dire pour la multiplication latérale des transformations naturelles correspondantes). 1

**PROPOSITION 6.** —  $N^U(\mathcal{C}, <)_\gamma$  est un groupoïde d'opérateurs sur  $\bigcup Z^1(\Sigma/\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\cdot)$  et sur  $\bigcup H^1(\Sigma/\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\cdot)$ . 2

*Démonstration.* — Soit  $(\Psi, \psi, \mathfrak{B}) \in N^U(\mathcal{C}, <)_\gamma$ ,

$$\bar{\varphi} = ((\Sigma/\mathfrak{B})\cdot, \varphi, \mathfrak{B}\cdot) \in Z^1(\Sigma/\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\cdot) \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}' = \Psi(\mathfrak{B}).$$

La catégorie  $\Psi(\mathfrak{B})$  engendre  $(\mathfrak{B}'\cdot, <)$ . Soit  $\varphi'$  l'application :

$$g \rightarrow \psi(e')\varphi(\Psi^{-1}(g)), \quad \text{où} \quad g \in \Psi(\mathfrak{B}) \quad \text{et} \quad \Psi(e') = \beta(g).$$

Soit  $g' \in \Psi(\mathfrak{B})$  et  $\alpha(g') = \beta(g)$ ; on a :

$$\begin{aligned} \varphi'(g' \cdot g) &= \psi(e'')\varphi(\Psi^{-1}(g' \cdot g)) \\ &= \psi(e'')(\varphi(\Psi^{-1}(g')) \cdot \Psi^{-1}(g')\varphi(\Psi^{-1}(g))) \\ &= \varphi'(g') \cdot g'\varphi'(g), \end{aligned}$$

où  $\Psi(e'') = \beta(g')$ , car  $\psi(e'') \cdot \Psi^{-1}(g') = g' \cdot \psi(e')$ . Par suite  $((\Sigma/\mathfrak{B}')\cdot, \varphi', \Psi(\mathfrak{B})\cdot)$  est un 1-cocycle ordonné, qui définit le composé de  $(\Psi, \psi, \mathfrak{B})$  et de  $\bar{\varphi}$ .

— Si  $h \in H^1(\Sigma/\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$  et  $\bar{\varphi} \in h$ , le composé  $(\Psi, \psi, \mathfrak{B}) h$  est la classe :

$$((\Sigma/\mathfrak{B}')\cdot, \varphi', \Psi(\mathfrak{B})\cdot) \text{ mod. } \rho.$$

3+

## 6. — Applications.

A) *Cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes :*

Soit  $E$  un espace topologique et  $\mathcal{C}$  la catégorie ayant pour éléments les couples  $(U', U)$ , où  $U$  et  $U'$  sont deux ouverts de  $E$  et  $U' \subset U$ , la loi de composition étant définie par :

$$(U'', U') \cdot (U', U) = (U'', U).$$

$\mathcal{C}$  est munie de la relation d'ordre définie par :

$$(U'_1, U_1) < (U', U) \text{ si, et seulement si, } U'_1 \subset U' \text{ et } U_1 \subset U.$$

Soit  $\Sigma$  un groupoïde muni de la catégorie d'opérateurs  $\mathcal{C}$  relativement à la loi de composition  $K$ ; soit  $\eta = [\mathcal{C}, \pi, \Sigma]$  l'espèce de structures correspondante.  $(\Sigma, <)$  est munie de la catégorie quasi-inductive d'opérateurs  $(\mathcal{C}, <)$  relativement à  $K$ , la relation d'ordre sur  $\Sigma$  étant définie par :

$$z' < z \quad \text{si, et seulement si,} \quad z' = (\pi(z'), \pi(z))z.$$

L'espèce de structures quasi-inductive  $\tilde{\eta}$  est étalée.

Les 0-cocycles ordonnés sur  $\mathcal{C}$  s'identifient aux sections de  $\pi$  sur  $E$ . Toute sous-catégorie pleine saturée par induction  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$  dont la classe des unités forme un recouvrement de  $E$  engendre  $(\mathcal{C}, <)$ .

1+ Pour que  $\Sigma$  soit un faisceau de groupoïdes sur  $E$  [6], il faut et il suffit que  $\tilde{\eta}$  soit une espèce de structures complète [1 a]. Supposons qu'il en soit ainsi.

**THÉORÈME 1.** — *Il existe une bijection canonique de  $H^1(\Sigma, \mathcal{C})$  sur le premier ensemble de cohomologie [6] à valeurs dans le faisceau de groupoïdes  $\Sigma$ .*

*Démonstration.* — La notion de 1-cocycle ordonné est différente de la notion de 1-cocycle au sens de [6]. En effet, un 1-cocycle au sens de [6] peut être défini, en utilisant notre terminologie (différente de celle de [6]) de la façon suivante : soit  $\mathcal{C}$  une sous-catégorie engendrant  $(\mathcal{C}, <)$ . Soit  $I$  un ensemble d'indices. Soit  $\Sigma_1$  un groupoïde dont les éléments sont des triplets  $(U, j, i) \in \mathcal{C}_0 \times I \times I$ , la loi de composition étant définie par :

$$(U', j', i') \cdot (U, j, i) = (U, j', i) \text{ si, et seulement si, } U' = U, j = i'.$$

Nous supposons que les conditions  $(U, i, i) \in \Sigma_1$  et  $(U, j, j) \in \Sigma_1$  entraînent  $(U, j, i) \in \Sigma_1$ ; de plus  $C \cdot$  opère sur  $\Sigma_1$  relativement à la loi de composition  $K_1: (U', U)(U, j, i) = (U', j, i)$  (c'est-à-dire: si  $(U, j, i) \in \Sigma_1$ , alors  $(U', j, i) \in \Sigma_1$  pour tout  $U' \subset U$ ). Munissons  $\Sigma_1$  de la relation d'ordre:

$(U', j', i') < (U, j, i)$  si, et seulement si,  $U' \subset U$ ,  $j' = j$  et  $i' = i$ .

Alors  $(\Sigma_1, <)$  admet  $(C \cdot, <)$  pour catégorie ordonnée d'opérateurs relativement à  $K_1$ . Un 1-cocycle au sens de [6] s'identifie à une application covariante  $(i_C, \psi)$  ordonnée de

$$((C \cdot, <), (\Sigma_1, <), K_1) \quad \text{vers} \quad ((C \cdot, <), (\Sigma \cdot, <), K). \quad 1$$

Soit  $\bar{\varphi} = (\Sigma \cdot, \varphi, C \cdot) \in Z^1(\Sigma \cdot, C \cdot)$ ; soit  $\Sigma_i$  le groupoïde formé des triplets  $(U'', U, U')$  et  $(U'', U', U)$  tels que

$$U'' \subset U' \subset U, \quad U \in C_0;$$

$\bar{\varphi}$  détermine l'application covariante  $(i_C, \psi)$  telle que

$$\psi(U'', U', U) = (U'', U')\varphi(U', U) \quad 2$$

(= « restriction » de  $\varphi(U', U)$  à  $U''$ ). Inversement soit  $(i_C, \psi)$  une application covariante définissant un 1-cocycle au sens de [6]. Pour tout  $U \in C_0$ , choisissons un  $(U, i, i) \in \Sigma_1$  et posons  $\varphi(U) = \psi(U, i, i)$ . Si  $U' \subset U$  et si  $\varphi(U') = \psi(U', j, j)$ , posons  $\varphi(U', U) = \psi(U', j, i)$ . Alors  $(\Sigma \cdot, \varphi, C \cdot)$  est un 1-cocycle ordonné. Le théorème résulte donc de la définition de  $\varphi$  et de la définition de la relation d'équivalence sur l'ensemble des 1-cocycles de [5]. 3

Nous discuterons dans un autre article le rapport entre les notions de feuilletages de seconde espèce définis par des atlas [4] ou par des classes de cohomologie d'ordre 1 dans un faisceau de groupoïdes [6]. 4

Remarquons que la définition de [6] utilise essentiellement le fait que les seuls morphismes de  $C \cdot$  sont les couples définissant la relation d'ordre et que  $\Sigma \cdot$  est un groupoïde et ne pourrait pas s'étendre au cas général que nous considérons ici.

B) *Structures transverses d'un feuilletage:*

Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique localement simple sur  $E$ . Soit  $\bar{H}'$  le groupoïde d'holonomie complet construit au n° 3.

DÉFINITION 1. — On appelle groupoïde d'holonomie relativement complet le sous-groupoïde plein  $\hat{H}'$  de  $\bar{H}'$  ayant pour unités les atlas complets saturés qui sont majorés par un élément de  $H'_0$ .

Comme  $\hat{H}'$  est une sous-classe saturée par induction dans  $(\bar{H}', <)$ , le groupoïde  $(\hat{H}', <)$  est quasi-inductif régulier.

Supposons que  $\tilde{\eta} = [(H', <), \pi, (\Sigma, <)]$  soit une espèce de structures ordonnée et soit  $\bar{\Sigma}$  la catégorie des hypermorphisms associée à  $[H', \pi, \Sigma]$ . Soit  $\hat{\Sigma}$  la classe des 0-cocycles ordonnés  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \mathcal{B})$  tels que  $\mathcal{B} \in \hat{H}'_0$ , que nous munissons de la relation d'ordre induite par  $(Z_r^0(\Sigma), <)$  (th. 4-4). Soit  $\hat{\pi}$  la restriction de  $Z_r^0(\pi)$  à  $\hat{\Sigma}$ .

Une sous-classe  $\pi$ -complète de  $\Sigma$  est une sous-classe  $C$  de  $\Sigma$ , saturée par induction et par agrégation et telle que :

$$1 \quad \pi(s \circ s') = \pi(s) \circ \pi(s'),$$

si  $s \in C$ ,  $s' \in C$  et si  $s \circ s'$  est défini. On dira que  $\tilde{\eta}$  est complète [1 a] si toute sous-classe  $\pi$ -complète  $C$  telle que  $\pi(C)$  admette un sous-agrégat admissible dans  $H'$  admet un agrégat dans  $\Sigma$ .

2 PROPOSITION 1. — Si  $\tilde{\eta}$  est étalée et complète,

$$\hat{\eta} = [(\hat{H}', <), \hat{\pi}, (\hat{\Sigma}, <)]$$

est une espèce de structures quasi-inductive étalée, dont  $\hat{\eta}$  est une sous-espèce de structures.

Démonstration. — Soit  $F \in \hat{H}'$  et  $(\bar{\Sigma}, \Phi, \bar{a}(F)\cdot) \in \hat{\Sigma}$ . Soit :

$$(\bar{\Sigma}, \Phi', b(F)\cdot) = F(\bar{\Sigma}, \Phi/a(F), a(F)\cdot),$$

où  $\Phi/a(F)$  est la restriction de  $\Phi$  à  $a(F)$  (notations corollaire du th. 4-4). Soit  $\bar{g} = (U_2, g, U_1) \in \bar{b}(F)$ ; il existe une sous-classe  $C$  de  $\bar{b}(F)$  dont  $\bar{g}$  est un sous-agrégat admissible. Comme  $\Phi'$  est une bijection de  $C$  sur  $\Phi'(C)$ , les classes  $\Phi'(\alpha(C))$  et  $\Phi'(\beta(C))$  sont complètes et, puisque  $\tilde{\eta}$  est supposée complète, elles admettent des agrégats  $\sigma$  et  $\sigma'$  respectivement. On a :  $\sigma' = \bar{g}\sigma$ , car  $g's' < \bar{g}\sigma$  pour tout  $g' \in C$  et  $s' \in \alpha(C)$ . Par suite, en posant  $\Phi'(\bar{g}) = (\bar{g}, \sigma)$ , on obtient le 0-cocycle ordonné  $(\bar{\Sigma}, \Phi', \bar{b}(F)\cdot)$  de  $\tilde{\eta}$ . Un raisonnement analogue à celui du théorème 4-4 et

de son corollaire montre que  $\hat{H}'$  opère sur  $\hat{\Sigma}$  relativement à la loi de composition :

$$F(\bar{\Sigma}, \Phi, \bar{a}(F)\cdot) = (\bar{\Sigma}, \Phi', \bar{b}(F)\cdot)$$

et que  $\hat{\eta}$  est une espèce de structures quasi-inductive dont  $\tilde{\eta}$  est une sous-espèce de structures.

DÉFINITION 2. — Si  $\hat{\eta} = [(\hat{H}', <), \hat{\pi}, (\hat{\Sigma}, <)]$  est une espèce de structures quasi-inductive, un 0-cocycle ordonné de  $\hat{\eta}$  sur  $H'$  sera appelé  $\hat{\eta}$ -structure transverse du feuilletage  $(T, T')$ .

On peut ainsi construire par exemple une structure différentiable transverse sur  $(T, T')$ . Si  $U$  est un ouvert simple, soit  $\tilde{\pi}^{-1}(U)$  la classe (supposée non vide) de toutes les structures  $r$  fois différentiables sur les ouverts de l'espace transverse  $\tilde{U}$  (dont la topologie est la topologie quotient de la topologie induite par  $T$ ). Soit  $\Sigma$  la classe réunion des  $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ . Le groupoïde  $H'$  opère sur  $\Sigma$ , le composé  $(U', f, U)s$ , où  $\pi(s) = U$ , étant par définition la structure  $r$  fois différentiable image de  $s$  par l'homéomorphisme  $f$ . Munissons  $\Sigma$  de la relation d'ordre :

$s' < s$  si, et seulement si,  $U' = \pi(s') < \pi(s) = U$  et si l'image de  $s'$  par l'injection canonique  $u$  de  $\tilde{U}'$  dans  $\tilde{U}$  est la structure différentiable induite par  $s$  sur  $u(\tilde{U}')$ .  $\tilde{\eta} = [(H', <), \pi, (\Sigma, <)]$  est une espèce de structures ordonnée étalée complète. Un 0-cocycle ordonné  $\sigma$  de  $\tilde{\eta}$  sur  $\mathcal{B} \in \hat{H}'_0$  sera appelé structure  $r$  fois différentiable transverse sur  $\mathcal{B}$ . D'après la proposition 1,  $\hat{H}'$  opère sur la classe  $\hat{\Sigma}$  des structures  $r$  fois différentiables transverses; soit  $\hat{\eta}$  l'espèce de structures quasi-inductive correspondante. Un 0-cocycle ordonné de  $\hat{\eta}$  sur  $H'$  sera appelé *structure  $r$  fois différentiable transverse de  $(T, T')$* . D'après la proposition 1, une telle structure transverse s'identifie à un 0-cocycle ordonné de  $\tilde{\eta}$  sur  $H'$ .

Soit  $(\bar{\Sigma}, \Phi, H')$  une telle structure  $r$  fois différentiable. Considérons sur le groupoïde  $\Phi(H')$  l'espèce de structures dont les structures se projetant sur  $s \in \Phi(H'_0)$  sont les formes différentielles de degré  $p$  sur  $s$ . Soit  $\tilde{\eta}^p$  l'espèce de structures ordonnée correspondante, qui est définie facilement. Un 0-cocycle ordonné de  $\tilde{\eta}^p$  peut être appelé *forme différentielle transverse de degré  $p$* . Les formes différentielles transverses

forment un module différentiel gradué  $\mathcal{L}^* = (\mathcal{L}^n)$  relativement à l'opérateur  $d$ . On définit par la méthode classique la cohomologie  $H^*(\mathcal{L}^*)$  en posant :

$$H^n(\mathcal{L}^*) = Z^n(\mathcal{L}^*)/B^n(\mathcal{L}^*),$$

où  $Z^n(\mathcal{L}^*)$  est le noyau de l'application  $d$  de  $\mathcal{L}^n$  dans  $\mathcal{L}^{n+1}$  et où  $B^n(\mathcal{L}^*)$  est l'image  $d(\mathcal{L}^{n-1}) \subset \mathcal{L}^n$ .

On définirait de même les notions de champ de vecteurs transverses, de champ de tenseurs transverses, de structures riemanniennes transverses, de connexion transverse, ... (voir aussi [4]).

Une construction analogue à partir de l'espèce de structures  $[H', \pi, \Sigma]$  telle que  $\tilde{\pi}^{-1}(U)$  soit l'ensemble des topologies sur  $\tilde{U}$  plus fines que la topologie de  $\tilde{U}$  conduit à définir les structures topologiques transverses d'un feuilletage. En particulier on a la structure topologique transverse canonique en associant à  $U$  la topologie de  $\tilde{U}$ . On peut également construire les structures de feuilletages transverses : à une telle structure est associé un feuilletage  $(T, T_1)$  sur  $E$  tel que  $(T_1, T')$  soit aussi un feuilletage.

C. *Éléments transverses en un point ou le long d'une feuille :*

Soit  $H''$  le groupoïde d'holonomie pointé, dont les éléments sont les  $(x', U', f, U, x)$  tels que :

$$(U', f, U) \in H', \quad x \in U, \quad x' \in U' \quad \text{et} \quad x' \in f(\check{x}),$$

muni de la loi de composition :

$$(x'', U'', f', U', x') \cdot (x', U', f, U, x) = (x'', U'', f'f, U, x).$$

Si  $F$  est une feuille de  $(T, T')$  la classe des  $(x', U', f, U, x)$  tels que  $x \in F$  est un sous-groupoïde de  $H''$ , noté  $H''(F)$ . Soit  $V$  la classe des éléments  $(U, x, s, \nu)$ , où  $U$  est un ouvert simple,  $x \in U$ ,  $s$  est une structure  $r$  fois différentiable sur  $\tilde{U}$  et  $\nu$  un vecteur sur  $(\tilde{U}, s)$ , de source  $\check{x}$ .  $H''$  opère sur  $V$  (si cette classe n'est pas vide) par la loi de composition :

$$(x', U', f, U, x)(U, x, s, \nu) = (U', x', fs, f\nu).$$

Soit  $\nu$  l'espèce de structures correspondante. Un 0-cocycle de  $\nu$  sur  $H''(F)$  est appelé *vecteur transverse le long de F*. Un

0-cocycle de  $\nu$  sur le sous-groupe  $H''(x)$  formé des  $(x, U', f, U, x)$  est appelé *vecteur transverse en  $x$* .

Soit  $\sigma = (\bar{\Sigma}, \Phi, H')$  une structure  $r$  fois différentiable transverse de  $(T, T')$ . Soit  $V(\sigma)$  l'ensemble des vecteurs transverses associés à  $\sigma$ , c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs transverses  $\Psi_x$  tels que :

$$\Psi_x(U) = (U, x, s, \nu), \quad \text{où} \quad s \in \Phi(H'_0).$$

$V(\sigma)$  est muni d'une structure d'espace fibré vectoriel de base  $E$ .

On étend de même les autres notions de Géométrie différentielle.

D. *Catégorie d'holonomie :*

Soit  $\tilde{H}'$  la catégorie dont les éléments sont les triplets  $(U', f, U)$  tels que l'on ait  $(U'', f, U) \in H'$  et que  $U''$  soit un ouvert saturé de  $U'$ . On munit  $\tilde{H}'$  de la loi de composition :

$$(U'_1, f_1, U_1) \cdot (U', f, U) = (U'_1, f_1 f, U) \text{ si, et seulement si, } U_1 = U',$$

et de la relation d'ordre :

$$(U'_2, f_2, U_2) < (U'_1, f_1, U_1) \quad \text{si, et seulement si,} \quad U'_2 < U'_1$$

et

$$(U''_2, f_2, U_2) < (U''_1, f_1, U_1), \quad \text{où} \quad (U''_i, f_i, U_i) \in H'.$$

Alors  $(\tilde{H}', <)$  est une catégorie ordonnée régulière.

DÉFINITION 3. — On appelle  $(\tilde{H}', <)$  la catégorie d'holonomie associée à  $(T, T')$ .

Soit  $(\Sigma', <)$  une catégorie admettant  $(\tilde{H}', <)$  pour catégorie ordonnée d'opérateurs relativement à  $K$ . On peut alors définir les 1-cocycles ordonnés, les 1-cobords ordonnés et les classes de cohomologie d'ordre 1 correspondantes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] a) Élargissement de catégories, *Sém. topo. et Géo. diff.*, 1961, III, Paris.  
 b) Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Inst. Fourier*, 13, 1963.  
 [2] Structures et catégories d'homomorphismes, chap. I, *Sém. Soc. Can. Un.*, Montréal, 1961.

- [3] Catégories structurées (multigraphié Paris et *Ann. Ec. Norm.*, 1963, fasc. 4); *C.R.A.S.* 256, 1953, pp. 1198-2080-2280; Sous-structures et catégories ordonnées (multigraphié, Paris), à l'imp. dans *Fund. Math.*
- [4] Structures feuilletées, *Proc. 5<sup>th</sup> Can. Math. Congress*, 1961, p. 109.
- [5] Structures quotient (multigraphié Paris et *Comm. Math. Helv.*, 1963, p. 219).
- [6] A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, *Comm. Math. Helv.*, 32, 4, 1958, Zurich.



## COMPLÉTION DES CATÉGORIES ORDONNÉES

par Charles EHRESMANN

### Introduction.

Étant donnée une catégorie ordonnée régulière  $(\mathcal{C}, <)$ , on appelle complétion de  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie quasi-inductive régulière admettant  $\mathcal{C}$  pour sous-catégorie régulière et dont tout élément est un sous-agrégat d'éléments de  $\mathcal{C}$ . Le problème universel de la complétion est le suivant : associer canoniquement à une catégorie ordonnée régulière une complétion « minimale ». Nous montrerons que ce problème a en particulier une solution si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie sous-prélocale régulière vérifiant la condition (P), la complétion étant alors une catégorie sous-locale (et locale si  $(\mathcal{C}, <)$  est prélocale). Plus généralement, nous construirons des plongements d'une catégorie ordonnée régulière dans des catégories quasi-inductives régulières. 1+

Le paragraphe 1 associe à une catégorie ordonnée régulière  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée de fusées, qui admet pour quotient la catégorie quasi-inductive des fusées maximales. Le paragraphe 2 est consacré à l'étude d'une sous-catégorie de la catégorie des fusées, à savoir la catégorie des fusées strictes régulières; elle admet pour catégorie quotient la catégorie des fusées strictes maximales. Si  $(\mathcal{C}, <)$  est préinductive, la catégorie des fusées strictes maximales a une sous-catégorie inductive, qui est une complétion de  $(\mathcal{C}, <)$ . En considérant certains couples  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$ , où  $\mathcal{F}_1$  est une fusée majorée par la fusée stricte  $\mathcal{F}$ , on obtient la notion de superfusée. Les superfusées, qui font l'objet du paragraphe 3, forment une catégorie quasi-inductive régulière. On montre que, si  $(\mathcal{C}, <)$  est sous-prélocale et vérifie la condition (P), elle

admet pour complétion « universelle » une catégorie sous-locale régulière quotient d'une sous-catégorie de la catégorie des superfusées.

- Ces résultats ont été résumés dans 2 Notes [0]. Le cas particulier des groupoïdes sous-locaux a été étudié dans [3]. Dans un prochain travail, nous étudierons le problème de la complétion d'une catégorie sous-prélocale au-dessus d'une catégorie sous-locale, généralisant les théorèmes indiqués dans [4] pour les groupoïdes sous-prélocaux, et nous montrerons comment les catégories des fusées, des fusées strictes et des superfusées interviennent dans divers problèmes, en particulier celui de la cohomologie.

Cet article est la suite de [1] et nous supposons connues les notations et la terminologie des nos 1 et 2 [1]. En particulier, si  $\mathcal{C}$  est une catégorie, nous désignons par  $\mathcal{C}_0$  la classe de ses unités, par  $\mathcal{C}_\gamma$  la classe des éléments inversibles, par  $\alpha$  et  $\beta$  les applications source et but. Si A et B sont deux sous-classes de  $\mathcal{C}$ , les classes B.A et BA sont respectivement formées de tous les composés  $b.a$  et de tous les pseudoproduits  $ba$  tels que  $b \in B$  et  $a \in A$ ; on pose  $A_0 = A \cap \mathcal{C}_0$ .

### 1. Fusées dans les catégories ordonnées.

- DÉFINITION 1. — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée. On appelle fusée neutre de  $(\mathcal{C}, <)$  une sous-catégorie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{C}$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1)  $(\mathcal{B}, <)$  et  $(\mathcal{B}_\gamma, <)$  sont des catégories semi-régulières.  
 2) Soient  $f \in \mathcal{B}$  et  $f' \in \mathcal{B}$ . Si  $\alpha(f) = \alpha(f')$  (resp.  $\beta(f) = \beta(f')$ ), il existe  $f_1 \in \mathcal{B}$  et  $g \in \mathcal{B}_\gamma$  tels que  $f_1 < f$  et  $g.f_1 < f'$  (resp.  $f_1.g < f'$ ).

Si  $\mathcal{B}$  est un sous-groupoïde de  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{B}$  est une fusée neutre de  $(\mathcal{C}, <)$  si, et seulement si,  $(\mathcal{B}, <)$  est une catégorie semi-régulière.

Si  $\mathcal{C}$  est une fusée neutre de la catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée  $(\mathcal{C}, <)$ , alors  $(\mathcal{C}, <)$  est semi-régulière et toute sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$ , saturée par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$ , est une fusée neutre de  $(\mathcal{C}, <)$ .

Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée semi-régulière telle que  $(\mathcal{C}_\gamma, <)$  soit un groupoïde  $\tilde{\Omega}$ -structuré semi-régulier.

DÉFINITION 2. — Soit  $\mathcal{B}$  une fusée neutre de  $(\mathcal{C}, <)$ . On appelle fusée à droite de  $(\mathcal{C}, <)$  compatible avec  $\mathcal{B}$  une sous-classe  $F$  de  $\mathcal{C}$  vérifiant les conditions suivantes :

(F<sub>1</sub>) On a  $F \cdot \mathcal{B} = F$ . Pour tout  $e \in \mathcal{B}_0$ , il existe  $e' \in \alpha(F)$  tel que  $e' < e$ .

(F<sub>2</sub>) Soient  $f \in F$ ,  $e \in \mathcal{B}_0$  et  $e < \alpha(f)$ ; il existe  $f_1 \in F$  tel que  $f_1 < f$  et  $\alpha(f_1) = e$ .

(F<sub>3</sub>) Soient  $f \in F$  et  $f' \in F$ . Si  $\beta(f) = \beta(f')$ , il existe  $f_1 \in F$ ,  $f'_1 \in F$  et  $g \in \mathcal{B}'_1$  tels que  $f_1 < f$ ,  $f'_1 < f'$  et  $f_1 \cdot g = f'_1$ .

On appelle fusée à gauche de  $(\mathcal{C}, <)$  compatible avec  $\mathcal{B}$  une fusée à droite de  $(\mathcal{C}^*, <)$  compatible avec  $\mathcal{B}$ , où  $\mathcal{C}^*$  désigne la catégorie duale de  $\mathcal{C}$ .

Dans la définition 2, on peut remplacer la condition (F<sub>3</sub>) par : Soient  $f \in F$ ,  $f' \in F$  et  $\beta(f) = \beta(f')$ . Il existe  $f_1 \in F$  et  $g \in \mathcal{B}'_1$  tels que  $f_1 < f$  et  $f_1 \cdot g < f'$ .

DÉFINITION 3. — On dira que  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est une fusée de  $(\mathcal{C}, <)$  si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont des fusées neutres de  $(\mathcal{C}, <)$  et si  $F$  est une fusée à droite de  $(\mathcal{C}, <)$  compatible avec  $\mathcal{B}$  et une fusée à gauche de  $(\mathcal{C}, <)$  compatible avec  $\mathcal{B}'$ .

En particulier, tout atlas  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  de  $\mathcal{C}$  tel que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  soient des fusées neutres de  $(\mathcal{C}, <)$  est une fusée de  $(\mathcal{C}, <)$ . (Voir [1].)

PROPOSITION 1. — Soit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  une fusée de  $(\mathcal{C}, <)$ . Alors  $\alpha(F)$  et  $\beta(F)$  sont des sous-classes saturées par induction de  $\mathcal{B}_0$  et de  $\mathcal{B}'_0$  respectivement. Soient  $f \in F$  et  $f' \in F$  tels que  $\beta(f)$  et  $\beta(f')$  admettent un minorant  $e$  dans  $(\mathcal{B}_0, <)$ ; il existe  $f_1 \in F$  et  $g \in \mathcal{B}'_1$  tels que  $f_1 < f$  et  $f_1 \cdot g < f'$ . (On a de même la propriété duale.)

En effet, la première partie résulte des conditions (F<sub>1</sub>) et (F<sub>2</sub>). Comme  $e < \beta(f)$ , il existe  $\bar{f} \in F$  tel que  $\bar{f} < f$  et  $\beta(\bar{f}) = e$ ; il existe aussi  $\bar{f}' < f'$  tel que  $\bar{f}' \in F$  et  $\beta(\bar{f}') = e$  et la proposition résulte de la condition (F<sub>3</sub>) appliquée aux éléments  $\bar{f}$  et  $\bar{f}'$ .

Soit  $I$  une classe d'indices. Soit  $((\mathcal{C}, I), <)$  la catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée semi-régulière définie de la façon suivante :  $(\mathcal{C}, I)$  est la catégorie produit  $\mathcal{C} \times (I \times I)^\perp$ , où  $(I \times I)^\perp$

est le groupoïde des couples  $(j, i) \in I \times I$  muni de la loi de composition :

$$(j', i') \perp (j, i) = (j', i) \quad \text{si, et seulement si, } i' = j.$$

$(\mathcal{C}, I)$  est munie de la relation d'ordre définie par :

$$(f', j', i') < (f, j, i)$$

si, et seulement si,  $i' = i$ ,  $j' = j$  et  $f' < f$ .

Si  $C$  est une sous-classe de  $\mathcal{C}$ , pour tout  $(j, i) \in I \times I$ , nous noterons  $(C, j, i)$  la sous-classe de  $(\mathcal{C}, I)$  ayant pour éléments les  $(c, j, i)$  tels que  $c \in C$ .

Soient  $(j, i) \in I \times I$  et  $i \neq j$ . Soient  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $F$  des sous-classes de  $\mathcal{C}$ . Soit  $(\mathcal{F}, j, i)$  la classe réunion de  $(\mathcal{B}, i, i)$ ,  $(\mathcal{B}', j, j)$  et  $(F, j, i)$ . Pour que  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  soit une fusée de  $(\mathcal{C}, <)$ , il faut et il suffit que  $(\mathcal{F}, j, i)$  soit une sous-catégorie de  $(\mathcal{C}, I)$  et que

$$\mathcal{F}^i = ((\mathcal{B}', j, j), (F, j, i), (\mathcal{B}, i, i))$$

soit une fusée de  $((\mathcal{F}, j, i), <)$ . Dans ce cas,  $((\mathcal{F}, j, i), <)$  est une sous-catégorie semi-régulière de  $((\mathcal{C}, I), <)$ .

**THÉORÈME 1.** — *La classe  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  des fusées  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  de  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie pour la loi de composition définie par :*

$$(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}'_1) \cdot (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}'', F' \cdot F, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,  $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'$ .

*Démonstration.* — Soit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ ; on a

$$(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <), \quad (\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \cdot (\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}') \cdot (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

puisque  $F \cdot \mathcal{B} = F = \mathcal{B}' \cdot F$ . Soit  $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}'_1) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ . Montrons que  $(\mathcal{B}'', F' \cdot F, \mathcal{B})$  est une fusée de  $(\mathcal{C}, <)$ . En effet, on a :

$$F' \cdot F \cdot \mathcal{B} = F' \cdot F = \mathcal{B}' \cdot F' \cdot F.$$

Supposons  $f \in F$ ,  $f' \in F'$  et  $\alpha(f') = \beta(f)$ . Si  $e \in \mathcal{B}_0$  et  $e < \alpha(f)$ , il existe  $f_1 \in F$  tel que  $f_1 < f$  et  $\alpha(f_1) = e$ ; comme

$$\beta(f_1) \in \beta(F) \subset \mathcal{B}'_0 \quad \text{et} \quad \beta(f_1) < \alpha(f'),$$

il existe  $f'_1 < f'$  tel que  $f'_1 \in F'$  et  $\alpha(f'_1) = \beta(f_1)$ , d'où

$$f'_1 \cdot f_1 \in F' \cdot F, \quad f'_1 \cdot f_1 < f' \cdot f \quad \text{et} \quad \alpha(f'_1 \cdot f_1) = e.$$

Démonstration analogue si  $e'' < \beta(f' \cdot f)$ . — Soit  $\bar{f} \in F$  et  $\bar{f}' \in F'$ , tels que  $\alpha(\bar{f}') = \beta(\bar{f})$  et  $\alpha(f) = \alpha(\bar{f})$ . Il existe  $f_1 < f$ ,  $\bar{f}_1 < \bar{f}$  et  $g' \in \mathfrak{B}'_1$  tels que  $f_1 = g' \cdot \bar{f}_1$ . Comme  $F'$  est une fusée de  $(\mathcal{C}, <)$ , il existe  $f'_1 \in F'$  tel que  $f'_1 < f'$  et  $\alpha(f'_1) = \beta(g')$ . D'après la proposition 1, les relations  $f'_1 \cdot g' \in F' \cdot \mathfrak{B}' = F'$ ,  $\bar{f}' \in F'$  et  $\alpha(g') < \alpha(\bar{f}')$  entraînent qu'il existe  $f'' \in F'$ ,  $\bar{f}'' \in F'$  et  $g'' \in \mathfrak{B}'_1$  tels que  $\bar{f}'' < \bar{f}'$ ,  $f'' < f'_1 \cdot g'$  et  $f'' = g'' \cdot \bar{f}''$ . Puisque  $\alpha(\bar{f}''_1) \in \mathfrak{B}'_0$  et  $\alpha(\bar{f}''_1) < \beta(\bar{f}''_1)$  il existe  $\bar{f}_2 \in F$  tel que  $\bar{f}_2 < \bar{f}''_1$  et  $\beta(\bar{f}_2) = \alpha(\bar{f}''_1)$  et il existe  $g'_1 \in \mathfrak{B}'_1$  vérifiant les conditions :

$$g'_1 < g' \quad \text{et} \quad \alpha(g'_1) = \alpha(\bar{f}''_1).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \bar{f}''_1 \cdot \bar{f}_2 &< \bar{f}' \cdot \bar{f}, & g'_1 \cdot \bar{f}_2 &\in F, \\ g'_1 \cdot \bar{f}_2 &< g' \cdot \bar{f}_1 = f_1 < f, \\ f'' \cdot g'^{-1} &\in F' & \text{et} & f'' \cdot g'^{-1} < (f'_1 \cdot g') \cdot g'^{-1} < f'. \end{aligned}$$

Donc

$$(f'' \cdot g'^{-1}) \cdot (g'_1 \cdot \bar{f}_2) \in F' \cdot F, \quad \bar{f}''_1 \cdot \bar{f}_2 < \bar{f}' \cdot \bar{f}$$

et

$$g'' \cdot (\bar{f}''_1 \cdot \bar{f}_2) = (f'' \cdot g'^{-1}) \cdot (g'_1 \cdot \bar{f}_2) < f' \cdot f.$$

1

On montre de même que la condition duale est vérifiée. De plus si  $e \in \mathfrak{B}_0$ , il existe  $f \in F$  tel que  $\alpha(f) < e$ ; comme  $\beta(f) \in \mathfrak{B}'$ , il existe  $f' \in F'$  tel que  $\alpha(f') < \beta(f)$  et il existe  $f_1 \in F$  tel que  $f_1 < f$  et  $\beta(f_1) = \alpha(f')$ ; il en résulte  $f' \cdot f_1 \in F' \cdot F$  et  $\alpha(f' \cdot f_1) < e$ . Donc  $(\mathfrak{B}'', F' \cdot F, \mathfrak{B})$  est une fusée de  $(\mathcal{C}, <)$ . Comme la loi de composition entre classes :

$$(F', F) \rightarrow F' \cdot F$$

est associative, on en déduit que  $\mathfrak{F}(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie. Nous identifions la classe des unités à la classe des fusées neutres de  $(\mathcal{C}, <)$  en identifiant  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B})$  avec  $\mathfrak{B}$ .

Pour tout  $f \in \mathcal{C}$ , nous désignons par  $f^>$  la classe des mineurs de  $f$ .

DÉFINITION 4. — Nous dirons que  $(\mathcal{C}, <)$  vérifie la condition (C) si, pour tout  $f \in \mathcal{C}$ , le triplet  $(\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>)$  est une fusée de  $(\mathcal{C}, <)$ .

2

**PROPOSITION 2.** — *Supposons que  $(\mathcal{C}, <)$  vérifie la condition (C) et soit  $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  la sous-classe de  $\mathcal{C}$  obtenue en saturant par induction  $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  dans  $(\mathcal{C}, <)$ . Alors  $(\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>, \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>, \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>)$  est une fusée de  $(\mathcal{C}, <)$ .*

*Démonstration.* —  $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  est une fusée neutre de  $(\mathcal{C}, <)$  et  $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  est saturé par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$ . Soient  $g \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  et  $g' \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  tels que  $\alpha(g) = \alpha(g') = e$ . Il existe  $\gamma \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  et  $\gamma' \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  tels que  $g < \gamma$  et  $g' < \gamma'$ . Puisque  $(\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>, <)$  est semi-régulier, il existe  $\gamma_1 \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  et  $\gamma'_1 \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  tels que :

$$\gamma_1 < \gamma, \quad \gamma'_1 < \gamma' \quad \text{et} \quad \alpha(\gamma_1) = e = \alpha(\gamma'_1).$$

Comme  $\gamma^>$  définit une fusée, il existe  $g_1 < g$  et  $\bar{\gamma} \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  tels que  $\bar{\gamma} \cdot g_1 < \gamma_1$ . Soit  $\bar{\gamma}_1 \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  vérifiant  $\bar{\gamma}_1 < \gamma'_1 \cdot \bar{\gamma}_1^{-1}$  et  $\alpha(\bar{\gamma}_1) = \beta(\bar{\gamma})$ . Les relations :

$$\begin{aligned} & \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma} \cdot g_1 < \gamma'_1 \cdot \bar{\gamma}_1^{-1} \cdot \gamma_1 < \gamma', \quad g' < \gamma' \\ \text{et} \quad & \alpha(\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma} \cdot g_1) = \alpha(g_1) < \alpha(g) = \alpha(g') \end{aligned}$$

assurent, en vertu de la proposition 1 appliquée à la fusée déterminée par  $\gamma'^>$ , l'existence de  $g'_1 < g'$  et de  $\bar{\gamma}' \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  tels que :

$$\bar{\gamma}' \cdot g'_1 < (\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}) \cdot g_1.$$

Soit  $\bar{\gamma}_2 \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  tel que  $\bar{\gamma}_2 < \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}$  et  $\beta(\bar{\gamma}_2) = \beta(\bar{\gamma}')$ . On obtient :

$$\bar{\gamma}_2^{-1} \cdot \bar{\gamma}' \in \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^> \quad \text{et} \quad (\bar{\gamma}_2^{-1} \cdot \bar{\gamma}') \cdot g'_1 < (\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma})^{-1} \cdot (\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}) \cdot g_1 < g.$$

Ainsi  $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  est une fusée compatible à gauche avec  $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$ . Par dualité, on voit que  $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$  est une fusée compatible à droite avec  $\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>$ . Donc  $(\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>, \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>, \mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>)$  est une fusée de  $(\mathcal{C}, <)$ .

**2** Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée régulière telle que  $(\mathcal{C}_{\bar{\gamma}}^>, <)$  soit un groupoïde ordonné semi-régulier. Alors  $((\mathcal{C}, \mathbb{I}), <)$  est une catégorie ordonnée régulière.

**DÉFINITION 5.** — *On dira qu'une fusée  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  de  $(\mathcal{C}, <)$  est régulière si la sous-catégorie  $(\mathcal{F}, j, i)$  de  $(\mathcal{C}, \mathbb{I})$  correspondante est une sous-catégorie régulière de  $((\mathcal{C}, \mathbb{I}), <)$ .*

Pour que la fusée  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  de  $(\mathcal{C}, <)$  soit régulière, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1)  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}'_0$  sont des sous-classes de  $\mathcal{C}_0$ , saturées par intersection finie (c'est-à-dire contenant avec deux éléments leur intersection dans  $(\mathcal{C}_0, <)$  si celle-ci existe).

2) On a :  $\mathcal{B}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}'$ ,  $F\mathcal{B} \subset F$  et  $\mathcal{B}'F \subset F$ .

**THÉORÈME 2.** — Soit  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  la classe des fusées régulières de  $(\mathcal{C}, <)$ .  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ . Munie de la relation d'ordre

$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  si, et seulement si,  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}'_1$  sont des sous-catégories pleines saturées par induction de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  respectivement et si  $F_1 \subset F$ ,

$\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  devient une catégorie  $\tilde{\Omega}^s$ -structurée assez régulière.

*Démonstration.* — Soient

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <).$$

Il en résulte  $\mathcal{B} \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  et  $\mathcal{B}' \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ . Soient  $f \in F$ ,  $f' \in F'$  et  $g \in \mathcal{B}$  tels que  $(f' \cdot f)g \in (F' \cdot F)\mathcal{B}$ . Puisque  $(\mathcal{C}, <)$  est supposée régulière, le pseudoproduit est associatif (proposition 5-2 [1]) et on a :

$$(f' \cdot f)g = (f' \beta(fg)) \cdot (fg).$$

Les relations :

$$fg \in F\mathcal{B} \subset F$$

et

$$f' \beta(fg) \in F' \beta(F) \subset F' \mathcal{B}' = F'$$

entraînent  $(f' \cdot f)g \in F' \cdot F$ . Par suite  $(F' \cdot F)\mathcal{B} \subset F' \cdot F$ . Par dualité, on a  $\mathcal{B}'(F' \cdot F) \subset F' \cdot F$ . Donc  $(\mathcal{B}'', F' \cdot F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ , de sorte que  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ .

— Montrons que la relation  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  dans  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$  entraîne que  $F_1$  est une sous-classe saturée par induction de  $F$ . En effet, soient  $f_1 \in F_1$  et  $f \in F$  tels que  $f < f_1$ ; on a  $\alpha(f) \in \mathcal{B}_1$  et  $\beta(f) \in \mathcal{B}'_1$ , car  $\mathcal{B}_1$  est saturé par induction dans  $(\mathcal{B}, <)$ . Comme  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie ordonnée, on obtient :

$$f = \beta(f)(f_1 \alpha(f)) \in \mathcal{B}'_1(F_1 \mathcal{B}_1) \subset F_1.$$

Si  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ , on trouve  $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ . Supposons de plus  $(\mathcal{B}''_1, F'_1, \mathcal{B}'_1) < (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}')$  dans

$$(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <).$$

Alors :

$$(\mathcal{B}''_1, F'_1 \cdot F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', F' \cdot F, \mathcal{B}).$$

Ainsi  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}^s$ -structurée.

— Soient  $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ , où  $i \in I$ . Soit  $\mathcal{B}_1 = \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \mathcal{B}_i$  (resp.  $\mathcal{B}'_1 = \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}$  (resp. de  $\mathcal{B}'$ ) ayant pour classe de ses unités la classe réunion des  $\alpha(\mathcal{B}_i)$  (resp. des  $\alpha(\mathcal{B}'_i)$ ),  $i \in I$ ; alors  $\mathcal{B}_1$  est saturé par induction dans  $\mathcal{B}$  et c'est un sous-agrégat des  $\mathcal{B}_i$ . Soit  $F_1$  la classe des  $f \in F$  qui sont majorés par un élément de  $\mathcal{B}'_1.F_i.\mathcal{B}_1$ , où  $i \in I$ . On a :  $F_1.\mathcal{B}_1 = F_1 = \mathcal{B}'_1.F_1$ . Pour tout  $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$  (resp.  $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$ ), il existe  $i \in I$  et  $f_i \in F_i$  tels que  $\alpha(f_i) < e$  (resp.  $\beta(f_i) < e'$ ). Comme  $F_1$  est saturée par induction dans  $F$ ,  $\mathcal{A} = (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$  vérifie aussi l'axiome  $(F_3)$ , de sorte que  $\mathcal{A}$  est une fusée régulière de  $(\mathcal{C}', <)$ , majorée par  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ . Puisque  $\mathcal{B}'_1$  est une sous-catégorie pleine saturée par induction de  $\bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i$ , on en déduit  $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < \mathcal{A}$ , pour tout  $i \in I$ , et  $\mathcal{A}$  est un sous-agrégat des  $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i)$ . Ainsi  $(\mathcal{F}'(\mathcal{C}', <), <)$  est une classe sous-inductive.

— Supposons  $\mathcal{B}_1 \in \mathcal{F}'(\mathcal{C}', <)_0$  et  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'(\mathcal{C}', <)$ ; soit  $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ . On a :

$$F.\mathcal{B}_1 \subset F.\mathcal{B} = F \quad \text{et} \quad F.\mathcal{B}_1 \subset F.\alpha(\mathcal{B}_1),$$

$$\text{d'où} \quad F.\mathcal{B}_1 = F.\alpha(\mathcal{B}_1).$$

Soit  $\mathcal{B}'_1$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}'$  ayant pour unités les  $e' \in \mathcal{B}'_0$  tels qu'il existe  $f \in F.\mathcal{B}_1$  pour lequel  $\beta(f) < e'$ . On a :

$$\mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1 = F.\mathcal{B}_1$$

et

$$F.\mathcal{B}_1 = \beta(F).F.\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1,$$

c'est-à-dire  $\mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1 = F.\mathcal{B}_1$ . La classe  $\mathcal{B}_1$  étant saturée par induction dans  $\mathcal{B}$ , la classe  $F.\alpha(\mathcal{B}_1)$  est saturée par induction dans  $F$  et  $F.\alpha(\mathcal{B}_1) = F.\alpha(\mathcal{B}_1)$ . Puisque  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}'_1$  sont des sous-catégories pleines de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  respectivement,  $(\mathcal{B}'_1, F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$  est une fusée régulière, qui est le pseudoproduit de  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  et de  $\mathcal{B}_1$  dans  $(\mathcal{F}'(\mathcal{C}', <), <)$ . De même si  $\mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'$ , il existe un pseudoproduit  $\mathcal{B}'_2(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  admettant  $\mathcal{B}'_2$  pour unité à gauche. Ceci montre que  $(\mathcal{F}'(\mathcal{C}', <), <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée assez régulière, et par suite, en utilisant ce qui précède et la proposition 12-2 [1], une catégorie  $\tilde{\Omega}^s$ -structurée.



*Remarques.* — 1) Munie de la relation d'ordre définie par :  
 $(\mathfrak{B}'_1, F_1, \mathfrak{B}_1) < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$  si, et seulement si,  $\mathfrak{B}_1$  et  $\mathfrak{B}'_1$  sont  
 des sous-catégories pleines saturées par induction de  $\mathfrak{B}$   
 et  $\mathfrak{B}'$  respectivement et si  $F_1$  est une sous-classe saturée  
 par induction de  $F$ ,

la catégorie  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  peut ne pas être  $\tilde{\Omega}$ -structurée.

2) Avec les hypothèses du théorème 2,  $(\mathcal{F}(\mathcal{C}, <), <)$   
 peut ne pas être une catégorie ordonnée.

3) Si  $(\mathcal{C}, <)$  est seulement une catégorie ordonnée assez  
 régulière, alors  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  peut ne pas être une sous-catégorie  
 de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ .

*Soit*  $(\mathcal{C}, <)$  *une catégorie*  $\tilde{\Omega}$ -*structurée semi-régulière telle*  
*que*  $(\mathcal{C}_\gamma, <)$  *soit un groupoïde ordonné semi-régulier.*

THÉORÈME 3. —  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  *admet une catégorie quotient*  
*strict [2] par la relation d'équivalence*  $\rho$  :

$(\mathfrak{B}', F_1, \mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{B}', F_2, \mathfrak{B})$  *si, et seulement si, pour tout*  $f_i \in F_i$   
*il existe*  $f_j \in F_j$  *tel que*  $f_j < f_i$ , *où*  $i, j = 1, 2$  *et*  $i \neq j$ .

*Démonstration.* — La relation  $\rho$  est évidemment symétrique  
 et réflexive. Montrons qu'elle est transitive. En effet, supposons

$$(\mathfrak{B}', F_1, \mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) \quad \text{et} \quad (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{B}', F_2, \mathfrak{B}).$$

Soit  $f_i \in F_i$ , où  $i = 1, 2$ ; il existe  $f \in F$  tel que  $f < f_i$  et il  
 existe  $f_j \in F_j$ ,  $j = 1, 2$ ,  $j \neq i$ , tel que  $f_j < f$ , d'où  $f_j < f_i$  et :

$$(\mathfrak{B}', F_1, \mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{B}', F_2, \mathfrak{B}).$$

Par suite  $\rho$  est une relation d'équivalence.

— Montrons que si  $(\mathfrak{B}', F_1, \mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ , on a

$$(\mathfrak{B}', F \cup F_1, \mathfrak{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <),$$

où  $F \cup F_1$  désigne la classe réunion de  $F$  et de  $F_1$ . Pour cela,  
 prouvons que les conditions  $f \in F$ ,  $f_1 \in F_1$  et  $\alpha(f) = \alpha(f_1)$  assurent  
 l'existence de  $h \in F \cup F_1$ , de  $h' \in F \cup F_1$  et de  $g' \in \mathfrak{B}'_\gamma$  tels que :

$$h < f, \quad h' < f_1 \quad \text{et} \quad h' = g'.h;$$

la propriété analogue si  $\beta(f) = \beta(f_1)$  s'en déduira par dualité,  
 et les autres conditions d'une fusée sont évidemment vérifiées.

Puisque  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ , il existe  $f' \in F$  tel que  $f' < f_1$ . Des relations  $\alpha(f') \in \mathcal{B}$  et  $\alpha(f') < \alpha(f)$ , on déduit qu'il existe  $f'' \in F$  tel que  $f'' < f$  et  $\alpha(f'') = \alpha(f')$ . Par conséquent il existe aussi  $h \in F$ ,  $h' \in F$  et  $g' \in \mathcal{B}'_f$  tels que  $h' = g'.h$ ,  $h' < f'' < f$  et  $h' < f' < f_1$ , ce qui démontre l'affirmation précédente.

— Soit  $\rho(F)$  la classe réunion des classes  $F_i$  telles que

$$(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).$$

Si  $f \in \rho(F)$  et  $f' \in \rho(F)$ , il existe  $F_i$  et  $F_j$  tels que  $f \in F_i$  et  $f' \in F_j$ . D'après ce qui précède, il existe  $h \in F_i \cup F_j \subset \rho(F)$  et  $g' \in \mathcal{B}'_f$  tels que, si  $\alpha(f) = \alpha(f')$  :

$$h < f \quad \text{et} \quad g'.h < f'.$$

Il en résulte que  $(\mathcal{B}', \rho(F), \mathcal{B})$  est une fusée. Cette fusée est équivalente à  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  et c'est le plus grand élément de la classe  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \bmod \rho$  relativement à la relation d'ordre :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{si, et seulement si,} \quad F_1 \subset F.$$

L'application  $\tilde{\rho}$  :

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \bmod \rho \rightarrow (\mathcal{B}', \rho(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de la classe quotient  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)/\rho$  sur une sous-classe de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ .

— Montrons que la relation d'équivalence  $\rho$  est compatible sur la classe multiplicative  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ , c'est-à-dire [2] que les relations :

$$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}'_2, F_2, \mathcal{B}_2)$$

et

$$(\mathcal{B}''_1, F'_1, \mathcal{B}'_1) \sim (\mathcal{B}''_2, F'_2, \mathcal{B}'_2)$$

entraînent  $(\mathcal{B}'_1, F'_1.F_1, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}''_2, F'_2.F_2, \mathcal{B}_2)$ . En effet, soit  $i = 1, 2$ ,  $f_i \in F_i$ ,  $f'_i \in F'_i$  et  $f'_i.f_i \in F'_i.F_i$ ; il existe  $f_j \in F_j$  tel que  $f_j < f_i$ , où  $j = 1, 2$  et  $j \neq i$ . Comme

$$\beta(f_j) \in \mathcal{B}' \quad \text{et} \quad \beta(f_j) < \alpha(f'_i),$$

il existe  $f''_i < f'_i$ ,  $f''_i \in F'_i$  tel que  $\alpha(f''_i) = \beta(f_j)$ . Il existe aussi  $f'_j \in F'_j$  pour lequel  $f'_j < f''_i$ . Puisque  $\alpha(f'_j) \in \mathcal{B}'$  et  $\alpha(f'_j) < \beta(f_j)$ , il existe  $\bar{f}_j \in F_j$  tel que  $\bar{f}_j < f_j$  et  $\beta(\bar{f}_j) = \alpha(f'_j)$ , d'où :

$$f'_j.\bar{f}_j \in F'_j.F_j \quad \text{et} \quad f'_j.\bar{f}_j < f'_i.f_i.$$

— La relation  $\rho$  n'identifiant pas deux unités différentes de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ , il existe [2] une catégorie quotient strict de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  par  $\rho$ . Cette catégorie admet pour classe de ses unités la classe des triplets  $(\mathcal{B}, \rho(\mathcal{B}), \mathcal{B})$  où  $\mathcal{B}$  est une fusée neutre de  $(\mathcal{C}, <)$ .

Nous désignerons par  $\Phi(\mathcal{C}, <)$  la catégorie quotient strict de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  ayant pour support la classe  $\tilde{\rho}(\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)/\rho)$ .

PROPOSITION 3. — Soit  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ . Si

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi(\mathcal{C}, <)$$

et si  $F$  est une sous-classe saturée par induction de  $F_1$ , on a  $F = F_1$ .

Démonstration. — Montrons que l'on a

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$$

modulo  $\rho$ , d'où résultera la proposition. Soit  $f_1 \in F_1$ ; comme  $\alpha(f_1) \in \mathcal{B}$ , il existe  $f \in F$  tel que  $\alpha(f) < \alpha(f_1)$ ; puisque  $\alpha(f) \in \mathcal{B}$ , il existe  $f'_1 \in F_1$  tel que  $f'_1 < f_1$  et  $\alpha(f'_1) = \alpha(f)$ . Dans la fusée  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$ , il existe  $\bar{f}_1 \in F_1$ ,  $\bar{f}'_1 \in F_1$  et  $g' \in \mathcal{B}'$  vérifiant :

$$\bar{f}_1 < f, \quad \bar{f}'_1 < f'_1 \quad \text{et} \quad \bar{f}'_1 = g' \cdot \bar{f}_1.$$

La classe  $F$  étant saturée par induction dans  $F_1$ , on a  $\bar{f}_1 \in F$ , d'où  $\bar{f}'_1 \in \mathcal{B}' \cdot F = F$  et  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ , car  $\bar{f}'_1 < f_1$ .

COROLLAIRE. — Soient  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée assez régulière et  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  une fusée régulière de  $(\mathcal{C}, <)$ . On a

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi(\mathcal{C}, <)$$

si, et seulement si, les conditions  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  et  $F \subset F_1$  entraînent  $F = F_1$ .

En effet, supposons ces conditions vérifiées. Si

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

on a  $(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ , d'après la démonstration du théorème 3. Mais par hypothèse il en résulte  $F \cup F_1 = F$ . Donc  $F = \rho(F)$ . Inversement, soit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi(\mathcal{C}, <)$ ; soit  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  et  $F \subset F_1$ . Si  $f \in F$  et  $f_1 \in F_1$  sont tels que  $f_1 < f$ , on a :

$$f_1 = \beta(f_1)(f\alpha(f_1)) \in \mathcal{B}'(F\mathcal{B}) = F.$$

Par suite  $F$  est saturée par induction dans  $F_1$  et le corollaire résulte de la proposition 3.

1 Nous supposons désormais que  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie ordonnée régulière telle que  $(\mathcal{C}, <)$  soit un groupoïde ordonné semi-régulier.

**THÉORÈME 4.** —  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  admet une catégorie quotient strict relativement à la relation d'équivalence  $\rho^r$  induite par  $\rho$ . De plus la classe  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)/\rho^r$  est isomorphe à une sous-classe de  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ .

*Démonstration.* — Comme  $\rho$  est compatible et n'identifie pas deux unités distinctes de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ , il en est de même pour  $\rho^r$  et  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  admet une catégorie quotient strict par  $\rho^r$ . Si  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \bmod \rho^r$  on a  $(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  d'après la démonstration du théorème 3. Puisque

$$(F \cup F_1)\mathcal{B} \subset (F\mathcal{B} \cup F_1\mathcal{B}) \subset F \cup F_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'(F \cup F_1) \subset F \cup F_1,$$

on trouve  $(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ . Il en résulte que, si  $\rho^r(F)$  désigne la classe réunion des  $F_i$  tels que

$$(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{modulo } \rho^r,$$

on a  $(\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  et  $(\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B})$  est le plus grand élément de la classe  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \bmod \rho^r$  relativement à la relation d'ordre :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}) \quad \text{si, et seulement si,} \quad F_1 \subset F_2.$$

L'application  $\tilde{\rho}^r$  :

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \text{ modulo } \rho^r \rightarrow (\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)/\rho^r$  sur une sous-classe de  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ .

Remarquons que si  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est une fusée régulière de  $(\mathcal{C}, <)$ , on peut avoir  $\rho(F) \neq \rho^r(F)$ .

Nous désignerons par  $\Phi^r(\mathcal{C}, <)$  la catégorie quotient strict de  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  ayant pour support la classe

$$\tilde{\rho}^r(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)/\rho^r).$$

PROPOSITION 4. — Supposons  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)$ . On a  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$  si, et seulement si, la condition

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$$

dans  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$  entraîne  $F = F_1$ .

En effet, si la condition est vérifiée, on a  $F = \rho^r(F)$ . Inversement, supposons  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$  et

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}).$$

D'après la démonstration du théorème 2,  $F$  est une sous-classe saturée par induction de  $F_1$ . Une démonstration analogue à celle de la proposition 3 prouve que l'on a

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \text{ modulo } \rho^r,$$

d'où  $F = F_1$ .

DÉFINITION 6. — On appelle fusée maximale de  $(\mathcal{C}', <)$  1+  
une fusée régulière de  $(\mathcal{C}', <)$  appartenant à  $\Phi^r(\mathcal{C}', <)$ .

THÉORÈME 5. — La catégorie  $\Phi^r(\mathcal{C}', <)^*$  des fusées maximales de  $(\mathcal{C}', <)$ , munie de la relation d'ordre induite par

$$(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <),$$

est une catégorie quasi-inductive régulière, qui est une catégorie quotient  $\tilde{\Omega}^s$ -structurée de  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$ .

Démonstration. — Supposons  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  dans  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$ , c'est-à-dire (théorème 2)  $\mathcal{B}'_1$  et  $\mathcal{B}_1$  sont des sous-catégories pleines saturées par induction de  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$  resp. et  $F_1$  est une sous-classe de  $F$ ; on sait qu'alors  $F_1$  est saturée par induction dans  $F$ .

— Si  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)$ , soit  $f \in F$ ; si  $f_1 \in \mathcal{B}'_0 \cdot f > \cdot \mathcal{B}_0$  on a :

$$f_1 = \beta(f_1)(f\alpha(f_1)) \in \mathcal{B}'(F\mathcal{B}) = F.$$

— Montrons que la relation  $\rho^r$  est équivalente à la relation :

$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$  si, et seulement si,  $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$  est une fusée de  $(\mathcal{C}', <)$ .

En vertu de la démonstration du théorème 4, il suffit de montrer que les conditions :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), \quad (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$$

entraînent  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$  modulo  $\rho^r$ . En effet, soit  $i = 1, 2$  et  $f_i \in F_i$ ; il existe  $f_j \in F_j$ ,  $j = 1, 2$  et  $j \neq i$ , tel que  $\alpha(f_j) < \alpha(f_i)$  et il existe  $f'_i \in F_i$  tel que  $\alpha(f'_i) = \alpha(f_j)$  et  $f'_i < f_i$ . Comme  $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$  est une fusée, il existe  $h \in F_1 \cup F_2$ ,  $h' \in F_1 \cup F_2$  et  $g' \in \mathcal{B}'_1$  tels que :

$$h < f_j, \quad h' < f'_i \quad \text{et} \quad h' = g' \cdot h.$$

La fusée  $(\mathcal{B}', F_j, \mathcal{B})$  étant régulière, on a :

$$h \in \mathcal{B}'_0 \cdot f_j \cdot \mathcal{B}_0 \subset F_j,$$

d'où  $h' \in \mathcal{B}' \cdot F_j = F_j$ . Par suite  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$  modulo  $\rho^r$ .

— Supposons  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ ,  $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$  dans  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$ . Posons  $F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1$ . Supposons que, pour tout  $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ , il existe  $f_1 \in F_1$  tel que  $\alpha(f_1) < e$  et que, pour tout  $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$ , il existe  $f'_1 \in F_1$  tel que  $\beta(f'_1) < e'$  et montrons qu'alors  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$  est une fusée maximale. La classe

$$F_1 = \alpha(\mathcal{B}'_1) \cdot F \cdot \alpha(\mathcal{B}_1)$$

étant saturée par induction dans  $F$ ,  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$  est une fusée régulière de  $(\mathcal{C}, <)$ . Pour montrer que cette fusée est maximale, nous allons prouver que si on a  $(\mathcal{B}'_1, K, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$ , alors  $(\mathcal{B}', \mathcal{B}' \cdot K \cdot \mathcal{B} \cup F, \mathcal{B})$  est une fusée. En effet, posons  $K' = \mathcal{B}' \cdot K \cdot \mathcal{B}$  et  $H = K' \cup F$ . Soient  $k \in K$  et  $g \in \mathcal{B}$ ; si  $kg$  est défini, on a :  $kg = (ke) \cdot (eg)$ , où  $e = \alpha(k) \cap \beta(g)$  et  $eg \in \mathcal{B}$ ;  $\mathcal{B}_1$  étant saturé par induction dans  $\mathcal{B}$ , on a  $e \in \mathcal{B}_1$ , d'où

$$ke \in K\mathcal{B}_1 \subset K \quad \text{et} \quad kg \in K \cdot \mathcal{B}.$$

Il en résulte  $K\mathcal{B} = K \cdot \mathcal{B}$ ; de même  $\mathcal{B}'K = \mathcal{B}' \cdot K$ , de sorte que l'on obtient :

$$K' = (\mathcal{B}'K)\mathcal{B}, \quad K'\mathcal{B} = (\mathcal{B}' \cdot K \cdot \mathcal{B})\mathcal{B} \subset (\mathcal{B}'K)(\mathcal{B}\mathcal{B}) = K'$$

et

$$\mathcal{B}'K' \subset K', \quad \text{d'où} \quad H\mathcal{B} = H = \mathcal{B}'H.$$

Pour tout  $e \in \mathfrak{B}_0$ , il existe  $f \in F$  tel que  $\alpha(f) < e$  et pour tout  $e' \in \mathfrak{B}'_0$ , il existe  $f' \in F$  tel que  $\beta(f') < e'$ . Soit  $f \in F$ ,  $g'.k.g \in K'$  et  $\alpha(g) = \alpha(f)$ , où  $g \in \mathfrak{B}$ ,  $g' \in \mathfrak{B}'$  et  $k \in K$ . Il existe  $f_1 \in F_1$  tel que  $f_1 < k$ , d'où :

$$g'f_1g \in \mathfrak{B}'(F_1\mathfrak{B}) \subset \mathfrak{B}'(F\mathfrak{B}) = F;$$

comme  $e = \alpha(g'f_1g) < \alpha(f)$ , d'après la proposition 1 il existe  $h \in F$ ,  $h' \in F$  et  $\gamma' \in \mathfrak{B}'_\gamma$  tels que  $h' = \gamma'.h$ ,  $h < g'f_1g < g'.k.g$  et  $h' < f$ . Par dualité on en déduit que, si  $f \in F$ ,  $g'.k.g \in K'$  et  $\beta(f) = \beta(g')$ , il existe  $h_1 \in F$ ,  $h'_1 \in F$  et  $\gamma \in \mathfrak{B}_\gamma$  tels que :

$$h'_1 < g'.k.g, \quad h_1 < f \quad \text{et} \quad h' = h_1.\gamma.$$

Supposons encore  $g'.k.g \in K'$  et soit  $\bar{g}'.\bar{k}.\bar{g} \in K'$ , où  $\bar{g} \in \mathfrak{B}$ ,  $\bar{g}' \in \mathfrak{B}'$ ,  $\bar{k} \in K$  et  $\alpha(g) = \alpha(\bar{g})$ . D'après ce qui précède, on a

$$g'f_1g \in F, \quad (\bar{g}'.\bar{k}.\bar{g})e \in K' \quad \text{où} \quad \alpha(g'f_1g) = e;$$

donc il existe  $\bar{h} \in F$ ,  $\bar{h}' \in F$  et  $\bar{\gamma}' \in \mathfrak{B}'_\gamma$  tels que

$$\bar{h} < g'f_1g, \quad \bar{h}' < \bar{g}'.\bar{k}.\bar{g} \quad \text{et} \quad \bar{h}' = \bar{\gamma}'.\bar{h}.$$

Dualement les conditions  $k_1 \in K'$ ,  $k'_1 \in K'$  et  $\beta(k_1) = \beta(k'_1)$  assurent l'existence de  $h_1 \in F$ , de  $h'_1 \in F$  et de  $\gamma_1 \in \mathfrak{B}_\gamma$  tels que :  $h'_1 < k'_1$ ,  $h_1 < k_1$  et  $h'_1 = h_1.\gamma_1$ . Ceci prouve que  $(\mathfrak{B}', H, \mathfrak{B})$  est une fusée. La fusée  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$  étant maximale, on en déduit  $H = F$ , c'est-à-dire  $K \subset F$ . Par suite on a :  $F_1 \subset \rho'(F_1) \subset F$ , d'où  $\rho'(F_1) = F_1$ , car  $\rho'(F_1) \subset \mathfrak{B}'_1.F.\mathfrak{B}_1 = F_1$ . Ceci prouve que  $(\mathfrak{B}'_1, F_1, \mathfrak{B}_1)$  est une fusée maximale, majorée par  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ .

— Soit  $(\mathfrak{B}'_1, F', \mathfrak{B}_1) < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$  dans  $(\Phi'(\mathcal{C}', <), <)$ . Comme pour tout  $e \in \alpha(\mathfrak{B}_1)$  (resp. tout  $e' \in \alpha(\mathfrak{B}'_1)$ ), il existe

$$f' \in F' \subset \mathfrak{B}'_1.F.\mathfrak{B}_1$$

tel que  $\alpha(f') < e$  (resp.  $\beta(f') < e'$ ), on a aussi, d'après ce qui précède,  $(\mathfrak{B}'_1, \mathfrak{B}'_1.F.\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1) \in \Phi'(\mathcal{C}', <)$ . Puisque

$$F' \subset \mathfrak{B}'_1.F.\mathfrak{B}_1,$$

il résulte de la proposition 4 que  $F' = \mathfrak{B}'_1.F.\mathfrak{B}_1$ . Par suite si  $(\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B}) \in \Phi'(\mathcal{C}', <)$  et  $(\mathfrak{B}'_1, F_1, \mathfrak{B}_1) \in \mathcal{F}'(\mathcal{C}', <)$ , on a

$$(\mathfrak{B}'_1, F_1, \mathfrak{B}_1) < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$$

dans  $(\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle), \langle \rangle)$  si, et seulement si,  $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{B}'_1 < \mathfrak{B}'$  et  $F_1 = \mathfrak{B}'_1 \cdot F \cdot \mathfrak{B}_1$ . En particulier, on a  $\bar{\rho}^r(\mathfrak{B}_1) < \bar{\rho}^r(\mathfrak{B})$  si, et seulement si,  $\mathfrak{B}_1 < \mathfrak{B}$  dans  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle), \langle \rangle)$ , où  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{B}_1$  sont des fusées neutres régulières de  $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  et  $\bar{\rho}^r(\mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \rho^r(\mathfrak{B}), \mathfrak{B})$ . Si  $(\mathfrak{B}', F_1, \mathfrak{B}) < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$ , on a  $F_1 = \mathfrak{B}' \cdot F \cdot \mathfrak{B} = F$ .

— Nous désignerons par  $\bullet$  la loi de composition de la catégorie  $\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)^\bullet$  quotient de  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$ . Supposons

$$(\mathfrak{B}'_1, F_1, \mathfrak{B}_1) < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$$

et

$$(\mathfrak{B}''_1, F'_1, \mathfrak{B}'_1) < (\mathfrak{B}'', F', \mathfrak{B}')$$

dans  $(\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle), \langle \rangle)$ ; on a :

$$(\mathfrak{B}'', \rho^r(F' \cdot F), \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}'', F', \mathfrak{B}') \bullet (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$$

et

$$(\mathfrak{B}''_1, \rho^r(F'_1 \cdot F_1), \mathfrak{B}_1) = (\mathfrak{B}''_1, F'_1, \mathfrak{B}'_1) \bullet (\mathfrak{B}'_1, F_1, \mathfrak{B}_1).$$

Comme  $F'_1 \cdot F_1 \subset \mathfrak{B}''_1 \cdot \rho^r(F' \cdot F) \cdot \mathfrak{B}_1$  et que

$$(\mathfrak{B}''_1, F'_1 \cdot F_1, \mathfrak{B}_1) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle),$$

on trouve, en utilisant ce qui précède,  $\mathfrak{K} \in \Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$ , où

$$\mathfrak{K} = (\mathfrak{B}''_1, \mathfrak{B}''_1 \cdot \rho^r(F' \cdot F) \cdot \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1),$$

$\mathfrak{K} \sim (\mathfrak{B}''_1, F'_1 \cdot F_1, \mathfrak{B}_1)$ , d'où

$$\mathfrak{K} = (\mathfrak{B}''_1, \rho^r(F'_1 \cdot F_1), \mathfrak{B}'_1) < (\mathfrak{B}'', \rho^r(F' \cdot F), \mathfrak{B}).$$

On en déduit que  $(\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)^\bullet, \langle \rangle)$  est une catégorie ordonnée.

— Supposons  $(\mathfrak{B}'_i, F_i, \mathfrak{B}_i) < (\mathfrak{B}', F, \mathfrak{B})$  pour tout  $i \in I$ . Soit  $\tilde{\mathfrak{B}}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{B}$  ayant pour classe de ses unités la classe réunion des  $\alpha(\mathfrak{B}_i)$ , où  $i \in I$ ; comme  $\mathfrak{B}_i$  est saturé par induction dans  $\mathfrak{B}$ , la classe  $\tilde{\mathfrak{B}}$  est saturée par induction dans  $\mathfrak{B}$  et on a  $\mathfrak{B}_i < \tilde{\mathfrak{B}} < \mathfrak{B}$ ; donc  $\bar{\rho}^r(\tilde{\mathfrak{B}})$  est le  $\bar{\rho}^r(\mathfrak{B})$ -agrégal de la classe des  $\bar{\rho}^r(\mathfrak{B}_i)$ . Posons  $\tilde{\mathfrak{B}}' = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}'_i$ . Pour tout  $e \in \tilde{\mathfrak{B}}_0$  (resp. tout  $e' \in \tilde{\mathfrak{B}}'_0$ ), il existe  $i$  tel que  $e \in \alpha(\mathfrak{B}_i)$  (resp.  $e' \in \alpha(\mathfrak{B}'_i)$ ) de sorte qu'il existe  $f_i \in F_i \subset \tilde{\mathfrak{B}}' \cdot F \cdot \tilde{\mathfrak{B}}$  pour lequel  $\alpha(f_i) < e$  (resp.  $\beta(f_i) < e'$ ). Il résulte du début de la démonstration que l'on a :

$$\mathfrak{A}_I = (\tilde{\mathfrak{B}}', \tilde{\mathfrak{B}}' \cdot F \cdot \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{\mathfrak{B}}) \in \Phi^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$$



et  $\mathcal{A}_I < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ . La relation :

$$F_i = \mathcal{B}'_i . F . \mathcal{B}_i = \mathcal{B}'_i . \tilde{\mathcal{B}}' . F . \tilde{\mathcal{B}} . \mathcal{B}_i$$

entraîne  $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < \mathcal{A}_I$ , pour tout  $i \in I$ . On en déduit que  $\mathcal{A}_I$  est le  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ -agrégat de la classe des  $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i)$ . Donc  $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$  est une classe sous-inductive.

— Supposons  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$  et  $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ ; soit  $\alpha(\mathcal{B}'_1)$  la sous-classe de  $\mathcal{B}'_0$  formée des  $e' \in \mathcal{B}'_0$  tels qu'il existe  $h \in F . \mathcal{B}_1$  vérifiant  $\beta(h) < e'$ . Soit  $\mathcal{B}'_1$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}'$  ayant  $\alpha(\mathcal{B}'_1)$  pour classe de ses unités; on a  $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ . Pour tout  $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ , il existe  $f \in F$  tel que  $\alpha(f) < e$ ; on en déduit :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$$

et  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$  est le pseudoproduit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})_{\mathcal{B}_1}$  dans  $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$ . De même si  $\mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'$ , il existe un pseudoproduit  $\mathcal{B}'_2(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  ayant  $\mathcal{B}'_2$  pour unité à gauche. Ceci prouve que  $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$  est une catégorie ordonnée assez régulière et par suite, en utilisant ce qui précède et le corollaire 2 de la proposition 12-2[1], une catégorie quasi-inductive.

— Soient  $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$ ,  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$  et :

$$(\mathcal{B}'_1, K, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', \rho^r(F' . F), \mathcal{B}')$$

dans  $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$ . Soit  $E'$  la classe des  $e' \in \mathcal{B}'_0$  tels qu'il existe  $f \in F$  et  $f' \in F'$  vérifiant les conditions :

$$\alpha(f) \in \mathcal{B}_1, \quad \beta(f') \in \mathcal{B}'_1 \quad \text{et} \quad \alpha(f') = \beta(f) < e'.$$

Si  $e'' \in \mathcal{B}'_0$  et  $e'' < e'$ , on a :  $h = (f' e'') . (e'' f) \in F' . F$  et  $h < f' . f$ , d'où  $e'' \in E'$ . Par suite  $E'$  est une sous-classe saturée par induction de  $\mathcal{B}'_0$  et la sous-catégorie pleine  $\mathcal{B}'_1$  de  $\mathcal{B}'$  ayant  $E'$  pour classe de ses unités est telle que l'on ait  $\bar{\rho}^r(\mathcal{B}'_1) < \bar{\rho}^r(\mathcal{B}')$  dans  $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$ . Pour tout  $e \in \mathcal{B}_1$ , il existe  $k \in K \subset \rho^r(F' . F)$  tel que  $\alpha(k) < e$ ; comme

$$(\mathcal{B}'', F' . F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}'', \rho^r(F' . F), \mathcal{B}'),$$

il existe  $f \in F$  et  $f' \in F'$  tels que  $f' . f < k$ , d'où  $\alpha(f') \in E'$  et  $\alpha(f) < e$ . Donc

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$$

et

$$\mathcal{A}_1 < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).$$

De même :

$$\mathcal{A}'_1 = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1.F'.\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$$

et

$$\mathcal{A}'_1 < (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}').$$

De ce qui précède, il résulte :  $\mathcal{A}'_1 \cdot \mathcal{A}_1 < (\mathcal{B}'', \rho^r(F'.F), \mathcal{B})$  et :

$$\mathcal{A}'_1 \cdot \mathcal{A}_1 = (\mathcal{B}'_1, K, \mathcal{B}_1),$$

car ces deux fusées maximales ont même source  $\mathcal{B}_1$ , même but  $\mathcal{B}'_1$  et sont majorées par  $(\mathcal{B}'', \rho^r(F'.F), \mathcal{B})$ . Ceci montre que  $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière.

— Montrons que  $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$  est une classe sous-inductive quotient de  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$ . En effet, soit  $\bar{\rho}^r$  l'application :

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B})$$

de

$$\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <) \quad \text{sur} \quad \Phi^r(\mathcal{C}', <).$$

Supposons  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  dans  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$ . Comme  $F_1 \subset \rho^r(F)$  on a, en vertu de ce qui précède :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1.\rho^r(F).\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}', <)$$

et

$$\mathcal{A} < (\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B}).$$

La condition  $F_1 \subset \mathcal{B}'_1.\rho^r(F).\mathcal{B}_1$  entraînant  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}$ , on a :

$$\mathcal{B}'_1.\rho^r(F).\mathcal{B}_1 = \rho^r(F_1)$$

et

$$\bar{\rho}^r(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < \bar{\rho}^r(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).$$

Soient  $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  dans  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$ , où  $i \in I$ ; soit  $(\tilde{\mathcal{B}}', F_I, \tilde{\mathcal{B}})$  le  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ -agrégat des  $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i)$  (voir théorème 2). Puisque  $F_I \subset \tilde{\mathcal{B}}'.F.\tilde{\mathcal{B}}$ , on obtient :

$$(\tilde{\mathcal{B}}', F_I, \tilde{\mathcal{B}}) \sim (\tilde{\mathcal{B}}', \tilde{\mathcal{B}}'.F.\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}),$$

ce qui signifie que  $\bar{\rho}^r$  est une application quasi-inductive. La restriction de  $\bar{\rho}^r$  à  $\Phi^r(\mathcal{C}', <)$  étant l'identité, la condition ( $q^r$ ) (proposition 30, [2]) est vérifiée et  $(\Phi^r(\mathcal{C}', <), <)$  est une classe sous-inductive quotient de  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <), <)$  en vertu de la même proposition.  $\bar{\rho}^r$  définissant aussi la catégorie  $\Phi^r(\mathcal{C}', <)^*$  comme catégorie quotient strict de  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}', <)$ , on en déduit que

$(\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)^*, \langle \cdot \rangle)$  est une catégorie quotient  $\tilde{\Omega}^s$ -structurée de  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle), \langle \cdot \rangle)$ .

**COROLLAIRE.** — Si  $(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)$  vérifie la condition (C) (définition 4), alors  $(\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)^*, \langle \cdot \rangle)$  admet une sous-catégorie ordonnée, isomorphe à une catégorie quotient de  $(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)$ .

*Démonstration.* — Pour tout  $f \in \mathcal{C}$ , désignons par  $\tilde{f}$  la fusée maximale :

$$\tilde{f} = \bar{\rho}^r(\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>).$$

Si  $f' \in \mathcal{C}$  et si  $f'.f$  est défini, on a :  $(f'.f)^> = (f'^>).(f^>)$ , d'où :  $(\widetilde{f'.f}) = \tilde{f}' \cdot \tilde{f}$ . Si  $f_1 < f$  dans  $(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)$ , pour tout  $f'_1 < f'$  tel que :  $\alpha(f'_1) < \alpha(f_1)$  et  $\beta(f'_1) < \beta(f_1)$ , on a  $f'_1 < f_1$ , d'où  $\tilde{f}'_1 < \tilde{f}$  dans  $(\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle), \langle \cdot \rangle)$ . Par suite la classe  $\tilde{\mathcal{C}}$  des  $\tilde{f}$ , où  $f \in \mathcal{C}$ , est une sous-catégorie ordonnée de

$$(\Phi^r(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)^*, \langle \cdot \rangle),$$

équivalente à la catégorie quotient de  $(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)$  par la relation d'équivalence :

$f_1 \sim f_2$  si, et seulement si,  $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ ,  $\beta(f_1) = \beta(f_2)$  et si, pour tout  $f'_i < f_i$ , il existe  $f'_j < f_j$  tel que  $f'_j < f'_i$ , où  $i, j = 1, 2$  et  $j \neq i$ .

*Cas particuliers :*

A) Supposons que  $(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)$  admette une plus petite unité notée 0. Une sous-catégorie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{C}$  contenant 0 est une fusée neutre de  $(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)$  si, et seulement si,  $(\mathcal{B}, \langle \cdot \rangle)$  et  $(\mathcal{B}, \langle \cdot \rangle)$  sont des catégories semi-régulières. Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  des fusées neutres de  $(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)$  et  $F$  une sous-classe de  $\mathcal{C}$  contenant 0. Pour que  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  soit une fusée de  $(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)$ , il faut et il suffit que l'on ait  $\mathcal{B}' \cdot F = F = F \cdot \mathcal{B}$  et que, si  $f \in F$ ,  $e \in \mathcal{B}_0$  et  $e < \alpha(f)$  (resp.  $e' \in \mathcal{B}'_0$  et  $e' < \beta(f)$ ), il existe  $f_1 \in F$  tel que  $f_1 < f$  et  $\alpha(f_1) = e$  (resp.  $\beta(f_1) = e'$ ). Si  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est une telle fusée,  $\rho(F)$  est la classe des  $f \in \mathcal{B}' \cdot \mathcal{C} \cdot \mathcal{B}$  tels que, si  $e \in \mathcal{B}_0$  et  $e < \alpha(f)$  (resp.  $e' \in \mathcal{B}'_0$  et  $e' < \beta(f)$ ), il existe  $f_1 < f$  pour lequel  $\alpha(f_1) = e$  et  $\beta(f_1) \in \mathcal{B}'$  (resp.  $\beta(f_1) = e'$  et  $\alpha(f_1) \in \mathcal{B}$ ).

Si  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$  sont des fusées neutres régulières de  $(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)$  et si  $F$  est une sous-classe de  $\mathcal{B}' \cdot \mathcal{C} \cdot \mathcal{B}$  contenant 0,  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est une fusée régulière de  $(\mathcal{C}, \langle \cdot \rangle)$  si, et seulement si,  $\mathcal{B}'F = F = F\mathcal{B}$ ;

dans ce cas,  $\rho^r(F)$  est la classe des  $f \in \mathcal{B}' \cdot \mathcal{C} \cdot \mathcal{B}$  tels que  $\beta(f\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}'$  et  $\alpha(\mathcal{B}'f) \subset \mathcal{B}$ .

La classe des fusées régulières  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  telles que 0 n'appartienne ni à  $F$ , ni à  $\mathcal{B}$ , ni à  $\mathcal{B}'$ , est une sous-catégorie de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ , qui est pleine, saturée par induction et saturée pour la relation d'équivalence  $\rho^r$ .

B) Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie; soit  $(\mathcal{C}, <)$  la catégorie ordonnée régulière obtenue en munissant  $\mathcal{C}$  de la relation d'ordre (triviale):

$$f' < f \text{ si, et seulement si, } f' = f.$$

Soit  $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  la catégorie des atlas de  $\mathcal{C}$  (voir [1], 1, dont nous reprenons les notations).

**PROPOSITION 5.** *Les catégories  $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)^*$  et  $\Phi^r(\mathcal{C}, <)^*$  sont identiques et  $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}), <)$  (théorème 2-2[1]) est une catégorie quasi-inductive identique à  $(\Phi^r(\mathcal{C}, <)^*, <)$ .*

*Démonstration.* — Soit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ . Si  $e \in \mathcal{B}_0$ , il existe  $f \in F$  tel que  $\alpha(f) < e$ , d'où  $\alpha(f) = e$  et  $\mathcal{B}_0 = \alpha(F)$ ; de même  $\mathcal{B}'_0 = \beta(F)$ . Soient  $f \in F$  et  $f' \in F$  tels que  $\beta(f) = \beta(f')$ . Il existe  $f_1 \in F$  et  $g \in \mathcal{B}'_1$  tels que  $f_1 < f$  et  $f_1 \cdot g < f'$ , c'est-à-dire  $f_1 = f$  et  $f \cdot g = f'$ . Donc  $F$  est un atlas de  $\mathcal{C}$ . De plus les conditions  $g \in \mathcal{B}$  et  $\alpha(g) \in \mathcal{B}_0$  entraînent  $g \in \mathcal{B}'_1$ , puisque  $\mathcal{B}$  est un atlas. Donc  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'_1$  et  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est un atlas de  $\mathcal{C}$ . — Inversement, soit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ . Comme  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $F$  sont des sous-classes saturées par induction de  $\mathcal{C}$ ,  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est une fusée régulière de  $(\mathcal{C}, <)$ . Les conditions  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  et  $F \subset F_1$  entraînent  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  d'après ce qui précède, d'où  $F = F_1$ , car  $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}), <)$  est une catégorie ordonnée. Par suite  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est une fusée maximale en vertu de la proposition 4. Il en résulte:

$$\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{C}, <) = \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)^* = \Phi^r(\mathcal{C}, <)^*.$$

## 2. Fusées strictes

1 Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée semi-régulière telle que  $(\mathcal{C}'_\gamma, <)$  soit un groupoïde ordonné semi-régulier.

DÉFINITION 1. — On appelle fusée stricte neutre de  $(\mathcal{C}, <)$  une sous-catégorie  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{C}$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1)  $(\mathcal{B}, <)$  et  $(\mathcal{B}_\gamma, <)$  sont des catégories semi-régulières.
- 2) Soient  $f \in \mathcal{B}$  et  $f' \in \mathcal{B}$ . Si  $\alpha(f) = \alpha(f')$  (resp.  $\beta(f) = \beta(f')$ ), il existe  $f_1 \in \mathcal{B}$  et  $g \in \mathcal{B}_\gamma$  tels que  $f_1 < f$ ,  $\alpha(f_1) = \alpha(f)$  et  $g \cdot f_1 < f'$  (resp.  $f_1 < f$ ,  $\beta(f_1) = \beta(f)$  et  $f_1 \cdot g < f'$ ).

DÉFINITION 2. — Soit  $\mathcal{B}$  une fusée neutre de  $(\mathcal{C}, <)$ . On appelle fusée stricte à droite de  $(\mathcal{C}, <)$  compatible avec  $\mathcal{B}$  une sous-classe  $F$  de  $\mathcal{C}$  vérifiant les conditions  $(F_1)$  et  $(F_2)$  (définition 2-1) et la condition :

- $(F_3)$  Soient  $f \in F$  et  $f' \in F$ . Si  $\beta(f) = \beta(f')$ , il existe  $f_1 \in F$  et  $g \in \mathcal{B}_\gamma$  tels que  $f_1 < f$ ,  $\beta(f_1) = \beta(f)$  et  $f_1 \cdot g < f'$ .

On appelle fusée stricte à gauche de  $(\mathcal{C}, <)$  compatible avec  $\mathcal{B}$  une fusée stricte à droite de  $(\mathcal{C}^*, <)$ , compatible avec  $\mathcal{B}$ . On appelle fusée stricte de  $(\mathcal{C}, <)$  un triplet  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  tel que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  soient des fusées strictes neutres de  $(\mathcal{C}, <)$  et  $F$  une fusée stricte à droite compatible avec  $\mathcal{B}$  et une fusée stricte à gauche compatible avec  $\mathcal{B}'$ .

Une fusée stricte (resp. stricte neutre) de  $(\mathcal{C}, <)$  est aussi une fusée (resp. fusée neutre) de  $(\mathcal{C}, <)$ .

THÉORÈME 1. — La classe  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$  des fusées strictes de  $(\mathcal{C}, <)$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ , qui admet une catégorie quotient strict par la relation d'équivalence  $\rho^s$  :

- $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$  si, et seulement si, pour tout  $f_i \in F_i$  il existe  $f_j \in F_j$  tel que  $f_j < f_i$  et  $\alpha(f_i) = \alpha(f_j)$ , où  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ , et  $f'_j \in F_j$  tel que  $f'_j < f_i$  et  $\beta(f'_j) = \beta(f_i)$ .

La classe quotient  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)/\rho^s$  est isomorphe à une sous-classe de  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$ .

Démonstration. — Si  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$ , on a par définition  $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$  et  $\mathcal{B}' \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$ . Supposons de plus  $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$  et montrons que  $(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$  est une fusée stricte. Comme  $(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$  est une fusée d'après le théorème 1-1, il suffit de montrer que  $(F_3)$  est vérifié. Soient  $f' \cdot f \in F'.F$ ,  $\bar{f}' \cdot \bar{f} \in F'.F$ ,  $f \in F'$ ,  $f' \in F'$ ,  $\bar{f} \in F$  et  $\bar{f}' \in F'$  tels que  $\alpha(f) = \alpha(\bar{f})$ . Il existe  $f_1 \in F$  et  $g' \in \mathcal{B}'_\gamma$  tels que  $f_1 < f$ ,  $\alpha(f_1) = \alpha(f)$  et  $\bar{f}_1 = g' \cdot f_1 < \bar{f}$ . Comme  $\alpha(g') \in \mathcal{B}'$ , il existe, en vertu de  $(F_1)$ ,

$f'_1 \in F'$  tel que  $f'_1 < f'$  et  $\alpha(f'_1) = \alpha(g')$  et il existe  $\bar{f}'_1 \in F'$  tel que  $\bar{f}'_1 < \bar{f}'$  et  $\alpha(\bar{f}'_1) = \beta(g')$ . Puisque  $\bar{f}'_1 \cdot g' \in F' \cdot \mathcal{B}' = F'$ , il existe  $f'_2 \in F'$  et  $g'' \in \mathcal{B}''_1$  tels que :

$$f'_2 < f'_1, \quad \alpha(f'_2) = \alpha(f'_1) \quad \text{et} \quad \bar{f}'_2 = g'' \cdot f'_2 < \bar{f}'_1 \cdot g'.$$

Des relations :

$$\begin{aligned} f'_2 \cdot f_1 &\in F' \cdot F, & f'_2 \cdot f_1 &< f' \cdot f, \\ g'' \cdot (f'_2 \cdot f_1) &= \bar{f}'_2 \cdot f_1 = (\bar{f}'_2 \cdot g'^{-1}) \cdot \bar{f}'_1 \end{aligned}$$

et

$$(\bar{f}'_2 \cdot g'^{-1}) \cdot \bar{f}'_1 < \bar{f}'_1 \cdot g' \cdot g'^{-1} \cdot \bar{f}'_1 = \bar{f}'_1 \cdot \bar{f}'_1 < \bar{f}' \cdot \bar{f},$$

on déduit que  $F' \cdot F$  est une fusée stricte à gauche, compatible avec  $\mathcal{B}''$ . Par dualité on en déduit que  $F' \cdot F$  est une fusée stricte à droite, compatible avec  $\mathcal{B}''$ . Donc  $(\mathcal{B}'', F' \cdot F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}', <)$  et  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}', <)$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{F}(\mathcal{C}', <)$ .

— La relation  $\rho^s$  est évidemment symétrique et réflexive.

Supposons :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}).$$

Soient  $i, j = 1, 2, i \neq j$  et  $f_i \in F_i$ ; il existe  $f \in F$  tel que  $f < f_i$  et  $\alpha(f_i) = \alpha(f)$ ; il existe aussi  $f_j \in F_j$  tel que  $\alpha(f_j) = \alpha(f)$  et  $f_j < f$ , d'où  $f_j < f_i$  et  $\alpha(f_i) = \alpha(f_j)$ . De même on construit  $f'_j \in F_j$  tel que  $f'_j < f_i$  et  $\beta(f'_j) = \beta(f_i)$ . Par suite

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$$

et  $\rho^s$  est une relation d'équivalence. Remarquons que la classe d'équivalence de  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  modulo  $\rho^s$  est contenue dans la classe d'équivalence de  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  modulo  $\rho$  (théorème 3-1).

— Montrons que  $\rho^s$  est compatible sur la classe multiplicative  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}', <)$ . Supposons  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$  et

$$(\mathcal{B}'', F'_1, \mathcal{B}') \sim (\mathcal{B}'', F'_2, \mathcal{B}').$$

Soit  $f'_i \cdot f_i \in F'_i \cdot F_i$ , où  $i = 1, 2, f_i \in F_i$  et  $f'_i \in F'_i$ . Soit  $j = 1, 2, j \neq i$ ; il existe  $f_j \in F_j$  tel que  $\alpha(f_j) = \alpha(f_i)$  et  $f_j < f_i$ . Les relations  $\beta(f_j) \in \mathcal{B}'$  et  $\beta(f_j) < \alpha(f'_i)$  entraînent qu'il existe  $f''_i \in F'_i$  pour lequel  $f''_i < f'_i$  et  $\alpha(f''_i) = \beta(f_j)$ ; de plus il existe  $f'_j \in F'_j$  tel que  $\alpha(f'_j) = \alpha(f''_i)$  et  $f'_j < f''_i$ . On en déduit :

$$f'_j \cdot f_j \in F'_j \cdot F_j, \quad f'_j \cdot f_j < f'_i \cdot f_i$$

et

$$\alpha(f'_j \cdot f_j) = \alpha(f'_i \cdot f_i).$$

On construit de même  $\bar{f}'_j \cdot \bar{f}_j \in F'_j, F_j$  tel que  $\bar{f}'_j \cdot \bar{f}_j < f'_i \cdot f_i$  et  $\beta(\bar{f}'_j \cdot \bar{f}_j) = \beta(f'_i)$ . Par conséquent  $(\mathcal{B}'', F'_1 \cdot F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}'', F'_2 \cdot F_2, \mathcal{B})$  et  $\rho^s$  est compatible sur  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$ .

— Comme  $\rho^s$  n'identifie pas deux unités différentes de

$$\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <),$$

il existe une catégorie quotient strict  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)/\rho^s$ .

— Montrons que si  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ , alors

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$$

est une fusée stricte, où  $F_1 \cup F_2$  désigne la classe réunion de  $F_1$  et  $F_2$ . D'après la démonstration du théorème 3-1, on a  $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, <)$ . Soient  $h \in F_1 \cup F_2$  et  $h' \in F_1 \cup F_2$  tels que  $\alpha(h) = \alpha(h')$  (le cas  $\beta(h) = \beta(h')$  s'en déduit par dualité). Il existe  $h_1 \in F_1$  et  $h'_1 \in F_1$  tels que :

$$h_1 < h, \quad h'_1 < h' \quad \text{et} \quad \alpha(h_1) = \alpha(h'_1) = \alpha(h).$$

Comme  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$  est une fusée stricte, il existe  $\bar{h}_1 \in F_1$  et  $g' \in \mathcal{B}'_1$  vérifiant les conditions :

$$\bar{h}_1 < h_1 < h, \quad \bar{h}_1 = g' \cdot \bar{h}_1 < h'_1 < h' \quad \text{et} \quad \alpha(\bar{h}_1) = \alpha(h_1).$$

Il en résulte que  $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$  est une fusée stricte.

— Soit  $\rho^s(F)$  la classe réunion des  $F_i$  tels que :

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \text{ modulo } \rho^s.$$

La démonstration précédente montre aussi que l'on a

$$(\mathcal{B}', \rho^s(F), \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}', \rho^s(F), \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

de sorte que l'application  $\tilde{\rho}^s$  :

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \text{ modulo } \rho^s \rightarrow (\mathcal{B}', \rho^s(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)/\rho^s$  sur une sous-classe de  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$ .

**COROLLAIRE.** —  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$  admet pour sous-catégorie la classe  $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$  des fusées strictes  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  telles que  $\alpha(F) = \mathcal{B}_0$  et  $\beta(F) = \mathcal{B}'$ .  $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$  est une sous-classe saturée relativement à  $\rho^s$ .

*Démonstration.* — Supposons  $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$  et  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$ . Soit  $e \in \alpha(\mathcal{B})$ ; il existe  $f \in F$  tel que  $\alpha(f) = e$ ; comme  $\beta(f) \in \mathcal{B}'_0$ , il existe  $f' \in F'$  tel que  $\alpha(f') = \beta(f)$  et on a  $f'.f \in F'.F$  et  $\alpha(f'.f) = e$ . Donc  $\alpha(F'.F) = \mathcal{B}_0$ ; de même  $\beta(F'.F) = \mathcal{B}'_0$ , de sorte que  $(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$  appartient à  $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$  et  $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$ .

— Supposons  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$  modulo  $\rho^s$ . On a évidemment :

$$\alpha(F_1) = \alpha(F_2) \quad \text{et} \quad \beta(F_1) = \beta(F_2).$$

Par suite si  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$ , on a aussi

$$(\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <).$$

1 Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée régulière telle que  $(\mathcal{C}, <)$  soit un groupoïde ordonné semi-régulier.

Nous désignerons par  $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <)$  la classe des fusées strictes régulières de  $(\mathcal{C}, <)$ , c'est-à-dire la classe intersection de  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  et de  $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}, <)$ . Soit  $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}, <)$  la classe intersection de  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  et de  $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}, <)$  (corollaire du théorème 1).

**PROPOSITION 1.** —  $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <)$  est une sous-catégorie saturée par induction de  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$  (théorème 2-1), dont  $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}, <)$  est une sous-catégorie.

*Démonstration.* —  $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <)$  et  $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}, <)$  sont évidemment des sous-catégories de  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ . Supposons

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <)$$

et soit :

$$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{dans} \quad (\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <).$$

Comme  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1$  et  $F_1$  sont des sous-classes saturées par induction de  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  et  $F$  respectivement, ce sont des fusées strictes de la sous-catégorie de  $(\mathcal{C}, I)$  correspondant à  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  (déf. 5-1) et par suite  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$  est une fusée stricte. Ainsi  $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <)$  est saturée par induction dans la classe  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$ .



THÉORÈME 2. —  $(\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <), <)$  et  $(\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <)$  sont des catégories  $\tilde{\Omega}^s$ -structurées assez régulières, la structure d'ordre étant celle induite par  $(\mathcal{F}(\mathcal{C}, <), <)$ .

Démonstration. — Comme  $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <)$  est une sous-catégorie saturée par induction de  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ ,  $(\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}^s$ -structurée assez régulière. —  $(\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}$ -structurée. Soient  $i \in I$  et

$$(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{dans} \quad (\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <).$$

Il existe un  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ -agrégat  $\mathcal{A}_I = \left( \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i, F_I, \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \mathcal{B}_i \right)$  dans  $(\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <), <)$ . Pour tout  $e \in \alpha \left( \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \mathcal{B}_i \right)$  il existe  $i \in I$  et  $f_i \in F_i$  tel que  $e = \alpha(f_i)$ , d'où  $f_i \in F_I$  et  $\alpha(F_I) = \alpha \left( \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \mathcal{B}_i \right)$ . De même  $\beta(F_I) = \alpha \left( \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i \right)$ , de sorte que  $\mathcal{A}_I \in \mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <)$  et  $(\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}^s$ -structurée. — Soit

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_1 < \mathcal{B}.$$

Soit  $\mathcal{B}'_1$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}'$  ayant pour unités les éléments de  $\beta(F.\mathcal{B}_1)$ . Comme pour tout  $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$  il existe  $f \in F$  tel que  $\alpha(f) = e$  on a  $\alpha(F.\mathcal{B}_1) = \alpha(\mathcal{B}_1)$ . Par suite :

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{B}'_1, F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <)$$

et  $\mathcal{A}_1$  est le pseudoproduit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})\mathcal{B}_1$  dans  $(\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <)$ . De même si  $\mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'$ , on a  $\mathcal{B}'_2(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_2.F, \mathcal{B}_2)$ , ce qui prouve que  $(\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie  $\tilde{\Omega}^s$ -structurée assez régulière.

THÉORÈME 3. — La relation d'équivalence  $\rho^s$  (Théorème 1) induit sur  $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <)$  la relation d'équivalence  $\sigma$  définie par :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,

$$\alpha(F_1) = \alpha(F_2), \quad \beta(F_1) = \beta(F_2)$$

et

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}, <).$$

$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$  admet une catégorie quotient strict par  $\sigma$  et la classe quotient  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)/\sigma$  s'identifie à la sous-classe de  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$  formée des fusées strictes  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  telles que les relations :

$$\begin{aligned} & (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <), \\ \alpha(F_1) = \alpha(F), \quad \beta(F_1) = \beta(F) \quad \text{et} \quad F \subset F_1 \end{aligned}$$

entraînent  $F = F_1$ .

*Démonstration.* — D'après la démonstration du théorème 1, si  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$  et  $(\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$  sont équivalentes modulo  $\rho^s$ , on a  $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$ . Inversement supposons

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}) \text{ modulo } \sigma.$$

Soit  $f_i \in F_i$ , où  $i = 1, 2$ . Comme  $\alpha(f_i) \in \alpha(F_j)$ , où  $j = 1, 2$  et  $j \neq i$ , il existe  $f_j \in F_j$  tel que  $\alpha(f_i) = \alpha(f_j)$ ; comme

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$$

est une fusée stricte, il existe  $h \in F_1 \cup F_2$  et  $g' \in \mathcal{B}'_1$  tels que  $g'.h \in F_1 \cup F_2$ ,  $h < f_j$ ,  $\alpha(h) = \alpha(f_i)$  et  $g'.h < f_i$ . La fusée  $(\mathcal{B}', F_j, \mathcal{B})$  étant régulière, on a :

$$g'.h = g'.(\alpha(g')f_j)\alpha(h) \in \mathcal{B}'.F_j = F_j.$$

De même on construit  $f'_j \in F_j$  tel que  $\beta(f'_j) = \beta(f_i)$  et  $f'_j < f_i$ . Donc  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$  modulo  $\rho^s$ .

— Comme  $\rho^s$  est compatible sur  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$ , la relation d'équivalence  $\sigma$  est compatible sur  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$  et il existe une catégorie quotient strict. Soit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$  et  $\sigma(F)$  la classe réunion des  $F_i$  tels que

$$(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \text{ modulo } \sigma.$$

On a  $(\mathcal{B}', \sigma(F), \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$  et l'application  $\tilde{\sigma}$  :

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \text{ modulo } \sigma \rightarrow (\mathcal{B}', \sigma(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)/\sigma$  sur une sous-classe de  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$ .

— Si  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \tilde{\sigma}(\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)/\sigma)$  et si on a  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}, <)$ ,

$$\alpha(F_1) = \alpha(F), \quad \beta(F_1) = \beta(F) \quad \text{et} \quad F \subset F_1,$$

alors  $F_1 \cup F = F_1$  et on a  $(\mathcal{B}', F_1 \cup F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}'}(\mathcal{C}, <)$ , de sorte que, d'après ce qui précède, on trouve

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}),$$

d'où

$$\sigma(F_1) = \sigma(F) = F = F_1.$$

Inversement soit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}'}(\mathcal{C}, <)$ ; supposons que les relations :

$$\alpha(F) = \alpha(F_1), \quad \beta(F) = \beta(F_1) \quad \text{et} \quad F \subset F_1$$

entraînent  $F = F_1$ . On a :

$$F \subset \sigma(F), \quad \alpha(F) = \alpha(\sigma(F)) \quad \text{et} \quad \beta(F) = \beta(\sigma(F)),$$

par suite  $F = \sigma(F)$  et  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \tilde{\sigma}(\overline{\mathcal{F}'}(\mathcal{C}, <)/\sigma)$ , ce qui démontre le théorème.

**COROLLAIRE.** —  $\mathcal{F}''(\mathcal{C}, <)$  admet une catégorie quotient strict par la relation d'équivalence  $\sigma'$  induite par  $\sigma$  et qui est aussi définie par :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}''(\mathcal{C}, <).$$

La classe  $\mathcal{F}''(\mathcal{C}, <)/\sigma'$  est isomorphe à la classe  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$  des fusées strictes  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}''(\mathcal{C}, <)$  telles que les relations  $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}''(\mathcal{C}, <)$  et  $F \subset F_1$  entraînent  $F = F_1$ .

En effet, si  $(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}''(\mathcal{C}, <)$ , où  $i = 1, 2$ , et si de plus  $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}''(\mathcal{C}, <)$ , on a  $\alpha(F_i) = \mathcal{B}_0 = \alpha(F_1 \cup F_2)$  et  $\beta(F_i) = \mathcal{B}'_0$ ; par suite le corollaire résulte du théorème 3.

Nous désignerons par  $\overline{\Phi}(\mathcal{C}, <)^{\perp}$  la catégorie quotient strict de  $\overline{\mathcal{F}'}(\mathcal{C}, <)$  ayant pour support la classe  $\tilde{\sigma}(\overline{\mathcal{F}'}(\mathcal{C}, <)/\sigma)$  et par  $\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}$  la catégorie quotient strict de  $\mathcal{F}''(\mathcal{C}, <)$  ayant pour support la classe  $\tilde{\sigma}(\mathcal{F}''(\mathcal{C}, <)/\sigma')$ ; nous munirons  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$  de la relation d'ordre induite par  $(\mathcal{F}''(\mathcal{C}, <), <)$ .

**DÉFINITION 3.** — Un élément de  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$  sera appelé fusée maximale stricte de  $(\mathcal{C}, <)$ .

**THÉORÈME 4.** —  $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière qui est une catégorie quotient  $\tilde{\Omega}^s$ -structurée de  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$ .

*Démonstration.* —  $(\Sigma(\mathcal{C}, <), <)$  est une classe ordonnée quotient de la classe ordonnée  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <)$  et on a

$$\bar{\sigma}(\mathcal{B}_1) < \bar{\sigma}(\mathcal{B})$$

si, et seulement si,  $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ , où  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}$  sont des fusées neutres strictes et  $\bar{\sigma}(\mathcal{B}) = (\mathcal{B}, \sigma(\mathcal{B}), \mathcal{B})$ .

— Supposons  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma(\mathcal{C}, <)$ ,  $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ . Soit :

$$F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1 = \alpha(\mathcal{B}'_1) \cdot F \cdot \alpha(\mathcal{B}_1).$$

Supposons que, pour tout  $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$  (resp. tout  $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$ ), il existe  $f_1 \in F_1$  tel que  $\alpha(f_1) = e$  (resp.  $\beta(f_1) = e'$ ). Montrons qu'alors on a :  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma(\mathcal{C}, <)$ . En effet, on a

$$\alpha(F_1) = \alpha(\mathcal{B}_1) \quad \text{et} \quad \beta(F_1) = \beta(\mathcal{B}'_1).$$

Comme  $F_1$  est une sous-classe saturée par induction de  $F$ , on a aussi  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ . Soit

$$(\mathcal{B}'_1, K, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \text{ modulo } \sigma'.$$

Une démonstration analogue à celle du théorème 5-1 prouve que  $\mathcal{B}' \cdot K \cdot \mathcal{B} = (\mathcal{B}'K)\mathcal{B}$ . Nous allons montrer que  $(\mathcal{B}', H, \mathcal{B})$ , où  $H = \mathcal{B}' \cdot K \cdot \mathcal{B} \cup F$ , appartient à  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ . On a :

$$\mathcal{B}_0 = \alpha(F) \subset \alpha(H) \subset \mathcal{B}_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'_0 = \beta(F) \subset \beta(H) \subset \mathcal{B}'_0;$$

par conséquent :

$$\alpha(H) = \alpha(F) = \mathcal{B}_0 \quad \text{et} \quad \beta(H) = \mathcal{B}'_0.$$

Soient  $f \in F$ ,  $k' = g' \cdot k \cdot g$ ,  $k \in K$ ,  $g \in \mathcal{B}$ ,  $g' \in \mathcal{B}'$  et  $\alpha(g) = \alpha(f)$ . Il existe  $f_1 \in F_1$  tel que  $\alpha(f_1) = \alpha(k)$  et  $f_1 < k$ , d'où

$$(g'f_1) \cdot g \in (\mathcal{B}'F_1) \cdot \mathcal{B} \subset F.$$

Comme  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est une fusée stricte, il existe  $f' \in F$  et  $\gamma' \in \mathcal{B}'_{\gamma}$  tels que  $f' < f$ ,  $\alpha(f') = \alpha(f)$  et  $\gamma' \cdot f' < (g'f_1) \cdot g < k'$ . Soit de plus  $k' = \bar{g}' \cdot k \cdot \bar{g} \in \mathcal{B}' \cdot K \cdot \mathcal{B}$ , où  $k \in K$  et  $\alpha(g) = \alpha(\bar{g})$ ; on construit d'une manière analogue  $(\bar{g}'\bar{f}_1) \cdot \bar{g} \in F$  tel que

$(\bar{g}'\bar{f}_1) \cdot \bar{g} < \bar{k}'$  et, d'après ce qui précède, il existe  $\bar{f}' \in F$  et  $\bar{\gamma}' \in \mathcal{B}'_1$  tels que :

$$\bar{f}' < \bar{g}'\bar{f}_1\bar{g} < \bar{k}', \quad \alpha(\bar{f}') = \alpha(g) \quad \text{et} \quad \bar{\gamma}' \cdot \bar{f}' < \gamma' \cdot f' < k'.$$

Par conséquent  $(\mathcal{B}', H, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'(\mathcal{C}, <)$  et  $H = F$ , en vertu du corollaire du théorème 3. On en déduit  $K \subset F$  et  $F_1 \subset \sigma(F_1) \subset F$ . Par ailleurs, on a :  $\sigma(F_1) \subset \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1 = F_1$ , c'est-à-dire  $F_1 = \sigma(F_1)$  et  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma(\mathcal{C}, <)$ .

— Supposons  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ . Comme on a :

$$F_1 \subset \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1, \quad \alpha(F_1) = \alpha(\mathcal{B}_1) \quad \text{et} \quad \beta(F_1) = \beta(\mathcal{B}'_1),$$

le résultat précédent entraîne  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma(\mathcal{C}, <)$  et, en vertu du corollaire du théorème 3,  $F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1$ . De plus  $F_1$  est saturé par induction dans  $F$ . En particulier, si  $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'$ , on en déduit  $F_1 = F$ . Une démonstration analogue à celle du théorème 5-1 montre que  $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$  est une catégorie quasi-inductive assez régulière, le pseudoproduit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})_{\mathcal{B}_1}$ , où  $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ , étant égal à

$$(\mathcal{B}'_1, F \cdot \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1),$$

en désignant par  $\mathcal{B}'_1$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}'$  ayant  $\beta(F \cdot \mathcal{B}_1)$  pour classe de ses unités.

— Enfin, supposons

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma(\mathcal{C}, <), \quad (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \Sigma(\mathcal{C}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}'_1, K, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', \sigma(F' \cdot F), \mathcal{B}) \quad \text{dans} \quad (\Sigma(\mathcal{C}, <), <).$$

Soit  $E'$  la sous-classe de  $\mathcal{B}'$  formée des  $e' \in \mathcal{B}'_0$  tels qu'il existe  $f \in F$  et  $f' \in F'$  vérifiant les conditions :

$$\alpha(f') = \beta(f) = e', \quad \alpha(f) \in \alpha(K) \quad \text{et} \quad \beta(f') \in \beta(K).$$

Cette sous-classe est saturée par induction dans  $\mathcal{B}'_0$ , puisque  $K$  est saturé par induction dans  $\sigma(F' \cdot F)$ . Soit  $\mathcal{B}'_1$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}'$  ayant  $E'$  pour classe de ses unités. On a  $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ . Soit  $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ ; il existe  $k \in K$  tel que  $\alpha(k) = e$ . Comme

$$K \subset \sigma(F' \cdot F),$$

il existe  $f' \cdot f \in F' \cdot F$  tel que  $f' \cdot f < k$  et  $\alpha(f) = e$ . Par suite on

obtient :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{B}'_1, E'.F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \prec (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{dans } (\Sigma(\mathcal{C}, \prec), \prec),$$

et

$$\mathcal{A}' = (\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}''_1.F.E', \mathcal{B}'_1) \prec (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \quad \text{dans } (\Sigma(\mathcal{C}, \prec), \prec).$$

Comme  $(\Sigma(\mathcal{C}, \prec)^{\perp}, \prec)$  est une catégorie ordonnée, il en résulte :

$$(\mathcal{B}''_1, K, \mathcal{B}_1) = \mathcal{A}' \perp \mathcal{A}.$$

Ainsi  $(\Sigma(\mathcal{C}, \prec)^{\perp}, \prec)$  est une catégorie quasi-inductive régulière.

— Une démonstration analogue à la fin de la démonstration du théorème 5-1 prouve que  $(\Sigma(\mathcal{C}, \prec)^{\perp}, \prec)$  est une catégorie quotient  $\tilde{\Omega}^s$ -structurée de  $(\mathcal{F}'(\mathcal{C}, \prec), \prec)$ .

**DÉFINITION 4.** — *On dira que  $(\mathcal{C}, \prec)$  vérifie la condition  $(C^s)$  si, pour tout  $f \in \mathcal{C}$ , le triplet  $(\beta(f)^{\triangleright}, f^{\triangleright}, \alpha(f)^{\triangleright})$  est une fusée stricte de  $(\mathcal{C}, \prec)$ .*

**PROPOSITION 2.** — *Si  $(\mathcal{C}, \prec)$  est un groupoïde ordonné régulier,  $(\mathcal{C}, \prec)$  vérifie la condition  $(C^s)$ .*

En effet, soit  $f \in \mathcal{C}$ ; si  $f_1 < f$ ,  $f_2 < f$  et  $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ , on a  $f_1^{-1}.f_2 < \alpha(f)$  et  $f^{\triangleright}$  est un atlas de  $(\mathcal{C}, \prec)$ , donc définit une fusée stricte, puisque  $(\mathcal{C}, \prec)$  est régulier.

**PROPOSITION 3.** — *Si  $(\mathcal{C}, \prec)$  est une catégorie sous-pré-inductive régulière,  $(\mathcal{C}, \prec)$  vérifie la condition  $(C^s)$ .*

En effet, soient  $f \in \mathcal{C}$ ,  $f_1 < f$ ,  $f_2 < f$  et  $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ . Il existe  $f_1 \cap f_2$  et on a  $\alpha(f_1 \cap f_2) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f_2)$ ; donc

$$(\beta(f)^{\triangleright}, f^{\triangleright}, \alpha(f)^{\triangleright})$$

est une fusée stricte de  $(\mathcal{C}, \prec)$ .

**THÉORÈME 5.** — *Supposons que  $(\mathcal{C}, \prec)$  vérifie la condition  $(C^s)$ ; alors  $(\Sigma(\mathcal{C}, \prec)^{\perp}, \prec)$  admet pour sous-catégorie régulière une catégorie  $c(\mathcal{C})^{\perp}$  quotient strict de  $\mathcal{C}$ . La classe  $\Sigma'(\mathcal{C}, \prec)$  des fusées maximales strictes  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  telles que  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$  et  $F$  soient des sous-classes saturées par induction de  $\mathcal{C}$  est une sous-catégorie pleine saturée par induction de  $(\Sigma(\mathcal{C}, \prec)^{\perp}, \prec)$ .*

*Démonstration.* — L'application :

$$f \rightarrow (\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>), \quad \text{où } f \in \mathcal{C},$$

identifie  $\mathcal{C}$  à une sous-catégorie de  $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ . Comme la relation d'équivalence  $\sigma'$  n'identifie pas deux unités distinctes, l'application  $c$  :

$$f \rightarrow (\beta(f)^>, \sigma(f)^>, \alpha(f)^>)$$

définit une sous-catégorie  $c(\mathcal{C})^\perp$  de  $\Sigma(\mathcal{C}, <)^\perp$  comme catégorie quotient strict de  $\mathcal{C}$ .

— Soient  $f \in \mathcal{C}$ ,  $f_1 \in \mathcal{C}$  et  $f_1 < f$ . Les relations :

$$h < \alpha(f), \quad \alpha(h) < \alpha(f_1) \quad \text{et} \quad \beta(h) < \alpha(f_1)$$

entraînent  $h = \beta(h)h\alpha(h) < \alpha(f_1)$ , donc  $\alpha(f_1)^>$  est une sous-catégorie pleine saturée par induction de  $\alpha(f)^>$ ; de même  $\beta(f_1)^>$  est une sous-catégorie pleine saturée par induction de  $\beta(f)^>$ . Par suite  $c(f_1) < c(f)$  dans  $(\Sigma(\mathcal{C}, <), <)$ . Soit  $e \in \mathcal{C}_0$  tel que  $e < \alpha(f)$ ; on a :

$$fe \in f^>e^>, \quad \text{d'où } c(fe) = c(f)c(e).$$

— Montrons que si  $f_i \in \mathcal{C}$ ,  $i = 1, 2$ , on a  $c(f_1) = c(f_2)$  si, et seulement si,  $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ ,  $\beta(f_1) = \beta(f_2)$  et si, pour tout  $f'_i < f_i$ , il existe  $h$  et  $h'$  tels que :  $h < f'_i$ ,  $h < f'_j$ ,  $h' < f'_i$ ,  $h' < f'_j$ ,  $\alpha(h) = \alpha(f'_i)$  et  $\beta(h') = \beta(f'_i)$ , où  $j = 1, 2$  et  $j \neq i$ . En effet, ces conditions sont vérifiées, si  $c(f_1) = c(f_2)$ . Inversement, supposons-les remplies; soit  $f'_i < f_i$ . Il existe  $f''_j < f_j$  tel que  $\alpha(f''_j) = \alpha(f'_i)$  et  $f''_j < f_i$ ; comme  $f_i^>$  est une fusée stricte, il existe  $h < f_i$  et  $\gamma \in \beta(f_i)^>$  tels que :

$$h < f'_i, \quad \alpha(h) = \alpha(f'_i) \quad \text{et} \quad \gamma.h < f''_j,$$

d'où  $h < \gamma^{-1}f''_j < f_j$ . On construit de même  $h' < f_j$  tel que  $h' < f'_i < f_i$  et  $\beta(h') = \beta(f'_i)$ . Ainsi  $c(f_1) = c(f_2)$ . De plus soit  $k < f'_i$  un majorant de  $h$  et de  $h'$ ; on a :

$$\alpha(f'_i) = \alpha(h) < \alpha(k) \quad \text{et} \quad \beta(f'_i) = \beta(h') < \beta(k),$$

d'où  $\alpha(f'_i) = \alpha(k)$ ,  $\beta(f'_i) = \beta(k)$  et, puisque  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie ordonnée,  $f'_i = k$ . Ceci démontre que  $f'_i$  est le  $f'_i$ -agrégat de  $h$  et de  $h'$ . En particulier, il existe  $f < f_1$  et  $f' < f_1$  tels que  $f_2 = f \bigcup_{f_2} f'$ ; dans ce cas, on a aussi  $f_1 = f \bigcup_{f_1} f'$ .

— Soit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma(\mathcal{C}', <)$ ; supposons  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  saturés par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$ . Soit  $f \in F$  et  $f' < f$  dans  $(\mathcal{C}, <)$ . On a  $\beta(f') \in \mathcal{B}'$ ,  $\alpha(f') \in \mathcal{B}$  et  $f' = \beta(f')(f\alpha(f')) \in \mathcal{B}'(F\mathcal{B}) \subset F$ , donc  $F$  est une sous-classe saturée par induction de  $(\mathcal{C}, <)$ . On en déduit que  $\Sigma'(\mathcal{C}', <)$  est la sous-catégorie pleine de  $\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}$  ayant pour unités les fusées  $(\mathcal{B}, \sigma(\mathcal{B}), \mathcal{B})$  telles que  $\mathcal{B}$  soit une sous-catégorie de  $\mathcal{C}'$ , saturée par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$ .

— Soit  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma'(\mathcal{C}', <)$ ; si  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  dans  $(\Sigma(\mathcal{C}', <), <)$ ,  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}'_1$  sont des sous-classes saturées par induction de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  respectivement et on a  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma'(\mathcal{C}', <)$ , donc  $\Sigma'(\mathcal{C}', <)$  est une sous-classe saturée par induction de  $(\Sigma(\mathcal{C}', <), <)$ . Enfin  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  est un sous-agrégat de la classe des  $c(f)$ , où  $f \in F$ , si  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  sont majorés dans  $\mathcal{C}_0$ .

*Remarque.* —  $c$  ne définit pas un foncteur quasi-inductif de  $(\mathcal{C}', <)$  vers  $(\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}, <)$ , car, si  $A \subset \mathcal{C}$ , on a seulement  $c\left(\bigcup^f A\right) > \bigcup^{c(f)} c(A)$ .

*Application aux catégories préinductives et aux groupoïdes ordonnés :*

A) Soit  $(\mathcal{C}', <)$  une catégorie préinductive régulière telle que  $(\mathcal{C}', <)$  soit un groupoïde ordonné semi-régulier. Si  $F$  est une sous-classe de  $\mathcal{C}$ , soit  $F^<$  la classe de ses majorants. Soit  $\bar{\mathcal{C}}$  la classe des sous-classes  $F$  de  $\mathcal{C}$  qui sont majorées et saturées par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$  et qui contiennent tout élément  $f' \in \beta(F) \cdot \mathcal{C} \cdot \alpha(F)$  tel que  $f' < F^<$ .

THÉORÈME 6. —  $c(\mathcal{C})^{\perp}$  (th. 5) est équivalente à  $\bar{\mathcal{C}}$  et la sous-classe  $\bar{\mathcal{C}}'$  de  $\Sigma'(\mathcal{C}', <)$  formée des fusées majorées par un élément de  $c(\mathcal{C})$  est une sous-catégorie saturée par induction de  $(\Sigma(\mathcal{C}', <)^{\perp}, <)$ . L'application  $\pi: (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \rightarrow F$  définit une équivalence de  $\bar{\mathcal{C}}^{\perp}$  sur une catégorie  $\bar{\mathcal{C}}^{\perp}$  et  $(\bar{\mathcal{C}}^{\perp}, c)$  est une catégorie inductive.

*Démonstration.* — Soient  $f \in \mathcal{C}$ ,  $f' \in \mathcal{C}$  et  $c(f) = c(f')$ . D'après la démonstration du théorème 5, il existe  $f_1 < f$  et  $f_2 < f'$  tels que :

$$f = f_1 \bigcup^f f_2 \quad \text{et} \quad f' = f_1 \bigcup^{f'} f_2.$$



Soit  $\bar{f} = f \cap f'$ ; on a  $f_1 < \bar{f}$  et  $f_2 < \bar{f}$ , d'où  $f = f_1 \bigcup^{\bar{f}} f_2 = f'$ .  
Par suite  $c$  est une bijection de  $\mathcal{C}$  sur  $c(\mathcal{C})$ .

— Supposons  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) < c(f)$  et  $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') < c(f')$  dans  $(\Sigma(\mathcal{C}, <), <)$ . Soit  $e = \beta(f) \cap \alpha(f')$ ; on a :

$$(\mathcal{B}'', \sigma(F'.F), \mathcal{B}) < c(f'e) \perp c(ef),$$

de sorte que  $\bar{\mathcal{C}}'$  est une sous-catégorie de  $\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}$ . Comme  $\bar{\mathcal{C}}'$  est une sous-classe saturée par induction de  $(\Sigma(\mathcal{C}, <), <)$ , le couple  $(\bar{\mathcal{C}}'^{\perp}, <)$  est une catégorie quasi-inductive.

— Soit  $F$  une sous-classe de  $\mathcal{C}$  majorée par  $f \in \mathcal{C}$  et saturée par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$ . Posons :

$$\mathcal{B}_F = \alpha(F). \alpha(f)^>. \alpha(F) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'_F = \beta(F). \beta(f)^>. \beta(F).$$

$\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}'_F$  sont des sous-catégories de  $\mathcal{C}$ , saturées par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$ . Puisque  $(\mathcal{C}, <)$  vérifie la condition (C<sup>s</sup>) d'après la proposition 3,  $(\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F)$  est une fusée stricte de  $(\mathcal{C}, <)$ .  
Remarquons que, si  $\bar{f}$  est un autre majorant de  $F$ , on a :

$$\mathcal{B}_F = \alpha(F). \alpha(f \cap \bar{f})^>. \alpha(F) = \alpha(F). \alpha(\bar{f})^>. \alpha(F),$$

car  $\alpha(f \cap \bar{f})^>$  est une sous-catégorie pleine de  $\alpha(f)^>$  et de  $\alpha(\bar{f})^>$ .  
Soit  $F'$  la classe des  $f' \in \beta(F). \mathcal{C}. \alpha(F)$  tels que  $f' < F^<$ ; cette classe est majorée par  $f$  et saturée par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$ ; d'après ce qui précède,  $(\mathcal{B}'_F, F', \mathcal{B}_F)$  est aussi une fusée stricte de  $(\mathcal{C}, <)$ . Soit  $f' \in F'$ ; il existe  $f_1 \in F$  et  $f_2 \in F$  tels que

$$\alpha(f_1) = \alpha(f') \quad \text{et} \quad \beta(f_2) = \beta(f');$$

en posant :

$$h_1 = f' \cap f_1 \in F \quad \text{et} \quad h_2 = f' \cap f_2 \in F,$$

on trouve :

$$h_1 < f', \quad h_2 < f',$$

$$\alpha(h_1) = \alpha(f' \cap f_1) = \alpha(f') \cap \alpha(f_1) = \alpha(f')$$

et

$$\beta(h_2) = \beta(f').$$

Il s'ensuit :

$$(\mathcal{B}'_F, F', \mathcal{B}_F) \sim (\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F) \text{ mod } \sigma'.$$

Supposons de plus  $(\mathcal{B}'_F, F'', \mathcal{B}_F) \sim (\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F) \text{ mod } \sigma'$ . Soit

$f'' \in F''$ . Il existe  $f''_1 \in F$  et  $f''_2 \in F$  tels que :

$$f''_1 < f'', \quad f''_2 < f'', \quad \alpha(f''_1) = \alpha(f''), \quad \beta(f''_2) = \beta(f'').$$

Étant donné que  $(\mathcal{C}, <)$  est ordonnée, ces relations entraînent :

$$f'' = f''_1 \bigcup^{f''} f''_2, \quad \text{d'où} \quad f'' \in F'.$$

Par suite  $(\mathcal{B}'_F, F', \mathcal{B}_F)$  est une fusée stricte maximale de  $(\mathcal{C}, <)$ .

— Si  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma'(\mathcal{C}, <)$  et si  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) < c(f)$ , alors  $\mathcal{B}$  est la sous-catégorie pleine de  $\alpha(f)^>$  ayant  $\alpha(F)$  pour classe de ses unités et la classe  $F$  est majorée par  $f$  et saturée par induction. Il en résulte :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \quad \text{et de même} \quad \mathcal{B}' = \mathcal{B}'_F,$$

de sorte que  $\pi$  est une bijection de  $\bar{\mathcal{C}}'$  sur une classe de parties de  $\mathcal{C}$ . Soit  $F'$  la classe des  $f' \in \beta(F)$ .  $\mathcal{C}$ .  $\alpha(F)$  tels que  $f' < F^<$ ; nous avons vu que l'on a  $(\mathcal{B}'_F, F', \mathcal{B}_F) \sim (\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F)$ . Puisque  $(\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F)$  est maximale, on en déduit  $F = F'$ , c'est-à-dire  $F \in \bar{\mathcal{C}}$ . Inversement, si  $F \in \bar{\mathcal{C}}$ , on a :

$$F = \pi(\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F).$$

Donc  $\pi$  est une bijection de  $\bar{\mathcal{C}}'$  sur  $\bar{\mathcal{C}}$ .

— Soit  $\bar{\mathcal{C}}^\perp$  la catégorie image de  $\bar{\mathcal{C}}'^\perp$  par  $\pi$ , dont la loi de composition est définie par :

$$F_1 \perp F = \text{classe des } f' \in \beta(F_1) \cdot \mathcal{C} \cdot \alpha(F) \text{ tels que } f' < (F_1 \cdot F)^<, \\ \text{si, et seulement si, } \alpha(F_1) = \beta(F).$$

L'unité à droite  $\alpha^\perp(F)$  de  $F$  est  $\alpha(F) \cdot \alpha(f)^> \cdot \alpha(F)$ , son unité à gauche est  $\beta^\perp(F) = \beta(F) \cdot \beta(f)^> \cdot \beta(F)$ , où  $f$  est un majorant quelconque de  $F$ . Soient  $F_1 \in \bar{\mathcal{C}}$  et  $F \in \bar{\mathcal{C}}$ . Si  $\pi^{-1}(F_1) < \pi^{-1}(F)$ , on a  $F_1 \subset F$ ; si  $F_1 \subset F$ , la catégorie  $\mathcal{B}_{F_1}$  (resp.  $\mathcal{B}'_{F_1}$ ) est une sous-catégorie pleine saturée par induction de  $\mathcal{B}_F$  (resp.  $\mathcal{B}'_F$ ), de sorte que  $\pi^{-1}(F_1) < \pi^{-1}(F)$ . Par suite  $\pi$  est un isomorphisme de  $(\bar{\mathcal{C}}', <)$  sur  $(\bar{\mathcal{C}}, \subset)$ . En utilisant le fait que  $(\bar{\mathcal{C}}'^\perp, <)$  est une catégorie quasi-inductive, on voit que  $(\bar{\mathcal{C}}^\perp, \subset)$  est une catégorie quasi-inductive régulière. Pour montrer que  $(\bar{\mathcal{C}}^\perp, \subset)$  est inductive, il suffit de prouver qu'elle est préinductive.

— Soient  $F_1 \in \bar{\mathcal{C}}$  et  $F_2 \in \bar{\mathcal{C}}$ ; désignons par  $K$  la classe intersection de  $F_1$  et  $F_2$ . Soit  $k \in \beta(K) \cdot \mathcal{C} \cdot \alpha(K)$  tel que  $k < K^<$ . Pour tout majorant  $f_i$  de  $F_i$ , où  $i = 1, 2$ , on a  $k < f_i$ , d'où  $k \in F_i$ . Donc  $k \in K$ ,  $K \in \bar{\mathcal{C}}$  et  $K$  est l'intersection de  $F_1$  et  $F_2$  dans  $(\bar{\mathcal{C}}, <)$ . Si de plus  $F_1$  et  $F_2$  sont majorés par un élément de  $\bar{\mathcal{C}}$ , il existe aussi  $f \in \mathcal{C}$  tel que  $F_1 < f$  et  $F_2 < f$ . Soit  $e \in \alpha(F_1)$ ,  $e \in \alpha(F_2)$ ; il existe  $f_1 \in F_1$  et  $f_2 \in F_2$  tels que  $e = \alpha(f_1) = \alpha(f_2)$ ; puisque  $f_1 < f$  et  $f_2 < f$ , on a :

$$\alpha(f_1 \cap f_2) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f_2) = e,$$

ce qui entraîne  $e \in \alpha(K)$ . Ceci montre que l'on a :

$$\alpha^{\perp}(F_1 \cap F_2) = \alpha^{\perp}(F_1) \cap \alpha^{\perp}(F_2).$$

De même  $\beta^{\perp}(F_1 \cap F_2) = \beta^{\perp}(F_1) \cap \beta^{\perp}(F_2)$ . Ainsi  $(\bar{\mathcal{C}}^{\perp}, <)$  est une catégorie inductive régulière.

1+

**COROLLAIRE.** — Si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie inductive, elle est isomorphe à  $(\bar{\mathcal{C}}_1^{\perp}, <)$ , où  $\bar{\mathcal{C}}_1$  est la sous-catégorie pleine de  $\bar{\mathcal{C}}^{\perp}$  ayant pour unités les classes  $B \in \bar{\mathcal{C}}$  telles que  $\cup(B \cap \mathcal{C}_0) \in B$ .

En effet, on a  $\pi\mathcal{C}(\mathcal{C}) \subset \bar{\mathcal{C}}_1$ . Soit  $F \in \bar{\mathcal{C}}_1$ ; comme  $F$  est majorée dans  $(\mathcal{C}, <)$ , elle admet un agrégat  $f$  et on a  $\alpha(f) = \cup \alpha(F)$ ; la relation  $\alpha(F) = \alpha^{\perp}(F) \cap \mathcal{C}_0$  entraîne  $\alpha(f) \in \alpha(F)$ ; de même  $\beta(f) \in \beta(F)$ . Donc

$$f \in \beta(F) \cdot \mathcal{C} \cdot \alpha(F) \quad \text{et} \quad f < F^<.$$

Il en résulte  $f \in F$ , d'après la démonstration du théorème 6, d'où  $F = f^>$ .

B) Soit  $(\mathcal{C}, <)$  un groupoïde ordonné régulier. Soit  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$  la classe des atlas réguliers de  $\mathcal{C}$ , qui définit (théorème 3-2 [1]) un sous-groupoïde saturé par induction de  $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}), <)$ .

**THÉORÈME 7.** — L'application:  $F \rightarrow (b(F), F, \alpha(F))$  est un isomorphisme de  $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$  sur le groupoïde quasi-inductif régulier  $(\Sigma(\mathcal{C}, <)^{\perp}, <)$ ; par suite  $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$  est un groupoïde quasi-inductif régulier;  $\mathcal{C}$  s'identifie à un sous-groupoïde régulier de  $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$ .

*Démonstration.* — On a évidemment  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <) \subset \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ . Supposons que l'on ait  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  et montrons que

dans ce cas  $F \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$ . En effet, supposons  $f \in F$  et  $f_1 \in F$ . Si  $f_1 < f$  et  $\alpha(f) = \alpha(f_1)$ , on a  $f \cdot f_1^{-1} < \beta(f)$ ,  $\alpha(f \cdot f_1^{-1}) = \beta(f_1)$  et  $\beta(f \cdot f_1^{-1}) = \beta(f)$ , d'où :

$$f \cdot f_1^{-1} = \beta(f)\beta(f_1) \in \mathcal{B}',$$

car  $\mathcal{B}'$  est une sous-catégorie régulière du groupoïde ordonné  $(\mathcal{C}, <)$ . De même on trouve  $f_1 \cdot f^{-1} \in \mathcal{B}'$ , et par suite  $f \cdot f_1^{-1} \in \mathcal{B}'$ . Supposons de plus  $f' \in F$  et  $\alpha(f) = \alpha(f')$ . Il existe  $f_1 \in F$ ,  $f'_1 \in F$  et  $g' \in \mathcal{B}'$  tels que :

$$\alpha(f_1) = \alpha(f), \quad f_1 < f, \quad f'_1 < f' \quad \text{et} \quad f'_1 = g' \cdot f_1;$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} f_1 &= \beta(f_1)f\alpha(f_1) = \beta(f_1)f, \\ g'' &= (\beta(f')\beta(f'_1)) \cdot g' \cdot (\beta(f_1)\beta(f)) \in \mathcal{B}' \quad \text{et} \quad f' = g'' \cdot f, \end{aligned}$$

car :

$$\begin{aligned} g'' \cdot f &= \beta(f')\beta(f'_1)g'\beta(f_1)\beta(f)f < \beta(f')g'f_1 = \beta(f')f'_1 < f', \\ \alpha(g'' \cdot f) &= \alpha(f') \quad \text{et} \quad \beta(g'' \cdot f) = \beta(f'). \end{aligned}$$

Ceci montre que  $F$  est un atlas régulier de  $\mathcal{C}$ . En particulier, si  $g \in \mathcal{B}$  il existe  $g' \in \mathcal{B}'$  tel que  $g' \cdot \alpha(g) = g$ , c'est-à-dire  $g \in \mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$  est un sous-groupoïde de  $\mathcal{C}$ . Il en résulte  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  et, en vertu du théorème 1-1 [1],  $\mathcal{B} = a(F)$  et  $\mathcal{B}' = b(F)$ .

- 1 L'application  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \rightarrow F$  est donc une équivalence de  $\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <)$  sur  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$ .

—  $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$  étant une catégorie ordonnée, puisque  $(\mathcal{A}(\mathcal{C}), <)$  est une catégorie ordonnée (corollaire 2 théorème 2-2 [1]), les conditions :

$$F \subset F_1, \quad a(F_1) = a(F) \quad \text{et} \quad b(F_1) = b(F)$$

entraînent  $F = F_1$ ; en tenant compte du corollaire du théorème 3, on en déduit que  $(b(F), F, a(F))$  est une fusée stricte maximale. Ceci montre qu'il existe une bijection de  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <)$  sur  $\Sigma(\mathcal{C}, <)$  (et aussi sur  $\mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <)$ ). Il en résulte que les catégories

$$\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), \quad \mathcal{F}^{rr}(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad \Sigma(\mathcal{C}, <)^\perp$$

- 2 sont équivalentes et que la catégorie quasi-inductive

$$(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, <), <)$$

est isomorphe à la catégorie quasi-inductive  $(\Sigma(\mathcal{C}, \langle \rangle)^\perp, \langle \rangle)$ . Enfin l'application :  $f \rightarrow f^\triangleright$  est une équivalence de  $\mathcal{C}$  sur un sous-groupeïde de  $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$ . 1

**COROLLAIRE.** — Si  $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  est un groupeïde préinductif,  $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle), \langle \rangle)$  admet  $(\bar{\mathcal{C}}, \langle \rangle)$  pour sous-groupeïde inductif.

En effet,  $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  est une catégorie préinductive; d'après le théorème 6,  $(\bar{\mathcal{C}}, \langle \rangle)$  est inductif et forme un sous-groupeïde de  $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle), \langle \rangle)$ .

### 3. Superfusées.

Soit  $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  une catégorie ordonnée régulière telle que  $(\mathcal{C}_\gamma, \langle \rangle)$  soit un groupeïde ordonné semi-régulier. Nous désignerons par  $\pi$  l'application qui associe à une fusée  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$  de  $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  la classe F. 2

**DÉFINITION 1.** — On appelle superfusée de  $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  un triplet  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1)  $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$ ;  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}'_1$  sont des fusées neutres de  $\mathcal{C}$ ; on a  $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$  dans  $(\mathcal{F}(\mathcal{C}, \langle \rangle), \langle \rangle)$ .
- 2) Pour tout  $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$  (resp. tout  $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$ ), il existe

$$f \in \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1$$

tel que  $\alpha(f) < e$  (resp. que  $\beta(f) < e'$ ).

Soit  $\mathcal{J}(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  la classe des superfusées de  $(\mathcal{C}, \langle \rangle)$ .

**PROPOSITION 1.** — L'application  $\varphi$  :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \rightarrow ((\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{F})$$

est une bijection de  $\mathcal{J}(\mathcal{C}, \langle \rangle)$  sur la sous-classe de

$$\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle) \times \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, \langle \rangle)$$

formée des couples  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$  tels que  $\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}$  et  $F_1 = \mathcal{B}'_1.\pi(\mathcal{F}).\mathcal{B}_1$ , où  $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$ .

**Démonstration.** — Soit  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}(\mathcal{C}, \langle \rangle)$ ; posons :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad F_1 = \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1.$$

Puisque  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}'_1$  sont saturées par induction dans  $(\mathcal{B}, <)$  et  $(\mathcal{B}', <)$  respectivement,  $F_1$  est une sous-classe saturée par induction dans  $(F, <)$  et on a  $F_1 = \mathcal{B}'_1(F\mathcal{B}_1)$ . Il en résulte, en posant  $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$  :

$$\mathcal{F}_1 \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1 < \mathcal{F} \quad \text{dans} \quad (\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <), <).$$

— Inversement, si  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$  est un couple vérifiant les conditions de la proposition, alors  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$  est évidemment une super-fusée de  $(\mathcal{C}, <)$ . La proposition 1 s'en déduit.

Soit  $I$  une classe d'indices contenant en particulier 1 et 2; soit  $i \in I, j \in I$ . Nous désignerons par  $(\mathcal{F}, j, i)$  la sous-catégorie régulière de la catégorie ordonnée régulière  $((\mathcal{C}, I), <)$  réunion de  $(\alpha(\mathcal{F}), i, i)$ ,  $(\beta(\mathcal{F}), j, j)$  et  $(\pi(\mathcal{F}), j, i)$ , par  $\mathcal{F}^{ji}$  la fusée régulière

$$((\beta(\mathcal{F}), j, j), (\pi(\mathcal{F}), j, i), (\alpha(\mathcal{F}), i, i))$$

de  $((\mathcal{F}, j, i), <)$ .

**PROPOSITION 2.** — Soient  $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$  et  $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)$ . Pour que l'on ait

$$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) \in \varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)),$$

il faut et il suffit que l'on ait  $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'_1 \subset \mathcal{B}'$  et que  $\mathcal{F}_1^{21}$  soit une fusée maximale de  $((\mathcal{F}, 2, 1), <)$ .

En effet, les conditions sont évidemment suffisantes. Si on a  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) \in \varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))$ , d'après la démonstration du théorème 5-1,  $\mathcal{F}_1^{21}$  est une fusée maximale de  $((\mathcal{F}, 2, 1), <)$ .

**THÉORÈME 1.** —  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière, la loi de composition étant définie par :

$$(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}') \cdot (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) = (\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}' \cdot \mathcal{F}) \text{ si, et seulement si, } \\ \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}'_1 \text{ et } \alpha(\mathcal{F}') = \beta(\mathcal{F}),$$

et la relation d'ordre par :

$$(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}') < (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \text{ si, et seulement si, } \mathcal{F}' = \mathcal{F} \text{ et si } \\ \mathcal{B}_2 < \mathcal{B}_1 \text{ et } \mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'_1 \text{ dans } (\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <))_0, <).$$

*Démonstration.* — La loi de composition est celle induite sur  $\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$  par la catégorie  $\mathcal{S}$  produit du groupoïde de couples  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <))_0 \times \mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <)_0^\perp$  associé à  $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}, <))_0$  avec la catégorie

$\mathcal{F}''(\mathcal{C}, <)$ . La superfusée  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$  admet  $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1, \alpha(\mathcal{F}))$  et  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1, \beta(\mathcal{F}))$  pour uniques unités à droite et à gauche respectivement. Soit aussi  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{F}')$  une superfusée. Posons :

$$F = \pi(\mathcal{F}), \quad F' = \pi(\mathcal{F}'), \quad F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1$$

et

$$F'_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F' \cdot \mathcal{B}'_1.$$

On a :  $F'_1 \cdot F_1 \subset \mathcal{B}'_1 \cdot F' \cdot F \cdot \mathcal{B}_1$ . Pour tout  $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ , il existe  $f \in F_1$  tel que  $\alpha(f) < e$ ; comme  $\beta(f) \in \mathcal{B}'_1$ , il existe  $f' \in F'_1$  tel que  $\alpha(f') < \beta(f)$ . Puisque  $\mathcal{F}$  est une fusée et que  $F_1$  est saturée par induction dans  $(F, <)$ , on a :

$$\alpha(f')f \in F_1,$$

d'où

$$f' \cdot (\alpha(f')f) \in F'_1 \cdot F_1 \subset \mathcal{B}'_1 \cdot \pi(\mathcal{F}' \cdot \mathcal{F}) \cdot \mathcal{B}_1.$$

Par suite la condition 2 de la définition 1 est vérifiée et

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}' \cdot \mathcal{F})$$

est une superfusée. Ceci montre que  $\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{F}$ .

—  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$  est évidemment une catégorie ordonnée, puisque  $(\mathcal{F}''(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie ordonnée, d'après le théorème 3-2. Soit  $I$  une classe d'indices et soit

$$(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F}) < (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$$

pour tout  $i \in I$  dans  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$ . Il est évident que le triplet  $(\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}'_i, \bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i, \mathcal{F})$  est une superfusée, qui est l'agrégat de la classe  $(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F})_{i \in I}$  dans la classe ordonnée  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$ . Il en résulte que  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie quasi-inductive. Soient :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 < \mathcal{B}_1;$$

désignons par  $\mathcal{B}'_2$  la sous-catégorie pleine saturée par induction de  $(\mathcal{B}'_1, <)$  ayant pour unités les  $e' \in \mathcal{B}'_1$  tels qu'il existe

$$f \in \pi(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{B}_2$$

tel que  $\beta(f) < e'$ . On a :

$$(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$$

et  $(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F})$  est le pseudoproduit  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2, \alpha(\mathcal{F}))$  dans  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$ . De même, si  $\mathcal{B}'_3 < \mathcal{B}'_1$ , il existe un pseudoproduit

$$(\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_3, \beta(\mathcal{F}))(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}),$$

à savoir la superfusée  $(\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{F})$ , où  $\mathcal{B}_3$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}_1$  ayant pour unités les  $e \in \mathcal{B}_1$  tels qu'il existe  $f \in \mathcal{B}'_3 \cdot \pi(\mathcal{F})$  avec  $\alpha(f) < e$ . Ainsi  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie quasi-inductive assez régulière. Enfin, si on a :

$$(\mathcal{B}''_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{H}) < (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{F}') \cdot (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}),$$

on trouve :

$$(\mathcal{B}''_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{H}) = (\mathcal{B}''_2, \mathcal{B}'_2, \mathcal{F}') \cdot (\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}),$$

où  $\mathcal{B}'_2$  est la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{B}'_1$  ayant pour unités les  $e'$  tels qu'il existe  $f \in \pi(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{B}_2$  et  $f' \in \mathcal{B}''_2 \cdot \pi(\mathcal{F}')$  vérifiant :

$$\beta(f) < e' \quad \text{et} \quad \alpha(f') < e'.$$

Donc  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$  est régulière.

**COROLLAIRE.** —  $\varphi$  définit un isomorphisme de  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <), <)$  sur la catégorie quasi-inductive régulière  $(\varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)), <)$  dont la loi de composition est définie par :

$$(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}') \cdot (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) = ((\beta(\mathcal{F}'_1), \beta(\mathcal{F}'_1) \cdot \pi(\mathcal{F}') \cdot \pi(\mathcal{F}) \cdot \alpha(\mathcal{F}_1), \alpha(\mathcal{F}_1)), \mathcal{F}' \cdot \mathcal{F})$$

si, et seulement si,  $\alpha(\mathcal{F}') = \beta(\mathcal{F})$  et  $\alpha(\mathcal{F}'_1) = \beta(\mathcal{F}_1)$ ,

et la relation d'ordre par :

$$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) < (\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}') \text{ si, et seulement si, } \mathcal{F} = \mathcal{F}' \text{ et } \mathcal{F}_1 < \mathcal{F}'_1$$

dans  $(\mathcal{F}'(\mathcal{C}, <), <)$ .

En effet, ce corollaire se déduit du théorème 1 et de la proposition 1.

*Remarque.* — On peut démontrer directement que

$$(\varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)), <)$$

est une catégorie quasi-inductive régulière en utilisant la remarque suivante : Si  $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}')$  et  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$  sont deux éléments composables, la sous-catégorie pleine saturée par induction engendrée par la classe  $\{(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'), (\mathcal{F}_1, \mathcal{F})\}$  dans  $\varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <))$  est isomorphe à la catégorie quasi-inductive  $(\Phi(\Gamma, <)^*, <)$  où  $\Gamma$  est la sous-catégorie de  $(\mathcal{C}, \mathcal{I})$  engendrée par la classe

$$(\mathcal{F}, 2, 1) \cup (\mathcal{F}', 3, 2).$$



DÉFINITION 2. — On dira qu'une catégorie ordonnée assez régulière  $(\mathcal{C}, <)$  vérifie la condition (P) si les axiomes suivants sont remplis : 1

- 1) Si  $f \in \mathcal{C}$ ,  $E \in \mathcal{C}_0$  et  $\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} E$ , on a  $f = \bigcup^f fE$ .
- 2) Si  $f \in \mathcal{C}$ ,  $E' \in \mathcal{C}_0$  et  $\beta(f) = \bigcup^{\beta(f)} E'$ , on a  $f = \bigcup^f E'f$ .

Exemple. — Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie ordonnée assez régulière telle que les conditions  $f < g$  et  $\alpha(f) = \alpha(g)$  (resp. et  $\beta(f) = \beta(g)$ ) entraînent  $f = g$ ; alors  $(\mathcal{C}, <)$  vérifie la condition (P). En effet, si  $\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} E$  et si, pour tout  $e \in E$ ,  $g$  est un majorant de  $fe$  tel que  $g < f$ , on a :

$$e < \alpha(g) < \alpha(f), \quad \text{d'où} \quad \alpha(g) = \alpha(f),$$

et par suite  $g = f = \bigcup^f fE$ . De même la condition 2 est vérifiée dualement. En particulier cette propriété est vérifiée si  $(\mathcal{C}, <)$  est un groupoïde fonctoriellement ordonné [1].

Soit  $(\mathcal{C}, <)$  une catégorie sous-prélocale [1] régulière telle que  $(\mathcal{C}_0, <)$  soit un groupoïde ordonné semi-régulier et que  $(\mathcal{C}, <)$  vérifie la condition (P). Si  $H$  est une sous-classe de  $\mathcal{C}$  et  $K$  une partie de  $H$ , nous désignerons par  $(\bar{K})_H$  la classe des  $h$ -agrégats des sous-classes de  $K$ , où  $h \in H$ . On dira que  $K$  est saturé par agrégation dans  $(H, <)$  si on a :

$$(\bar{K})_H = K.$$

PROPOSITION 3. — Soit  $H \in \mathcal{C}$ ; si  $K \subset H$  est saturé par induction dans  $(H, <)$  et si  $H$  est saturé par intersection finie, alors  $(\bar{K})_H$  est saturé par induction dans  $(H, <)$ . Si  $K' \subset K \subset H$  et si  $K$  est saturé par agrégation dans  $(H, <)$ , on a  $(\bar{K}')_K = (\bar{K}')_H$ .

Démonstration. — Soit  $h \in H$ ,  $h = \bigcup^h A$ , où  $A \subset K$ , et  $h' \in H$  tel que  $h' < h$ . On a

$$h' = h' \cap h = h' \cap \left( \bigcup^h A \right) = \bigcup_{a \in A}^h (h' \cap a),$$

en utilisant l'axiome de distributivité [1], d'où  $h' \in (\bar{K})_H$ .

Si  $K' \subset K \subset H$ , on a  $(\overline{K'})_K \subset (\overline{K'})_H$ . Si de plus  $(\overline{K})_H = K$  et si on a :

$$h = \bigcup^{h'} A, \quad \text{où} \quad A \subset K' \quad \text{et} \quad h' \in H,$$

on obtient  $h \in (\overline{K})_H = K$  et  $h = \bigcup^h A$ , donc  $h \in (\overline{K'})_K$  et  $(\overline{K'})_K = (\overline{K'})_H$ .

**DÉFINITION 3.** — On appelle (P)-superfusée de  $(\mathcal{C}, <)$  une superfusée  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$  telle que l'on ait :

$$\alpha(\mathcal{B}_1) = \overline{(\alpha(F_1))_{\alpha(\mathcal{F})}} \quad \text{et} \quad \alpha(\mathcal{B}'_1) = \overline{(\beta(F_1))_{\beta(\mathcal{F})}},$$

où

$$F = \pi(\mathcal{F}) \quad \text{et} \quad F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1.$$

Soit  $\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$  la classe des (P)-superfusées de  $(\mathcal{C}, <)$ .

**PROPOSITION 4.** — L'application  $\tau$  :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$$

est une bijection de  $\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$  sur la classe des couples  $(F_1, \mathcal{F})$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1)  $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'(\mathcal{C}, <)$ .
- 2)  $F_1$  est une partie de  $F$ , saturée par induction et agrégation dans  $(F, <)$ .
- 3) On a :  $\beta(F_1) \cdot \mathcal{B}' \cdot F_1 = F_1 = F_1 \cdot \mathcal{B} \cdot \alpha(F_1)$ .

*Démonstration.* — Soit  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$  une (P)-superfusée, où :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1.$$

D'après la proposition 1,  $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$  est une fusée majorée par  $\mathcal{F}$ , de sorte que la condition 3 est vérifiée et  $F_1$  est saturé

par induction dans  $(F, <)$ . Soit  $f = \bigcup^f C$ , où  $C \subset F_1$ . D'après la proposition 12-2 [1], on a :

$$\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} \alpha(C) \in \overline{(\alpha(F_1))_{\alpha(\mathcal{F})}} = \alpha(\mathcal{B}_1).$$

De même  $\beta(f) \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$ , d'où  $f \in \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1 = F_1$ ; ainsi la condition 2 est satisfaite. — Inversement, soit  $(F_1, \mathcal{F})$  un couple

vérifiant les conditions 1, 2 et 3; posons :

$$E = \overline{(\alpha(F_1))_{\alpha(F)}} \quad \text{et} \quad E' = \overline{(\beta(F_1))_{\beta(F)}}.$$

Si  $e \in \alpha(F_1)$ ,  $e' \in \alpha(F)$  et  $e' < e$ , il existe  $f_1 \in F_1$  tel que  $\alpha(f_1) = e$ ; on a

$$f_1 e' \in F\alpha(F) = F \quad \text{et} \quad \alpha(f_1 e') = e';$$

comme  $F_1$  est saturé par induction dans  $(F, <)$ , il en résulte  $e' \in \alpha(F_1)$ . Ainsi  $\alpha(F_1)$  est saturé par induction dans  $(\alpha(F), <)$ ; par dualité,  $\beta(F_1)$  est saturé par induction dans  $(\beta(F), <)$ . D'après la proposition 3,  $E$  et  $E'$  sont aussi saturés par induction dans  $(\alpha(F), <)$  et  $(\beta(F), <)$  respectivement, car  $\mathcal{B}_0$  et  $\mathcal{B}'_0$  sont saturés par intersection finie. Par suite, la sous-catégorie pleine  $\mathcal{B}_1$  de  $\mathcal{B}$  ayant  $E$  pour classe de ses unités est saturée par induction dans  $(\mathcal{B}, <)$ ; de même  $\mathcal{B}'_1 = E' \cdot \mathcal{B}' \cdot E'$  est une sous-catégorie pleine saturée par induction de  $(\mathcal{B}', <)$  et  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{F})$  est une superfusée de  $(\mathcal{C}, <)$ . Soit

$$f \in \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1).$$

Il existe  $f_1 \in F_1$  tel que  $\alpha(f_1) = \alpha(f)$  et, puisque  $\mathcal{F}$  est une fusée stricte, il existe  $f'_1 \in F$  et  $g'_1 \in \mathcal{B}'_1$  tels que :

$$\alpha(f'_1) = \alpha(f_1), \quad f'_1 < f_1 \quad \text{et} \quad \bar{f}_1 = g'_1 \cdot f'_1 < f.$$

Comme  $\beta(F_1)$  est saturé par induction dans  $(\beta(F), <)$ , on a :

$$f'_1 \in F_1, \quad \beta(g'_1) \in \beta(F_1) \quad \text{et} \quad g'_1 \cdot f'_1 \in \beta(F_1) \cdot \mathcal{B}' \cdot F_1 = F_1.$$

De même il existe  $f_2 \in F_1$  tel que  $f_2 < f$  et  $\beta(f_2) = \beta(f)$ . On en conclut :

$$f = \bar{f}_1 \bigcup^f f_2 \in (\bar{F}_1)_F = F_1,$$

car  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie ordonnée. Montrons que l'on a  $E' \cdot F \cdot E \subset F_1$ . Soit  $f \in E' \cdot F \cdot E$ . Il existe une sous-classe  $A$  saturée par induction dans  $(\alpha(F_1), <)$  et une sous-classe  $A'$  saturée par induction dans  $(\beta(F_1), <)$  telles que :

$$\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} A \quad \text{et} \quad \beta(f) = \bigcup^{\beta(f)} A'.$$

Pour tout  $a \in A$ , on a

$$fa \in F \quad \text{et} \quad \beta(fa) = \beta(fa) \cap \beta(f) = \bigcup_{a' \in A'}^{\beta(f)} (\beta(fa) \cap a')$$

puisque  $(\mathcal{C}, <)$  est sous-prélocale. Par suite :

$$fa = \bigcup_{a' \in A'}^f (\beta(fa) \cap a')fa.$$

La relation :  $(\beta(fa) \cap a')fa \in \beta(F_1) \cdot F \cdot \alpha(F_1) \subset F_1$  entraîne :

$$fa \in (\bar{F}_1)_F = F_1,$$

d'où

$$f = \bigcup_{a \in A}^f fa \in F_1 \quad \text{et} \quad F_1 = E' \cdot F \cdot E.$$

Donc  $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$  et  $\tau$  est une bijection.

THÉORÈME 2. —  $\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$  est une sous-catégorie de

$$\mathcal{Y}(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad (\mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <), <)$$

est une catégorie quasi-inductive régulière.

Démonstration. — Soit  $S = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$ ; on a évidemment :

$$\alpha(S) \in \mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <) \quad \text{et} \quad \beta(S) \in \mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <).$$

Soit  $S' = (\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{F}') \in \mathcal{Y}'(\mathcal{C}, <)$  tel que  $S' \cdot S$  soit défini. Soit :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}' = (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}');$$

posons :

$$F_1 = \mathcal{B}'_1 \cdot F \cdot \mathcal{B}_1, \quad F'_1 = \mathcal{B}''_1 \cdot F' \cdot \mathcal{B}'_1$$

et

$$F'_1 \cdot F_1 = \mathcal{B}''_1 \cdot F' \cdot F \cdot \mathcal{B}_1.$$

On a :

$$\overline{(\alpha(F'_1 \cdot F_1))_{\alpha(F)}} \subset \overline{(\alpha(F_1))_{\alpha(F)}} = \alpha(\mathcal{B}_1).$$

Soit  $e \in \alpha(F_1)$ ; il existe  $f_1 \in F_1$  tel que  $e = \alpha(f_1)$ ; comme

$$\beta(F_1) \subset \alpha(\mathcal{B}'_1) = \overline{(\alpha(F'_1))_{\beta(F)}},$$

il existe une sous-classe  $A'$  de  $F'_1$  telle que  $\beta(f_1) = \bigcup_{a' \in A'}^{\beta(f_1)} \alpha(A')$ ; on peut supposer  $A'$  saturée par induction dans  $(F', <)$ ; si  $a' \in A'$ , on a :

$$\alpha(a')f_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad a' \cdot (\alpha(a')f_1) \in F'_1 \cdot F_1.$$

D'après la condition (P),  $f_1 = \bigcup^s \alpha(A')f_1$  par suite :

$$e = \bigcup_{a' \in A'}^{\alpha(f_1)} \alpha(a') \cdot (\alpha(a')f_1) \in \overline{(\alpha(F'_1 \cdot F_1))}_{\alpha(F)}.$$

Donc  $\overline{(\alpha(F'_1 \cdot F_1))}_{\alpha(F)} = \alpha(\mathcal{B}_1)$ . De même

$$\overline{(\beta(F'_1 \cdot F_1))}_{\beta(F')} = \overline{(\beta(F'_1))}_{\beta(F')},$$

de sorte que l'on a  $S' \cdot S \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}, <)$ . Donc  $\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <)$  est une sous-catégorie de  $\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)$  et  $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie ordonnée. Si de plus on a  $\xi = (\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}, <)_0$  et  $\xi < \alpha(S)$ , soit  $\mathcal{B}'_2 = E'_2 \cdot \mathcal{B}'_1 \cdot E'_2$ , où  $E'_2 = \overline{(\beta(F \cdot \mathcal{B}_2))}_{\beta(F)}$ . Alors  $(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F})$ , est le pseudoproduit  $S\xi$  dans  $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$ ; dualement, il existe un pseudoproduit  $\xi'S$  tel que  $\beta(\xi'S) = \xi'$ , si  $\xi' < \beta(S)$ . Si  $S'' < S' \cdot S$  et  $S'' = (\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{F}'') \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}, <)$ , on a :

$$S'' = (\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{F}'') \cdot (\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{F}),$$

où

$$\mathcal{B}'_3 = E'_3 \cdot \mathcal{B}' \cdot E'_3, \quad E'_3 = \overline{(E_3)}_{\beta(F)},$$

$E_3$  étant la classe intersection de  $\beta(F \cdot \mathcal{B}_3)$  avec  $\alpha(\mathcal{B}_3 \cdot F')$ . Donc  $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$  est régulière.

— Supposons  $(\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F}) < S$  dans  $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$ , pour tout  $i \in I$ , où  $I$  est une classe donnée. Soit  $E$  la sous-classe saturée par induction de  $\mathcal{B}_0$  réunion des  $\alpha(F_i)$ , où  $F_i = \mathcal{B}'_i \cdot F \cdot \mathcal{B}_i$ , et  $E_I = \overline{(E)}_{\alpha(F)}$ ; soit de même  $E' = \cup \beta(F_i)$  et  $E'_I = \overline{(E')}_{\beta(F)}$ . Pour tout  $i \in I$ , on a :  $\alpha(\mathcal{B}_i) \subset E_I$ . Posons :

$$\mathcal{B}_I = E_I \cdot \mathcal{B} \cdot E_I \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'_I = E'_I \cdot \mathcal{B}' \cdot E'_I.$$

Alors  $(\mathcal{B}'_I, \mathcal{B}_I, \mathcal{F})$  est une (P)-superfusée, qui est un agrégat de la famille  $(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F})_{i \in I}$  dans  $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$ . Ceci prouve que  $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière.

**COROLLAIRE.** — La classe  $\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <)$  des (P)-superfusées  $(\mathcal{B}', \mathcal{B}, \mu(f))$ , où  $f \in \mathcal{C}$  et  $\mu(f) = (\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>)$ , est une sous-catégorie saturée par induction de  $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}, <), <)$  et par suite  $(\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière.

**PROPOSITION 5.** — L'application  $\tau'$  :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mu(f)) \rightarrow (\mathcal{B}'_1 \cdot f^> \cdot \mathcal{B}_1, f)$$

est une bijection de  $\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <)$  (corollaire th. 2) sur la classe  $\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <)$  des couples  $(F, f)$ , où  $F$  est une sous-classe de  $\mathcal{C}$  majorée par  $f$ , saturée par induction et agrégation dans  $(f^>, <)$ .

*Démonstration.* —  $\tau'(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mu(f))$  vérifie les conditions indiquées d'après la proposition 4. Inversement, soit  $(F, f)$  un couple vérifiant ces conditions et montrons que  $(F, \mu(f))$  vérifie la condition 3 de la proposition 4, d'où résultera la proposition 5, les conditions 1 et 2 de la proposition 4 étant évidemment satisfaites. Pour cela, montrons que les relations

$$f' < f, \quad \alpha(f') \in \alpha(F) \quad \text{et} \quad \beta(f') \in \beta(F)$$

entraînent  $f' \in F$ . Il existe  $f_1 \in F$  tel que  $\alpha(f_1) = \alpha(f')$  et il existe  $f_2 \in F$  tel que  $\beta(f_2) = \beta(f')$ . Comme  $(\mathcal{C}, <)$  est sous-préinductive, il existe  $f'_1 = f_1 \cap f'$  et  $f'_2 = f_2 \cap f'$  et on a :

$$f'_1 \in F, \quad f'_2 \in F, \quad \alpha(f'_1) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f') = \alpha(f')$$

et

$$\beta(f'_2) = \beta(f'),$$

d'où  $f' = f'_1 \bigcup^f f'_2$ , et par suite  $f' \in F$ , ce qui achève la démonstration.

**THÉORÈME 3.** —  $\tau'$  (prop. 5) définit un isomorphisme de  $(\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <), <)$  sur la catégorie sous-inductive  $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <), <)$  dont la loi de composition est définie par :

$$(F', f') \cdot (F, f) = ((\overline{F' \cdot F})_{(f' \cdot f)^>}, f' \cdot f) \text{ si, et seulement si,}$$

$$\alpha(f') = \beta(f) = e \quad \text{et} \quad (\overline{\alpha(F')})_{e^>} = (\overline{\beta(F)})_{e^>},$$

et la relation d'ordre par :

$$(F', f') < (F, f) \quad \text{si, et seulement si,} \quad f' = f \quad \text{et} \quad F' \subset F.$$

*Démonstration.* — D'après le corollaire du théorème 2, la catégorie  $\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <)$  image de  $\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <)$  par  $\tau'$  a pour loi de composition :

$$(F', f') \cdot (F, f) = (\mathcal{B}' \cdot f'^> \cdot f^> \cdot \mathcal{B}, f' \cdot f) \text{ si, et seulement si,}$$

$$\alpha(f') = \beta(f) = e \quad \text{et} \quad (\overline{\alpha(F')})_{e^>} = (\overline{\beta(F)})_{e^>},$$

où  $\mathcal{B}$  (resp. où  $\mathcal{B}'$ ) désigne la sous-catégorie pleine de  $\alpha(f)^>$

(resp. de  $\beta(f')^>$ ) ayant  $(\overline{\alpha(F)})_{\alpha(f)^>}$  (resp.  $(\overline{\beta(F')})_{\beta(f')^>}$ ) pour classe de ses unités. Posons  $f'' = f' \cdot f$ . Puisque  $(\mathcal{B}', \mathcal{B}, \mu(f''))$  est une (P)-superfusée en vertu du théorème 2,  $F'' = \mathcal{B}' \cdot f'^> \cdot f'^> \cdot \mathcal{B}$  est une sous-classe saturée par induction dans  $(\mathcal{C}, <)$  et on a  $(\overline{F' \cdot F})_{f''^>} \subset F''$ . Inversement, soit  $h \in F''$ ; il existe une sous-classe E de  $\alpha(F)$  telle que  $\alpha(h) = \bigcup^{\alpha(f)} E$  et, d'après la démonstration du théorème 2, pour tout  $e \in E$  il existe une sous-classe  $K_e$  de  $F' \cdot F$  telle que  $e = \bigcup^e \alpha(K_e)$ . De même il existe une sous-classe E' de  $\beta(F')$  telle que  $\beta(h) = \bigcup^{\beta(f')} E'$  et, pour tout  $e' \in E'$ , il existe une sous-classe  ${}_e K$  de  $F' \cdot F$  telle que  $e' = \bigcup^{e'} \beta({}_e K)$ . Si  $k$  est un élément de  $K_e$  (resp. de  ${}_e K$ ), on a :

$$\alpha(k) = \alpha(h \cap k) \quad (\text{resp. } \beta(k) = \beta(h \cap k)),$$

$k \cap h \in F' \cdot F$ . Par suite on peut supposer  $K_e < h$  et  ${}_e K < h$ . Il en résulte que  $h$  est le  $(f' \cdot f)$ -agrégat de la classe réunion des classes  $K_e$  et  ${}_e K$ , où  $e \in E$  et  $e' \in E'$ . Donc  $h \in (\overline{F' \cdot F})_{f''^>}$  et  $F'' = (\overline{F' \cdot F})_{f''^>}$ . Ceci prouve que l'on a :

$$(F', f') \cdot (F, f) = ((\overline{F' \cdot F})_{f''^>}, f'').$$

Nous désignerons par  $\alpha$  et  $\beta$  les applications source et but dans  $\overline{\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)}$ ; on a :  $\alpha(F, f) = (\mathcal{B}, \alpha(f))$ , où  $\mathcal{B}$  est la sous-catégorie pleine de  $\alpha(f)^>$  ayant  $(\overline{\alpha(F)})_{\alpha(f)^>}$  pour classe de ses unités.

— Soient  $(F, f) \in \overline{\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)}$  et  $(F', f') \in \overline{\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)}$ . Si

$$\tau'^{-1}(F', f') < \tau'^{-1}(F, f),$$

on a  $F' \subset F$  et  $f' = f$ . Inversement, supposons  $F' \subset F$  et  $f' = f$ . Comme  $F$  et  $F'$  sont saturées par induction dans  $(f^>, <)$  et que  $(\mathcal{C}, <)$  est régulière,  $\alpha(F')$ , et par suite  $(\overline{\alpha(F')})_{\alpha(f)^>}$ , est saturé par induction dans  $(\alpha(f)^>, <)$ ; de même  $(\overline{\beta(F')})_{\beta(f')^>}$  est saturé par induction dans  $(\beta(f')^>, <)$ . Par conséquent  $\tau'^{-1}(F', f') < \tau'^{-1}(F, f)$  dans  $(\overline{\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <)}, <)$ . Ceci montre que la relation d'ordre indiquée est l'image de la relation d'ordre de  $(\overline{\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <)}, <)$ . Comme  $(\overline{\mathcal{J}''(\mathcal{C}, <)}, <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière (corollaire th. 2), il en résulte que

$(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie quasi-inductive régulière isomorphe. Pour montrer qu'elle est sous-inductive, il suffit de prouver qu'elle est aussi sous-préinductive.

— Soient  $(F_1, f) \in \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <)$  et  $(F_2, f) \in \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <)$ . Désignons par  $F_1 \cap F_2$  la classe intersection de  $F_1$  et  $F_2$ . Soit  $C$  une sous-classe de  $F_1 \cap F_2$  ayant un  $f$ -agrégat  $f'$ . Comme  $C \subset F_1$ , on a  $f' \in F_1$ ; de même  $f' \in F_2$ , d'où  $(F_1 \cap F_2)_{f'} = F_1 \cap F_2$  et  $(F_1 \cap F_2, f)$  est l'intersection de  $(F_1, f)$  et de  $(F_2, f)$ . Montrons que l'on a :

$$\alpha(F_1 \cap F_2, f) = \alpha(F_1, f) \cap \alpha(F_2, f).$$

Soit  $e \in \alpha(F_1)$  et  $e \in \alpha(F_2)$ . Il existe  $f_1 \in F_1$  et  $f_2 \in F_2$  tels que  $\alpha(f_1) = \alpha(f_2) = e$ ; puisque  $f_1 < f$  et  $f_2 < f$  et que  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie sous-prélocale, on a  $\alpha(f_1 \cap f_2) = e$  et

$$f_1 \cap f_2 \in F_1 \cap F_2.$$

Soit

$$e' \in (\alpha(F_1))_{\alpha(f)} \cap (\alpha(F_2))_{\alpha(f)}.$$

Il existe des sous-classes  $C_1$  et  $C_2$  de  $F_1$  et  $F_2$  resp. telles que :

$$e' = \bigcup^{e'} \alpha(C_1) \quad \text{et} \quad e' = \bigcup^{e'} \alpha(C_2).$$

D'après l'axiome de distributivité,  $e'$  est aussi un sous-agrégat de la classe formée des  $c_1 \cap c_2$ , où  $c_1 \in \alpha(C_1)$  et  $c_2 \in \alpha(C_2)$ . Comme  $c_1 \cap c_2 \in \alpha(F_1) \cap \alpha(F_2)$  on trouve  $e' \in (\alpha(F_1 \cap F_2))_{\alpha(f)}$ ; par suite  $\alpha$  définit une application sous-préinductive [1]. Pour une raison analogue,  $\beta$  définit une application sous-préinductive, de sorte que  $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <), <)$  est une catégorie sous-inductive régulière.

**THÉORÈME 4.** —  $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}, <), <)$  admet une catégorie sous-inductive régulière  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)^*, <)$  pour quotient [2] relativement à la relation d'équivalence  $\sim : (F, f) \sim (F, f')$  si, et seulement si, il existe  $\tilde{f} \in \mathcal{C}$  tel que :

$$\tilde{f} < f, \quad \tilde{f} < f' \quad \text{et} \quad F < \tilde{f}.$$

De plus  $(\mathcal{J}(\mathcal{C}, <)^*, <)$  est une catégorie sous-locale admettant une sous-catégorie régulière isomorphe à  $(\mathcal{C}, <)$ .



*Démonstration.* —  $\nu$  est une relation symétrique et réflexive. Supposons :

$$(F, f') \sim (F, f) \quad \text{et} \quad (F, f) \sim (F, \bar{f}')$$

Il existe  $\tilde{f} \in \mathcal{C}$  et  $\tilde{f}' \in \mathcal{C}$  tels que :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f} < f, & \tilde{f} < f', & F < \tilde{f}; & \tilde{f}' < f, \\ & \tilde{f}' < \bar{f}' & \text{et} & F < \tilde{f}', \end{array}$$

de sorte que l'on a :

$$f'' = \tilde{f}' \cap \tilde{f} < f', \quad f'' < \bar{f}' \quad \text{et} \quad F < f'',$$

d'où  $(F, f') \sim (F, \bar{f}')$ . Ainsi  $\nu$  est une relation d'équivalence. De plus on a :  $(\bar{F})_{\bar{f}'} > = (\bar{F})_{f'} > = F$ , c'est-à-dire  $(F, \tilde{f}) \in \bar{J}(\mathcal{C}, <)$ , d'après la proposition 5.

—  $\nu$  est compatible avec  $\alpha$  et  $\beta$ . Si les composés :

$$(F', f') \cdot (F, f) \quad \text{et} \quad (F', \bar{f}') \cdot (F, \bar{f})$$

sont définis dans  $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$ , et si on a :

$$(F, f) \sim (F, \bar{f}) \quad \text{et} \quad (F', f') \sim (F', \bar{f}'),$$

soient  $\tilde{f} \in \mathcal{C}$  et  $\tilde{f}' \in \mathcal{C}$  tels que :

$$\tilde{f} < f, \quad \tilde{f} < \bar{f}, \quad F < \tilde{f} \quad \text{et} \quad \tilde{f}' < f', \quad \tilde{f}' < \bar{f}', \quad F' < \tilde{f}'.$$

Posons  $e = \alpha(\tilde{f}') \cap \beta(\tilde{f})$  et  $F' \cdot F = \overline{(F' \cdot F)}_{(\tilde{f}', \tilde{f})} >$ . On trouve

$$(F' \cdot F, f' \cdot f) \sim (F' \cdot F, (f'e) \cdot (ef)) \sim (F' \cdot F, \bar{f}' \cdot \bar{f}).$$

Donc  $\nu$  est compatible sur  $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$ .

— D'après la proposition 21 [2], il existe un graphe multiplicatif quotient [2] de  $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$  par  $\nu$ , dont nous désignerons la loi de composition par  $\cdot$ , les applications source et but par  $\alpha^\bullet$  et  $\beta^\bullet$  respectivement. Soit  $\bar{\nu}$  l'homomorphisme de  $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$  sur  $J(\mathcal{C}, <)^\bullet$  défini par :  $(F, f) \rightarrow (F, f) \bmod \nu$ . Supposons  $(F', f') \in \bar{J}(\mathcal{C}, <)$ ,  $(F, f) \in \bar{J}(\mathcal{C}, <)$  et  $\alpha^\bullet(\bar{\nu}(F', f')) = \beta^\bullet(\bar{\nu}(F, f))$ , c'est-à-dire  $\bar{\nu}(\alpha(F', f')) = \bar{\nu}(\beta(F, f))$ . Cette condition entraîne

$$E = \overline{(\alpha(F'))}_{\alpha(f') >} = \overline{(\beta(F))}_{\beta(f) >}$$

et il existe  $e \in \mathcal{C}_0$  tel que :

$$e < \alpha(f'), \quad e < \beta(f) \quad \text{et} \quad E < e.$$

Il en résulte :

$$(F', f'e) \sim (F', f') \quad \text{et} \quad (F, ef) \sim (F, f).$$

Le composé  $S = (F', f'e) \cdot (F, ef)$  est défini dans  $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$ ; de sorte que le composé  $\bar{v}(F', f') \cdot \bar{v}(F, f)$  est défini dans  $J(\mathcal{C}, <)^*$  et égal à  $\bar{v}(S)$ . Si de plus on a  $(F'', f'') \in \bar{J}(\mathcal{C}, <)$  et

$$\alpha(F'', f'') \sim \beta(F', f'),$$

on obtient :

$$\bar{v}(F'', f'') \cdot \bar{v}(S) = (\bar{v}(F'', f'') \cdot \bar{v}(F', f')) \cdot \bar{v}(F, f).$$

Donc  $J(\mathcal{C}, <)^*$  est une catégorie, qui est la catégorie quotient strict de  $\bar{J}(\mathcal{C}, <)$  par  $\bar{v}$ .

— Considérons sur  $J(\mathcal{C}, <)$  la relation :

$N < N'$  si, et seulement si, il existe  $(F, f) \in N$  et  $(F', f') \in N'$  tels que  $F \subset F'$ .

Cette relation est équivalente à la relation :

$N < N'$  si, et seulement si, il existe  $(F, f) \in N$ ,  $(F', f') \in N'$  et  $\tilde{f} \in \mathcal{C}$  tels que  $F \subset F'$ ,  $\tilde{f} < f$ ,  $\tilde{f} < f'$  et  $F' < \tilde{f}$ ,

puisque ces dernières conditions entraînent  $(F, \tilde{f}) \in N$ ,  $(F', \tilde{f}) \in N'$  et  $(F, f') \in N$ . Il s'ensuit que  $N < N'$  est une relation d'ordre sur  $J(\mathcal{C}, <)$ . Supposons  $N < N' = \bar{v}(F', f')$ . Il existe  $(F, f) \in N$  et  $(F', f') \in N'$  et on a  $F \subset F'$ ; il existe aussi  $f'' \in \mathcal{C}$  tel que :

$$f'' < f', \quad f'' < f \quad \text{et} \quad F' < f''.$$

On en déduit  $(F, f'') \in N$  et  $(F', f'') \in N'$ , ce qui a pour conséquence  $(F, f') \in N$ . Ceci prouve :

$$((J(\mathcal{C}, <), <), \bar{v}, (\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)) \in \tilde{\Omega}''$$

(voir [1]). Donc  $\bar{v}$  vérifie l'axiome ( $q'$ ) (prop. 30 [2]) et, en vertu de la proposition 30 [2],  $(J(\mathcal{C}, <), <)$  est une classe sous-inductive quotient de  $(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$ . On en conclut, en utilisant le théorème 23 [2], que  $(J(\mathcal{C}, <)^*, <)$  est une catégorie sous-inductive.

— Soit  $N = \bar{\nu}(F, f)$ ; si  $(F_1, f) < (F, f)$  et  $(F_2, f) < (F, f)$  dans  $(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$ , et si  $\bar{\nu}(F_1, f) = \bar{\nu}(F_2, f)$ , on a  $F_1 = F_2$ , ce qui signifie que la restriction de  $\bar{\nu}$  à la classe des minorants de  $(F, f)$  est une bijection sur la classe des minorants de  $N$  dans

$$(J(\mathcal{C}, <), <).$$

Il en résulte que, si  $A \in J(\mathcal{C}, <)_0^*$  et  $A < \alpha^*(N)$ , il existe

$$(\mathfrak{B}, \alpha(f)) \in A$$

tel que  $(\mathfrak{B}, \alpha(f)) < \alpha(F, f)$ ; alors  $\bar{\nu}((F, f)(\mathfrak{B}, \alpha(f)))$  est le pseudo-produit de  $N$  et de  $A$  dans  $(J(\mathcal{C}, <)_0^*, <)$  et  $\alpha^*(NA) = A$ . De même si  $A' < \beta^*(N)$ , il existe  $A'N$  et on a  $\beta^*(A'N) = A'$ . Enfin, si  $N' \cdot N$  est défini et si  $N'' < N' \cdot N$ , il existe  $(F', f') \in N'$  et  $(F, f) \in N$  tels que  $(F', f') \cdot (F, f)$  soit défini et il existe  $(F'', f'') \in N''$  tel que :

$$(F'', f'') < (F', f') \cdot (F, f),$$

d'après ce qui précède. Puisque  $(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$  est régulière, on a :

$$(F'', f'') = (F'_1, f') \cdot (F_1, f),$$

où

$$F'_1 \subset F' \quad \text{et} \quad F_1 \subset F;$$

d'où :

$$N'' = N'_1 \cdot N_1, \quad N'_1 = \bar{\nu}(F'_1, f') < N' \quad \text{et} \quad N_1 = \bar{\nu}(F_1, f) < N.$$

Ceci montre que  $(J(\mathcal{C}, <)_0^*, <)$  est une catégorie sous-inductive régulière quotient de  $(\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$ .

— L'application  $\theta : f \rightarrow \bar{\nu}(f, f)$  identifie  $\mathcal{C}$  à une sous-catégorie régulière de  $(J(\mathcal{C}, <)_0^*, <)$ .

— Supposons  $K_i = \bar{\nu}(F_i, f) \in J(\mathcal{C}, <)$ , où  $i \in I$ . Puisque la classe des  $K_i$ , où  $i \in I$ , est majorée par  $\theta(f)$  dans  $(J(\mathcal{C}, <), <)$ ,

il existe  $K = \bigcup_{i \in I}^{\theta(f)} K_i = \bar{\nu}(F, f)$ , où  $F = (\bar{H})_{f, >}$ , en désignant par  $H$  la classe réunion des  $F_i$ . Soit  $K' = \bar{\nu}(F', f') \in J(\mathcal{C}, <)$  tel que  $K \cap K' = \bar{\nu}(G, \tilde{f})$  soit défini. On a :

$$(G, f) \sim (G, \tilde{f}) \sim (G, f') \quad \text{et} \quad G \subset F \cap F'.$$

Si  $C$  est une sous-classe de  $F \cap F'$  admettant un sous-agrégat  $g$ ,

les relations  $g \in (\overline{F'})_{f'>} = F'$  et  $g \in (\overline{F})_{f>} = F$  entraînent  $g \in F \cap F'$ , d'où :

$$(\overline{F \cap F'})_{f>} = F \cap F' \quad \text{et} \quad G = F \cap F'.$$

De plus, pour tout  $i \in I$ ,  $K_i \cap K' = \bar{\nu}(F_i \cap F', f)$  est défini et il existe :

$$K'' = \bar{\nu}(F'', f) = \bigcup_{i \in I}^{0(f'')} K_i \cap K'.$$

Si  $G'$  désigne la classe réunion des  $F_i \cap F'$ , où  $i \in I$ , on a :

$$F'' = (\overline{G'})_{f>} \subset F \cap F'.$$

Par ailleurs, soit  $g' \in F \cap F'$ . Il existe une sous-classe  $C'$  de  $H$  telle que  $g' = \bigcup^{g'} C'$ ; pour tout  $c' \in C'$ , il existe  $i \in I$  tel que  $c' \in F_i \cap F' \subset G'$ ; donc  $g' \in F''$  et  $F \cap F' = F''$ . Par conséquent :  $K'' = K \cap K'$  et  $(J(\mathcal{C}', <), <)$  est une catégorie sous-locale.

**COROLLAIRE.** — Si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie prélocale,

$$(J(\mathcal{C}, <)^*, <)$$

est une catégorie locale, isomorphe à la catégorie locale  $(\overline{J}^*, <)$ , où  $\overline{J}$  est la classe des sous-classes de  $\mathcal{C}$  qui sont majorées, saturées par induction et par agrégation dans  $(\mathcal{C}, <)$ , munie de la loi de composition :

$$(F', F) \rightarrow (\overline{F' \cdot F})_{\mathcal{C}} \quad \text{si, et seulement si,} \quad (\alpha(F'))_{\mathcal{C}} = (\beta(F))_{\mathcal{C}},$$

et de la relation d'ordre :

$$F_1 < F \quad \text{si, et seulement si,} \quad F_1 \subset F.$$

*Démonstration.* — Soit  $\nu(F, f) \in J(\mathcal{C}, <)$ . Si  $f'$  est un autre majorant de  $F$ , on a  $F < f \cap f'$ , car  $(\mathcal{C}, <)$  est prélocale, et

$$(\overline{F})_{f>} = (\overline{F})_{(f \cap f')>} = (\overline{F})_{f'>},$$

d'où

$$(F, f') \sim (F, f).$$

En tenant compte de la proposition 5, on voit que l'application

$$\lambda: \bar{\nu}(F, f) \rightarrow F \quad \text{où} \quad \bar{\nu}(F, f) \in J(\mathcal{C}, <)$$

est une bijection de  $J(\mathcal{C}, <)$  sur la classe  $\bar{J}$ . Comme toute sous-classe  $C$  de  $J(\mathcal{C}, <)$  majorée par  $\lambda^{-1}(F) \in J(\mathcal{C}, <)$  est aussi majorée par  $\theta(f)$ , où  $f$  est un majorant de  $F$  dans  $(\mathcal{C}, <)$ ,  $\lambda(C)$  admet pour agrégat l'élément  $(\bar{C})_{\mathcal{C}}$ , où  $C'$  est la classe réunion des  $F \in \lambda(C)$ . Le corollaire s'en déduit.

Soit  $\mathcal{J}_i^u$  la catégorie des foncteurs inductifs entre catégories sous-prélocales, c'est-à-dire des foncteurs ordonnés vérifiant la condition U ([1], p. 214),  $((\Sigma, <), \varphi, (\mathcal{C}, <))$ , tels que  $(\mathcal{C}, <)$  et  $(\Sigma, <)$  soient des catégories sous-prélocales et que les conditions  $f \in \mathcal{C}$ ,  $f' < f$  et  $f'' < f$  entraînent :

$$\varphi(f' \cap f'') = \varphi(f') \cap \varphi(f'').$$

Soit  $\mathcal{J}_i^l$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{J}_i^u$  ayant pour objets les catégories sous-locales. Soit  $\mathcal{J}_l$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{J}_i^l$  ayant pour objets les catégories locales.

**THÉORÈME 5 (Théorème de complétion).** —  $(J(\mathcal{C}, <)^*, <)$  est une  $\mathcal{J}_i^l$ -projection de  $(\mathcal{C}, <)$  dans  $\mathcal{J}_i^l$  (voir [2]).

*Démonstration.* — Montrons que

$$\bar{\theta} = ((J(\mathcal{C}, <)^*, <), \theta, (\mathcal{C}, <))$$

est un  $\mathcal{J}_i^l$ -projecteur dans  $\mathcal{J}_i^u$ . Pour cela, prouvons d'abord que  $\bar{\theta} \in \mathcal{J}_i^u$ . En effet, si  $C$  est une sous-classe de  $\mathcal{C}$  ayant un sous-agrégat  $f$ , la classe  $\theta(C)$  admet  $\theta(f)$  pour sous-agrégat. Si  $f' < f$  et  $f'' < f$ , on a :

$$\theta(f' \cap f'') = \bar{\nu}((f' \cap f'')^>, f' \cap f'') = \theta(f') \cap \theta(f''),$$

donc  $\bar{\theta} \in \mathcal{J}_i^u$ .

— Supposons  $\Phi = ((\Sigma, <), \varphi, (\mathcal{C}, <)) \in \mathcal{J}_i^u$  et  $(\Sigma, <) \in \mathcal{J}_i^l$ . Soit  $\bar{\varphi}$  l'application :

$$\bar{\nu}(F, f) \rightarrow \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F), \quad \text{où} \quad \bar{\nu}(F, f) \in J(\mathcal{C}, <).$$

Si  $(F, f') \sim (F, f)$  modulo  $\nu$ , il existe  $\tilde{f} \in \mathcal{C}$  tel que :

$$\tilde{f} < f', \quad \tilde{f} < f \quad \text{et} \quad (F, \tilde{f}) \sim (F, f).$$

Par suite :

$$\bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F) = \bigcup^{\varphi(\bar{f})} \varphi(F) = \bigcup^{\varphi(f')} \varphi(F),$$

et l'application  $\bar{\varphi}$  est bien définie. Montrons que  $\bar{\varphi}$  définit un foncteur. En effet, comme  $\Phi$  est un foncteur inductif, pour toute sous-classe  $F$  de  $\mathcal{C}$ , majorée par  $f \in \mathcal{C}$ , on a :

$$\bigcup^{\bar{f}} \varphi(F) = \bigcup^{\bar{f}} \varphi((\bar{F})_{f>}), \quad \text{où} \quad \bar{f} = \varphi(f).$$

Soit  $N = \bar{v}(F, f) \in J(\mathcal{C}, <)$  et  $A = \alpha^*(N)$ . On a :

$$\begin{aligned} A &= \bar{v}(\mathcal{B}, e), & \text{où} & \quad e = \alpha(f), \\ \mathcal{B} &= E. e>. E & \text{et} & \quad E = (\alpha(F))_{e>}. \end{aligned}$$

Posons :

$$\bar{e} = \varphi(e) \quad \text{et} \quad \bar{e}' = \bigcup^{\bar{e}} \varphi(E).$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\bar{e}' = \bigcup^{\bar{e}} \varphi(\alpha(F)) < \bigcup^{\bar{e}} \varphi(\mathcal{B}) < \bar{e}.$$

De la relation :

$$\varphi(g) = \varphi(\beta(g) \cdot g \cdot \alpha(g)) = \varphi(\beta(g)) \cdot \varphi(g) \cdot \varphi(\alpha(g)) < \bar{e}' \bar{e} \bar{e}' = \bar{e}',$$

où  $g \in \mathcal{B}$ , il résulte  $\varphi(\mathcal{B}) < \bar{e}'$ . Donc :

$$\bar{e}' = \bigcup^{\bar{e}} \varphi(\mathcal{B}) = \bar{\varphi}(A).$$

Comme :

$$\alpha(\bar{\varphi}(N)) = \alpha\left(\bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F)\right) = \bigcup^e \alpha(\varphi(F)) = \bigcup^{\bar{e}} \varphi(\alpha(F)) = \bar{e}',$$

on obtient :  $\alpha(\bar{\varphi}(N)) = \bar{\varphi}(\alpha^*(N))$ . De même

$$\beta(\bar{\varphi}(N)) = \bar{\varphi}(\beta^*(N)).$$

Soit  $N' \in J(\mathcal{C}, <)$  tel que  $\alpha^*(N') = \beta^*(N)$ ; on peut supposer qu'il existe  $(F', f') \in N'$  tel que  $(F', f') \cdot (F, f)$  soit défini; posons :

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \varphi(f), & \bar{f}' &= \varphi(f'), & \bar{f}'' &= \varphi(f' \cdot f), \\ h &= \bar{\varphi}(N), & h' &= \bar{\varphi}(N') & \text{et} & \quad h'' = \bar{\varphi}(N' \cdot N). \end{aligned}$$

On a :

$$h'' = \bigcup^{\bar{f}''} \varphi(F' \cdot F) < \left( \bigcup^{\bar{f}'} \varphi(F') \right) \cdot \left( \bigcup^{\bar{f}} \varphi(F) \right) = h' \cdot h.$$

D'après le début de la démonstration, on trouve :

$$\alpha(h' \cdot h) = \alpha(h) = \bar{\varphi}(\alpha^*(N)) = \bar{\varphi}(\alpha^*(N' \cdot N)) = \alpha(h'')$$

et de même  $\beta(h' \cdot h) = \beta(h'')$ . Il s'ensuit  $h' \cdot h = h''$ , car  $(\Sigma', <)$  est ordonnée. Par suite  $\bar{\varphi}(N' \cdot N) = \bar{\varphi}(N') \cdot \bar{\varphi}(N)$  et  $\bar{\varphi}$  définit un foncteur.

— Supposons  $K_i = \bar{v}(F_i, f) < \bar{v}(F, f)$ , pour tout  $i \in I$ . Le  $\bar{v}(F, f)$ -agrégat  $K$  des  $K_i$  est égal à  $\bar{v}((\bar{F}')_{f>}, f)$ , où  $F'$  est la classe réunion des  $F_i$ , de sorte que :

$$\bar{\varphi}(K) = \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F') = \bigcup_{i \in I}^{\varphi(f)} \left( \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F_i) \right) = \bigcup_{i \in I}^{\bar{\varphi}(K)} \bar{\varphi}(K_i).$$

Enfin, on a :

$$\bar{\varphi}(K_1 \cap K_2) = \bar{\varphi}(\bar{v}(F_1 \cap F_2, f)) = \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F_1 \cap F_2),$$

d'après la démonstration du théorème 4, et

$$\bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2) = \left( \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F_1) \right) \cap \left( \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F_2) \right) = \bigcup_{f_i \in F_i}^{\varphi(f)} (\varphi(f_1) \cap \varphi(f_2)),$$

en vertu de l'axiome de distributivité dans  $(\Sigma', <)$ . Puisque  $F_1$  et  $F_2$  sont majorés par  $f$  et que  $\bar{\varphi}$  est un foncteur inductif, on a :

$$\varphi(f_1) \cap \varphi(f_2) = \varphi(f_1 \cap f_2),$$

quels que soient  $f_1 \in F_1$  et  $f_2 \in F_2$ . Par conséquent :

$$\bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2) < \bar{\varphi}(K_1 \cap K_2)$$

et

$$\bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2) = \bar{\varphi}(K_1 \cap K_2),$$

car  $\bar{\varphi}(K_1 \cap K_2) < \bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2)$ . Ceci démontre que  $\bar{\varphi}$  définit un foncteur inductif  $\bar{\Phi} = ((\Sigma', <), \bar{\varphi}, (J(\mathcal{C}', <)^*, <))$  tel que  $\bar{\Phi} \cdot \bar{\theta} = \Phi$ .

— Soit  $\bar{\Phi}_1$  un autre foncteur inductif de  $(J(\mathcal{C}', <)^*, <)$  vers  $(\Sigma', <)$  tel que  $\bar{\Phi}_1 \cdot \bar{\theta} = \Phi$ . Soit  $K = \bar{v}(F, f)$ ; comme  $K$  est le

$\bar{v}(F, f)$ -agrégat des éléments  $\theta(f_i)$ , où  $f_i \in F$ , on doit avoir :

$$\bar{\Phi}_1(K) = \bigcup^{\varphi(F)} \bar{\Phi}_1(\theta(F)) = \bigcup^{\varphi(F)} \varphi(F) = \bar{\varphi}(K),$$

ce qui entraîne  $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1$ . Donc  $\bar{\theta}$  est un  $\mathfrak{J}_i^s$ -projecteur [2] et par suite  $(J(\mathcal{C}, <)^*, <)$  est une  $\mathfrak{J}_i^s$ -projection de  $(\mathcal{C}, <)$  dans  $\mathfrak{J}_i^s$ .

**COROLLAIRE 1.** — Si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie sous-locale régulière,  $\bar{\theta}$  est un isomorphisme de  $(\mathcal{C}, <)$  sur  $(J(\mathcal{C}, <)^*, <)$ .

Ceci résulte de l'unicité, à un isomorphisme près, d'une  $\mathfrak{J}_i^s$ -projection (voir [2]).

**COROLLAIRE 2.** — Si  $(\mathcal{C}, <)$  est une catégorie prélocale régulière,  $(J(\mathcal{C}, <)^*, <)$  est une  $\mathfrak{J}_i$ -projection de  $(\mathcal{C}, <)$ .

Ce corollaire résulte du théorème 5 et du corollaire du théorème 4.

1+

*Remarque.* — Le théorème 5 et le corollaire 2 de ce théorème admettent pour cas particuliers des théorèmes de complétion démontrés dans [2] et [3], dans lesquels  $(\mathcal{C}, <)$  est supposé être un groupoïde sous-local.

2

#### BIBLIOGRAPHIE

- [0] Complétion des catégories ordonnées, *C.R.A.S.*, 257, 1963, p. 4110;  
Complétion des catégories sous-prélocales, *C.R.A.S.*, 259, 1964, p. 701.
- [1] Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, *Ann. Fourier*, 14, 1 (1964), p. 205-268.
- [2] Structures quotient, *Comm. Math. Helv.*, 1963, p. 219-283.
- [3] Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Fourier*, 13, 2 (1963), p. 1-60.
- [4] Espèces de structures locales, élargissement de catégories, *Séminaire Topologie et Géo. diff.* (Ehresmann), vol. III, 1961, Paris.

Manuscrit reçu en octobre 1964.

Charles EHRESMANN,  
Institut Henri Poincaré,  
11, rue Pierre-Curie,  
Paris (5<sup>e</sup>).



## STRUCTURES FEUILLETÉES

CHARLES EHRESMANN, *Institut Henri Poincaré*

### Introduction

Cet article a pour but la définition précise et l'étude des structures feuilletées dans le cadre de la théorie des structures locales telle qu'elle est exposée dans (3; 5; 6). Les résultats connus dans le cas des variétés feuilletées sont précisés et généralisés au cas d'un feuilletage topologique localement simple. Les notions d'holonomie, de déroulements et de tubes analysées ici permettent d'étudier les questions de stabilité. Seuls des problèmes généraux sont abordés, les applications étant réservées pour une publication ultérieure. 1

La plupart des idées contenues dans ce travail ont été exposées dans mes cours (en particulier, Paris 1955-56, 1958, 1961) et dans des conférences (par exemple Princeton 1953, Buenos-Aires 1959-60, Montréal 1961). Rappelons que la notion de variété feuilletée a été introduite dans une Note en collaboration avec Reeb (1), puis étudiée d'une façon approfondie par Reeb (13; 14) dans différentes publications. Les structures feuilletées d'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie et de seconde espèce ont été définies dans (3). Les  $\Gamma$ -structures étudiées par Haefliger (16), qui sont étroitement liées aux feuilletages de seconde espèce, ne seront pas considérées ici. Les feuilletages localement simples ont été introduits dans une Note en collaboration avec Shih Weishu (2). 2+

### I. Définitions de diverses espèces de structures feuilletées

#### 1. Feuilletages topologiques

Soit  $E$  un ensemble muni de deux topologies  $T$  et  $T'$ . On dira que  $(T, T')$  définit sur  $E$  un *feuilletage topologique* ou une structure d'*espace feuilleté topologique* si la condition suivante est vérifiée : Pour tout  $x \in E$ , il existe un voisinage ouvert  $U'$  de  $x$  relativement à  $T'$  sur lequel  $T$  et  $T'$  induisent la même topologie.

Si  $(T, T')$  est un feuilletage topologique sur  $E$ , alors  $T'$  est une topologie plus fine que  $T$ . Nous supposons désormais que  $T'$  est

localement connexe. Une composante connexe  $F$  de  $E$  relativement à  $T'$ , munie de la topologie induite par  $T'$ , sera appelée une *feuille* de  $(T, T')$ . Si  $T$  et  $T'$  induisent la même topologie sur  $F$ , on dira que  $F$  est une *feuille propre*. Les feuilles de  $(T, T')$  forment une partition de  $E$ ; la relation d'équivalence correspondante sera appelée *relation d'équivalence sous-jacente* à  $(T, T')$ .

*Remarque.* Un feuilletage topologique  $(T, T')$  tel que  $T \neq T'$  peut n'avoir qu'une seule feuille. Par exemple, considérons sur le tore à deux dimensions une géodésique  $E$  partout dense. Soient  $T'$  la topologie de variété à une dimension de  $E$  et  $T$  la topologie induite sur  $E$  par celle du tore. Alors  $(T, T')$  est un feuilletage topologique dont  $E$  est la seule feuille.

Soit  $E^\sim$  l'espace quotient de l'espace  $E$ , muni de la topologie  $T$ , par la relation d'équivalence sous-jacente à  $(T, T')$ ; l'espace topologique  $E^\sim$  sera appelé *espace transverse* de  $(T, T')$ .

Si  $U$  est un ouvert de  $E$  relativement à  $T$ , le couple des topologies induites par  $T$  et  $T'$  sur  $U$  définit un feuilletage topologique sur  $U$ , que nous appellerons *feuilletage induit par  $(T, T')$  sur  $U$*  et que nous noterons  $(T, T')_U$ .

Soient  $(T, T')$  et  $(T_1, T'_1)$  deux feuilletages topologiques sur  $E$  et  $E_1$  respectivement. Une application  $f$  de  $E$  sur  $E_1$  est un *isomorphisme* de  $(T, T')$  sur  $(T_1, T'_1)$  si  $f$  est un homéomorphisme de  $T$  sur  $T_1$  et de  $T'$  sur  $T'_1$ . Un *isomorphisme local* de  $E$  sur  $E_1$  est un isomorphisme de  $(T, T')_U$  sur  $(T_1, T'_1)_{U_1}$ , où  $U$  et  $U_1$  sont des ouverts de  $E$  et  $E_1$  relativement à  $T$  et  $T_1$  respectivement. Soit  $E^\wedge$  un espace étalé par  $p$  sur  $E$ ; alors il existe un feuilletage  $(T^\wedge, T'^\wedge)$  sur  $E^\wedge$  tel que la restriction  $p_{U^\wedge}$  de  $p$  à  $U^\wedge$  soit un isomorphisme de  $(T^\wedge, T'^\wedge)_{U^\wedge}$  sur  $(T, T')_{p(U^\wedge)}$  pour tout ouvert  $U^\wedge$  tel que  $p_{U^\wedge}$  soit un homéomorphisme sur  $p(U^\wedge)$ .

Une feuille  $F$  de  $(T, T')$  sera dite *simple* si tout point de  $F$  a un système fondamental de voisinages  $U$  ouverts relativement à  $T$  et tels que l'application canonique de l'espace transverse  $U^\sim$  de  $(T, T')_U$  dans l'espace transverse  $E^\sim$  soit un homéomorphisme sur un ouvert de  $E^\sim$ ; un tel voisinage sera appelé *ouvert distingué* de  $(T, T')$ .

Le feuilletage  $(T, T')$  est dit *simple* si toute feuille est simple. Il est dit *localement simple* si tout point  $x$  de  $E$  admet un voisinage ouvert  $U$  relativement à  $T$  tel que  $(T, T')_U$  soit simple; un tel

ouvert  $U$  sera appelé *ouvert simple* et une feuille de  $(T, T')_U$  sera appelée une *plaque* de  $U$ ; alors tout point  $x$  admet un système fondamental de voisinages simples.

Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple sur  $E$ . On appelle *chaîne simple* une suite finie  $C = (U_1, \dots, U_n; V_{1,2}, \dots, V_{n-1,n})$  vérifiant les conditions suivantes :

(1) Pour tout  $i \leq n$ ,  $U_i$  est un ouvert simple de  $E$ .

(2) Pour tout  $i < n$ ,  $V_{i,i+1}$  est une plaque du feuilletage induit sur  $U_i \cap U_{i+1}$  et  $V_{i-1,i}$  et  $V_{i,i+1}$  appartiennent à une même plaque  $V_i$  de  $U_i$ .

Il en résulte que la suite  $(V_1, \dots, V_n; V_{1,2}, \dots, V_{n-1,n})$  est une chaîne de plaques d'une feuille  $F$ , c'est-à-dire que  $V_{i,i+1}$  est une composante connexe de  $V_i \cap V_{i+1}$ . Si de plus  $x$  et  $x'$  sont deux points de  $F$  tels que  $x \in V_1$  et  $x' \in V_n$ , on dira que  $C$  relie  $x$  à  $x'$ . Le triplet  $(x, C, x')$  est appelé *chaîne simple pointée*.

On appelle *chaîne pure* une suite  $\Gamma = (W_1, \dots, W_n; W_{1,2}, \dots, W_{n-1,n})$  vérifiant les conditions suivantes :

(1) Pour tout  $i \leq n$ ,  $W_i$  est un ouvert simple de  $(T, T')$ .

(2) Pour tout  $i < n$ ,  $W_{i,i+1}$  est un ouvert distingué dans  $W_i$  et  $W_{i+1}$ .

(3) Pour tout  $i < n$ ,  $W_i$  et  $W_{i+1}$  sont obtenus par saturation de  $W_{i,i+1}$  relativement aux relations d'équivalence sous-jacentes à  $(T, T')_{W_i}$  et à  $(T, T')_{W_{i+1}}$  respectivement.

(4) Pour tout  $i < n$ , une plaque  $V_{i',i+1}$  de  $W_{i,i+1}$  est une composante connexe de  $V_{i'} \cap V_{i+1}'$ , où  $V_{i'}$  est une plaque de  $W_i$ .

A  $\Gamma$  et à toute plaque  $V_1$  de  $W_1$  est associée une chaîne simple  $(W_1, \dots, W_n; V_{1,2}, \dots, V_{n-1,n})$  bien déterminée, où  $V_{1,2}$  est contenu dans  $V_1$ , et par suite une chaîne de plaques  $(V_1, \dots, V_n; V_{1,2}, \dots, V_{n-1,n})$ . La suite  $(x, W_1, \dots, W_n; W_{1,2}, \dots, W_{n-1,n}, x') = (x, \Gamma, x')$ , où  $x \in V_1$  et  $x' \in V_n$ , est appelée *chaîne pure pointée* reliant  $x$  à  $x'$ .

PROPOSITION. Avec les notations précédentes, l'application :  $V_1 \rightarrow V_n$  est un isomorphisme de l'espace transverse  $W_1$  sur l'espace transverse  $W_n$ , appelé isomorphisme canonique associé à  $\Gamma$ .

PROPOSITION. Si  $(T, T')$  est un feuilletage localement simple, la relation d'équivalence sous-jacente est ouverte.

COROLLAIRE. *L'adhérence d'une feuille  $F$  relativement à la topologie  $T$  est une réunion de feuilles.*

Soit  $(U_1, U_2, V_{1,2})$  une chaîne simple. Dans  $U_1 \cap U_2$ , il existe un ouvert  $W$  distingué relativement à  $U_1$  et à  $U_2$  et dont une plaque contient  $V_{1,2}$ . Soient  $W_1, W_2$  et  $W_{1,2}$  les ouverts obtenus par saturation de  $W$  relativement aux relations d'équivalence sous-jacentes à  $(T, T')_{U_1}$ ,  $(T, T')_{U_2}$ ,  $(T, T')_{U_1 \cap U_2}$ ; alors  $(W_1, W_2; W_{1,2})$  est une chaîne pure.

PROPOSITION. *A toute chaîne simple  $(U_1, \dots, U_n; V_{1,2}, \dots, V_{n-1,n})$  est associée une chaîne pure  $(W_1, \dots, W_n; W_{1,2}, \dots, W_{n-1,n})$  telle que  $W_i \subset U_i$  et  $V_{i,i+1} \subset W_{i,i+1}$ .*

PROPOSITION. *Si  $(T, T')$  est un feuilletage topologique et si  $T'$  est régulière, toute feuille simple est propre. Si de plus  $(T, T')$  est localement simple, toute plaque d'un ouvert simple  $U$  est propre et les plaques forment une base de  $T'$ ; pour qu'une feuille soit propre il faut et il suffit qu'il existe un ouvert simple dont la trace sur  $F$  soit connexe.*

PROPOSITION. *Pour qu'un feuilletage localement simple  $(T, T')$  soit simple, il faut et il suffit que pour tout  $x \in E$  il existe un voisinage simple  $U$  de  $x$  relativement à  $T$  tel que deux plaques différentes de  $U$  appartiennent à deux feuilles différentes de  $(T, T')$ .*

COROLLAIRE. *Si  $(T, T')$  est simple, tout feuilletage induit est simple et pour tout ouvert  $U$  de  $E$  relativement à  $T$  l'espace transverse  $U^\sim$  de  $(T, T')_U$  est un espace étalé (non séparé) au-dessus de  $E^\sim$ .*

La classe des feuilletages topologiques sur les ensembles, munie de la relation d'ordre :  $(T_1, T_1') < (T, T')$  si, et seulement si,  $(T_1, T_1')$  est un feuilletage induit par  $(T, T')$ , est une espèce de structures locales au-dessus des ensembles (voir 3).

Un feuilletage topologique peut être défini de la façon suivante : Soit  $E$  un ensemble muni d'une topologie  $T$ . La classe  $\mathfrak{S}$  des sous-espaces  $(A, T_A)$ , où  $T_A$  est la topologie induite par  $T$  sur le sous-ensemble  $A$ , forme une espèce de structures locales au-dessus des sous-ensembles de  $E$  pour la relation :  $(A', T_{A'}) < (A, T_A)$  si, et seulement si,  $A'$  est ouvert pour  $T_A$ , et la projection  $p : (A, T_A) \rightarrow A$ . Désignons cette espèce de structures par  $\langle \mathfrak{P}(E), p, \mathfrak{S} \rangle$ .

$\langle \mathfrak{P}(E), p, \mathfrak{S} \rangle$  peut être complétée en une espèce de structures  $\mathfrak{S}^-$  dont les éléments sont les classes complètes  $C$  de  $\mathfrak{S}$  relativement à  $p$ , c'est-à-dire **(3)** les sous-classes de  $\mathfrak{S}$  saturées par induction et agrégation et telles que, pour tout  $(A, T_A) \in C$  et tout  $(A', T_{A'}) \in C$ ,  $A \cap A'$  soit ouvert relativement à  $T_A$  et à  $T_{A'}$ .

$\mathfrak{S}^-$  est une espèce de structures locales au-dessus de  $\mathfrak{P}(E)$  pour la projection

$$\bar{p}: C \rightarrow \bigcup_{s \in C} p(s).$$

L'image  $\bar{p}(C)$  de  $C \in \mathfrak{S}^-$ , munie de la topologie  $\tau(C)$  engendrée par les éléments  $p(s)$ , où  $s \in C$ , est appelée *sous-espace local* de  $E$ . Le couple  $(T_B, \tau(C))$ , où  $T_B$  est la topologie induite par  $T$  sur  $B = \bar{p}(C)$ , définit un feuilletage topologique sur  $B$ . En particulier :

PROPOSITION. *La donnée d'un feuilletage topologique  $(T, T')$  sur  $E$  équivaut à la donnée d'un élément  $C$  de  $\mathfrak{S}^-$  tel que  $\bar{p}(C) = E$ .*

Les ensembles  $p(s)$ , où  $s \in C$ , sont des ouverts de  $T'$ .

A l'espèce de structures locales  $\langle \mathfrak{P}(E), p, \mathfrak{S} \rangle$  est associée la classe des jets locaux  $j_x^\lambda s$ , où  $s \in \mathfrak{S}$  et  $x \in p(s)$  (voir **5**). Le jet  $j_x^\lambda s$  s'identifie à la classe des couples  $(s', x)$ , où  $s' \in \mathfrak{S}$  et  $x \in p(s')$ , tels que  $s$  et  $s'$  aient un ouvert commun contenant  $x$ . Ce jet sera appelé *germe de sous-espace en  $x$* . Soit  $E^\wedge$  l'ensemble de tous les germes de sous-espaces de  $E$ . Les ensembles  $s^\wedge$  formés de tous les germes  $j_x^\lambda s$  du sous-espace  $s$  forment une base d'une topologie sur  $E^\wedge$ ; un élément  $s^\wedge$  sera appelé *ouvert élémentaire*. L'application canonique  $\hat{p} : j_x^\lambda s \rightarrow x$  est une application continue de  $E^\wedge$  sur  $E$  dont la restriction à  $s^\wedge$  est un homéomorphisme sur le sous-espace  $s$ .

Un ouvert  $W$  de  $E^\wedge$  est appelé *espace extrait* de  $E$  (voir **4**). En particulier, pour que  $W$  soit l'ensemble des germes d'un sous-espace local  $B$  de  $E$ , il faut et il suffit que la restriction de  $\hat{p}$  à  $W$  soit une application biunivoque sur  $B$ . Ainsi un feuilletage topologique  $(T, T')$  est aussi défini par la donnée d'un sous-espace extrait  $W$  de  $E$  tel que la restriction de  $\hat{p}$  à  $W$  soit une application biunivoque sur  $E$ .

Il convient de considérer plus généralement les espaces extraits connexes relativement séparés  $W$ , c'est-à-dire tels que si  $\hat{p}(w) = \hat{p}(w')$ , où  $w \in W$  et  $w' \in W$ , il existe deux voisinages de  $w$  et  $w'$  sans point commun.

1 Soit  $E'$  un espace topologique et  $f$  une application de  $E'$  dans l'espace topologique  $E$ . On dit que  $f$  est une *immersion* de  $E'$  dans  $E$  s'il existe un étalement  $f'$  de  $E'$  dans  $E^\wedge$  tel que  $f = p^\wedge f'$ ; c'est-à-dire pour tout  $x \in E'$ , il existe un voisinage ouvert  $U'$  de  $x$  dans  $E'$  tel que la restriction de  $f'$  à  $U'$  soit un homéomorphisme sur un ouvert de  $E^\wedge$ . Si de plus  $f$  est une application biunivoque, alors on dira que  $f$  est un *plongement* de  $E'$  dans  $E$ .

Soit  $E$  une variété topologique, de topologie  $T$ . Un sous-espace  $(A, T_A)$  de  $E$  est appelé une *sous-variété élémentaire* si  $T_A$  est une topologie de variété. Les sous-variétés élémentaires forment une sous-espèce de structures locales de  $\mathfrak{S}$  et leurs germes, un sous-espace  $E_v^\wedge$  de  $E^\wedge$ ;  $E_v^\wedge$  est une variété topologique (non séparée). Un ouvert de  $E_v^\wedge$  sera appelé *variété extraite* de  $E$ .

Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces topologiques et  $f$  une application de  $E'$  dans  $E$ . On appellera *point limite de  $E'$  relativement à  $f$  au-dessus de  $x \in E$*  un filtre minimal (c'est-à-dire le plus fin possible suivant l'ordre considéré sur la catégorie des filtres (5))  $X$  de  $E'$  ayant les propriétés suivantes :

- (1)  $f(X)$  converge vers  $x \in E$  et  $X$  ne converge pas vers un point  $y$  tel que  $f(y) = x$ .
- (2)  $X$  admet une base  $B$  formée d'ouverts connexes.
- 2 (3) Pour tout  $U' \in B$ , il existe un ouvert  $U$  de  $E$  tel que, en désignant par  $U'$  la frontière de  $U'$ , on ait :  $U \cap f(U') = \emptyset$ .

En particulier, on définit ainsi la notion de point limite d'un espace étalé; plus généralement, on appellera point limite d'un espace extrait  $W$  de  $E$  un point limite de  $W$  relativement à la restriction de  $p^\wedge$  à  $W$ .

Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique sur  $E$ . On appellera *point limite d'une feuille  $F$*  de  $(T, T')$  un point limite  $X$  de l'espace topologique  $F$  relativement à l'injection canonique de  $F$  dans l'espace  $E$  muni de la topologie  $T$ . Alors  $X$  s'identifie à un point limite de l'espace extrait correspondant à  $F$ .

3 PROPOSITION. Soient  $(T, T')$  un feuilletage localement simple et  $U$  un ouvert simple. Pour qu'une plaque  $P$  de  $U$  n'admette pas de point limite, il faut et il suffit que  $P$  soit fermée dans  $U$  pour la topologie induite par  $T$  sur  $U$ .

PROPOSITION. Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple. Pour

qu'une feuille  $F$  n'admette pas de point limite, il faut et il suffit que, pour tout ouvert simple  $U$ , toute plaque de  $F \cap U$  soit fermée dans  $U$ .

1

Si aucune feuille de  $(T, T')$  n'admet de point limite, on dira que  $(T, T')$  est un *feuilletage sans point limite*.

Si une feuille  $F$  d'un feuilletage  $(T, T')$  admet un point limite, l'espace transverse de  $E$  n'est pas séparé. Toutefois un feuilletage sans point limite peut être tel que son espace transverse ne soit pas localement séparé.

## 2. Partitions locales

Soit  $E$  un ensemble muni d'une topologie  $T$ . Soit  $U$  un ouvert de  $E$  et soit  $\rho(U)$  une relation d'équivalence ouverte sur  $U$  telle que les classes d'équivalence modulo  $\rho(U)$  soient connexes, localement connexes et fermées pour la topologie  $T_U$  induite par  $T$  sur  $U$ . La classe de toutes les relations d'équivalence  $\rho(U)$ , où  $U$  parcourt l'ensemble des ouverts de  $E$ , est une classe inductive  $\mathfrak{R}$  pour la relation d'ordre :  $\rho(U') < \rho(U)$  si, et seulement si,  $U' \subset U$  et si les classes d'équivalence modulo  $\rho(U')$  sont les composants connexes des traces sur  $U'$  des classes d'équivalence modulo  $\rho(U)$ . Toute sous-classe majorée  $\mathfrak{N}$  de  $\mathfrak{R}$  admet, en effet, un agrégat, à savoir la relation d'équivalence engendrée par les relations  $\rho(U) \in \mathfrak{N}$ . L'application  $p : \rho(U) \rightarrow U$  étale  $\mathfrak{R}$  sur la classe inductive des ouverts de  $E$ .

Une classe complète  $C$  de  $\mathfrak{R}$ , compatible avec  $p$  et telle que

$$\bigcup_{s \in C} p(s) = E$$

sera appelée *partition locale* de  $E$ . Une classe d'équivalence modulo  $s$ , où  $s \in C$ , sera appelée *plaque* de  $C$ .

PROPOSITION. Soit  $C$  une partition locale de  $E$  et  $\rho$  la relation d'équivalence sur  $E$  engendrée par les relations d'équivalence  $s \in C$ . Alors les plaques de  $C$  forment une base d'une topologie  $T'$  sur  $E$  telle que  $(T, T')$  soit un feuilletage topologique sans point limite dont  $\rho$  est la relation d'équivalence sous-jacente.

Le feuilletage  $(T, T')$  défini par la proposition sera appelé *feuilletage associé à la partition locale*  $C$ .

Les partitions locales forment une espèce de structures locales

au-dessus des espaces topologiques, la relation d'ordre étant la relation d'inclusion.

Soient  $(T, T')$  un feuilletage topologique sur  $E$  et  $\rho$  la relation d'équivalence sous-jacente. Les composantes connexes des ouverts relativement à  $T$  des feuilles de  $(T, T')$  forment une base d'une topologie  $T''$  sur  $E$ .

PROPOSITION. *Avec les notations précédentes,  $T''$  est une topologie plus fine que  $T$  et moins fine que  $T'$ . Si  $(T, T')$  est un feuilletage localement simple sans point limite,  $T'$  et  $T''$  sont identiques et  $(T, T')$  est le feuilletage associé à une partition locale.*

De cette proposition, il résulte que  $(T'', T')$  est un feuilletage topologique. Si  $(T, T')$  est localement simple et sans point limite, c'est le feuilletage associé à la partition locale de  $E$  dont une base est formée des relations d'équivalence sous-jacentes à  $(T, T')_U$ , où  $U$  est un ouvert simple de  $E$ .

Soit  $C$  une partition locale de l'espace topologique  $E$  admettant une base  $C$  telle que pour tout  $x \in p(s) \cap p(s')$ , où  $s \in C$  et  $s' \in C$ , il existe un ouvert  $U \ni x$  sur lequel les traces des classes modulo  $s$  et  $s'$  respectivement soient connexes, c'est-à-dire identiques aux classes d'équivalence modulo  $s'' \in C$ , où  $p(s'') = U$ .

Alors  $C$  s'identifie à un système dynamique généralisé au sens de Reeb (voir 14).

PROPOSITION. *Pour qu'une partition locale soit un système dynamique généralisé, il faut et il suffit que le feuilletage associé soit localement simple.*

Les notions de système dynamique généralisé et de feuilletage topologique localement simple sans point limite sont donc équivalentes.

Soient  $(T, T')$  un feuilletage topologique sur  $E$  et  $F$  une feuille localement compacte. On appellera *point adhérent à l'infini de  $F$*  un point adhérent relativement à  $T$  au filtre d'Alexandroff de  $F$  (c'est-à-dire au filtre admettant pour base les complémentaires des compacts de  $F$  relativement à la topologie  $T'$ ). Plus précisément, on peut considérer les points de  $F$  adhérents, relativement à  $T$ , à un filtre  $\mathfrak{F}$  de  $F$  tel que :



(1)  $\mathfrak{F}$  est plus fin que le filtre d'Alexandroff.

(2)  $\mathfrak{F}$  admet une base formée d'ouverts à frontière compacte.

Un point adhérent à un tel filtre  $\mathfrak{F}$  est un point limite de  $F$  selon  $\mathfrak{F}$  au sens de Reeb **(14)**.

PROPOSITION. Soient  $(T, T')$  un feuilletage localement simple sans point limite,  $F$  une feuille localement compacte et  $\mathfrak{F}$  un filtre sur  $F$  vérifiant les conditions (1) et (2) ci-dessus. Alors l'ensemble des points adhérents à  $F$  relativement à  $\mathfrak{F}$  est une réunion de feuilles.

Pour la démonstration, voir **(14)**.

En particulier, cette proposition s'applique si  $\mathfrak{F}$  est un bout au sens de Freudenthal **(15)**.

Remarquons qu'une feuille  $F$  peut être contenue dans son adhérence à l'infini (la feuille est alors dite stable au sens de Poisson).

### 3. Variétés feuilletées

Soient  $G$  un pseudogroupe de transformations dans l'espace numérique  $R^p$  et  $G'$  un pseudogroupe de transformations dans l'espace numérique  $R^q$ . Soient  $\tau(G)$  et  $\tau(G')$  les topologies sous-jacentes à  $G$  et à  $G'$  respectivement (voir **3**). Soit  $h$  un homéomorphisme  $(x, y) \rightarrow (g(x), g'_x(y))$ , défini sur  $U \times U'$ , où  $U$  est la source de  $g \in G$  et  $U'$  la source de  $g'_x \in G'$  pour tout  $x \in U$ , tel que de plus  $h(U \times U')$  soit ouvert pour la topologie produit  $\tau(G) \times \tau(G')$ . L'ensemble des homéomorphismes  $h$  est la base d'un pseudogroupe de transformations  $G \# G'$  dans  $R^p \times R^q$ . Tout point de  $R^p$  est supposé fermé pour  $\tau(G)$ .

Soit  $A$  un atlas complet de  $R^p \times R^q$  sur un ensemble  $E$  compatible avec le pseudogroupe  $G \# G'$  (voir **6**). On dira que l'atlas complet  $A$  définit sur  $E$  une *structure feuilletée de l'espèce  $G \# G'$  élargie*, c'est-à-dire obtenue par élargissement complet de  $G \# G'$  au-dessus du pseudogroupe  $\mathfrak{E}$  des applications biunivoques d'un ensemble sur un ensemble. Considérons en particulier l'ensemble  $A_1$  des cartes locales  $f \in A$  ayant pour source un ouvert élémentaire  $U \times U'$ , où  $U \in \tau(G)$  et  $U' \in \tau(G')$ ; une telle carte sera appelée *carte élémentaire*.  $A_1$  est une base de l'atlas complet  $A$ . Soit  $\tau(A)$  la topologie sur  $E$  sous-jacente à  $A$ , c'est-à-dire la topologie dont les buts des cartes de  $A$  forment une base;  $\tau(A)$  admet aussi pour base l'ensemble des buts des cartes élémentaires.

A une carte élémentaire  $f$  définie sur  $U \times U'$  correspond, pour tout  $x \in U$ , l'application  $f_x : y \rightarrow f(x, y)$  de  $U'$  dans  $E$ . L'ensemble des applications  $f_x$  forme une base d'un atlas complet  $A'$  de  $R^q$  dans  $E$  compatible avec  $G'$ ; cet atlas complet  $A'$  définit sur  $E$  une structure de l'espèce  $G'$  élargie. Soit  $\tau(A')$  la topologie sous-jacente à  $A'$ ; nous supposons  $\tau(G')$ , donc  $\tau(A')$ , localement connexe.

PROPOSITION. *Avec les notations précédentes, le couple des topologies  $(\tau(A), \tau(A'))$  définit sur  $E$  un feuilletage topologique localement simple sans point limite, sous-jacent à la structure feuilletée de l'espèce  $G \# G'$  élargie.*

Les composantes connexes de  $\tau(A')$  sont aussi appelées les feuilles de la structure feuilletée de l'espèce  $G \# G'$  élargie. Chaque feuille est munie d'une structure de l'espèce  $G'$  élargie.

En particulier, si  $G$  et  $G'$  sont les pseudogroupes de tous les automorphismes locaux de  $R^p$  et  $R^q$  respectivement, une structure feuilletée de l'espèce  $G \# G'$  élargie sera appelée structure de *variété feuilletée*. Le pseudogroupe  $G \# G'$  correspondant sera désormais noté  $\Lambda_{p,q}$ .

1

PROPOSITION. *Si  $E$  est une variété feuilletée telle que le feuilletage topologique sous-jacent soit simple, l'espace transverse  $E^\sim$  est une variété non séparée.*

2

Soit  $A$  un atlas complet définissant sur  $E$  une structure feuilletée de l'espèce  $G \# G'$  élargie.  $A$  est aussi compatible avec  $\Lambda_{p,q}$ . En complétant  $A$  relativement à  $\Lambda_{p,q}$ , on obtient un atlas complet  $A_{p,q}$  définissant sur  $E$  une structure de variété feuilletée sous-jacente à la structure de l'espèce  $G \# G'$  élargie. Chaque feuille  $F$  est aussi munie d'une structure de variété de dimension  $q$  par l'atlas  $A_{p,q}'$  correspondant à  $A_{p,q}$  par la même construction que précédemment. De plus,  $F$  est une réunion de feuilles de la variété feuilletée sous-jacente.

Dans tout ce qui précède, on peut remplacer  $G \# G'$  par un sous-pseudogroupe  $\Gamma$  et définir une structure feuilletée de l'espèce  $\Gamma$  élargie par la donnée d'un atlas complet compatible avec  $\Gamma$ . Une structure feuilletée de l'espèce  $\Gamma$  élargie admet une structure feuilletée sous-jacente de l'espèce  $G \# G'$  élargie.

*Exemples de structures feuilletées de l'espèce  $\Gamma$  élargie*

(1) Si  $\Gamma$  est le pseudogroupe admettant pour base les homéomorphismes  $h : (x, y) \rightarrow (g(x), g'(y))$  de  $U \times U'$  sur un ouvert de  $R^p \times R^q$ , où  $U$  est la source de  $g \in G$  et  $U'$  la source de  $g' \in G'$ , une structure feuilletée de l'espèce  $\Gamma$  élargie est appelée structure de *produit local*. Une telle structure admet deux structures feuilletées sous-jacentes, de l'espèce  $G \# G'$  et de l'espèce  $G' \# G$  élargies. On dira aussi qu'une structure de produit local définit un *feuilletage double*.

(2) Soit  $\Lambda_{p,q}^{k,l,r}$  le sous-pseudogroupe de  $\Lambda_{p,q}$  admettant pour base les homéomorphismes  $h : (x, y) \rightarrow (g(x), g_x'(y))$  de  $\Lambda_{p,q}$  tels que  $g \in \Lambda_p^k$ ,  $g_x' \in \Lambda_q^l$  pour tout  $x$  appartenant à la source  $U$  de  $g$  et  $h \in \Lambda_{p+q}^r$ , où  $r < k$ ,  $r < l$  et  $\Lambda_n^s$  désigne le pseudogroupe des automorphismes locaux d'ordre  $s$  de l'espace numérique  $R^n$ . Les structures feuilletées de l'espèce  $\Lambda_{p,q}^{k,l,r}$  élargie sont appelées *structures feuilletées différentiables d'ordre  $(k, l, r)$* . Les feuilles sont munies de structures de variétés  $l$  fois différentiables.

Toute structure de variété feuilletée différentiable d'ordre  $(r, r, r)$  telle que le feuilletage topologique sous-jacent soit simple, est isomorphe à une structure de variété feuilletée construite de la façon suivante:

Soient  $V_n$  et  $B$  deux variétés  $r$  fois différentiables,  $B$  pouvant ne pas être séparée. Soit  $f$  une application de  $V_n$  sur  $B$  de rang  $p$  constant. Soient  $x_0 \in V_n$  et  $y_0 = f(x_0)$ . Alors il existe une carte différentiable distinguée  $g$  du pavé ouvert de  $R^n$  formé des points  $(x_1, \dots, x_n)$  tels que  $a_i < x_i < b_i$  pour tout  $i \leq n$  sur un voisinage ouvert  $U$  de  $x_0$  dans  $V_n$  et une carte différentiable  $g'$  du pavé de  $R^q$  formé des points  $(y_1, \dots, y_q)$  tels que  $a_j' < y_j < b_j'$  pour tout  $j \leq q$  sur un voisinage ouvert  $V$  de  $y_0$  dans  $B$  de façon que l'application  $f' = g'^{-1}fg$  soit définie par :

$$y_i = x_i \text{ si } i \leq p \text{ et } y_j = 0 \text{ si } p < j < q.$$

Pour deux cartes distinguées  $g$  et  $g_1$  de  $R^n$  dans  $V_n$  le changement de cartes  $g^{-1}g_1$  appartient à  $\Lambda_{p,n-p}^{r,r,r}$ . Donc l'ensemble des cartes distinguées de  $R^n$  dans  $V_n$  définit sur  $V_n$  une structure de variété feuilletée différentiable d'ordre  $(r, r, r)$ .

Les feuilles sont les composantes connexes des ensembles  $f^{-1}(y)$ ,

où  $y \in B$ ; elles forment une partition de  $V_n$  et l'espace quotient de  $V_n$  par cette partition est une variété non séparée de dimension  $p$  se projetant sur une variété extraite de dimension  $p$  de  $B$ .

- (3) Si, dans l'exemple précédent, on remplace  $\Lambda_p^k$ ,  $\Lambda_q^l$  et  $\Lambda_{p+q}^r$  par les pseudogroupes d'automorphismes locaux analytiques réels (ou complexes)  $\Lambda_p^\omega$ ,  $\Lambda_q^\omega$ ,  $\Lambda_{p+q}^\omega$  de  $R^p$ ,  $R^q$  et  $R^{p+q}$  respectivement les structures feuilletées de l'espèce  $\Lambda_{p,q}^\omega$  élargie correspondantes sont appelées *structures feuilletées analytiques* réelles (ou complexes).  
1 Toute structure feuilletée analytique admet une structure feuilletée sous-jacente, différentiable d'ordre  $(k, l, r)$  pour tout  $k, l, r$ .

Si  $\Lambda_q^l$  (respectivement  $\Lambda_p^k$ ) est remplacé par  $\Lambda_q^\omega$  (respectivement par  $\Lambda_p^\omega$ ), on obtient une structure feuilletée à feuilles analytiques (respectivement transversalement analytique).

#### 4. Structures feuilletées de l'espèce $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$ élargie

Soit  $\mathfrak{E}$  la catégorie inductive des applications d'un ensemble dans un autre, un élément étant représenté par le triplet  $(E', f, E)$ , où  $f$  est une application de  $E$  dans  $E'$ . Le groupoïde des éléments inversibles est le groupoïde  $\mathfrak{C}$  des applications biunivoques d'un ensemble sur un autre.

Soient  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{F}$  deux groupoïdes locaux au-dessus de  $\mathfrak{C}$  (voir 5), les foncteurs\* projections étant  $p$  et  $p'$  respectivement, c'est-à-dire  $\langle \mathfrak{C}, p, \mathfrak{B} \rangle$  et  $\langle \mathfrak{C}, p', \mathfrak{F} \rangle$  sont des espèces de structures locales au-dessus de  $\mathfrak{C}$ . Les symboles  $S$  et  $s$  désigneront des unités (ou structures) de  $\mathfrak{B}$ , les symboles  $S'$  et  $s'$  des unités de  $\mathfrak{F}$ ; nous écrirons aussi  $B = p(S)$  et  $F = p'(S')$ ; un élément de  $\mathfrak{B}$  sera représenté par un couple  $(g, S)$ , où  $g \in \mathfrak{C}$  et  $\alpha(g) = p(S)$ ; un élément de  $\mathfrak{F}$  par un couple  $(g', S')$ , où  $g' \in \mathfrak{C}$  et  $\alpha(g') = p'(S')$ . Les éléments  $p(s)$ , où  $s < S$ , engendrent une topologie  $\tau(S)$  sur  $B$  et les éléments  $p'(s')$ , où  $s' < S'$ , une topologie  $\tau(S')$  sur  $F$ , supposée localement connexe.

- 2 Soit  $\widetilde{\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}}$  la catégorie des triplets  $(S_2 \times S_2', h, S_1 \times S_1')$ , où  $h$  est un homéomorphisme de  $B_1 \times F_1$  sur un ouvert de  $B_2 \times F_2$  pour les topologies  $\tau(S_1) \times \tau(S_1')$  et  $\tau(S_2) \times \tau(S_2')$ , de la forme :

$$(x, y) \rightarrow (g(x), g_z'(y))$$

\*Le mot foncteur signifie toujours foncteur covariant. La classe des unités ou des objets d'une catégorie  $\mathfrak{C}$  sera désignée par  $\mathfrak{C}_0$ , l'unité à droite, ou source, de  $f \in \mathfrak{C}$  par  $\alpha(f)$ , l'unité à gauche, ou but, de  $f$  par  $\beta(f)$ .

où  $(g, S_1) \in \mathfrak{B}$ ,  $(x, y) \in B_1 \times F_1$ ,  $(g_x', S_1') \in \mathfrak{F}$  pour tout  $x \in \mathfrak{B}$ , avec  $\beta(g, S_1) < S_2$  et  $\beta(g_x', S_1') < S_2'$ . Munie de la relation :  $(s_2 \times s_2', h', s_1 \times s_1') < (S_2 \times S_2', h, S_1 \times S_1')$  si, et seulement si,  $s_i < S_i$ ,  $s_i' < S_i'$  où  $i = 1, 2$ , et  $h'$  est une restriction on de  $h$ ,  $\widetilde{\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}}$  devient une catégorie sous-inductive presque au-dessus de  $\mathfrak{C}^{\sim}$  (voir 3). Soit  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  le groupoïde des éléments inversibles.

Soient  $E$  un ensemble et  $f$  une application biunivoque de  $B \times F$  sur  $E$ . Soit  $(f, S \times S') \mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  la classe des couples  $(f', S_1 \times S_1')$ , où  $(S \times S', h, S_1 \times S_1') \in \mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$ . Une telle classe sera appelée *structure de produit assoupli sur E*.

Soit  $\sigma = (f, S \times S') \mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  une structure de produit assoupli sur  $\pi(\sigma) = E$ ; on dira que  $\sigma' = (f', s \times s') \mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  est *induite* par  $\sigma$  si, et seulement si,  $\pi(\sigma') \subset \pi(\sigma)$  et s'il existe un élément  $(S \times S', h, s \times s')$  de  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  tel que  $f' = fh$ . Avec cette relation, la classe de toutes les structures de produit assoupli devient une classe ordonnée (3).

Deux structures de produits assouplis  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont dites *localement compatibles* si la classe  $\Sigma''$  de toutes les structures de produits assouplis  $\sigma''$  induites simultanément par  $\sigma$  et  $\sigma'$  est telle que l'on ait :

$$\pi(\sigma) \cap \pi(\sigma') = \bigcup_{\sigma'' \in \Sigma''} \pi(\sigma'').$$

Soit  $\Sigma$  une classe complète de produits assouplis  $\sigma$ , c'est-à-dire une classe saturée par induction et agrégation et telle que deux quelconques de ses éléments soient localement compatibles. Alors  $\Sigma$  est appelée *structure feuilletée de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie sur*

$$E = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \pi(\sigma).$$

1+

A une structure de produit assoupli  $\sigma$  correspond la structure feuilletée  $\bar{\sigma}$  définie par la classe complète engendrée par la classe de toutes les structures de produits assouplis qu'elle induit. Remarquons que  $\bar{\sigma}$  peut contenir d'autres structures de produits assouplis sur  $\pi(\sigma)$ , qui admettent par conséquent la même structure feuilletée sous-jacente.

La classe des structures feuilletées de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie, munie de la relation :  $\Sigma < \Sigma'$  si, et seulement si, la classe  $\Sigma$  est contenue dans  $\Sigma'$ , et de la projection

$$\tilde{\pi}: \Sigma \rightarrow \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \pi(\sigma) = E,$$

est une espèce de structures locales  $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})_0$  au-dessus de  $\mathfrak{E}$ .

A tout  $\Sigma \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})_0$  correspond une topologie sous-jacente  $\tau(\Sigma)$  ayant pour base les ensembles  $\pi(\sigma)$ , où  $\sigma \in \Sigma$ ; alors  $\Sigma$  induit une structure feuilletée de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie sur tout ouvert de cette topologie.

Soient  $\sigma = (f, s \times s')\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  et  $\sigma'$  deux produits assouplis. Un *isomorphisme* de  $\sigma$  sur  $\sigma'$  est un couple  $(k, \sigma)$ , où  $k \in \mathfrak{E}$ ,  $\alpha(k) = \pi(\sigma)$  et  $\sigma' = (kf, s \times s')\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$ . Le groupoïde de ces isomorphismes est un groupoïde ordonné pour la relation :  $(k_1, \sigma_1) < (k, \sigma)$  si, et seulement si,  $\sigma_1 < \sigma$  et  $k_1$  est une restriction de  $k$ . Ce groupoïde est l'élargissement de  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  relativement à  $\mathfrak{E}$  (3).

Soient  $\Sigma \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})_0$  et  $\Sigma' \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})_0$ . On appelle *isomorphisme* de  $\Sigma$  sur  $\Sigma'$  un couple  $(K, \Sigma)$  tel que  $K$  soit une application bi-univoque de  $\tilde{\pi}(\Sigma)$  sur  $\tilde{\pi}(\Sigma')$  et que, pour tout  $\sigma \in \Sigma$ , on ait  $\beta(K\pi(\sigma), \sigma) \in \Sigma'$ , où  $K\pi(\sigma)$  est la restriction de  $K$  à  $\pi(\sigma)$ . Les isomorphismes ainsi définis forment un groupoïde local  $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})$  au-dessus de  $\mathfrak{E}$ .

Soit  $\Sigma \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})_0$  et  $(f, S \times S')\mathfrak{B} \# \mathfrak{F} \in \Sigma$ ; soit  $x \in B = p(S)$ . La classe  $\psi$  des éléments  $(f_x, S')$ , où  $f_x(y) = f(x, y)$ , est base d'un atlas complet  $A$  sur  $E = \tilde{\pi}(\Sigma)$ , dont la topologie sous-jacente  $\tau(A)$  est plus fine que  $\tau(\Sigma)$ . Le couple  $(\tau(\Sigma), \tau(A))$  définit sur  $E$  un feuilletage topologique sous-jacent à  $\Sigma$  et  $A$  définit sur  $E$  une structure de l'espèce  $\mathfrak{F}$  élargie. Chaque feuille de  $(\tau(\Sigma), \tau(A))$ , où  $\tau(A)$  est localement connexe, est aussi munie d'une structure de l'espèce  $\mathfrak{F}$  élargie.

PROPOSITION. Soient  $\mathfrak{B}'$  et  $\mathfrak{F}'$  deux groupoïdes locaux au-dessus de  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{F}$  respectivement; alors  $\mathfrak{L}(\mathfrak{B}' \# \mathfrak{F}')$  est un groupoïde local au-dessus de  $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})$ .

Si  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{F}$  sont les sous-groupoïdes des éléments inversibles des catégories locales  $\mathfrak{B}^\sim$  et  $\mathfrak{F}^\sim$  au-dessus de  $\mathfrak{E}^\sim$ , une construction générale analogue mène à une catégorie locale  $\mathfrak{L}(\mathfrak{B}^\sim \# \mathfrak{F}^\sim)$ , contenant  $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})$  et dont les éléments sont des homomorphismes de structures feuilletées de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie.

Toutes les constructions précédentes peuvent se faire de même en remplaçant  $\widetilde{\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}}$  et  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  par  $\Gamma^\sim$  et  $\Gamma$ , où  $\Gamma^\sim$  est une sous-

catégorie de  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  ayant les mêmes unités et saturée par induction, et  $\Gamma$  est le groupoïde des éléments inversibles de  $\Gamma$ . On est ainsi conduit à l'espèce  $\mathfrak{L}(\Gamma)_0$  des structures feuilletées de l'espèce  $\Gamma$  élargie. Toute structure feuilletée de l'espèce  $\Gamma$  élargie admet une structure feuilletée sous-jacente de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie.

*Exemples de structures feuilletées de l'espèce  $\Gamma$  élargie*

(1) *Produits locaux.* Si  $\Gamma$  est le sous-pseudogroupe  $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$  de  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$ , une structure feuilletée de l'espèce  $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$  élargie est appelée structure de *produit local*. L'espèce  $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})_0$  admet  $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})_0$  et  $\mathfrak{L}(\mathfrak{F} \# \mathfrak{B})_0$  comme espèces de structures locales sous-jacentes. Les structures feuilletées de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie et de l'espèce  $\mathfrak{F} \# \mathfrak{B}$  élargie sous-jacentes à une structure de produit local seront dites *supplémentaires*.

(2) *Fibrations.* Si on suppose que  $\mathfrak{F}$  est un groupoïde muni de la relation d'ordre triviale ( $a < b$  si, et seulement si,  $a = b$  ou  $a = 0$ ), la topologie  $\tau(S')$  est la topologie grossière sur  $F = p'(S')$ . Dans ce cas, une structure feuilletée de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie est appelée *structure fibrée* et les feuilles sont appelées les fibres. En particulier, supposons que  $\langle \mathfrak{T}, p'', \mathfrak{F} \rangle$  soit une espèce de superstructures locales au-dessus de  $\langle \mathfrak{E}, \tau, \mathfrak{T} \rangle$ , où  $\mathfrak{T}$  est le groupoïde local des homéomorphismes d'un espace topologique sur un autre; c'est-à-dire l'ensemble  $F$  est muni d'une topologie  $p''(S')$  et l'application  $p'' : (g', S') \rightarrow (g', p''(S'))$  est un foncteur de  $\mathfrak{F}$  vers  $\mathfrak{T}$ . Toute structure fibrée  $\Sigma$  sur  $E$  admet pour structure sous-jacente une structure feuilletée de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{T}$  élargie. Si les topologies  $p''(S')$  sont localement connexes, les feuilles de cette structure feuilletée sont les composantes connexes des fibres.

Pour tout sous-pseudogroupe  $\Gamma$  de  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$ , on a aussi les structures fibrées de l'espèce  $\Gamma$  élargie.

Soit  $\mathfrak{B}$  un pseudogroupe d'automorphismes locaux de l'espace topologique  $S$ , l'ensemble sous-jacent à  $S$  étant  $B$ ; soit  $\mathfrak{F}$  un groupe topologique opérant d'une façon continue sur un espace topologique  $S'$ , l'ensemble sous-jacent à  $S'$  étant  $F$ . Soit  $\Gamma$  le sous-pseudogroupe de  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  formé des éléments  $(S_2 \times S', h, S_1 \times S')$  de  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  tels que l'application  $h : (x, y) \rightarrow (g(x), g_x'(y))$  vérifie de plus la condition :  $x \rightarrow g_x'$  est continu. Une structure fibrée de l'espèce  $\Gamma$  élargie est alors une structure fibrée à *groupe structural topologique*.

1

On définit de même les structures fibrées différentiables, analytiques, etc.

*Variation de structures.* Soient  $\mathfrak{B}'$  et  $\mathfrak{F}'$  des groupoïdes locaux au-dessus de  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{F}$  respectivement et  $\pi'$  la projection correspondante de  $\mathfrak{B}' \# \mathfrak{F}'$  vers  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$ . Soient  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux sous-groupoïdes de  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{B}' \# \mathfrak{F}'$  respectivement tels que  $\pi'(\Gamma') \subset \Gamma$ , les sous-groupoïdes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  définissant les espèces de structures feuilletées  $\mathfrak{L}(\Gamma)_0$  et  $\mathfrak{L}(\Gamma')_0$ . Alors  $\mathfrak{L}(\Gamma')$  est un groupoïde local au-dessus de  $\mathfrak{L}(\Gamma)$  relativement à une projection  $\eta$ . On est conduit au problème suivant : étant donné  $\Sigma \in \mathfrak{L}(\Gamma)_0$ , étudier les structures  $\Sigma^- \in \mathfrak{L}(\Gamma')_0$  telles que  $\Sigma = \eta(\Sigma^-)$ .

Plus précisément : supposons  $\mathfrak{F}'$  étalé (voir 3) au-dessus de  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$ ; on a alors le problème d'existence et d'unicité à un isomorphisme près d'une structure  $\Sigma^-$  telle que  $\Sigma = \eta(\Sigma^-)$  et qu'une feuille donnée  $F'$  de  $\Sigma$  soit munie par  $\Sigma^-$  d'une structure donnée  $\tilde{S}'$  de l'espèce  $\mathfrak{F}'_0$ . En particulier, si  $\Sigma$  est un produit assoupli, sous quelles conditions  $\Sigma^-$ , s'il existe, est-il un produit assoupli (cas de rigidité locale ou globale de la structure  $\tilde{S}'$ ) ? Ce problème est le problème de variation de structures relativement à une espèce de structures feuilletées sous-jacentes. Le problème de variations de structures complexes étudié par Kodaira et Spencer correspond au cas suivant :  $\mathfrak{L}(\Gamma)_0$  est formé des structures de variétés feuilletées différentiables (se réduisant en particulier à des espaces fibrés différentiables) et  $\mathfrak{L}(\Gamma')_0$  est formé des structures de variétés feuilletées à feuilles analytiques complexes, les structures transversales étant différentiables.

1

##### 5. Feuilletages de seconde espèce

Soient  $\mathfrak{B}$  un groupoïde inductif complet au-dessus de  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Z}$  un groupoïde inductif complet étalé au-dessus de  $\mathfrak{X}$ , les projections étant  $p$  et  $p_1$  respectivement. Soit  $\Theta$  la classe des triplets  $(S, f, Z)$  tels que  $S \in \mathfrak{B}_0$ ,  $Z \in \mathfrak{Z}_0$ ,  $(p(S), f, p_1(Z)) \in \mathfrak{X} \sim$  = catégorie locale des applications continues. Posons :

$$\alpha(S, f, Z) = Z, \beta(S, f, Z) = S, q(S, f, Z) = (p(S), f, p_1(Z)).$$

$\Theta$  est muni d'une relation d'ordre :  $(S', f', Z) < (S, f, Z)$  si, et seulement si,  $Z' < Z$  dans  $\mathfrak{Z}$ ,  $S' < S$  dans  $\mathfrak{B}$ ,  $q(S', f', Z') < q(S, f, Z)$  dans  $\mathfrak{X} \sim$ .  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{Z}$  opèrent sur  $\Theta$  pour les lois de composition :

$$\begin{aligned} [(k, S), (S, f, Z)] &\rightarrow (S', kf, Z) \quad \text{où } S' = \beta(k, S), (k, S) \in \mathfrak{B}, \\ [(g, Z), (S, f, Z)] &\rightarrow (S, fg^{-1}, Z') \quad \text{où } Z' = \beta(g, Z), (g, Z) \in \mathfrak{Z}. \end{aligned}$$



$\Theta$  est une classe locale au-dessus de  $\mathfrak{T}^{\sim}$  relativement à la projection  $q$ .

Soit  $\mathfrak{S}$  une sous-classe de  $\Theta$ , munie de l'ordre induit et vérifiant les conditions suivantes :

(1) Si  $h \in \mathfrak{S}$  tout composé de  $h$  avec un élément de  $\mathfrak{B}$  ou de  $\mathfrak{Z}$  appartient à  $\mathfrak{S}$ ;

(2) Pour tout  $z < Z$ , soit  $H'$  la classe des  $h' \in \mathfrak{S}$  tels que  $h' < (S, f, Z) \in \mathfrak{S}$  et  $\alpha(q(h')) < p_1(z)$ ; alors  $p_1(z) = \cup \alpha(q(H'))$ ;

(3) Pour tout  $s < S$ , soit  $H''$  la classe des  $h'' \in \mathfrak{S}$  tels que  $h'' < (S, f, Z) \in \mathfrak{S}$  et  $\beta(q(h'')) < p(s)$ ; alors  $p(s) = \cup \beta(q(H''))$ .

*Remarque.* Si  $\mathfrak{S}$  ne vérifie pas 1, on obtient par élargissement relativement à  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{Z}$  une classe vérifiant 1, 2, 3. De plus, si  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{Z}$  ne sont pas complets au-dessus de  $\mathfrak{T}$ , on peut les remplacer par leurs complétés relativement à  $\mathfrak{T}$  (voir 3).

Soit  $C$  une classe complète de  $\mathfrak{S}$ , localement compatible avec  $q$ , c'est-à-dire une sous-classe de  $\mathfrak{S}$  saturée par induction et agrégation et telle que: si  $h \in C$  et  $h' \in C$ ,  $q(h) \cap q(h') = \cup q(H')$ , où  $H'$  est la classe des  $h'' \in C$ ,  $h'' < h$  et  $h'' < h'$ ;  $\cup q(C)$  existe.  $C$  sera identifiée au triplet  $(S, f, Z) \in \Theta$ , où  $Z = \cup \alpha(C)$ ,  $S = \cup \beta(C)$  et

$$(p(S), f, p_1(Z)) = \cup q(C),$$

et appelée *homomorphisme* de  $Z$  vers  $S$ .

1

La classe  $\mathfrak{S}^-$  des homomorphismes de  $Z \in \mathfrak{Z}_0$  vers  $S \in \mathfrak{B}_0$  munie de l'ordre défini par l'inclusion s'identifie à une sous-classe locale de  $\Theta$  sur laquelle  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{Z}$  opèrent aussi.  $\mathfrak{S}^-$  est une classe locale au-dessus de  $\mathfrak{T}^{\sim}$  pour la projection  $q$ ; de plus  $\mathfrak{S}^-$  est étalé sur  $\mathfrak{Z}_0$  et  $\mathfrak{B}_0$  par les projections  $\alpha$  et  $\beta$ .

Soit  $\mathfrak{S}^{\sim}$  la réunion de  $\mathfrak{S}^-$ , de  $\mathfrak{B}$  et de  $\mathfrak{Z}$  (en supposant  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{Z}$  disjoints; sinon on prend la classe somme de  $\mathfrak{S}^-$ , de  $\mathfrak{B}$  et de  $\mathfrak{Z}$ ). Munissons  $\mathfrak{S}^{\sim}$  de la loi de composition suivante :  $h'h$  est défini si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(1)  $h' \in \mathfrak{Z}$ ,  $h \in \mathfrak{Z}$ ; alors  $h'h$  est le composé dans  $\mathfrak{Z}$ ;

(2)  $h' \in \mathfrak{B}$ ,  $h \in \mathfrak{B}$ ; alors  $h'h$  est le composé dans  $\mathfrak{B}$ ;

(3)  $h' = (S, f, Z) \in \mathfrak{S}^-$  et  $h^{-1} = (g, Z) \in \mathfrak{Z}$ ; alors  $h'h = (S, fg^{-1}, Z')$  où  $Z' = \beta(g, Z)$ ;

(4)  $h' = (k, S) \in \mathfrak{B}$  et  $h = (S, f, Z) \in \mathfrak{S}^-$ ; alors  $h'h = (S', kf, Z)$ , où  $S' = \beta(k, S)$ .

$\mathfrak{S}^{\sim}$  devient ainsi une catégorie au-dessus de  $\mathfrak{T}^{\sim}$  pour le foncteur projection  $q^{\sim}$  dont la restriction à  $\mathfrak{B}$  est  $p$ , la restriction à  $\mathfrak{Z}$  est  $p_1$

2

et la restriction à  $\mathfrak{G}^-$  est  $q$ . De plus  $\mathfrak{G}^-$  est une catégorie locale au-dessus de  $\mathfrak{T}^-$  pour le foncteur  $q^-$  si on munit  $\mathfrak{G}^-$  de la loi d'induction suivante :  $h < h'$  si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (1)  $h \in \mathfrak{B}$ ,  $h' \in \mathfrak{B}$  et  $h < h'$  dans  $\mathfrak{B}$ ;
- (2)  $h \in \mathfrak{B}$ ,  $h' \in \mathfrak{B}$  et  $h < h'$  dans  $\mathfrak{B}$ ;
- (3)  $h \in \mathfrak{G}^-$ ,  $h' \in \mathfrak{G}^-$  et  $h < h'$  dans  $\mathfrak{G}^-$ .

$\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{B}$  sont des sous-groupeïdes de  $\mathfrak{G}^-$  saturés par induction.

Soit  $\rho$  la relation d'équivalence sur  $\mathfrak{G}^-$  :  $(S, f, Z) \sim (S', f', Z')$  si, et seulement si,  $Z = Z'$  et s'il existe une classe d'éléments  $h_i$  et une classe d'éléments  $g_i$  où  $i \in I$ , telles que :  $h_i < (S, f, Z)$ ,  $\beta(h_i) = \alpha(g_i)$ ,  $g_i h_i < (S', f', Z')$ ,  $\cup \alpha(h_i) = Z$ ,  $h_i \in \mathfrak{G}$ ,  $g_i \in \mathfrak{B}$ .

Deux éléments  $h$  et  $h'$  de  $\mathfrak{G}^-$  seront dits  $\mathfrak{B}$ -compatibles si les plus grands éléments induits par  $h$  et  $h'$  sur  $\alpha(h) \cap \alpha(h')$  (c'est-à-dire les pseudoproduits  $h(\alpha(h) \cap \alpha(h'))$  et  $h'(\alpha(h) \cap \alpha(h'))$  (voir 5)) sont équivalents modulo  $\rho$ .

1+ On appellera *feuilletage de seconde espèce*  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$  *élargie* un atlas complet de  $\mathfrak{G}^-$  compatible avec  $\mathfrak{B}$  et contenu dans  $\mathfrak{G}^-$ , c'est-à-dire une sous-classe  $A$  de  $\mathfrak{G}^-$  vérifiant les conditions :

- (1)  $A$  est saturé par induction et agrégation;  $\cup \alpha(A)$  existe;
- (2) Si  $(S, f, Z) \in A$ ,  $(S', f, Z) \in \mathfrak{G}$  et  $S < S'$ , alors  $(S', f, Z) \in A$ ;
- (3) La classe  $\mathfrak{B}A$  des pseudoproduits  $ba$ , où  $b \in \mathfrak{B}$  et  $a \in A$ , est identique à  $A$ ;
- (4) Deux éléments quelconques de  $A$  sont  $\mathfrak{B}$ -compatibles.

Les feuilletages de seconde espèce  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$  élargie forment une espèce de structures locales  $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})_0$  étalée sur  $\mathfrak{B}_0$  par la projection  $\zeta : A \rightarrow \cup \alpha(A)$ .

$\mathfrak{B}$  opère sur  $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})_0$ , le composé de  $A$  avec  $(k, Z)$  étant l'atlas complet formé des pseudoproduits  $ak^{-1}$ , où  $a \in A$ , si, et seulement si,  $Z = \zeta(A)$ . Soit  $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$  le groupeïde des isomorphismes correspondant.

Un feuilletage de seconde espèce  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{G})$  élargie peut aussi être défini par une classe complète de feuilletages élémentaires de la manière suivante :

Soit  $\mathfrak{G}^-/\mathfrak{B}$  la classe quotient de  $\mathfrak{G}^-$  par la relation d'équivalence  $r : (S, f, Z) \sim (S', f', Z')$  si, et seulement si, il existe  $(g, S) \in \mathfrak{B}$  tel que  $(S', f', Z') = (g, S)(S, f, Z)$ . La classe  $(S, f, Z)$  modulo  $r$  sera notée  $\mathfrak{B}(S, f, Z)$ .

$\mathfrak{S}^-/\mathfrak{B}$  est une classe sous-locale pour la relation :  $h^\wedge < h'^\wedge$  si, et seulement si, il existe  $h \in h^\wedge$  et  $h' \in h'^\wedge$  avec  $h < h'$ , et l'application  $\eta : \mathfrak{B}(S, f, Z) \rightarrow Z$  est un étalement de  $\mathfrak{S}^-/\mathfrak{B}$  sur  $\mathfrak{Z}_0$ .

Soit  $r'$  la relation d'équivalence sur  $\mathfrak{S}^- : (S, f, Z) \sim (S', f', Z')$  si, et seulement si, il existe  $(S'', f'', Z'') \in \mathfrak{S}^-$  tel que  $Z = Z' = Z''$ ,  $f = f' = f''$ ,  $S'' < S$  et  $S'' < S'$ .

Soit  $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}^-)$  la classe quotient de  $\mathfrak{S}^-/\mathfrak{B}$  par la relation  $r'' : h^\wedge \sim h'^\wedge$  si, et seulement si, il existe  $h \in h^\wedge$  et  $h' \in h'^\wedge$  tels que  $h \sim h'$  modulo  $r'$ . Cette classe est une classe sous-locale pour l'ordre quotient de celui de  $\mathfrak{S}^-/\mathfrak{B}$  par  $r''$  et l'application  $\eta' :$

$$\mathfrak{B}(S, f, Z) \text{ modulo } r'' \rightarrow Z$$

l'étalement sur  $\mathfrak{Z}_0$ . Une classe  $h^\sim \in \mathfrak{F}(\mathfrak{S}^-)$  sera appelée *feuilletage élémentaire de seconde espèce* sur  $\eta'(h^\sim)$ .

Soit  $C$  une classe complète de feuilletages élémentaires de seconde espèce, c'est-à-dire une sous-classe de  $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}^-)$  saturée par induction et agrégation et admettant pour base une sous-classe  $C'$  telle que, pour tout  $c \in C'$  et tout  $c' \in C'$ ,  $c \cap c'$  soit défini et  $\eta'(c) \cap \eta'(c') = \eta'(c' \cap c)$ . Alors  $C$  s'identifie à un feuilletage de seconde espèce  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{S})$  élargie sur  $Z = \cup \eta'(C)$ .

*Remarque.* La catégorie  $\mathfrak{S}^-$  peut être remplacée par une catégorie locale  $\mathfrak{E}^-$  au-dessus de  $\mathfrak{E}^-$  contenant  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{Z}$  comme sous-groupeïdes saturés par induction; il faut alors remplacer  $\mathfrak{S}^-$  par la classe  $\mathfrak{E}^-$  des éléments  $h \in \mathfrak{E}^-$  tels que  $\alpha(h) \in \mathfrak{Z}_0$  et  $\beta(h) \in \mathfrak{B}_0$ . 1

On pourrait aussi considérer la classe  $\mathfrak{F}^\lambda(\mathfrak{S}^-)$  des jets locaux atomiques des éléments de  $\mathfrak{S}^-$  au-dessus de  $\mathfrak{E}^-$  (voir 5). De la relation d'équivalence  $r$ , on déduit une relation d'équivalence dans  $\mathfrak{F}^\lambda(\mathfrak{S}^-)$  dont les classes d'équivalence sont appelées *germes de feuilletages* (voir 5 et 16); la classe des germes de feuilletages est un faisceau sur l'espace (méta-) topologique des germes atomiques de structures de l'espèce  $\mathfrak{Z}_0$ , dont les sections au-dessus de  $Z \in \mathfrak{Z}_0$  sont les feuilletages de seconde espèce  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{S}^-)$  élargie.

#### Exemples

(1) Soit  $\mathfrak{E}^r$  la catégorie de tous les homomorphismes  $r$  fois différentiables,  $\mathfrak{B}$  étant le groupeïde  $\Lambda_p^r$  et  $\mathfrak{Z}$  le groupeïde des automorphismes locaux d'ordre  $r$  d'une variété différentiable  $V_n$  de dimension  $n$ . Un atlas complet  $A$  compatible avec  $\Lambda_p^r$  formé d'homomorphismes  $r$  fois différentiables d'ouverts de  $V_n$  dans  $R^p$  sera 2

appelé *feuilletage  $r$  fois différentiable de seconde espèce*. En particulier, si  $A$  est formé d'homomorphismes  $r$  fois différentiables de rang constant,  $A$  est appelé feuilletage  $r$  fois différentiable *régulier*;  $A$  est sous-jacent à une structure de variété feuilletée  $r$  fois différentiable bien déterminée (voir ci-dessous). Les singularités d'un feuilletage  $A$   $r$  fois différentiable de seconde espèce correspondent aux germes de  $A$  provenant d'un homomorphisme  $h$  de rang non constant au voisinage d'un point.

(2) Soit  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})$  (voir paragraphe 4); soit  $\mathfrak{S}$  la classe des triplets  $(s, pr_1 f^{-1}, \sigma)$ , où  $\sigma = (f, s \times s') \mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  et  $pr_1$  est la projection canonique de  $p(s) \times p'(s')$  sur  $p(s)$ . Alors  $\mathfrak{S}$  vérifie les conditions 1, 2, 3 du début du paragraphe et on peut lui associer la classe  $\mathfrak{S}^-(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})$  des homomorphismes de  $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})$  vers  $\mathfrak{B}$ . A une structure feuilletée  $\Sigma$  de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie correspond l'atlas complet  $A$  de  $\mathfrak{S}^-(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})$  engendré par les cartes  $(s, pr_1 f^{-1}, \sigma)$ , où  $\sigma = (f, s \times s') \mathfrak{B} \# \mathfrak{F} \in \Sigma$ ; cet atlas complet définit un feuilletage de seconde espèce  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{S}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}))$  élargie sous-jacent à  $\Sigma$ .

Soit  $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B}, \mathfrak{S})_0$  un feuilletage de seconde espèce  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{S})$  élargie sur  $Z \in \mathfrak{Z}_0$ . Soit  $\tau(Z)$  la topologie sur  $p_1(Z)$  sous-jacente à  $Z$ . Les traces sur les ouverts de  $\tau(Z)$  des ensembles  $f^{-1}(x)$ , où  $(s, f, z) \in A$  et  $x \in p(s)$ , forment une base d'une topologie  $T'$  sur  $p_1(Z)$ . Le couple des topologies  $(\tau(Z), T')$  définit sur  $p_1(Z)$  un feuilletage topologique sous-jacent au feuilletage de seconde espèce  $A$ . Si  $T'$  est localement connexe, une feuille de  $(\tau(Z), T')$  sera appelée feuille de  $A$ .

Si  $A$  est le feuilletage de seconde espèce sous-jacent à la structure feuilletée  $\Sigma \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})_0$ , les feuilletages topologiques sous-jacents à  $\Sigma$  et à  $A$  sont identiques et ce sont des feuilletages localement simples.

Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique localement simple sur  $E$ ; pour tout ouvert simple  $U$  de  $E$ , soit  $U^\sim$  son espace transverse et  $u$  l'application canonique de  $U$  sur  $U^\sim$ . Soit  $\mathfrak{T}$  le groupoïde des homéomorphismes d'un espace topologique sur un autre et soit  $\mathfrak{Z}$  la classe des ouverts de  $E$  relativement à  $T$ . Soit  $\mathfrak{S}^-$  la classe de toutes les applications continues d'un élément de  $\mathfrak{Z}$  dans un espace topologique. La sous-classe de  $\mathfrak{S}^-$  formée des triplets  $(U^\sim, u, U)$  engendre un atlas complet  $A$  compatible avec  $\mathfrak{T}$  qui définit sur  $E$  un feuilletage de seconde espèce  $(\mathfrak{T}, \mathfrak{S}^-)$  élargie sous-jacent au feuilletage

topologique  $(T, T')$ . Le feuilletage topologique sous-jacent à  $A$  est aussi le feuilletage  $(T, T')$ .

## II. Structure transversale d'un feuilletage

### 1. Pseudogroupe d'holonomie

Soient  $(T, T')$  un feuilletage topologique localement simple sur  $E$  et  $U$  un ouvert simple.

Soit  $\nu$  un relèvement d'un sous-espace  $B$  de l'espace transverse  $U^\sim$  dans  $U$ , c'est-à-dire une application continue de  $B$  dans  $U$  (muni de la topologie induite par  $T$ ) telle que  $\nu(x^\sim)$  appartienne à la plaque de  $U$  ayant  $x^\sim$  pour image canonique dans  $U$ . Le sous-espace  $\nu(B)$  de  $U$  sera appelé *espace quasi-transversal élémentaire*. Si  $B = U^\sim$ ,  $\nu(B)$  sera appelé *espace transversal élémentaire*.

Les germes des espaces quasi-transversaux élémentaires forment un ouvert  $E_\kappa^\wedge$  de l'espace  $E^\wedge$  de tous les germes de sous-espaces de l'espace  $E$  muni de la topologie  $T$ . Muni de la topologie induite par celle de  $E^\wedge$ , l'espace  $E_\kappa^\wedge$  sera appelé *espace quasi-transversal total*. Le sous-espace de  $E_\kappa^\wedge$  formé des germes d'espaces transversaux élémentaires sera appelé *espace transversal total* de  $(T, T')$  et noté  $E_\theta^\wedge$ . Un ouvert supposé relativement séparé de  $E_\kappa^\wedge$  (respectivement de  $E_\theta^\wedge$ ) sera appelé *espace quasi-transversal* (respectivement *transversal*). En vertu du théorème de Zorn, tout espace (quasi-)transversal est contenu dans un espace (quasi-)transversal maximal.

La classe  $\Theta$  des couples  $(h, N)$ , où  $N$  est un espace transversal élémentaire et  $h$  un homéomorphisme de  $N$  sur un espace transversal élémentaire  $N'$ , est un sous-groupeïde local de  $\mathfrak{T}$  et un groupeïde local au-dessus de  $\mathfrak{E}$  pour la projection  $\pi: (h, N) \rightarrow (h, \pi(N))$ , où  $\pi(N)$  est l'ensemble sous-jacent au sous-espace  $N$ . Un élément de  $\Theta$  sera appelé *isomorphisme transversal élémentaire* et on appellera *isomorphisme localement transversal* une classe complète  $C$  de  $\Theta$  compatible avec  $\pi$ . Si  $C$  est formé d'unités (c'est-à-dire d'espaces transversaux élémentaires),  $C$  définit un espace transversal sans point double.  $\Theta$  contient les sous-groupeïdes suivantes :

(1) Le groupeïde des couples  $(h, N)$  tels que, pour tout  $x \in \pi(N)$ ,  $x$  et  $h(x)$  appartiennent à une même feuille de  $(T, T')$ . Un élément de ce sous-groupeïde  $\Theta_s$  sera appelé *isomorphisme transversal strict élémentaire*.

(2) Le groupoïde  $H$  engendré par la classe  $H_s$  des  $(h, N)$  tels que  $N = \nu(U^*), h(\pi(N)) \subset U$  et  $uh\nu = \text{Identité de } U^*$ , où  $u$  est l'application canonique de  $U$  sur  $U^*$ . Le pseudogroupe  $H$  sera appelé *pseudogroupe d'holonomie*.

(3) Pour tout  $x \in E$ , le groupoïde  $H_x$  des couples  $(h, N) \in H_s$  tels que  $\pi(N) \cap h(\pi(N))$  contienne le point  $x$ .

Soit  $\hat{\Theta}$  le groupoïde des jets locaux  $j_x^\lambda(h, N)$ , où  $(h, N) \in \Theta$  et  $x \in \pi(N)$ ;  $\hat{\Theta}$  admet  $E_{\hat{\theta}}$  pour classe d'objets. Soit  $\hat{h}$  l'ensemble des jets locaux  $j_x^\lambda(h, N)$ , où  $x$  décrit  $\pi(N)$ ; les ensembles  $\hat{h}$  forment une base d'une topologie sur  $\hat{\Theta}$ , induisant sur  $E_{\hat{\theta}}$  la topologie considérée ci-dessus. Pour cette topologie,  $\hat{\Theta}$  est un groupoïde topologique (voir 7).

1

Soient  $\Theta_s^\wedge$  (respectivement  $H^\wedge, H_x^\wedge$ ) les sous-groupoïdes de  $\hat{\Theta}$  formés des jets  $j_x^\lambda(h, N)$ , où  $(h, N) \in \Theta_s$  (respectivement  $\in H, \in H_x$ ); ces sous-groupoïdes sont ouverts dans  $\hat{\Theta}$ .

Un ouvert  $\Omega$  de  $\hat{\Theta}$ , tel que la correspondance définie par les couples  $(\alpha(X), \beta(X))$ , où  $X \in \Omega$ , soit une application biunivoque, sera appelé *isomorphisme transversal*;  $\Omega$  s'identifie à un homéomorphisme de l'espace transversal  $\alpha(\Omega)$  sur l'espace transversal  $\beta(\Omega)$ . Les éléments  $\Omega$  forment un pseudogroupe  $\Theta'$ ;  $H$  s'identifie à un sous-pseudogroupe faible de  $\Theta'$ ; le sous-pseudogroupe  $\tilde{H}$  de  $\Theta'$  ayant pour base  $H$  a pour éléments les isomorphismes transversaux  $\Omega$  contenus dans  $H^\wedge$ .

Le groupoïde  $\tilde{H}$  quotient de  $H^\wedge$  par le groupoïde réunion des groupoïdes  $H_x^\wedge$  est appelé *groupoïde d'holonomie* de  $(T, T')$  et un élément de  $\tilde{H}$ , *jet d'holonomie*. La classe d'équivalence  $X$  de  $\eta = j_x^\lambda(h, N) \in H^\wedge$  est formée des jets locaux  $s'\eta s$ , où  $s \in H_x^\wedge$ ,  $s' \in H_{x'}^\wedge$  et  $x' = h(x)$ ; les unités à droite et à gauche de  $X$  sont respectivement  $H_x^\wedge$  et  $H_{x'}^\wedge$ ; de plus, on posera :  $\alpha^\wedge(X) = x$  et  $\beta^\wedge(X) = x'$ .

On supposera généralement que par tout point de  $E$  passe au moins un espace transversal. Soit  $F$  une feuille de  $(T, T')$ ; soit  $\Phi_x$  la classe des jets d'holonomie  $X$  tels que  $\alpha^\wedge(X) = x$ , où  $x \in F$ ; alors on a :  $\beta^\wedge(\Phi_x) = F$ .

## 2. Groupoïde transverse d'holonomie

Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique localement simple sur

$E$ ; soit  $\mathfrak{F}$  le groupoïde des couples  $(h, U)$ , où  $U$  est un ouvert simple de  $(T, T')$  et  $h$  un isomorphisme de  $(T, T')_U$  sur  $(T, T')_{U'}$ . Alors  $\mathfrak{F}$  s'identifie à un sous-pseudogroupe de  $\mathfrak{T}$  et  $\mathfrak{F}$  contient les sous-pseudogroupes suivants :

(1) Le groupoïde  $\mathfrak{F}_s$  des couples  $(h, U)$  tels que, pour tout  $x \in U$ ,  $x$  et  $h(x)$  appartiennent à une même feuille de  $(T, T')$ .

(2) Le groupoïde  $\mathfrak{F}_e$  engendré par les couples  $(h, U)$ , où  $U$  et  $h(U)$  sont des ouverts distingués d'un même ouvert simple  $U_1$  et où  $x$  et  $h(x)$  appartiennent à une même plaque de  $U_1$  pour tout  $x \in U$ .

$A(h, U) \in \mathfrak{F}$  correspond une application  $h^\sim$  de  $U^\sim$  sur  $U'^\sim$ , où  $U^\sim$  et  $U'^\sim$  sont les espaces transverses de  $(T, T')_U$  et de  $(T, T')_{U'}$  respectivement et  $U' = h(U)$ .

Soit  $\mathfrak{F}/\rho$  le groupoïde ordonné quotient (voir 3) de  $\mathfrak{F}$  par la relation d'équivalence :  $(h, U) \sim (h_1, U_1)$  si, et seulement si,  $U = U_1$ ,  $h(U) = h_1(U_1)$  et  $h_1^\sim = h^\sim$ . La classe d'équivalence de  $(h, U) \in \mathfrak{F}$  sera identifiée au triplet  $(U', h^\sim, U)$ , où  $U' = h(U)$ , et  $\mathfrak{F}/\rho$  s'identifie à un sous-groupoïde du groupoïde  $\mathfrak{F}'$  suivant :  $\mathfrak{F}'$  est le groupoïde des triplets  $(U', f, U)$ , où  $f$  est un homéomorphisme de l'espace transverse  $U^\sim$  sur l'espace transverse  $U'^\sim$ . On munit  $\mathfrak{F}'$  de la relation d'ordre :  $(U', f, U) < (U'_1, f_1, U_1)$  si, et seulement si,  $U$  est distingué dans  $U_1$ ,  $U'$  est distingué dans  $U'_1$  et  $u'f = f_1u$ , où  $u$  et  $u'$  sont les injections canoniques de  $U^\sim$  et  $U'^\sim$  dans  $U_1^\sim$  et  $U'_1^\sim$  respectivement. Un élément de  $\mathfrak{F}'$  sera appelé *isomorphisme transverse*.

$\mathfrak{F}'$  admet pour sous-groupoïde le groupoïde  $H'$  des triplets  $(U', f, U)$  tels que  $f$  soit l'isomorphisme canonique associé à une chaîne pure (voir § I.1);  $H'$  est engendré par les triplets  $(U', f, U)$  tels que  $U$  soit distingué dans  $U'$  et que  $f$  soit l'injection de  $U^\sim$  dans  $U'^\sim$ , supposée être une surjection.  $H'$ , muni de la structure d'ordre induite par  $\mathfrak{F}'$ , est appelé *groupoïde des isomorphismes d'holonomie*.

*Remarque.* On pourrait aussi munir  $\mathfrak{F}'$  de la relation d'ordre :  $(U', f, U) < (U'_1, f_1, U_1)$  si, et seulement si,  $U \subset U_1$ ,  $U' \subset U'_1$ ,  $u'f = f_1u$ ; pour cette relation,  $\mathfrak{F}'$  est une catégorie locale (dans laquelle un élément induit par une unité peut ne pas être une unité) dont  $\mathfrak{F}/\rho$  est une sous-catégorie locale et  $H'$  une classe prélocale (3).

Soient  $U$  et  $U'$  deux ouverts simples de  $E$ . Soit  $H'(U', U)$  la sous-classe de  $H'$  formée des triplets  $(U_1', f_1, U_1)$ , où  $U_1'$  et  $U_1$  sont des ouverts saturés de  $U'$  et  $U$  respectivement; alors  $H'(U', U)$  est une classe locale appelée *classe transverse d'holonomie relative à  $(U', U)$* . Soient  $U^\sim$  et  $U'^\sim$  les espaces transverses de  $U$  et de  $U'$ ; l'application :  $(U_1', f_1, U_1) \rightarrow (U_1'^\sim, f_1, U_1^\sim)$  identifie  $H(U', U)$  à une classe  $\Phi(U', U)$  d'homéomorphismes d'un sous-espace de  $U^\sim$  sur un sous-espace de  $U'^\sim$ , appelés homéomorphismes d'holonomie de  $U^\sim$  vers  $U'^\sim$ . En particulier, si  $U = U'$ , on peut identifier  $H'(U, U)$  et  $\Phi(U, U)$ ; on obtient ainsi un pseudogroupe que l'on désignera par  $\Phi(U)$  et appellera *pseudogroupe transverse d'holonomie relatif à  $U$* . Le groupoïde des jets locaux des applications de  $\Phi(U)$  sera appelé *groupoïde transverse d'holonomie relatif à  $U$* .

Soient  $x \in E$  et  $x' \in E$ ; designons par  ${}_x\mathfrak{S}'$  la classe des éléments  $(U', f, U) \in \mathfrak{S}'$  où  $x' = f(x)$ ,  $x \in U$  et  $x' \in U'$ ; soit  ${}_x\rho_x$  la relation d'équivalence dans  ${}_x\mathfrak{S}'$  :  $(U', f, U) \sim (U_1', f_1, U_1)$  si, et seulement si, il existe  $(U_2', f_2, U_2) \in {}_x\mathfrak{S}'$  tel que  $(U_2', f_2, U_2) < (U', f, U)$  et  $(U_2', f_2, U_2) < (U_1', f_1, U_1)$ . La classe  $(U', f, U)$  modulo  ${}_x\rho_x$  sera désignée par  ${}_xj_x^\lambda(U', f, U)$  et appelée *jet local transverse*. Par passage au quotient relativement à la relation d'équivalence engendrée par les relations  ${}_x\rho_x$  on obtient le groupoïde  $J^\lambda(\mathfrak{S}')$  des jets locaux transverses. Le sous-groupoïde  $J^\lambda(H')$  de  $J^\lambda(\mathfrak{S}')$  formé des jets  ${}_xj_x^\lambda(U', f, U)$ , où  $(U', f, U) \in H'$ , sera appelé *groupoïde d'holonomie* et noté  $\tilde{H}'$ .

PROPOSITION. *Si par tout point  $x$  de  $E$  il passe au moins un espace transversal,  $H'^\sim$  est identique au groupoïde d'holonomie  $H'^\sim$  (§ 1).*

Si  $X = (U', f, U) \in H'$ , soit  $W(X)$  l'ensemble des éléments  ${}_{x_1}j_{x_1}^\lambda(U', f, U) \in H'^\sim$ , où  $x_1 \in U$  et  $x_1' \in U'$ . Les ensembles  $W(X)$  forment une base d'une topologie sur  $H'^\sim$ .

PROPOSITION. *Muni de la topologie précédente,  $H'^\sim$  est un groupoïde topologique (voir 7).*

Pour tout  $x \in E$ , le sous-groupe  $H_x'^\sim$  de  $H'^\sim$  formé des jets locaux  ${}_xj_x^\lambda(U', f, U)$  sera appelé *groupe d'holonomie en  $x$  de la feuille  $F$  passant par  $x$* . L'unité de  $H_x'^\sim$ , appelée *germe d'espace transverse en  $x$* , s'identifie à l'ensemble des couples  $(U, \rho_U)$ , où  $U$  est un ouvert simple contenant  $x$  et  $\rho_U$  la relation d'équivalence sous-jacente à



$(T, T')_U$  (c'est-à-dire le germe en  $x$  de la partition locale sous-jacente).

### 3. Déroulements d'un espace feuilleté

Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple sur  $E$ .

Soient  $\omega$  un ouvert simple de  $E$  et  $\omega^\sim$  son espace transverse. Soit  $X = (U', f, U) \in H'$ , où  $U'$  est un ouvert saturé dans  $\omega$  pour la relation d'équivalence  $\rho_\omega$  sous-jacente à  $(T, T')_\omega$ . Soit  $x''$  une plaque de  $U'$ ; soit  $\xi = {}_{x''}j_x^\lambda(U', f, U)$  la classe des triplets  $(U_1', f_1, U_1) \in H'$  vérifiant les conditions suivantes :  $U_1'$  est saturé pour  $\rho_\omega$ ; il existe  $(U_2', f_2, U_2) \in H'$  tel que  $U_2'$  est saturé pour  $\rho_\omega$ ,  $(U_2', f_2, U_2) < (U', f, U)$ ,  $(U_2', f_2, U_2) < (U_1', f_1, U_1)$ ,  $x \in U_2$ ,  $x''$  est la plaque de  $U_2'$  contenant  $f_2 u_2(x)$ , où  $u_2$  est l'application canonique de  $U_2$  sur  $U_2^\sim$ . On peut identifier  $\xi$  avec  $j_x^\lambda(ifu)$ , jet local de  $E$  dans  $\omega^\sim$ , où  $u$  et  $i$  sont les applications canoniques de  $U$  sur  $U^\sim$  et de  $U^\sim$  dans  $\omega^\sim$ . Soit  $E^*(\omega)$  la classe des jets  $\xi$  ainsi définis. Soit  $W(X)$  l'ensemble des jets locaux  ${}_{x_1'}j_{x_1}^\lambda(U', f, U)$ , où  $x_1'$  décrit  $U'$  et  $x_1$  décrit  $U$ . Les ensembles  $W(X)$  forment une base d'une topologie  $T^*$  sur  $E^*(\omega)$ . Désignons par  $\Omega$  la réunion des feuilles  $F$  de  $(T, T')$  rencontrant  $\omega$ . Soit  $\alpha^*$  l'application :  $\xi \rightarrow x$  de  $E^*(\omega)$  dans  $\Omega$  et  $\beta^*$  l'application  $\xi \rightarrow x''$  de  $E^*(\omega)$  dans  $\omega^\sim$ .

PROPOSITION. Avec les notations précédentes,  $E^*(\omega)$  est étalé au-dessus de  $\Omega$  par la projection  $\alpha^*$  et le feuilletage  $(T^*, T^*)$  déterminé sur  $E^*(\omega)$  par  $\alpha^*$  est simple. La feuille  $F^* = \beta^{*-1}(x'')$ , où  $x'' \in \omega$ , est un revêtement normal de  $F \ni x'$  pour la projection  $\alpha^*$ ; le groupe des automorphismes de ce revêtement s'identifie au groupe d'holonomie  $\tilde{H}_{x'}$ , en associant à  $s \in \tilde{H}_{x'}$  l'automorphisme  $\xi \rightarrow s\xi$ , où  $\xi \in F^*$ .

On appelle  $E^*(\omega)$  le déroulement faible de  $(T, T')$  au-dessus de  $\omega$ . La topologie de  $E^*(\omega)$  peut ne pas être séparée même si  $T$  est séparée. 1

Soit  $\mathfrak{C}$  la classe des chaînes pures munie de la loi de composition définie par :

$$(W_1, \dots, W_n; W_{1,2}, \dots, W_{n-1,n})(W'_1, \dots, W'_{n'}; W'_{1,2}, \dots, W'_{n'-1,n'}) \\ = (W_1, \dots, W_n, W'_1, \dots, W'_{n'}; W_{1,2}, \dots, W_{n-1,n}, W'_{1,2}, \dots, W'_{n'-1,n'})$$

si, et seulement si,  $W_1' = W_n$ .

$\mathfrak{C}$  est une catégorie libre dont les unités sont les chaînes pures réduites à un seul élément ( $W$ ).

Soit  $r$  la plus petite relation d'équivalence sur  $\mathfrak{C}$  compatible avec la loi de composition et avec les relations élémentaires :

$$(W) \sim (W, W; W); \quad (W_1, W_2; W_{1,2})(W_2, W_1, W_{1,2}) \sim (W_1).$$

La classe d'équivalence  $\Gamma$  modulo  $r$  sera notée  $[\Gamma]$ . La classe  $\mathfrak{C}/r$  est un groupoïde pour la loi de composition déduite de celle de  $\mathfrak{C}$  par passage au quotient.  $\mathfrak{C}/r$  s'identifie au groupoïde libre associé au graphe dont les sommets sont les chaînes pures  $(W)$  et les arêtes les éléments  $(W_1, W_2; W_{1,2})$ .

La catégorie  $\mathfrak{C}$  est munie de la relation d'ordre :  $(W_1, \dots, W_n; W_{1,2}, \dots, W_{n-1,n}) < (W'_1, \dots, W'_n; W'_{1,2}, \dots, W'_{n'-1,n'})$  si, et seulement si,  $n = n'$ ,  $W_i$  est distingué dans  $W'_i$  et la plaque de  $W_{i,i+1}$  déterminée par  $x$  est contenue dans la plaque de  $W'_{i',i'+1}$  déterminée par  $x$ .

Soit  $\mathfrak{C}'$  la classe des chaînes pures pointées;  $\mathfrak{C}'$  est une catégorie pour la loi de composition :  $(x, \Gamma, x')(x'_1, \Gamma', x'') = (x, \Gamma\Gamma', x'')$  si, et seulement si,  $x' = x'_1$  et le composé  $\Gamma\Gamma'$  est défini dans  $\mathfrak{C}$ . Soit  $\mathfrak{C}'/r$  le groupoïde quotient de  $\mathfrak{C}'$  par la relation d'équivalence  $r'$  :  $(x, \Gamma, x') \sim (x_1, \Gamma_1, x'_1)$  si, et seulement si,  $x = x_1$ ,  $x' = x'_1$  et  $\Gamma \sim \Gamma_1$  modulo  $r$ . La classe  $(x, \Gamma, x')$  modulo  $r'$  sera notée  $[x, \Gamma, x']$ .

$\mathfrak{C}'$  est munie de la relation d'ordre :  $(x, \Gamma, x') < (x_1, \Gamma_1, x'_1)$  si, et seulement si,  $x = x_1$ ,  $x' = x'_1$  et  $\Gamma < \Gamma_1$ ; par passage au quotient,  $\mathfrak{C}'/r$  est aussi muni d'une relation de préordre.

Soit  $r'$  la plus petite relation d'équivalence sur  $\mathfrak{C}'/r$  qui soit compatible avec la loi de composition et avec la relation :  $C \sim C'$  si, et seulement si,  $C < C'$  ou si  $C' < C$ . Nous désignerons par  $\mathfrak{C}''$  le groupoïde quotient de  $\mathfrak{C}'/r$  par  $r'$ .

Soit  $\mathfrak{R}$  un recouvrement de  $E$  par des ouverts simples  $U$ . Soit  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}$  la sous-catégorie de  $\mathfrak{C}'$  formée des chaînes pures pointées  $(x, W_1, \dots, W_n; W_{1,2}, \dots, W_{n-1,n}, x')$  telles que  $W_i$  soit un ouvert saturé dans un ouvert  $U \in \mathfrak{R}$ . Soit  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}/r$  le sous-groupoïde de  $\mathfrak{C}'/r$  quotient de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}$  par la relation d'équivalence  $r_{\mathfrak{R}}$  induite par  $r$  sur  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}$ ; cette relation d'équivalence est aussi la plus petite relation d'équivalence compatible avec la loi de composition et avec les relations élémentaires entre éléments de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}$ . Soit  $r_{\mathfrak{R}}'$  la plus petite relation d'équivalence sur  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}/r$  compatible avec la loi de composition et avec la relation :  $C \sim C'$  si, et seulement si, il existe  $C'' \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}/r$  tel que  $C'' < C$  et  $C'' < C'$ . Pour tout  $c \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}'$ ,

la classe ( $c$  modulo  $r_{\mathfrak{R}}$ ) modulo  $r_{\mathfrak{R}'}$  sera notée  $[c]$  modulo  $r_{\mathfrak{R}'}$ . Soit  $\mathfrak{C}\tilde{\sim}$  le groupoïde quotient de  $\mathfrak{C}\mathfrak{R}$  par  $r_{\mathfrak{R}'}$ . L'application :  $[c]$  modulo  $r_{\mathfrak{R}'}$   $\rightarrow$   $[c]$  modulo  $r_{\mathfrak{R}}$  est une application de  $\mathfrak{C}\tilde{\sim}$  sur  $\mathfrak{C}$ , qui n'est généralement pas biunivoque.

Pour tout  $\Gamma = (W_1, \dots, W_n; W_{1,2}, \dots, W_{n-1,n}) \in \mathfrak{C}\mathfrak{R}$ , soit  $U(\Gamma)$  l'ensemble des éléments  $\tilde{C} = [x, \Gamma, x']$  modulo  $r_{\mathfrak{R}'}$   $\in \mathfrak{C}\tilde{\sim}$ , où  $x \in W_1$  et  $x' \in W_n$ . L'ensemble  $U(\Gamma)$  sera muni de la topologie  $T(\Gamma)$  ayant pour base les ensembles  $U(\Gamma, W_1', W_n')$  des éléments  $[x, \Gamma, x']$  modulo  $r_{\mathfrak{R}'}$  où  $x \in W_1'$ ,  $x' \in W_n'$ ,  $W_1'$  et  $W_n'$  étant des ouverts contenus dans  $W_1$  et  $W_n$ . On munit aussi  $U(\Gamma)$  de la topologie  $T'(\Gamma)$  ayant pour base les ensembles  $U(\Gamma, V_1', V_n')$  des classes  $[x, \Gamma, x']$  modulo  $r_{\mathfrak{R}'}$ , où  $x \in V_1'$ ,  $x' \in V_n'$ ,  $V_1'$  et  $V_n'$  étant des plaques de  $W_1'$  et  $W_n'$ . Le couple  $(T(\Gamma), T'(\Gamma))$  définit un feuilletage topologique sur  $U(\Gamma)$ .

**PROPOSITION.** *Avec les notations précédentes,  $\mathfrak{C}\tilde{\sim}$  est un groupoïde topologique pour la topologie  $T_{\mathfrak{R}}$  (respectivement  $T_{\mathfrak{R}'}$ ) ayant pour base les ensembles  $U(\Gamma, W_1', W_n')$  (respectivement  $U(\Gamma, V_1', V_n')$ ) et le couple  $(T_{\mathfrak{R}}, T_{\mathfrak{R}'})$  est un feuilletage topologique.*

Le sous-espace de  $\mathfrak{C}\tilde{\sim}$  formé des unités s'identifie à  $E$  muni de la topologie  $T$  (respectivement  $T'$ ).

Nous désignerons par  $\alpha\tilde{\sim}$  et  $\beta\tilde{\sim}$  les projections :

$$\begin{aligned}\alpha\tilde{\sim} &: [x, \Gamma, x'] \text{ modulo } r_{\mathfrak{R}'} \rightarrow x' \\ \beta\tilde{\sim} &: [x, \Gamma, x'] \text{ modulo } r_{\mathfrak{R}'} \rightarrow x\end{aligned}$$

de  $\mathfrak{C}\tilde{\sim}$  sur  $E$ .

Soit  $\mathfrak{N}$  un espace transversal; désignons par  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N})$  le sous-espace de  $\mathfrak{C}\tilde{\sim}$  formé des éléments  $\tilde{C}$  tels que  $\beta\tilde{\sim}(\tilde{C}) \in \mathfrak{N}$ . Alors la projection  $\alpha\tilde{\sim}$  étale  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N})$  sur le sous-espace de  $E$  réunion des feuilles de  $(T, T')$  qui rencontrent  $\mathfrak{N}$ . On appellera  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N})$  le *déroulement relatif* à  $\mathfrak{N}$  au-dessus de  $\mathfrak{N}$ . Le feuilletage  $(\tilde{T}_{\mathfrak{R}}, \tilde{T}_{\mathfrak{R}'})$  induit sur  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N})$  par  $(T_{\mathfrak{R}}, T_{\mathfrak{R}'})$  s'identifie au feuilletage défini par l'étalement  $\alpha\tilde{\sim}$ .

**PROPOSITION.** *Avec les notations précédentes, le feuilletage  $(\tilde{T}_{\mathfrak{R}}, \tilde{T}_{\mathfrak{R}'})$  de  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N})$  est simple et son espace transverse est identifié à  $\mathfrak{N}$  par l'application  $\beta\tilde{\sim}$ .*

Soit  $F$  une feuille de  $(T, T')$ ,  $\mathfrak{R}(F)$  le recouvrement de  $F$  par

les plaques  $V$  des ouverts  $U \in \mathfrak{R}$ . Soit  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}(F)}$  l'ensemble des chaînes de plaques pointées  $(x, \gamma, x') = (x, V_1, \dots, V_n; V_{1,2}, \dots, V_{n-1,n}, x')$  où  $V \in \mathfrak{R}(F)$  pour tout  $i \leq n$ . On définit comme précédemment (en considérant sur  $F$  le feuilletage trivial  $(T', T')$ ) une loi de composition dans  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}(F)}$  et des relations  $r_{\mathfrak{R}(F)}$  et  $r_{\mathfrak{R}(F)'}'$ . Soit  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}(F)} \sim = (\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}(F)} / r_{\mathfrak{R}(F)}) / r_{\mathfrak{R}(F)'}'$ . Pour tout élément  $(x, \gamma, x')$  de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}(F)}$  il existe des chaînes pures pointées appartenant à  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}(F)}$  dont  $(x, \gamma, x')$  soit la chaîne de plaques associée reliant  $x$  à  $x'$ ; soit  $C(x, \gamma, x')$  une de ces chaînes. Soit  $\varphi$  l'application :

$$[x, \gamma, x'] \text{ modulo } r_{\mathfrak{R}(F)'}' \rightarrow [C(x, \gamma, x')] \text{ modulo } r_{\mathfrak{R}'}'$$

PROPOSITION. Avec les notations précédentes,  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}(F)} \sim$  sur le sous-groupe de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \sim$  formé des éléments  $\tilde{C}$  tels que  $\beta \sim(\tilde{C}) = x$ , où  $x$  décrit  $F$ .

Supposons  $x$  fixé dans  $F$ . Soit  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}(F)}(x)$  le sous-espace topologique de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}(F)} \sim$  formé des éléments  $[x, \gamma, x']$  modulo  $r_{\mathfrak{R}(F)'}'$  et  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \sim(x)$  le sous-groupe de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}(F)} \sim$  formé des éléments  $[x, \gamma, x]$  modulo  $r_{\mathfrak{R}(F)'}'$ ;  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \sim(x)$  s'identifie aussi à un sous-groupe de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \sim$ .

PROPOSITION. Avec les notations précédentes,  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}(F)}(x)$  est un revêtement normal de  $F$  pour l'application :  $[x, \gamma, x']$  modulo  $r_{\mathfrak{R}(F)'}' \rightarrow x'$ ;  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \sim(x)$  est antiisomorphe au groupe des automorphismes de ce revêtement. Si  $\mathfrak{R}(F)$  est formé d'ouverts simplement connexes,  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}(F)}(x)$  s'identifie au revêtement universel de  $F$  et  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \sim(x)$  au groupe fondamental de  $F$ .

1

L'antiisomorphisme est l'application qui associe à  $s \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \sim(x)$  l'automorphisme du revêtement  $y \rightarrow sy$ , où  $y \in \tilde{E}_{\mathfrak{R}(F)}(x)$ .

Soient  $C = (x, \Gamma, x') \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}$  et  $h$  l'isomorphisme canonique de  $W_1 \sim$  sur  $W_n \sim$  associé à  $C$  (voir § I, 1); désignons par  $j^\lambda(C)$  le jet local  ${}_x j_x^\lambda(W_n, h, W_1) \in \tilde{H}'$ . Soit  $\tilde{C} = [C]$  modulo  $r_{\mathfrak{R}} = [C_1]$  modulo  $r_{\mathfrak{R}'}$  où  $C_1 \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{R}}$ ; alors on a  $j^\lambda(C) = j^\lambda(C_1)$ . Soit  $\psi$  l'application :  $\tilde{C} \rightarrow j^\lambda(C)$ .

PROPOSITION. Avec les notations précédentes,  $\psi$  est un foncteur contravariant de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \sim$  sur  $\tilde{H}'$ . En particulier, on a une antireprésentation de  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \sim(x)$  sur le groupe d'holonomie  $\tilde{H}_x'$ , où  $x \in F$ .

Soit  $W \in \mathfrak{R}$ . Soit  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{R}} \sim(W)$  l'ensemble des éléments  $[x, \Gamma, x']$  modulo  $r_{\mathfrak{R}'}$  tels que le premier élément  $W_1$  de  $\Gamma$  soit un ouvert

saturé de  $W$ ; cet ensemble est muni de la relation d'équivalence  $r_{\mathfrak{R}''}$ :  $[x, \Gamma, x']$  modulo  $r_{\mathfrak{R}'} \sim [x_1, \Gamma_1, x_1']$  modulo  $r_{\mathfrak{R}'}$  si, et seulement si,  $x' = x_1'$ ,  $\Gamma = \Gamma_1$  et  $x_1$  appartient à la plaque  $x^\sim$  de  $W$  contenant  $x$ . La classe d'équivalence  $([x, \Gamma, x'] \text{ modulo } r_{\mathfrak{R}'}) \text{ modulo } r_{\mathfrak{R}''}$  sera notée  $[x^\sim, \Gamma, x']_{r'(\mathfrak{R})}$ . Soit  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  l'ensemble des classes d'équivalence modulo  $r_{\mathfrak{R}''}$ .

Soit  $\Gamma$  une chaîne pure  $(W_1, \dots, W_n; W_{1,2}, \dots, W_{n-1,n})$ , où  $W_1$  est saturé dans  $W$ , et soit  $U(\Gamma, W_1', W_n')$  l'ensemble des éléments  $[x^\sim, \Gamma, x']_{r'(\mathfrak{R})}$ , où  $x^\sim$  est une plaque de  $W_1'$ ,  $x' \in W_n$ ,  $W_1'$  est un ouvert saturé dans  $W_1$  et  $W_n'$  un ouvert contenu dans  $W_n$ ; soit  $U(\Gamma, x^\sim, V_n')$  l'ensemble des éléments  $[x^\sim, \Gamma, x']_{r'(\mathfrak{R})}$ , où  $x' \in V_n'$ ,  $V_n'$  étant une plaque de  $W_n'$ . Soit  $T_{\mathfrak{R}}(W)$  (respectivement  $T_{\mathfrak{R}'}(W)$ ) la topologie sur  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  ayant pour base les ensemble  $U(\Gamma, W_1', W_n')$  (respectivement  $U(\Gamma, x^\sim, V_n')$ ). Le couple  $(T_{\mathfrak{R}}(W), T_{\mathfrak{R}'}(W))$  est un feuilletage topologique simple dont l'espace transverse s'identifie à l'espace transverse  $W^\sim$  de  $W$  par l'application :

$$[x^\sim, \Gamma, x']_{r'(\mathfrak{R})} \rightarrow x^\sim.$$

De plus l'application  $\alpha^\sim: [x^\sim, \Gamma, x']_{r'(\mathfrak{R})} \rightarrow x^\sim$  est un étalement de  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  sur la réunion des feuilles de  $(T, T')$  rencontrant  $W$ . On appellera  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  le *déroulement relatif* à  $\mathfrak{R}$  au-dessus de  $W$ .

Si  $N$  est un espace transversal élémentaire contenu dans  $W$  et appliqué canoniquement sur  $W^\sim$ , l'application :

$$[x, \Gamma, x'] \text{ modulo } r'_{\mathfrak{R}} \rightarrow [x^\sim, \Gamma, x']_{r'(\mathfrak{R})}$$

où  $x \in N$ , est un isomorphisme des espaces feuilletés  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(N)$  sur  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$ .

Soit  $\chi$  l'application :

$$[x^\sim, \Gamma, x']_{r'(\mathfrak{R})} \rightarrow x^\sim f_{x'}^{-1}(W_1, f^{-1}, W_n)$$

de  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  sur  $E^*(W)$ , où  $f$  désigne l'isomorphisme d'holonomie associé à la chaîne pure  $\Gamma$ .

PROPOSITION. *Avec les notations précédentes,  $\chi$  est un étalement de  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  sur  $E^*(W)$ .*

Remarquons que la topologie de  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  peut ne pas être séparée même si  $T$  est une topologie séparée.

En particulier, on pourra considérer pour  $\mathfrak{R}$  le recouvrement

formé par tous les ouverts simples;  $\mathfrak{R}(F)$ , où  $F$  est une feuille de  $(T, T')$ , est alors le recouvrement de  $F$  formé par toutes les plaques de  $F$ . L'espace  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  sera noté dans ce cas  $\tilde{E}(W)$ ; l'application :

$$[x^{\sim}, \Gamma, x']_{r(\mathfrak{R})} \rightarrow [x^{\sim}, \Gamma, x']_r$$

est un étalement de  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  sur  $\tilde{E}(W)$ , pour tout recouvrement  $\mathfrak{R}$ .

Nous supposons dans la fin de ce paragraphe que tout point de  $E$  admet un voisinage qui soit un ouvert simple dont toutes les plaques soient simplement connexes.

PROPOSITION. *Si  $\mathfrak{R}$  est un recouvrement de  $E$  formé d'ouverts simples dont toutes les plaques soient simplement connexes, toute feuille  $\tilde{F}$  de  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  s'identifie au revêtement universel de la feuille  $\alpha^{-1}(\tilde{F})$ .*

PROPOSITION. *Soit  $\mathfrak{R}$  un recouvrement de  $E$  formé d'ouverts simples dont toutes les plaques soient simplement connexes; pour tout recouvrement  $\mathfrak{R}'$  de  $E$  formé d'ouverts simples, l'espace  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}'}(W)$  muni de la topologie  $T_{\mathfrak{R}'}(W)$  est étalé au-dessus de l'espace  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}}(W)$  muni de la topologie  $T_{\mathfrak{R}}(W)$ .*

L'étalement est l'application :

$$[x^{\sim}, \Gamma, x']_{r(\mathfrak{R}_1')} \rightarrow [x^{\sim}, \Gamma, x']_{r(\mathfrak{R}_1)}$$

où  $\mathfrak{R}_1'$  et  $\mathfrak{R}_1$  sont des recouvrements équivalents à  $\mathfrak{R}'$  et  $\mathfrak{R}$ .

COROLLAIRE. *Si  $\mathfrak{R}'$  et  $\mathfrak{R}''$  sont deux recouvrements de  $E$  formés d'ouverts simples dont toutes les plaques sont simplement connexes, les espaces feuilletés  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}'}(W)$  et  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}''}(W)$  sont isomorphes.*

Nous désignerons par  $\tilde{E}'(W)$  le déroulement relatif à  $\mathfrak{R}'$  (ou à  $\mathfrak{R}''$ ) au-dessus de  $W$ .

#### 4. Questions de stabilité

THÉORÈME. *Soit  $(T, T')$  un feuilletage simple vérifiant les conditions suivantes :*

- (1)  *$T'$  est une topologie séparée;*
- (2) *Tout point  $x \in E$  admet un voisinage  $U$  compact relativement à  $T$ ;*
- (3) *L'espace transverse  $E^{\sim}$  est localement séparé.*

*Si  $F$  est une feuille compacte de  $(T, T')$ , il existe un système fonda-*

mental de voisinages de  $F$  saturés pour la relation d'équivalence  $\rho$  sous-jacente à  $(T, T')$  et dont toutes les feuilles sont compactes.

*Démonstration.* Tout voisinage de  $F$  contient un voisinage  $\Omega$  de  $F$  tel que  $p(\Omega)$  soit séparé, où  $p$  désigne la projection canonique de  $E$  sur  $E^\sim$ . Il existe un recouvrement fini de  $F$  par des ouverts distingués  $U_i \subset \Omega$ , où  $i \leq n$ , tels qu'il existe, pour tout  $i \leq n$ , un compact  $U'_i \subset \Omega$  qui soit l'adhérence de  $U_i$  dans  $U'_i$  (mais pas nécessairement dans  $E$ ). Soit  $B_i$  le complémentaire dans  $U'_i$  de

$$\left( \bigcup_{i \leq n} U_i \right) \cap U'_i;$$

alors  $B_i$  est compact et  $p(B_i)$  est un fermé ne contenant pas  $x^\sim = p(F)$ . Soit  $W^\sim$  un voisinage de  $x^\sim$  tel que  $p(B_i) \cap W^\sim = \emptyset$  pour tout  $i \leq n$ . Soit

$$U = p^{-1}(W^\sim) \cap \left( \bigcup_{i \leq n} U_i \right).$$

Pour tout  $x' \in W^\sim$ , on a :

$$X' = \bar{p}^{-1}(x') \cap U = \bar{p}^{-1}(x') \cap \left( \bigcup_{i \leq n} U'_i \right) = \bigcup_{i \leq n} (\bar{p}^{-1}(x') \cap U'_i);$$

donc  $X'$ , étant ouvert dans  $p^{-1}(x^\sim)$  et compact, est une feuille compacte contenue dans  $U$  et  $U$  est une réunion de feuilles compactes.

**THÉORÈME.** Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple vérifiant les conditions (1) et (2) du théorème précédent. Soit  $F$  une feuille de  $(T, T')$  compacte et fermée, dont le groupe d'holonomie est fini et telle qu'il existe  $x \in F$  admettant un voisinage ouvert simple  $U$  dont l'espace transverse  $U^\sim$  soit séparé. Alors  $F$  est propre et il existe un système fondamental de voisinages de  $F$  saturés pour la relation d'équivalence sous-jacente à  $(T, T')$  et dont toutes les feuilles sont compactes.

1

En effet, soit  $E^*(U)$  le déroulement de  $E$  au-dessus de  $U$  et  $F^*$  la feuille de  $(T^*, T'^*)$  qui se projette sur  $F$ . Alors  $F^*$  est compacte puisque le groupe d'holonomie de  $F$  est fini. Le théorème résulte du théorème précédent appliqué au feuilletage  $(T^*, T'^*)$ .

Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple sur  $E$  tel que  $T$  soit une topologie localement compacte et que tout point admette

un voisinage simple dont l'espace transverse soit séparé. Alors  $T'$  est aussi localement compacte. Soit  $F$  une feuille compacte, donc propre, de  $(T, T')$ .

On peut construire deux familles  $(U_i)_{i \leq n}$  et  $(U_{ij})_{(i,j) \in M}$  d'ouverts simples vérifiant les conditions suivantes :

(1) Pour tout  $(i, j) \in M$ , on a  $i \leq n$ ,  $j \leq n$  et  $M$  contient en particulier tout couple  $(i, j)$  tel que  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ .

(2)  $U_i$  est un ouvert distingué dans  $U_{ij}$ , pour tout  $i \leq n$  et  $(i, j) \in M$ ; de plus  $(j, i) \in M$  et  $U_{ij} = U_{ji}$ .

(3) L'espace transverse  $U_{ij}^\sim$  est séparé, pour tout  $(i, j) \in M$ .

(4)  $U_i \cap F = V_i$  est connexe non vide et les  $V_i$ , où  $i \leq n$ , forment un recouvrement de  $F$ .  $U_{ij} \cap F$  est connexe.

Pour tout ouvert  $U'$  saturé dans  $U_1$ , on identifiera l'espace transverse  $U'$  à un sous-espace de l'espace transverse  $U_1^\sim$ .

Soit  $\Delta$  le graphe (non orienté) ayant pour sommets les ouverts  $U_i$ , où  $i \leq n$ , et pour arêtes les ouverts  $U_{ij}$ , où  $(i, j) \in M$ , les extrémités de  $U_{ij}$  étant  $U_i$  et  $U_j$ . Soit  $A$  un arbre connexe de  $\Delta$  contenant tous les sommets et toutes les arêtes  $U_{ij}$ .

Soient  $W$  et  $W'$  deux ouverts distingués dans un ouvert simple  $W''$ . Soit  $W_1''$  la réunion des plaques de  $W''$  rencontrant à la fois  $W$  et  $W'$ ; si  $W_1$  et  $W_1'$  sont les traces de  $W_1''$  sur  $W$  et  $W'$ , la suite  $(W_1, W_1'', W_1'; W_1, W_1')$  est une chaîne pure. En utilisant un raisonnement par récurrence on montre la proposition suivante :

PROPOSITION. *A toute suite  $\mathfrak{U} = (U_{i_1}, \dots, U_{i_m})$  telle que  $(i_j, i_{j+1}) \in M$  pour tout  $j < m$ , on associe une chaîne pure maximale*

$$C(\mathfrak{U}) = (U'_1, U'_{1,2}, U'_2, U'_{2,3}, \dots, U'_{m-1}, U'_{m-1,m}, U'_m; U'_1, U'_2, U'_2, \dots, U'_m)$$

telle que  $U'_j$  soit saturé dans  $U_{i_j}$  et  $U'_{j,j+1}$  saturé dans  $U_{i_j, i_{j+1}}$  (la relation d'ordre sur l'ensemble des chaînes pures étant celle considérée au § 3.II).

Nous désignerons par  $h(\mathfrak{U})$  l'isomorphisme d'holonomie de  $U_1^\sim$  sur  $U_m^\sim$  correspondant à  $C(\mathfrak{U})$ .

Pour tout  $i \leq n$ , soit  $\mathfrak{U}(i)$  la suite  $(U_{i_1}, \dots, U_{i_m})$  telle que  $i_1 = 1$ ,  $i_m = i$ ,  $i_j \neq i_k$  si  $j \neq k$  et  $U_{i_j, i_{j+1}} \in A$  pour tout  $j < m$  (c'est-à-dire le chemin sur  $A$  reliant  $U_1$  à  $U_i$  et de longueur minimale). Pour tout  $(i, k) \in M$ , soit  $\mathfrak{U}(i, k)$  la suite  $(\mathfrak{U}(i), \mathfrak{U}(k)^{-1})$



obtenue en écrivant d'abord la suite  $\mathfrak{U}(i)$  puis la suite obtenue en inversant l'ordre de la suite  $\mathfrak{U}(k)$ .

Soit  $x \in F \cap U_1$  et supposons que le groupe d'holonomie  $\tilde{H}_x'$  soit fini. Pour tout  $X \in \tilde{H}_x'$  choisissons une suite  $\mathfrak{U}(X) = (U_1, \dots, U_{i_m}, U_1)$  où  $(1, i_2) \in M$ ,  $(i_j, i_{j+1}) \in M$  pour tout  $j$  compris entre 2 et  $m$ ,  $(i_m, 1) \in M$ , telle que l'isomorphisme d'holonomie correspondant à une chaîne pure contenue dans  $\mathfrak{U}(X)$  ait  $X$  pour jet local en  $x^\sim$ , où  $x^\sim$  est l'image canonique de  $x$  dans l'espace transverse  $U_1^\sim$ ;  $\mathfrak{U}(X)$  est supposée obtenue par juxtaposition d'un nombre fini de suites  $\mathfrak{U}(i, k)$ . Nous pouvons supposer que  $\mathfrak{U}(X^{-1})$  est la suite obtenue en inversant l'ordre des termes de  $\mathfrak{U}(X)$ ; de plus, s'il existe une suite  $\mathfrak{U}(i, k)$  telle que  $X$  soit le jet local en  $x^\sim$  de l'isomorphisme d'holonomie associé à une chaîne pure contenue dans  $\mathfrak{U}(i, k)$ , alors on choisira pour  $\mathfrak{U}(X)$  une telle suite  $\mathfrak{U}(i, k)$ .

Nous désignerons par  $\mathfrak{U}(i, k; j)$  (respectivement  $\mathfrak{U}(X; j)$ ) la suite obtenue par juxtaposition de  $\mathfrak{U}(i, k)$  (respectivement  $\mathfrak{U}(X)$ ) et de  $\mathfrak{U}(j)$ . Soient  $C(i, k; j)$  et  $C(X; j)$  les chaînes pures correspondant à  $\mathfrak{U}(i, k; j)$  et à  $\mathfrak{U}(X; j)$ ; leur premier élément sera désigné par  $U(i, k; j)$  et  $U(X; j)$  respectivement. Nous poserons :  $C(X; 1) = C(X)$  et  $C(i, k; 1) = C(i, k)$ . Soit  $W$  l'intersection des ensembles  $U(X; j)$  et  $U(i, k; j)$ . Soient  $C'(X; j)$  et  $C'(i, k; j)$  les chaînes pures contenues dans  $C(X; j)$  et  $C(i, k; j)$  et admettant  $W$  pour premier élément; soient  $U'(X; j)$  et  $U'(i, k; j)$  leurs derniers éléments.

Soit  $E^*(W)$  le déroulement faible de  $E$  au-dessus de  $W$ ; la feuille  $F^*$  telle que  $F = \alpha^*(F^*)$  est compacte. Soient  $U^{*'}(X; j)$  et  $U^{*'}(i, k; j)$  les ouverts élémentaires de  $E^*(W)$  définis par les chaînes pures  $C'(X; j)$  et  $C'(i, k; j)$ . Les ouverts  $U^{*'}(X; j)$  et  $U^{*'}(i, k; j)$  forment un recouvrement  $\mathfrak{F}$  de  $F^*$ ; d'après le théorème précédent, il existe un ouvert  $\Omega^*$  de  $E^*(W)$  qui est une réunion de feuilles compactes et qui est contenu dans la réunion des ensembles de  $\mathfrak{F}$ . Posons  $\omega = \beta^*(\Omega^*)$ . Soient  $\Gamma(i, k)$  et  $\Gamma(X)$  les chaînes pures contenues dans  $C(i, k)$  et  $C(X)$  et admettant  $\omega$  pour premier élément; leurs derniers éléments, qui sont des ouverts saturés de  $U_1$ , seront désignés par  $\omega(i, k)$  et  $\omega(X)$ ; les isomorphismes d'holonomie correspondants seront notés  $h(i, k)$  et  $h(X)$ .

Soit  $\omega'$  l'ouvert saturé de  $U_1$  réunion des ouverts  $\omega(i, k)$  et  $\omega(X)$ . Puisque toute la feuille passant par un point de  $\Omega^*$  est contenue dans  $\Omega^*$ , le pseudogroupe complété du pseudogroupe transverse

d'holonomie  $\Phi(\omega')$  relatif à  $\omega'$  est le plus petit sous-pseudogroupe saturé par induction du pseudogroupe de tous les automorphismes locaux de l'espace transverse  $\omega'$  de  $\omega'$  qui contienne les isomorphismes d'holonomie  $h(i, k)$  et  $h(X)$ . Le groupe d'holonomie  $\tilde{H}_x'$  est le groupe des jets locaux en  $x$  des éléments de  $\Phi(\omega')$ .

**THÉORÈME.** *Soit  $B$  un espace topologique,  $O$  un point de  $B$  et  $(f_i)_{i \leq n}$  une famille finie d'automorphismes locaux de  $B$  laissant  $O$  fixe. Supposons que le groupe  $\mathfrak{G}$  engendré par les jets locaux  $j_0^\lambda f_i$ , où  $i \leq n$ , soit fini. Alors pour tout voisinage  $V$  de  $O$  il existe un ouvert  $W$  contenu dans  $V$  tel que les restrictions des applications  $f_i$  à  $W$  soient des automorphismes de  $W$  sur  $W$  qui engendrent un groupe  $G$  isomorphe à  $\mathfrak{G}$ , l'isomorphisme étant :  $s \rightarrow j_0^\lambda s$ , où  $s \in G$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathfrak{A}(B)$  le pseudogroupe des automorphismes locaux de  $B$ ; soit  $\mathfrak{F}$  l'ensemble des automorphismes locaux  $f_i$  et  $(f_i)^{-1}$ , où  $i \leq n$ . Pour tout  $\gamma \in \mathfrak{G}$ , soit  $g(\gamma) \in \mathfrak{A}(B)$  un pseudo-produit d'éléments de  $\mathfrak{F}$  tel que  $j_0^\lambda g(\gamma) = \gamma$  et que  $g(\gamma^{-1}) = (g(\gamma))^{-1}$  (et par suite  $g(e)$ , où  $e$  est l'unité de  $\mathfrak{G}$ , est une unité). Soit  $H$  l'ensemble réunion de  $\mathfrak{F}$  et de l'ensemble formé des  $g(\gamma)$ . Soit  $V$  un voisinage ouvert de  $O$  dans  $B$ ; posons  $V' = (\cap \alpha(H)) \cap V$ , où  $\alpha(H)$  est l'ensemble des sources  $\alpha(h)$  des éléments  $h \in H$ . Soit  $H'$  l'ensemble des pseudoproduits  $hV'$ , où  $h \in H$ . Pour tout triplet  $(i, j, k)$  tel que  $j_0^\lambda(h_j h_i) = j_0^\lambda h_k$ , où  $h_i \in H'$ ,  $h_j \in H'$  et  $h_k \in H'$ , il existe un ouvert  $V(i, j, k)$  tel que :  $h_j h_i V(i, j, k) = h_k V(i, j, k)$ ,  $h_j h_i$  désignant le pseudoproduit. Les triplets  $(i, j, k)$  ainsi définis étant en nombre fini, posons  $V'' = \cap V(i, j, k)$ ; soit  $H''$  la classe des pseudoproduits  $h'' = hV''$ , où  $h \in H$ ; on a :  $h_j'' h_i'' < h_k''$ ; posons  $W = \cap \beta(H'')$ . Pour tout  $h_j'' \in H''$  et tout  $h_k'' \in H''$  il existe  $h_i'' \in H''$  tel que  $h_j'' h_i'' < h_k''$ ; par suite  $h_j''(W) \subset h_j''(h_i''(V'')) \subset h_k''(V'')$  et  $h_j''(W) \subset W$  pour tout  $h_j'' \in H''$ . Montrons que  $h_j''(W) = W$ . En effet, il existe  $h_{j'}'' \in H''$  tel que  $h_{j'}'' h_j''$  soit une unité; puisque  $h_{j'}''(h_j''(W))$  est défini, on a  $h_{j'}'' h_j''(W) = W$ ; s'il existait un point  $x \in W$  qui n'appartienne pas à  $h_j''(W)$ , il existerait un point  $x' \in h_j''(W)$  tel que :  $h_{j'}''(x') = h_{j'}''(x)$ ; puisque  $h_{j'}''$  est biunivoque, il en résulterait  $x' = x \in h_j''(W)$ , ce qui est impossible. Donc  $h''(W) = W$  pour tout  $h'' \in H''$ . Ceci prouve que  $H''$  est un groupe de transformations de  $W$ .

COROLLAIRE. Soit  $\mathfrak{G}$  un groupe fini de jets locaux d'automorphismes de l'espace topologique  $B$  laissant  $O$  fixe; pour tout voisinage  $V$  de  $O$  dans  $B$ , il existe un groupe  $G$  de transformations d'un ouvert  $W$  contenu dans  $V$  laissant  $O$  fixe et tel que l'application :  $s \rightarrow j_0^1 s$ , où  $s \in G$ , soit un isomorphisme de  $G$  sur  $\mathfrak{G}$ .

On dira alors que  $G$  est une réalisation de  $\mathfrak{G}$  par un groupe de transformations.

Reprenons l'étude du feuilletage topologique  $(T, T')$  et du pseudogroupe transverse d'holonomie  $\Phi(\omega')$  considéré plus haut. D'après le théorème précédent, il existe un voisinage ouvert  $w^\sim$  de  $x^\sim$  dont l'adhérence est contenue dans  $W^\sim$  et tel que les restrictions à  $w^\sim$  des applications  $h(X)$  et  $h(i, k)$  engendrent un groupe de transformations  $G$  de  $w^\sim$  réalisant le groupe d'holonomie  $\tilde{H}_x'$ . Soit  $w$  l'ouvert saturé de  $W$  dont  $w^\sim$  est l'espace transverse. Les chaînes pures  $c(X)$  et  $c(i, k)$  contenues dans  $C(X)$  et  $C(i, k)$  respectivement et ayant  $w$  pour premier élément sont fermées, c'est-à-dire admettent  $w$  pour dernier élément. Pour toute chaîne  $C(i)$ , soit  $c(i)$  la chaîne pure contenue dans  $C(i)$  et admettant  $w$  pour premier élément; soit  $w_i$  son dernier élément, qui est un ouvert saturé dans  $U_i$ . A une suite de plaques  $\mathfrak{B} = (V_{i_1}, \dots, V_{i_m})$  de  $F$ , où  $(i_j, i_{j+1}) \in M$  pour tout  $j < m$ , est associée une chaîne pure notée  $c(\mathfrak{B})$  ayant  $w_{i_1}$  comme premier élément et  $w_{i_m}$  comme dernier élément. Pour une chaîne de plaques pointée  $(x_1, \gamma, x_1')$  quelconque de  $F$ , il existe une chaîne pure pointée  $(x_1, c(\mathfrak{B}), x_1')$  telle que  $\gamma$  et  $c(\mathfrak{B})$  contiennent une même chaîne de plaques.

PROPOSITION. Avec les notations précédentes, le groupoïde transverse d'holonomie relatif à  $w$  est le groupoïde  $J^\wedge(G)$  des jets locaux des éléments de  $G$ ; en particulier, pour tout  $x' \in w$ ,  $\tilde{H}_{x'}'$  est le groupe des jets locaux en  $x'$  du sous-groupe  $G_{x'}$  de  $G$  formé des éléments laissant  $x'$  fixe.

Par suite  $\tilde{H}_{x'}'$  est isomorphe à un groupe quotient de  $\tilde{H}_x'$  et il se réduit à son unité si  $\tilde{H}_x'$  est réduit à son unité.

Supposons que  $W^\sim$  soit localement connexe; en remplaçant, si nécessaire,  $w^\sim$  par sa composante connexe contenant  $x^\sim$ , on peut supposer  $w$  connexe. Soit  $t(w)$  la réunion des feuilles de  $(T, T')$  qui

rencontrent  $w$ ; alors  $t(w)$  est un voisinage ouvert de  $F$  possédant les propriétés suivantes :

(1) Il existe un sous-groupe  $\Gamma$  du groupoïde des isomorphismes d'holonomie dont les unités  $w_i$  ont  $t(w)$  pour réunion, où  $i \in I$  et  $w_1 = w$ . Pour toute suite  $(w_{i_1}, \dots, w_{i_m})$ , où  $w_{i_{j+1}} \cap w_{i_j} \neq \emptyset$  pour tout  $j < m$ , il existe une chaîne pure :

$$(w_{i_1}, z_1, w_{i_2}, z_2, \dots, z_{m-1}, w_{i_m}; w_{i_1}, w_{i_2}, \dots, w_{i_m})$$

telle que l'isomorphisme d'holonomie associé appartienne à  $\Gamma$ .

(2) Il existe un ouvert simple  $A_i$  contenant l'adhérence de  $w_i$  et tel que  $w_i$  soit distingué dans  $A_i$ . L'espace transverse  $w_i^\sim$  est considéré comme un sous-espace de l'espace transverse  $A_i^\sim$  supposé séparé.  $w^\sim$  est connexe et  $F \cap w$  est une plaque.

1 (3) Pour tout  $i \in I$ , on a :  $(t(w) \cap A_i) = w_i$ .

(4) Pour tout  $i \in I$ , il existe un isomorphisme d'holonomie de  $A_i^\sim$  sur  $A_i^\sim$  qui applique  $w^\sim$  sur  $w_i^\sim$ .

(5) Le sous-groupe de  $\Gamma$  ayant  $w$  pour unité s'identifie à un groupe  $G$  de transformations de  $w^\sim$  qui est une réalisation du groupe d'holonomie de  $F$ .

(6) Toute feuille contenue dans  $t(w)$  est compacte;  $G$  et  $I$  sont finis.

(6') La frontière de  $t(w)$  est identique à l'enveloppe de  $t(w)$ , c'est-à-dire à la réunion des feuilles de  $(T, T')$  qui contiennent une plaque  $x^\sim$  de  $A_1$  appartenant à la frontière de  $w^\sim$  dans  $A_1^\sim$ .

Remarquons que l'enveloppe de  $t(w)$  est aussi la réunion des feuilles qui contiennent une plaque frontière de  $w_i$ , c'est-à-dire une plaque appartenant à la frontière de  $w_i^\sim$  dans  $A_i^\sim$ .

Un voisinage d'une feuille  $F$  d'un feuilletage localement simple  $(T, T')$  vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4), (6') (respectivement (1), (2), (3), (4), (5), (6)) sera appelé un *tube* (respectivement un *tube parfait*) d'âme  $F$ , à groupoïde structural  $\Gamma$ . Tout tube parfait  $t(w)$  est un tube d'âme  $F'$ , pour toute feuille  $F'$  appartenant à  $t(w)$ . Si  $t(w)$  est un tube parfait tel que le groupe  $G$  soit réduit à son unité, on appellera  $t(w)$  un *tube parfait simple*; dans ce cas,  $t(w)$  est aussi un tube parfait d'âme  $F'$  pour toute feuille  $F'$  appartenant à  $t(w)$  et le feuilletage induit par  $(T, T')$  sur  $t(w)$  est un feuilletage simple.

**THÉORÈME.** Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple tel que  $T$  soit une topologie localement compacte. Soit  $F$  une feuille compacte

de  $(T, T')$  à groupe d'holonomie fini et telle qu'un point de  $F$  admette un voisinage simple localement connexe dont l'espace transverse soit séparé. Alors tout voisinage de  $F$  contient un tube parfait d'âme  $F$ .

Soit  $t(w)$  le tube parfait d'âme  $F$  construit ci-dessus. Nous supposons de plus, ce qui peut toujours être réalisé, que le recouvrement  $(U_i)_{i \leq n}$  initial vérifie de plus la condition : si  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ , il existe un ouvert simple  $U_{ijk}$  tel que  $U_{ij}$ ,  $U_{jk}$  et  $U_{ki}$  soient des ouverts distingués dans  $U_{ijk}$ .

Soit  $w^\wedge(i, s)$  l'ensemble des couples  $(sh_i, z)$ , où  $i \leq n$ ,  $z \in w_i$ ,  $s \in G$  et  $h_i$  est l'isomorphisme d'holonomie de  $w_i^\sim$  sur  $w^\sim$  associé à la chaîne pure  $(c(i))^{-1}$ . On munira  $w^\wedge(i, s)$  de la topologie  $T^\wedge(i, s)$  ayant pour base les ensembles  $w^\wedge(i, s, U)$  formés des éléments  $(sh_i, z)$  tels que  $z \in U$  et  $U$  est un ouvert contenu dans  $w_i$ . On munira aussi  $w^\wedge(i, s)$  de la topologie  $T^{\wedge'}(i, s)$  ayant pour base les ensembles  $w^{\wedge'}(i, s, V)$  formés des éléments  $(sh_i, z)$  tels que  $z \in V$  et  $V$  est une plaque contenue dans une plaque de  $w_i$ . Le couple  $(T^\wedge(i, s), T^{\wedge'}(i, s))$  est un feuilletage topologique sur  $w^\wedge(i, s)$ .

Soit  $\rho$  la relation sur l'espace somme des espaces  $w^\wedge(i, s)$  définie par :  $(sh_i, z) \sim (sh_j, z')$  si, et seulement si,  $z = z'$  et  $s' = ss_{ij}$ , où  $s_{ij} = h_i h_j^{-1}$  et  $(h_i)^{-1}$  désigne l'isomorphisme d'holonomie de  $w_i^\sim$  sur  $w_j^\sim$  associé à la chaîne pure  $(w_i, w_{ij}, w_j; w_i, w_j)$  correspondant à la suite  $(U_i, U_j)$ . Si  $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ , l'existence de  $U_{ijk}$  entraîne que l'on a :

$$h_j h_{ik} = h_{jk}.$$

Il en résulte que  $\rho$  est une relation d'équivalence. Nous désignerons par  $[sh_i, z]$  la classe d'équivalence de  $(sh_i, z)$  modulo  $\rho$  et par  $E^\wedge(w)$  l'ensemble de ces classes modulo  $\rho$ .

Soit  $T^\wedge$  (respectivement  $T^{\wedge'}$ ) la topologie sur  $E^\wedge(w)$  quotient de la topologie somme topologique des topologies  $T^\wedge(i, s)$  (respectivement  $T^{\wedge'}(i, s)$ ).

**THÉORÈME.** Avec les notations précédentes,  $E^\wedge(w)$  muni de la topologie  $T^\wedge$  (respectivement  $T^{\wedge'}$ ) est un revêtement normal de  $t(w)$  muni de la topologie  $T$  (respectivement  $T'$ ) pour l'application  $\alpha^\wedge : [sh_i, z] \rightarrow z$ ; le groupe des automorphismes de ce revêtement est isomorphe à  $G$ . Le couple  $(T^\wedge, T^{\wedge'})$  est un feuilletage topologique simple dont l'espace transverse s'identifie à  $w^\sim$  par l'application  $\beta^\wedge : [sh_i, z] \rightarrow sh_i(z)^\sim$ .

En effet, soit  $[w^\wedge(i, s)]$  l'ensemble des classes  $[sh_i, z]$ ; les ensembles  $[w^\wedge(i, s)]$ , où  $s \in G$ , forment une partition de l'image réciproque de  $w_i$  par  $\alpha^\wedge$ . La restriction de  $\alpha^\wedge$  à  $[w^\wedge(i, s)]$  est un isomorphisme de feuilletages. A  $s \in G$  correspond l'automorphisme :  $[s'h_i, z] \rightarrow [ss'h_i, z]$ .

$E^\wedge(w)$ , muni du feuilletage  $(T^\wedge, T^{\wedge'})$ , sera appelé *déroulement parfait de  $t(w)$* ; l'image réciproque par  $\beta^\wedge$  de  $x^\vee$  est un revêtement normal  $F^\wedge$  de  $F$ , que nous appellerons *âme* de  $E^\wedge(w)$ .

*Remarque.* Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique localement simple; soit  $t(w)$  un tube d'âme  $F$ . Supposons de plus que si  $w_i \cap w_j \cap w_k \neq \emptyset$  (respectivement  $w_i \cap w_j \neq \emptyset$ ), il existe un ouvert simple  $A_{ijk}$  (respectivement  $A_{ij}$ ) qui contienne  $w_i$  et  $A_{ij}$  comme distingués et détermine des éléments de  $\Gamma$ . Une construction analogue à la précédente permet d'obtenir un espace feuilleté  $E^\wedge(w)$  qui est un revêtement normal de  $t(w)$  dont le groupe des automorphismes s'identifie au sous-groupe  $G$  de  $\Gamma$  laissant  $x^\vee$  fixe, groupe que nous appellerons *groupe structural* de  $t(w)$ . On appellera  $E^\wedge(w)$  le *déroulement normal* de  $t(w)$ .

Soit  $E^\wedge(w)$  le déroulement parfait du tube parfait  $t(w)$  d'âme  $F$  et  $F'$  une feuille appartenant à  $t(w)$ . Soit  $w'$  un ouvert saturé de  $w$  et  $w^\vee$  son espace transverse qui est identifié à un sous-espace de  $A_1^\vee$ . Supposons que l'adhérence de  $w^\vee$  soit contenue dans  $w^\vee$ . Soit  $x^{\vee'}$  une plaque de  $w'$ . On peut choisir  $w'$  de façon que  $w^{\vee'}$  soit invariant par le sous-groupe  $G'$  de  $G$  qui laisse  $x^{\vee'}$  fixe et que les images  $s(w^{\vee'})$ , où  $s \in G$ , ne rencontrent pas  $w^{\vee'}$  pour tout  $s \notin G'$ . Alors la réunion  $t(w')$  des feuilles rencontrant  $w'$  est un tube d'âme  $F'$  et de groupe structural  $G'$ . L'image réciproque par  $\alpha^\wedge$  de  $t(w')$  dans  $E^\wedge(w)$  est formée de  $k$  composantes connexes, où  $k$  est le nombre de classes de  $G$  modulo  $G'$ . Une de ces composantes est l'image réciproque de  $w^{\vee'}$  par  $\beta^\wedge$  et forme un déroulement normal de  $t(w')$ . Nous désignerons par  $F^{\wedge'}$  l'image réciproque de  $x^{\vee'}$  par  $\beta^\wedge$ ;  $F^{\wedge'}$  est un revêtement normal de  $F'$ .

Soit  $E^\wedge(w)/G'$  l'espace quotient de  $E^\wedge(w)$  par la relation d'équivalence :  $[sh_i, z] \sim [\sigma sh_i, z]$  pour tout  $\sigma \in G'$ . La classe d'équivalence  $G'[sh_i, z]$  est une classe d'intransitivité de  $E^\wedge(w)$  relativement à  $G'$ . Soient  $T_{\sigma^\wedge}$  et  $T_{\sigma^{\wedge'}}$  les topologies quotients de  $T^\wedge$  et  $T^{\wedge'}$  sur  $E^\wedge(w)/G'$ ; le couple  $(T_{\sigma^\wedge}, T_{\sigma^{\wedge'}})$  est un feuilletage topologique. Soit  $\alpha_{\sigma^\wedge}$  la projection :  $G'[sh_i, z] \rightarrow z$ ; pour cette application,  $E^\wedge(w)/G'$

est un revêtement de  $t(w)$ . L'image de  $F^{\wedge'}$  par l'application canonique de  $E^{\wedge}(w)$  sur  $E^{\wedge}(w)/G'$  est une feuille  $F^{\wedge'}/G'$  isomorphe à  $F'$ . L'image canonique de l'âme  $F^{\wedge}$  de  $E^{\wedge}(w)$  est un revêtement  $F^{\wedge}/G'$  de  $F$  dans lequel l'image réciproque d'un point est formée de  $k$  points.

Dans  $[w^{\wedge}(i, s)]$ , soit  $V^{\wedge}(i, s)$  la plaque appartenant à  $F^{\wedge}$  et  $V^{\wedge'}(i, s)$  la plaque appartenant à  $F^{\wedge'}$ . Par passage au quotient, toutes les plaques  $V^{\wedge}(i, \sigma s)$  (respectivement  $V^{\wedge'}(i, \sigma s)$ ), où  $\sigma \in G'$ , sont identifiées en une plaque  $V^{\wedge}(i, G's)$  (respectivement  $V^{\wedge'}(i, G's)$ ) de  $E^{\wedge}(w)/G'$  contenue dans  $F^{\wedge}/G'$  (respectivement dans  $F^{\wedge'}/G'$ ). La correspondance :

$$V^{\wedge}(i, G's) \rightarrow V^{\wedge'}(i, G's), \quad \text{où } s \in G,$$

est une correspondance biunivoque. Nous désignerons par  $G'[w^{\wedge}(i, s)]$  l'image canonique de  $[w^{\wedge}(i, s)]$  dans  $E^{\wedge}(w)/G'$ .

**THÉORÈME.** *Avec les hypothèses du théorème page 144 et si tout point de  $F$  admet pour voisinage un ouvert simple dont toutes les plaques sont simplement connexes, alors il existe un tube parfait  $t(w)$  d'âme  $F$  tel que le groupe fondamental de toute feuille  $F'$  contenue dans  $t(w)$  soit isomorphe au groupe fondamental d'un revêtement de  $F$ .*

*Démonstration.* En utilisant la structure uniforme de  $F$ , on peut construire les recouvrements  $(U_i)_{i \in I}$  et  $(U_{ij})_{(i,j) \in M}$  et, à partir d'eux, un tube parfait  $t(w)$  d'âme  $F$  de façon que la condition suivante soit réalisée :

Soit  $w_{ij}$  l'ouvert obtenu par saturation de  $w_i$  dans  $U_{ij}$  (cet ouvert est aussi obtenu par saturation de  $w_j$  dans  $U_{ij}$ ). Alors il existe un recouvrement  $\mathfrak{R}$  de  $F$  par des ouverts simples dont toutes les plaques sont simplement connexes et tel que, pour tout  $(i, j) \in M$ , la réunion des ouverts  $w_{kl}$ , où  $(k, l) \in M$  et  $w_{ij} \cap w_{kl} \neq \emptyset$ , soit contenue dans un élément de  $\mathfrak{R}$ .

Les composantes connexes des images réciproques par  $\alpha_{G'}^{\wedge}$  dans  $E^{\wedge}(w)/G'$  des éléments de  $\mathfrak{R}$  forment un recouvrement  $\mathfrak{R}'$  de  $E^{\wedge}(w)/G'$ ; puisque  $w_{ij}$  est contenu dans un élément de  $\mathfrak{R}$ , son image réciproque par  $\alpha_{G'}^{\wedge}$  se décompose en composantes connexes isomorphes à  $w_{ij}$ ; soit  $G'[w^{\wedge}(i, s; j)]$  celle de ces composantes qui contient  $G'[w^{\wedge}(i, s)]$ . Soient  $V^{\wedge}(i, G's; j)$  et  $V^{\wedge'}(i, G's; j)$  les plaques de  $G'[w^{\wedge}(i, s; j)]$  contenues dans  $F^{\wedge}/G'$  et  $F^{\wedge'}/G'$  respectivement. La correspondance :

$$V^\wedge(i, G's; j) \rightarrow V^{\wedge'}(i, G's; j)$$

est biunivoque (puisque  $w_i$  est distingué dans  $w_{ij}$ ). Pour simplifier les notations, nous poserons :  $G'[w^\wedge(i, s; j)] = \langle i, s; j \rangle$  et  $G'[w^\wedge(i, s)] = \langle i, s \rangle$ .

Nous utiliserons la construction générale suivante : soient  $(a_j)_{j \in J}$  une famille  $\mathfrak{A}$  d'éléments et  $A'$  un sous-ensemble de  $J \times J$  contenant la diagonale. Soit  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$  la catégorie dont les éléments sont les suites  $(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_m})$ , où  $(j_\lambda, j_{\lambda+1}) \in A'$  pour tout  $\lambda < m$ , et dont la loi de composition est définie par :

$$(a_{j_1}, \dots, a_{j_m})(a_{j'_1}, \dots, a_{j'_m'}) = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m}, a_{j'_2}, \dots, a_{j'_m'})$$

si, et seulement si,  $a_{j_m} = a_{j'_1}$ . Soit  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})/r$  le groupoïde quotient de  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$  par la plus petite relation d'équivalence  $r$  compatible avec la loi de composition et avec les relations élémentaires :

$$(a_j) \sim (a_j, a_j); (a_j, a_k)(a_k, a_j) \sim a_j, \quad \text{où } (j, k) \in A'.$$

Soit  $\rho_\lambda$  une relation élémentaire sur  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$  :

$$(a_\lambda, a_{\lambda_2}, \dots, a_{\lambda_m}, a_\lambda) \sim a_\lambda;$$

à une famille  $\Lambda$  de telles relations  $\rho_\lambda$  est associé le groupoïde  $(\mathfrak{A}, A')/\Lambda$  quotient de  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$  par la plus petite relation d'équivalence  $\rho$  compatible avec la loi de composition et avec la relation  $r$  et les relations  $\rho_\lambda \in \Lambda$ ; ce groupoïde est un groupoïde quotient du groupoïde libre  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})/r$  (cette construction est un cas particulier de la construction d'un groupoïde par la donnée de générateurs et de relations, les générateurs étant ici les couples  $(a_j, a_k)$ , où  $(j, k) \in A'$ ).

Soit  $\mathfrak{R}(E^\wedge(w)/G')$  le groupoïde  $(\mathfrak{A}_w, \mathfrak{B})/\Lambda_w$  suivant :  $\mathfrak{A}_w$  est la famille des ouverts  $\langle i, s \rangle$ , où  $(i, s) \in I \times G$ ;  $\mathfrak{B}$  est l'ensemble des couples  $((i, s), (j, s'))$  tels que  $(i, j) \in M$  ou  $i = j$ , et que  $\langle j, s' \rangle$  soit contenu dans  $\langle i, s; j \rangle$ ;  $\Lambda_w$  est la famille des relations :

$$(\langle i_1, s_1 \rangle, \dots, \langle i_m, s_m \rangle) \sim \langle i_1, s_1 \rangle \quad \text{si } \langle i_1, s_1 \rangle = \langle i_m, s_m \rangle$$

et s'il existe un élément de  $\mathfrak{R}'$  qui contienne  $\langle i_k, s_k \rangle$ , où  $k \leq m$ . Soit  $\mathfrak{R}(F^\wedge/G')$  le groupoïde  $(\mathfrak{A}_V, \mathfrak{B})/\Lambda_V$  où  $\mathfrak{A}_V$  est la famille des plaques  $V^\wedge(i, G's)$ , où  $(i, s) \in I \times G$ , et  $\Lambda_V$  la famille des relations :  $(V^\wedge(i_1, G's_1), \dots, V^\wedge(i_m, G's_m)) \sim V^\wedge(i_1, G's_1)$  si, pour une relation



appartenant à  $\Lambda_w$ , on a  $(\langle i_1, s_1 \rangle, \dots, \langle i_m, s_m \rangle) \sim \langle i_1, s_1 \rangle$ . Soit de même  $\mathfrak{R}(F^{\wedge}/G')$  le groupoïde obtenu en remplaçant dans  $\mathfrak{R}(F^{\wedge}/G')$  les plaques  $V^{\wedge}(i, G's)$  par les plaques  $V^{\wedge'}(i, G's)$ .

Les groupoïdes  $\mathfrak{R}(E^{\wedge}(w)/G')$ ,  $\mathfrak{R}(F^{\wedge}/G')$ , et  $\mathfrak{R}(F^{\wedge'}/G')$  sont isomorphes. En vertu du lemme qui va suivre, il en résulte que les groupes fondamentaux de  $F^{\wedge}/G'$ , de  $F^{\wedge'}/G'$  et de  $F'$  sont isomorphes.

Soit  $B$  un espace topologique dont chaque point admette un voisinage ouvert simplement connexe. Supposons donnés les éléments suivants :

(1) Un recouvrement  $\mathfrak{A}$  de  $B$  par des ouverts connexes  $a_j$ , où  $j \in J$ .

(2) Une famille d'ouverts connexes  $a_{jk}$ , où  $(j, k)$  décrit un sous-ensemble  $A'$  de  $J \times J$ , telle que  $a_j \cup a_k \subset a_{jk}$ ; de plus, si  $a_j \cap a_k \neq \emptyset$ , on a  $(j, k) \in A'$ ; enfin,  $a_{jj} = a_j$ .

(3) Un ensemble  $S$  d'ouverts simplement connexes tel que, pour tout  $(j, k) \in A'$ , il existe un ouvert appartenant à  $S$  qui contienne la réunion des ouverts  $a_{j'k'}$  pour lesquels  $a_{jk} \cap a_{j'k'} \neq \emptyset$ .

Soit  $\rho_\nu$  la relation sur  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$  (voir plus haut) :  $(a_{\nu_1}, \dots, a_{\nu_m}) \sim a_{\nu_1}$  si  $\nu_1 = \nu_m$  et s'il existe un ouvert appartenant à  $S$  contenant la réunion des ouverts  $a_{\nu_\mu \nu_{\mu+1}}$ , où  $\mu < m$ . Soit  $\Lambda$  une famille de telles relations  $\rho_\nu$ , contenant en particulier toutes les relations  $\rho_\lambda$  dans lesquelles on a :  $a_{\lambda_\mu} \cap a_{\lambda_{\mu+1}} \neq \emptyset$  et  $a_{\lambda_\mu} \cap a_{\lambda_{m-1}\lambda_1} \neq \emptyset$  pour tout  $\mu < m - 1$ .

Soit  $\mathfrak{R}(B)$  le groupoïde  $(\mathfrak{A}, A')/\Lambda$ , quotient de  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$  par la relation d'équivalence  $\rho$  engendrée par la relation  $r$  et les relations  $\rho_\nu \in \Lambda$ . Les unités de  $\mathfrak{R}(B)$  s'identifient aux éléments  $a_j$ , où  $j \in J$ .

LEMME. *Avec les hypothèses précédentes, le groupe fondamental de  $B$  est isomorphe au sous-groupe de  $\mathfrak{R}(B)$  d'unité  $a_1$ .*

*Démonstration.* Soit  $x$  un point donné de  $B$ . Soit  $\gamma = (a_{j_1}, \dots, a_{j_m})$  un élément de  $\mathfrak{C}(\mathfrak{A})$ , où  $x \in a_{j_1}$ ; désignons par  $\hat{\gamma}$  l'ensemble des suites pointées  $(x, \gamma, x')$ , où  $x'$  décrit  $a_{j_m}$ ; cet ensemble est muni de la topologie ayant pour base d'ouverts les ensembles  $\hat{\gamma}(A)$  formés des suites  $(x, \gamma, x')$  telles que  $x' \in A$  et  $A$  est un ouvert contenu dans  $a_{j_m}$ . Soit  $\hat{B}$  l'espace quotient de l'espace somme topologique des espaces  $\hat{\gamma}$  par la relation d'équivalence  $r''$  :  $(x, \gamma, x') \sim (x, a_{j'_1}, \dots, a_{j'_m}, x'')$  si, et seulement si,  $x' = x''$  et

$(a_{j_1}, \dots, a_{j_m}, a_{j'_m}, \dots, a_{j'_1}) \sim a_{j_1}$  modulo  $\rho$ . L'espace  $B^\wedge$  est connexe; tout élément de  $B^\wedge$  peut se représenter sous la forme  $(a_1, \dots, a_{j_m}, x')$ , où  $a_1$  est un ouvert choisi contenant  $x$ . Soit  $\tilde{B}$  un revêtement universel de  $B$  pointé en  $\tilde{x}$  au-dessus de  $x$ ; soit  $b$  la projection canonique de  $\tilde{B}$  sur  $B$ . La suite  $(x, \gamma, x')$  se relève en une suite  $(\tilde{x}, \tilde{a}_{j_1}, \dots, \tilde{a}_{j_m}, \tilde{x}')$  telle que  $\tilde{a}_{j_\mu}$  et  $\tilde{a}_{j_{\mu+1}}$  soient les composantes connexes de  $b^{-1}(a_{j_\mu})$  et  $b^{-1}(a_{j_{\mu+1}})$  qui appartiennent à une même composante connexe de  $b^{-1}(a_{j_\mu j_{\mu+1}})$ . L'application  $\delta : (x, \gamma, x') \rightarrow \tilde{x}'$  est compatible avec la relation  $r''$ ; il en résulte une application  $\hat{\delta}$  de  $B^\wedge$  sur  $\tilde{B}$ , qui définit  $B^\wedge$  comme revêtement de  $\tilde{B}$ . Puisque  $B^\wedge$  est connexe, on a  $B^\wedge = \tilde{B}$ . Par suite, le groupe fondamental de  $B$  s'identifie au sous-groupe de  $\mathfrak{K}(B)$  formé des classes  $(a_1, a_{j_1}, \dots, a_{j_m}, a_1)$  modulo  $r''$ , c'est-à-dire au sous-groupe de  $\mathfrak{K}(B)$  d'unité  $a_1$ .

Un raisonnement analogue au précédent permet plus généralement de démontrer la proposition:

**PROPOSITION.** *Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple tel que  $T$  soit une topologie séparée. Soit  $F$  une feuille compacte telle que tout  $x \in F$  admette un voisinage ouvert simple dont l'espace transverse est séparé et dont toutes les plaques sont simplement connexes. Si tout voisinage de  $F$  contient un tube  $t(w)$  d'âme  $F$ , il existe un tube  $t(w')$  d'âme  $F$  tel que le groupe fondamental de toute feuille  $F'$  contenue dans  $t(w')$  soit isomorphe au groupe fondamental d'un revêtement de  $F$ .*

*Remarque.* En utilisant la structure uniforme de  $F$ , on pourrait construire les recouvrements  $(U_i)_{i \in I}$  et  $(U_{ij})_{(i,j) \in M}$  de  $F$  de sorte que les conditions plus strictes indiquées dans Reeb **(13)** soient vérifiées. Dans ce cas, la considération des groupoïdes  $\mathfrak{K}(F^\wedge/G')$  et  $\mathfrak{K}(F'/G')$  serait remplacée par celle des nerfs des recouvrements  $(V(i, G's))$  et  $(V'(i, G's))$ , où  $(i, s) \in I \times G$ ; ces nerfs sont isomorphes. L'isomorphisme des groupes fondamentaux de  $F'$  et de  $F^\wedge/G'$  résulte alors du lemme suivant, qui se démontre d'une manière analogue à celle utilisée dans le lemme précédent.

**LEMME.** *Soit  $B$  un espace topologique; soit  $\mathfrak{A}$  un recouvrement de  $B$  par des ouverts connexes  $a_j$ , où  $j \in J$ , vérifiant la condition: si  $a_j \cap a_k \neq \emptyset$ , il existe un ouvert simplement connexe contenant la réunion de  $a_j$  et  $a_k$ . Alors le groupe fondamental de  $B$  est isomorphe au groupe fondamental du nerf du recouvrement  $\mathfrak{A}$ .*

**THÉORÈME.** Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple et  $t(w)$  un tube parfait d'âme  $F$ , tel que l'espace transverse  $w$  soit une variété topologique. Alors le groupe structural  $G$  de  $t(w)$  est l'ensemble des éléments de  $\Phi(w)$  de source  $w$ , où  $\Phi(w)$  est le pseudogroupe transverse d'holonomie relatif à  $w$ . De plus, les déroulements  $E^*(w)$  et  $E^{\wedge}(w)$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Soit  $s$  l'isomorphisme d'holonomie associé à une chaîne pure fermée admettant  $w$  pour premier et dernier élément. Soit  $x' \in w$ ; la feuille  $F'$  contenant  $x'$  rencontre  $w$  en  $p(x')$  plaques. Puisque  $p(x')$  est majoré par le nombre d'éléments de  $G$ , la transformation  $s$  est périodique. Soit  $s' \in G$  tel que  $j_{x'} \lambda s = j_{x'} \lambda s'$ ; il existe un voisinage de  $x'$  dans  $w$  dont tous les points sont fixes par l'isomorphisme d'holonomie  $s^{-1}s'$ . Par conséquent  $s^{-1}s'$  est une transformation périodique dont l'ensemble des points fixes admet un point intérieur. En utilisant un théorème de Newman-Smith (voir 17 et 18), on en déduit que  $s^{-1}s'$  est l'identité de  $w$ , donc que  $s = s' \in G$ .

**COROLLAIRE.** Tout élément de  $\Phi(w)$  dont la source est connexe est une restriction d'une transformation de  $G$ .

En effet, deux éléments distincts de  $G$  n'ayant pas de restriction commune, un agrégat de restrictions d'éléments de  $G$  dont la source est connexe est une restriction d'un élément de  $G$ .

**PROPOSITION.** Avec les hypothèses du théorème précédent, l'ensemble  $u$  des points  $x'$  de  $w$  tels que le groupe d'holonomie  $\tilde{H}_{x'}$  soit réduit à son unité est un ouvert partout dense de  $w$ . Si  $F'$  est une feuille contenant une plaque  $x' \in u$ , alors  $t(w)$  est un tube parfait d'âme  $F'$ .

*Démonstration.* Puisque deux éléments de  $G$  qui ont le même jet local en un point sont identiques, pour tout  $x' \in w$  le groupe  $\tilde{H}_{x'}$  est isomorphe au sous-groupe  $G'$  de  $G$  laissant fixe la plaque  $x'$  qui contient  $x'$ ; soit  $q(x')$  le nombre d'éléments de  $G'$ . Soit  $w''$  un voisinage de  $x'$  ne rencontrant pas  $s(w')$ , pour tout  $s \in G$ ,  $s \notin G'$ ; pour tout  $x'' \in w''$ , on a  $q(x'') \leq q(x')$ . Si  $q(x'') = q(x')$  pour tout  $x'' \in w''$ , toute transformation de  $G'$  laisse fixes tous les points de  $w''$ , donc est l'identité de  $w''$ ; par suite  $q(x') = 1$ . Il en résulte que, si  $q(x') > 1$ , il existe au moins un point  $x'' \in w''$  tel que

$q(x'') < q(x')$ . L'ensemble  $u$  des points  $x''$  tels que  $q(x') = 1$  est un ouvert de  $w^\sim$ ; si le complémentaire de  $u$  contenait un ouvert  $u'$ , il existerait  $x_1 \in u'$  tel que  $q(x_1)$  soit le minimum de  $q$  sur  $u'$ ; d'après ce qui précède,  $q(x_1) = 1$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc  $u$  est un ouvert partout dense dans  $w^\sim$ .

*Remarque.* Le théorème et la proposition précédents sont encore vrais dans les cas plus généraux auxquels le théorème de Smith (18) s'applique.

Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple et  $F$  une feuille propre de  $(T, T')$ .

On dira que  $(T, T')$  est *parfaitement stable autour de  $F$*  s'il existe un tube parfait d'âme  $F$ ; dans ce cas, il existe aussi un système fondamental de voisinages de  $F$  formé de tubes parfaits d'âme  $F$ . En particulier, si les conditions du théorème page 144 sont vérifiées, le feuilletage  $(T, T')$  est parfaitement stable autour de toute feuille contenue dans un tube parfait.

On dira que  $(T, T')$  est *stable autour de  $F$*  s'il existe un ouvert simple  $U$  rencontrant  $F$  en une seule plaque  $x^\sim$  et vérifiant la condition suivante : il existe des tubes  $t(w)$  d'âme  $F$  tels que  $w$  soit un ouvert distingué dans  $U$  et que les images canoniques de  $w^\sim$  dans l'espace transverse  $U^\sim$  forment un système fondamental de voisinages de  $x^\sim$  dans  $U^\sim$ .

**THÉORÈME.** *Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple tel que  $T$  soit localement compact. Soit  $U$  un ouvert simple localement connexe et connexe dont l'espace transverse  $U^\sim$  est séparé. Soit  $F$  une feuille compacte de  $(T, T')$  rencontrant  $U$  en une seule plaque  $x^\sim$ . Pour que  $(T, T')$  soit stable autour de  $F$ , il faut et il suffit qu'il existe un système fondamental de voisinages de  $x^\sim$  dans  $U^\sim$  qui soit invariant par le pseudogroupe transverse d'holonomie  $\Phi(U')$  relatif à un ouvert  $U'$  saturé dans  $U$ .*

*Démonstration.* La condition étant évidemment nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. On peut construire, comme à la page 140, deux familles  $(U_i)_{i \leq n}$  et  $(U_{ij})_{(i,j) \in M}$  ainsi que les suites  $u(i, k)$  et  $u(i, k; j)$ . Soit  $U'$  un ouvert simple distingué dans  $U$  et dont l'adhérence est contenue dans  $U$ ; soit  $W$  l'ouvert obtenu par saturation de  $U'$  dans  $U$ . On peut construire un ouvert simple  $W'$  tel qu'à toute suite  $u(i, k; j)$  soit associée une chaîne pure  $C(i, k; j)$  admettant  $W'$  pour premier élément; soit  $U(i, k; j)$  le dernier élément

de  $C(i, k; j)$ . Il existe un ouvert simple connexe  $\omega$  vérifiant les conditions suivantes :  $\omega$  est saturé dans  $W'$ ; l'adhérence du sous-espace  $\omega^\sim$  de l'espace transverse  $U^\sim$  correspondant à  $\omega$  est contenue dans  $W''$ ;  $\omega^\sim$  est invariant par  $\Phi(U)$ . Soit  $\omega(i, k; j)$  le dernier élément de la chaîne pure contenue dans  $C(i, k; j)$  et admettant  $\omega$  pour premier élément; l'espace transverse  $\omega^\sim(i, k; j)$  s'identifie à un sous-espace de l'espace transverse  $U_j^\sim$ . Un point frontière de  $\omega^\sim$  est appliqué par l'isomorphisme d'holonomie correspondant à  $C(i, k; j)$  sur un point frontière de  $\omega^\sim(i, k; j)$ . Il en résulte :  $\omega(i, k; 1) = \omega$  et  $\omega(i, k; j) = \omega_j$  pour tout  $(i, k) \in M, j \leq n$ . Soit  $\Omega$  la réunion des  $\omega_j$ , où  $j \leq n$ . Il existe un ouvert saturé  $\omega'_j$  dans  $\omega_j$  dont l'adhérence est contenue dans  $\Omega$ . Soit  $\omega'(j)$  le premier élément de la chaîne pure contenue dans  $C(1, 1; j)$  et admettant  $\omega'_j$  comme dernier élément. Soit  $w$  un ouvert saturé dans  $U$ , contenu dans l'intersection des  $\omega'(j)$  et tel que l'espace transverse  $w^\sim$  soit invariant par  $\Phi(U)$ . Soit  $w_j$  le dernier élément de la chaîne pure contenue dans  $C(1, 1; j)$  et admettant  $w$  pour premier élément. Soit  $t(w)$  la réunion des ouverts  $w_j$ , où  $j \leq n$ . Soit  $F'$  une feuille de  $(T, T')$  contenant une plaque de  $w$ ; soit  $y$  un point adhérent, relativement à  $T'$ , à  $\Omega \cap F'$ ; alors  $y$  est adhérent au moins à une plaque de  $F'$  contenue dans un ouvert  $w_j$ , c'est-à-dire appartient à  $t(w)$ . Par suite  $F' \cap t(w)$  étant ouvert et fermé dans  $F'$  est identique à  $F'$ . On en déduit que  $t(w)$  est un tube d'âme  $F$ , de groupe structural le sous-groupe de  $\Phi(U)$  engendré par les isomorphismes d'holonomie associés aux chaînes contenues dans  $C(i, k; 1)$  et admettant  $w$  pour premier élément.

*THÉORÈME.* Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique localement simple tel que  $T$  soit une topologie séparée et qu'il existe un tube  $t(w)$  d'âme  $F$ . Si l'espace transverse  $w^\sim$  est une variété topologique et si toute feuille contenue dans  $t(w)$  est compacte, alors  $(T, T')$  est parfaitement stable autour de  $F$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  le groupe de transformations de  $w^\sim$  dont les éléments sont les isomorphismes d'holonomie associés aux chaînes pures fermées appartenant au groupoïde structural  $\Gamma$  de  $t(w)$  et ayant  $w$  pour premier et dernier élément. Puisque toute feuille  $F'$  contenue dans  $t(w)$  est compacte, elle rencontre  $w$  en un nombre fini de plaques et le nombre d'éléments  $p(x')$  de l'orbite

de  $x'' \in w$  relativement à  $G$  est fini. Par suite, pour tout  $s \in G$ , il existe un nombre  $k \leq p(x')$  tel que  $s^k(x'') = x''$ , c'est-à-dire  $s$  est ponctuellement périodique. D'un théorème de Montgomery (voir **19**, p. 224), il résulte que  $s$  est périodique; donc, en vertu du théorème de Newman-Smith (**17**; **18**),  $G$  est isomorphe au groupe d'holonomie  $\tilde{H}_x'$  de  $F$  par l'isomorphisme :  $s \rightarrow j_x \lambda s$ . Supposons que  $G$  ne soit pas fini; alors, pour tout  $x'' \in w$ , il existe  $s' \in G$  différent de l'identité de  $w$  et tel que  $s'(x'') = x''$ . Pour tout point  $x_i''$  de l'orbite de  $x''$ , choisissons un élément  $s_i \in G$  tel que  $s_i(x'') = x_i''$ . Soient  $u$  et  $u'$  deux voisinages de  $x''$  dans  $w$  tels que l'on ait :  $s_i(u) \cap s_j(u) = \emptyset$  si  $i \neq j$  et  $s'(u') \subset u$ . Pour tout  $x''' \in u'$ , on a  $s_i(x''') \neq s_j(x''')$  si  $i \neq j$ , d'où  $p(x''') \geq p(x')$ . Si tout  $x''' \in u'$  était fixe pour  $s'$ , la transformation périodique  $s'$  serait l'identité. Donc il existe  $x''' \in u'$  tel que  $s'(x''') \neq x'''$ ; comme  $s'(x''') \in u$ , on en déduit  $p(x''') \geq 2p(x')$ . Par récurrence, on montre que pour tout entier  $m$ , il existe  $x_m''' \in u'$  tel que  $p(x_m''') > m$ . La fonction  $p$  étant une fonction semi-continue inférieurement sur l'espace de Baire  $w$ , il existe un ouvert sur lequel  $p$  est majorée, ce qui est contraire à l'existence de  $x_m'''$ , pour tout  $m$ . Ceci prouve que le groupe  $G$  est fini. Par conséquent  $t(w)$  est un tube parfait d'âme  $F$ .

Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique localement simple; soit  $F$  une feuille de  $(T, T')$  et  $f$  un sous-espace de  $F$ . On appellera *chaîne pure pointée le long de  $f$*  une chaîne pure pointée  $(x, C, x')$ , où  $x \in f$  et  $x' \in f$ , telle que la chaîne de plaques  $(x, c, x')$  correspondante sur  $F$  contienne une chaîne de connexes  $v_i$  du sous-espace  $f$ , c'est-à-dire une suite  $(x, v_1, \dots, v_m; v_{1,2}, \dots, v_{m-1,m}, x')$  dans laquelle  $v_{i,i+1}$  est une composante connexe de  $v_i \cap v_{i+1}$  pour tout  $i < m$ . En considérant les isomorphismes d'holonomie le long de  $f$ , c'est-à-dire associés à une chaîne pure le long de  $f$ , on définit comme précédemment les notions de *groupoïde des isomorphismes d'holonomie* et de *groupe d'holonomie le long de  $f$* .

On dira que  $(T, T')$  est *stable le long de  $f$*  si, pour toute chaîne pure  $(x, C, x)$  le long de  $f$  reliant  $x$  à  $x$ , il existe une chaîne pure fermée  $(x, C', x)$  le long de  $f$  contenue dans  $(x, C, x)$ .

Supposons  $T$  localement compacte et  $T'$  séparée. Si tout point de  $f$  admet un voisinage ouvert simple dont l'espace transverse est localement connexe, connexe et séparé, si  $f$  est compacte et si le groupe d'holonomie le long de  $f$  est fini, on peut construire, à

partir d'un recouvrement de  $f$  par des ouverts  $U_i$  simples, un recouvrement de  $f$  par des ouverts  $w_i$  saturés dans  $U_i$ , tel que la réunion  $t(w, f)$  des ouverts  $w_i$  vérifie les conditions (1), (2), (3), (4), (5) d'un tube, dans lesquelles on remplace isomorphisme et groupe d'holonomie par isomorphisme et groupe d'holonomie le long de  $f$ .

Supposons qu'il existe un recouvrement  $\mathfrak{R}$  de  $F$  par des ouverts simples dont toutes les plaques soient simplement connexes. Soit alors  $\mathbb{C}\mathfrak{R}^\sim(x)$  le groupe fondamental\* de  $F$ , identifié au groupe des classes de chaînes pures pointées  $[x, C, x]$  modulo  $r\mathfrak{R}'$  (voir § 3). Soit  $\mathbb{C}\mathfrak{R}^\sim(x; f)$  le sous-groupe de  $\mathbb{C}\mathfrak{R}^\sim(x)$  formé des classes admettant un représentant  $(x, C, x)$  qui soit une chaîne pure pointée le long de  $f$ . Tout élément du groupe d'holonomie le long de  $f$  pouvant être représenté comme le jet local en  $x$  d'un isomorphisme d'holonomie le long de  $f$  associé à une chaîne pure formée à partir du recouvrement  $\mathfrak{R}$ , l'application :  $[x, C, x]$  modulo  $r\mathfrak{R}' \rightarrow j_{x^\wedge} g$ , où  $g$  est l'isomorphisme d'holonomie associé à  $C$ , est un homomorphisme de  $\mathbb{C}\mathfrak{R}^\sim(x; f)$  sur le groupe d'holonomie le long de  $f$ . Par conséquent, si  $\mathbb{C}\mathfrak{R}^\sim(x; f)$  est fini, tout feuilletage  $(T, T')$  contenant  $F$  pour feuille est stable le long de  $f$ .

Remarquons que si  $f = F$ , la stabilité le long de  $F$  n'entraîne pas nécessairement la stabilité autour de  $F$ .

*Rubans.* Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple sur  $E$ . Soit  $U$  un ouvert simple; désignons par  $u$  l'application canonique de  $U$  sur son espace transverse  $U^\wedge$ . On appellera *ruban élémentaire* un sous-espace  $M$  de  $U$  qui est l'image réciproque  $\bar{u}^{-1}(M^\wedge)$  d'un sous-espace  $M^\wedge$  de  $U^\wedge$ . Les rubans élémentaires forment une sous-espèce de structures locales de l'espèce de structures locales de tous les sous-espaces de  $E$ . Le germe  $j_x^\wedge M$  du sous-espace  $M$  en  $x$  sera appelé *germe de ruban* en  $x$ .

L'ensemble  $R$  des germes de ruban est un ouvert de l'espace  $E^\wedge$  de tous les germes de sous-espaces de  $E$ ; sa topologie  $T_r$  a pour base les ensembles  $M^\wedge$ , où  $M^\wedge$  est l'ensemble des germes du ruban élémentaire  $M$ . Soit  $T_r'$  la topologie sur  $R$  ayant pour base les

\*Le groupe fondamental  $\mathbb{C}\mathfrak{R}^\sim(x)$ , indépendant du recouvrement  $\mathfrak{R}$ , s'identifie, si  $F$  est localement connexe par arcs, au groupe d'homotopie  $\pi_1(F)$ . Si de plus  $f$  est localement connexe par arcs,  $\mathbb{C}\mathfrak{R}^\sim(x; f)$  s'identifie à l'image canonique de  $\pi_1(f)$  dans  $\pi_1(F)$ .

ensembles formés des germes  $j_{x'}M$ , où  $x'$  appartient à une plaque de  $U$  contenue dans le ruban élémentaire  $M$ . Le couple  $(T_r, T_r')$  est un feuilletage topologique localement simple sur  $R$ ; une base d'ouverts simples est formée des ouverts  $M^\wedge$ , où  $M$  est un ruban élémentaire.

On appellera *ruban* un ensemble ouvert  $\mathfrak{M}$  de  $R$  relativement à  $T_r$ , qui est une réunion de feuilles de  $(T_r, T_r')$ . Pour tout ruban élémentaire  $M$ , il existe un ruban contenant  $M^\wedge$ . Tout espace quasi-transversal détermine en chaque point un germe de ruban et il existe un ruban contenant l'ensemble de ces germes. Soit  $\mathfrak{M}$  un ruban;  $\mathfrak{M}$  est muni du feuilletage induit par  $(T_r, T_r')$ . La feuille  $F_r^\wedge$  de  $\mathfrak{M}$  appliquée sur la feuille  $F$  par l'application  $p^\wedge : j_{x'}M \rightarrow x$  est un revêtement de  $F$ . Si  $F_r^\wedge$  est un revêtement à  $k$  feuillets, on dira que  $\mathfrak{M}$  est un ruban *multiple d'ordre  $k$  le long de  $F$* ; si  $k = 1$ , on dira que  $\mathfrak{M}$  est *simple le long de  $F$* . Soit  $M^\wedge$  un ouvert simple contenu dans  $\mathfrak{M}$ , correspondant au ruban élémentaire  $M$  contenu dans  $U$ . Le pseudogroupe transverse d'holonomie relatif à  $M^\wedge$  s'identifie au sous-pseudogroupe  $\Phi(M)$  de  $\Phi(U)$  laissant invariant le sous-espace  $M^\sim$  de  $U^\sim$ . Les rubans simples le long de  $F$  correspondent aux germes de sous-espaces de  $U^\sim$  invariants par le groupe des jets en  $x^\sim$  des éléments de  $\Phi(U)$  laissant  $x^\sim$  fixe (groupe qui s'identifie au groupe d'holonomie  $\tilde{H}_x$ ).

On dira que  $(T, T')$  est (*parfaitement*) *stable pour  $F$  relativement au ruban  $\mathfrak{M}$*  si  $\mathfrak{M}$  contient une feuille  $F_r^\wedge$  appliquée sur  $F$  par  $p^\wedge$  et si le feuilletage de  $\mathfrak{M}$  est (*parfaitement*) stable autour de  $F_r^\wedge$ .

*Remarque sur les cas d'instabilité.* Si  $(T, T')$  est un feuilletage topologique localement simple sur  $E$  et si  $F$  est une feuille compacte, à groupe fondamental infini,  $(T, T')$  est généralement instable autour de  $F$ . Si l'espace transverse  $E^\sim$  n'est pas localement séparé, il existe des feuilles autour desquelles  $(T, T')$  est instable. Si une feuille  $F$  de  $(T, T')$  est dans l'adhérence d'une feuille  $F'$ , le feuilletage est instable autour de  $F$ ; il en est de même si l'adhérence du filtre des voisinages saturés (c'est-à-dire réunion de feuilles) de  $F$  ne se réduit pas à  $F$ , et par suite contient une feuille  $F'$  différente de  $F$ .

D'une manière plus précise, on peut avoir des couples de feuilles  $(F, F')$  de  $(T, T')$ , que nous appellerons *couples liés*, vérifiant les conditions suivantes :



Il existe deux voisinages simples  $U$  et  $U'$  de  $x \in F$  et de  $x' \in F'$  et un filtre  $\mathfrak{X}$  de  $\Phi(U', U)$  tels que :

(1)  $\alpha(\mathfrak{X})$  est base d'un filtre convergent vers la plaque  $x^\sim$  et, pour tout  $\xi \in \mathfrak{X}$ , on a  $x^\sim \notin \alpha(\xi)$ .

(2) La plaque  $x'^\sim$  est adhérente au filtre engendré par  $\beta(\mathfrak{X})$ .

Remarquons que la propriété est indépendante du choix de  $x$  et  $x'$ . Elle entraîne l'instabilité de  $(T, T')$  autour de  $F$  et de  $F'$ . Si l'espace transverse  $U^\sim$  est séparé, cette définition entraîne qu'il existe  $\xi \in \mathfrak{X}$  tel que  $x'^\sim \notin \beta(\xi)$ .

##### 5. Compléments relatifs à certaines structures feuilletées

*Cas de deux feuilletages supplémentaires.* Soient  $(T, T')$  et  $(T, T_1')$  deux feuilletages topologiques supplémentaires sur  $E$  (c'est-à-dire sous-jacents à une structure de produit local de l'espèce  $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}$  élargie). Alors tout point  $x$  de  $E$  admet un voisinage  $U$  qui est un ouvert simple relativement aux deux feuilletages et tel que toute plaque de  $U$  pour l'un des feuilletages soit un espace transversal élémentaire pour l'autre;  $U$  sera appelé voisinage bi-simple de  $x$ .

Supposons qu'il existe un tube  $t(w)$  d'âme  $F$  relativement à  $(T, T')$  tel que les ouverts  $w_i$  soient bi-simples. Soit  $G$  le groupe structural de  $t(w)$ . Soit  $Y_i$  une plaque quelconque de  $w_i$  relative à  $(T, T_1')$ ; à tout élément  $(w_j, f, w_i)$  du groupoïde structural  $\Gamma$  de  $t(w)$  correspond l'homéomorphisme  $f_{(Y_i, Y_j)}$  de  $Y_i$  sur  $Y_j$  appliquant  $y \in Y_i$  sur  $y' = Y_j \cap f(y^\sim)$ , où  $y^\sim$  est la plaque de  $w_i$  relativement à  $(T, T')$  qui contient  $y$ . Soient  $\Gamma'$  le groupoïde de ces homéomorphismes et  $\Gamma_1'$  le sous-ensemble de  $\Gamma'$  formé de tous les homéomorphismes de la plaque  $Y_1$  sur une plaque  $Y_i$  quelconque.

**PROPOSITION.** *Avec les hypothèses précédentes,  $t(w)$  est un espace fibré  $t(w)(F, Y_1, G, \Gamma_1')$ , de base  $F$ , de fibre isomorphe à  $Y_1$  et de groupe structural  $G$ . Toute feuille  $F'$  contenue dans  $t(w)$  est un revêtement de  $F$  pour la projection de  $t(w)$  sur  $F$ . Le déroulement  $E^\wedge(w)$  de  $t(w)$  est isomorphe au produit  $F^\wedge \times Y_1$ .*

Soient  $(T, T')$  et  $(T, T_1')$  deux feuilletages supplémentaires sur  $E$ ; si  $(T, T')$  est stable autour de la feuille compacte  $F$  et si  $T$  est une topologie régulière, tout tube contient un tube  $t(w')$  tel que les ouverts  $w_i'$  correspondants soient bi-simples; ce tube est alors

muni de la structure fibrée définie ci-dessus. En particulier, si  $(T, T')$  vérifie les conditions du théorème page 144, il existe un système fondamental de voisinages de  $F$  formé de tubes parfaits  $t(w)$  d'âme  $F$  qui sont des espaces fibrés; la structure fibrée de  $t(w)$  est entièrement déterminée par la donnée de l'espace transverse  $w$ .

*Remarque.* Si dans la proposition précédente les feuilletages  $(T, T')$  et  $(T, T_1')$  sont sous-jacents à des structures feuilletées différentiables, le groupe structural  $G$  de  $t(w)$  est le groupe d'holonomie (au sens d'Elie Cartan généralisé dans **(9)**) de la connexion intégrable définie dans l'espace fibré  $t(w)$  par le feuilletage  $(T, T')$ , ce qui est à l'origine de la terminologie que j'ai introduite dans l'étude des espaces feuilletés, le groupe d'holonomie  $\tilde{H}_x'$  en  $x \in F$  étant isomorphe au groupe  $\mathfrak{J}_{x,\lambda}(G)$  des jets locaux en  $x$  des éléments de  $G$ .

Réciproquement, soient  $(T, T')$  et  $(T, T_1')$  deux feuilletages supplémentaires sur  $E$  tels que  $(T, T')$  soit sous-jacent à une structure fibrée sur  $E$  de base  $B$  et de fibre isomorphe à  $F$ . Soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $B$  par des ouverts connexes, l'image réciproque  $w_i$  de  $U_i$  dans  $E$  étant un ouvert supposé bi-simple; soit  $\Gamma$  le groupoïde des isomorphismes d'holonomie associés aux chaînes pures pour  $(T, T_1')$  formées à partir des ouverts  $w_i$ . Alors  $E$ , muni du recouvrement  $(w_i)_{i \in I}$ , possède les propriétés (1), (3), (4) d'un tube relativement à  $(T, T_1')$ , de groupoïde structural  $\Gamma$  et muni d'une structure fibrée  $E(B, F, G, \Gamma_1')$ ; la condition (2) d'un tube n'est remplie que s'il existe une feuille  $F_1$  de  $(T, T_1')$  qui soit un relèvement de  $B$ . Une construction analogue à celle du déroulement  $E^*(w)$  d'un tube  $t(w)$  permet d'obtenir un revêtement de  $E$  qui est homéomorphe au produit de  $F$  par le revêtement  $\Gamma_1'$  de  $B$  (voir **9**).

**PROPOSITION.** *Soient  $(T, T')$  et  $(T, T_1')$  deux feuilletages supplémentaires tels que  $E$  soit connexe pour  $T$  et que toutes les feuilles de  $(T, T')$  soient compactes. Si  $(T, T')$  est stable autour de toute feuille, alors une feuille  $F_1$  de  $(T, T_1')$  rencontre toutes les feuilles de  $(T, T')$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Omega$  le sous-espace de l'espace transverse  $E^*$  formé des feuilles de  $(T, T')$  que rencontre la feuille  $F_1$  de  $(T, T_1')$ .  $\Omega$  est ouvert. Soit  $F$  une feuille de  $(T, T')$  appartenant à l'adhérence

de  $\Omega$  dans  $E$ . Soit  $(U_i)_{i \leq n}$  un recouvrement de  $F$  par des ouverts bi-simples; le voisinage  $\bigcup_{i \leq n} U_i$  de  $F$  contenant un voisinage saturé de  $F$ , puisque  $F$  est stable, la feuille  $F_1$  rencontre un des ouverts  $U_i$  au moins et par suite  $F_1$  contient une plaque de cet ouvert relativement à  $(T, T_1')$ . Il en résulte que  $\Omega$  contient  $F$ , donc, étant ouvert et fermé dans  $E^\sim$ , est identique à  $E^\sim$ .

La proposition est encore vraie en remplaçant l'hypothèse :  $(T, T')$  est stable autour de toute feuille  $F$  par : tout voisinage de  $F$  contient un voisinage saturé de  $F$ . Ces deux conditions sont d'ailleurs équivalentes si  $(T, T')$  est un feuilletage localement simple tel que la feuille  $F$  soit compacte et qu'un point  $x$  de  $F$  admette un voisinage simple connexe  $U$  dont l'espace transverse est séparé et localement connexe et si  $U$  est distingué dans un ouvert simple contenant l'adhérence de  $U$ .

PROPOSITION. *Avec les hypothèses de la proposition précédente, si  $F_1$  est une variété topologique et si  $T$  est séparée, alors le déroulement faible  $E^*(F_1)$  au-dessus de  $F_1$  est un espace fibré de base  $F_1$ , de fibre isomorphe à un revêtement  $F^\wedge$  de  $F$ , muni d'un feuilletage supplémentaire et admettant un revêtement isomorphe au produit de  $F^\wedge$  par un revêtement de  $F_1$ .*

1

En effet, soit  $t(w)$  un tube pour  $(T, T')$  tel que la trace  $Y_1$  de  $F_1$  sur  $w$  soit un espace transversal élémentaire; alors l'espace transverse  $w^\sim$  est une variété topologique et, en vertu des théorèmes pages 151 et 153,  $t(w)$  contient un tube parfait  $t(w')$  et les déroulements  $E^*(w')$  et  $E^\wedge(w')$  sont isomorphes. De plus  $E^\wedge(w')$  est isomorphe au produit  $F^\wedge \times Y_1$ , où  $F^\wedge$  est un revêtement de  $F$ . La proposition résulte alors de la deuxième partie de la remarque ci-dessus.

PROPOSITION. *Soit  $(T, T')$  un feuilletage localement simple sur  $E$  tel que  $T$  soit connexe et que tout voisinage d'une feuille  $F$  de  $(T, T')$  contienne un voisinage saturé de  $F$ ; alors un espace transversal fermé  $F_1$  rencontre toute feuille.*

En effet, soit  $\Omega$  l'ouvert de l'espace transverse  $E^\sim$  formé des feuilles de  $(T, T')$  que rencontre  $F_1$ . Soit  $F$  une feuille appartenant à l'adhérence de  $\Omega$ ; si pour tout  $x \in F$  il existait un voisinage  $U(x)$  de  $x$  ne rencontrant pas  $F_1$ , un voisinage saturé contenu dans la

réunion des ouverts  $U(x)$  ne rencontrerait pas  $F_1$ , ce qui est impossible. Donc il existe un point  $x' \in F$  adhérent à  $F_1$ , c'est-à-dire  $x' \in F_1$ ,  $F \in \Omega$  et  $\Omega = E^\sim$ .

Dans la démonstration de la proposition suivante, nous utiliserons le lemme :

LEMME. *Soit  $(T, T')$  un feuilletage simple sur  $E$  tel que  $T$  soit localement connexe et localement compact, que toute feuille soit compacte et que l'espace transverse  $E^\sim$  soit localement séparé. Soit  $(T, T_1')$  un feuilletage localement simple sur  $E$ ; si  $F_1$  est une feuille simple de  $(T, T_1')$  qui est un espace transversal fermé de  $(T, T')$ , alors  $F_1$  est un revêtement à  $k$  feuillets de  $E^\sim$ , si  $E^\sim$  est connexe.*

*Démonstration.* La feuille  $F_1$  étant propre, tout point  $x$  de  $F_1$  est contenu dans un ouvert distingué relativement à  $(T, T')$  sur lequel la trace de  $F_1$  est un espace transversal élémentaire. Par suite  $F_1$  rencontre la feuille  $x^\sim$  de  $(T, T')$  passant par  $x$  en  $k$  points  $x_i$ . D'après la proposition précédente,  $F_1$  rencontre toutes les feuilles de  $(T, T')$ . Il existe un voisinage  $U^\sim$  de  $x^\sim$  dans  $E^\sim$  et  $k$  relèvements  $s_i$  de  $U^\sim$  tels que  $s_i(U^\sim) \subset F_1$ ,  $x_i \in s_i(U^\sim)$  et  $s_i(U^\sim) \cap s_j(U^\sim) = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Soit  $U$  la réunion des feuilles de  $(T, T')$  se projetant dans  $U^\sim$ ; le complémentaire  $F_1'$  dans  $F_1 \cap U$  de  $\cup_{i \leq k} s_i(U^\sim)$  étant fermé, il existe un voisinage saturé  $U'$  de  $x^\sim$  contenu dans  $U$  et ne rencontrant pas  $F_1'$ . Alors  $F_1 \cap U'$  est une réunion d'espaces transversaux élémentaires  $s_i(U'^\sim) \subset s_i(U^\sim)$ , où  $i \leq k$  et  $U'^\sim$  est l'image canonique de  $U'$  dans  $U^\sim$ . Donc  $F_1$  est un revêtement de  $E^\sim$ .

THÉORÈME. *Soient  $(T, T')$  et  $(T, T_1')$  deux feuilletages localement simples sans point limite sur  $E$ , tels que  $T$  soit localement connexe et localement compact, que toute feuille de l'un des feuilletages soit un espace transversal pour l'autre feuilletage et que, pour chaque feuilletage, tout point de  $E$  admette un voisinage simple dont l'espace transverse soit localement séparé. Alors les deux feuilletages sont supplémentaires.*

*Démonstration.* Soit  $x$  un point de  $E$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $x$  relativement à  $T$  vérifiant les conditions suivantes :  $U$  est un ouvert simple pour  $(T, T')$  et pour  $(T, T_1')$ , l'adhérence de  $U$  relativement à  $T$  est compacte, l'espace transverse  $U^\sim$  relativement

à  $(T, T')$  est localement séparé, l'espace transverse  $U_1^\sim$  de  $U$  relativement à  $(T, T_1')$  est séparé, la plaque  $V_1$  de  $(T, T_1')$  passant par  $x$  est un espace transversal élémentaire de  $(T, T')$ . Soient  $U'$ ,  $U''$  et  $W$  des voisinages connexes de  $x$  qui sont des ouverts simples distingués dans  $U$  pour  $(T, T')$  tels que l'on ait  $\bar{U}' \subset U$ ,  $\bar{U}'' \subset U'$  et  $\bar{W} \subset U''$ ; on peut supposer que  $V_1$  rencontre en un point et un seul toute plaque de  $W$  ainsi que toute plaque de  $U''$  et toute plaque de  $U'$ . Soit  $W'$  l'ouvert obtenu par saturation de  $W$  dans  $U''$  et soit  $W''$  la réunion des compacts qui sont l'adhérence pour  $T'$  d'une plaque de  $W'$ . Désignons par  $W'^*$  l'adhérence relativement à  $T$  du complémentaire de  $W'$  dans  $W''$ ; on a  $W'^* \subset U'$  et  $W \cap W'^* = \emptyset$ . Puisque l'adhérence de  $W$  est compact, l'adhérence de  $W'$  dans  $U''$  est contenue dans  $U''$ . S'il existait  $y \in V_1 \cap W'^*$ , on aurait  $y \in \bar{U}'$ ,  $y^\sim \in U''$  et  $y \notin U''$ , ce qui est impossible puisque la plaque  $y^\sim$  de  $U'$  rencontre  $V_1$  en un point et un seul situé dans  $U''$ . Donc l'image canonique dans  $U_1^\sim$  du compact  $W'^*$  ne contient pas  $V_1$  et il existe un voisinage  $W_1$  de  $V_1$  saturé dans  $U$  relativement à  $(T, T_1')$  ne rencontrant pas un voisinage saturé de  $W'^*$ . Une plaque  $V_1'$  de  $W_1$  a pour trace sur  $W''$  un espace transversal pour le feuilletage induit par  $(T, T')$  sur  $W''$ , fermé dans  $W''$  puisque trace de  $V_1'$  sur  $W'$ . D'après le lemme précédent appliqué à  $(T, T')_{W''}$ ,  $V_1'$  rencontre toute plaque de  $W''$  relativement à  $(T, T')$  en  $k$  points. En échangeant le rôle des deux feuilletages, on peut faire une construction analogue à partir des feuilletages induits sur  $W_1 \cap W'' = W_1 \cap W'$ ; on obtient ainsi un voisinage  $w$  de  $x$  distingué dans  $W_1$  pour  $(T, T_1')$ , qui rencontre la plaque  $V$  de  $W''$  contenant  $x$  selon un espace transversal élémentaire  $V'$  de  $(T, T')_{W_1 \cap W'}$  et tel que toute plaque de  $w$  relativement à  $(T, T')$  rencontre toute plaque de  $w$  relativement à  $(T, T_1')$  en un même nombre de points. Puisque  $V_1$  rencontre toute plaque de  $U$  pour  $(T, T')$  en un point et un seul et que  $V'$  rencontre toute plaque de  $w$  relativement à  $(T, T_1')$  en un seul point, il en résulte que l'application :  $y \rightarrow (y^\sim, y_1^\sim)$ , où  $y \in w$ , est un isomorphisme de  $w$  sur  $w^\sim \times w_1^\sim$ , où  $w^\sim$  (respectivement  $w_1^\sim$ ) est l'espace transverse de  $w$  relativement à  $(T, T')$  (respectivement  $(T, T_1')$ ),  $y^\sim \in w^\sim$ ,  $y_1^\sim \in w_1^\sim$ ,  $y \in y^\sim \cap y_1^\sim$ . Donc les deux feuilletages sont supplémentaires.

COROLLAIRE. Soient  $(T, T')$  et  $(T, T'_1)$  deux feuilletages topologiques sous-jacents à des structures de variété feuilletée sur  $E$ . Si toute feuille de  $(T, T'_1)$  est un espace transversal de  $(T, T')$ , les deux feuilletages sont supplémentaires.

En effet on construit, comme dans la proposition précédente, l'ouvert  $W_1 \cap W'$ . Puisque toute plaque de  $W_1 \cap W'$  pour  $(T, T'_1)$  est un revêtement de l'espace transversal  $W''$  et que  $W''$  peut être choisi simplement connexe, les composantes connexes d'une telle plaque sont isomorphes à  $W''$  et  $W_1 \cap W'$  est isomorphe au produit de ses espaces transverses relativement aux deux feuilletages.

*Feuilletage sous-jacent à une structure de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie.* Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique sous-jacent à une structure  $\Sigma$  de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie (les notations sont celles de § I, 4). Soit  $(f, S \times S') \mathfrak{B} \# \mathfrak{F} \in \Sigma$  une structure de produit assoupli sur un ouvert simple  $U$  de  $(T, T')$  et  $N$  un espace transversal élémentaire contenu dans  $U$ . Soit  $\nu$  le relèvement de  $B = p(S)$  dans  $B \times F$ , où  $F = p'(S')$ , tel que  $f(\nu(x)) \in N$  pour tout  $x \in B$ . Le germe de  $N$  au point  $f\nu(x)$  s'identifie avec le jet local  $j_x^\lambda f\nu$ . Les couples  $(j^\lambda f\nu, S)$ , où  $j^\lambda f\nu$  désigne le flot :  $x \rightarrow j_x^\lambda f\nu$ ,  $x \in B$ , engendrent un atlas complet  $\mathcal{A}^\wedge$  sur l'espace transversal total  $E_\delta^\wedge$ , compatible avec  $\mathfrak{B}$ ; ainsi  $E_\delta^\wedge$  est muni d'une structure de l'espèce  $\mathfrak{B}$  élargie. Cette structure ne dépend que de la structure feuilletée sous-jacente de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{T}$  élargie; elle est entièrement déterminée par la structure feuilletée de seconde espèce  $(\mathfrak{B}, \mathfrak{S}^-(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}))$  sous-jacente à  $\Sigma$ . Elle induit sur chaque espace transversal une structure de l'espèce  $\mathfrak{B}$  élargie.

Toute chaîne pure contient une chaîne pure  $C$  formée d'ouverts simples munis d'une structure de produit assoupli. Les espaces transverses  $U_1^\sim$  et  $U_n^\sim$  du premier et du dernier élément de  $C$  sont munis de structures  $(f_1, S_1)\mathfrak{B}$  et  $(f_n, S_n)\mathfrak{B}$  de l'espèce  $\mathfrak{B}$  élargie. Si  $(U_n, \gamma, U_1)$  désigne l'isomorphisme d'holonomie associé à  $C$ , alors  $((f_n, S_n)\mathfrak{B}, \gamma, (f_1, S_1)\mathfrak{B})$  appartient au groupoïde  $\mathfrak{B}^-$  des isomorphismes de l'espèce  $\mathfrak{B}$  élargie. On définit ainsi un isomorphisme du groupoïde des isomorphismes d'holonomie  $H'$  de  $(T, T')$  sur un sous-groupoïde  $H'(\Sigma)$  de  $\mathfrak{B}^-$  qui sera appelé *groupoïde des isomorphismes d'holonomie de  $\Sigma$* . Cet isomorphisme détermine aussi un isomorphisme du groupoïde d'holonomie de  $(T, T')$  sur un sous-

groupeïde  $\tilde{H}'(\Sigma)$  du groupeïde des jets locaux de  $H'(\Sigma)$ , que nous appellerons *groupeïde d'holonomie de  $\Sigma$* . Le sous-groupe de  $\tilde{H}'(\Sigma)$  correspondant à un point  $x$  d'une feuille sera appelé *groupe d'holonomie de  $\Sigma$  en  $x$* . De même au pseudogroupe transverse d'holonomie relatif à  $U$  correspond un pseudogroupe transverse d'holonomie de  $\Sigma$  relatif à  $U$ , qui est un pseudogroupe de transformations de l'espace transverse  $U^\sim$  muni de sa structure de l'espèce  $\mathfrak{B}$  élargie. Les feuilletages  $(T^*, T^{*'})$  et  $(\tilde{T}^{\mathfrak{K}}, \tilde{T}^{\mathfrak{K}'})$  des déroulements  $E^*(U)$  et  $\tilde{E}^{\mathfrak{K}}(U)$  au-dessus de  $U$  sont sous-jacents à des structures feuilletées de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \tilde{\mathfrak{F}}$  élargie. Si  $t(U)$  est un tube d'âme  $F'$ , le déroulement  $E^\wedge(U)$  de  $t(U)$  est aussi muni d'une structure feuilletée de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \tilde{\mathfrak{F}}$  élargie, dont le feuilletage topologique sous-jacent est le feuilletage  $(T^\wedge, T^{\wedge'})$ .

**THÉORÈME.** *Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique sous-jacent à une structure feuilletée de l'espèce  $\mathfrak{B} \# \tilde{\mathfrak{F}}$  élargie, tel que  $T'$  soit une topologie localement connexe et localement compacte. Alors  $(T, T')$  est parfaitement stable autour de toute feuille compacte, à groupe d'holonomie fini.*

La construction utilisée au § 4 se modifie aisément, les ouverts simples considérés étant tous supposés munis d'une structure de produit assoupli.

Soit  $\Sigma \in \mathfrak{R}(\mathfrak{B} \# \tilde{\mathfrak{F}})_0$  une structure feuilletée sur  $E$ , où  $\mathfrak{B}$  est le groupeïde des isomorphismes  $r$  fois différentiables d'une variété sur une autre. On peut définir dans  ${}_x\mathfrak{Z}'_x$  (page 132) la relation d'équivalence  ${}_x\rho_x^r$  suivante :  $(U', f, U) \sim (U'_1, f_1, U_1)$  si, et seulement si, il existe un ouvert  $U_2$  distingué dans  $U$  et dans  $U_1$  et un ouvert  $U'_2$  distingué dans  $U'$  et dans  $U'_1$  tels que l'on ait :  ${}_x'j_{x'}^r u'^{-1} f u = {}_x'j_{x'}^r u_1'^{-1} f_1 u_1$ , où  $x^\sim$  et  $x'^\sim$  sont les plaques de  $U_2$  et  $U'_2$  contenant  $x$  et  $x'$ ,  $u, u_1$  (respectivement  $u', u_1'$ ) les applications canoniques de l'espace transverse  $U_2^\sim$  sur  $U^\sim$  et  $U_1^\sim$  (respectivement  $U'_2^\sim$  sur  $U'^\sim$  et  $U_1'^\sim$ ).

La classe d'équivalence de  $(U', f, U)$  modulo  ${}_x\rho_x^r$  sera désignée par  ${}_xj_x^r(U', f, U)$  et appelée *jet transverse d'ordre  $r$* , de source  $x$  et de but  $x'$ . L'ensemble des jets transverses d'ordre  $r$  forme un groupeïde  $J^r(\mathfrak{Z}')$ . Le sous-groupeïde  $J^r(H')$  de  $J^r(\mathfrak{Z}')$  formé des jets transverses d'ordre  $r$   ${}_xj_x^r(U', f, U)$ , où  $(U', f, U) \in H'$ , sera

appelé *groupeïde d'holonomie d'ordre  $r$*  et noté  $\tilde{H}^r$ ; un élément de  $\tilde{H}^r$  est appelé *jet d'holonomie d'ordre  $r$* , le sous-groupe de  $\tilde{H}^r$  formé des jets de source et but  $x$ , groupe d'holonomie d'ordre  $r$  en  $x$ .

Soient  $U$  et  $U'$  deux ouverts simples munis de structures de produits assouplis. En identifiant un jet transverse d'ordre  $r$ ,  ${}_x j_x^r(U_1', f, U_1)$ , où  $U_1$  et  $U_1'$  sont distingués dans  $U$  et  $U'$  respectivement au triplet  $(x', {}_{x'} j_{x'}^r f, x)$ , l'ensemble de ces jets est identifié à un sous-espace de l'espace topologique  $U' \times J^r(U', U) \times U$  qui sera noté  $J^r(U', U)$ ; le sous-ensemble de  $J^r(U', U)$  formé des jets de source  $x$  et de but  $x'$  sera noté  $J^r(x', x)$  et s'identifie à  ${}_{x'} J_{x'}^r(U', U)$ . Soit  $J^r(V', V)$  le sous-espace de  $J^r(U', U)$  formé des jets transverses dont la source décrit  $V$  et le but  $V'$ , où  $V$  et  $V'$  sont deux plaques de  $U$  et  $U'$  respectivement. Soit  $T^r$  (respectivement  $T'^r$ ) la topologie sur  $J^r(\mathfrak{F}')$  ayant pour base les ouverts des espaces topologiques  $J^r(U', U)$  (respectivement  $J^r(V', V)$ ).

1 **PROPOSITION.** *Muni de la topologie  $T^r$  (respectivement  $T'^r$ ) définie ci-dessus,  $J^r(\mathfrak{F}')$  est un groupeïde topologique localement trivial (7). Le couple  $(T^r, T'^r)$  est un feuilletage topologique sous-jacent à une structure feuilletée de l'espèce  $(\mathfrak{B} \times \mathfrak{I} \times \mathfrak{B}) \# (\mathfrak{F} \times \mathfrak{I} \times \mathfrak{F})$  élargie.*

Nous supposons désormais que  $\Sigma$  est une structure feuilletée d'espèce  $\Lambda_p^r \# \mathfrak{F}$  élargie. Alors  $J^r(\mathfrak{F}')$  muni de la topologie  $T^r$  (respectivement  $T'^r$ ) est un espace fibré de base  $E \times E$ , dont les fibres  $J^r(x', x)$  sont isomorphes à  $L_p^r$ , le groupe structural étant  $L_p^r \times L_p^r$ , où  $L_p^r$  désigne le groupe des jets inversibles d'ordre  $r$  de source et de but l'origine de l'espace numérique  $R^p$ .

2 Un espace topologique  $E'$  admettant  $J^r(\mathfrak{F}')$  muni de la topologie  $T^r$  comme groupeïde d'opérateurs topologique est appelé un *prolongement transverse* de  $\Sigma$ ; il admet aussi  $\tilde{H}^r$  pour groupeïde d'opérateurs. Chaque prolongement transverse de  $\Sigma$  est un espace fibré de base  $E$  et de groupe structural  $L_p^r$ . Réciproquement si  $K$  est un espace topologique admettant  $L_p^r$  pour groupe d'opérateurs topologique, par élargissement (3) de  $K$  (considéré comme espèce de structures sur  $L_p^r$ ) au-dessus de  $J^r(\mathfrak{F}')$ , on obtient un prolongement transverse de  $\Sigma$ .

Soit  $E'$  un prolongement transverse de  $\Sigma$  obtenu par élargissement de  $K$ ; soient  $F$  une feuille de  $\Sigma$  passant par  $x$  et  $q$  l'application



canonique de  $E'$  sur  $E$ . Le sous-espace  $F' = \bar{q}^1(F)$  est un espace fibré de base  $F$ , de groupe structural le groupe d'holonomie  $\bar{H}_x'^r$  d'ordre  $r$  en  $x$ , muni de la topologie discrète; ainsi  $F'$  admet une connexion intégrable.  $F'$  sera appelé *prolongement transverse de  $F$  dans  $E'$* . Soit  $J_x^r(\mathfrak{F}')$  le sous-espace de  $J^r(\mathfrak{F}')$  muni de la topologie  $T^r$  formé des jets transverses d'ordre  $r$  de source  $x$ ; soit  $W$  un ouvert simple de  $E$  et  $x' \rightarrow h_{x'}$  un relèvement continu de  $W$  dans  $J_x^r(\mathfrak{F}')$ ; soit  $\eta$  l'application :  $(x', y) \rightarrow h_{x'}.y$ , où  $x' \in W$ ,  $y \in \bar{q}^1(x)$  et où  $h_{x'}.y$  désigne le composé de  $h_{x'}$  avec  $y$ . Les applications  $\eta$  ainsi définies engendrent un atlas complet qui détermine sur  $E'$  une structure fibrée, de topologie sous-jacente  $t$ . En remplaçant  $W$  par une plaque  $V$  de  $W$  et la topologie  $T^r$  par  $T'^r$ , on obtient de même une deuxième structure fibrée sur  $E'$ , de topologie  $t'$ . Le couple  $(t, t')$  définit un feuilletage topologique sur  $E'$  dont les feuilles sont les prolongements transverses dans  $E'$  des feuilles de  $\Sigma$ .

PROPOSITION. *Avec les hypothèses précédentes, si les feuilles  $F$  de  $\Sigma$ , munies de leur seule structure topologique, sont les fibres d'une fibration localement triviale ayant pour base un espace localement contractile, alors les feuilles  $F'$  de  $(t, t')$  sont aussi les fibres d'une fibration localement triviale de même base.*

La démonstration utilise le théorème 1 de (8).

Un exemple de prolongement transverse de  $\Sigma$  est obtenu de la façon suivante : soit  $M$  une variété  $r$  fois différentiable. Dans l'ensemble des couples  $(g, U)$ , où  $U$  est un ouvert simple de  $E$  et  $g$  une application  $r$  fois différentiable de  $U^\sim$  dans  $M$ , soit  $\rho_x$  la relation d'équivalence définie par :  $(g, U) \sim (g', U')$  si, et seulement si, il existe un ouvert  $U''$  distingué dans  $U$  et dans  $U'$  tel que l'on ait :  $j_x^r g u = j_x^r g' u'$  où  $x \in U$ ,  $u$  et  $u'$  sont les applications canoniques de l'espace transverse  $U''$  dans  $U^\sim$  et  $U'^\sim$ ,  $x^\sim$  est la plaque de  $U''$  contenant  $x$ .

La classe d'équivalence modulo  $\rho_x$  de  $(g, U)$  sera appelée *jet transverse d'ordre  $r$  de  $E$  dans  $M$ , de source  $x$  et de but  $g(x)$* . En particulier, un jet transverse d'ordre  $r$  de  $E$  dans la droite numérique, de but  $O$ , est appelé *covitesse transverse d'ordre  $r$* . L'ensemble des covitesses transverses d'ordre  $r$  de source  $x$  forme un espace vectoriel  $K_x^r$  isomorphe à  $L_{1,p}^{r*}$ . L'ensemble de toutes les covitesses d'ordre  $r$  sur  $E$  est un prolongement transverse de  $\Sigma$ . En remplaçant

$K_x^r$  par un espace tensoriel au-dessus de  $K_x^r$ , on obtient un espace de tenseurs transverses d'ordre  $r$  en  $x$ . L'ensemble de tous les tenseurs transverses d'ordre  $r$  d'un certain type est aussi un prolongement transverse de  $\Sigma$ .

Supposons que  $\Sigma$  est une structure de variété feuilletée sur  $E$  d'ordre  $(k, l, r)$ . Alors l'espace transversal total est muni d'une structure différentiable d'ordre  $l$ ; muni de sa structure différentiable, un espace transversal sera appelé *variété transversale*. Le pseudogroupe d'holonomie  $H$  (voir page 130) s'identifie à un pseudogroupe d'homéomorphismes  $l$  fois différentiables d'une variété transversale élémentaire sur une autre. Soit  $H^l$  (respectivement  $H_x^l$ ) le groupoïde des jets d'ordre  $l$  des éléments de  $H$  (respectivement  $H_x$ ). Le groupoïde  $\tilde{H}^l$  quotient de  $H^l$  par le groupoïde réunion des groupoïdes  $H_x^l$ , où  $x \in E$ , s'identifie au groupoïde d'holonomie d'ordre  $l$  de  $E$ ; ses unités sont les groupoïdes  $H_x^l$  appelés *germes transverses d'ordre  $l$  en  $x$* . L'espace en  $x$  des vecteurs transverses d'ordre 1 s'identifie à l'espace quotient de l'espace des vecteurs tangents en  $x$  à  $E$  par le sous-espace des vecteurs tangents en  $x$  à la feuille  $F$  passant par  $x$ .

**PROPOSITION.** *Pour qu'une sous-variété propre  $F$  d'une variété différentiable soit une feuille d'une structure feuilletée définie dans un voisinage de  $F$ , il suffit que l'espace des vecteurs transverses admette une connexion intégrable (voir 9).*

Etant donnée une variété  $k$  fois différentiable  $V_p$ , rappelons qu'une  $G$ -structure d'ordre  $s$  et de classe  $s'$  sur  $V_p$  est une section  $s'$  fois différentiable au-dessus de  $V_p$  de l'espace quotient par  $G$  du prolongement principal  $H^s(V_p)$ , où  $G$  est un sous-groupe fermé du groupe  $L_p^s$  et  $s' \leq k - s$ . Un prolongement d'ordre  $s$  d'une  $G$ -structure d'ordre  $s$  et de classe  $s'$  est un espace fibré  $s'$  fois différentiable associé au sous-espace fibré de l'espace fibré  $H^s(V_p)$  formé des repères distingués de la  $G$ -structure. Soit  $\tilde{\mathfrak{F}}_0$  l'espèce des  $G$ -structures d'ordre  $s$  et de classe  $s'$  sur les variétés  $k$  fois différentiables de dimension  $p$ . Soit  $\tilde{\mathfrak{F}}_0'$  l'espèce de structures formée par les prolongements d'ordre  $s$  des éléments de  $\tilde{\mathfrak{F}}_0$  correspondant à une représentation  $s'$  fois différentiable de  $G$  sur un groupe d'automorphismes  $s'$  fois différentiables d'une variété  $K$ . Soient  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{F}'$  les groupoïdes des isomorphismes correspondant à  $\tilde{\mathfrak{F}}_0$  et  $\tilde{\mathfrak{F}}_0'$ . Soit  $\Sigma \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})_0$  une structure feuilletée sur  $E$ . A une carte

$(f, S \times S') \in \Sigma$  correspond la carte  $(f', S \times S'')$ , où  $S'' \in \mathfrak{F}'_0$  est le prolongement de  $S'$  et où l'application  $f'_x : Y \rightarrow f'(x, Y)$  est le prolongement de  $f_x : y \rightarrow f(x, y)$  à  $S''$  (voir **10**). Les cartes  $(f', S \times S'')$  engendrent un atlas complet  $\Sigma'$  sur un ensemble  $E'$  compatible avec  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}'$ . Muni de la structure feuilletée  $\Sigma'$  d'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}'$  élargie,  $E'$  sera appelé *prolongement de  $\Sigma$  relativement à  $\mathfrak{F}'$* ; les feuilles de  $\Sigma'$  sont des prolongements des feuilles de  $\Sigma$ . L'atlas  $\Sigma'$  définit aussi sur  $E'$  une structure d'espace fibré de base  $E$  et de fibres isomorphes à  $K$ .

PROPOSITION. *Avec les hypothèses précédentes, si les feuilles de  $\Sigma$ , munies de leur seule structure topologique, sont les fibres d'une fibration localement triviale dont l'espace quotient est un espace localement contractile, alors les feuilles de  $\Sigma'$  sont aussi les fibres d'une fibration localement triviale de même base.*

Bien que les prolongements des feuilles de  $\Sigma$  soient isomorphes en tant qu'espaces fibrés, les  $G$ -structures sur ces feuilles ne sont pas nécessairement isomorphes.

*Structures feuilletées à métrique riemannienne transverse.* Si  $\mathfrak{B}$  est le groupoïde des isomorphismes trois fois différentiables d'une structure riemannienne trois fois différentiable sur une autre, une structure feuilletée  $\Sigma$  sur  $E$  d'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie est appelée *structure feuilletée à métrique riemannienne transverse*. Tout espace transversal de  $\Sigma$  dont la topologie est séparée est alors muni d'une métrique riemannienne. Pour qu'une structure feuilletée sur  $E$  appartienne à  $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})$ , il suffit qu'il existe un espace transversal  $\mathfrak{N}$  tel que  $E$  soit la réunion des feuilles rencontrant  $\mathfrak{N}$  et que  $\mathfrak{N}$  admette une métrique riemannienne invariante par le pseudogroupe d'holonomie relatif à  $\mathfrak{N}$  (c'est-à-dire le sous-pseudogroupe du pseudogroupe d'holonomie dont les unités sont contenues dans  $\mathfrak{N}$ ).

PROPOSITION. *Soit  $\Sigma$  une structure feuilletée sur  $E$  à métrique riemannienne transverse; s'il existe un tube  $t(w)$  d'âme  $F$ , le feuilletage topologique sous-jacent à  $\Sigma$  est stable autour de  $F$ .*

Dans ce cas, le déroulement normal  $E^\wedge(w)$  de  $t(w)$  est isomorphe au déroulement faible  $E^*(w)$  au-dessus de  $w$  et il existe un tube d'âme  $F$  dont le groupe structural est isomorphe à un groupe de rotations.

Soit  $(T, T')$  un feuilletage topologique sur  $E$  sous-jacent à une structure feuilletée  $\Sigma$  à métrique riemannienne transverse; supposons  $T$  localement compact. Soit  $(T, T_1')$  un feuilletage topologique supplémentaire à  $(T, T')$ .

**THÉORÈME.** *Avec les hypothèses précédentes et si toute feuille  $F_1$  de  $(T, T_1')$  est munie d'une structure riemannienne complète, toute feuille  $F$  de  $\Sigma$  admet un voisinage saturé qui est une réunion d'ouverts bi-simples et  $(T, T')$  est stable autour de toute feuille propre.  $F_1$  rencontre toute feuille  $F$  et le déroulement  $E^*(F_1)$  au-dessus de  $F_1$  est un espace fibré de base  $F_1$  de fibres isomorphes à un revêtement  $F^\wedge$  de  $F$ , admettant un revêtement isomorphe à  $F^\wedge \times F_1^\wedge$ , où  $F_1^\wedge$  est un revêtement de  $F_1$ .*

*Démonstration.* Soit  $F$  une feuille de  $\Sigma$ . Pour tout  $x \in F$ , désignons par  $B(x, r)$  la boule fermée de centre  $x$  de rayon  $r$  contenue dans la feuille  $F_x$  de  $(T, T_1')$  contenant  $x$ . Soit  $r_x$  le plus grand nombre tel que tout point intérieur à  $B(x, r_x)$  puisse être joint à  $x$  par un arc de géodésique unique. Soit  $t(w_x, B(x, r_x))$  un des ensembles analogues à un tube considérés page 155 recouvrant  $B(x, r_x)$ , réunion d'une famille  $\phi$  d'ouverts bi-simples,  $w_x \in \phi$  contenant  $x$ ; on montre comme au début du paragraphe que  $t(w_x, B(x, r_x))$  est un ouvert bi-simple; soit  $W(x, r)$  l'ouvert bi-simple contenu dans l'ouvert  $t(w_x, B(x, r_x))$ , produit de la plaque  $x^\wedge$  de  $w_x$  pour  $(T, T')$  contenant  $x$  par l'intérieur de la boule  $B(x, r)$ . Pour tout  $x' \in x^\wedge$ , on a  $r_{x'} \geq r_x$ . Soit  $V$  l'ouvert de  $F$ , supposé non vide, formé des points  $x$  tels que  $r_x > r$ , où  $r$  est un nombre fixé. Soit  $x$  un point de  $F$  adhérent à  $V$ ; montrons que  $x$  appartient à  $V$ . Pour tout  $x' \in V \cap x^\wedge$ , désignons par  $p_x$  l'homéomorphisme de  $B(x', r_x)$  sur  $B(x, r_x)$  déterminé par la projection canonique de  $t(w_x, B(x, r_x))$  sur sa plaque pour  $(T, T_1')$  contenant  $x$ . Cet homéomorphisme se prolonge en une application continue  $p_{x'}$  de  $B(x', r)$  dans  $F_x$  en associant à l'extrémité  $z$  d'un arc de géodésique  $(x', z)$  de longueur  $r' \leq r$  le point  $z'$  situé à la distance  $r'$  de  $x$  sur l'arc de géodésique contenant  $p_{x'}(x', z)$ . Soit  $g_{x'}$  un arc de géodésique issu de  $x'$  de longueur  $r$ ; soit  $[g_{x'}]$  le plus grand nombre tel que, pour tout  $z \in g_{x'}$  situé à une distance de  $x'$  inférieure à  $[g_{x'}]$ , la restriction de  $p_{x'}$  à un voisinage assez petit de  $z$  soit un homéomorphisme sur son image; si  $x'' \in V \cap x^\wedge$  et si  $p_{x''}(g_{x''}) = p_{x'}(g_{x'}) = g_x$ , on a  $[g_{x''}] = [g_{x'}] = [g]$ . Soient  $(x', \xi_{x'})$  et  $(x, \eta)$  les arcs de  $g_{x'}$  et  $g_x$  de longueur  $[g]$ . On

peut construire une chaîne pure pour  $(T, T_1')$  reliant  $x$  à  $\eta$ , formée d'ouverts bi-simples  $U_i$ ,  $i \leq n$ , recouvrant  $(x, \eta)$ ; pour tout point  $x' \in x \cap V$  appartenant à la plaque de  $U_1$  pour  $(T, T')$  contenant  $x$ ,  $U_n$  détermine un homéomorphisme d'un voisinage de  $\xi_{x'}$  dans  $F_{x'}$  sur un voisinage de  $\eta$ . Il en résulte que  $[g] = r$  et que, pour tout  $x' \in V \cap x$ , l'application  $p_{x'}$  est un étalement de  $B(x', r)$  dans  $F_x$ ;  $B(x', r)$  étant compact,  $B(x', r)$  est un revêtement de  $F_x$ . Puisque l'image réciproque de  $x$  par  $p_{x'}$  est réduite à  $x'$ ,  $p_{x'}$  est un isomorphisme de  $B(x', r)$  sur  $B(x, r)$ . Ainsi  $x \in V$  et  $V = F$ . Montrons que l'ouvert  $t(W(x, r))$  réunion des ouverts bi-simples  $W(x', r)$ , où  $x' \in F$ , est saturé. Soit  $F'$  une feuille de  $(T, T')$  rencontrant  $t(W(x, r))$ ; soit  $V' = F' \cap t(W(x, r))$ ;  $V'$  est ouvert dans  $F'$ . Soit  $z$  un point adhérent à  $V'$  dans  $F'$ ; alors  $z \in V'$ . En effet, soit  $u$  un ouvert bi-simple contenant  $z$ ; soit  $g_z$  un arc de géodésique dans  $F_z$  issu de  $z$ ; pour tout point  $z'$  appartenant à la plaque de  $u$  pour  $(T, T')$  contenant  $z$ , soit  $g_{z'}$  un arc de géodésique issu de  $z'$  et tel que  $g_{z'} \cap u$  soit appliqué sur  $g_z \cap u$  par l'application canonique de  $u$  sur la plaque de  $u$  pour  $(T, T_1')$  contenant  $z$ ; soient  $(z, \bar{z})$  et  $(z', \bar{z}')$  les arcs de  $g_z$  et  $g_{z'}$  de longueur  $k$ . Il existe une chaîne pure pour  $(T, T_1')$  reliant  $z$  à  $\bar{z}$ , formée d'ouverts bi-simples  $u_i$ , où  $i < n$  et  $u_1 \subset u$ , recouvrant  $(z, \bar{z})$  et telle que  $u_{i-1} \cap u_i$  contienne un ouvert bi-simple  $u_i'$  admettant  $u_{i-1}$  et  $u_i$  pour saturés dans  $u_{i-1}$  et  $u_i$  respectivement. Désignons par  $z_1 \checkmark$  et  $z_n \checkmark$  les plaques de  $u_1$  et  $u_{n-1}$  pour  $(T, T')$  contenant  $z$  et  $\bar{z}$  respectivement, par  $z_i \checkmark$  une plaque de  $u_i'$  pour  $(T, T')$  contenant un point  $z_i$  choisi sur  $(z, \bar{z})$ . Pour tout  $z' \in z_1 \checkmark$ , posons  $z_i' = g_{z'} \cap z_i \checkmark$ ; les arcs  $(z_i', z_{i+1}')$  et  $(z_i, z_{i+1})$  de  $g_{z'}$  et  $g_z$  respectivement ont même longueur et l'application  $z_i' \rightarrow z_{i+1}'$  est continue. On en déduit que  $z_n' = \bar{z}'$  et que l'application  $\gamma_k : z' \rightarrow \bar{z}'$ , où  $z' \in z_1 \checkmark$ , est une application continue de  $z_1 \checkmark$  sur  $z_n \checkmark$ . En particulier, pour  $k = r$ , on a  $\gamma_r(z') \in F$  si  $z' \in V'$ , d'où  $\gamma_k(z) \in F$  et  $z \in t(W(x, r))$ . Donc  $t(W(x, r))$  est saturé. Le reste du théorème se démontre facilement. 1

**COROLLAIRE (THÉORÈME DE DE RHAM (20)).** *Un espace riemannien complet réductible et simplement connexe est isomorphe au produit de deux espaces riemanniens.* 2

*Remarques.*

(1) Une démonstration analogue à la fin de celle du théorème permet de prouver le résultat plus général suivant : soit  $v_z$  un

vecteur tangent en  $z$  à la feuille  $F_z$  de  $(T, T_1')$ ; soit  $\bar{z}_l$  l'extrémité de l'arc de géodésique issu de  $z$  tangent en  $z$  à  $v_z$  et de longueur  $l$ ; alors l'application :  $(v_z, l) \rightarrow \bar{z}_l$  est une application continue pour les topologies du prolongement des vecteurs transverses, de la droite numérique et pour la topologie  $T$ .

(2) Si  $(T, T')$  et  $(T, T_1')$  sont deux feuilletages topologiques sur  $E$  supplémentaires tels que, pour toute feuille de  $(T, T')$ , il existe un tube d'âme  $F$  formé d'ouverts bi-simples, alors toute feuille de  $(T, T_1')$  rencontre toute feuille de  $(T, T')$ .

(3) En prenant pour  $\mathfrak{B}$  le groupoïde des isomorphismes d'espaces localement homogènes (de Lie **(11)**) ou le groupoïde des isomorphismes 3 fois différentiables d'une variété munie d'une connexion de Cartan **(9)** 2 fois différentiable sur une autre, une structure feuilletée d'espèce  $\mathfrak{B} \# \mathfrak{F}$  élargie sera dite à *structure localement homogène transverse*, ou à *connexion de Cartan transverse*. Pour une structure feuilletée  $\Sigma$  sur  $E$  à structure localement homogène transverse ou à connexion de Cartan transverse, le théorème précédent est valable en remplaçant structure riemannienne complète par structure localement homogène complète ou connexion de Cartan complète.

1

(4) Soit  $\Sigma$  une structure feuilletée d'espèce  $\Lambda_{n,r} \# \mathfrak{F}$  élargie. Soit  $\mathfrak{B}_0$  l'espèce de structures locales formée des variétés  $r$  fois différentiables munies d'une forme extérieure; soit  $\mathfrak{B}$  le groupoïde des isomorphismes correspondant. Si  $\Sigma$  admet une superstructure  $\Omega \in \mathfrak{R}(\mathfrak{B} \# \mathfrak{F})_0$ , on appellera  $\Omega$  une *forme extérieure transverse* sur  $\Sigma$ . L'application covariante  $d$  de différentiation extérieure s'élargit en une application associant à  $\Omega$  une forme extérieure transverse  $d\Omega$  sur  $\Sigma$  appelée *différentielle extérieure de  $\Omega$* . L'ensemble des formes extérieures transverses sur  $\Sigma$  est un module différentiel gradué, d'où on déduit le *module d'homologie transverse*.

*Remarque sur la notion de simultanément.* Le feuilletage topologique sous-jacent à une structure de variété feuilletée n'admet généralement pas de feuilletage supplémentaire. Ainsi un espace fibré simplement connexe n'admet un feuilletage supplémentaire à la fibration que s'il est isomorphe au produit de sa base par une fibre, les fibres étant supposées compactes. Par exemple la sphère  $S_3$  n'admet aucun feuilletage supplémentaire à sa fibration classique.

Soit  $V_4$  un univers de la théorie de la relativité. La notion de

simultanéité dans  $V_4$  sera définie par un feuilletage topologique dont les feuilles  $F$ , appelées *feuilles de simultanéité*, sont de caractère spatial en chaque point  $x$  (c'est-à-dire la restriction du  $ds^2$  fondamental à l'espace tangent à  $F$  en  $x$  est une forme quadratique définie positive). L'exemple de l'espace fibré  $S_3 \times S_1$  de base  $S_2 \times S_1$  montre qu'un tel feuilletage de simultanéité n'existe généralement pas.

Si l'univers  $V_4$  admet un feuilletage de simultanéité, il existe un feuilletage topologique supplémentaire dont les feuilles sont des *lignes de temps* (c'est-à-dire telles que la restriction du  $ds^2$  à la tangente en chaque point est définie négative). Une feuille de simultanéité peut rencontrer une ligne de temps en plusieurs points.

Rappelons le résultat suivant **(12)** :

PROPOSITION. *Une variété compacte  $V_4$  admet un  $ds^2$  admissible en relativité si, et seulement si, la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $V_4$  est nulle. (En considérant un revêtement à deux feuilletés de  $V_4$ , on se ramène au cas considéré dans **(12)** où l'on peut définir continuellement en chaque point un demi-cône de lumière, déterminant l'orientation vers l'avenir.)*

PROPOSITION. *Un univers compact  $V_4$  admet un feuilletage dont les feuilles sont les lignes de temps et dont une feuille est fermée. Si  $V_4$  admet aussi un feuilletage de simultanéité, alors toute ligne de temps rencontre toute feuille de simultanéité.*

Soit  $V_4$  un univers muni d'un feuilletage de simultanéité donné; pour qu'on puisse définir localement sur  $V_4$  une *durée*, il faut et il suffit que ce feuilletage soit à métrique riemannienne transverse. S'il en est ainsi et si de plus les lignes de temps ont pu être munies continuellement d'une orientation (passé-avenir), la durée est définie par la donnée d'une forme transverse fermée  $\omega$  de degré 1. Pour tout arc  $\gamma$  transversalement différentiable, on peut définir  $\int_\gamma \omega$  qui représentera la durée correspondant à  $\gamma$ . En appliquant le théorème précédent, on obtient en particulier la proposition suivante (qui résulte aussi de l'étude faite par Reeb d'un feuilletage défini par une forme fermée **(13, p. 110)**).

PROPOSITION. *Avec les hypothèses précédentes, si  $V_4$  est compact toutes les feuilles de simultanéité sont isomorphes; l'une de ces feuilles*

est soit partout dense, soit compacte; dans ce dernier cas,  $V_4$  est un espace fibré de base  $S_1$  et de fibre isomorphe à une feuille de simultanéité. Si  $V_4$  n'est pas compact et si les lignes de temps sont complètes (compactes ou de durée infinie) toutes les feuilles de simultanéité  $V_3$  sont isomorphes; si  $V_3$  est compacte, alors il n'existe pas de ligne de temps fermée.

## BIBLIOGRAPHIE

1. C. Ehresmann et G. Reeb, Sur les champs d'éléments de contact de dimension  $p$  complètement intégrables, C.R.A.S., 218 (1944), 995.
2. C. Ehresmann et Shih Weishu, Sur les espaces feuilletés : théorème de stabilité, C.R.A.S., 243 (1956), 344.
3. C. Ehresmann, Espèce de structures locales; Elargissements de catégories, Séminaire Ehresmann (1961) (1ère partie : traduction de Gattungen von Lokalen Strukturen, Jahresbericht Deutsch. Math. Vereinigung, 60 (1957), 49).
4. ——— Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, Coll. Int. Géom. Diff. Strasbourg, C.N.R.S. (1953).
5. ——— Catégories inductives et pseudogroupes, Ann. Inst. Fourier, 10 (1960), 307.
6. ——— Structures locales, Annali di Mat. (1954), 133.
7. ——— Catégories topologiques et catégories différentiables, Coll. Geom. Diff. Glob. (Bruxelles, 1958), 137.
8. ——— Sur la théorie des variétés feuilletées, Rend. Mat. e delle sue appl. V, 10, Fasc. 1-2 (Roma, 1951).
9. ——— Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Coll. Topologie (Bruxelles, 1950), 29.
10. ——— Les prolongements d'un espace fibré différentiable, C.R.A.S., 240 (1955), 1755.
11. ——— Sur les espaces localement homogènes, l'Enseignement Math., 35, n. 5-6 (1936), 317.
12. ——— Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable, C.R.A.S., 216 (1943), 628.
13. G. Reeb, Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées, ASI 1183 (Paris, 1952).
14. ——— Sur la théorie générale des systèmes dynamiques, Ann. Inst. Fourier, 6 (1955-56), 89.
15. H. Freudenthal, Ueber die Enden topologischer Räume und Gruppen, Math. Zeit. (1931), 692.
16. A. Haefliger, Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoïdes, Comm. Math. Helv., 32 (1958), 4.
17. M. H. A. Newman, A theorem on periodic transformations of spaces, Quart. J. Math., 2 (1931), 8.
18. P. A. Smith, Transformations of finite period, III: Newman's theorem, Ann. Math., 42 (1941), 446.
19. D. Montgomery et L. Zippin, Topological transformation groups, Interscience Tracts (New York, 1955).
20. G. De Rham, Com. Math. Helv., 26 (1952), 339.



/92/

CATÉGORIES TOPOLOGIQUES. I

PAR

CHARLES EHRESMANN

*Dédié à Monsieur H. Freudenthal,  
à l'occasion de son soixantième anniversaire*

(Communicated by Prof. N. H. KUIPER at the meeting of October 30, 1965)

INTRODUCTION

La définition initiale des catégories topologiques [4] nous a conduits à la notion générale de catégorie structurée, étudiée dans plusieurs articles ([1], [2], [3]); ici nous revenons au cas des catégories topologiques. 1

Le n° 1 est consacré à la traduction dans ce cas des théorèmes de [2] et [3]. La notion de graphe multiplicatif topologique est précisée en celle de noyau de catégorie ou de groupoïde (exemple: noyau de groupe).

Dans le n° 2, nous utilisons la notion de structure quasi-quotient [5] et, par un procédé général de construction de projections (qui sera étudié plus complètement dans [1]) nous démontrons les théorèmes suivants: Si  $(C, T)$  est une catégorie topologique et  $\hat{C}$  une catégorie quotient de  $C$  par  $r$ , il existe une catégorie topologique  $(\hat{C}, \hat{T})$  quotient de  $(C, T)$  par  $r$ . Toute catégorie topologique peut être "universellement" plongée dans: une catégorie topologique séparée, une catégorie topologique compacte, une catégorie topologique dont la topologie est sous-jacente à une structure uniforme complète.

Les catégories microtransitives font l'objet du n° 3. Elles nous mènent à introduire la notion de structure quasi-uniforme  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  sur une classe  $E$ , où  $(A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$  et  $\varphi$  une application de  $I$  dans la classe des filtres de  $E \times E$  possédant certaines propriétés. Une topologie et une structure uniforme s'identifient à des structures quasi-uniformes (où  $I = E$  et  $A_i = \{i\}$ , et où  $A_i = E$  respectivement). Toute structure quasi-uniforme admet une topologie sous-jacente; nous étendons la notion de filtre de Cauchy (par exemple les filtres de Cauchy pour une topologie sont les filtres convergents) et le théorème de complétion des structures uniformes. La topologie d'une catégorie microtransitive stricte est sous-jacente à une structure quasi-uniforme (mais non en général à une structure uniforme); si  $(C, T)$  est un groupoïde microtransitif, la partition correspondante a pour éléments les classes  $e' \cdot C \cdot e$ , où  $e$  et  $e'$  sont des unités de  $C$ ; si  $(C, T)$  est un groupe topologique, la structure quasi-uniforme est la structure uniforme bilatère.

L'article se termine par l'étude de la catégorie des sections locales associée à une catégorie topologique.

La terminologie et les notations sont conformes à celles des index du livre "Catégories et structures", Dunod, 1965, auquel renvoient les références non numérotées. (\*) (v. p. 146).

#### 1. GRAPHES MULTIPLICATIFS TOPOLOGIQUES. CATÉGORIES TOPOLOGIQUES

Une topologie sur une classe  $M$  sera représentée par la partie  $T$  de  $\mathcal{P}(M)$  ayant pour éléments les ouverts de la topologie, et nous poserons  $M = \theta(T)$ . Si  $M'$  est une partie de  $M$ , le symbole  $T/M'$  désigne la topologie induite par  $T$  sur  $M'$  (i.e.  $T/M'$  est la classe des parties  $U \cap M'$ , où  $U \in T$ ). La topologie grossière sur  $M$  (telle que  $T$  ait pour seuls éléments  $\phi$  et  $M$ ) est notée  $M_g$ ; la topologie discrète est notée  $M_d$  (i.e.  $M_d = \mathcal{P}(M)$ ).

Soit  $\mathcal{M}_0$  une classe de classes contenant avec deux classes leur produit, avec une classe toutes ses parties. Soit  $\mathcal{M}$  la catégorie pleine d'applications ( $n^\circ 2$ , chap. I) ayant  $\mathcal{M}_0$  pour classe de ses unités. Soit  $\mathcal{T}_0$  la classe des topologies  $T$  telles que  $\theta(T) \in \mathcal{M}_0$ . Soit  $\mathcal{T}$  la catégorie des applications continues entre topologies appartenant à  $\mathcal{T}_0$ ; un élément de  $\mathcal{T}$  est un triplet

$$(T', f, T), \text{ où } T \in \mathcal{T}_0, T' \in \mathcal{T}_0 \text{ et } (\theta(T'), f, \theta(T)) \in \mathcal{M},$$

et la loi de composition de  $\mathcal{T}$  est définie par:

$$(T'', f', T'_1) \cdot (T', f, T) = (T'', f'f, T) \text{ si, et seulement si, } T'_1 = T'.$$

Nous identifions  $\mathcal{T}_0$  à la classe des unités de  $\mathcal{T}$ .

Soit  $\theta$  la surjection de  $\mathcal{T}$  sur  $\mathcal{M}$  telle que

$$\begin{cases} T \rightarrow \theta(T) \text{ si } T \in \mathcal{T}_0 \\ (T', f, T) \rightarrow (\theta(T'), f, \theta(T)). \end{cases}$$

1 Le triplet  $(\mathcal{M}, \theta, \mathcal{T})$  est un foncteur, noté  $\theta$ .

Le foncteur  $\theta$  a les propriétés suivantes:

1)  $\theta$  est un foncteur d'homomorphismes saturé (déf. 19, chap. II) au-dessus de  $\mathcal{M}$ .

2)  $\mathcal{T}$  est une catégorie à  $\mathcal{I}$ -produits et à  $\mathcal{I}$ -produits fibrés (resp. à  $\mathcal{I}$ -sommets et à  $\mathcal{I}$ -sommets fibrés) s'il en est ainsi pour  $\mathcal{M}$ . De plus  $\theta$  est compatible avec les produits, les produits fibrés, les sommes et les sommes fibrées.

2 3) Les  $\theta$ -sous-structures de  $T \in \mathcal{T}_0$  sont les topologies induites par  $T$  sur les sous-classes de  $\theta(T)$ . Par suite  $\theta$  est  $\text{---}$ -étalant ([5] et déf. 1-2 [1]) car, si  $M' \subset \theta(T)$ , alors  $T/M'$  est une  $\theta$ -sous-structure de  $T$  telle que  $\theta(T/M') = M'$ .

3 4) Si  $T \in \mathcal{T}_0$  et si  $r$  est une relation d'équivalence sur  $\theta(T)$ , il existe une  $\theta$ -structure quotient de  $T$  par  $r$ , à savoir la topologie  $T/r$  quotient de  $T$  par  $r$ , et on a  $\theta(T/r) = \theta(T)/r$ , si  $\theta(T)/r \in \mathcal{M}_0$ .

5)  $\theta$  admet pour section maximale (déf. 1-4 [1]) le foncteur  $\varphi_g$  section de  $\theta$  tel que

$$\varphi_g(M', f, M) = (M'_g, f, M_g)$$

et le foncteur dual  $\theta^*$  admet pour section maximale le foncteur  $\varphi_a$  tel que

$$\varphi_a(M', f, M) = (M'_a, f, M_a).$$

1

Soit  $(\mathcal{T}_0, <)$  la classe ordonnée définie par:

$$T' < T \text{ si, et seulement si, } \theta(T') \in T \text{ et } T' = T/\theta(T').$$

Nous munirons  $\mathcal{T}$  de la relation d'ordre:

$$(T', f, T) < (T'_1, f_1, T_1) \text{ si, et seulement si, } T' < T'_1, T < T_1 \\ \text{et si } f \text{ est une restriction de } f_1.$$

Alors  $(\mathcal{T}, <)$  est une catégorie inductive complètement régulière, à droite (ex. 4-5 [2]) et  $((\mathcal{M}, <), \theta, (\mathcal{T}, <))$  est un foncteur inductif [2].

2

Soit  $\mathcal{T}^v$  la sous-catégorie de  $\mathcal{T}$  formée des applications ouvertes (i.e. on a  $(T', f, T) \in \mathcal{T}^v$  si  $f(T) \subset T'$ ). D'après le théorème 2-I [2], la classe ordonnée  $(\mathcal{T}_0, <)$  peut être définie par:

$$T' < T \text{ si, et seulement si, } T' \underset{\theta'}{\subset} T,$$

3

où  $\theta'$  est la restriction de  $\theta$  à  $\mathcal{T}^v$ .

*Définition 1:* Un graphe multiplicatif  $\theta$ -structuré (resp. fortement  $\theta$ -structuré) est appelé graphe multiplicatif prétopologique (resp. topologique). Une catégorie (resp. un groupoïde)  $\theta$ -structurée est appelée catégorie (resp. groupoïde) topologique (déf. 7-II [3] et 4-II [2]).

4

Soit  $G^* = (G, \kappa)$  un graphe multiplicatif. Pour que  $(G^*, T')$  (ou plus précisément  $(G^*, T, T')$ ) soit un graphe multiplicatif prétopologique, il faut et il suffit (prop. 18-II [3]) que les conditions suivantes soient vérifiées:

- 1)  $T' \in \mathcal{T}_0$  et  $\theta(T') = G^* \star G^*$ ;
- 2) Soit  $G^*_\alpha$  la classe des couples  $(f, \alpha(f))$ , où  $f \in G$ , et soit  $T$  la topologie sur  $G$  image de  $T'/G^*_\alpha$  par la bijection  $(f, \alpha(f)) \rightarrow f$  de  $G^*_\alpha$  sur  $G$ . On a

$$(T, \alpha, T) \in \mathcal{T}, (T, \beta, T) \in \mathcal{T} \text{ et } (T, \kappa, T') \in \mathcal{T}.$$

Soit  $G^* = (G, \kappa)$  un graphe multiplicatif (resp. une catégorie). Pour que  $(G^*, T)$  soit un graphe multiplicatif (resp. une catégorie) topologique, il faut et il suffit que  $T$  soit une topologie sur  $G$  vérifiant les conditions suivantes:

- 1) On a  $(T, \alpha, T) \in \mathcal{T}$  et  $(T, \beta, T) \in \mathcal{T}$ .
- 2) Si  $T \star T = T \times T/G^* \star G^*$ , on a  $(T, \kappa, T \star T) \in \mathcal{T}$ .

Pour qu'une catégorie topologique  $(G^*, T)$  soit un groupoïde topologique, il faut et il suffit que  $G^*$  soit un groupoïde et que l'on ait

$$(T, I, T) \in \mathcal{T},$$

où  $I$  est la bijection  $f \rightarrow f^{-1}$  de  $G$  sur  $G$ .

5+

*Convention:* Si  $(G', T)$  est un graphe multiplicatif topologique, nous posons :

$$T_0 = T/G'_0, \quad T \star T = T \times T/G' \star G' \quad \text{et} \quad T_\gamma = T/G'_\gamma.$$

*Proposition 1:* Soit  $(C', T)$  une catégorie topologique. Si  $T$  est séparée,  $C'_0$  est fermé dans  $T$ ; si  $T_0$  est séparée,  $C' \star C'$  est fermé dans  $T \times T$ . Si  $(C', T)$  est un groupoïde topologique, alors  $T$  est séparée si, et seulement si,  $C'_0$  est fermé dans  $T$  et  $T_0$  séparée.

*Démonstration:* Supposons  $T$  séparée. Soit  $f$  un point adhérent à  $C'_0$  et soit  $e$  l'unité à droite de  $f$  supposée différente de  $f$ . Il existe des voisinages  $V$  de  $f$  et  $V'$  de  $e$  dans  $T$  tels que  $V \cap V'$  soit vide. Comme  $u = V' \cap C'_0 \in T_0$ ,  $U = \alpha^{-1}(u) \cap V$  est un voisinage de  $f$  dans  $T$ . Si  $e' \in C'_0 \cap U$ , on a

$$e' = \alpha(e') \in u \cap V \subset V' \cap V,$$

ce qui est impossible. Donc  $C'_0$  est fermé dans  $T$ . — Supposons  $T_0$  séparée. Comme  $C' \star C'$  est la classe produit fibré  $\alpha \vee \beta$  et que les applications

$$(f', f) \rightarrow \beta(f) \quad \text{et} \quad (f', f) \rightarrow \alpha(f')$$

sont continues de  $T \times T$  dans la topologie séparée  $T_0$ , la classe  $C' \star C'$  est fermée dans  $T \times T$ . De même la classe  $M = \beta \vee \beta$  est fermée dans  $T \times T$ .

— Soit  $(C', T)$  un groupoïde topologique tel que  $C'_0$  soit fermé dans  $T$  et  $T_0$  séparée. La diagonale  $\Delta$  de  $C' \times C'$  est l'image réciproque de  $C'_0$  par l'application continue

$$(f', f) \rightarrow f'^{-1} \cdot f \quad \text{de} \quad T \times T/M \quad \text{dans} \quad T.$$

Done,  $C'_0$  étant fermé dans  $T$ , la diagonale  $\Delta$  est fermée dans  $T \times T/M$ . Puisque  $M$  est fermé dans  $T \times T$ ,  $\Delta$  est fermée dans  $T \times T$  et  $T$  est séparée.

*Proposition 2:* Si  $(G', T)$  est un graphe multiplicatif (resp. une catégorie) topologique, alors  $(\boxplus G', \boxplus T)$ ,  $(\boxminus G', \boxplus T)$  et  $(\boxminus G', \boxminus T)$  sont des graphes multiplicatifs (resp. des catégories) topologiques, en posant :

$$\boxplus T = T^4/\boxplus G' \quad \text{et} \quad \boxminus T = T^3/\boxminus G'.$$

Cette proposition résulte des théorèmes 16 et 17 [2] si  $(G', T)$  est une catégorie topologique; la démonstration dans le cas où  $(G', T)$  est un graphe multiplicatif topologique est analogue à celle de ces théorèmes de [2].

*Foncteurs continus:*

*Définition 2:* Un néofoncteur (resp. un néofoncteur fortement)  $\theta$ -structuré est appelé néofoncteur prétopologique (resp. néofoncteur continu). Un foncteur  $\theta$ -structuré est dit continu.

Pour que  $((G'_1, T'_1), \mathfrak{p}, (G', T'))$  soit un néofoncteur prétopologique, il faut et il suffit que  $(G'_1, \mathfrak{p}, G')$  soit un néofoncteur et que

$$(T'_1, (\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}), \iota, T')$$

soit une application continue, où  $(G'_1, T'_1)$  et  $(G', T')$  sont des graphes prétopologiques.

Pour que  $((\hat{G}', \hat{T}'), \mathbf{p}, (G', T))$  soit un néofoncteur (resp. un foncteur) continu, il faut et il suffit que  $(\hat{G}', \hat{T}')$  et  $(G', T)$  soient des graphes multiplicatifs (resp. des catégories) topologiques, que  $(\hat{G}', \mathbf{p}, G')$  soit un néofoncteur et que  $(\hat{T}', \mathbf{p}, T)$  soit une application continue.

*Convention:* Nous désignons par  $\mathcal{N}'(\mathcal{T})$  la catégorie dont les éléments sont les néofoncteurs prétopologiques; par  $\overline{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})$  (resp. par  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ ) la catégorie dont les éléments sont les néofoncteurs (resp. les foncteurs) continus.

Soient  $\theta_{\mathcal{N}'}$  (resp.  $\theta_{\overline{\mathcal{N}'}}$ , resp.  $\theta_{\mathcal{F}}$ ) les foncteurs fidèles vers  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{N}'(\mathcal{T})$  (resp. de  $\overline{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})$ , resp. de  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ ) tels que:

$$\theta_{\mathcal{N}'}((G'_1, T'_1), q, (G', T')) = (G_1, q, G),$$

$$\theta_{\overline{\mathcal{N}'}}((G'_1, T'_1), q, (G', T)) = (G_1, q, G); \theta_{\mathcal{F}} = (\mathcal{M}, \theta_{\overline{\mathcal{N}'}} \iota, \mathcal{F}(\mathcal{T})).$$

*Proposition 3:*  $\theta_{\mathcal{N}'}$ ,  $\theta_{\overline{\mathcal{N}'}}$  et  $\theta_{\mathcal{F}}$  sont des foncteurs d'homomorphismes saturés résolvents à droite, à  $\mathcal{I}$ -produits et à  $\mathcal{I}$ -produits fibrés, si  $\mathcal{M}$  est à  $\mathcal{I}$ -produits.

1

En effet, cette proposition résulte des corollaires des théorèmes 10, 11 et 17, II [3]. Si, pour tout  $i \in I$ , on a

$$F_i = ((G', T), \mathbf{F}_i, (G'_i, T_i)) \in \overline{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})$$

on obtient

$$\bigvee_{i \in I} F_i = (\bigvee_{i \in I} (G', \mathbf{F}_i, G'_i), \bigvee_{i \in I} (T, \mathbf{F}_i, T_i)),$$

en posant  $\bigvee_{i \in I} (T, \mathbf{F}_i, T_i) = \prod_{i \in I} T_i / \bigvee_{i \in I} \mathbf{F}_i$  (notations n° 2, IV).

*Corollaire:* Si  $(G', T) \in \overline{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})_0$  (resp.  $\in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0$ ) et  $m = (T_0, \mathbf{m}, T') \in \mathcal{T}$ , on a

$$m^*(G', T) = (m^*(G')^*, m^*(T)) \in \overline{\mathcal{N}}'(\mathcal{T}) \text{ (resp. } \in \mathcal{F}(\mathcal{T})),$$

où  $m^*(G')^*$  est le graphe multiplicatif induit de  $G'$  par  $\theta(m)$  (déf. 14, IV) et où  $m^*(T) = (T' \times T' \times T') / m^*(G')$ .

2

Ce corollaire résulte du théorème 19, II [3].

*Définition 3:* Une  $\theta_{\mathcal{N}'}$ -sous-structure de  $(G', T') \in \mathcal{N}'(\mathcal{T})_0$  est appelée un sous-graphe multiplicatif prétopologique de  $(G', T')$ . Une  $\theta_{\overline{\mathcal{N}'}}$ - (resp. une  $\theta_{\mathcal{F}}$ -) sous-structure de  $(G', T) \in \overline{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})_0$  (resp.  $\in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0$ ) est appelée un sous-graphe multiplicatif (resp. une sous-catégorie) topologique de  $(G', T)$ .

Soit  $(G', T') \in \mathcal{N}'(\mathcal{T})_0$ . Pour que  $(G'_1, T'_1)$  soit un sous-graphe multiplicatif prétopologique de  $(G', T')$ , il faut et il suffit d'après le théorème 13-II [3] que  $G'_1$  soit un sous-graphe multiplicatif de  $G'$  et que l'on ait

$$T'_1 = T' / G'_1 \star G'_1.$$

*Proposition 4:* Soit  $(G^*, T) \in \overline{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})_0$  (resp.  $\in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0$ ). Pour que  $(G^*_1, T_1)$  soit un sous-graphe multiplicatif (resp. une sous-catégorie) topologique de  $(G^*, T)$ , il faut et il suffit que  $G^*_1$  soit un sous-graphe multiplicatif (resp. une sous-catégorie) de  $G^*$  et que  $T_1 = T/G_1$ .

*Démonstration:* Si  $(G^*, T) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0$ , la condition est suffisante d'après le théorème 11 [2]. — Si  $(G^*, T) \in \overline{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})_0$ , et si la condition est vérifiée, on a  $T_1 \times T_1 = T \times T/G_1 \times G_1$  et par suite, en posant

$$T_1 \star T_1 = T_1 \times T_1/G^*_1 \star G^*_1,$$

$T_1 \star T_1$  est une  $\theta$ -sous-structure de  $T \star T$ . Donc  $(G^*_1, T_1 \star T_1)$  est un sous-graphe multiplicatif prétopologique de  $(G^*, T \star T)$  et, en vertu du théorème 13, II [3],  $(G^*_1, T_1)$  est un sous-graphe multiplicatif topologique de  $(G^*, T)$ . — La condition de l'énoncé est évidemment nécessaire.

*Noyaux de catégories:*

*Définition 4:* On appelle noyau de catégorie un graphe multiplicatif topologique  $(G^*, T)$  vérifiant les conditions suivantes:

- 1)  $G^* \star G^* \in (T, \alpha, T) \vee (T, \beta, T)$ .
  - 2) Si  $h \cdot (g \cdot f)$  et  $(h \cdot g) \cdot f$  sont définis dans  $G^*$ , on a  $h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$ .
- On appelle noyau de groupoïde un noyau de catégorie  $(G^*, T)$  vérifiant de plus:
- 3) Si  $G^*_\gamma$  est la classe des  $g \in G$  tels que  $g$  admette un inverse unique dans  $G^*$ , on a  $G^*_\gamma \in T$ .

*Exemple:* Un noyau de groupoïde  $(G^*, T)$  tel que  $G^*$  admette une seule unité  $e$  est un noyau de groupe, au sens ordinaire.

*Proposition 5:* Soit  $(C^*, T)$  une catégorie (resp. un groupoïde) topologique et soit  $e \in C^*_0$ . Si  $G$  est un voisinage ouvert de  $e$  tel que  $\alpha(G) \cup \beta(G) \subset G$ , alors  $(G^*, T/G)$  est un noyau de catégorie (resp. de groupoïde); les voisinages de  $e$  de cette forme forment une base de voisinages de  $e$ .

*Démonstration:* Soit  $U$  un voisinage de  $e$  dans  $T$  et soit  $u = \overset{\circ}{U} \cap C^*_0$ . Comme  $u$  est un voisinage de  $e$  dans  $T_0$  et que les applications  $(T_0, \alpha, T)$  et  $(T_0, \beta, T)$  sont continues, l'ensemble

$$G = \overset{\circ}{U} \cap \alpha^{-1}(u) \cap \beta^{-1}(u),$$

où  $\overset{\circ}{U}$  désigne l'intérieur de  $U$ , est un voisinage ouvert de  $e$  dans  $T$  tel que  $u \subset G$ . Si  $f \in G$ , on a

$$\alpha(f) \in u \subset G \text{ et } \beta(f) \in u \subset G,$$

de sorte que  $G$  définit un sous-graphe multiplicatif de  $C^*$ . D'après la proposition 4,  $(G^*, T')$ , où  $T' = T/G$ , est un graphe multiplicatif topologique. La propriété 2 des noyaux de catégories est satisfaite dans  $G^*$ , car  $C^*$  vérifie l'axiome d'associativité. La classe  $(G, \alpha, G) \vee (G, \beta, G)$  est identique à

$$W = (C^* \star C^*) \cap (G \times G) \in T \star T.$$

Comme  $G' \star G' = W \cap \kappa^{-1}(G)$  et que  $(T, \kappa, T \star T)$  est une application continue, on a  $G' \star G' \in T \star T$ , donc  $(G', T')$  est un noyau de catégorie.

– Supposons de plus que  $(C', T)$  soit un groupoïde topologique. Soit  $I$  l'homéomorphisme de  $T$  sur  $T$  défini par  $f \rightarrow f^{-1}$ . Soit  $G'_\gamma$  la classe des  $g \in G$  tels qu'il existe un inverse de  $g$  dans  $G$ . Pour que  $g \in G$  appartienne à  $G'_\gamma$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$g' = I(g) \in G.$$

Il s'ensuit:  $G'_\gamma = G \cap I(G) \in T'$ . Par suite  $(G', T')$  est un noyau de groupoïde.

*Graphes multiplicatifs topologiques quotient:*

Soit  $\mathcal{H} = \mathcal{N}'(\mathcal{T})$  (resp.  $= \overline{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})$ , resp.  $= \mathcal{F}(\mathcal{T})$ ) et soit  $\hat{p}_{\mathcal{H}}$  le foncteur projection canonique de  $\mathcal{H}$  vers  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire le foncteur  $0_{\mathcal{N}'}$  (resp.  $0_{\overline{\mathcal{N}'}}$ , resp.  $0_{\mathcal{F}}$ ). Soit  $G'$  un graphe multiplicatif et soit  $r$  une relation d'équivalence sur  $G$ . Soit  $\tilde{r}$  la surjection canonique de  $G$  sur  $G/r$ . Soit

$$e = (G', T') \in \mathcal{H}_0 \text{ (resp. } e = (G', T) \in \mathcal{H}_0).$$

On dira que  $\hat{e}$  est un graphe multiplicatif *quasi-quotient prétopologique* de  $e$  par  $r$  si  $\hat{e}$  est une  $\hat{p}_{\mathcal{H}}$ -structure quasi-quotient de  $e$  par  $r$ . Rappelons [5] que ceci signifie: Il existe une relation d'équivalence  $r'$  sur  $G$  contenant  $r$  telle que

$$\hat{r}' = (\hat{e}, \tilde{r}', e) \in \mathcal{H}$$

et que, pour tout  $\hat{F} = (e_1, \mathbf{F}, e) \in \mathcal{H}$  tel que  $\mathbf{F}$  soit compatible avec  $r$  (i.e.  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \tilde{r}$ ), il existe un et un seul

$$\hat{F}' = (e_1, \mathbf{F}', \hat{e}) \in \mathcal{H} \text{ vérifiant } \hat{F} = \hat{F}' \cdot \hat{r}'.$$

On dira que  $\hat{e} = (\hat{G}', \hat{T}')$  (resp.  $= (\hat{G}', \hat{T})$ ) est un *graphe multiplicatif quotient prétopologique* (resp. *quotient topologique*, resp. *une catégorie quotient topologique*) *faible* de  $e$  par  $r$  si  $\hat{e}$  est une  $\hat{p}_{\mathcal{H}}$ -structure quotient faible de  $e$  par  $r$ , c'est-à-dire si les conditions précédentes sont vérifiées et si  $\hat{G}' = \tilde{r}'(G)$ ; dans ce cas, on a  $\hat{G}' = G'/r'$ . Enfin on appellera  $\hat{e}$  un *graphe multiplicatif quotient prétopologique* (resp. *quotient topologique*, resp. *une catégorie quotient topologique*) de  $e$  par  $r$  si on a de plus  $\hat{G}' = G/r$  (et par suite  $r' = r$ ).

*Proposition 6:* Si  $e = (G', T') \in \mathcal{N}'(\mathcal{T})_0$ , il existe un *graphe multiplicatif quotient prétopologique faible* de  $e$  par  $r$  de la forme  $(\hat{G}', \hat{T}')$ , où

$$\hat{G}' = G'/r' \text{ et } \hat{T}' = T'/r' \star r',$$

$r'$  étant la relation d'équivalence bicompatible sur  $G'$  engendrée par  $r$  et  $r' \star r'$  la relation induite par  $r' \times r'$  sur  $G' \star G'$ .

*Démonstration:* D'après le théorème 14-II [3],  $(\hat{G}', \hat{T}')$  est un *graphe multiplicatif quotient prétopologique* de  $(G', T)$  par  $r'$ , de sorte que

$$\hat{r}' = ((\hat{G}', \hat{T}'), \tilde{r}', e)$$

est une  $\theta_{\mathcal{N}'}$ -surjection. Si

$$\hat{F} = (e_1, \mathbf{F}, e) \in \mathcal{N}'(\mathcal{T})$$

et si  $\mathbf{F}$  est compatible avec  $r$ , alors  $\mathbf{F}$  est aussi compatible avec  $r'$ , car  $\mathbf{F}$  définit un néofoncteur. Donc il existe un et un seul

$$\hat{F}' \in \mathcal{N}'(\mathcal{T}) \text{ tel que } \hat{F} = \hat{F}' \cdot \hat{r}',$$

ce qui prouve l'affirmation.

*Corollaire:* Tout graphe multiplicatif quasi-quotient prétopologique  $\hat{e}'$  de  $e \in \mathcal{N}'(\mathcal{T})_0$  par  $r$  est un graphe multiplicatif quotient prétopologique faible de  $e$  par  $r$ .

Dans [3], nous avons montré que, si  $(G^*, T)$  est un graphe multiplicatif topologique et si  $r$  est une relation d'équivalence bicompatible sur  $G^*$ , le graphe multiplicatif prétopologique  $(G^*/r, T \star T/r \star r)$  n'est pas nécessairement un graphe multiplicatif topologique.

## 2. THÉORÈMES DE PROJECTION

*Catégories topologiques quotient:*

1 Nous supposons que  $\mathcal{M}_0$  est un univers [10] et qu'il existe une catégorie pleine d'applications  $\hat{\mathcal{M}}$  telle que  $\hat{\mathcal{M}}_0$  soit un univers et que  $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ . Soit  $\hat{\mathcal{T}}$  la catégorie des applications continues relatives à  $\hat{\mathcal{M}}$ .

2 *Théorème 1:*  $\mathcal{N}'(\mathcal{T})$  est une catégorie à  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ -projections, une  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}), \mathcal{N}'(\mathcal{T}))$ -projection de  $(G^*, T')$  étant de la forme  $(N(G^*), \bar{T})$ , où  $(N, \nu)$  est le foncteur  $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$ -projection canonique (th. 9, chap. III).

*Démonstration:* Soit  $e = (G^*, T') \in \mathcal{N}'(\mathcal{T})_0$  et  $I = \mathcal{F}(\mathcal{T})_0 \cdot \mathcal{N}'(\mathcal{T}) \cdot e$ . Si  $\bar{a}$  est le groupe topologique ayant pour seul élément une unité  $a$ , on a  $(\bar{a}, \mathbf{k}, e) \in I$ , si  $\mathbf{k}(f) = a$  pour tout  $f \in G$ . Si  $K^* \in \mathcal{N}'_0$ , on a  $\hat{\mathcal{M}}_0$  étant un univers admettant  $\mathcal{M}_0$  pour élément:

$$K^* = (K, \kappa(K^*)) \in \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}, \text{ d'où } \mathcal{N}'_0 \subset \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M} \in \hat{\mathcal{M}}_0.$$

Par ailleurs,  $T'' \in \mathcal{T}_0$  et  $M = \theta(T'')$  entraîne

$$T'' \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) \in \mathcal{M}_0, \text{ i.e. } \mathcal{T}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0.$$

Il s'ensuit

$$\mathcal{N}'(\mathcal{T})_0 \subset \mathcal{N}'_0 \times \mathcal{T}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0 \text{ et } \mathcal{N}'(\mathcal{T}) \subset \mathcal{N}'(\mathcal{T})_0 \times \mathcal{M}_0^3 \times \mathcal{N}'(\mathcal{T})_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0;$$

par suite  $I \in \hat{\mathcal{M}}_0$ , de sorte que (prop. 3) la famille  $(\beta(h))_{h \in I}$  admet un produit  $(\hat{G}^*, \hat{T})$  dans  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}})$ . Soit  $\nu$  l'application  $f \rightarrow (h(f))_{h \in I}$  de  $G$  dans  $\hat{G}$ . Soit  $\hat{G}^*$  la sous-catégorie de  $\hat{G}^*$  engendrée par  $\nu(G)$ . D'après la proposition 4, on a, si  $\hat{T} = \hat{T}/\hat{G}$ :

$$\hat{e} = (\hat{G}^*, \hat{T}) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}})_0 \text{ et } \hat{v} = ((\hat{G}^*, \hat{T}), \nu, e) \in \mathcal{N}'(\hat{\mathcal{T}}).$$



Les conditions

$$F_1 \cdot \hat{v} = F_2 \cdot \hat{v} \text{ et } F_i = (e_1, \mathbf{F}_i, \hat{e}) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0 \cdot \mathcal{N}'(\mathcal{T})$$

entraînent

$$\mathbf{F}_1(k) = \mathbf{F}_2(k) \text{ pour tout } k \in v(G);$$

puisque  $\hat{G}^*$  est la sous-catégorie de  $\tilde{G}^*$  engendrée par  $v(G)$  et que  $\mathbf{F}_i$  définit un foncteur, il s'ensuit  $F_1 = F_2$ . — On a :

$$(((G^*_0 \times G^*_0)^\perp, T_0 \times T_0), [\beta, \alpha], e) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0 \cdot \mathcal{N}'(\mathcal{T}),$$

où  $(G^*_0 \times G^*_0)^\perp$  est le groupoïde des couples associé à  $G^*_0$  (ex. 2, chap. I). Par suite la restriction  $v_0$  de  $v$  à  $G^*_0$  est une bijection sur  $\hat{G}^*_0$ . — Soit  $L[G^*]$  la catégorie libre des chemins du graphe  $[G^*]$  sous-jacent à  $G^*$  (on identifie  $G$  à une sous-classe de  $L[G^*]$ ). Le foncteur unique  $L(\hat{v})$  de  $L[G^*]$  vers  $\hat{G}^*$  (th. 8, chap. III) tel que

$$(\hat{G}^*, \mathbf{v}, G^*) = L(\hat{v}) \cdot (L[G^*], \iota, G^*)$$

est défini par la surjection

$$(f_n, \dots, f_1) \rightarrow v(f_n) \cdot \dots \cdot v(f_1)$$

de  $L[G^*]$  sur  $\hat{G}^*$ . Il est donc surjectif. La restriction de  $L(\hat{v})$  à  $G^*_0$  étant une bijection sur  $\hat{G}^*_0$ , le foncteur  $L(\hat{v})$  définit  $\hat{G}^*$  comme catégorie quotient strict de  $L[G^*]$ . Il en résulte que l'application  $\mathbf{g}$  :

$$v(f) \rightarrow f \text{ mod } \varrho, \text{ où } f \in G,$$

définit un isomorphisme de  $G^*$  sur la catégorie  $C^*$  quotient strict de  $L[G^*]$  par la relation d'équivalence  $\varrho$  associée à  $L(\hat{v})$ . Soit :

$$\hat{g} = ((C^*, T_1), \mathbf{g}, (\hat{G}^*, \hat{T})) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}})_{\nu},$$

où  $T_1$  est la topologie image de  $\hat{T}$  par  $\mathbf{g}$ . Etant donné que  $\mathcal{M}_0$  est un univers, on a  $L[G^*] \in \mathcal{M}_0$ , et par conséquent  $C \in \mathcal{M}_0$ ; on en déduit :

$$\hat{v}' = \hat{g} \cdot \hat{v} \in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0 \cdot \mathcal{N}'(\mathcal{T}).$$

Les conditions

$$F'_i \in \mathcal{F}(\mathcal{T}) \text{ et } F'_1 \cdot \hat{v}' = F'_2 \cdot \hat{v}'$$

ont pour conséquence

$$(F'_1 \cdot \hat{g}) \cdot \hat{v} = (F'_2 \cdot \hat{g}) \cdot \hat{v}, \text{ d'où } F'_1 = F'_2,$$

d'après le début de la démonstration. — Enfin, soit  $h \in I$  et soit  $p_h$  le foncteur continu projection canonique du produit  $(\hat{G}^*, \hat{T})$  sur  $\beta(h)$ . On a

$$h = p_h \cdot ((\hat{G}^*, \hat{T}), \mathbf{v}, e) = p_h \cdot ((\hat{G}^*, \hat{T}), \iota, (\hat{G}^*, \hat{T})) \cdot \hat{v} = h' \cdot \hat{v}',$$

où

$$h' = p_h \cdot ((\hat{G}^*, \hat{T}), \iota, (\hat{G}^*, \hat{T})) \cdot \hat{g}^{-1} \in \mathcal{F}(\mathcal{T}).$$

Ainsi  $\hat{v}'$  est un  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}), \mathcal{N}'(\mathcal{T}))$ -projecteur et  $\mathcal{N}'(\mathcal{T})$  est une catégorie à  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ -projections.

– Montrons que la catégorie  $C^*$  construite ci-dessus est isomorphe à  $N(G^*)$ , i.e. est une  $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$ -projection de  $G^*$ . En effet, soit

$$\varphi = (K^*, \boldsymbol{\varphi}, G^*) \in \mathcal{F}_0 \cdot \mathcal{N}'.$$

On a, si  $K_g$  représente la topologie grossière sur  $K$ :

$$\hat{\varphi} = ((K^*, K_g), \boldsymbol{\varphi}, e) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0 \cdot \mathcal{N}'(\mathcal{T}).$$

Nous avons vu qu'il existe un et un seul

$$\hat{\varphi}' = ((K^*, K_g), \boldsymbol{\varphi}', (C^*, T_1)) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$$

tel que  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}' \cdot \hat{e}'$ . Ceci signifie que

$$\varphi' = (K^*, \boldsymbol{\varphi}', C^*) \in \mathcal{F}$$

est l'unique foncteur tel que

$$\varphi = \varphi' \cdot (C^*, \mathbf{v}', G^*).$$

Donc  $C^*$  est isomorphe à  $N(G^*)$  et,  $\theta_{\mathcal{F}}$  étant un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe une catégorie topologique  $(N(G^*), \bar{T})$  isomorphe à  $(C^*, T_1)$ , qui est une  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}), \mathcal{N}'(\mathcal{T}))$ -projection de  $e$ ; on posera:  $N(T) = \bar{T}$ .

*Corollaire 1: Si  $(C^*, T')$  est un graphe multiplicatif prétopologique et si  $C^*$  est une catégorie, alors  $(C^*, T')$  admet une  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}), \mathcal{N}'(\mathcal{T}))$ -projection de la forme  $(C^*, T_1)$ .*

En effet, dans ce cas  $N(C^*)$  est isomorphe à  $C^*$  et le corollaire résulte du théorème 1, la topologie  $T_1$  étant moins fine que la topologie image de la topologie induite par  $T'$  sur la classe des couples  $(f, \alpha(f))$ , où  $f \in G$ .

*Corollaire 2: Soit  $e = (C^*, T)$  une catégorie topologique et soit  $r$  une relation d'équivalence sur  $C$ . Il existe une catégorie quasi-quotient topologique de  $e$  par  $r$  de la forme  $(N(C^*/r'), N(T/r'))$ , où  $r'$  est la relation d'équivalence bicompatible sur  $C^*$  engendrée par  $r$ .*

En effet,  $e$  admet  $\hat{e} = (C^*/r', T \star T/r' \star r')$  pour graphe multiplicatif quotient prétopologique faible par  $r$  d'après la proposition 6, et la  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}), \mathcal{N}'(\mathcal{T}))$ -projection  $N(\hat{e})$  de  $\hat{e}$  est une catégorie quasi-quotient de  $e$  par  $r$ , par définition d'une structure quasi-quotient et du théorème 7, chap. III.

*Corollaire 3: Soit  $e = (C^*, T)$  une catégorie topologique et soit  $r$  une relation d'équivalence sur  $C$  telle qu'il existe une catégorie quotient  $\hat{C}^*$  (resp. quotient strict) de  $C^*$  par  $r$ . Alors  $e$  admet une catégorie topologique quotient par  $r$ , de la forme  $(\hat{C}^*, T_1)$  (resp. forme  $(C^*/r, T_1)$ ).*

En effet,  $N(C^*/r)$  est isomorphe à  $\hat{C}^*$  (resp. à  $C^*/r$ ) d'après le théorème 10, chap. III, de sorte que le corollaire 3 se déduit du corollaire 2.

*Corollaire 4: Si  $\hat{j} = ((\hat{C}^*, \hat{T}), \mathbf{j}, (C^*, T))$  est une  $\theta_{\mathcal{F}}$ -surjection,  $j = (\hat{C}^*, \mathbf{j}, C^*)$  est un  $p_{\mathcal{F}}$ -épimorphisme.*

En effet, supposons  $\varphi = (K^*, \varphi, C^*) \in \mathcal{F}$  et  $(K, \varphi, C) = (K, \varphi_1, \hat{C}) \cdot (\hat{C}, j, C)$ . Comme  $\hat{\varphi} = ((K^*, K_g), \varphi, (C^*, T)) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$  et que  $\hat{j}$  est une  $\theta_{\mathcal{F}}$ -surjection, on a

$$((K^*, K_g), \varphi_1, (\hat{C}^*, \hat{T})) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}), \text{ d'où } (K^*, \varphi_1, \hat{C}^*) \in \mathcal{F}.$$

Donc  $j$  est une  $p_{\mathcal{F}}$ -surjection et par suite (th. 3 [1]) un  $p_{\mathcal{F}}$ -épimorphisme.

Avec les hypothèses du corollaire 3, la topologie  $T_1$  est moins fine que la topologie  $T/r$  quotient de  $T$  par  $r$ . Elle est identique à  $T/r$  dans certains cas, par exemple (th. 21, II [3]) si  $r$  est une relation d'équivalence fermée et si  $T$  est séparée (resp. si  $r$  est une relation d'équivalence élémentaire, c'est-à-dire qui induit la relation identique sur  $C^*_0$ ), et si  $r$  est ouverte. 1

*Proposition 7:* Si  $e = (G^*, T') \in \mathcal{N}'(\mathcal{T})_0$ , il existe une  $(\bar{\mathcal{N}}'(\mathcal{T}), \mathcal{N}'(\mathcal{T}))$ -projection de  $e$  de la forme  $(G^*, T_1)$ .

*Démonstration:* Soit  $I = \bar{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})_0 \cdot \mathcal{N}'(\mathcal{T}) \cdot e$ . On voit comme au théorème 1 que  $I \neq \emptyset$  et que  $I \in \hat{\mathcal{M}}_0$ , de sorte que  $(\beta(h))_{h \in I}$  admet un produit  $(\tilde{G}^*, \tilde{T})$  dans  $\mathcal{N}'(\hat{\mathcal{T}})$ . Désignons par  $v$  l'application  $x \rightarrow (h(x))_{h \in I}$  de  $G$  dans  $\tilde{G}$ . D'après la proposition 3,  $(\tilde{G}^*, \tilde{T})$  est un graphe multiplicatif topologique. Comme  $h$  est un néofoncteur,  $v(G)$  définit un sous-graphe multiplicatif de  $\tilde{G}^*$  et  $(v(G)^*, \tilde{T}/v(G))$  est un graphe multiplicatif topologique (prop. 4). Puisque

$$((G^*, G_g), \iota, (G^*, T')) \in \bar{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})_0 \cdot \mathcal{N}'(\mathcal{T}),$$

l'application  $\mathbf{v}$  est une bijection de  $G$  sur  $v(G)$ . Donc  $(G^*, T_1) \in \bar{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})$ , où  $T_1$  est la topologie image de  $\tilde{T}/v(G)$  par  $\mathbf{v}^{-1}$ . Il est évident que

$$((G^*, T_1), \iota, (G^*, T)) \in \mathcal{N}'(\mathcal{T})$$

est un  $(\bar{\mathcal{N}}'(\mathcal{T}), \mathcal{N}'(\mathcal{T}))$ -projecteur.

*Corollaire:* Si  $(G^*, T) \in \bar{\mathcal{N}}'(\mathcal{T})_0$  et si  $r$  est une relation d'équivalence bicompatible sur  $G^*$ , il existe un graphe multiplicatif quotient topologique de  $(G^*, T)$  par  $r$ , de la forme  $(G^*/r, T_1)$ .

En effet,  $(G^*/r, T_1)$  est la  $(\bar{\mathcal{N}}'(\mathcal{T}), \mathcal{N}'(\mathcal{T}))$ -projection du graphe multiplicatif quotient prétopologique (prop. 6)  $(G^*/r, T \star T/r \star r)$  de  $(G^*, T)$  par  $r$ .

*Remarque:* Le théorème 1 est énoncé dans [5]. Il est obtenu dans [1] ainsi que ses corollaires et la proposition 7, comme cas particuliers de théorèmes généraux sur l'existence de catégories  $p$ -structurées quasi-quotient d'un graphe multiplicatif  $p$ -structuré, lorsque  $p$  est un foncteur  $\dashv$ -étalant admettant une section maximale. 2

*Catégories topologiques séparées ou compactes:*

Nous supposons dans cette section que  $\mathcal{M}_0$  est un univers, que  $\hat{\mathcal{M}}$  est une catégorie pleine d'applications telle que  $\hat{\mathcal{M}}_0$  soit un univers et que l'on a  $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ . Soit encore  $\hat{\mathcal{T}}$  la catégorie des applications continues relative à  $\hat{\mathcal{M}}$ . Soit  $\hat{\mathcal{T}}^s$  la sous-catégorie pleine de  $\hat{\mathcal{T}}$  ayant pour unités les topologies séparées et soit  $\mathcal{T}^s = \mathcal{T} \cap \hat{\mathcal{T}}^s$ . Soit  $\hat{\mathcal{T}}^c$  la sous-catégorie pleine

de  $\hat{\mathcal{F}}$  ayant pour unités les topologies compactes et soit  $\mathcal{T}^c = \mathcal{T} \cap \hat{\mathcal{F}}^c$ . Si  $i=s$  ou  $c$ , désignons par  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{F}}^i)$  (resp. par  $\mathcal{F}(\mathcal{T}^i)$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{F}})$  (resp. de  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ ) ayant pour unités les catégories topologiques  $(C^*, T)$  telles que  $T \in \hat{\mathcal{F}}^i$ .

1 *Théorème 2:* Soit  $e=(C^*, T) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0$ . Il existe une  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}^s), \mathcal{F}(\mathcal{T}))$ -projection de  $e$  et une  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}^c), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{F}}^c), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{F}}))$ -projection de  $e$  (déf. [5]).

*Démonstration:* Soit  $i=s$  ou  $c$ . Posons  $I = \mathcal{F}(\mathcal{T}^i)_0 \cdot \mathcal{F}(\mathcal{T}) \cdot e$ . Le début de la démonstration du théorème 1 montre que  $I \neq \emptyset$  et que  $I \in \hat{\mathcal{M}}_0$ , de sorte que  $(\beta(h))_{h \in I}$  admet un produit  $(\hat{C}^*, \hat{T})$  dans  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{F}})$ . Désignons par  $v$  l'application

$$x \rightarrow (h(x))_{h \in I} \text{ de } C \text{ dans } \hat{C}.$$

— Supposons  $i=s$  et soit  $C^*_s$  la sous-catégorie de  $C^*$  engendrée par  $v(C)$ . D'après les propositions 3 et 4,  $(C^*_s, \hat{T}/C_s)$  est une catégorie topologique  $e_s$ . Comme  $\hat{T}$  est séparée,  $\hat{T}/C_s$  est séparée, de sorte que l'on a:

$$\hat{v}_s = (e_s, \mathbf{v}, e) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{F}}^s)_0 \cdot \mathcal{F}(\hat{\mathcal{F}}).$$

— Soit  $r_0$  la relation d'équivalence sur  $C^*_0$  telle que

$$x \sim x' \text{ si, et seulement si, } \bar{h}(x) = \bar{h}(x') \text{ lorsque } h = (e_1, \mathbf{h}, e) \in I.$$

Soit  $M(C)^*$  le monoïde libre associé à  $C$  (nous identifions  $C$  à une sous-classe de  $M(C)$ ). Soit  $\hat{M}(C)$  la sous-classe de  $M(C)$  ayant pour éléments les suites

$$(x_n, \dots, x_1) \in C^n \text{ telles que } \alpha(x_{i+1}) \sim \beta(x_i) \text{ mod } r_0, \text{ si } 1 < i < n.$$

L'application  $u$ :

$$(x_n, \dots, x_1) \rightarrow (h(x_n) \cdot \dots \cdot h(x_1))_{h \in I}$$

définit un homomorphisme de la sous-classe multiplicative  $\hat{M}(C)^*$  de  $M(C)^*$  sur  $C^*_s$ . On a  $\hat{M}(C) \in \mathcal{M}_0$ , car  $\mathcal{M}_0$  est un univers, d'où

$$\hat{M}(C) \in \mathcal{M}_0 \text{ et } \hat{C} = \hat{M}(C)/r \in \mathcal{M}_0,$$

en désignant par  $r$  la relation d'équivalence sur  $\hat{M}(C)$  associée à  $u$ . L'application  $y \text{ mod } r \rightarrow u(y)$  définit une bijection  $\mathbf{g}$  de  $\hat{C}$  sur  $C_s$ . Par conséquent, il existe

$$\hat{g} = (e_s, \mathbf{g}, (\hat{C}^*, \hat{T})) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{F}})_\gamma \cdot \mathcal{F}(\mathcal{T}^s)_0.$$

Un raisonnement analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème 1 montre que  $\hat{g}^{-1} \cdot \hat{v}_s$  est un  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}^s), \mathcal{F}(\mathcal{T}))$ -projecteur.

— Supposons  $i=c$ . Soit  $Q$  la classe de toutes les sous-classes  $G$  de  $\hat{C}$  telles que  $v(C) \subset G$ , que  $G$  soit fermé pour  $\hat{T}$  et que  $G$  définisse une sous-catégorie de  $\hat{C}^*$ . Si  $G \in Q$ , la topologie  $\hat{T}/G$  est compacte, car induite par la topologie  $\hat{T}$  sur le fermé  $G$  et que  $\hat{T}$  est compacte, étant le produit de topologies compactes. En posant  $C_c = \bigcap Q$ , on a  $C_c \in Q$ . Il s'ensuit:

$$e_c = (C^*_c, \hat{T}/C_c) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{F}}^c) \text{ et } \hat{v}_c = (e_c, \mathbf{v}, e) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{F}}).$$

— Supposons

$$\hat{F}_1 \cdot \hat{v}_c = \hat{F}_2 \cdot \hat{v}_c, \text{ où } \hat{F}_i = (e', \mathbf{F}_i, e_c) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^c)_0 \cdot \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}), \quad i = 1, 2.$$

Soit  $G$  la classe des  $x \in C_c$  tels que  $\mathbf{F}_1(x) = \mathbf{F}_2(x)$ . On a  $v(C) \subset G$ . Comme  $\mathbf{F}_i$  définit une application continue vers une topologie séparée,  $G$  est fermé pour  $\hat{T}/C_c$ , et par suite pour  $\hat{T}$ . Puisque  $\mathbf{F}_i$  définit un foncteur,  $G^*$  est une sous-catégorie de  $C_c^*$ , donc aussi de  $\hat{C}^*$ . Il en résulte  $G \in Q$ , ce qui entraîne par construction  $G = C_c$ . Ainsi  $\hat{F}_1 = \hat{F}_2$ . — Si  $h \in I$ , on a, en désignant par  $p_h$  la projection canonique du produit  $(\hat{C}^*, \hat{T})$  sur  $\beta(h)$ :

$$h = p_h \cdot ((\hat{C}^*, \hat{T}), \mathbf{v}, e) = h' \cdot \hat{v}_c,$$

où

$$h' = p_h \cdot ((\hat{C}^*, \hat{T}), \iota, e_c) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^c).$$

Ceci prouve que  $\hat{v}_c$  est un  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}^c), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^c), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}))$ -projecteur.

*Remarque:* Le théorème 3 n'entraîne pas que  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$  est une catégorie à  $\mathcal{F}(\mathcal{T}^c)$ -projections, car nous n'avons pas montré que la classe  $C_c$  construite dans la démonstration précédente appartient à la saturante de  $\mathcal{M}$  dans  $\hat{\mathcal{M}}$ .

*Complétion des catégories topologiques:*

Soit  $\mathcal{U}_0$  la classe des structures uniformes sur des classes  $M$  de  $\mathcal{M}_0$  et soit  $\tau_0$  l'application:  $U \rightarrow \tau(U)$  qui associe à  $U \in \mathcal{U}_0$  la topologie  $\tau(U)$  sous-jacente. Soit  $\mathcal{U}$  la catégorie des applications uniformes entre éléments de  $\mathcal{U}_0$  et soit  $\tau$  son foncteur projection canonique vers  $\mathcal{T}$ . Soit  $\bar{p}_{\mathcal{T}}$  le foncteur projection de  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$  vers  $\mathcal{T}$  et soit  $\mathcal{F}(\mathcal{T}^u)$  la catégorie produit fibré  $\tau \vee \bar{p}_{\mathcal{T}}$ ; soit  $q$  son foncteur projection canonique vers  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ . Le couple

$$((U', \mathbf{f}, U), ((C'', T'), \mathbf{f}, (C^*, T))) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}^u), \text{ où } T = \tau(U) \text{ et } T' = \tau(U'),$$

sera identifié à l'élément  $((C'', U'), \mathbf{f}, (C^*, U))$  et les unités de  $\mathcal{F}(\mathcal{T}^u)$  seront identifiées aux couples  $(C^*, U)$  tels que

$$U \in \mathcal{U}_0 \text{ et } (C^*, \tau(U)) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0.$$

Soit  $\mathcal{F}(\mathcal{T}^{uc})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}(\mathcal{T}^u)$  ayant pour unités les couples  $(C^*, U)$  tels que  $U$  soit une structure uniforme complète séparée.

Désignons de même par  $\hat{q} = (\mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}), \hat{\mathbf{q}}, \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^u))$  et par  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^{uc})$  les foncteur et sous-catégorie relatifs à la catégorie pleine d'applications  $\hat{\mathcal{M}}$ .

*Théorème 3:*  $q$  admet un foncteur adjoint [8]. Tout  $e \in \mathcal{F}(\mathcal{T}^u)_0$  admet une  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}^{uc}), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^{uc}), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^u))$ -projection.

1+

*Démonstration:* Soit  $e = (C^*, T) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0$ . Soit  $I$  la classe des triplets  $\hat{h} = ((G^*, U), \mathbf{h}, e)$  tels que  $(G^*, U) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}^u)_0$  et  $((G^*, \tau(U)), \mathbf{h}, e) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ .

$I$  contient en particulier le triplet

$$((\bar{a}, U_a), \mathbf{k}, e),$$

où  $\bar{a}$  est le groupe topologique ayant  $a$  pour seule unité, et où  $\mathbf{k}(x)=a$  pour tout  $x \in C$ . Une structure uniforme  $U$  sur  $G$  étant un élément de  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(G \times G)) \in \mathcal{M}_0$ , on a  $\mathcal{U}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ , d'où  $I \in \hat{\mathcal{M}}_0$ , car

$$I \subset ((\mathcal{N}'_0 \times \mathcal{U}_0) \times \mathcal{M} \times (\mathcal{N}'_0 \times \mathcal{T}_0)).$$

Il s'ensuit que la famille  $(\beta(h))_{h \in I}$  admet un produit  $(\tilde{G}^*, \tilde{U})$  dans  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^u)$ , puisque  $\hat{\mathcal{U}}$  et  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}})$  sont des catégories à  $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits et que, par suite (th. 10 chap. IV),  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^u)$  est une catégorie à  $\hat{\mathcal{M}}_0$ -produits. Soit  $v$  l'application

$$x \rightarrow (h(x))_{h \in I} \text{ de } C \text{ dans } \tilde{G}^*.$$

Soit  $\tilde{G}^*$  la sous-catégorie de  $\tilde{G}^*$  engendrée par  $v(C)$  et soit  $\tilde{U}$  la structure uniforme induite par  $\tilde{U}$  sur  $\tilde{G}^*$ ; on a

$$\hat{e} = (\tilde{G}^*, \tilde{U}) \in \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^u)_0.$$

Une démonstration analogue à la première partie de celle du théorème 2 montre qu'il existe

$$\hat{g} = (\hat{e}', \mathbf{g}, \hat{e}) \in \mathcal{F}(\mathcal{T}^u)_0 \cdot \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}})_\gamma,$$

et que  $(\hat{e}', \mathbf{g}, \hat{e}) \in I$  est un  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}^u), \mathcal{L}(\mathcal{T}^u))$ -projecteur, en notant  $\mathcal{L}(\mathcal{T}^u)$  la catégorie associée aux foncteurs  $q$  et  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}), \iota, \mathcal{F}(\mathcal{T}))$  par la prop. 36, chap. II (p. 89). Ceci signifie (app. I) qu'il existe un foncteur adjoint  $q'$  de  $q$  tel que  $q'(e) = \hat{e}'$ .

— Supposons  $e' = (K^*, U') \in \mathcal{F}(\mathcal{T}^u)_0$  et soit  $I' = \mathcal{F}(\mathcal{T}^{uc})_0 \cdot \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^u) \cdot e'$ . On a comme plus haut  $\phi \neq I' \in \hat{\mathcal{M}}_0$ . Tout produit de structures uniformes complètes étant une structure uniforme complète, la famille  $(\beta(h))_{h \in I'}$ , admet un produit  $(\tilde{K}^*, \tilde{U}')$  dans  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^{uc})$ . Une démonstration semblable à la fin de celle du théorème 2 prouve que  $e'$  admet  $(\tilde{K}^*, \tilde{U}'/\tilde{K})$  pour  $(\mathcal{F}(\mathcal{T}^{uc}), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^{uc}), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{T}}^u))$ -projection, si  $\tilde{K}$  est l'intersection de toutes les sous-classes  $N$  de  $\tilde{K}$  qui sont fermées pour  $\tau(\tilde{U}')$  et qui définissent une sous-catégorie de  $\tilde{K}^*$ , et si  $\tilde{U}'/\tilde{K}$  représente la structure uniforme induite par  $\tilde{U}'$  sur  $\tilde{K}$ .

*Remarque:* Les théorèmes 2 et 3 peuvent se déduire du théorème général d'existence de structures quasi-quotient énoncé dans [5] (et démontré dans [1]).

(\*) La surjection définissant un foncteur ou une application  $F$ , qui est notée  $\underline{F}$  dans "Catégories et structures", est désignée ici par le symbole  $\mathbf{F}$ .

CATÉGORIES TOPOLOGIQUES. II

PAR

CHARLES EHRESMANN

*Dédié à Monsieur H. Freudenthal,  
à l'occasion de son soixantième anniversaire*

(Communicated by Prof. N. H. KUIPER at the meeting of October 30, 1965)

3. CATÉGORIES MICROTRANSITIVES

Soit  $\mathcal{F}^v$  la sous-catégorie de  $\mathcal{F}$  formée des applications ouvertes.

*Définition 5:* On appelle groupoïde microtransitif un groupoïde  $\theta(\mathcal{F}^v, \mathcal{F})$ -structuré. Une catégorie topologique  $(C^*, T)$  telle que  $(C^*_\gamma, T_\gamma)$  soit un groupoïde microtransitif est appelée catégorie microtransitive.

Soit  $C^*$  une catégorie; dire que  $(C^*, T)$  est une catégorie  $\theta(\mathcal{F}^v, \mathcal{F})$ -structurée signifie [2] que c'est une catégorie topologique telle que l'application  $(T_0 \times T_0, [\beta, \alpha], T)$  soit ouverte.

*Proposition 8:* Soit  $(C^*, T)$  une catégorie topologique. Pour que  $(C^*, T)$  soit microtransitive, il faut et il suffit que  $(C^*_\gamma, T_\gamma)$  soit un groupoïde topologique et que, pour tout  $e \in C^*_0$ , la classe  $\beta(U \cdot e)$  soit un voisinage de  $e$  dans  $T_0$ , si  $e \in U \in T_\gamma$ . Dans ce cas,  $(C^*, T)$  est une catégorie  $\theta(\mathcal{F}^v, \mathcal{F})$ -structurée.

*Démonstration:* Supposons  $(C^*, T)$  microtransitive.  $(C^*_\gamma, T_\gamma)$  est un groupoïde topologique. Soit  $e \in C^*_0$  et  $e \in U \in T_\gamma$ . Posons  $u = \beta(U \cdot e)$ , et soit  $x \in u$ . On a  $(x, e) \in [\beta, \alpha](U)$  et, comme  $[\beta, \alpha](U) \in T_0 \times T_0$ , car  $(C^*_\gamma, T_\gamma)$  est microtransitif, il existe un voisinage  $u'$  de  $x$  dans  $T_0$  tel que

$$u' \times \{e\} \subset [\beta, \alpha](U).$$

Il en résulte  $u' \subset u$ , de sorte que  $u \in T_0$ . — Inversement supposons la condition de l'énoncé vérifiée. Soit  $V \in T$  et

$$(e', e) \in [\beta, \alpha](V).$$

Il existe  $f \in e' \cdot V \cdot e$ . Puisque  $f \cdot e = f$  et que  $\varkappa$  est continue de  $T \star T$  dans  $T$ , il existe un voisinage  $U$  de  $e$  dans  $T$  et un voisinage  $V'$  de  $f$  dans  $T$  tels que  $V' \cdot U \subset V$ . La relation  $e' \cdot f = f$  assure l'existence d'un voisinage  $U'$  de  $e'$  dans  $T$  tel que  $U' \cdot f \subset V'$ . Comme  $(C^*_\gamma, T_\gamma)$  est un groupoïde topologique, il existe un voisinage ouvert  $U_\gamma$  de  $e$  dans  $T_\gamma$  tel que  $U_\gamma = U_\gamma^{-1} \subset U \cap C^*_\gamma$ ; soit  $U'_\gamma = U' \cap C^*_\gamma$ . Par hypothèse

$$u = \beta(U_\gamma \cdot e) \text{ et } u' = \beta(U'_\gamma \cdot e')$$

sont des voisinages de  $e$  et  $e'$  respectivement dans  $T_0$ . Si  $(x', x) \in u' \times u$ , il existe

$$g \in x \cdot U_\gamma \cdot e \text{ et } g' \in x' \cdot U'_\gamma \cdot e'.$$

On en déduit

$$g' \cdot f \cdot g^{-1} \in U'_\gamma \cdot f \cdot U_\gamma \subset V' \cdot U \subset V$$

et  $[\beta, \alpha](g' \cdot f \cdot g^{-1}) = (x', x)$ . Ainsi

$$u' \times u \subset [\beta, \alpha](V).$$

Donc  $[\beta, \alpha]$  est une application ouverte de  $T$  dans  $T_0 \times T_0$  et  $(C^*, T)$  est une catégorie  $\theta(\mathcal{T}^v, \mathcal{T})$ -structurée. Enfin le raisonnement précédent appliqué à  $(C^*_\gamma, T_\gamma)$  montre que  $(C^*_\gamma, T_\gamma)$  est un groupoïde microtransitif.

Soit  $\mathcal{F}^m(\mathcal{T})$  (resp.  $\mathcal{F}'(\mathcal{T})$ ) la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$  ayant pour unités les catégories topologiques microtransitives (resp. topologiques  $(C^*, T)$  telles que  $(C^*_\gamma, T_\gamma)$  soit un groupoïde topologique).

*Théorème 4:*  $Un (C^*, T) \in \mathcal{F}'(\mathcal{T})_0$  admet  $(C^*, \hat{T})$  pour  $(\mathcal{F}'(\mathcal{T}), \mathcal{F}^m(\mathcal{T}))$ -éjection, où  $\hat{T}$  est la topologie telle qu'une base de voisinages de  $f$  soit formée des  $U' \cdot W \cdot U$  vérifiant:

$$\alpha(f) \in U \in T_\gamma, \quad \beta(f) \in U' \in T'_\gamma \text{ et } f \in W \in T / \beta(f) \cdot C \cdot \alpha(f).$$

*Démonstration:* Les classes de la forme  $U' \cdot W \cdot U$  indiquée forment une base de filtre  $B(f)$  de  $C$ . Soit  $\alpha(f) = e$ ,  $\beta(f) = e'$  et  $U' \cdot W \cdot U \in B(f)$ . Il existe  $U_1 \in T_\gamma$  et  $U'_1 \in T'_\gamma$  tels que

$$e \in U_1 = U_1^{-1}, \quad e' \in U'_1 = U'^{-1}_1, \quad U_1 \cdot U_1 \subset U \text{ et } U'_1 \cdot U'_1 \subset U',$$

car  $(C^*_\gamma, T_\gamma)$  est un groupoïde topologique, et on a  $U'_1 \cdot W \cdot U_1 \in B(f)$ . Soit  $k \in U'_1 \cdot W \cdot U_1$ ; il existe

$$g \in U_1 \text{ et } g' \in U'_1 \text{ tels que } k \in g' \cdot W \cdot g.$$

La surjection  $h \rightarrow g'^{-1} \cdot h \cdot g^{-1}$ , où  $h \in \beta(k) \cdot C \cdot \alpha(k)$ , définit une application continue de  $T_1 = T / \beta(k) \cdot C \cdot \alpha(k)$  dans  $T / e' \cdot C \cdot e$ , de sorte qu'il existe  $W_1 \in T_1$  tel que

$$k \in W_1 \subset g' \cdot W \cdot g.$$

Il s'ensuit  $U'_1 \cdot W_1 \cdot U_1 \in B(k)$  et

$$U'_1 \cdot W_1 \cdot U_1 \subset U'_1 \cdot U'_1 \cdot W \cdot U_1 \cdot U_1 \subset U' \cdot W \cdot U.$$

Ainsi le filtre engendré par  $B(f)$  vérifie l'axiome  $V_{IV}$  des filtres de voisinages, et par suite il existe une topologie  $\hat{T}$  sur  $C$  admettant ce filtre pour filtre des voisinages de  $f$ .

— Montrons que  $(C^*, \hat{T})$  est une catégorie topologique. En effet, soit  $f \in e' \cdot C \cdot e$  et  $U' \cdot W' \cdot U \in B(e)$ . Si  $e' \in U'' \in T_\gamma$ , on a, en posant  $M = U'' \cdot (e' \cdot C \cdot e) \cdot (U \cap U'^{-1})$ :

$f \in M \in B(f)$  et

$$\alpha(M) \subset \alpha(e \cdot U \cap U'^{-1}) \subset (U \cap U'^{-1})^{-1} \cdot e \cdot (U \cap U'^{-1}) \subset U' \cdot W' \cdot U.$$



Donc  $(\hat{T}, \alpha, \hat{T}) \in \mathcal{F}$ ; de même,  $(\hat{T}, \beta, \hat{T}) \in \mathcal{F}$ . — De plus, si  $e'' \in (U' \cdot W' \cdot U) \cap C''_0$ , il existe

$$u' \in U', u \in U \text{ et } w \in W' \text{ tels que } e'' = u' \cdot w \cdot u.$$

Ceci entraîne

$$e'' = \beta(e'') = \beta(u' \cdot w), \text{ où } u' \cdot w \in U' \cdot W' \cdot U \cdot e,$$

c'est-à-dire

$$U' \cdot W' \cdot U \cap C''_0 \subset \beta(U' \cdot W' \cdot U \cdot e)$$

de sorte que  $\beta(U' \cdot W' \cdot U \cdot e)$  est un voisinage de  $e$  dans  $\hat{T}_0 = \hat{T}/C''_0$ .

— Soit  $(h'', h') \in C'' \star C'$ ,  $h = h'' \cdot h'$  et  $U'' \cdot W \cdot U' \in B(h)$ . Puisque  $h = h'' \cdot e' \cdot h'$ , où  $e' = \beta(h')$ , et que  $(T, \varkappa, T \star T) \in \mathcal{F}$ , où  $C'' = (C, \varkappa)$ , il existe

$$W'' \in T/\beta(h'') \cdot C \cdot e', V \in T_\gamma/e' \cdot C \cdot e' \text{ et } W' \in T/e' \cdot C \cdot \alpha(h')$$

tels que

$$h'' \in W'', e' \in V, h' \in W' \text{ et } W'' \cdot V \cdot W' \subset W.$$

Par ailleurs, il existe  $U \in T_\gamma$  tel que

$$e' \in U \text{ et } U \cap e' \cdot C \cdot e' = V,$$

et il existe  $U_1 \in T_\gamma$  tel que

$$e' \in U_1 = U_1^{-1} \text{ et } U_1 \cdot U_1 \subset U.$$

Par conséquent  $U'' \cdot W'' \cdot U_1 \in B(h'')$ ,  $U_1 \cdot W' \cdot U' \in B(h')$  et

$$(U'' \cdot W'' \cdot U_1) \cdot (U_1 \cdot W' \cdot U') \subset U'' \cdot W'' \cdot U \cdot W' \cdot U' \subset$$

$$\subset U'' \cdot W'' \cdot V \cdot W' \cdot U' \subset U'' \cdot W \cdot U'.$$

Ceci montre que  $(\hat{T}, \varkappa, \hat{T} \star \hat{T}) \in \mathcal{F}$ , et que  $(C'', \hat{T}) \in \mathcal{F}(\mathcal{F})_0$ .

— Montrons que  $(C'', \hat{T})$  est microtransitive. En effet, soit  $g \in C''_\gamma$  et  $U' \cdot W \cdot U \in B(g^{-1})$ ; on a  $U' \cdot W_\gamma \cdot U \in \hat{T}_\gamma$ , où  $W_\gamma = W \cap C''_\gamma$ . Comme

$$(T_\gamma, I, T_\gamma) \in \mathcal{F}_\gamma, \text{ où } I(h) = h^{-1} \text{ si } h \in C''_\gamma,$$

il existe  $U_1 \cdot W' \cdot U'_1 \in B(g)$  tel que

$$I(U'_1) \subset U', I(W_1) \subset W_\gamma \text{ et } I(U_1) \subset U, \text{ où } W_1 = W' \cap C''_\gamma.$$

On en déduit  $U_1 \cdot W_1 \cdot U'_1 \in \hat{T}_\gamma$  et

$$I(U_1 \cdot W_1 \cdot U'_1) \subset I(U'_1) \cdot I(W_1) \cdot I(U_1) \subset U' \cdot W_\gamma \cdot U;$$

par suite  $(\hat{T}_\gamma, I, \hat{T}_\gamma) \in \mathcal{F}$ . La condition de la proposition 8 étant vérifiée d'après le début de la démonstration,  $(C'', \hat{T})$  est une catégorie microtransitive. — De plus, on a

$$\hat{j} = ((C'', T), \iota, (C'', \hat{T})) \in \mathcal{F}'(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{F}^m(\mathcal{F})_0.$$

En effet, si  $V$  est un voisinage de  $f \in C$  dans  $T$ , il existe  $\tilde{U} \in T$ ,  $\tilde{W} \in T$  et  $\tilde{U}' \in T$  tels que

$$\alpha(f) \in \tilde{U}, \beta(f) \in \tilde{U}', f \in \tilde{W} \text{ et } \tilde{U}' \cdot \tilde{W} \cdot \tilde{U} \subset V,$$

car  $(T, \kappa, T \star T) \in \mathcal{F}$ , ce qui a pour conséquence

$$N = (\tilde{U}' \cap C^*_\gamma) \cdot (\tilde{W} \cap \beta(f) \cdot C \cdot \alpha(f)) \cdot (\tilde{U} \cap C^*_\gamma) \in B(f) \text{ et}$$

$$N \subset V, \text{ d'où } (T, \iota, \hat{T}) \in \mathcal{F}.$$

– Montrons que, dans le cas où  $(C^*, T)$  est microtransitive, on a  $T = \hat{T}$ .  
En effet, soit  $U' \cdot W \cdot U \in B(f)$  et soit  $f \in V \in T$  tels que  $V \cap e' \cdot C \cdot e = W$ ,  
où  $e = \alpha(f)$ ,  $e' = \beta(f)$ . Il existe  $U_1 \in T_\gamma$ ,  $U'_1 \in T_\gamma$  et  $V_1 \in T$  tels que:  $f \in V_1$ ,

$$e \in U_1 = U_1^{-1} \subset U, \quad e' \in U'_1 = U'_1^{-1} \subset U' \text{ et } U'_1 \cdot V_1 \cdot U_1 \subset V.$$

En vertu de la démonstration de la proposition 8,

$$u = \beta(U_1 \cdot e) \in T_0 \text{ et } u' = \beta(U'_1 \cdot e') \in T_0$$

ce qui entraîne

$$V' = V_1 \cap \alpha^{-1}(u) \cap \beta^{-1}(u') \in T.$$

Si  $f' \in V'$ , il existe  $g \in \alpha(f') \cdot U_1 \cdot e$ ,  $g' \in \beta(f') \cdot U'_1 \cdot e'$ ; on a  $f' \in g' \cdot g'^{-1} \cdot V_1 \cdot g \cdot g^{-1}$ , où

$$g'^{-1} \cdot V_1 \cdot g \subset e' \cdot U'_1 \cdot V_1 \cdot U_1 \cdot e \subset W;$$

il en résulte

$$f' \in g' \cdot W \cdot g^{-1} \subset U'_1 \cdot W \cdot U_1 \subset U' \cdot W \cdot U \text{ et } V' \subset U' \cdot W \cdot U,$$

ce qui prouve  $T = \hat{T}$ .

– Enfin revenons au cas général et montrons que  $\hat{j}$  est un  $(\mathcal{F}'(\mathcal{F}), \mathcal{F}^m(\mathcal{F}))$ -éjecteur. Soit

$$\hat{F} = ((C^*, T), \mathbf{F}, (G^*, \hat{T})) \in \mathcal{F}(\mathcal{F}) \cdot \mathcal{F}^m(\mathcal{F})_0$$

et soit  $g \in G, f = \mathbf{F}(g)$  et  $U' \cdot W \cdot U \in B(f)$ . Il existe  $V_i \in T$ , où  $i = 1, 2, 3$ , tels que

$$U = V_1 \cap C^*_\gamma, \quad U' = V_2 \cap C^*_\gamma \text{ et } W = V_3 \cap \beta(f) \cdot C \cdot \alpha(f).$$

Étant donné que  $(T, \mathbf{F}, \hat{T}) \in \mathcal{F}$ , il existe  $\tilde{V}_i \in \hat{T}$  pour lesquels

$$\alpha(g) \in \tilde{V}_1, \quad \beta(g) \in \tilde{V}_2, \quad g \in \tilde{V}_3 \text{ et } \mathbf{F}(\tilde{V}_i) \subset V_i.$$

Nous avons vu plus haut,  $(G^*, \hat{T})$  étant microtransitive, que

$$\tilde{N} = (\tilde{V}_2 \cap G^*_\gamma) \cdot (\tilde{V}_3 \cap \beta(g) \cdot G \cdot \alpha(g)) \cdot (\tilde{V}_1 \cap G^*_\gamma) \in \hat{T}$$

et,  $\mathbf{F}$  définissant un foncteur, on obtient

$$\mathbf{F}(\tilde{N}) \subset (\mathbf{F}(\tilde{V}_2) \cap C^*_\gamma) \cdot (\mathbf{F}(\tilde{V}_3) \cap \beta(f) \cdot C \cdot \alpha(f)) \cdot (\mathbf{F}(\tilde{V}_1) \cap C^*_\gamma) \subset U' \cdot W \cdot U.$$

Il s'ensuit

$$\hat{F}' = ((C^*, \hat{T}), \mathbf{F}, (G^*, \hat{T})) \in \mathcal{F}(\mathcal{F}) \text{ et } \hat{j} \cdot \hat{F}' = \hat{F},$$

ce qui achève la démonstration, car  $\hat{j}$  est évidemment un monomorphisme de  $\mathcal{F}'(\mathcal{F})$ .

*Corollaire:* Si  $(C^*, T)$  est une catégorie microtransitive et si  $f \in C$ , alors  $f$  admet une base de voisinages dans  $T$  de la forme  $U' \cdot W \cdot U$ , où

$$\alpha(f) \in U \in T_\gamma, \quad \beta(f) \in U' \in T_\gamma \text{ et } f \in W \in T / \beta(f) \cdot C \cdot \alpha(f).$$

*Proposition 9:* Si  $(C^*, T)$  est un groupoïde microtransitif, tout  $f \in C$  admet une base de voisinages de la forme  $U' \cdot f \cdot U$ , où  $U$  et  $U'$  sont des voisinages de  $\alpha(f)$  et  $\beta(f)$  respectivement dans  $T$ .

*Démonstration:* Il suffit de montrer que  $U' \cdot f \cdot U$  est un voisinage de  $f$  dans  $T$ , d'après le théorème 4. En effet, soit  $e = \alpha(f)$  et  $e' = \beta(f)$ . Comme  $e \cdot e = e$ , il existe un voisinage  $U_1$  de  $e$  dans  $T$  tel que  $U_1 \cdot U_1 \subset U$ . La relation  $f^{-1} \cdot f = e$  assure l'existence d'un voisinage  $V$  de  $f$  dans  $T$  tel que  $f^{-1} \cdot V \subset U_1$ , c'est-à-dire tel que  $e' \cdot V \subset f \cdot U_1$ . Posons  $W = V \cap e' \cdot C \cdot e$ . On a:

$$U' \cdot W \cdot U_1 \subset U' \cdot e' \cdot V \cdot U_1 \subset U' \cdot f \cdot U_1 \cdot U_1 \subset U' \cdot f \cdot U.$$

$U' \cdot W \cdot U_1$  étant un voisinage de  $f$  dans  $T$  (th. 4),  $U' \cdot f \cdot U$  en est aussi un.

*Corollaire 1:* Soit  $(C^*, T)$  un groupoïde microtransitif. Un sous-groupoïde  $C''$  de  $C^*$  est tel que  $C' \in T$  si, et seulement si, pour tout  $e \in C''_0$ , il existe un voisinage  $U(e)$  de  $e$  dans  $T$  contenu dans  $C'$ .

En effet, la condition est nécessaire. Si elle vérifiée, soit  $f \in C'$ ,  $e = \alpha(f)$  et  $e' = \beta(f)$ ; alors  $U(e') \cdot f \cdot U(e)$  est un voisinage de  $f$  dans  $T$  d'après la proposition 9, et ce voisinage est contenu dans  $C'$ .

*Corollaire 2:* Soit  $(C^*, T)$  un groupoïde microtransitif. Si  $C' \in T$ , si  $C''$  est un sous-groupoïde de  $C^*$  et si  $C''_0$  est fermé dans  $T_0$ , alors  $C'$  est fermé dans  $T$ . En particulier si  $T$  et  $T_0$  sont des topologies connexes,  $C'$  est le groupoïde engendré par un voisinage quelconque de  $C''_0$  dans  $T$ .

En effet, supposons  $f$  adhérent à  $C'$ . Dans ce cas  $e = \alpha(f)$  et  $e' = \beta(f)$  appartiennent à  $C''_0$ . Soient  $U \subset C'$  et  $U' \subset C'$  des voisinages de  $e$  et  $e'$  respectivement dans  $T$ ; d'après la proposition 9,  $U' \cdot f \cdot U$  est un voisinage de  $f$  dans  $T$ . Il existe  $f' \in C'$  tel que  $f' \in U' \cdot f \cdot U$ , et il existe  $g \in U$  et  $g' \in U'$  tels que  $f' = g' \cdot f \cdot g$ , d'où  $f = g'^{-1} \cdot f' \cdot g \in C'$ . Le corollaire en résulte, en utilisant le corollaire 1.

*Proposition 10:* Soient  $(C^*, T)$  une catégorie microtransitive et  $C''$  une sous-catégorie de  $C^*$  telle que  $C''_\gamma \in T_\gamma$  et que  $C''_0$  soit fermée dans  $T_0$ . Alors l'adhérence de  $C'$  dans  $T$  définit une sous-catégorie de  $C^*$ .

*Démonstration:* Soient  $f$  et  $f'$  deux éléments adhérents à  $C'$  dans  $T$  tels que  $\beta(f) = \alpha(f') = e$ . On a,  $C''_0$  étant fermée dans  $T_0$ :

$$\alpha(f) \in C', \beta(f') \in C' \text{ et } e \in C'.$$

Pour tout voisinage  $V$  de  $f \cdot f$  dans  $T$ , il existe des voisinages de  $f$  et  $f'$  dans  $T$  de la forme  $V' = U' \cdot W \cdot U$  et  $V'' = U'' \cdot W' \cdot U'$  indiquée dans le théorème 4, tels que  $V'' \cdot V' \subset V$ . Puisque  $C''_\gamma \in T_\gamma$ , on peut supposer  $U \subset C'$ ,  $U' \subset C'$  et  $U'' \subset C'$ . Il existe  $f_1 \in V' \cap C'$ ; la relation  $f_1 = g' \cdot h \cdot g$ , où  $h \in W$ ,  $g \in U$  et  $g' \in U'$ , entraîne  $h \in C'$ . De même il existe  $h' \in C' \cap W'$ . Il en résulte  $h' \cdot h \in C' \cap V$  et  $f' \cdot f \in \overline{C'}$ , si  $\overline{C'}$  est l'adhérence de  $C'$  dans  $T$ . Par suite  $\overline{C'}$  est une sous-catégorie de  $C^*$ .

*Proposition 11:* Soit  $(G^*, T)$  un groupoïde microtransitif. Si  $T_0$  et  $T_e = T|e \cdot C \cdot e$  sont des topologies séparées pour tout  $e \in C^*_0$ , alors  $T$  est séparée.

*Démonstration:* D'après la proposition 1, il suffit de montrer que  $C^*_0$  est fermé dans  $T$ . Montrons d'abord que, si  $h$  est adhérent à  $C^*_0$  dans  $T$ , on a  $\alpha(h) = \beta(h)$ . En effet, soit

$$\alpha(h) = e \text{ et } \beta(h) = e'.$$

Si  $e \neq e'$ , il existe deux voisinages  $u$  et  $u'$  de  $e$  et  $e'$  dans  $T_0$  tels que  $u \cap u' = \emptyset$ ; alors  $U = \alpha^{-1}(u) \cap \beta^{-1}(u')$  est un voisinage de  $h$  dans  $T$ . Par hypothèse, il existe  $x \in U \cap C^*_0$  et on a

$$x = \alpha(x) \in u \text{ et } x = \beta(x) \in u',$$

d'où  $x \in u \cap u'$ , ce qui est impossible. Il s'ensuit  $e = e'$ . — Soit  $h \in e \cdot C \cdot e$ , où  $e \in C^*_0$ . Puisque  $((e \cdot C \cdot e)^*, T_e)$  est un groupe topologique séparé, il existe un voisinage  $v$  de  $e$  dans  $T_e$  tel que  $h \notin v$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $e$  dans  $T$  tel que  $v = U \cap e \cdot C \cdot e$ , et on a  $h \notin U$ . On peut construire un voisinage  $U'$  de  $e$  dans  $T$  tel que

$$U' = U'^{-1} \text{ et } U' \cdot U' \subset U.$$

D'après la proposition 9,  $U' \cdot h \cdot U'$  est un voisinage de  $h$  dans  $T$ . Si  $x \in C^*_0 \cap U' \cdot h \cdot U'$ , on a

$$x = g' \cdot h \cdot g, \text{ où } g \in U' \text{ et } g' \in U',$$

ce qui entraîne

$$h = g'^{-1} \cdot g^{-1} \in U'^{-1} \cdot U'^{-1} = U' \cdot U' \subset U.$$

Mais par hypothèse,  $h \notin U$ . Donc  $U' \cdot h \cdot U' \cap C^*_0 = \emptyset$ , c'est-à-dire  $h$  n'est pas adhérent à  $C^*_0$ . Il en résulte que  $C^*_0$  est fermé dans  $T$ .

*Structures quasi-uniformes:*

Si  $(G^*, T)$  est un groupe topologique, on sait que  $T$  est la topologie sous-jacente à une structure uniforme (par ex. la structure uniforme bilatère). Ce résultat ne s'étend pas aux groupoïdes topologiques. Nous allons cependant voir que la topologie d'un groupoïde microtransitif est sous-jacente à une structure quasi-uniforme, notion généralisant celle de structure uniforme.

Soit  $E$  une classe. Nous désignons par  $(E \times E)^\perp$  le groupoïde des couples associé à  $E$  (ex. 2, chap. I). Si  $V \subset E \times E$  et si  $V = V^{-1}$  dans  $(E \times E)^\perp$ , nous dirons que  $V$  est une partie *symétrique* de  $E \times E$ .

2+ *Définition 6:* On appelle structure quasi-uniforme sur la classe  $E$  un couple  $((A_i)_{i \in I}, \varphi)$ , où  $(A_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$  et  $\varphi$  une application de  $I$  dans la classe des filtres de  $E \times E$  vérifiant les conditions suivantes:

1) Pour tout  $i \in I$ , le filtre  $\varphi(i)$  admet une base formée de parties  $V$  symétriques de  $E \times E$  telles que  $\Delta_{A_i} \subset V$ , où  $\Delta_{A_i} = (A_i \times A_i) \cap (E \times E)_0^\perp =$  = diagonale de  $A_i$ .

2) Si  $V_i \in \varphi(i)$ , il existe  $V'_i \in \varphi(i)$  tel que  $V'_i$  soit une partie symétrique de  $E \times E$  et que les conditions  $j \in I$  et  $\Delta_{A_j} \cap V'_i \neq \emptyset$  entraînent l'existence d'un  $V'_j \in \varphi(j)$  pour lequel  $V'_i \perp V'_j \subset V_i$ .

L'axiome 2 entraîne que, si  $V \in \varphi(i)$ , il existe  $V' \in \varphi(i)$  et  $V'' \in \varphi(i)$  tels que  $V' \perp V'' \subset V$ ; comme  $\varphi(i)$  a une base formée de parties symétriques, il existe  $\hat{V} \in \varphi(i)$  symétrique tel que  $\hat{V} \subset V' \cap V''$ , et on a  $\hat{V} \perp \hat{V} \subset V$ .

*Cas particuliers:* 1) Soit  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  une structure quasi-uniforme sur  $E$ ; si  $I$  admet un seul élément  $i$ , on a  $A_i = E$  et le filtre  $\varphi(i)$  est une structure uniforme sur  $E$ , d'après la remarque précédente. Inversement, si  $U$  est une structure uniforme sur  $E$  et si  $I = \{1\}$ , alors  $((A_1)_{1 \in I}, \varphi)$  est une structure quasi-uniforme sur  $E$ , où  $\varphi$  est l'application  $1 \rightarrow U$ .

2) Soit  $T$  une topologie et  $E = \theta(T)$ . Pour tout  $x \in E$ , soit  $\varphi(x)$  le filtre ayant pour base les parties  $V(x) \times V(x)$  de  $E \times E$  telles que  $V(x)$  soit un voisinage de  $x$  dans  $T$  et soit  $\varphi$  la surjection:  $x \rightarrow \varphi(x)$ , où  $x \in E$ . Alors  $(\{x\}_{x \in E}, \varphi)$  est une structure quasi-uniforme sur  $E$ , que nous noterons  $v(T)$ . En effet, l'axiome  $V_{IV}$  des voisinages entraîne que l'axiome 2 est vérifié.

*Définition 7:* Soit  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  une structure quasi-uniforme sur  $E$  et  $u' = ((A'_j)_{j \in J}, \varphi')$  une structure quasi-uniforme sur  $E'$ . On dira que  $(u', f, u)$  est une application quasi-uniforme si  $(E', f, E)$  est une application vérifiant les conditions:

- 1) Pour tout  $i \in I$ , il existe  $j \in J$  tel que  $f(A_i) \subset A'_j$ .
- 2) Si  $i \in I$  et si  $f(A_i) \subset A'_j$ , pour tout  $V' \in \varphi'(j)$  il existe  $V \in \varphi(i)$  tel que  $(f \times f)(V) \subset V'$ .

*Cas particuliers:* 1) Une application quasi-uniforme  $(u', f, u)$  telle que  $u$  et  $u'$  soient les structures quasi-uniformes associées à une structure uniforme est une application uniforme. Si  $T$  et  $T'$  sont des topologies et si  $(\theta(T'), f, \theta(T))$  est une application,  $(v(T'), f, v(T))$  est une application quasi-uniforme si, et seulement si,  $(T', f, T)$  est une application continue.

Soit  $\mathcal{Q}_0$  la classe des structures quasi-uniformes  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  sur une classe  $E$  telles que  $E \in \mathcal{M}_0$  et  $I \in \mathcal{M}_0$ . Soit  $\mathcal{Q}$  la catégorie des applications quasi-uniformes  $(u', f, u)$ , où  $u \in \mathcal{Q}_0$  et  $u' \in \mathcal{Q}_0$ , la loi de composition étant:

$$(u'', f', \tilde{u}') \cdot (u', f, u) = (u'', f'f, u)$$

si, et seulement si,  $\tilde{u}' = u'$ . Nous identifions  $\mathcal{Q}_0$  à la classe des unités de  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{T}$  à la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{Q}$  ayant pour unités les structures quasi-uniformes  $v(T)$ , où  $T \in \mathcal{T}_0$ . Soit  $q$  le foncteur de  $\mathcal{Q}$  vers  $\mathcal{M}$  tel que

$$\begin{cases} q(u) = E \text{ si } u \text{ est une structure quasi-uniforme sur } E, \\ q(u', f, u) = (q(u'), f, q(u)). \end{cases}$$

*Théorème 5:* Il existe un foncteur  $(\mathcal{Q}, \mathcal{T})$ -éjection naturalisé canonique  $(\tau, \hat{\tau})$  tel que  $q(\hat{\tau}(u)) = q(u)$  pour tout  $u \in \mathcal{Q}_0$  et  $\tau(T) = T$  si  $T \in \mathcal{T}_0$ . 1

*Démonstration:* Soit  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi) \in \mathcal{L}_0$  et  $q(u) = E$ . Soit  $x \in A_i$ ; pour tout  $V \in \varphi(i)$  nous désignons par  $V(x)$  la classe des  $y \in E$  tels que  $(x, y) \in V$ . Comme  $\Delta_{A_i} \subset V$ , on a

$$(x, x) \in V, \text{ d'où } x \in V(x).$$

Si  $V \in \varphi(i)$  et  $V' \in \varphi(i)$ , la relation  $V'' = V \cap V' \in \varphi(i)$  entraîne

$$V''(x) = V(x) \cap V'(x),$$

de sorte que les classes  $V(x)$ , où  $V \in \varphi(i)$ , engendrent un filtre  $\hat{\varphi}(x)$  de  $E$ . Montrons que  $\hat{\varphi}(x)$  vérifie l'axiome  $V_{IV}$ . En effet, soit  $V_i \in \varphi(i)$ . Soit  $V'_i$  la partie symétrique de  $E \times E$  dont l'axiome 2 assure l'existence. Il existe un  $V''_i \in \varphi(i)$  symétrique tel que  $V''_i \subset V_i$  et  $V''_i \perp V''_i \subset V'_i$ . Supposons  $y \in V''_i(x) \cap A_j$ , où  $j \in I$ . On a

$$(x, y) \in V''_i \text{ et } (y, x) \in V''_i,$$

donc  $(y, y) \in V'_i$  et  $\Delta_{A_j} \cap V'_i \neq \emptyset$ . Par conséquent, il existe  $V'_j \in \varphi(j)$  tel que  $V'_i \perp V'_j \subset V_i$ . On a  $V'_j(y) \in \hat{\varphi}(y)$  et, pour tout  $z \in V'_j(y)$ , les relations

$$(y, z) \in V'_j \text{ et } (x, y) = (x, x) \perp (x, y) \in V''_i \perp V''_i \subset V'_i$$

ont pour conséquence

$$(x, z) \in V'_i \perp V'_j \subset V_i, \text{ c'est-à-dire } z \in V_i(x).$$

Par suite  $V'_j(y) \subset V_i(x)$ . Ainsi  $\hat{\varphi}(x)$  est le filtre des voisinages de  $x$  pour une topologie  $\tau(u) \in \mathcal{F}_0$ . On en déduit

$$\hat{\tau}(u) = (u, \iota, \tau(u)) \in \mathcal{L} \cdot \mathcal{F}_0.$$

— En particulier, si  $u = v(T)$ , où  $T \in \mathcal{F}_0$ , pour tout  $x \in E$ , on a  $\tau(v(T)) = T$ , car le filtre  $\varphi(x)$  admet pour base les classes  $V(x) \times V(x)$ .

— Soit  $f = (u, \mathbf{f}, T') \in \mathcal{L} \cdot \mathcal{F}_0$ . Si

$$y \in \theta(T') = E' \text{ et } x = \mathbf{f}(y) \in A_i,$$

pour tout  $V \in \varphi(i)$  il existe un voisinage  $V'(y)$  de  $y$  dans  $T'$  tel que

$$(\mathbf{f} \times \mathbf{f})(V'(y) \times V'(y)) \subset V,$$

par définition de la structure quasi-uniforme associée à  $T'$ . On en déduit  $\mathbf{f}(V'(y)) \subset V(x)$ , de sorte que

$$\tau(f) = (\tau(u), \mathbf{f}, T') \in \mathcal{F} \text{ et } \hat{\tau}(u) \cdot \tau(f) = f.$$

Ceci montre que  $\hat{\tau}(u)$  est un  $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ -éjecteur. D'après la proposition 21, chap. III, il existe un foncteur  $(\mathcal{L}, \mathcal{F})$ -éjection naturalisé  $(\tau, \hat{\tau})$ . Si

$$g = (u', \mathbf{g}, u) \in \mathcal{L},$$

on a

$$\tau(g) = (\tau(u'), \mathbf{g}, \tau(u)) \in \mathcal{F}.$$

**Proposition 12:**  $\mathcal{Q}$  est une catégorie à  $\mathcal{I}$ -produits si  $\mathcal{M}$  est une catégorie à  $\mathcal{I}$ -produits. Le foncteur  $\tau$  (théo. 5) est un foncteur d'homomorphismes saturé compatible avec les  $\mathcal{I}$ -produits et  $q = \theta \cdot \tau$  est  $\ulcorner$ -étalant. 1

*Démonstration:* Soit  $J \in \mathcal{I}$  et, pour tout  $j \in J$ :

$$u_j = ((A_i^j)_{i \in I_j}, \varphi_j) \in \mathcal{Q}, E_j = q(u_j).$$

Posons

$$E = \prod_{j \in J} E_j \text{ et } I = \prod_{j \in J} I_j.$$

La famille  $(B_i)_{i \in I}$  est une partition de  $E$ , si

$$B_i = \prod_{j \in J} A_{i_j}^j \text{ lorsque } i = (i_j)_{j \in J}.$$

Si  $i = (i_j)_{j \in J} \in I$ , notons  $\varphi(i)$  le filtre sur  $E \times E$  produit des filtres  $(\varphi_j(i_j))_{j \in J}$ ; ce filtre admet une base formée des classes

$$V_i = \prod_{j \in J} V_j, \text{ où } V_j \in \varphi_j(i_j)$$

et  $V_j = E_j^2$  sauf au plus pour un ensemble fini de  $j \in J$ . On montre facilement que  $((B_i)_{i \in I}, \varphi)$ , où  $\varphi$  est l'application  $i \rightarrow \varphi(i)$ , si  $i \in I$ , est une structure quasi-uniforme  $u$  sur  $E$  et que  $u$  est le produit de  $(u_j)_{j \in J}$  dans la catégorie  $\mathcal{Q}$ . De plus  $\tau(u) = \prod_{j \in J} \tau(u_j)$ .

— Soit  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi) \in \mathcal{Q}_0$  et soit  $E' \subset E = q(u)$ . Posons

$$A'_i = A_i \cap E' \text{ et } \varphi'(i) = \varphi(i) \cap (E' \times E')$$

(i.e.  $\varphi'(i)$  est le filtre trace sur  $E' \times E'$  du filtre  $\varphi(i)$ ), si  $i \in I$  et  $A'_i \neq \phi$ . On a

$$u' = ((A'_i)_{i \in I'}, \varphi') \in \mathcal{Q},$$

et  $u'$  est évidemment une  $q$ -sous-structure de  $u$ . Ceci montre que  $q$  est un foncteur  $\ulcorner$ -étalant. On appellera  $u'$  la structure quasi-uniforme induite par  $u$  sur  $E'$ , notée  $u|_{E'}$ .

**Définition 8.** On dira qu'une structure quasi-uniforme  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  est séparée si, pour tout  $(i, j) \in I \times I$ , on a  $\cap (\varphi(i) \perp \varphi(j)) \subset \Delta_E$ , où

$$\cap (\varphi(i) \perp \varphi(j)) = (A_i \times A_j) \cap \bigcap_{\substack{V_i \in \varphi(i) \\ V_j \in \varphi(j)}} V_i \perp V_j \text{ et } E = q(u).$$

**Proposition 13:** Soit  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  une structure quasi-uniforme sur  $E$ . Pour que  $u$  soit séparée, il faut et il suffit que la topologie  $\tau(u)$  (th. 5) soit séparée.

*Démonstration:* Supposons que  $u$  soit une structure quasi-uniforme séparée sur  $E$ . Soit  $x \in A_i$ ,  $x' \in A_j$  et  $x \neq x'$ . Puisque

$$\cap (\varphi(i) \perp \varphi(j)) \subset \Delta_E,$$

il existe des parties symétriques  $V_i$  et  $V_j$  de  $E \times E$  telles que

$$V_i \in \varphi(i), V_j \in \varphi(j) \text{ et } (x, x') \notin V_i \perp V_j.$$

Soient  $V_i(x)$  et  $V_j(x')$  les voisinages de  $x$  et  $x'$  dans  $\tau(u)$  construits dans la démonstration du théorème 5. Si  $z \in V_i(x) \cap V_j(x')$ , on a

$$(x, z) \in V_i \text{ et } (x', z) \in V_j, \text{ d'où } (x, x') \in V_i \perp V_j$$

ce qui est impossible par hypothèse. Ainsi  $V_i(x)$  et  $V_j(x')$  sont des voisinages disjoints de  $x$  et  $x'$  respectivement, et  $\tau(u)$  est une topologie séparée. — Enfin supposons que  $\tau(u)$  soit séparée. Soient

$$x \in A_i, y \in A_j \text{ et } x \neq y.$$

Il existe des parties symétriques  $V_i \in \varphi(i)$  et  $V_j \in \varphi(j)$  telles que

$$V_i(x) \cap V_j(y) = \emptyset.$$

Si  $(x, y) \in \varphi(i) \perp \varphi(j)$ , on a  $(x, y) \in V_i \perp V_j$ , c'est-à-dire il existe  $z \in E$  tel que

$$(x, z) \in V_i \text{ et } (z, y) \in V_j.$$

On en déduit  $z \in V_i(x) \cap V_j(y)$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc

$$\varphi(i) \perp \varphi(j) \subset \Delta_E,$$

ce qui signifie que  $u$  est séparée.

*Remarque:* Si dans les définitions 6 et 8 on suppose que  $(A_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $E$  au lieu d'une partition de  $E$ , une démonstration analogue à celle du théorème 5 montre qu'il existe une topologie  $\tau(u)$  sur  $E$  déterminée par  $u$ . De plus  $u$  est séparé si, et seulement si,  $\tau(u)$  est séparée. Mais la notion d'application quasi-uniforme doit être modifiée, afin que  $\mathcal{Q}$  soit une catégorie.

*Proposition 14:* Soit  $\mathcal{Q}^s$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{Q}$  ayant pour unités les structures quasi-uniformes séparées. Alors  $\mathcal{Q}^s$  est stable par produits dans  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}$  est une catégorie à  $\mathcal{Q}^s$ -projections, si  $\mathcal{M}_0$  est un univers et s'il existe un univers  $\hat{\mathcal{M}}_0$  tel que  $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ .

*Démonstration:* Si  $u = \prod_{j \in J} u_j$  et si  $u_j \in \mathcal{Q}^s$  pour tout  $j \in J$ , on a (prop. 12)

$$\tau(u) = \prod_{j \in J} \tau(u_j),$$

de sorte que  $\tau(u)$  est séparée, d'après la proposition 13; cette même proposition entraîne que  $u$  est séparée. — Soit  $\hat{\mathcal{Q}}$  la catégorie des applications quasi-uniformes relative à la catégorie pleine d'applications  $\hat{\mathcal{M}}$ . Supposons

$$u \in \mathcal{Q}_0 \text{ et } E = q(u).$$



Posons  $X = \mathcal{Q}_0^s \cdot \mathcal{Q} \cdot u$ . La structure uniforme  $\bar{a}$  sur la classe  $\{a\} \in \mathcal{M}_0$  appartenant à  $\mathcal{Q}_0^s$ , on a  $(\bar{a}, k, u) \in X$ , si  $k(x) = a$  pour tout  $x \in E$ . Par ailleurs, si

$$u' = ((A'_j)_{j \in J}, \varphi) \in \mathcal{Q}_0 \text{ et } E' = q(u'),$$

on a :

$$u' \in (\mathcal{P}(E') \cdot \mathcal{M} \cdot J) \times (\mathcal{P}(\mathcal{P}(E')) \cdot \mathcal{M} \cdot J) \in \hat{\mathcal{M}}_0,$$

d'où

$$q^{-1}(E') \in \hat{\mathcal{M}}_0 \text{ et } \mathcal{Q}_0 = \bigcup_{E' \in \mathcal{M}_0} q^{-1}(E') \in \hat{\mathcal{M}}_0.$$

Il s'ensuit  $X \in \hat{\mathcal{M}}_0$ . D'après ce qui précède, la famille  $(\beta(h))_{h \in X}$  admet un produit  $\tilde{u}$  dans  $\hat{\mathcal{Q}}_0^s$ . Soit  $\nu$  l'application

$$z \rightarrow (h(z))_{h \in X} \text{ de } E \text{ dans } \bar{E} = q(\tilde{u}),$$

et soit  $\hat{u}$  la structure quasi-uniforme induite par  $\tilde{u}$  sur  $\bar{E} = \nu(E)$ . Soit  $\hat{u}'$  la structure quasi-uniforme image de  $\hat{u}$  par la bijection

$$(h(z))_{h \in X} \rightarrow z \text{ mod } r,$$

où  $r$  est la relation d'équivalence associée à  $\nu$ . On montre comme dans la démonstration du théorème 2 que  $\hat{u}'$  est une  $(\mathcal{Q}^s, \mathcal{Q})$ -projection de  $u$ .

*Définition 9:* Soit  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  une structure quasi-uniforme sur  $E$ . Nous dirons que  $u$  est stricte si elle vérifie la condition: Il existe une base  $\tilde{\varphi}(i)$  de  $\varphi(i)$  telle que:

- 3) Si  $i \in I$  et si  $V \in \tilde{\varphi}(i)$ , pour tout  $(x, y) \in V$  il existe  $x' \in A_i$  tel que  $(x, x') \in V$  et  $(y, x') \in V$ .

*Exemple:* Si  $I = E$  et si  $A_x = \{x\}$  pour tout  $x \in E$ , il résulte du théorème 5 que l'on a  $u = \nu(\tau(u))$  si, et seulement si,  $u$  est stricte. Une structure quasi-uniforme associée à une structure uniforme est stricte.

*Théorème 6:* Soit  $\mathcal{Q}^t$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{Q}$  ayant pour unités les structures quasi-uniformes strictes;  $\mathcal{Q}^t$  est stable par produits dans  $\mathcal{Q}$ . Si  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi) \in \mathcal{Q}_0$ , alors  $u$  admet une  $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^t)$ -éjection  $u' = ((A_i)_{i \in I}, \varphi')$  telle que  $\tau(u) = \tau(u')$ .

*Démonstration:* Le produit d'une famille de structures quasi-uniformes strictes est évidemment une structure quasi-uniforme stricte. — Soit  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi) \in \mathcal{Q}_0$ . Pour tout  $V \in \varphi(i)$ , posons

$$i(V) = \bigcup_{x \in A_i} (V(x) \times V(x)) \text{ (notations dém. th. 5).}$$

Les classes  $i(V)$  engendrent un filtre  $\varphi'(i)$  de  $E \times E$ . Montrons que l'on a

$$u' = ((A_i)_{i \in I}, \varphi') \in \mathcal{Q}_0^t.$$

En effet,  $i(V)$  est symétrique et contient  $\Delta_{A_i}$ . Si  $\hat{V} \in \varphi(i)$  est symétrique et vérifie  $\hat{V} \perp \hat{V} \subset V$ , pour tout  $(y, z) \in i(\hat{V})$  il existe  $x \in A_i$  tel que  $(y, z) \in \hat{V}(x) \times \hat{V}(x)$ , d'où

$$(y, z) = (y, x) \perp (x, z) \in V, \text{ et } i(\hat{V}) \subset V.$$

Soit  $V' \in \varphi(i)$  la partie symétrique dont l'axiome 2 assure l'existence relativement à  $V$  et soit  $\hat{V}' \in \varphi(i)$  symétrique tel que  $\hat{V}' \perp \hat{V}' \subset V'$ . Supposons  $(z, z) \in i(\hat{V}') \cap \Delta_{A_j}$ . On a  $(z, z) \in V' \cap \Delta_{A_j}$  de sorte qu'il existe  $V'' \in \varphi(j)$  tel que  $V' \perp V'' \subset V$ . Soit  $\hat{V}'' \in \varphi(j)$  symétrique tel que  $\hat{V}'' \perp \hat{V}'' \subset V''$ . On obtient:

$$M = i(\hat{V}') \perp j(\hat{V}'') \subset V' \perp V'' \subset V.$$

Si  $(y', z') \in M$  et

$$(y', y'') \in i(\hat{V}'), (y'', z') \in j(\hat{V}''),$$

il existe  $x' \in A_i$  tel que  $y' \in \hat{V}'(x')$  et  $y'' \in \hat{V}''(x')$ . On en déduit

$$(y', z') \in V(x') \times V(x') \subset i(V),$$

car

$$(x', z') = (x', y'') \perp (y'', z') \in i(\hat{V}') \perp j(\hat{V}'') \subset V.$$

Donc  $i(\hat{V}') \perp j(\hat{V}'') \subset i(V)$ . Ainsi

$$u' \in \mathcal{Q}_0^t \text{ et } h = (u, \iota, u') \in \mathcal{Q}.$$

De plus la relation  $\hat{V}(x) \subset i(\hat{V})(x) \subset i(V)(x)$  entraîne  $\tau(u) = \tau(u')$ .

— Montrons que  $h$  est un  $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^t)$ -éjecteur. En effet, supposons

$$f = (u, \mathbf{f}, u'') \in \mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}_0^t,$$

où  $u'' = ((A''_j)_{j \in J}, \varphi'')$ . Soit  $j \in J$  et  $\mathbf{f}(A''_j) \subset A_i$ . Si  $i(V) \in \varphi'(i)$ , il existe  $V'' \in \tilde{\varphi}''(j)$  symétrique tel que  $(\mathbf{f} \times \mathbf{f})(V'') \subset V$ . Lorsque  $(y'', z'') \in V''$ , il existe  $x'' \in A''_j$  tel que

$$(x'', y'') \in V'' \text{ et } (x'', z'') \in V''.$$

Il s'ensuit, si  $x = \mathbf{f}(x'') \in A_i$ :

$$(x, \mathbf{f}(y'')) \in V \text{ et } (x, \mathbf{f}(z'')) \in V.$$

Par suite  $(\mathbf{f} \times \mathbf{f})(V'') \subset i(V)$ , c'est-à-dire

$$f' = (u', \mathbf{f}, u'') \in \mathcal{Q} \text{ et } f = h \cdot f'.$$

Ceci achève la démonstration, car  $h$  est un monomorphisme de  $\mathcal{Q}$ .

*Corollaire:* Le foncteur  $q^t = (\mathcal{M}, \mathbf{q}^t, \mathcal{Q}^t)$  est  $\dashv$ -étalant.

*Démonstration:* Soit  $\hat{u} \in \mathcal{Q}_0^t$  et  $E \subset q(\hat{u})$ . Soit  $u'$  la  $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^t)$ -éjection de la structure quasi-uniforme  $u$  induite par  $\hat{u}$  sur  $E$  construite ci-dessus. On a

$$g = (\hat{u}, \iota, u') \in \mathcal{Q}^t$$

et les conditions

$$\hat{f} = (\hat{u}, \mathbf{f}, u'') \in \mathcal{Q}^t \text{ et } \mathbf{f}(q(u'')) \subset E$$

entraînent (prop. 12)

$$f = (u, \mathbf{f}, u'') \in \mathcal{Q}, \text{ d'où } f' = (u', \mathbf{f}, u'') \in \mathcal{Q}^t$$

en vertu du théorème 6. Par conséquent  $u'$  est une  $q^t$ -sous-structure de  $u$  telle que  $q^t(u') = E$ , i.e.  $q^t$  est  $\dashv$ -étalant.

*Structures quasi-uniformes complètes:*

Soit  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  une structure quasi-uniforme sur  $E$  et soit  $F$  un filtre de  $E$  convergeant dans  $\tau(u)$  vers  $x \in A_i$ . Soit  $V \in \varphi(i)$ . Il existe une partie  $\hat{V}$  symétrique de  $E \times E$  telle que

$$\hat{V} \in \varphi(i) \text{ et } \hat{V} \perp \hat{V} \subset V.$$

Puisque  $F$  converge vers  $x$ , il existe  $M \in F$  tel que  $M \subset \hat{V}(x)$  (th. 5). Lorsque  $m \in M$  et  $m' \in M$ , on a

$$(m, x) \in \hat{V} \text{ et } (x, m') \in \hat{V}, \text{ d'où } (m, m') \in V.$$

Ainsi  $M \times M \subset V$ . Cette remarque conduit à poser la définition suivante.

*Définition 10:* Soit  $u = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  une structure quasi-uniforme sur  $E$ . On dit qu'un filtre  $F$  de  $E$  est un filtre de Cauchy pour  $u$  s'il existe  $i \in I$  tel que, pour tout  $V_i \in \varphi(i)$ , il existe  $M \in F$  vérifiant  $M \times M \subset V_i$ . Si tout filtre de Cauchy pour  $u$  converge dans  $\tau(u)$ , on dit que  $u$  est une structure quasi-uniforme complète.

*Cas particuliers:* 1) Si  $u = v(T)$ , où  $T$  est une topologie, un filtre  $F$  de  $T$  est un filtre de Cauchy pour  $v(T)$  si, et seulement si,  $F$  converge dans  $T$ , de sorte que  $v(T)$  est une structure quasi-uniforme complète. Par suite une structure quasi-uniforme est complète si, et seulement si, les filtres de Cauchy pour  $u$  et pour  $v(\tau(u))$  sont les mêmes.

2) Une structure uniforme est complète si, et seulement si, la structure quasi-uniforme associée est complète.

*Théorème 7:* Soit  $\mathcal{Q}^c$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{Q}$  ayant pour unités les structures quasi-uniformes  $u \in \mathcal{Q}_0$  complètes.  $\mathcal{Q}^c$  est stable par produits dans  $\mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q}$  est une catégorie à  $\mathcal{Q}^c \cap \mathcal{Q}^s$ -projections, si  $\mathcal{M}_0$  est un univers et s'il existe un univers  $\hat{\mathcal{M}}_0$  tel que  $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ .

1

*Démonstration:* Soit  $u = \prod_{j \in J} u_j$ , où  $u_j \in \mathcal{Q}_0^c$  pour tout  $j \in J$ ; soit  $p_j$  la projection canonique de  $u$  sur  $u_j$ . Si  $F$  est un filtre de Cauchy pour  $u$ , alors  $p_j(F)$  est évidemment un filtre de Cauchy pour  $u_j$  et ce filtre converge vers  $x_j$  dans  $\tau(u_j)$ . Il s'ensuit que  $F$  converge vers  $(x_j)_{j \in J}$  dans  $\tau(u)$ , de sorte que  $u$  est complète. Si de plus on a  $u_j \in \mathcal{Q}_0^s$  pour tout  $j \in J$ , d'après la proposition 14  $u \in \mathcal{Q}^s$ . Ainsi  $\mathcal{Q}^c$  et  $\mathcal{Q}^{cs} = \mathcal{Q}^c \cap \mathcal{Q}^s$  sont des sous-catégories stables par produits de  $\mathcal{Q}$ .

— Soit  $u \in \mathcal{Q}_0^c$  et  $E = q(u)$ . Soit  $E' \subset E$  un fermé de  $\tau(u)$  et soit  $F'$  un filtre de Cauchy pour  $u'$ , où  $u'$  est la structure quasi-uniforme induite par  $u$  sur  $E'$ . Le filtre de  $E$  engendré par  $F'$  est un filtre de Cauchy pour  $u$ , et par suite converge vers  $x \in E$ . Si  $V(x)$  est un voisinage de  $x$  dans  $\tau(u)$ , il existe  $M \in F'$  tel que  $M \subset V(x)$ . On en déduit que  $x$  est adhérent à  $E'$  et,  $E'$  étant fermé dans  $T$ , on a  $x \in E'$ . Le filtre  $F'$  converge vers  $x$  dans  $\tau(u')$ . Ainsi  $u'$  est complète.

--Soit  $u \in \mathcal{Q}_0$  et

$$X = \mathcal{Q}_0^{cs} \cdot \mathcal{Q} \cdot u.$$

D'après la démonstration de la proposition 14, on a  $\phi \neq X \in \hat{\mathcal{M}}$ . Par suite la famille  $(\beta(h))_{h \in X}$  admet un produit  $\tilde{u}$  dans  $\hat{\mathcal{Q}}^{cs}$  où  $\hat{\mathcal{Q}}$  est la catégorie des applications quasi-uniformes correspondant à la catégorie pleine d'applications  $\hat{\mathcal{M}}$ . Soit  $\nu$  l'application

$$z \rightarrow (h(z))_{h \in X} \text{ de } E \text{ dans } \tilde{E} = q(\tilde{u}).$$

Soit  $\hat{E}$  l'adhérence de  $\nu(E)$  dans  $\tau(\tilde{u})$ . D'après ce qui précède, la structure quasi-uniforme  $\hat{u}$  induite par  $\tilde{u}$  sur  $\hat{E}$  est complète. Un raisonnement analogue à celui fait pour prouver le théorème 2 montre que la structure quasi-uniforme  $\hat{u}$  est une  $(\mathcal{Q}^{cs}, \hat{\mathcal{Q}}^{cs}, \hat{\mathcal{Q}})$ -projection de  $u$ . Si  $x \in \hat{E}$ , soit  $W(x)$  le filtre trace sur  $\nu(E)$  du filtre des voisinages de  $x$  dans  $\tau(\tilde{u})$ . On définit une bijection  $g$  de  $\hat{E}$  sur une partie de  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E/r)) \in \mathcal{M}_0$  en associant à  $x \in \hat{E}$  le filtre image de  $W(x)$  par la bijection  $(h(z))_{h \in X} \rightarrow z \text{ mod } r$ , où  $r$  est la relation d'équivalence associée à  $\nu$ . Il s'ensuit que l'image par  $g$  de  $\hat{u}$  est une  $(\mathcal{Q}^{cs}, \mathcal{Q})$ -projection de  $u$ .

*Remarques:* 1) Si  $u$  est la structure quasi-uniforme associée à une structure uniforme séparée  $U$  la  $(\mathcal{Q}^{cs}, \mathcal{Q})$ -projection de  $u$  est la structure quasi-uniforme associée à la structure uniforme séparée complétée de  $U$ . Plus généralement, si  $u$  est une structure quasi-uniforme séparée, nous appellerons une  $(\mathcal{Q}^{cs}, \mathcal{Q})$ -projection de  $u$  une *complétion de  $u$* . On peut déduire du théorème 7 un procédé explicite de construction d'une complétion  $\tilde{u}$  de  $u$  analogue au procédé classique utilisé pour la complétion des structures uniformes; alors  $q(\tilde{u})$  est une classe quotient de la classe de tous les filtres de Cauchy pour  $u$ .

2) Si  $u \in \mathcal{Q}_0^t$ , on peut montrer, à l'aide du corollaire du théorème 6 et du théorème d'existence de projections de [1], que  $u$  admet une  $(\mathcal{Q}^t \cap \mathcal{Q}^{cs}, \mathcal{Q})$ -projection. Nous n'utiliserons pas ce résultat ici.

MATHEMATICS

CATÉGORIES TOPOLOGIQUES. III

PAR

CHARLES EHRESMANN

*Dédié à Monsieur H. Freudenthal,  
à l'occasion de son soixantième anniversaire*

(Communicated by Prof. N. H. KUIPER at the meeting of October 30, 1965)

*Structure quasi-uniforme sur une catégorie microtransitive:*

*Définition 11:* Soit  $(C, T)$  une catégorie microtransitive. On dira que  $(C, T)$  est  $\psi$ -stricte si  $\psi$  est une application de  $C$  dans  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$  vérifiant les conditions:

- 1)  $\psi(x)$  est une base de filtre de  $\beta(x) \cdot C \cdot \alpha(x)$  pour tout  $x \in C$ .
- 2) Si  $W \in \psi(x)$  et  $y \in g' \cdot W \cdot g$ , où  $g \in C^*_y$  et  $g' \in C^*_y$ , il existe  $W' \in \psi(y)$  tel que  $W' \subset g' \cdot W \cdot g$ .
- 3) Les classes  $U' \cdot W \cdot U$ , où  $W \in \psi(x)$ ,  $\alpha(x) \in U \in T_y$  et  $\beta(x) \in U' \in T_y$ , forment une base du filtre des voisinages de  $x$  dans  $T$ .
- 4) Si  $W \in \psi(x)$ , il existe  $W' \in \psi(x)$  tel que les conditions
 
$$g'_1 \cdot W' \cdot g_1 \cap g'_2 \cdot W' \cdot g_2 \neq \phi, \quad g_i \in C^*_y \cdot \alpha(x) \text{ et } g'_i \in \beta(x) \cdot C^*_y$$
 entraînent  $g'_2 \cdot W' \cdot g_2 \subset g'_1 \cdot W' \cdot g_1$ .

Soit  $(C, T)$  une catégorie microtransitive  $\psi$ -stricte. Si  $x \in C$  et si  $W \in \psi(x)$ , on a  $x \in W$ . En effet, soit  $W'$  l'élément associé à  $W$  par l'axiome 4. Il existe  $g \in C^*_y$  et  $g' \in C^*_y$  tels que  $x \in g' \cdot W' \cdot g$  (axiome 3). En vertu de la condition 2, il existe  $W'_1 \in \psi(x)$  tel que  $W'_1 \subset g' \cdot W' \cdot g$ . Puisque  $W'_1 \cap W' \neq \phi$ , on a  $g' \cdot W'_1 \cdot g \cap W' \neq \phi$ , d'où  $g' \cdot W'_1 \cdot g \subset W'$ , et par suite  $x \in W$ .

*Exemples:* Si  $(C, T)$  est une catégorie microtransitive et si  $\psi(x)$  est le filtre des voisinages de  $x$  dans  $T/\beta(x) \cdot C \cdot \alpha(x)$  pour tout  $x \in C$ , alors  $(C, T)$  est une catégorie microtransitive  $\psi$ -stricte si, et seulement si, la condition 4 est vérifiée, en vertu du théorème 4. Dans ce cas on dira simplement que  $(C, T)$  est *stricte*.

2) Un groupoïde microtransitif n'est pas nécessairement strict. En particulier on montre, en utilisant l'exercice 3, p. 31 [9], qu'un groupe topologique est un groupoïde microtransitif strict si, et seulement si, ses structures uniformes droite et gauche sont identiques.

3) Un groupoïde microtransitif  $(C, T)$  est  $\psi$ -strict, en désignant par  $\psi(x)$  la base de filtre ayant  $\{x\}$  pour seul élément pour tout  $x \in C$ ; en effet, l'axiome 3 est vérifié d'après la proposition 9.

*Théorème 8: Soit  $\mu = (C^*, T)$  une catégorie microtransitive  $\psi$ -stricte. Il existe une structure quasi-uniforme stricte  $u(\mu)$  sur  $C$  telle que  $T = \tau(u(\mu))$ , que  $u(\mu)|_{C^*_0} = v(T_0)$  et que les classes de la partition de  $u(\mu)|_{C^*_\gamma}$  soient les classes  $e' \cdot C^*_\gamma \cdot e \neq \emptyset$ , où  $(e', e) \in C^*_0 \times C^*_0$ .*

*Démonstration:* Soit  $r$  la relation d'équivalence sur  $C$ :

$x \sim x'$  si, et seulement si,  $\alpha(x) = \alpha(x')$ ,  $\beta(x) = \beta(x')$  et s'il existe

$$g \in C^*_\gamma \text{ et } g' \in C^*_\gamma \text{ tels que } g' \cdot x = x' \cdot g.$$

Soit  $I = C/r$  et soit  $(A_i)_{i \in I}$  la partition de  $C$  définie par les classes modulo  $r$ . Choisissons une section  $s$  de la surjection  $\bar{r}$  de  $C$  sur  $C/r$  et une application  $\sigma$  de  $C$  dans  $C^*_\gamma \times C^*_\gamma$  telle que  $\sigma(s(i)) = (\beta(s(i)), \alpha(s(i)))$  et que:

$$\text{Si } x \in A_i \text{ et } (g', g) = \sigma(x), \text{ on ait } x = g' \cdot s(i) \cdot g.$$

Soient  $i \in I$ ,  $e = \alpha(s(i))$  et  $e' = \beta(s(i))$ . Soient  $U$  et  $U'$  des voisinages de  $e$  et  $e'$  respectivement dans  $T_\gamma$  et soit  $W \in \psi(s(i))$ . Pour tout  $x \in A_i$ , posons

$$W_x = g' \cdot W \cdot g, \text{ si } (g', g) = \sigma(x),$$

et

$$i(U', W, U) = \bigcup_{x \in A_i} ((U' \cdot W_x \cdot U) \times (U' \cdot W_x \cdot U)).$$

Comme  $x \in g' \cdot W \cdot g$ , il existe  $W_1 \in \psi(x)$  tel que  $W_1 \subset g' \cdot W \cdot g$  (axiome 2), de sorte que

$$U' \cdot W_1 \cdot U \subset U' \cdot W_x \cdot U.$$

Ainsi  $U' \cdot W_x \cdot U$  est un voisinage de  $x$  dans  $T$ , car  $U' \cdot W_1 \cdot U$  en est un (axiome 3). Lorsque  $U, U'$  et  $W$  varient, les classes  $i(U', W, U)$  engendrent un filtre  $\varphi(i)$  de  $C \times C$ . Nous allons montrer que  $((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  est une structure quasi-uniforme  $u(\mu)$  sur  $C$  répondant aux conditions de l'énoncé.

— Si  $x \in C$ , nous posons  $\sigma(x) = (\tilde{x}', \tilde{x})$ . La classe  $V = i(U', W, U)$  construite ci-dessus est une partie symétrique de  $C \times C$  contenant  $\Delta_{A_i}$ . Soient  $U'_1$  et  $U_1$  des voisinages ouverts de  $e$  et de  $e'$  respectivement dans  $T_\gamma$  tels que

$$\alpha(U_1) \subset U_1 = U_1^{-1}, \quad \beta(U'_1) \subset U'_1 = U'_1^{-1},$$

$$(U_1)^5 = U_1 \cdot U_1 \cdot U_1 \cdot U_1 \cdot U_1 \subset U \text{ et } (U'_1)^5 \subset U'.$$

Soit  $W' \in \psi(s(i))$  l'élément dont la condition 4 de la définition 11 assure l'existence relativement à  $W$ . On a

$$V' = i(U'_1, W', U_1) \in \varphi(i).$$

Supposons  $(z, z) \in \Delta_{A_j} \cap V'$ . Il existe  $x \in A_i$  tel que

$$z = u' \cdot \tilde{x}' \cdot w' \cdot \tilde{x} \cdot u, \text{ où } u \in U_1, u' \in U'_1 \text{ et } w' \in W'.$$

Comme  $s(j) \in (\tilde{z}'^{-1} \cdot u' \cdot \tilde{x}') \cdot W' \cdot (\tilde{x} \cdot u \cdot \tilde{z}^{-1})$ , il existe  $W'' \in \psi(s(j))$  tel que  $W''_z \subset u' \cdot W'_x \cdot u$  (axiome 2). Lorsque  $t \in A_j$ , posons

$$\hat{t} = \tilde{x} \cdot u \cdot \tilde{z}^{-1} \cdot \bar{t} \cdot u^{-1} \in e \cdot C^*_\gamma \cdot e \text{ et } \hat{t}' = u'^{-1} \cdot \bar{t}' \cdot \tilde{z}'^{-1} \cdot u' \cdot \tilde{x}' \in e' \cdot C^*_\gamma \cdot e'.$$

On obtient:

$$\begin{aligned} u'^{-1} \cdot W''_t \cdot u^{-1} &= u'^{-1} \cdot \tilde{t}' \cdot \tilde{z}'^{-1} \cdot W''_x \cdot \tilde{z}^{-1} \cdot \tilde{t} \cdot u^{-1} \subset \\ &\subset u'^{-1} \cdot \tilde{t}' \cdot \tilde{z}'^{-1} \cdot u' \cdot \tilde{x}' \cdot W' \cdot \tilde{x} \cdot u \cdot \tilde{z}^{-1} \cdot \tilde{t} \cdot u^{-1} = \hat{t}' \cdot W' \cdot \hat{t}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\alpha(z) = \alpha(u) \in U_1 \text{ et } \beta(z) = \beta(u') \in U'_1,$$

on a  $V'' = j(U'_1, W'', U_1) \in \varphi(j)$ . Supposons

$$(y, y_1) \in V' \text{ et } (y_1, y_2) \in V''.$$

Il existe  $x_1 \in A_t$  et  $t \in A_j$  tels que

$$y \in U'_1 \cdot W'_{x_1} \cdot U_1, y_1 \in U'_1 \cdot W'_{x_1} \cdot U_1 \cap U'_1 \cdot W''_t \cdot U_1 \text{ et } y_2 \in U'_1 \cdot W''_t \cdot U_1.$$

Or d'après ce qui précède on a

$$\begin{aligned} y_2 &\in U'_1 \cdot W''_t \cdot U_1 \subset U'_1 \cdot u' \cdot \hat{t}' \cdot W' \cdot \hat{t} \cdot u \cdot U_1 \subset U'_1 \cdot U'_1 \cdot \hat{t}' \cdot W' \cdot \hat{t} \cdot U_1 \cdot U_1, \\ y_1 &\in U'_1 \cdot W'_{x_1} \cdot U_1 \cap U'_1 \cdot U'_1 \cdot \hat{t}' \cdot W' \cdot \hat{t} \cdot U_1 \cdot U_1. \end{aligned}$$

Par suite il existe  $u'_1 \in e' \cdot (U'_1)^3 \cdot e'$  et  $u_1 \in e \cdot (U_1)^3 \cdot e$  tels que

$$\tilde{x}'_1 \cdot W' \cdot \tilde{x}_1 \cap (u'_1 \cdot \hat{t}') \cdot W' \cdot (\hat{t} \cdot u_1) \neq \phi.$$

En vertu de l'axiome 4 et du choix de  $W'$ , cette relation entraîne

$$u'_1 \cdot \hat{t}' \cdot W' \cdot \hat{t} \cdot u_1 \subset \tilde{x}'_1 \cdot W' \cdot \tilde{x}_1, \text{ c'est-à-dire } \hat{t}' \cdot W' \cdot \hat{t} \subset (U'_1)^3 \cdot W_{x_1} \cdot (U_1)^3.$$

Il en résulte

$$y_2 \in (U'_1)^5 \cdot W_{x_1} \cdot (U_1)^5 \subset U' \cdot W_{x_1} \cdot U \text{ et } (y_2, y) \in V,$$

car  $W' \subset W$ . Donc  $V' \perp V'' \subset V$ . Ainsi  $u(\mu)$  est une structure quasi-uniforme stricte sur  $C$ .

—  $u(\mu)$  ne dépend pas du choix de  $s$ . Montrons qu'elle ne dépend pas non plus du choix de  $\sigma$ . En effet, soit  $\bar{u} = ((A_i)_{i \in I}, \bar{\varphi})$  la structure quasi-uniforme associée de même à  $(s, \bar{\sigma})$ . Soit  $i(U', W, U) \in \varphi(i)$  et soit  $W'$  l'élément de  $\varphi(s(i))$  correspondant à  $W$  par l'axiome 4 de la définition 11. Soit  $x \in A_t$ ,  $\sigma(x) = (\tilde{x}', \tilde{x})$  et  $\bar{\sigma}(x) = (\tilde{x}'_1, \tilde{x}_1)$ . Posons  $\bar{W}'_x = \tilde{x}'_1 \cdot W' \cdot \tilde{x}_1$  et

$$i(U', W', U) = \bigcup_{x \in A_t} (U' \cdot \bar{W}'_x \cdot U \times U' \cdot \bar{W}'_x \cdot U) \in \bar{\varphi}(i).$$

Puisque

$$x = \tilde{x}' \cdot s(i) \cdot \tilde{x} = \tilde{x}'_1 \cdot s(i) \cdot \tilde{x}_1 \in \tilde{x}' \cdot W' \cdot \tilde{x} \cap \tilde{x}'_1 \cdot W' \cdot \tilde{x}_1,$$

on obtient (axiome 4)

$$\bar{W}'_x \subset W_x \text{ et } U' \cdot \bar{W}'_x \cdot U \subset U' \cdot W_x \cdot U.$$

Par conséquent  $i(U', W', U) \subset i(U', W, U)$ , de sorte que  $\varphi(i) \subset \bar{\varphi}(i)$ . De même, on trouve  $\bar{\varphi}(i) \subset \varphi(i)$ , c'est-à-dire  $\varphi(i) = \bar{\varphi}(i)$  et  $\bar{u} = u(\mu)$ .

— Soit  $x \in A_t$  et  $V = i(U', W, U) \in \varphi(i)$ . On a  $U' \cdot W_x \cdot U \subset V(x)$ , en désignant par  $V(x)$  le voisinage de  $x$  dans  $\tau(u(\mu))$  associé à  $V$ . Inversement,

repreons les notations de la deuxième partie de la démonstration et supposons  $(x, y) \in V'$ . Il existe  $x_i \in A_i$  tel que

$$x \in U'_1 \cdot W'_{x_i} \cdot U_1 \text{ et } y \in U'_1 \cdot W'_{x_i} \cdot U_1.$$

Etant donné que

$$x \in \tilde{x}' \cdot W' \cdot \tilde{x} \cap (\hat{u}' \cdot \tilde{x}'_i) \cdot W' \cdot (\tilde{x}_i \cdot \hat{u}), \text{ où } \hat{u}' \in U'_1 \text{ et } \hat{u} \in U_1,$$

on a, par construction de  $W'$ :

$$(\hat{u}' \cdot \tilde{x}'_i) \cdot W' \cdot (\tilde{x}_i \cdot \hat{u}) \subset \tilde{x}' \cdot W \cdot \tilde{x}.$$

Il s'ensuit

$$W'_{x_i} \subset U'_1 \cdot W_x \cdot U_1 \text{ et } y \in U'_1 \cdot U'_1 \cdot W_x \cdot U_1 \cdot U_1 \subset U' \cdot W_x \cdot U,$$

i.e.  $V'(x) \subset U' \cdot W_x \cdot U$ . Ceci montre que  $\tau(u(\mu)) = T$ . — On voit que la structure quasi-uniforme  $u(\mu)/C^*_\gamma = ((A_i)_{i \in I}, \varphi_\gamma)$  admet pour partition les classes  $A_i = e' \cdot C^*_\gamma \cdot e \neq \phi$ , où  $(e', e) \in C^*_0 \times C^*_0$ , et que  $u(\mu)/C^*_0 = v(T_0)$ . Ceci achève la démonstration.

*Corollaire:* Si  $\mu = (C^*, T)$  est un groupoïde microtransitif, il existe une structure quasi-uniforme  $u(\mu) = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  telle que  $\tau(u(\mu)) = T$  et que  $A_i = e' \cdot C \cdot e$ , si  $(e', e) \in C^*_0 \times C^*_0$  et  $e' \cdot C \cdot e \neq \phi$ .

En effet,  $(C^*, T)$  est  $\psi$ -strict, si  $\psi(x) = \{\{x\}\}$  pour tout  $x \in C$ , de sorte que le corollaire est un cas particulier du théorème 8. Remarquons que le filtre  $\varphi(i)$  admet pour base la classe des classes

$$i(U', U) = \bigcup_{x \in A_i} (U' \cdot x \cdot U) \times (U' \cdot x \cdot U),$$

si  $U$  et  $U'$  sont des voisinages de  $e$  et  $e'$  respectivement dans  $T$  et si  $A_i = e' \cdot C \cdot e$ .

*Remarque:* Si  $\mu = (C^*, T)$  est un groupe topologique, la structure quasi-uniforme  $u(\mu)$  (corollaire th. 8) est la structure uniforme bilatère (ex. 6, p. 31 [9]).

*Proposition 15:* Soient  $\mu = (C^*, T)$  et  $\hat{\mu} = (\hat{C}^*, \hat{T})$  des catégories microtransitives  $\hat{\psi}$ -stricte et  $\psi$ -stricte respectivement. Si  $F = (\hat{\mu}, \mathbf{F}, \mu) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$  et si  $\hat{\psi}(F(x)) \subset \mathbf{F}(\psi(x))$  pour tout  $x \in C$ , alors on a  $(u(\hat{\mu}), \mathbf{F}, u(\mu)) \in \mathcal{L}$ .

*Démonstration:* Soit  $u(\mu) = ((A_i)_{i \in I}, \varphi)$  et  $u(\hat{\mu}) = ((\hat{A}_j)_{j \in J}, \hat{\varphi})$  (th. 8). Pour tout  $i \in I$ , il existe  $j \in J$  tel que  $F(A_i) \subset \hat{A}_j$ , car  $\mathbf{F}$  définit un foncteur de  $C^*$  vers  $\hat{C}^*$ . Soit  $i \in I$  et  $F(A_i) \subset \hat{A}_j$ . D'après la démonstration du théorème 8, le filtre  $\varphi(i)$  admet une base  $\varphi_b(i)$  construite à partir de deux applications  $s$  et  $\sigma$ . Considérons de même la base  $\hat{\varphi}_b(j)$  de  $\hat{\varphi}(j)$  obtenue à partir de  $\hat{s}$  et de  $\hat{\sigma}$ . Comme  $\hat{\varphi}$  ne dépend pas du choix de  $\hat{s}$  et de  $\hat{\sigma}$  (dém. th. 8), on peut supposer  $\hat{s}(j) = F(s(i))$ . Soit  $\hat{V} = j(\hat{U}', \hat{W}, \hat{U}) \in \hat{\varphi}_b(j)$ . Puisque  $\alpha(\hat{s}(j)) = F(\alpha(s(i)))$ , il existe un voisinage  $U$  de  $\alpha(s(i))$  dans  $T_\gamma$  tel que  $F(U) \subset \hat{U}$ ; il existe aussi un voisinage  $U'$  de  $\beta(s(i))$  dans  $T_\gamma$  tel que



$F(U') \subset \hat{U}'$ . Soit  $\hat{W}' \in \hat{\psi}(s(j))$  l'élément dont l'axiome 4 de la définition 11 assure l'existence relativement à  $\hat{W}$ . Etant donné que  $\hat{\psi}(F(s(i))) \subset F(\psi(s(i)))$ , il existe  $W \in \psi(s(i))$  vérifiant  $F(W) \subset \hat{W}'$ . Posons  $V = i(U', W, U)$ . On a  $V \in \varphi(i)$ . Soit  $x \in A_i$  et  $y \in U' \cdot W_x \cdot U$ . Notons  $z = F(x)$  et  $\sigma(x) = (\tilde{x}', \tilde{x})$ . Comme

$$F(x) = F(\tilde{x}') \cdot F(s(i)) \cdot F(\tilde{x}) \in F(\tilde{x}') \cdot \hat{W}' \cdot F(\tilde{x}) \cap \hat{W}'_z,$$

on a, d'après l'axiome 4:

$$F(W_x) = F(\tilde{x}' \cdot W \cdot \tilde{x}) \subset F(\tilde{x}') \cdot \hat{W}' \cdot F(\tilde{x}) \subset \hat{W}'_z,$$

d'où

$$F(y) \in F(U') \cdot F(W_x) \cdot F(U) \subset \hat{U}' \cdot \hat{W}'_z \cdot \hat{U}.$$

Il s'ensuit  $(F(y), z) \in j(\hat{U}', \hat{W}', \hat{U})$ , et par suite  $F \times F(V) \subset \hat{V}$ . Donc  $(u(\hat{\mu}), \mathbf{F}, u(\mu)) \in \mathcal{Q}$ .

*Corollaire:* Soient  $\mu = (C^*, T)$  et  $\hat{\mu} = (\hat{C}^*, \hat{T})$  deux catégories microtransitives strictes (resp. deux groupoïdes microtransitifs). Si  $F = (\hat{\mu}, \mathbf{F}, \mu)$  est un foncteur continu,  $(u(\hat{\mu}), \mathbf{F}, u(\mu))$  est une application quasi-uniforme.

En effet, les conditions de la proposition 15 sont alors vérifiées.

Soit  $\mathcal{F}(\mathcal{Q})$  la catégorie produit fibré  $\bar{p}_{\mathcal{F}} \vee \tau$ , dont les unités sont identifiées aux couples  $(C^*, u)$  tels que  $u \in \mathcal{Q}_0$  et  $(C^*, \tau(u)) \in \mathcal{F}(\mathcal{T})_0$ . Soit  $\mathcal{F}(\mathcal{Q}^c)$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}(\mathcal{Q})$  ayant pour unités les couples  $(C^*, u) \in \mathcal{F}(\mathcal{Q})_0$  pour lesquels  $u$  est une structure quasi-uniforme séparée complète. Soit  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{Q}})$  et  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{Q}}^c)$  les catégories correspondantes, relatives à la catégorie pleine d'applications  $\hat{\mathcal{M}}$ .

*Proposition 16:* Si  $\mathcal{M}_0$  et  $\hat{\mathcal{M}}_0$  sont des univers et  $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ , tout  $(C^*, u) \in \mathcal{F}(\mathcal{Q})_0$  admet une  $(\mathcal{F}(\mathcal{Q}^c), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{Q}}^c), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{Q}}))$ -projection.

En effet, la démonstration est analogue à celle du théorème 3, en utilisant la démonstration du théorème 7.

*Problèmes:* Si  $(C^*, T)$  est une catégorie microtransitive stricte (resp. un groupoïde microtransitif), soit  $(\hat{C}^*, \hat{u})$  la  $(\mathcal{F}(\mathcal{Q}^c), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{Q}}^c), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{Q}}))$ -projection de  $(C^*, u(\mu))$ . Il serait intéressant de construire explicitement  $(\hat{C}^*, \hat{u})$  et de savoir si  $(\hat{C}^*, \tau(\hat{u}))$  est une catégorie microtransitive stricte (resp. un groupoïde microtransitif). Par ailleurs, il faudrait étudier les catégories  $q$ -structurées, en particulier chercher sous quelles conditions  $(C^*, u(\mu))$  est  $q$ -structurée, lorsque  $\mu = (C^*, T)$  est une catégorie microtransitive stricte.

#### 4. SECTIONS LOCALES

*Catégorie des sections locales:*

Dans ce paragraphe, nous désignons par  $(C^*, T)$  une catégorie topologique  $\mu$  appartenant à  $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ .

*Définition 12:* On appelle section locale de  $\mu$  un triplet  $s = (U', \mathbf{s}, U)$  vérifiant les conditions suivantes:

- 1)  $U \in T_0$ ,  $(T, \mathbf{s}, T_0|U) \in \mathcal{F}$  et  $\beta \mathbf{s}(U) \subset U'$ .
- 2) Pour tout  $x \in U$ , on a  $\alpha(\mathbf{s}(x)) = x$ .

Soit  $S(\mu)$  la classe de toutes les sections locales de  $(C', T)$ . Si  $s = (U', \mathbf{s}, U) \in S(\mu)$ , on pose  $s(x) = \mathbf{s}(x)$  pour tout  $x \in U$ .

*Théorème 9:*  $(S(\mu)^\bullet, <)$  est une catégorie inductive complètement régulière à droite [2] pour la loi de composition

$$(U'', \mathbf{s}', \bar{U}') \bullet (U', \mathbf{s}, U) = (U'', \mathbf{s}' \beta \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}, U), \text{ où } \mathbf{s}' \beta \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} \text{ est la surjection}$$

$$x \rightarrow \mathbf{s}' \beta \mathbf{s}(x) \cdot \mathbf{s}(x), \text{ où } x \in U, \text{ si et seulement si, } \bar{U}' = U',$$

et la relation d'ordre:

$$(U'_1, \mathbf{s}_1, U_1) < (U', \mathbf{s}, U) \text{ si, et seulement si,}$$

$$1+ \quad U'_1 \subset U', U_1 \subset U \text{ et } \mathbf{s}_1(x) = \mathbf{s}(x) \text{ lorsque } x \in U_1.$$

*Démonstration:* Montrons que  $(U'', \mathbf{s}' \beta \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}, U) \in S(\mu)$ . En effet, on a, pour tout  $x \in U$ :

$$\alpha((\mathbf{s}' \beta \mathbf{s} \cdot \mathbf{s})(x)) = \alpha(\mathbf{s}(x)) = x.$$

Soit  $M = \alpha^{-1}(U) \cap \beta^{-1}(U') \in T$ . La relation  $\mathbf{s}(U) \subset M$  entraîne

$$s' \beta s = (T, \mathbf{s}' \beta \mathbf{s}, T_0|U) =$$

$$= (T, \mathbf{s}', T_0|U') \cdot (T_0|U', \beta \iota, T|M) \cdot (T|M, \mathbf{s}, T_0|U) \in \mathcal{F},$$

d'où

$$g = (T \times T, [\mathbf{s}' \beta \mathbf{s}, \mathbf{s}], T_0|U) = [\mathbf{s}' \beta \mathbf{s}, (T, \mathbf{s}, T_0|U)] \in \mathcal{F}.$$

Puisque  $\alpha(\mathbf{s}' \beta \mathbf{s}(x)) = \beta(\mathbf{s}(x))$  si  $x \in U$ , on trouve  $g(U) \subset C' \star C'$ . Il en résulte

$$g' = (T \star T, [\mathbf{s}' \beta \mathbf{s}, \mathbf{s}], T_0|U) \in \mathcal{F}$$

et

$$(T, \mathbf{s}' \beta \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}, T_0|U) = (T, \kappa, T \star T) \cdot g' \in \mathcal{F}, \text{ si } C' = (C, \kappa).$$

Enfin  $\beta(\mathbf{s}(U)) \subset U'$  entraîne

$$\beta(\mathbf{s}' \beta \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}(U)) \subset \beta(\mathbf{s}' \beta \mathbf{s}(U)) \subset \beta(\mathbf{s}'(U')) \subset U'',$$

c'est-à-dire  $(U'', \mathbf{s}' \beta \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}, U) \in S(\mu)$ , et  $S(\mu)^\bullet$  est une classe multiplicative.  
 –  $(U', \mathbf{s}, U) \in S(\mu)$  admet  $(U, \iota, U)$  et  $(U', \iota, U')$  pour seules unités à droite et à gauche respectivement. La composition entre surjections étant associative, de même que la loi de composition  $\kappa$ , il est évident que  $S(\mu)^\bullet$  est une catégorie. Nous identifierons  $S(\mu)^\bullet_0$  à  $T_0$ , en identifiant  $(U, \iota, U)$  à  $U$ , et nous désignerons par  $\alpha^\bullet$  et  $\beta^\bullet$  les applications source et but dans  $S(\mu)^\bullet$ .  
 – Comme  $(\mathcal{F}, <)$  est une catégorie inductive complètement régulière à droite, on voit que  $(S(\mu)^\bullet, <)$  est une catégorie inductive complètement régulière à droite, admettant  $(\phi, \phi, \phi)$  pour plus petit élément 0.

*Catégorie quasi-topologique des sections locales.*

Soit  $X$  une classe. Soit  $(F(X), <)$  la classe locale de tous les filtres de  $X$ , la relation d'ordre étant

$F' < F$  si, et seulement si,  $F \subset F'$  (i.e. si  $F'$  est un filtre plus fin que  $F$ ).  $(F(X), <)$  admet pour plus petit élément le filtre trivial  $\mathcal{P}(X)$ , noté  $0$ . Un idéal [14] de  $F(X)$  est une partie  $I$  de  $F(X)$  saturée par induction et telle que

$$F \cup F' \in I \text{ si } F \in I \text{ et } F' \in I.$$

Pour tout  $x \in X$ , soit  $x^\epsilon$  le filtre de  $X$  admettant pour base  $\{\{x\}\}$ . Si  $B$  est une base d'un filtre  $F$ , nous posons  $F = \bar{B}$ . Si  $f$  est une application de  $X$  dans  $Y$ , nous désignons par  $f(F)$  le filtre de  $Y$  ayant une base formée des classes  $f(m)$ , où  $m \in F$ .

On appelle *quasi-topologie sur  $X$*  une application  $\pi$  de  $X$  dans la classe des idéaux de  $F(X)$  telle que  $x^\epsilon \in \pi(x)$  pour tout  $x \in X$ . On pose  $X = \hat{\theta}(\pi)$  et, si  $F \in \pi(x)$ , on dit que  $F$  *quasi-converge vers  $x$*  dans  $\pi$  et on écrit  $F\pi x$ . On appelle *application quasi-continue* un triplet  $(\pi', f, \pi)$ , où  $\pi$  et  $\pi'$  sont des quasi-topologies et où  $(\hat{\theta}(\pi'), f, \hat{\theta}(\pi))$  est une application telle que  $F\pi x$  entraîne  $f(F) \pi' f(x)$ , pour tout  $x \in X$ . 1

Si  $\pi$  est une quasi-topologie sur  $X$ , la classe des parties  $U$  de  $X$  telles que  $U \in F$  si  $F\pi x$  et  $x \in U$  définit une topologie  $\hat{\tau}(\pi)$  sur  $X$ . Tout filtre quasi-convergeant vers  $x$  dans  $\pi$  converge vers  $x$  dans  $\hat{\tau}(\pi)$  (mais non réciproquement). Si  $(\pi', f, \pi)$  est une application quasi-continue,  $(\hat{\tau}(\pi'), f, \hat{\tau}(\pi))$  est continue.

Soit  $P$  la catégorie des applications quasi-continues

$$f = (\pi', \mathbf{f}, \pi) \text{ telles que } \hat{\theta}(f) = (\hat{\theta}(\pi'), \mathbf{f}, \hat{\theta}(\pi)) \in \mathcal{M},$$

la loi de composition étant

$$(\pi'', \mathbf{f}', \bar{\pi}') \cdot (\pi', \mathbf{f}, \pi) = (\pi'', \mathbf{f}'\mathbf{f}, \pi) \text{ si, et seulement si, } \bar{\pi}' = \pi'.$$

Nous identifions la classe des unités de  $P$  à la classe  $P_0$  des quasi-topologies vérifiant  $\hat{\theta}(\pi) \in \mathcal{M}_0$ .  $P$  est une catégorie à  $\mathcal{I}$ -produits si  $\mathcal{M}$  est à  $\mathcal{I}$ -produits et  $\mathcal{T}$  s'identifie à la sous-catégorie pleine de  $P$  ayant pour unités les quasi-topologies  $\pi$  telles que tout filtre convergeant vers  $x$  dans  $\hat{\tau}(\pi)$  appartienne à  $\pi(x)$ . De plus  $\hat{\theta} = (\mathcal{M}, \hat{\theta}, P)$  est un foncteur d'homomorphismes saturé et  $\hat{\theta}$ -étalant, la  $\hat{\theta}$ -sous-structure  $\pi/X'$  de  $\pi$  telle que  $\hat{\theta}(\pi/X') = X' \subset \hat{\theta}(\pi)$  étant la *quasi-topologie induite par  $\pi$  sur  $X'$* , définie par

$$F \in (\pi/X')(x), \text{ où } x \in X', \text{ si, et seulement si, } \bar{F}\pi x.$$

Une catégorie  $\hat{\theta}$ -structurée est appelée *catégorie quasi-topologique*.

*Remarque:* Une quasi-topologie est appelée "Limesraum" dans [11]. La catégorie  $P$  est considérée dans [12], dont nous reprenons les notations. Si  $\pi \in P_0$ , la topologie  $\hat{\tau}(\pi)$  est sous-jacente à la pseudo-topologie [13] telle que les ultrafiltres pseudo-convergeant vers  $x \in \hat{\theta}(\pi)$  soient les ultrafiltres

appartenant à  $\pi(x)$ ; plusieurs quasi-topologies peuvent déterminer la même pseudo-topologie.

Nous supposons désormais que  $\mathcal{M}_0$  est un univers.

Soient  $T$  et  $T'$  deux topologies sur  $E \in \mathcal{M}_0$  et  $E' \in \mathcal{M}_0$  respectivement. Si  $x \in E$ , désignons par  $T(x)$  le filtre des voisinages de  $x$  dans  $T$ . Pour tout  $f \in T' \cdot \mathcal{F} \cdot T$ , soit  $\lambda(f)$  la classe des filtres  $F$  de  $T' \cdot \mathcal{F} \cdot T$  tels que  $F(T(x))$  converge vers  $f(x)$  dans  $T'$  pour tout  $x \in E$ . (Nous désignons par  $F(T(x))$  le filtre ayant une base formée des classes  $m(U) = \bigcup_{h \in m} h(U)$ , où  $m \in F$  et  $U \in T(x)$ .) L'application  $f \rightarrow \lambda(f)$  est une quasi-topologie sur  $T' \cdot \mathcal{F} \cdot T$ , appelée *quasi-topologie de la convergence locale* ([12] et [13]), et notée  $\lambda(T', T)$ . Cette quasi-topologie a les propriétés suivantes:

1) Si  $T$  est localement compact,  $\lambda(T', T)$  s'identifie à la topologie de la convergence compacte.

2) Si  $T'' \in \mathcal{F}_0$ , on a

$$(\lambda(T'', T), c, \lambda(T'', T') \times \lambda(T', T)) \in P,$$

où  $c$  est la surjection  $(g, f) \rightarrow g \cdot f$  si  $g \in T'' \cdot \mathcal{F} \cdot T'$  et  $f \in T' \cdot \mathcal{F} \cdot T$ . En effet, si  $F \in \lambda(T', T)$  et  $G \in \lambda(T'', T')$ , pour tout  $x \in E$  on a

$$F(T(x)) < T'(f(x)) \text{ et } G(F(T(x))) < G(T'(f(x))) < T''(g \cdot f(x)).$$

Il s'ensuit  $c(G \times F) \in \lambda(T'', T)$  ( $g \cdot f$ ), car  $c(G \times F)(T(x)) = G(F(T(x)))$ .

Soit  $S(T', T)$  la classe des

$$f = (T', \mathbf{f}, T|U) \in \mathcal{F} \text{ tels que } \hat{\alpha}(f) = U \in T.$$

$S(T', T)$  contient en particulier  $(T', \phi, \phi)$ . Soit  $a \notin E'$  et soit  $\hat{T}'$  la topologie sur  $\hat{E}' = E' \cup \{a\}$  telle que

$$U' \in \hat{T}' \text{ si, et seulement si, } U' \in T' \text{ ou } U' = \hat{E}',$$

i.e.  $\hat{T}'$  est la topologie la moins fine sur  $\hat{E}'$  pour laquelle

$$(\hat{T}', \iota, T') \in \mathcal{F} \text{ et } \hat{T}'|E' = T'.$$

Si  $f = (T', \mathbf{f}, T|U) \in S(T', T)$ , on a  $\hat{f} = (\hat{T}', \hat{\mathbf{f}}, T) \in \mathcal{F}$ , en posant

$$\hat{\mathbf{f}}(x) = \mathbf{f}(x) \text{ si } x \in U \text{ et } \hat{\mathbf{f}}(x) = a \text{ si } x \notin U.$$

L'application  $f \rightarrow \hat{f}$  est une bijection  $\gamma$  de  $S(T', T)$  sur  $\hat{T}' \cdot \mathcal{F} \cdot T$ .

**Définition 13:** Soient  $T \in \mathcal{F}_0$  et  $T' \in \mathcal{F}_0$ ; on appelle quasi-topologie de la convergence locale sur  $S(T', T)$  la quasi-topologie  $\hat{\lambda}(T', T)$  image par  $\gamma^{-1}$  de  $\lambda(\hat{T}', T)$ .

Soit  $F$  un filtre de  $S(T', T)$  et soit  $x \in E$ . Si  $m \in F$  et  $U \in T(x)$ , posons

$$\begin{cases} m(U) = \bigcup_{h \in m} h(U) \text{ si } U \subset \hat{\alpha}(h) \text{ pour tout } h \in m \\ m(U) = \phi \text{ sinon.} \end{cases}$$

Les classes  $m(U)$  telles que  $m \in F$ ,  $U \in T(x)$  et  $m(U) \neq \phi$  forment une base d'un filtre  $F(T(x))$ ; si  $m(U) = \phi$  pour tout  $m \in F$  et tout  $U \in T(x)$ , on a  $F(T(x)) = 0$ . Pour tout  $f \in S(T', T)$ , la relation  $F\hat{\lambda}(T', T) f$  est équivalente à :

$$F(T(x)) \neq 0 \text{ et } F(T(x)) < T'(f(x)) \text{ pour tout } x \in \hat{\alpha}(f).$$

*Proposition 17:* Si  $T$  est une topologie localement compacte,  $\hat{\lambda}(T', T)$  s'identifie à la topologie compacte-ouverte [6] engendrée par les classes  $W(K)$ , où  $K$  est un compact de  $T$ ,  $W$  un ouvert de  $T'$  et où

$$(T', \mathbf{f}, T|U) \in W(K) \text{ si } K \subset U \text{ et } \mathbf{f}(K) \subset W.$$

En effet, la topologie compacte-ouverte est l'image par  $\gamma^{-1}$  de la topologie de la convergence compacte sur  $\hat{T}' \cdot \mathcal{S} \cdot T$ , laquelle s'identifie à  $\lambda(\hat{T}', T)$  puisque  $T$  est localement compact.

*Proposition 18:* Soient  $T \in \mathcal{T}_0$ ,  $T' \in \mathcal{T}_0$  et  $T'' \in \mathcal{T}_0$ . Alors

$$(\hat{\lambda}(T'', T), \hat{c}, \hat{\lambda}(T'', T') \times \hat{\lambda}(T', T))$$

est une application quasi-continue, où  $\hat{c}$  est la surjection :

$$((T'', \mathbf{f}', T'|U'), (T', \mathbf{f}, T|U)) \rightarrow (T'', \mathbf{f}'\mathbf{f}_t, T|\mathbf{f}^{-1}(U')).$$

*Démonstration:* Soit  $\theta(T) = E$ ,  $\theta(T') = E'$  et  $\theta(T'') = E''$ , et reprenons les notations précédant la définition 13. Soit  $a'' \notin E''$  et  $\hat{T}''$  la topologie la moins fine sur  $\hat{E}'' = E'' \cup \{a''\}$  telle que  $(\hat{T}'', \iota, T'') \in \mathcal{S}$  et  $\hat{T}''|E'' = T''$ . Si  $f' = (T'', \mathbf{f}', T'|U') \in S(T'', T')$ , on a

$$\hat{f}' = (\hat{T}'', \hat{\mathbf{f}}', \hat{T}') \in \hat{T}'' \cdot \mathcal{S} \cdot \hat{T}', \text{ en posant } \hat{\mathbf{f}}'(x) = \mathbf{f}'(x) \text{ si } x \in U \\ \hat{\mathbf{f}}'(x) = a'' \text{ si } x \notin U.$$

L'application  $f' \rightarrow \hat{f}'$  définit une injection  $\gamma'$  de  $S(T'', T')$  dans  $\hat{T}'' \cdot \mathcal{S} \cdot \hat{T}'$  et  $\hat{\lambda}(T'', T')$  est la quasi-topologie image par  $\gamma'^{-1}$  de  $\lambda(\hat{T}'', \hat{T}')$ . Soit  $\gamma''$  la bijection de  $S(T'', T)$  sur  $\hat{T}'' \cdot \mathcal{S} \cdot T$  telle que

$$\gamma''(T'', \mathbf{g}, T|U) = (\hat{T}'', \hat{\mathbf{g}}, T), \text{ où } \hat{\mathbf{g}}(x) = \mathbf{g}(x) \text{ si } x \in U \text{ et } \hat{\mathbf{g}}(x) = a'' \text{ si } x \notin U.$$

Si  $f \in S(T', T)$  et  $f' \in S(T'', T')$ , on a  $g = \hat{c}(f', f)$  si, et seulement si,

$$\gamma''(g) = \gamma'(f') \cdot \gamma(f) = c(\gamma'(f'), \gamma(f)),$$

car  $\gamma''(g)(x) = a''$  lorsque  $x \notin \hat{\alpha}(f)$  ou  $\gamma(f)(x) \notin \hat{\alpha}(f')$ . Comme

$$(\lambda(\hat{T}'', T), c, \lambda(\hat{T}'', \hat{T}') \times \lambda(\hat{T}', T))$$

est quasi-continue (voir plus haut),  $\hat{c}$  est aussi quasi-continue.

*Théorème 10:* Soit  $(C^*, T)$  une catégorie topologique  $\mu$ . Il existe une quasi-topologie  $\pi = \pi(\mu)$  telle que  $(S(\mu)^\bullet, \pi)$  soit une catégorie quasi-topologique (th. 9). Si  $T_0$  est localement compact,  $(S(\mu)^\bullet, \hat{\tau}(\pi))$  est une catégorie topologique.

*Démonstration:* Posons  $S^\bullet = S(\mu)^\bullet$  et  $\hat{U} = T_0/U$ , si  $U \in T_0$ . On a  $S \in \mathcal{M}_0$ , car  $\mathcal{M}_0$  est un univers. La surjection

$$s = (U', \mathbf{s}, U) \rightarrow ((T_0, \iota, \hat{U}'), (T, \mathbf{s}, \hat{U}))$$

est une bijection  $\varphi$  de  $S$  sur une sous-classe de  $S(T_0, T_0) \times S(T, T_0)$ . Soit  $\pi = \pi(\mu)$  la quasi-topologie sur  $S$  image par  $\varphi^{-1}$  de la quasi-topologie  $\lambda'$  induite sur  $\varphi(S)$  par  $\hat{\lambda}(T_0, T_0) \times \hat{\lambda}(T, T_0)$ . Si  $F \in F(S)$  et  $s = (U', \mathbf{s}, U) \in S$ , on a

$F\pi s$  si, et seulement si, pour tout  $x \in U$ , tout  $x' \in U'$  et tout  $V \in T(s(x))$ , il existe  $m \in F$ ,  $U_1 \in T_0(x)$  et  $U'_1 \in T_0(x')$  tels que  $\phi \neq m(U_1) \subset V$  et  $U'_1 \subset \beta^\bullet(s')$  lorsque  $s' \in m$ .

Soit  $\pi_0$  la quasi-topologie induite par  $\pi$  sur  $C^*$ . Pour que  $F_0\pi_0 U$ , où  $F_0 \in F(C^*)$  et  $U \in T_0$ , il faut et il suffit que, pour tout  $x \in U$ , il existe  $U_1 \in T_0(x)$  et  $m_0 \in F_0$  tels que  $U_1 \subset U_0$  lorsque  $U_0 \in m_0$ . Il en résulte

$$(\pi_0, \alpha^\bullet, \pi) \in P \text{ et } (\pi_0, \beta^\bullet, \pi) \in P.$$

— Soit  $\varkappa^\bullet$  la loi de composition de  $S^\bullet$  et munissons  $S^\bullet \star S^\bullet$  de la quasi-topologie  $\pi \star \pi$  induite par la quasi-topologie produit  $\pi \times \pi$ . Pour montrer que l'on a

$$(\pi, \varkappa^\bullet, \pi \star \pi) \in P,$$

il suffit de vérifier que l'on a  $(\lambda', \varkappa', \lambda' \star \lambda') \in P$ , où  $\lambda' \star \lambda' = \lambda' \times \lambda' / (\varphi \times \varphi)(S^\bullet \star S^\bullet)$  et où

$$\begin{aligned} \varkappa'(((T_0, \iota, \hat{U}'_1), (T, \mathbf{s}'_1, \hat{U}'_1)), ((T_0, \iota, \hat{U}'_1), (T, \mathbf{s}_1, \hat{U}'_1))) &= \\ &= ((T_0, \iota, \hat{U}'_1), (T, \mathbf{s}'_1 \beta \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1, \hat{U}'_1)), \end{aligned}$$

ce qui revient à prouver la relation

$$\varkappa'' = (\hat{\lambda}(T, T_0), \varkappa'', \hat{\lambda}_K) \in P, \text{ où } \hat{\lambda}_K = \hat{\lambda}(T, T_0) \times \hat{\lambda}(T, T_0) / K,$$

$K$  étant la sous-classe de  $S(T, T_0) \times S(T, T_0)$  formée des couples  $(\hat{s}'_1, \hat{s}_1)$  vérifiant

$$\alpha(\hat{s}_1(x)) = x \text{ si } x \in \hat{\alpha}(\hat{s}_1), \alpha(\hat{s}'_1(x')) = x' \text{ si } x' \in \hat{\alpha}(\hat{s}'_1), \beta \hat{s}_1(\hat{\alpha}(\hat{s}_1)) \subset \hat{\alpha}(\hat{s}'_1),$$

et où  $\varkappa''$  est la surjection telle que

$$\varkappa''((T, \mathbf{s}'_1, \hat{U}'_1), (T, \mathbf{s}_1, \hat{U}'_1)) = (T, \mathbf{s}'_1 \beta \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1, \hat{U}'_1).$$

Démontrons cette relation. Supposons  $C^* = (C, \varkappa)$ ,

$$(\hat{s}', \hat{s}) \in K, \text{ où } \hat{s} = (T, \mathbf{s}, \hat{U}) \text{ et } \hat{s}' = (T, \mathbf{s}', \hat{U}').$$

Soient  $F$  et  $F'$  des filtres tels que  $F' \times F$  ait pour trace sur  $K$  un filtre  $G \neq 0$  et que l'on ait  $F \hat{\lambda}(T, T_0) \hat{s}$  et  $F' \hat{\lambda}(T, T_0) \hat{s}'$ . Soient  $x \in U$  et  $W \in T(\mathbf{s}' \beta \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}(x))$ . Il existe, puisque  $(T, \varkappa, T \star T)$  est continue:

$$V \in T(\mathbf{s}(x)) \text{ et } V' \in T(\mathbf{s}'(\beta \mathbf{s}(x))) \text{ tels que } \varkappa(V' \times V) \subset W.$$

Par définition de  $\hat{\lambda}(T, T_0)$ , il existe  $m \in \mathcal{F}$  et  $U_0 \in T_0(x)$  tels que  $\phi \neq m(U_0) \subset V$ ; il existe  $m' \in \mathcal{F}'$  et  $U'_0 \in T_0(\beta \mathbf{s}(x))$  tels que  $\phi \neq m'(U'_0) \subset V'$ . Comme  $(T_0, \beta, T) \in \mathcal{T}$ , on a  $\beta^{-1}(U'_0) \in T(\mathbf{s}(x))$ , de sorte qu'il existe aussi  $m'' \in \mathcal{F}$  et  $U''_0 \in T_0(x)$  pour lesquels  $\phi \neq m''(U''_0) \subset \beta^{-1}(U'_0)$ . La classe  $m' \times (m \cap m'')$  appartient à  $\mathcal{F}' \times \mathcal{F}$ , et par suite contient un  $n \in \mathcal{G}$ . Soit

$$(\hat{s}'_1, \hat{s}_1) \in n, \text{ où } \hat{s}_1 = (T, \mathbf{s}_1, \hat{U}_1) \in m \cap m'' \text{ et } \hat{s}'_1 = (T, \mathbf{s}'_1, \hat{U}'_1) \in m'.$$

On a  $U''_0 \subset U_1$  et, pour tout  $x' \in U_0 \cap U''_0$ ,

$$\kappa''(\hat{s}'_1, \hat{s}_1)(x') = \kappa(\mathbf{s}'_1 \beta \mathbf{s}_1(x'), \mathbf{s}_1(x')) \in \kappa(V' \times V) \subset W.$$

Il s'ensuit  $\kappa''(n)(U''_0 \cap U_0) \subset W$ , d'où

$$\kappa''(\mathcal{G}) \hat{\lambda}(T, T_0) \kappa''(\hat{s}', \hat{s}).$$

Si  $H \hat{\lambda}_K(\hat{s}', \hat{s})$ , on a  $H < H'$ , en désignant par  $H'$  le filtre trace sur  $K$  du filtre produit  $p_1(H) \times p_2(H)$ , où  $p_i$  est la projection canonique de  $C \cdot \mathcal{M} \cdot C'_0 \times C \cdot \mathcal{M} \cdot C'_0$  sur  $C \cdot \mathcal{M} \cdot C'_0$ . Comme  $\kappa''(H')$  est quasi-convergent d'après ce qui précède,  $\kappa''(H)$  quasi-converge vers  $\kappa''(\hat{s}', \hat{s})$ . Donc  $\kappa'' \in P$  et  $(\pi, \kappa^\bullet, \pi \star \pi) \in P$ . Ceci prouve que  $(S^\bullet, \pi)$  est une catégorie quasi-topologique. — Lorsque  $T_0$  est localement compact,  $\hat{\lambda}(T, T_0)$  s'identifie à la topologie compacte-ouverte (prop. 17). Par conséquent  $\pi$  s'identifie à  $\hat{\tau}(\pi)$  et  $(S^\bullet, \hat{\tau}(\pi))$  est une catégorie topologique.

*Remarque:* Si  $T_0$  n'est pas localement compact,  $(S(\mu)^\bullet, \hat{\tau}(\pi))$  n'est généralement pas une catégorie topologique.

*Définition 14:* Avec les notations du théorème 10, la catégorie quasi-topologique  $(S(\mu)^\bullet, \pi(\mu))$  est appelée catégorie quasi-topologique des sections locales de  $\mu$ .

*Remarque:* Soient  $T \in \mathcal{T}_0$ ,  $T' \in \mathcal{T}_0$ ,  $E = \theta(T)$  et  $E' = \theta(T')$ . Soient  $a \notin E'$  et  $b \notin E'$ . Désignons par  $\tilde{T}'$  la topologie sur  $\tilde{E}' = E' \cup \{a\} \cup \{b\}$  engendrée par les classes  $\{b\}$  et  $U'$ , où  $U' \in T'$ . Pour tout

$$s = (T', \mathbf{s}, U) \in S(T', T),$$

soit  $\bar{U}$  l'adhérence de  $U$  dans  $T$  et soit  $\tilde{\mathbf{s}}$  la surjection

$$x \rightarrow s(x) \text{ si } x \in U, \quad x \rightarrow b \text{ si } x \notin \bar{U} \text{ et } x \rightarrow a \text{ si } x \in \bar{U} \cap CU.$$

On a  $\tilde{s} = (\tilde{T}', \tilde{\mathbf{s}}, T) \in \mathcal{T}$ . L'application  $s \rightarrow \tilde{s}$  est une bijection  $\varphi$  de  $S(T', T)$  sur la sous-classe  $M$  de  $\tilde{T}' \cdot \mathcal{T} \cdot T$  formée des  $f$  tels que tout point de  $f^{-1}(a)$  soit adhérent à  $f^{-1}(E')$ . Soit  $\lambda'$  la quasi-topologie image par  $\varphi^{-1}$  de la quasi-topologie  $\lambda(\tilde{T}', T)/M$ . Le théorème 10 est aussi vrai si on remplace partout la quasi-topologie de la convergence locale par la quasi-topologie ainsi définie.

*Prolongement local d'une catégorie topologique.*

Soit  $\mu = (C^*, T)$  une catégorie topologique et soit  $S^\bullet$  la catégorie des sections locales de  $\mu$ . D'après le théorème 9,  $(S^\bullet, <)$  est une catégorie inductive régulière. L'application

$$p: (U', s, U) \rightarrow (U', \beta s, U), \text{ où } (U', s, U) \in S,$$

1 définit un foncteur inductif régulier  $p = ((\mathcal{M}, <), p, (S^\bullet, <))$ .

Les résultats des n° 6 et 7 de [7] sont aussi valables si on supprime de la définition d'un foncteur suprarégulier l'axiome 4 (p. 323 [7]), c'est-à-dire si on ne suppose pas qu'il est fidèle. Par suite la construction de la catégorie des jets locaux faite dans [7] peut être appliquée à  $p$ . En particulier, soit  $J^* = \mathcal{J}^\lambda(S^\bullet, <)$  la catégorie des jets locaux atomiques de  $(S^\bullet, <)$ .

Soit  $S_p$  la classe des sections locales pointées de  $\mu$ , dont les éléments sont les couples  $(s, x)$  tels que

$$s \in S \text{ et } x \in \alpha^\bullet(s).$$

L'application  $(s, x) \rightarrow ((\beta(s(x))), x, s)$  est une bijection  $\sigma$  de  $S_p$  sur une partie  $K$  de  $(C^*_0 \times C^*_0) \times S$  et  $K$  définit une sous-catégorie  $K^*$  de la catégorie produit  $(C^*_0 \times C^*_0)^\perp \times S^\bullet$ . Soit  $S^*_p$  la catégorie image de  $K^*$  par  $\sigma^{-1}$ . Soit  $T_s$  la topologie image par  $\sigma^{-1}$  de  $(T_0 \times T_0) \times S_d/K$ , où  $S_d$  est la topologie discrète sur  $S$ .

*Proposition 19:*  $J^*$  est la catégorie quotient strict de  $S^*_p$  par la relation d'équivalence  $r$ :

$$(s_1, x_1) \sim (s_2, x_2) \text{ si, et seulement si, } x_1 = x_2 \text{ et } (s_1 \cap s_2, x_1) \in S_p.$$

Il existe une catégorie topologique  $(J^*, T_f)$  quotient de la catégorie topologique  $(S^*_p, T_s)$  par  $r$  (not. précédente) et on a  $T_f = T_s/r$ .

*Démonstration:* Par définition [7], on a

$$j_x^\lambda s = (s, x) \text{ mod } r \text{ si } s \in S \text{ et } x \in \alpha^\bullet(s),$$

et l'application  $\tilde{r}: (s, x) \rightarrow (s, x) \text{ mod } r$  définit un foncteur de  $S^*_p$  sur  $J^*$ . Les conditions

$$(s, x) \in S_p \text{ et } (U, x) \sim (U_1, x), \text{ où } s = (U', s, U),$$

entraînent

$$\hat{s} = (U', s, U \cap U_1) \in S \text{ et } (\hat{s}, x) \sim (s, x).$$

Ainsi les hypothèses de la proposition 14, chap. III, sont vérifiées. Il s'ensuit que  $J^*$  est une catégorie quotient strict de  $S^*_p$ . Nous identifierons  $J^*_0$  à  $C^*_0$  en identifiant le germe  $j_x^\lambda U$  de  $U$  en  $x \in U$  avec  $x$ . — Soit  $\mu'$  la catégorie topologique produit  $((C^*_0 \times C^*_0)^\perp, T_0 \times T_0) \times (S^*, S_d)$  et soit  $(K^*, T_1)$  la sous-catégorie topologique de  $\mu'$  définie par  $K$ . Soit  $(S^*_p, T_s)$  la catégorie topologique image par  $\sigma^{-1}$  de  $(K^*, T_1)$ . D'après le corollaire 3 du théorème 1, il existe une catégorie topologique  $(J^*, T_f)$  quotient de  $(S^*_p, T_s)$  par  $r$ .



La topologie  $T_f$  est engendrée par les classes  $j^\lambda s(\alpha^\bullet(s))$ , où  $s \in S$  et où  $j^\lambda s$  est l'application  $x \rightarrow j_x^\lambda s$  de  $\alpha^\bullet(s)$  dans  $J$ . Par suite  $(J^*, T_f)$  est la catégorie topologique considérée page 330 [7]. 1

Soit  $(S^\bullet, \pi)$  la catégorie quasi-topologique des sections locales de  $\mu$ . Posons

$$\pi_1 = [(T_0 \times T_0) \times \pi]/K \text{ et } \pi_2 = [(C^*_0 \times C^*_0)_a \times \pi]/K.$$

Soit  $\pi'_i$ , où  $i = 1, 2$ , la quasi-topologie image de  $\pi_i$  par  $\sigma^{-1}$ . Alors  $(S^*_p, \pi'_i)$  est une catégorie quasi-topologique isomorphe dans  $P$  à  $(K^*, \pi_i)$ .

*Théorème 11:* Avec les notations précédentes, il existe une catégorie quasi-topologique  $(J^*, \eta_i)$  quotient de  $(S^*_p, \pi'_i)$  par  $r$ . Si  $T_0$  est localement compact,  $(J^*, \hat{\tau}(\eta_i))$  est une catégorie topologique quotient de  $(S^*_p, \hat{\tau}(\pi'_i))$  et on a  $\hat{\tau}(\eta_i) = \hat{\tau}(\pi'_i)/r$ . 2¶

*Démonstration:* Puisque  $\hat{\theta}$  est un foncteur d'homomorphismes saturé,  $\Gamma$ -étalant, compatible avec les produits et admettant pour section maximale la section maximale  $\varphi_\theta$  de  $\theta$  (voir n° 1), un raisonnement analogue à celui utilisé pour démontrer le théorème 1 et ses corollaires permet de montrer le résultat suivant (démontré plus généralement dans [1]):

Si  $(H^*, \xi)$  est une catégorie quasi-topologique et si  $\hat{H}^*$  est une catégorie quotient de  $H^*$  par une relation d'équivalence  $\varrho$ , alors il existe une catégorie quasi-topologique  $(\hat{H}^*, \hat{\xi})$  quotient de  $(H^*, \xi)$  par  $\varrho$ .

— Par conséquent, il existe une catégorie quasi-topologique  $(J^*, \eta_i)$  quotient de  $(S^*_p, \pi'_i)$  par  $r$  (prop. 19). — Supposons  $T_0$  localement compact. Alors  $\pi'_i$  s'identifie à la topologie  $\hat{\tau}(\pi'_i)$  et  $(S^*_p, \hat{\tau}(\pi'_i))$  est une catégorie topologique, en vertu du théorème 10. La relation  $r$  est ouverte pour  $\hat{\tau}(\pi'_i)$ , de sorte que l'on a 3¶

$$(\hat{\tau}(\pi'_i)/r)(\tilde{z}) = \tilde{r}(\hat{\tau}(\pi'_i)(z)) \text{ si } \tilde{z} = \tilde{r}(z) \text{ et } z \in S_p.$$

Il en résulte que  $\hat{\tau}(\pi'_i)/r = T_i$  s'identifie à la quasi-topologie  $\pi'_i/r$  quotient de  $\pi'_i$  par  $r$ . Par ailleurs, comme  $(J^*, T_i)$  est une catégorie topologique,  $(S^*_p, \hat{\tau}(\pi'_i))$  admet pour catégorie topologique quotient  $(J^*, T_i)$  (cor. 2, th. 21 [3]). Il s'ensuit que  $(J^*, \pi'_i/r)$  est une catégorie quasi-topologique quotient de  $(S^*_p, \pi'_i)$  par  $r$ , c'est-à-dire que l'on a  $\eta_i = \pi'_i/r$  et  $T_i = \hat{\tau}(\eta_i)$ . De plus  $(T_1)_0 = T_0$ .

*Définition 15:* Avec les notations du théorème 11, la catégorie quasi-topologique  $(J^*, \eta_1)$  est appelée prolongement local de  $\mu$  et notée  $J(\mu)$ .

*Remarques:* 1) Soit  $H^*$  la sous-catégorie de  $(T_0 \times T_0)^\perp$  ayant pour éléments les couples  $(U_1, U) \in T_0 \times T_0$  tels que  $U_1 \subset U$ . L'application

$$(U_1, U) \rightarrow (\pi/S \bullet U_1, u_1 u, \pi/S \bullet U),$$

où

$$u_1 u(s) = (U', s, U_1) \text{ si } s = (U', s, U) \in S,$$

définit un préfaisceau  $\Sigma$  d'espaces quasi-topologiques (i.e.  $(H^*, \Sigma)$  est une espèce de structures  $\hat{\theta}$ -dominée). Pour tout  $x \in C^*_0$ , soit  $\Sigma_x$  le foncteur restriction de  $\Sigma$  à la sous-catégorie pleine  $H^*_x$  de  $H^*$  ayant pour unités les  $(U, U) \in H^*_0$  tels que  $x \in U$ . Le foncteur  $\hat{\theta} \cdot \Sigma_x$  admet pour limite inductive la classe  $J \cdot x$ . Pour tout  $x' \in C^*_0$ , les quasi-topologies induites sur  $x' \cdot J \cdot x$  par  $\eta_2$  et par la limite inductive de  $\Sigma_x$  sont identiques. Si  $T_0$  est localement compact,  $T_2/x' \cdot J \cdot x$  est identique à la topologie induite par la topologie limite inductive du foncteur  $\hat{\tau} \cdot \Sigma_x$ , où  $\hat{\tau}$  est le foncteur projection canonique de  $P$  vers  $\mathcal{F}$ . La topologie  $T_1$  est alors la borne inférieure des topologies  $T_2$  et  $T_f$ .

2) La topologie  $T_f$  est la topologie de l'espace étalé associé au faisceau  $\hat{\theta} \cdot \Sigma$  [15].

3) Soit  $\nu = (G^*, \xi)$  une catégorie quasi-topologique. Appelons *section locale de  $\nu$*  un triplet  $(U', \mathbf{s}, U)$  tel que

$$U \in \hat{\tau}(\xi), U' \in \hat{\tau}(\xi), (\xi, \mathbf{s}, \xi/U) \in P, \mathbf{s}(U) \subset U'$$

et que  $\alpha \mathbf{s}(x) = x$  pour tout  $x \in U$ . Soit  $S(\nu)$  la classe des sections locales de  $\nu$ . Les résultats précédents, en particulier les théorèmes 9, 10, 11 et la proposition 19, s'étendent à ce cas, de sorte que l'on peut ainsi définir le *prolongement local d'une catégorie quasi-topologique  $\nu$* , noté encore  $J(\nu)$ . Par récurrence on peut donc définir le *prolongement local d'ordre  $n$  de  $\nu$* , noté  $J^{(n)}(\nu)$ , en posant

$$J^{(1)}(\nu) = J(\nu) \text{ et } J^{(n)}(\nu) = J(J^{(n-1)}(\nu)), \text{ pour tout entier } n > 1.$$

Si  $\nu$  s'identifie à  $\hat{\tau}(\nu) = T$  et si  $T_0$  est localement compact, le théorème 11 montre que les prolongements locaux d'ordre  $n$  de  $\nu$  s'identifient à des catégories topologiques.

4) Soit  $\nu = (G^*, \xi)$  une catégorie quasi-topologique et soit  $(S^*_p, \pi'_1)$  la catégorie quasi-topologique des sections locales pointées de  $\nu$  (construite comme plus haut). Soit  $J(\nu) = (J^*, \eta_1)$ . La surjection  $(s, x) \rightarrow s(x)$  définit un foncteur quasi-continu de  $(S^*_p, \pi'_1)$  vers  $\nu$ . Par passage au quotient, on en déduit un foncteur quasi-continu  $(\nu, \mathbf{b}, J(\nu))$ , et par suite on a

$$b = (\xi, \mathbf{b}, \eta_1) \in P, \text{ où } b(j_x^\lambda s) = s(x).$$

Soit  $J^{(2)}(\nu) = (J^{(2)*}, \hat{\eta}_1)$  et soit  $\bar{J}^{(2)}$  la sous-classe de  $J^{(2)}$  formée des  $d \in J^{(2)}$  ayant la propriété suivante: Soit  $(t, x) \in d$ , où  $t = (U', \mathbf{t}, U) \in S(J(\nu))$ , et soit

$$bt = (U', \mathbf{bt}, U) \in S;$$

alors  $j_x^\lambda bt = t(x)$ . La classe  $\bar{J}^{(2)}$  définit une sous-catégorie quasi-topologique  $\bar{J}^{(2)}(\nu)$  de  $J^{(2)}(\nu)$ , qu'on appellera le *prolongement local semi-holonome d'ordre 2 de  $\nu$* . Si  $s = (U', \mathbf{s}, U) \in S$ , on a

$$j^\lambda s = (U', j^\lambda \mathbf{s}, U) \in S(J(\nu)), \text{ où } j^\lambda \mathbf{s}(x) = j_x^\lambda s \text{ pour tout } x \in U.$$

La classe  $\bar{J}^{(2)}$  des  $j_x^\lambda(j^\lambda s)$ , où  $s \in S$  et  $x \in \alpha^\bullet(s)$ , définit une sous-catégorie quasi-topologique  $\bar{J}^{(2)(\nu)}$  de  $\bar{J}^{(2)(\nu)}$ , qu'on appellera le *prolongement holonome d'ordre 2 de  $\nu$* . Par récurrence, on définit pour tout entier  $n > 1$  le *prolongement semi-holonome  $\bar{J}^n(\nu)$  d'ordre  $n$  de  $\nu$*  et le *prolongement holonome  $\bar{J}^n(\nu)$  de  $\nu$* .

1+

5) En particulier, soit  $\hat{T} = \sum_{T \in \mathcal{T}_0} T \in \hat{\mathcal{T}}$  la topologie somme dans  $\hat{\mathcal{T}}$  de  $(T)_{T \in \mathcal{T}_0}$ . La classe  $\hat{E} = \Theta(\hat{T})$  est la classe somme dans  $\hat{\mathcal{M}}$  de la famille  $(\theta(T))_{T \in \mathcal{T}_0}$ . Soit  $r$  la relation d'équivalence sur  $\hat{E}$ :

$$(T, x) \sim (T', x) \text{ s'il existe } (T' \cap T, x) \in \hat{E},$$

(i.e. on a  $\hat{E}/r = \mathcal{J}^\lambda(\mathcal{T}_0, <)$ ). Soit  $\mu(\mathcal{T})$  la catégorie topologique  $((\hat{E}/r \times \hat{E}/r)^\perp, \hat{T}/r \times \hat{T}/r)$ . En appliquant ce qui précède à  $\mu(\mathcal{T})$ , on définit les prolongements locaux d'ordre  $n$  et les prolongements semi-holonomes ou non holonomes d'ordre  $n$  de  $\mu(\mathcal{T})$ . Un élément de  $J^{(n)}(\mu(\mathcal{T}))$  [resp. de  $\bar{J}^{(n)}(\mu(\mathcal{T}))$ , resp. de  $\bar{J}^{(n)}(\mu(\mathcal{T}))$ ] sera appelé un *jet local non holonome* (resp. *semi-holonome*, resp. *holonome*) d'ordre  $n$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

1. EHRESMANN, C., Structures quasi-quotient (multigraphié, Paris, 1965, 90 p.; à l'impression dans Math. Ann.).
2. ———, Catégories structurées (I et II: Ann. Ec. Norm. Sup. 80, 349–426 (1963); III: Top. et Géom. dif. V, 1963, 21 p.).
3. ———, Structures quotient, Comm. Math. Helv. 38, 219–283 (1963).
4. ———, Catégories topologiques et catégories différentiables, Col. Géom. dif. Glob., Bruxelles, 137–150 (1958).
5. ———, Quasi-surjections et structures quasi-quotient (C.R.A.S. 261, Paris, 1965, p. 1577); Quasi-catégories structurées (C.R.A.S. 261, Paris, 1965, p. 1932).
6. ———, Sur les pseudogroupes de transformations de Lie (Coll. Inter. Amsterdam, 1954).
7. ———, Catégories inductives et pseudogroupes (Ann. Inst. Fourier, 10, 1960, p. 307–332).
8. KAN, D. M., Adjoint functors (Trans. A.M.S. 294, 1958, p. 294–329).
9. BOURBAKI, N., Topologie générale, chap. III, Hermann, Paris (2e édition 1951).
10. GABRIEL, J., Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France, 90, 323–448 (1962).
11. KOWALSKY, Limesräume und Komplettierung, Math. Nachr. 12, 301–340 (1954).
12. BASTIANI, A., Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, Jour. Analyse Math., 13, 1–114 (1964).
13. CHOQUET, G., Convergences, Ann. Inst. Fourier, 23, 57–112 (1948).
14. NÖBELING, G., Grundlagen der Analytischen Topologie, Springer, Berlin, 1954.
15. GODEMENT, R., Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1958.



## Chapitre II : CATÉGORIES QUASI-TOPOLOGIQUES ET LEURS PROLONGEMENTS

par C. EHRESMANN

**AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.** Le cours intitulé «Catégories topologiques, catégories différentiables» comportait plusieurs chapitres dont seuls les deux premiers ont été rédigés. Le Chapitre I a été ensuite publié dans l'article «Catégories structurées généralisées» (*Cahiers Top. et Géom. Diff.* X-1, 1968, reproduit dans la Partie III-2 des *Oeuvres*, /104/), dont les dernières pages sont un résumé du présent Chapitre II. Les différentes références au Chapitre I renvoient donc à /104/. Le texte a été recomposé sur machine Varityper pour inclusion dans ce volume.

### 1. QUASI-TOPOLOGIES.

#### A. Définition des quasi-topologies.

Soit  $X$  une classe. Nous désignons par  $F(X)$  la classe de tous les filtres de  $X$ , y compris le filtre trivial  $\mathcal{P}(X)$  (noté  $0$ ); nous munirons  $F(X)$  de l'ordre

$$F' < F \quad \text{ssi} \quad F \subset F'.$$

$(F(X), <)$  est une classe inductive ayant le filtre trivial pour plus petit élément, le filtre grossier  $\{X\}$  pour plus grand élément. Si  $M$  est une partie de  $F(X)$ , son agrégat est le filtre engendré par les (i. e. engendré par la classe des) classes  $A$  de la forme suivante: Pour tout  $F \in M$ , choisissons  $A_F \in F$ ; alors  $A = \bigcup_{F \in M} A_F$ . Tout  $x \in X$  détermine le filtre  $x^\epsilon$  engendré par  $\{x\}$ ; il est formé de tous les  $A \subset X$  tels que  $x \in A$ .

Si  $f$  est une application de  $X$  and  $X'$ , à un filtre  $F \in F(X)$  est associé le filtre  $f(F)$  image de  $F$  par  $f$ , aussi noté  $fF$ , qui est le filtre engendré par les classes  $f(A)$ , où  $A \in F$ . La surjection  $f \mapsto fF$  définit une application quasi-inductive  $\bar{f}$  de  $(F(X), <)$  vers  $(F(X'), <)$  c'est-

à-dire on a  $f(\cup M) = \cup f(M)$  pour tout  $M \subset F(X)$ . Mais  $f$  n'est pas inductive.

Un idéal de  $F(X)$  est une partie  $I$  de  $F(X)$  saturée par induction et par agrégation finie; autrement dit,  $I$  est un filtre sur la classe inductive duale de  $(F(X), <)$ . Si l'on a donné une partie  $N$  de  $F(X)$  on lui associe un idéal de  $F(X)$ , appelé idéal engendré par  $N$  et noté  $I(N)$ , dont les éléments sont les filtres  $F$  de  $X$  qui sont plus fins qu'un agrégat d'un nombre fini de filtres  $F_i \in N$ , i.e.  $F < \cup_{i < n} F_i$ . En effet,  $I(N)$  est saturé par induction; si

$$F < \cup_{i < n} F_i \text{ et } F' < \cup_{i < m} F'_i, F_i \in N, F'_i \in N,$$

alors  $F \cup F' < \cup_{j < n+m} G_j$ , en posant

$$G_j = F_j \text{ si } j < n, G_j = G_{j-n} \text{ si } n \leq j < n+m.$$

DÉFINITION. On appelle *quasi-topologie* sur  $X$  une application  $\pi$  de  $X$  dans la classe des idéaux de  $F(X)$  telle que  $x \in \pi(x)$  pour tout  $x \in X$ . On dit que  $\pi$  est *séparée* si  $\pi(x) \cap \pi(x') = \emptyset$  lorsque  $x \neq x'$ .

Si  $\pi$  est une quasi-topologie sur  $X$  et si  $F \in \pi(x)$ , on dit que  $F$  *quasi-converge vers*  $x$ , noté aussi  $F \pi x$  ou  $F \rightarrow x$ .

DÉFINITION. Si  $\pi$  est une quasi-topologie sur  $X$  et si  $x \in X$ , on appelle *semi-voisinage* de  $x$  pour  $\pi$  un élément  $U$  du filtre  $\cup \pi(x)$ .

Les semi-voisinages de  $x$  pour  $\pi$  sont donc les ensembles qui appartiennent à tout filtre quasi-convergeant vers  $x$ . En général, le filtre  $\cup \pi(x)$  ne vérifie pas l'axiome  $V_{IV}$  des voisinages de sorte qu'il n'existe pas de topologie sur  $X$  admettant, pour voisinages, les semi-voisinages de  $x$  pour  $\pi$ . Nous reviendrons plus loin sur cette question (Sect. B). Si  $\cup \pi(x) \in \pi(x)$  pour tout  $x \in X$ , alors  $\pi$  est une *prétopologie*.

2+

Les quasi-topologies sur  $X$  forment une classe inductive pour l'ordre  $\pi' < \pi$  (lire:  $\pi'$  est plus fine que  $\pi$ ) ssi  $\pi'(x) \subset \pi(x)$  pour tout  $x \in X$ . La quasi-topologie la plus fine est la *quasi-topologie discrète*  $d$  telle que  $d(x) = \{x\}$ ; la moins fine est la *quasi-topologie grossière*  $g$  telle que l'on ait  $g(x) = F(X)$  pour tout  $x \in X$ . Si l'on suppose donnée, pour tout  $x \in X$

une partie  $M(x)$  de  $F(X)$ , il existe une plus fine quasi-topologie  $\pi$  telle que  $M(x) \subset \pi(x)$  pour tout  $x \in X$ , à savoir  $\pi(x)$  est l'idéal  $I(M(x))$  engendré par  $M(x) \cup \{x^c\}$ . On appelle  $\pi$  la *quasi-topologie engendrée par l'application*  $x \mapsto M(x)$ .

DÉFINITION. On appelle *application quasi-continue* un triplet  $(\pi', f, \pi)$  où

- 1°  $\pi$  et  $\pi'$  sont des quasi-topologies sur  $X$  et  $X'$  respectivement;
- 2°  $f$  est une surjection de  $X$  sur une partie de  $X'$ ;
- 3° Pour tout  $x \in X$  on a  $f(\pi(x)) \subset \pi'(f(x))$ , en notant  $f(\pi(x))$  la classe des filtres  $fF$  images par  $f$  d'un  $F \in \pi(x)$ .

Si  $\pi$  et  $\pi'$  sont des quasi-topologies sur  $X$ , on a  $\pi' < \pi$  ssi l'application  $(\pi, \iota, \pi')$  est quasi-continue.

Soit  $f$  une surjection de  $X$  sur  $X'$ . Si  $\pi$  est une quasi-topologie sur  $X$ , pour tout  $y \in X'$  désignons par  $M(y)$  la classe

$$\{f(\pi(x)) \mid f(x) = y\};$$

l'application  $y \mapsto M(y)$  engendre une quasi-topologie sur  $X'$ , notée  $f(\pi)$  et appelée *image de  $\pi$  par  $f$* . On voit que  $f(\pi)$  est la plus fine des quasi-topologies  $\pi'$  sur  $X'$  telles que  $(\pi', f, \pi)$  soit quasi-continu. En particulier, si  $f$  est une bijection, on a  $f(\pi)(x) = f(\pi(x))$  pour tout  $x \in X$ , et  $(\pi, f^{-1}, f(\pi))$  est aussi quasi-continue.

Soit  $f$  une application de  $X$  dans  $X'$  et  $\pi'$  une quasi-topologie sur  $X'$ . On définit une quasi-topologie  $\pi$  sur  $X$  telle que  $\pi(x)$  soit la classe des filtres  $F$  de  $X$  vérifiant  $f(F) \in \pi'(f(x))$ ; cette quasi-topologie est la moins fine des quasi-topologies  $\tilde{\pi}$  telles que  $(\pi', f, \tilde{\pi})$  est quasi-continu. On appelle  $\pi$  la quasi-topologie *image réciproque de  $\pi'$  par  $f$* , et on la notera  $\tilde{f}^1(\pi)$ .

1

**B. Topologie associée à une quasi-topologie.**

Soit  $\mathfrak{M}_0$  un univers et  $\mathfrak{M}$  la catégorie pleine d'applications correspondante. Nous désignerons par  $\mathcal{P}$  la catégorie des applications quasi-continues associée à  $\mathfrak{M}$ , dont les éléments sont les applications quasi-continues  $(\pi', f, \pi)$ , où  $\pi$  et  $\pi'$  sont des quasi-topologies sur des ensem-

bles de  $\mathfrak{M}_0$ , la loi de composition étant

$$(\pi'', f', \tilde{\pi}') \cdot (\pi', f, \pi) = (\pi'', f'f, \pi) \quad \text{ssi } \tilde{\pi}' = \pi'.$$

Nous identifions la classe des quasi-topologies à la classe des unités de  $\mathcal{P}$ . Soit  $\hat{\theta}$  le foncteur canonique de  $\mathcal{P}$  vers  $\mathfrak{M}$ , qui associe à  $\pi$  la classe sous-jacente  $\hat{\theta}(\pi)$ , à  $(\pi', f, \pi)$  l'application  $(\hat{\theta}(\pi'), f, \hat{\theta}(\pi))$ . Ce foncteur est un foncteur d'homomorphismes saturé.

Si  $T$  est une topologie sur une classe  $X$ , on obtient une quasi-topologie  $\hat{\pi}(T)$  telle que  $\hat{\pi}(T)(x)$  soit la classe de tous les filtres qui convergent vers  $x$  dans  $T$ , pour tout  $x \in X$ . On a naturellement

$$T(x) = \cup \hat{\pi}(T)(x) \in \hat{\pi}(T)(x),$$

où  $T(x)$  est le filtre des voisinages de  $x$  dans  $T$ ; ainsi les semi-voisinages de  $x$  dans  $\hat{\pi}(T)$  sont identiques aux voisinages de  $x$  dans  $T$ . Si  $(T', f, T)$  est une application continue,  $(\hat{\pi}(T'), f, \hat{\pi}(T))$  est une application quasi-continue. On définit ainsi un foncteur injectif  $\hat{\pi}$  de  $\mathcal{T}$  vers  $\mathcal{P}$ , dont l'image est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{P}$ .

2 THÉORÈME 1.  $\pi \in \mathcal{P}_0$  engendre une  $\hat{\pi}$ -structure libre, à savoir la topologie  $\hat{\tau}(\pi)$  sur  $\hat{\theta}(\pi)$  dont les ouverts sont les  $U \subset X$  tels que  $U$  soit un semi-voisinage de  $x$  pour tout  $x \in U$ .

PREUVE. Posons  $T = \hat{\tau}(\pi)$ . Si  $U \in T$  et  $U' \in T$ , on a  $U \cap U' \in T$ , puisque les semi-voisinages de  $x$  forment un filtre. Si  $U_i \in T$  pour tout  $i \in I$  et si  $x$  appartient à la classe réunion  $U = \cup U_i$ , il existe un  $U_i$  qui est un semi-voisinage de  $x$ , et par suite  $U$  en est aussi un. Ainsi  $T$  est une topologie sur  $X = \hat{\theta}(\pi)$ . Comme  $\cup \pi(x) < T(x)$  pour tout  $x \in X$ , on a  $j = (\hat{\pi}(T), \iota, \pi) \in \mathcal{P}$ . Montrons que  $T$  est une  $\hat{\pi}$ -structure libre engendrée par  $\pi$ . En effet, supposons  $T' \in \mathcal{T}_0$  et  $f = (\hat{\pi}(T'), f, \pi) \in \mathcal{P}$ . Soit  $U'$  un ouvert de  $T'$  et  $A = f^{-1}(U')$ . Si  $x \in A$  et si  $F \in \pi(x)$ , le filtre  $fF$  converge vers  $f(x)$  pour  $T'$ , de sorte qu'il existe  $A_F \in F$  tel que  $f(A_F) \subset U'$ . La classe  $U = \cup (A_F \mid F \in \pi(x))$  est un semi-voisinage de  $x$  dans  $\pi$  tel que  $f(U) \subset U'$ . Donc  $A \in T$ . Ainsi  $f' = (T', f, T) \in \mathcal{T}$ , ce qui prouve l'affirmation. ■



COROLLAIRE 1.  $\cup\pi(x)$  vérifie l'axiome  $V_{IV}$  des filtres de voisinages ssi c'est le filtre des voisinages de  $x$  dans  $\hat{r}(\pi)$ . On a  $\hat{r}(\pi) = \hat{r}(\hat{\pi}(\hat{r}(\pi)))$ .

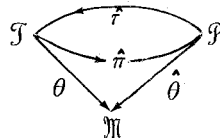
En effet, si  $\cup\pi(x)$  est le filtre des voisinages de  $x$  pour une topologie, cette topologie est évidemment  $\hat{r}(\pi)$ . Si  $\pi' \in \hat{\pi}(\mathcal{T})$ , il existe une et une seule topologie  $T'$  telle que  $\pi' = \hat{\pi}(T')$ , et l'on a

$$\hat{r}(\pi') = \hat{r}(\hat{\pi}(T')) = T'. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 2. On a  $\hat{\pi}(\hat{r}(\pi)) = \pi$  ssi  $\cup\pi(x)$  vérifie l'axiome  $V_{IV}$  des voisinages et quasi-converge vers  $x$  pour  $\pi$ , pour tout  $x \in X$ .

DÉFINITION. Avec les notations du Théorème 1, on appelle  $\hat{r}(\pi)$  la topologie associée à  $\pi$ .

Nous désignerons par  $\hat{r}$  le foncteur de  $\mathcal{P}$  vers  $\mathcal{T}$ , adjoint de  $\hat{\pi}$ , tel que  $\hat{r}(\pi', f, \pi) = (\hat{r}(\pi'), f, \hat{r}(\pi))$ . Si  $\pi < \pi'$ , alors  $(\pi', \iota, \pi) \in \mathcal{P}$ , donc  $\hat{r}(\pi)$  est une topologie plus fine que  $\hat{r}(\pi')$ . Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous identifierons une topologie  $T$  à la quasi-topologie  $\hat{\pi}(T)$  sous-jacente; les topologies sont alors considérées comme les quasi-topologies  $\pi$  telles que  $\pi = \hat{r}(\pi)$ . Remarquons qu'une prétopologie peut ne pas être une topologie.



**C. Étude du foncteur  $\hat{\theta}$ .**

Soit  $\hat{\theta}$  et  $\hat{r}$  les foncteurs de  $\mathcal{P}$  vers  $\mathcal{M}$  et vers  $\mathcal{T}$  définis plus haut. On a  $\hat{\theta} = \theta \cdot \hat{r}$ , en notant  $\theta$  le foncteur d'oubli de  $\mathcal{T}$  vers  $\mathcal{M}$ .

PROPOSITION 1.  $\hat{\theta}$  est un foncteur  $r$ -étalant; si  $\pi'$  est une  $\hat{\theta}$ -sous-structure de  $\pi$  et si  $X' = \hat{\theta}(\pi')$  est ouvert pour  $\hat{r}(\pi)$ , on a  $\hat{r}(\pi') = \hat{r}(\pi) / X'$ . Si  $\pi$  s'identifie à une topologie, il en est de même pour toute ses  $\hat{\theta}$ -sous-structures.

PREUVE. Soit  $\pi$  une quasi-topologie sur  $X$  et  $X' \subset X$ . Soit  $\pi'$  la quasi-topologie image réciproque de  $\pi$  par l'injection canonique  $\iota$  de  $X'$  dans

$X$ . Alors  $(\pi, \iota, \pi')$  est un  $\hat{\theta}$ -monomorphisme. On posera  $\pi' = \pi/X'$ . Comme  $\hat{\tau}$  est un foncteur,  $(\hat{\tau}(\pi), \iota, \hat{\tau}(\pi')) \in \mathcal{P}$  et,  $\hat{\tau}(\pi)/X'$  étant une  $\theta$ -sous-structure de  $\hat{\tau}(\pi)$ , on a  $(\hat{\tau}(\pi)/X', \iota, \hat{\tau}(\pi')) \in \mathcal{J}$ . Supposons  $X'$  ouvert de  $\hat{\tau}(\pi)$ ; si  $U$  est un ouvert de  $\hat{\tau}(\pi')$ , alors  $U$  est un ouvert de  $\hat{\tau}(\pi)$  par définition de  $\hat{\tau}(\pi')$ , et par suite de  $\hat{\tau}(\pi)/X'$ . Donc

$$(\hat{\tau}(\pi'), \iota, \hat{\tau}(\pi)/X') \in \mathcal{J} \text{ et } \hat{\tau}(\pi)/X' = \hat{\tau}(\pi/X').$$

- Si  $\pi = \hat{\pi}(T)$  et si l'on a  $f = (\pi, \underline{f}, \pi'') \in \mathcal{P}$  et  $f(\hat{\theta}(\pi'')) \subset X'$ , alors  $\hat{\tau}(f) \in \mathcal{J}$  entraîne

$$f' = (T/X', \underline{f}, \hat{\tau}(\pi'')) \in \mathcal{J} \text{ et } f'' = \hat{\pi}(f') \cdot (\hat{\pi}(\hat{\tau}(\pi'')), \iota, \pi'') \in \mathcal{P}.$$

Par conséquent  $\hat{\pi}(T/X')$  est la  $\hat{\theta}$ -sous-structure de  $\pi$  sur  $X'$ , i.e. on a  $\hat{\pi}(T/X') = \hat{\pi}(T)/X'$ . ■

1 COROLLAIRE.  $\hat{\theta}$  est un foncteur résolvant à droite.

PROPOSITION 2. Si  $\pi \in \mathcal{P}_0$  et si  $r$  est une relation d'équivalence sur  $X = \hat{\theta}(\pi)$ , il existe une  $\hat{\theta}$ -structure quotient  $\pi/r$  de  $\pi$  par  $r$ , et l'on a :  $\hat{\tau}(\pi/r) = \hat{\tau}(\pi)/r$ .

PREUVE. Soit  $\tilde{r}$  la surjection canonique de  $X$  sur  $X/r$  et  $\bar{\pi}$  la quasi-topologie image de  $\pi$  par  $r$ . On voit que  $\bar{\pi} = \pi/r$  est la  $\hat{\theta}$ -structure quotient de  $\pi$  par  $r$ . Puisque  $(\bar{\pi}, \tilde{r}, \pi) \in \mathcal{P}$ , on a  $(\hat{\tau}(\bar{\pi}), \tilde{r}, \hat{\tau}(\pi)) \in \mathcal{J}$ . Il en résulte  $(\hat{\tau}(\bar{\pi}), \iota, \hat{\tau}(\pi)/r) \in \mathcal{J}$ , car  $\hat{\tau}(\pi)/r$  est la topologie quotient de  $\pi$  par  $r$ . Par ailleurs la relation

$$(\hat{\pi}(\hat{\tau}(\pi)/r), \tilde{r}, \pi) = \hat{\pi}(\hat{\tau}(\pi)/r, \tilde{r}, \hat{\tau}(\pi)) \cdot (\hat{\pi}(\hat{\tau}(\pi)), \iota, \pi) \in \mathcal{P}$$

entraîne,  $\bar{\pi}$  étant la  $\hat{\theta}$ -structure quotient de  $\pi$  par  $r$ ,

$$(\hat{\pi}(\hat{\tau}(\pi)/r), \iota, \bar{\pi}) \in \mathcal{P}, \text{ d'où } (\hat{\tau}(\pi)/r, \iota, \hat{\tau}(\bar{\pi})) \in \mathcal{J}.$$

Ceci prouve que  $\hat{\tau}(\pi/r) = \hat{\tau}(\pi)/r$ . ■

REMARQUE. Si  $\pi = \hat{\pi}(T)$ , la quasi-topologie  $\pi/r$  peut être plus fine que la quasi-topologie  $\hat{\pi}(T/r)$ .

DÉFINITION. Avec les notations des Propositions 1 et 2, on appelle  $\pi/X'$  la quasi-topologie induite par  $\pi$  sur  $X'$  et  $\pi/r$  la quasi-topologie quotient de  $\pi$  par  $r$ .

PROPOSITION 3.  $\hat{\theta}$  est un foncteur à  $\mathcal{F}_0$ -limites projectives et à  $\mathcal{F}_0$ -limites inductives.

PREUVE. Soit  $\pi_i \in \mathcal{P}_0$  pour tout  $i \in I \in \mathbb{M}_0$ . Désignons par  $p_i$  la projection canonique du produit  $X = \prod_{i \in I} \hat{\theta}(\pi_i)$  sur  $X_i = \hat{\theta}(\pi_i)$ . On définit une quasi-topologie  $\pi$  sur  $X$  en posant

$$F \in \pi((x_i)_{i \in I}) \text{ ssi } p_i(F) \in \pi_i(x_i) \text{ pour tout } i \in I,$$

puisque la surjection  $F \mapsto p_i(F)$  est une application inductive de  $(F(X), <)$  dans  $(F(X_i), <)$ . De plus  $\pi$  est la moins fine des quasi-topologies telles que  $(\pi_i, p_i, \pi) \in \mathcal{P}$ . Il s'ensuit que  $\pi$  est le produit de  $(\pi_i)_{i \in I}$  dans  $\hat{\theta}$ . - En utilisant le corollaire de la Proposition 1, on sait que  $\hat{\theta}$ , qui est à  $\mathbb{M}_0$ -produits et à noyaux, est à  $I'$ -limites projectives dès que  $I' \in \mathcal{F}_0$ .

- D'autre part,  $(\pi_i)_{i \in I}$  admet pour somme dans  $\mathcal{P}$  la quasi-topologie  $\pi'$  telle que, en notant  $s_i$  l'injection canonique de  $X_i$  dans  $X' = \sum_{i \in I} X_i$ , on a

$$\pi'(x, i) = s_i(\pi_i(x)) \text{ pour tout } (x, i) \in X'.$$

Si  $\Phi$  est un foncteur de  $J' \in \mathcal{F}_0$  vers  $\mathcal{P}$ , un théorème général sur les limites inductives affirme que  $\Phi$  admet pour limite inductive la quasi-topologie quotient de  $\pi'' = \sum_{i \in J'_0} \Phi(i)$  par l'équivalence  $r$  telle que

$$\text{Lim } \hat{\theta} \cdot \Phi = \hat{\theta}(\pi'')/r. \quad \blacksquare$$

REMARQUE.  $\hat{\tau}$  n'est pas compatible avec les produits, même finis.

2. QUASI-TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE LOCALE.

A. Quasi-topologie de la convergence locale.

Soit  $X$  et  $X'$  deux classes, et  $G$  un filtre de  $X' \cdot \mathbb{M} \cdot X$ . Soit  $F$  un filtre de  $X$ . Les classes  $B(A) = \bigcup_{f \in B} f(A)$ , où  $B \in G$ ,  $A \in F$ , engendrent un filtre, car on a

$$(B \cap B')(A \cap A') \subset B(A) \cap B'(A');$$

ce filtre sera noté  $GF$ . Si  $x \in X$ , on écrira  $Gx$  au lieu de  $Gx^c$ ; ainsi  $Gx$  est le filtre engendré par les classes  $B(x)$  formées des  $f(x)$  tels que  $f \in B$ , lorsque  $B$  varie dans  $G$ .

Si  $\pi$  et  $\pi'$  sont des quasi-topologies sur  $X$  et  $X'$  respectivement,

et si  $G$  est un filtre de  $\pi'.\mathcal{P}.\pi$  et  $F$  un filtre de  $X$ , nous poserons

$$GF = \theta(G)F.$$

THÉORÈME 2. Soit  $\pi$  et  $\pi'$  deux quasi-topologies sur  $X$  et  $X'$ . Il existe une quasi-topologie  $\lambda$  sur  $\pi'.\mathcal{P}.\pi$  vérifiant la condition:  $\lambda$  est la moins fine des quasi-topologies  $\lambda'$  telles que  $(\pi', v, \lambda' \times \pi)$  soit quasi-continue, où  $v(f, x) = f(x)$ . Si  $\pi'$  est séparée,  $\lambda$  est séparée.

PREUVE. Soit  $f \in \pi'.\mathcal{P}.\pi$  et associons à  $f$  la classe  $\lambda(f)$  des filtres  $G$  de  $\pi'.\mathcal{P}.\pi$  ayant la propriété :

$$\text{Pour tout } x \in X \text{ et tout } F \in \pi(x), \text{ on a } GF \in \pi'(f(x)).$$

Montrons que l'application  $f \mapsto \lambda(f)$  définit une quasi-topologie  $\lambda$  sur  $\pi'.\mathcal{P}.\pi$ . En effet,  $f \in F$  est identique au filtre  $fF$  image de  $F$  par  $f$  et,  $f$  étant quasi-continue, on a  $f \in \pi'(f(x))$ , d'où  $f \in \lambda(f)$ . Si  $G' < G$  alors  $G'F < GF$ , de sorte que  $G' \in \lambda(f)$  lorsque  $G \in \lambda(f)$ . Soit  $G \in \lambda(f)$  et  $G' \in \lambda(f)$ ; posons  $K = (G \cup G')F$  et  $K' = GF \cup G'F$ . Le filtre  $K$  est engendré par les classes  $(B \cup B')(A)$ , où  $B \in G$ ,  $B' \in G'$ ,  $A \in F$ , et

$$(B \cup B')(A) = B(A) \cup B'(A) \in K'.$$

Par ailleurs  $K'$  est engendré par les  $B(A) \cup B'(A')$ . Les relations

$$(B \cup B')(A \cap A') \subset B(A) \cup B'(A') \text{ et } (B \cup B')(A \cap A') \in K$$

entraînent  $K = K'$ . Puisque  $\pi'$  est une quasi-topologie, on a

$$K = GF \cup G'F \in \pi'(f(x));$$

il s'ensuit  $G \cup G' \in \lambda(f)$ , de sorte que  $\lambda$  est une quasi-topologie. Il est évident que  $(\pi', v, \lambda \times \pi)$  est quasi-continue et que  $\lambda$  est la moins fine des quasi-topologies vérifiant cette condition.

- Supposons  $\pi'$  séparée et soit  $G \in \lambda(f) \cap \lambda(f')$ . Pour tout  $x \in X$  les relations  $Gx \in \pi'(f(x))$  et  $Gx \in \pi'(f'(x))$  entraînent  $f(x) = f'(x)$  car  $\pi'$  est séparée. Donc  $f = f'$ , ce qui prouve que  $\lambda$  est séparée. ■

REMARQUE. Si  $f \in X'.\mathfrak{M}.X$ , on pourrait associer à  $f$  la classe  $\bar{\lambda}(f)$  des filtres  $G$  de  $X'.\mathfrak{M}.X$  tels que  $GF \in \pi'(f(x))$  pour tout  $x \in X$  et tout  $F \in \pi(x)$ ,  $\pi$  et  $\pi'$  étant des quasi-topologies données sur  $X$  et  $X'$ . On voit comme plus haut que  $\bar{\lambda}(f)$  est un idéal de  $F(X'.\mathfrak{M}.X)$ ; mais  $f \in \bar{\lambda}(f)$

signifie que  $f$  définit une application quasi-continue de  $\pi$  vers  $\pi'$ ; ainsi  $f \mapsto \bar{\lambda}(f)$  ne définit pas de quasi-topologie sur  $X'.\mathfrak{M}.X$ .

DÉFINITION. La quasi-topologie  $\lambda$  définie dans le Théorème 2 est appelée *quasi-topologie de la convergence locale* sur  $\pi'.\mathcal{P}.\pi$ , notée  $\lambda(\pi', \pi)$ . Si  $\pi$  est la quasi-topologie discrète  $d$  sur  $X$ , on appelle  $\lambda(\pi', d)$  la quasi-topologie de la *convergence simple* associée à  $(\pi', X)$ , notée  $\sigma(\pi', X)$ . 1+

Si  $G \in \lambda(f)$  (resp.  $\in \sigma(\pi', X)(f)$ ), on dira que  $G$  *quasi-converge localement* (resp. *simplement*) vers  $f$ . La classe  $\pi'.\mathcal{P}.d$  s'identifie à  $X'.\mathfrak{M}.X$ ; un filtre  $G$  de  $X'.\mathfrak{M}.X$  quasi-converge simplement vers  $f$  ssi  $Gx$  quasi-converge vers  $f(x)$  pour  $\pi'$  pour tout  $x \in X$ . Autrement dit,  $\sigma = \sigma(\pi', X)$  s'identifie à la quasi-topologie produit  $(\pi')^X$ . Il en résulte que, si  $\pi'$  s'identifie à une topologie,  $\sigma$  s'identifie aussi à une topologie, à savoir la topologie de la convergence simple. Mais  $\lambda(\pi', \pi)$  ne s'identifie pas toujours à une topologie, si  $\pi$  et  $\pi'$  s'identifient à des topologies.

Soit  $u$  l'injection de  $\pi'.\mathcal{P}.\pi$  dans  $\pi'.\mathcal{P}.d$  associant  $(\pi', \underline{f}, d)$  à  $(\pi', \underline{f}, \pi) \in \mathcal{P}$ . Nous désignons par  $\sigma(\pi', \pi)$  la quasi-topologie image par  $u^{-1}$  de  $\sigma(\pi', X)/u(\pi'.\mathcal{P}.\pi)$ , et nous appelons  $\sigma(\pi', \pi)$  la *quasi-topologie de la convergence simple sur  $\pi'.\mathcal{P}.\pi$* . On a  $\lambda(\pi', \pi) < \sigma(\pi', \pi)$ .

PROPOSITION 4. *Supposons que  $\pi$  et  $\pi'$  s'identifient à des topologies  $T$  et  $T'$ ; alors  $\lambda = \lambda(\pi', \pi)$  est plus fine que la topologie compacte-ouverte  $c(T', T)$ ; on a  $\lambda = c(T', T)$  lorsque  $T$  est localement compacte.*

PREUVE. Soit  $f \in T'.\mathcal{J}.T$ ; désignons par  $V$  la classe des voisinages  $W$  de  $f$  dans  $c(T', T)$  de la forme suivante: il existe un compact  $K$  de  $T$  et un ouvert  $U'$  de  $T'$  tels que  $f(K) \subset U'$  et que  $W$  soit la classe des  $f' \in T'.\mathcal{J}.T$  vérifiant  $f'(K) \subset U'$ . On sait que  $f$  admet pour filtre des voisinages dans  $c(T', T)$  le filtre  $V'$  engendré par  $V$ . Supposons  $G \in \lambda(f)$  et montrons que, pour tout  $W \in V$ , il existe  $B \in G$  tel que  $B \subset W$ . Pour tout  $x \in K$ , il existe un voisinage  $U(x)$  de  $x$  dans  $T$  et un  $B(x) \in G$  tels que  $B(x)(U(x)) \subset U'$ , car  $G \in \lambda(f)$  et  $f(x) \in U'$ . On peut choisir un nombre fini  $n$  de  $x_i$  tels que  $(U(x_i))_{i < n}$  forme un recouvrement de  $K$ ; posons  $B = \bigcap_{i < n} B(x_i) \in G$ . On trouve

$$B(K) \subset B(\bigcup_{i < n} U(x_i)) \subset \bigcup_{i < n} B(x_i)(U(x_i)) \subset U',$$

d'où  $B \subset \mathbb{W}$ . Il en résulte que  $G$  est plus fin que le filtre  $V'$  engendré par  $V$ , de sorte que  $G$  converge dans  $c(T', T)$ . Donc  $\lambda < c(T', T)$ .

- Supposons de plus  $T$  localement compact et prouvons que  $V'$  quasi-converge localement vers  $f$ , d'où l'on déduira que  $\lambda$  s'identifie à  $c(T', T)$ . En effet soit  $x \in X$  et  $U'$  un voisinage de  $f(x)$  dans  $T'$ ; la classe  $\tilde{f}^l(U')$  étant un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  dans  $T$ , il existe un voisinage compact  $K(x)$  de  $x$  dans  $T$  contenu dans  $U$ ; soit  $\mathbb{W}$  le voisinage de  $f$  dans  $c(T', T)$  formé des  $f'$  tels que  $f'(K(x)) \subset U'$ ; on a  $\mathbb{W}(K(x)) \subset U'$  et par suite  $V' \in \lambda(f)$ . ■

THÉORÈME 3. Soit  $\pi, \pi'$  et  $\pi''$  des quasi-topologies sur  $X, X'$  et  $X''$ ; soit  $\underline{k}$  la surjection  $(f', f) \mapsto f'.f$  de  $\pi''.\mathcal{P}.\pi' \times \pi'.\mathcal{P}.\pi$  dans  $\pi''.\mathcal{P}.\pi$ . Alors  $\underline{k} = (\lambda(\pi'', \pi), \underline{k}, \lambda(\pi'', \pi') \times \lambda(\pi', \pi))$  est quasi-continue.

PREUVE. Soit  $G' \in \lambda(\pi'', \pi')(f')$  et  $G \in \lambda(\pi', \pi)(f)$ . Pour tout  $x \in X$  et tout  $F \in \pi(x)$ , on a  $GF \in \pi'(f(x))$ , d'où  $G'(GF) \in \pi''(f'.f(x))$ . Le filtre  $G'(GF)$  est engendré par les classes  $B'(B(A))$ , où  $A \in F, B \in G, B' \in G'$ . Or  $B'(B(A)) = \underline{k}(B' \times B)(A)$ . Comme  $(\underline{k}(G' \times G))F$  est le filtre engendré par les classes  $\underline{k}(B' \times B)(A)$ , on obtient

$$(\underline{k}(G' \times G))F = G'(GF) \in \pi''(f'.f(x)).$$

Ainsi  $\underline{k}(G' \times G) \in \lambda(\pi'', \pi)(f', f)$ . Comme

$$H \in \lambda(\pi'', \pi') \times \lambda(\pi', \pi)(f', f)$$

entraîne  $H < p_1(H) \times p_2(H)$ , où  $p_i(H)$  quasi-converge localement (en notant  $p_i$  les projections canoniques du produit), il s'ensuit que  $\underline{k}$  est quasi-continue. ■

- 1 COROLLAIRE 1.  $(\mathcal{P}, \lambda_0)$  est une catégorie discrètement  $\hat{\theta}$ -structurée, où  $\lambda_0$  désigne l'application  $(\pi', \pi) \mapsto \lambda(\pi', \pi)$  de  $\mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_0$  dans  $\mathcal{P}_0$ .

(Voir Définition Chapitre I, Section B-4.)

COROLLAIRE 2. Soit  $\Lambda$  la quasi-topologie sur  $\mathcal{P}$  somme des quasi-topologies  $\lambda(\pi', \pi)$ , où  $(\pi', \pi) \in \mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_0$ . Alors  $(\mathcal{P}, \Lambda)$  devient une catégorie quasi-topologique.

Ce corollaire résulte de la Remarque, Section B-4, Chapitre I, car  $\hat{\theta}$  est un foncteur à atomes vérifiant les conditions de cette remarque. ■

THÉORÈME 4.  $(\mathcal{P}, \lambda)$  est une catégorie fortement  $\hat{\theta}$ -dominée le foncteur  $\lambda$  associant  $\lambda(\pi', \pi)$  à  $(\pi', \pi) \in \mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_0$ . Soit  $\pi \in \mathcal{P}_0$  et  $\lambda_\pi$  le foncteur de  $\mathcal{P}$  vers  $\mathcal{P}$  tel que  $\lambda_\pi(f) = \lambda(f, \pi)$ ; alors  $\lambda_\pi$  est compatible avec les  $l$ -limites projectives où  $l$  est une catégorie finie.

PREUVE. La première affirmation résulte du Corollaire 1 du Théorème 3, et de la Proposition 10 du Chapitre I, car  $\hat{\theta}$  est un foncteur d'homomorphismes à atomes. Supposons  $\pi' \in \mathcal{P}_0$  et  $\pi'' \in \mathcal{P}_0$  et soit  $q$  la bijection

$$(h'', h') \mapsto [h'', h'] \text{ de } \pi'' \cdot \mathcal{P} \cdot \pi \times \pi' \cdot \mathcal{P} \cdot \pi \text{ sur } (\pi'' \times \pi') \cdot \mathcal{P} \cdot \pi.$$

Nous allons montrer que  $q$  définit un quasi-homéomorphisme de

$$\tilde{\pi} = \lambda(\pi'', \pi) \times \lambda(\pi', \pi) \text{ sur } \tilde{\pi}' = \lambda(\pi'' \times \pi', \pi),$$

d'où il résultera que  $\lambda_\pi$  est à produits finis. En effet, si  $G'$  et  $G''$  sont des filtres de  $\pi' \cdot \mathcal{P} \cdot \pi$ , et de  $\pi'' \cdot \mathcal{P} \cdot \pi$ , respectivement et si  $F$  est un filtre de  $X = \hat{\theta}(\pi)$ , le filtre  $K = G''(F) \times G'(F)$  est engendré par les  $B''(A'') \times B'(A')$ , où  $B'' \in G''$ ,  $B' \in G'$ ,  $A'' \in F$  et  $A' \in F$ ; le filtre  $K' = q(G'' \times G')(F)$  est engendré par les classes

$$q(B'' \times B')(A) = ([g'', g'](A) \mid g'' \in B'', g' \in B'), \quad A \in F,$$

formées des couples  $(g''(a), g'(a))$ , où  $a \in A$ . Si  $A = A'' \cap A'$ , on a

$$q(B'' \times B')(A) \subset B''(A) \times B'(A) \subset B''(A'') \times B'(A').$$

Ainsi  $K' < K$ . Supposons  $G' \in \lambda(\pi', \pi)(h')$ ,  $G'' \in \lambda(\pi'', \pi)(h'')$ ,  $F \in \pi(x)$ ; soit  $y = [h'', h'](x)$ . Les relations

$$G'(F) \in \pi'(h'(x)) \text{ et } G''(F) \in \pi''(h''(x))$$

ont pour conséquence  $K \in (\pi'' \times \pi')(y)$ . Il s'ensuit

$$q(G'' \times G')(F) = K' \in (\pi' \times \pi'')(y),$$

d'où  $q(G'' \times G') \in \tilde{\pi}'[h'', h']$ . Comme tout filtre appartenant à  $\tilde{\pi}(h'', h')$  est plus fin qu'un filtre de la forme  $G'' \times G'$  précédente, on voit que l'application  $(\tilde{\pi}', q, \tilde{\pi})$  est quasi-continue.

- Inversement, supposons  $\tilde{G} \in \tilde{\pi}'(\hat{h})$  et  $F \in \pi(x)$ ; alors  $\hat{h} = [h'', h']$ , où

$h'' = p_1 \cdot \hat{h}$  et  $h' = p_2 \cdot \hat{h}$ . Comme  $\bar{G}(F) \in (\pi'' \times \pi')(\hat{h}(x))$ , on a

$$p_1(\bar{G}(F)) \in \pi''(h''(x)) \quad \text{et} \quad p_2(\bar{G}(F)) \in \pi'(h'(x)).$$

Les relations  $p_i(\bar{G}(F)) = \hat{p}_i(\bar{G})(F)$ , pour  $i = 1, 2$ , où  $\hat{p}_i = \lambda(p_i, \pi)$ , entraînent  $\hat{p}_1(\bar{G}) \in \lambda(\pi'', \pi)(h'')$  et  $\hat{p}_2(\bar{G}) \in \lambda(\pi', \pi)(h')$ . On en déduit  $\bar{q}^1(\bar{G}) \in \bar{\pi}(h'', h')$ , car  $\bar{q}^1(\bar{G}) < \hat{p}_1(\bar{G}) \times \hat{p}_2(\bar{G})$ . Donc  $(\bar{\pi}, \bar{q}^1, \bar{\pi}')$  est quasi-continue.

- Soit  $n = (\pi', \iota, \pi'')$  un noyau dans  $\mathcal{P}$  d'un couple  $(g, g')$ , et  $Y = \hat{\theta}(\pi'')$ . Le couple  $(\lambda_\pi(g), \lambda_\pi(g'))$  admet pour  $(\mathbb{M}^t, \hat{\theta})$ -noyau la quasi-topologie  $\lambda'$  induite par  $\lambda(\pi', \pi)$  sur la classe  $N$  des  $h \in \pi' \cdot \mathcal{P} \cdot \pi$  tels que  $g \cdot h = g' \cdot h$ . La surjection  $h' \mapsto n \cdot h'$ , où  $h' \in \pi'' \cdot \mathcal{P} \cdot \pi$ , est une bijection  $q'$  de  $\pi'' \cdot \mathcal{P} \cdot \pi$  sur  $N$ . Puisque  $\lambda(n, \pi)$  est une application quasi-continue de  $\lambda(\pi'', \pi)$  dans  $\lambda(\pi', \pi)$ , sa restriction  $q' = (\lambda', q', \lambda(\pi'', \pi))$  est aussi quasi-continue. Montrons que  $q'$  est un quasi-homéomorphisme, ce qui prouvera que  $\lambda_\pi$  est compatible avec les noyaux. En effet, soit  $G \in \lambda'(h)$  et  $F \in \pi(x)$ . Par définition de  $\lambda'$ , on a  $G(F) \in \pi'(h(x))$ . Si  $h' \in B \in G$  et si  $A \in F$ , les classes  $h'(A)$  et  $q'^{-1}(h')(A) \subset Y$  sont identiques. On en déduit que le filtre  $q'^{-1}(G)(F)$  est la trace sur  $Y$  de  $G(F)$ , de sorte qu'il quasi-converge vers  $h(x)$  pour  $\pi''$ . Ceci signifie que  $q'^{-1}(G)$  appartient à  $\lambda(\pi'', \pi)$ . On en conclut que  $q'$  est inversible dans  $\mathcal{P}$ .

- Le foncteur  $\lambda_\pi$  étant à produits finis et à noyaux, il est à  $l'$ -limites projectives pour toute catégorie finie  $l'$ . ■

THÉOREME 5. Soit  $\pi, \pi_0$  et  $\pi'$  des quasi-topologies sur  $X, X_0$  et  $X'$ . Il existe un quasi-homéomorphisme de  $\lambda(\pi', \pi \times \pi_0)$  sur  $\lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi_0)$ .

PREUVE. Soit  $f \in \pi' \cdot \mathcal{P} \cdot (\pi \times \pi_0)$ . Pour tout  $y \in X_0 = \hat{\theta}(\pi_0)$ , soit  $f_y$  l'application quasi-continue de  $\pi$  dans  $\pi'$  associant  $f(x, y)$  à  $x \in X$ , et soit  $\hat{f}$  la surjection  $y \mapsto f_y$  de  $X_0$  dans  $\pi' \cdot \mathcal{P} \cdot \pi$ . Si  $F' \in \pi_0(y)$  et si  $F \in \pi(x)$ , le filtre  $(\hat{f}F')(F)$  est engendré par les classes  $(\hat{f}(A'))(A)$ , où  $A \in F$  et  $A' \in F'$ . Comme  $(\hat{f}(A'))(A) = f(A \times A')$ , ce filtre est identique à  $f(F \times F')$ , de sorte que  $\hat{f} = (\lambda(\pi', \pi), \hat{f}, \pi_0)$  est quasi-continue. Soit  $h$  la surjection  $f \mapsto \hat{f}$  de  $Z = \pi'' \cdot \mathcal{P} \cdot (\pi \times \pi_0)$  dans  $Z' = \lambda(\pi', \pi) \cdot \mathcal{P} \cdot \pi_0$ . Si  $g \in Z'$  et si  $F \in \pi(x)$  et  $F' \in \pi_0(y)$ , on a  $g(F') \in \lambda(\pi', \pi)(g(y))$ , i. e.



$g(F')(F) \in \pi'(g(\gamma)(x))$ . Soit  $\underline{g}'$  la surjection  $(x, y) \mapsto g(\gamma)(x)$ ; le filtre  $g(F')(F)$  étant identique à  $\underline{g}'(F \times F')$ , on trouve

$$g' = (\pi', \underline{g}', \pi \times \pi_0) \in \mathcal{P} \quad \text{et} \quad g = h(g').$$

Donc  $h$  est une bijection de  $Z$  sur  $Z'$ .

- Supposons  $G \in \lambda(\pi', \pi \times \pi_0)(f)$ . Si  $F \in \pi(x)$  et  $F' \in \pi_0(\gamma)$ , on trouve  $G(F \times F') \in \pi'(f(x, y))$ . Or le filtre  $G(F \times F')$  est identique au filtre  $(h(G)F')F$ , car engendré par les classes  $B(A \times A') = (h(B)(A'))(A)$  où  $A \in F$ ,  $A' \in F'$ ,  $B \in G$ . Par conséquent

$$h(G)F' \in \lambda(\pi', \pi)(h(f)(\gamma)) \quad \text{et} \quad h(G) \in \lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi_0)(hf).$$

Il en résulte que

$$\bar{h} = (\lambda(\lambda(\pi', \pi), \pi_0), h, \lambda(\pi', \pi \times \pi_0))$$

est quasi-continue. On montre de même que  $h^{-1}$  est quasi-continue. ■

1+

### B. Quasi-convergence locale sur les sections.

Soit  $\pi$  une quasi-topologie sur  $X$ . Nous désignons par  $\pi_+$  la quasi-topologie définie comme suit: Soit  $X_+$  la classe obtenue en ajoutant à  $X$  un élément  $a \notin X$ ; on pose  $\pi_+(a) = F(X_+)$  et, si  $x \in X$ , l'idéal  $\pi_+(x)$  est formé des filtres  $F_+ = (X_+, \iota, X)(F)$  de  $X_+$  engendrés par les  $F$  appartenant à  $\pi(x)$ . Ainsi  $\pi_+$  est une quasi-topologie (non séparée) sur  $X_+$ .  $X$  est un ouvert de  $\hat{\tau}(\pi_+)$  et  $\pi_+/X = \pi$ .

Soit  $\pi$  et  $\pi'$  deux quasi-topologies sur  $X$  et sur  $X'$ . Désignons par  $S(X', X)$  la classe des applications locales quasi-continues de  $\pi$  dans  $\pi'$ , c'est-à-dire la classe des applications quasi-continues de la forme  $f = (\pi', \underline{f}, \pi/U)$ , où  $U$  est un ouvert de la topologie  $\hat{\tau}(\pi)$ . Soit  $\Sigma(\pi', \pi)$  la classe des  $f' \in \pi'_+ \cdot \mathcal{P} \cdot \pi_+$  tels que  $f'(a) = a' \notin X'$ .

PROPOSITION 5. On définit une bijection  $\gamma$  de  $S(\pi', \pi)$  sur  $\Sigma(\pi', \pi)$ , en associant à  $f = (\pi', \underline{f}, \pi/U)$  le triplet  $f_+ = (\pi'_+, \underline{f}_+, \pi_+)$ , où

$$f_+(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \in U \quad \text{et} \quad f_+(x') = a' \quad \text{si} \quad x' \in X_+ - U.$$

PREUVE.  $\gamma$  est évidemment injective, car  $f$  est la restriction de  $f_+$  à  $\pi/U$ . De plus  $f_+$  est quasi-continue et appartient à  $\Sigma(\pi', \pi)$ . Supposons  $g' \in \Sigma(\pi', \pi)$  et  $U = g'^{-1}(X')$ . Puisque  $g'(a) = a'$ , on a  $U \subset X$ . Etant

donné que  $\underline{g}'$  définit une application continue,  $\hat{\tau}(g')$ , et que  $X'_+$  est le seul voisinage de  $a'$  dans  $\hat{\tau}(\pi'_+)$ , on voit que  $U$  est un ouvert de  $\hat{\tau}(\pi_+)$ , et a fortiori de  $\hat{\tau}(\pi_+)/X = \hat{\tau}(\pi_+/X) = \hat{\tau}(\pi)$  (Section 1). On en déduit que  $g' = \gamma(g)$  où  $g = (\pi', \underline{g}'_t, \pi/U) \in S(\pi', \pi)$ . Donc  $\gamma$  est une bijection. ■

DÉFINITION. On appelle *quasi-topologie de la convergence locale sur*  $S(\pi', \pi)$ , notée  $\hat{\lambda}(\pi', \pi)$ , la quasi-topologie image par  $\gamma^{-1}$  de la quasi-topologie  $\lambda(\pi'_+, \pi_+)/\Sigma(\pi', \pi)$ .

Soit  $G$  un filtre de  $S(\pi', \pi)$  et  $F \in \pi(x)$ . Si  $B \in G$ , si  $A \in F$  et si  $A \subset \hat{\theta}(a(g))$  pour tout  $g \in B$ , posons

$$B/A = \cup(g(A) \mid g \in B) \quad (\text{i. e. } B/A = \gamma(B)A).$$

Soit  $M$  la classe des classes  $B/A$  ainsi définies. Si  $M \neq \emptyset$ , alors  $M$  est une base de filtre et nous désignons par  $G/F$  le filtre qu'elle engendre.  $G/F$  est la trace de  $\gamma(G)F_+$  sur  $X'$ .

PROPOSITION 6. Soit  $f \in S(\pi', \pi)$ ; on a  $G \in \lambda(\pi', \pi)(f)$  ssi pour tout  $x \in a(f)$  et tout  $F \in \pi(x)$  le filtre  $G/F$  est défini et quasi-converge vers  $f(x)$  dans  $\pi'$ .

PREUVE.  $G/F$  est défini ssi  $X' \in \gamma(G)F_+$ ; dans ce cas  $G/F$  est la trace de  $\gamma(G)F_+$  sur  $X'$ . Supposons  $G \in \hat{\lambda}(\pi', \pi)(f)$ ,  $x \in a(f)$ ,  $F \in \pi(x)$ ; alors  $\gamma(G)F_+ \in \pi'_+(f(x))$ . Puisque  $X'$  est un ouvert de  $\hat{\tau}(\pi')$ , on a  $X' \in \gamma(G)F_+$ , de sorte que  $G/F$  est défini et  $G/F \in \pi'(f(x))$ . Inversement supposons ces conditions vérifiées. Si  $x \in a(f)$  et si  $F' \in \pi_+(x)$ , il existe  $F \in \pi(x)$  tel que  $F' = F_+$ ; par hypothèse  $G/F$  est défini, et:  $\gamma(G)F_+ \in \pi'(f(x))$ . Il s'ensuit

$$\gamma(G)F' = (G/F)_+ \in \pi'_+(f_+(x)).$$

Si  $x' \notin a(f)$  et si  $F' \in \pi_+(x')$ , on a  $f_+(x') = a'$ , d'où  $\gamma(G)F' \in \pi'_+(a')$ , car  $\pi'_+(a') = F(X'_+)$ . Ainsi

$$\gamma(G) \in \lambda(\pi'_+, \pi_+)(f_+), \text{ c'est-à-dire } G \in \hat{\lambda}(\pi', \pi)(f). \quad \blacksquare$$

Si  $T$  et  $T'$  sont deux topologies, désignons par  $S(T', T)$  la classe des applications continues d'un sous-espace ouvert de  $T$  dans  $T'$ . On appelle *topologie compacte-ouverte sur*  $S(T', T)$  la topologie engendrée

par les ouverts  $V(U', K)$  construits de la façon suivante :  $U'$  est un ouvert de  $T'$ ,  $K$  est un compact de  $T$  et  $V(U', K)$  est la classe de tous les  $f \in S(T', T)$  tels que  $K \subset \alpha(f)$  et  $f(K) \subset U'$ .

PROPOSITION 7. Si  $\pi$  et  $\pi'$  s'identifient à des topologies  $T$  et  $T'$  et si  $T$  est localement compacte,  $\hat{\lambda}(\pi', \pi)$  s'identifie à la topologie compacte ouverte sur  $S(T', T)$ .

PREUVE.  $\pi_+$  s'identifie à la topologie  $T_+$  sur  $X_+$  telle que  $T_+/X = T$ , et que  $X_+$  soit le seul ouvert de  $T_+$  contenant  $a$ . La topologie compacte-ouverte sur  $S(T', T)$  est l'image par  $\gamma^{-1}$  de la topologie  $c$  induite sur  $\gamma(S(T', T))$  par la topologie de la convergence compacte  $c(T'_+, T_+)$  sur  $T'_+ \cdot \mathcal{J} \cdot T_+$  (nous désignons par  $\gamma$  la bijection définie comme dans la Proposition 5). D'après la Proposition 4,  $c(T'_+, T_+)$  s'identifie à  $\lambda(\pi'_+, \pi_+)$ ; donc  $c$  s'identifie à  $\lambda(\pi'_+, \pi_+)/\Sigma(\pi', \pi)$ , ce qui signifie que  $\hat{\lambda}(\pi', \pi)$  s'identifie à la topologie compacte-ouverte. ■

THÉORÈME 6. Soit  $\pi, \pi'$  et  $\pi''$  des quasi-topologies et soit  $\hat{k}$  la surjection de  $S(\pi'', \pi') \times S(\pi', \pi)$  dans  $S(\pi'', \pi)$  définie par :

$$((\pi'', f', \pi'/U'), (\pi', f, \pi/U)) \mapsto (\pi'', f'f, \pi/f^1(U') \cap U).$$

Alors  $\hat{k} = (\hat{\lambda}(\pi'', \pi), \hat{k}, \hat{\lambda}(\pi'', \pi') \times \hat{\lambda}(\pi', \pi))$  est quasi-continue.

PREUVE. Soit  $k$  l'application quasi-continue « composition » (Théorème 3), de  $\pi_0 = \lambda(\pi'_+, \pi'_+) \times \lambda(\pi'_+, \pi_+)$  vers  $\pi'_0 = \lambda(\pi''_+, \pi_+)$ . Si  $f_+ \in \Sigma(\pi', \pi)$ , et  $f'_+ \in \Sigma(\pi'', \pi')$ , on a

$$k(f'_+, f_+)(a) = f'_+(f_+(a)) = a \notin \hat{\theta}(\pi''),$$

si  $a \notin \hat{\theta}(\pi)$ ; par suite

$$k' = (\pi'_0/\Sigma(\pi'', \pi), k, \pi_0/\Sigma(\pi'', \pi') \times \Sigma(\pi', \pi))$$

est quasi-continue. Désignons par  $\gamma'$ ,  $\gamma$  et  $\gamma''$  les quasi-homéomorphismes de  $\hat{\lambda}(\pi'', \pi')$ ,  $\hat{\lambda}(\pi', \pi)$  et  $\hat{\lambda}(\pi'', \pi)$  respectivement sur

$$\lambda(\pi''_+, \pi'_+)/\Sigma(\pi'', \pi'), \lambda(\pi'_+, \pi_+)/\Sigma(\pi', \pi), \lambda(\pi''_+, \pi_+)/\Sigma(\pi'', \pi).$$

Ainsi  $\gamma''^{-1} \cdot k' \cdot (\gamma' \times \gamma)$  est quasi-continue. On a

$$\gamma''^{-1} k' (\gamma' \times \gamma)(f', f) = \gamma''^{-1} k(f'_+, f_+) = \hat{k}(f', f),$$

car

$$\begin{aligned} f'_+ \cdot f_+(x') &= f'(f(x')) \text{ si } x' \in a(f) \text{ et } f(x') \in a(f'), \\ f'_+ \cdot f_+(x') &= f'_+(a') = a'' \text{ si } x' \notin a(f), \\ f'_+ \cdot f_+(x') &= f'_+(f(x')) = a'' \text{ si } f(x') \notin a(f'), \\ f'_+ \cdot f_+(a) &= f_+(a') = a''. \end{aligned}$$

Il s'ensuit  $\hat{k} = \gamma'^{-1} \cdot k' \cdot (\gamma' \times \gamma) \in \mathcal{P}$ . ■

### 3. CATÉGORIE QUASI-TOPOLOGIQUE DES SECTIONS LOCALES.

#### A. Catégories quasi-topologiques.

- 1 DÉFINITION. On appelle *catégorie quasi-topologique* une catégorie  $\hat{\theta}$ -structurée.

Le foncteur  $\hat{\theta}$  étant  $\dashv$ -étalant et à  $\mathbb{M}_0$ -produits, les résultats du Chapitre I, Section B-1 s'appliquent aux catégories quasi-topologiques. Pour que  $(C^*, \pi)$  soit une catégorie quasi-topologique, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

- 1°  $C^*$  est une catégorie et  $\pi$  une quasi-topologie sur  $C^*$ .
- 2°  $(\pi, \alpha, \pi) \in \mathcal{P}$  et  $(\pi, \beta, \pi) \in \mathcal{P}$ .
- 3°  $(\pi, \kappa, \pi * \pi) \in \mathcal{P}$ , où  $\pi * \pi = \pi \times \pi / C^* * C^*$ .

REMARQUE. Le foncteur  $\hat{\tau}$  n'étant pas compatible avec les produits fibrés finis,  $(C^*, \hat{\tau}(\pi))$  peut ne pas être une catégorie topologique, lorsque  $(C^*, \pi)$  est une catégorie quasi-topologique.

Soit  $\hat{\Theta}$  le foncteur projection vers  $\mathbb{M}$  de la catégorie  $\mathcal{F}(\hat{\theta})$  des foncteurs quasi-topologiques (i. e.  $\hat{\theta}$ -structurés). Toujours d'après le Chapitre I, Section 1, on a les résultats suivants :

THÉORÈME 7.  $\hat{\Theta}$  est un foncteur d'homomorphismes saturé, à  $\mathcal{F}_0$ -limites projectives;  $\mathcal{F}(\hat{\Theta})$  est une catégorie à  $\mathcal{F}_0$ -limites inductives. Si  $(C^*, \pi)$  est une catégorie quasi-topologique et  $r$  une relation d'équivalence sur  $C^*$ , il existe une catégorie quasi-topologique  $(\hat{C}^*, \hat{\pi})$  quasi-quotient de  $(C^*, \pi)$  par  $r$  telle que  $\hat{C}^*$  soit une catégorie quasi-quotient de  $C^*$  par  $r$ .

- En effet, la dernière affirmation se démontre d'une façon analogue au Théorème 6 du Chapitre I, le foncteur  $\hat{\theta}$  admettant pour section minimale
- 2

le foncteur de  $\mathfrak{M}$  vers  $\mathcal{P}$  associant à  $(X', f, X)$  l'application quasi-continue  $(X'_g, f, X_g)$ , où  $X_g$  est la quasi-topologie grossière sur  $X$ . ■

Dans la suite,  $(C', \pi)$  représente une catégorie quasi-topologique donnée;  $\pi_0$  et  $\pi * \pi$  sont les quasi-topologies sur  $C'_0$  et sur  $C' * C'$ , induites par  $\pi$  et par  $\pi \times \pi$  respectivement. Nous allons voir ce que deviennent les résultats de la Section A-4 du Chapitre I.

PROPOSITION 8. *L'espèce de morphismes  $(\mathcal{P}^*, K^\bullet, \kappa')$  associée à  $(C', \pi)$ , où  $K = \pi \cdot \mathcal{P}$ , est sous-jacente à une espèce de structures  $\hat{\theta}$ -dominée  $(\mathcal{P}^*, \tilde{\lambda})$  telle que  $\tilde{\lambda}(\pi') = ((\pi \cdot \mathcal{P} \cdot \pi')^\bullet, \lambda(\pi, \pi'))$  pour  $\pi' \in \mathcal{P}_0$ .*

En effet, d'après le Théorème 5,  $(\mathcal{P}, \lambda)$  est une catégorie  $\hat{\theta}$ -dominée,  $\lambda_{\pi'}$  est à produits fibrés finis. Par suite les conditions de la Proposition 9 du Chapitre I sont vérifiées, de sorte que  $(\mathcal{P}^*, \tilde{\lambda})$  est une espèce de structures  $\hat{\theta}$ -dominée, en vertu de cette proposition. ■

Soit  $P'$  la catégorie produit croisé associée à l'espèce de morphismes  $(\mathcal{P}^*, K^\bullet, \kappa')$  dans le Chapitre I, Section A-4. Puisque  $(\mathcal{P}, \lambda)$  est une catégorie fortement  $\hat{\theta}$ -dominée (Théorème 3, Théorème 4) et que  $\hat{\theta}$  est un foncteur d'homomorphismes à atomes, les Théorèmes 8 et 9 du Chapitre I s'appliquent. Ainsi il existe une catégorie fortement  $\hat{\theta}$ -dominée  $(P', \lambda^{\pi'})$ , où  $\lambda^{\pi'}(\mu'', \mu')$  est la quasi-topologie sur  $\mu'' \cdot P \cdot \mu'$  induite par  $\lambda(\pi, \pi') \times \lambda(\pi'', \pi') \times \lambda(\pi, \pi')$ , où

$$\mu'' = (m'', \pi'', m'') \in P'_0 \quad \text{et} \quad \mu' = (m', \pi', m') \in P'_0.$$

1+

### B. Catégorie des sections locales.

Soit toujours  $(C', \pi)$  une catégorie quasi-topologique, et reprenons les notations précédentes. On va construire une sous-catégorie de  $P'$ .

DÉFINITION. On appelle *section locale* de  $(C', \pi)$  un triplet  $(U', s, U)$  vérifiant les conditions suivantes :

- 1°  $U$  et  $U'$  sont des ouverts de  $\hat{\tau}(\pi_0)$  et  $(\pi, s, \pi_0/U) \in \mathcal{P}$  ;
- 2°  $\alpha s(x) = x$  pour tout  $x \in U$ , et  $\beta s(U) \subset U'$ .

Soit  $S = S(C', \pi)$  la classe des sections locales de  $(C', \pi)$ ; soit  $\kappa$  la loi de composition de  $C'$ .

THÉORÈME 8.  $S^\bullet$  est isomorphe à une sous-catégorie  $P'$  de  $P$ , la loi de composition étant :

$$(U'', s', \hat{U}') \bullet (U', s, U) = (U'', \kappa[s' \beta s, s], U) \text{ ssi } \hat{U}' = U'.$$

De plus  $(S^\bullet, <)$  est une catégorie inductive pour la relation d'ordre :

$$(U'_1, s_1, U_1) < (U', s, U) \text{ ssi } U'_1 \subset U', U_1 \subset U \text{ et } s_1 = s/U_1.$$

PREUVE. Soit  $\hat{s} = (U', s, U) \in S$  et

$$z(\hat{s}) = ((\pi, \iota, \pi_0/U'), (\pi_0/U', \beta s, \pi_0/U), (\pi, s, \pi_0/U)).$$

On a  $z(\hat{s}) \in P$  et  $z: \hat{s} \mapsto z(\hat{s})$  est une bijection de  $S$  sur une partie  $P'$  de  $P$ . Comme  $\alpha s(x) = x$  pour tout  $x \in U$ , on trouve

$$\begin{aligned} \alpha(z(\hat{s})) &= ((\pi, \iota, \pi_0/U), \pi_0/U, (\pi, \iota, \pi_0/U)) = z(U, \iota, U) \in P', \\ \beta(z(\hat{s})) &= z(U', \iota, U') \in P'. \end{aligned}$$

Supposons  $\hat{s}' = (U'', s', \hat{U}') \in S$ . Le composé  $z(\hat{s}') \cdot z(\hat{s})$  est défini dans  $P'$  ssi  $(\pi, \iota, \pi_0/U') = (\pi, \alpha s', \pi_0/\hat{U}')$ , c'est-à-dire ssi  $U' = \hat{U}'$ .

Dans ce cas,

$$z(\hat{s}') \cdot z(\hat{s}) = ((\pi, \iota, \pi_0/U''), (\pi_0/U'', \beta s' \beta s, \pi_0/U), l),$$

où

$$\begin{aligned} l &= ((\pi, s', \pi_0/U') \cdot (\pi_0/U', \beta s, \pi_0/U)) \bullet (\pi, s, \pi_0/U) \\ &= (\pi, \kappa[s' \beta s, s], \pi_0/U). \end{aligned}$$

En posant  $s'' = \kappa[s' \beta s, s]$ , on trouve

$$\alpha s'' = \alpha \kappa[s' \beta s, s] = \alpha s = U \text{ et } \beta s'' = \beta \kappa[s' \beta s, s] = \beta s' \beta s.$$

Il s'ensuit  $\hat{s}'' = (U'', s'', U) \in S$  et  $z(\hat{s}'') = z(\hat{s}') \cdot z(\hat{s})$ . Ainsi  $P'$  définit une sous-catégorie de  $P$ . La catégorie  $S^\bullet$  image de  $P'$  par  $z^{-1}$  admet bien la loi de composition définie dans l'énoncé.

$(S^\bullet, <)$  est évidemment une catégorie ordonnée. Si  $\hat{s}_i = (U'_i, s_i, U_i) < \hat{s}$  pour tout  $i \in I$ , la classe  $(\hat{s}_i \mid i \in I)$  admet pour agrégat dans  $(S, <)$  la section locale  $(\bigcup_{i \in I} U'_i, s, \bigcup_{i \in I} U_i)$ . Ainsi  $(S, <)$  est une classe inductive et  $(S^\bullet, <)$  une catégorie inductive. De plus, celle-ci est complètement régulière à droite, car  $U_1 < U$  entraîne  $(U, \iota, U_1) \in S$ . ■

Nous allons munir  $S^\bullet$  d'une quasi-topologie. Bien que la construc-

tion puisse se faire directement, il sera plus simple de se ramener à la situation considérée dans le Chapitre I, Théorème 9, comme suit: 1

Soit  $C_+$  la catégorie admettant  $C$  pour sous-catégorie pleine et ayant pour seuls éléments les éléments de  $C$  et un  $a \notin C$  (alors  $a$  est une unité). Si  $\pi_+$  est la quasi-topologie définie dans la Section B-1 à partir de  $\pi$  en adjoignant  $a$  à  $C$ , le couple  $(C_+, \pi_+)$  est une catégorie quasi-topologique. Soit  $\hat{P}$  la catégorie produit croisé correspondant à l'espèce de morphismes  $(\mathcal{P}^*, (\pi_+ \cdot \mathcal{P})^\bullet, \bar{\kappa}')$  associée à  $(C_+, \pi_+)$ . Notons  $\psi$  la projection de  $\hat{P}$  vers  $\mathcal{P}$ , et  $P_\pi = \psi^{-1}(\pi_{+0} \cdot \mathcal{P} \cdot \pi_{+0})$ . D'après le corollaire du Théorème 9 du Chapitre I,  $(P_\pi, \sigma)$  est une catégorie quasi-topologique,  $\sigma$  étant la quasi-topologie induite sur  $P_\pi$  par

$$\lambda(\pi_+, \pi_{+0}) \times \lambda(\pi_{+0}, \pi_{+0}) \times \lambda(\pi_+, \pi_{+0}).$$

Remarquons que  $\pi_{+0}$  est la quasi-topologie déduite de  $\pi_0$  par adjonction de  $a$  à  $C_0$ .

THÉORÈME 9. *Il existe une catégorie quasi-topologique  $(S^\bullet, \hat{\lambda}')$ , isomorphe à une sous-catégorie quasi-topologique de  $(P_\pi, \sigma)$ . Si  $u_1$  et  $u_2$  sont les surjections*

$$\hat{s} \mapsto (\pi, \iota, \pi_0/U') \text{ et } \hat{s} \mapsto (\pi, s, \pi_0/U),$$

où  $\hat{s} = (U', s, U) \in S$ , l'idéal  $\hat{\lambda}'(\hat{s})$  est formé des filtres  $F$  tels que

$$u_1(F) \in \hat{\lambda}(\pi, \pi_0)(u_1(\hat{s})) \text{ et } u_2(F) \in \hat{\lambda}(\pi, \pi_0)(u_2(\hat{s})).$$

PREUVE. Notons  $\gamma$  et  $\gamma_0$  les injections canoniques, définies dans la Proposition 5, de la classe  $S(\pi, \pi_0)$  (des sections locales de  $\pi_0$  dans  $\pi$ ) dans  $\pi_+ \cdot \mathcal{P} \cdot \pi_{+0}$  et de la classe  $S(\pi_0, \pi_0)$  dans  $\pi_{+0} \cdot \mathcal{P} \cdot \pi_{+0}$ . Notons  $u_3$  la surjection  $\hat{s} \mapsto (\pi_0/U', \beta s, \pi_0/U)$ , où  $\hat{s} = (U', s, U) \in S$ . Posons  $\hat{z}(\hat{s}) = [\gamma u_1, \gamma_0 u_3, \gamma u_2](\hat{s})$ ; on a  $\hat{z}(\hat{s}) \in P_\pi$  car

$$\gamma u_1(\hat{s}) \cdot \gamma_0 u_3(\hat{s}) = \gamma(\pi, \beta s, \pi_0/U) = \hat{b}' \cdot \gamma u_2(\hat{s}),$$

$\hat{b}'$  étant l'application quasi-continue  $(\pi_+, \beta_+, \pi_+)$  définie par l'application but de  $C_+$ . Si on a aussi  $\hat{s}' = (U'', s', U') \in S$ , on obtient

$$a u_2(\hat{s}') = u_1(\hat{s}), \text{ d'où } \beta(\hat{z}(\hat{s})) = \gamma u_1(\hat{s}') = a(\hat{z}(\hat{s}')).$$

Les relations

$$u_1(\hat{s}' \bullet \hat{s}) = u_1(\hat{s}'), \quad u_2(\hat{s}' \bullet \hat{s}) = (\pi, \kappa[s' \beta s, s], \pi_0/U),$$

$$u_3(\hat{s}' \bullet \hat{s}) = (\pi_0/U^*, \beta s' \beta s, \pi_0/U) = u_3(\hat{s}') \cdot u_3(\hat{s}),$$

ont pour conséquence

$$\gamma u_1(\hat{s}' \bullet \hat{s}) = \gamma u_1(\hat{s}'), \quad \gamma_0 u_3(\hat{s}' \bullet \hat{s}) = \gamma_0 u_3(\hat{s}') \cdot \gamma_0 u_3(\hat{s}),$$

$$\gamma u_2(\hat{s}' \bullet \hat{s}) = \gamma(\pi, s' \beta s, \pi_0/U) \bullet \gamma u_2(\hat{s}) = (\gamma u_2(\hat{s}') \cdot \gamma_0 u_3(\hat{s})) \bullet \gamma u_2(\hat{s}).$$

Il en résulte

$$\hat{z}(\hat{s}' \bullet \hat{s}) = [\gamma u_1, \gamma_0 u_3, \gamma u_2](\hat{s}' \bullet \hat{s}) = \hat{z}(\hat{s}') \cdot \hat{z}(\hat{s}).$$

Ainsi  $\hat{z}$  définit un foncteur injectif de  $S^\bullet$  vers  $P_\pi^*$ . Si  $\hat{P}' = \hat{z}(S)$ , nous savons que  $(\hat{P}', \sigma/\hat{P}')$  est une catégorie quasi-topologique. Donc  $(S^\bullet, \lambda')$  est une catégorie quasi-topologique,  $\lambda'$  désignant la quasi-topologie image de  $\sigma/\hat{P}'$  par  $\hat{z}^{-1}$ . D'après la Proposition 6, la quasi-topologie  $\hat{\lambda}(\pi, \pi_0)$  est l'image, par  $\gamma^{-1}$ , de la quasi-topologie induite par  $\lambda(\pi_+, \pi_+)$  sur  $\gamma(S(\pi, \pi_0))$ , et  $\hat{\lambda}(\pi_0, \pi_0) = \gamma^{-1}(\lambda(\pi_+, \pi_+)/\gamma(S(\pi_0, \pi_0)))$ . Si  $F$  est un filtre de  $S$ , on a  $F \in \lambda'(\hat{s})$  ssi

$$\gamma u_1(F) \in \lambda(\pi_+, \pi_+)(\gamma u_1(\hat{s})), \quad \gamma u_2(F) \in \lambda(\pi_+, \pi_+)(\gamma u_2(\hat{s})),$$

$$\text{et } \gamma_0 u_3(F) \in \lambda(\pi_+, \pi_+)(\gamma_0 u_3(\hat{s})),$$

c'est-à-dire ssi

$$u_1(F) \in \hat{\lambda}(\pi, \pi_0)(u_1(\hat{s})), \quad u_2(F) \in \hat{\lambda}(\pi, \pi_0)(u_2(\hat{s})),$$

$$\text{et } u_3(F) \in \hat{\lambda}(\pi_0, \pi_0)(u_3(\hat{s})).$$

Des relations précédentes, les deux premières signifient que  $F \in \hat{\lambda}'(\hat{s})$  (notation de l'énoncé); si elles sont vérifiées, la troisième l'est aussi car

$$\gamma_0 u_3(F) = \beta_+(\gamma u_2(F)) \in \lambda(\pi_+, \pi_+)(\gamma_0 u_3(\hat{s})).$$

Ceci prouve que  $\lambda'$  est identique à la quasi-topologie  $\hat{\lambda}'$  du Théorème. ■

**COROLLAIRE.** Si  $\pi$  et  $\pi_0$  s'identifient à des topologies  $T$  et  $T_0$ ,  $T_0$  étant localement compacte, la quasi-topologie  $\hat{\lambda}'$  s'identifie à une topologie  $\Sigma$  et  $(S^\bullet, \Sigma)$  est une catégorie topologique.

En effet, ceci résulte de la Proposition 7. ■



Celebrazioni archimedee  
del secolo XX, Siracusa 11-16 aprile 1961.  
Vol. I: conferenze generali e simposio di geometria differenziale,  
pag. 25-37.

/ 56 /

## ARCHIMÈDE ET LA SCIENCE MODERNE

DI CHARLES EHRESMANN, A PARIGI.

Lorsque Monsieur Calapso m'a proposé, il y a quelques semaines, de faire ici une conférence sur Archimède et la Science moderne, j'ai été bien surpris et embarrassé. Malgré mes scrupules, j'ai finalement accepté, réellement tenté par l'intérêt du sujet, entraîné aussi par le souvenir d'une première visite à Syracuse à l'occasion du Congrès de l'Union Mathématique Italienne à Taormina. Cette visite était comme un pèlerinage sur les lieux où Archimède avait poursuivi ses méditations. M. Calapso, inspiré par son enthousiasme pour les Mathématiques et sa ferveur pour la Sicile, me parlait alors de son projet d'organiser un jour, ici au bord de la Mer Ionienne, un congrès des mathématiciens méditerranéens. Aucun projet de congrès ne pouvait être plus justifié que celui-ci et il est réalisé aujourd'hui en hommage à Archimède. Certes, les mathématiciens qui sont à Syracuse en ce moment ne sont pas tous nés au bord de la Méditerranée, mais sans doute ils se sentent tous un peu méditerranéens, car dans ce paysage lumineux est née la Science qui occupe leur pensée. Quelle est la place d'Archimède dans le développement des Mathématiques? Quels sont les rapports entre Archimède et la Science moderne? Dans quelles directions et dans quelle mesure la Science actuelle dépasse-t-elle les conceptions d'Archimède et de son temps? J'essaierai de donner sommairement quelques réponses à ces questions.

C'est la notion de nombre entier qui a été à l'origine de toute réflexion mathématique. En Grèce les Pythagoriciens se sont passionnés pour la théorie des nombres entiers, attribuant même un sens mystique aux nombres individuels; pour eux tout est nombre, Dieu étant l'unité. Ils étaient plus théoriciens que calculateurs et leur mystique du nombre entier, ébranlée seulement par leur découverte des rapports irrationnels, a été plutôt un frein pour le

développement ultérieur de l'idée de nombre. En fait, les Grecs n'ont pas réussi à élaborer un système de numération convenant pour la théorie et pour les calculs pratiques. Leur système était un système décimal de juxtaposition, utilisant les lettres de l'alphabet grec, les unités, les dizaines, les centaines et les mille n'étant pas représentés par les mêmes caractères comme dans notre système de position ; le principe de position était approximativement suivi à partir de la myriade jusqu'à la myriade de myriades. Avant eux les Babyloniens avaient un système de numération à base 60, dont dérive notre calcul du temps et des angles en minutes et secondes. Il avait l'avantage d'être basé sur le principe de position. Au second siècle de notre ère, l'astronome Ptolémée à Alexandrie l'a utilisé pour ses calculs et l'a perfectionné en introduisant systématiquement le 0 de position. On sait que nous devons notre système décimal de position aux Hindous, qui l'ont inventé environ huit siècles après Archimède. Mais initialement ils n'avaient pas le 0 de position. Cette idée, aussi simple que géniale, ils semblent l'avoir empruntée à Ptolémée.

Archimède a senti la faiblesse du système de numération grec pour l'écriture des grands nombres. Bien avant lui, ce problème de nommer ou définir de très grands nombres avait été une des préoccupations des Hindous. Déjà, comme on sait, le jeune Gautama, avant d'être le Bouddha, montrait sa science des grands nombres dans le concours servant à départager les prétendants de la belle Gopa. Dans son ouvrage, l'Arénaire, Archimède propose un système permettant de nommer de très grands nombres, en particulier des nombres plus grands que le nombre des grains de sable qu'il faudrait pour remplir la sphère des étoiles fixes. Dans ce système, il définit des unités d'ordre supérieur qui sont  $10^8$  et les puissances de  $10^8$  jusqu'à  $A = (10^8)^{10^8}$ . Puis il définit les nombres de la deuxième période en prenant comme unité  $A$  et les puissances de  $A$  jusqu'à  $A^{10^8}$ , prouvant à cette occasion la règle du produit de puissances. Ce qui paraît étonnant, c'est que le plus ingénieux des mathématiciens grecs, réfléchissant sur le problème de la numération, n'ait pas inventé un système équivalent à notre système décimal si simple et si efficace et qu'il ait fallu attendre le seizième siècle pour que ce système soit adopté en Europe.

Le plus curieux dans l'Arénaire, c'est l'hypothèse utilisée pour évaluer le nombre des grains de sable, qu'on trouve être inférieur à  $10^{63}$ . Archimède, en effet, se réfère au système héliocentrique d'Aristarque de Samos. C'est la plus ancienne mention d'un système

astronomique ne prenant pas la Terre comme centre de l'Univers. Archimède ne prend pas franchement parti pour ce précurseur de Copernic, mais l'idée héliocentrique lui paraît naturelle et commode du point de vue géométrique. D'ailleurs des arguments sérieux pour ou contre cette hypothèse ne pourraient résulter que de considérations sur la Dynamique. Or Archimède n'a pas dégagé le principe d'inertie ou d'autres principes rationnels de la Dynamique. Il s'est certainement intéressé activement à l'Astronomie : Son père était l'astronome Phidias de Syracuse ; son meilleur ami, Conon, était astronome à Alexandrie. Cependant l'Arénaire est le seul écrit qui nous soit parvenu où Archimède parle d'Astronomie, y décrivant en particulier l'instrument qu'il a inventé pour mesurer le diamètre apparent du Soleil. On sait aussi qu'Archimède est l'inventeur d'un planétarium reproduisant fidèlement les mouvements du Soleil, de la Lune et de cinq planètes par rapport à la Terre. C'est le seul trophée du siège de Syracuse dont Marcellus a voulu orner sa maison, et Cicéron, qui l'a encore vu fonctionner, en parle avec la plus grande admiration le considérant, suivant son expression même, comme l'ouvrage d'un esprit divin.

Les grands nombres interviennent dans un autre problème posé par Archimède, probablement en défi à son rival Apollonius de Perga. C'est le fameux problème des vaches et des taureaux d'Hélios en pâturage dans les plaines de la Sicile. Le problème est intéressant au point de vue de la théorie des nombres, conduisant à résoudre en nombres entiers l'équation  $u^2 - \lambda v^2 = 1$  (où  $\lambda$  est un entier sans être un carré), équation appelée équation de Pell, bien qu'elle ait été résolue pour la première fois par Lagrange et même dans des cas particuliers par les Pythagoriciens et par Brahmagupta. Elle joue un rôle important dans l'histoire de la théorie des nombres. Sans doute ni Archimède, ni Apollonius ne l'ont résolue. On a montré récemment (Amthor 1880) à l'aide des fractions continues que le nombre des bovins d'Hélios d'une couleur donnée, écrit dans notre système décimal, remplirait tout un gros livre.

En Mathématiques pures les découvertes les plus remarquables d'Archimède concernent la mesure des grandeurs. On lui doit notamment, exprimé en langage moderne, une valeur approchée de  $\pi$  (à savoir  $3 + \frac{1}{7} < \pi < 3 + \frac{10}{71}$ ), la relation entre l'aire et le périmètre du cercle [2], l'aire latérale d'un cylindre et d'un cône de révolution [1], l'aire d'une sphère [1], le rapport entre le volu-

me <sup>(1)</sup> de la sphère et celui du cylindre circonscrit dont les bases sont tangentes à la sphère [1], l'aire d'un segment de parabole [7], l'aire d'un secteur de spirale [4], le volume de l'ellipsoïde, d'un segment de parabolicoïde ou d'hyperbolicoïde [3]. Archimède a senti que ces résultats formaient sa principale contribution aux Mathématiques pures; suivant sa volonté, sur sa tombe devait être représenté un cylindre circonscrit à une sphère avec l'indication du rapport de leurs volumes qui est aussi le rapport de leurs aires, à savoir  $\frac{3}{2}$ . Ce symbole, porté

par une colonne, a permis à Cicéron d'identifier sa tombe deux siècles plus tard. Comme cette colonne n'existe plus, ne conviendrait-il pas d'en ériger une semblable quelque part à Syracuse comme hommage rendu au plus génial des mathématiciens de l'Antiquité.

La notion de grandeur est une notion intuitive appliquée depuis que les hommes ont eu l'idée de comparer ou de mesurer certaines choses. Dégager le contenu mathématique de cette notion a été une des tâches majeures des mathématiciens jusqu'à nos jours; les Grecs ont fourni la première contribution importante à la clarification de cette notion. Mais ils n'ont pas défini explicitement la notion d'une espèce de grandeurs. En style mathématique moderne on pourrait préciser leur idée de la manière suivante: On considère un certain ensemble d'éléments, par exemple l'ensemble des segments de droites de l'Espace, et on suppose donnée une relation d'équivalence, deux éléments équivalents étant dits de même grandeur. C'est la classe d'équivalence de l'élément  $A$  qui 1 être appelée grandeur  $|A|$ . Par exemple, dans le cas des segments de droites, deux segments sont équivalents ou de même longueur lorsqu'il existe un déplacement amenant l'un sur l'autre. On dira que l'ensemble des classes d'équivalence forme une espèce de grandeurs lorsqu'il est muni d'une addition commutative et associative et d'une relation d'ordre telle que  $|A| < |B|$  soit équivalent à l'existence de  $A'$  tel que  $|A| + |A'| = |B|$ . Il en résulte en particulier l'existence d'une grandeur 0. Ces notions se définissent très simplement pour les longueurs, mais sont plus difficiles à définir pour les aires et les volumes.

(1) Alors qu'Archimède détermine effectivement les surfaces d'un cylindre de révolution, d'un cône de révolution et d'une sphère, ses propositions, ainsi que celles d'Eudoxe (Euclide, livre XII), concernant les rapports des volumes de ces solides n'entraînent par contre la connaissance de ces volumes qu'à un facteur constant près.

Archimède a eu le mérite d'énoncer explicitement l'axiome qui porte son nom, à savoir le suivant : Pour deux grandeurs  $|A|$  et  $|B|$  d'une espèce considérée, il existe toujours un entier  $n$  tel que  $n|A| > |B|$ . Comme Archimède le remarque lui-même, cette propriété avait été utilisée implicitement par ses prédécesseurs, en particulier par Eudoxe, le plus original d'entre eux, mais ceux-ci n'avaient pas senti la nécessité de la formuler comme axiome. En laissant tomber cet axiome, Véronèse et Hilbert ont construit des systèmes géométriques dans lesquels il n'est pas valable et qu'on appelle les géométries non-archimédiennes.

C'est à Eudoxe qu'on doit la belle définition d'une proportion ou de l'égalité de rapport de  $|A|$  à  $|B|$  et de  $|C|$  à  $|D|$ , où  $|A|$  et  $|B|$  sont des grandeurs de même espèce ainsi que  $|C|$  et  $|D|$  : On a  $\frac{|A|}{|B|} = \frac{|C|}{|D|}$  si, quels que soient les entiers  $p$  et  $q$ , l'inégalité  $p|A| < q|B|$  entraîne  $p|C| < q|D|$  ; de même  $p|A| > q|B|$  entraîne  $p|C| > q|D|$  ; enfin  $p|A| = q|B|$  entraîne  $p|C| = q|D|$ . Ceci s'applique dans le cas de deux grandeurs commensurables ou incommensurables. Au couple de grandeurs  $(|A|, |B|)$  est ainsi associé l'ensemble des couples de nombres entiers  $(p, q)$  tels que  $p|A| \leq q|B|$ . C'est par cet ensemble de couples  $(p, q)$  qu'on peut définir correctement le rapport  $\frac{|A|}{|B|}$ . Cette définition, conforme au style mathématique moderne, n'a pas été clairement posée par les Grecs, qui n'ont même pas dégagé avec précision la notion de nombre fractionnaire, correspondant au cas particulier du rapport de deux nombres entiers. Mais la définition d'Eudoxe<sup>(2)</sup> conduit immédiatement à associer au couple  $(|A|, |B|)$  l'ensemble des fractions  $\frac{q}{p}$  telles que  $p|A| \leq q|B|$ . C'est par cet ensemble qu'est défini pour nous un nombre réel, d'une façon plus précise par la coupure correspondante dans l'ensemble des nombres rationnels, conformément à la définition donnée par Dedekind en 1872.

Mais la méthode actuelle de définition d'êtres mathématiques nouveaux par généralisation, ou mieux par passage à des éléments

(<sup>2</sup>) Une définition plus ancienne de l'égalité de deux rapports est due à Théétète ; elle revient à caractériser le rapport  $\frac{|A|}{|B|}$  par le développement en fraction du nombre que nous lui faisons correspondre.

de type supérieur tels que classes d'équivalence, suites, coupures, etc..., semble avoir été très éloignée de l'esprit des Grecs. Ainsi ils n'ont pas identifié le rapport  $\frac{|A|}{|B|}$  avec un nombre et c'est la principale lacune de leur édifice mathématique, lacune qu'ils ont cependant réussi à compenser partiellement par leur algèbre géométrique, dont les éléments sont des longueurs de segments, des aires de rectangles et des volumes de parallélépipèdes. Cette algèbre géométrique, si ingénieuse mais difficile à manier, est une ébauche de géométrie analytique, mais elle n'a ni la souplesse, ni la généralité de la Géométrie analytique créée par Fermat et Descartes, cet outil essentiel des Mathématiques modernes. Les Grecs, qui avaient pourtant une idée si claire du rapport de deux grandeurs incommensurables, ont eu des scrupules à généraliser franchement la notion de nombre, à passer des nombres entiers aux nombres fractionnaires et puis aux nombres irrationnels. Faut-il voir là l'influence de Platon qui se moquait des esprits assez vulgaires pour diviser l'Unité, ou une conséquence de la prédilection des Grecs pour la Géométrie ? Même Archimède n'a pas franchi l'obstacle. Cependant il emploie déjà les fractions avec plus de liberté, il multiplie les rapports pratiquement comme des nombres réels, définissant même pour la première fois [I, II] une puissance fractionnaire d'un rapport, mais il reste dans le cadre de l'algèbre géométrique, ce qui rend la lecture de ses oeuvres assez difficile pour nous, compte tenu aussi de l'absence d'un symbolisme algébrique.

Si nous exprimons, suivant le point de vue moderne, le rapport de deux grandeurs  $\frac{|A|}{|B|}$  par un nombre réel et si nous choisissons une grandeur  $|E|$  comme unité, le rapport  $\frac{|A|}{|E|}$  sera appelé mesure  $\mu(A)$  de  $|A|$  ou de  $A$ . On définit ainsi une application biunivoque de l'ensemble des grandeurs d'une espèce donnée sur une partie des nombres réels positifs. Archimède et les autres Géomètres Grecs ont toujours admis implicitement un autre axiome équivalent au suivant : A tout nombre réel  $\lambda$  correspond effectivement une grandeur dont il est la mesure<sup>(3)</sup>. Ceci est nécessaire pour justifier de nombreuses constructions, en particulier la cons-

(3) Par exemple, pour les segments il suffit de poser l'axiome suivant : Etant donné sur la demi-droite  $Ox$  un ensemble de segments  $OP_n$  contenus dans un segment  $OQ$ , il existe un plus petit segment  $OP$  tel que  $|OP_n| \leq |OP|$ .

truction appelée neusis, qui consiste à placer un segment de droite de longueur donnée de façon que ses extrémités se trouvent sur deux courbes données pouvant être soit une droite, soit un cercle, la droite support du segment passant par un point donné. Archimède emploie très souvent cette construction, qui ne peut pas se faire, en général, par la règle et le compas; par exemple, il trouve ainsi une méthode très simple de trisection d'un angle [11].

En utilisant les nombres réels, la définition d'une espèce de grandeurs, par exemple l'espèce des aires planes, est équivalente à la donnée d'un ensemble de parties du plan que nous appellerons surfaces planes et d'une fonction numérique positive  $\mu$ , appelée mesure, qui associe à chaque surface plane  $A$  sa mesure  $\mu(A)$  et qui vérifie certains axiomes. Lorsqu'on traduit les raisonnements d'Archimède en termes de mesures, on voit qu'il suppose vérifiées les propriétés suivantes: 1<sup>o</sup>) Si la surface plane  $A$  est subdivisée<sup>(4)</sup> en deux surfaces planes  $A_1$  et  $A_2$ , alors  $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ . 2<sup>o</sup>) Si la surface plane  $A$  est contenue dans la surface plane  $B$ , alors  $\mu(A) \leq \mu(B)$ . 3<sup>o</sup>) Si la surface plane  $A'$  se déduit de  $A$  par un déplacement, alors  $\mu(A) = \mu(A')$ . Ces trois propriétés entraînent la proposition suivante:

Etant donnés un ensemble de surfaces planes  $B_n$  contenues dans  $A$  et un ensemble de surfaces planes  $B'_p$  contenant  $A$  tels que la borne supérieure des mesures  $\mu(B_n)$  soit égale à la borne inférieure des mesures  $\mu(B'_p)$ , alors la mesure  $\mu(A)$  est égale à cette borne commune.

Ce qui précède s'applique de même à l'espèce de grandeurs formée par les volumes de parties de l'espace appelées corps solides. La dernière proposition énoncée donne une méthode pour déterminer la mesure  $\mu(A)$ : C'est la méthode dite d'exhaustion, due à Eudoxe, qui l'a utilisée pour déterminer le rapport du volume de la pyramide au volume du prisme de même base et de même hauteur ainsi que le rapport du volume du cône au volume du cylindre de même base et de même hauteur. C'est cette méthode qu'Archimède applique avec des variantes, d'une façon très souple et sub-

(4) D'une façon plus précise, cette propriété s'énonce de la manière suivante: Si  $A = A_1 \cup A_2$  et si  $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$ , alors  $\mu(A) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ . Cela suppose que l'ensemble des surfaces planes  $A$  forme un clan de parties du plan, c'est-à-dire contient avec  $A_1$  et  $A_2$  leur réunion  $A_1 \cup A_2$  et leur différence  $A_1 - A_2 = A_1 \cap \bar{A}_2$ . Il en résulte d'ailleurs que  $A_1 \cap A_2$  y appartient et que l'on a:  $\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$ .

tile, pour déterminer les aires et volumes déjà mentionnés. Une vingtaine de siècles plus tard, Cavalieri, Cauchy et Riemann n'emploient pas une méthode essentiellement différente pour déterminer l'aire limitée par une courbe, l'axe des  $x$  et deux perpendiculaires à cet axe. Cependant ils dépassent Archimède en ce qu'ils démontrent effectivement l'existence d'une aire lorsque la courbe est définie par une fonction continue quelconque ou une fonction assez régulière, en démontrant que certaines sommes de rectangles inscrits et certaines sommes de rectangles circonscrits ont la même limite. Naturellement Archimède n'avait pas l'idée de considérer une fonction quelconque, notion qui est vraiment propre aux Mathématiques modernes; mais, malgré cela, il doit être considéré comme le précurseur des créateurs du Calcul Intégral, qui d'ailleurs se sont toujours référés à lui.

En posant les propriétés 1<sup>o</sup>-2<sup>o</sup>-3<sup>o</sup> énoncées plus haut comme axiomes d'une mesure dans le plan ou dans l'espace, on peut montrer qu'il existe un plus grand ensemble  $\mathcal{M}$  de parties du plan ou de l'espace contenant en particulier les rectangles ou les parallélépipèdes et muni d'une mesure  $\mu$ . Cette mesure est unique dès que l'on a choisi l'unité de mesure et c'est la mesure appelée mesure de Lebesgue;  $\mathcal{M}$  est la classe des ensembles mesurables. Les recherches d'Archimède sur les aires et les volumes trouvent ainsi leur justification complète dans la théorie de la mesure de Lebesgue. Le prolongement moderne des travaux d'Archimède est donc formé par la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue et plus généralement par les théories abstraites de la mesure dues à Fréchet, Radon, Daniell, Caratheodory et d'autres. Ces théories jouent un rôle fondamental dans l'Analyse Mathématique actuelle; en particulier, elles sont la base de la théorie moderne des Probabilités. En restant plus près d'Archimède, nous trouvons la théorie de la mesure de Haar et la Géométrie intégrale (Blaschke, Santaló) dont l'objet est l'étude de mesures sur un espace homogène, invariantes par son groupe de transformations.

Rappelons qu'Archimède a été le premier à déterminer l'aire de surfaces courbes, à savoir l'aire des surfaces latérales du cylindre et du cône de révolution ainsi que l'aire de la sphère. Le problème est plus difficile que dans le cas des surfaces planes ou des volumes, car les trois axiomes énoncés pour la mesure ne suffisent plus ici. En ajoutant un axiome exprimant une propriété de continuité de la mesure, on montre que la mesure de Lebesgue définie pour les surfaces planes s'étend de façon unique aux surfaces courbes



différentiables. Mais cet axiome fait intervenir une notion de continuité, donc de Topologie, dans l'ensemble des surfaces différentiables. Or les notions de Topologie<sup>(5)</sup> ne sont pas dégagées dans les Mathématiques grecques. Archimède a bien senti la difficulté; il la surmonte en se bornant aux surfaces limitant un domaine convexe. Il formule des axiomes concernant l'aire de telles surfaces et ainsi il aboutit encore à une méthode d'exhaustion pour déterminer les aires considérées<sup>(6)</sup>. Il a clairement vu l'intérêt de la notion de convexité qu'il a introduite à cette occasion et qui joue un rôle si important dans les Mathématiques modernes.

Dans son ouvrage sur les spirales, Archimède détermine non seulement l'aire, mais aussi les tangentes à la spirale. Pour Archimède une tangente à une courbe plane en un point  $A$  est, comme pour ses prédécesseurs, une droite  $T$  passant par  $A$  telle que tous les points de la courbe se trouvent du même côté de  $T$  et qu'il n'existe aucune demi-droite comprise entre la courbe et la tangente  $T$ . Cette définition est peu satisfaisante et diffère de la nôtre, où la tangente  $T'$  est la limite de la corde  $AM$  lorsque  $M$  tend vers  $A$ . L'existence de  $T$  n'entraîne pas celle de  $T'$ , ni réciproquement. Mais si  $T$  et  $T'$  existent en un point, alors  $T$  est identique à  $T'$ . Archimède donne la propriété caractéristique de la tangente à la spirale par une démonstration par l'absurde utilisant en particulier une neusis. Mais, pour découvrir cette tangente, n'a-t-il pas fait un raisonnement équivalent à un passage à la limite, qu'il s'est bien gardé de transcrire? C'est fort probable; car pratiquement il possède la notion de limite d'une suite infinie, qu'il rencontre dans l'application de la méthode d'exhaustion, en particulier dans la détermination de l'aire du secteur de spirale ou du segment de parabole; dans ce dernier cas il calcule en fait la somme d'une série infinie. Ainsi nous voyons les liens entre la pensée d'Archimède et le Calcul différentiel moderne, lequel a son origine dans la détermination des tangentes par Fermat et dans les travaux de Leibniz et de Newton. Cependant on sent ici combien un outil équivalent au Calcul différentiel moderne manque à Archimède, car actuellement

(5) Pour le plan, le véritable axiome de nature topologique est l'axiome de Pasch, équivalent à la propriété: Le complémentaire d'une droite admet deux composantes connexes. Cet axiome intervient chez les Grecs, mais seulement d'une façon implicite.

(6) On peut montrer que toute surface limitant un domaine convexe admet effectivement une aire.

la détermination des tangentes à une spirale se réduit à un calcul de quelques lignes. Cette remarque ne diminue en rien le mérite de l'auteur du beau traité sur la spirale; nous pouvons, en effet, espérer que les mathématiciens des siècles futurs auront des méthodes permettant d'exposer simplement ce qui paraît encore bien complexe dans nos travaux actuels.

C'est par ses recherches de Mathématiques appliquées qu'Archimède a acquis ses plus grands titres de gloire et c'est dans ce domaine qu'il fait figure de pionnier, ouvrant la voie à des sciences nouvelles. Il est le vrai créateur d'une Statique et d'une Hydrostatique basées sur des principes rationnels, permettant une analyse mathématique. Dans son traité sur l'Équilibre des Plans il donne un système d'axiomes conduisant à la loi du levier, cas particulier du théorème général du moment cinétique; il l'applique pour déterminer les centres de gravité des triangles, trapèzes, segments de parabole [5], segments de sphère, de parabolôïde, d'ellipsoïde ou d'hyperbolôïde [10]. Ces recherches de Statique ont joué un rôle prépondérant dans ses découvertes de mathématiques pures, comme il l'explique dans sa « Méthode des théorèmes mécaniques ». En réalité, la loi du levier l'a guidé pour peser en quelque sorte les aires et les volumes, ce qui montre qu'au fond son idée intuitive d'aire ou de volume a été une idée de physique. Cette méthode a été reprise par Pascal sous le nom de balance d'Archimède.

Son ouvrage sur les Corps Flottants, le plus pénétrant de ses travaux, donne des axiomes simples dont il déduit d'abord le fameux principe qui porte son nom et qui lui permettent d'étudier les positions d'équilibre de corps flottants. En particulier, il obtient des résultats très précis sur le segment de parabolôïde flottant. Ses méthodes sont à l'origine d'une science rationnelle de la construction navale.

Cependant Archimède, qui est le créateur de la Statique, n'a pas abordé le problème de la Dynamique. Celle-ci est une création essentiellement moderne, due à Copernic, Galilée, Kepler, Newton. Indirectement les Grecs y ont contribué en fournissant à Kepler et à Newton l'outil indispensable formé par la théorie des coniques. Ces courbes, considérées pour la première fois par Ménéchme, ont été étudiées très sérieusement avant Archimède, qui se réfère à des ouvrages perdus d'Aristée et d'Euclide. Mais Archimède enrichit la théorie de propositions nouvelles qui lui servent de lemmes dans ses travaux sur les aires et les volumes. Le beau traité sur les coniques d'Apollonius n'a pas épuisé le sujet, puisque, sous l'in-

fluence de Pascal, Desargues et d'autres, la théorie des coniques et des quadriques est aussi devenue un domaine important de la Géométrie moderne surtout dans le cadre de la Géométrie projective.

Archimède a consacré beaucoup d'efforts à donner des applications pratiques de ses découvertes théoriques. Il n'a pas jugé utile (ou assez digne, selon les conceptions platoniciennes) d'écrire des livres sur ces applications et nous n'en connaissons pas les détails. Mais ces applications ont largement contribué à sa renommée, plus que ses découvertes mathématiques. On dit qu'à l'aide d'un système de leviers et poulies inventé par Archimède, le roi Hiéron de Syracuse a pu procéder tout seul au lancement d'un bateau qu'on n'avait réussi à faire bouger par aucun autre moyen. C'est peut-être à cette occasion qu'Archimède a prononcé ses fameuses paroles : « Donnez-moi un point d'appui et je soulèverai le monde », paroles qui pourraient être l'orgueilleuse devise des Mathématiques appliquées et surtout des Mathématiques appliquées modernes.

Pendant le siège de Syracuse, Archimède a montré que les Mathématiques pouvaient être terriblement efficaces. A-t-il vraiment incendié la flotte romaine par un système de miroirs ?<sup>(7)</sup> Ce n'est probablement qu'une légende, mais il est certain que les machines de son invention étaient le principal atout des défenseurs de la ville et qu'elles semaient la panique parmi les soldats de Marcellus. Les découvertes mathématiques d'Archimède étaient trop éloignées des préoccupations des Romains de son temps pour être comprises par eux, mais le rôle qu'il a joué dans la défense de Syracuse leur a inspiré la plus grande admiration.

Archimède, le mathématicien type, doué d'un extraordinaire pouvoir de concentration, que d'autres qualifient de distraction, s'est révélé homme d'action particulièrement efficace. Depuis le temps d'Archimède, les possibilités d'applications des Mathématiques ont singulièrement augmenté. Même les esprits soi-disant réalistes, qui ont tendance à voir dans les Mathématiques supérieures des spéculations éloignées de la réalité, commencent à s'apercevoir de leur erreur. Ce sont souvent les problèmes posés par la Physique ou l'analyse de situations concrètes de nature quelconque qui ont amené les mathématiciens à créer leurs théories les plus générales et souvent les théories les plus abstraites sont les plus indispensables pour les applications. Les Mathématiques de l'Antiquité étaient en-

(7) Un ouvrage d'Archimède sur les miroirs ne nous est pas parvenu.

core bien limitées dans leur domaine et dans leurs résultats. A leur édifice se sont ajoutées de nouvelles constructions : la Théorie des Ensembles, l'Algèbre moderne, la Topologie, le Calcul différentiel et intégral, la Théorie des fonctions et l'Analyse fonctionnelle, la Géométrie différentielle, la Géométrie algébrique, la Théorie des Probabilités, la Logique Mathématique, la Cybernétique, etc. ... Les Grecs ont donné par leur Géométrie le modèle d'une théorie axiomatique et sur ce modèle Archimède a construit la Statique. Mais depuis la découverte des géométries non-euclidiennes ou non-archimédiennes, on s'est rendu compte de la possibilité de beaucoup de théories, correspondant à des structures mathématiques différentes, chacune d'elles pouvant convenir un jour à l'étude d'une situation concrète. Dès lors, le champ d'application des Mathématiques est devenu pratiquement illimité, dans les Sciences, dans la Technique, dans l'Organisation de la Société, dans la Stratégie militaire ou économique. Leur efficacité s'est encore accrue dans des proportions fantastiques grâce au développement des machines à calculer, cerveaux électroniques qui dispensent le cerveau humain de répéter un très grand nombre de fois des opérations mentales élémentaires.

Ainsi la production industrielle et l'organisation de la Société dépendent de plus en plus du fonctionnement de machines complexes. Mais pour maintenir tout ce système en marche, il faudra un nombre toujours croissant de personnes ayant une solide instruction mathématique. Est-il concevable que ce système s'arrête un jour dans la confusion ou l'indifférence, faute de cerveaux capables d'en pénétrer le sens et de continuer le mouvement de la pensée de ses créateurs, comme la Science de l'Antiquité a perdu sa vitalité après Archimède et s'est éteinte en Europe peu de siècles plus tard ? Pour que ce sort soit évité à notre civilisation, une condition au moins est nécessaire, à savoir que la Société actuelle et future sache former non seulement un nombre suffisant de techniciens et d'ingénieurs bien instruits, mais aussi de vrais mathématiciens à l'imagination créatrice.

## RÉFÉRENCES : OEUVRES D'ARCHIMÈDE

- [1] De la sphère et du cylindre (I et II).
- [2] La mesure du cercle.
- [3] Des conoïdes et des sphéroïdes.
- [4] Des spirales.
- [5] De l'équilibre des plans (I et II).
- [6] L'Arénaire.
- [7] La quadrature de la parabole.
- [8] Les corps flottants.
- [9] Le stomachion.
- [10] La méthode des théorèmes mécaniques.
- [11] Le livre de lemmes.
- [12] Le problème des boeufs.

A consulter, par exemple, dans la traduction française de P. Ver Eecke ; voir aussi « Archimedes » par E. J. Dijksterhuis et « Science awakening » par B. L. Van der Waerden.



# COMMENTS ON PART II-2

by *Andrée CHARLES EHRESMANN*

## INTRODUCTION

The general comments of this Part II-2 point out:

- precisions, necessary corrections /75/, omitted proofs /54/;
- concrete motivations and examples in Topology, Differential Geometry and Analysis, which led to the general theory of /75, 76, 92, 81/, in particular the inciting role of /54/;
- more striking or stronger statements, e. g. : the universality of several types of completions of ordered categories (467.1, 541.1, 562.1), the representation of second kind foliations as maximal rockets or as atlases in categories of local jets (580.1), the local triviality of «good» microtransitive categories (642.1);
- connections with other literature and further developments, for instance on atlases, cohomology /75/, transverse structures of foliations /54/, recent applications of topological groupoids in Differential Geometry, Topology and Analysis /92/.

The Synopsis contains a motivated summary of the papers, in a modern presentation, and stresses their interrelations.

We take up the terminology and conventions indicated in the introduction to the Comments of Part II-1. Let us recall that the comment numbered  $Y.X$  is the  $X$ -th comment on page  $Y$ , and that the symbol

- ¶ warns of real flaws or omissions,
- + denotes more substantial addenda.

**GENERAL COMMENTS**

**ON /62/ : COMPLÉTION DES CATÉGORIES ORDONNÉES.**

The results of this Note are taken back from /75, 76/, to which we refer for proofs and comments.

- 435.1. Cf. /75/, Proposition 7-2.
- 436.1. Cf. /75/, Corollary 1 of Proposition 9-2 and Proposition 5-2.
- 436.2. Cf. /75/, Corollary 2 of Proposition 12-2.
- 437.1. Cf. /76/, Theorem 2-2. In /76/, more general kinds of rockets are also defined.
- 437.2. Cf. /76/, Corollary of Theorem 3-2.
- 438.1. Cf. /76/, Theorem 4-2.
- 438.2. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .
- 438.3. Cf. /76/, Theorem 6-2. A universal characterization of  $(\tilde{\mathcal{C}}^\perp, <)$  is given in Comment 541.1.
- 438.4. Cf. /76/, Theorem 7-2.
- 438.5 ¶ R.  $\tilde{\mathcal{C}}^\perp$  i.o.  $\Sigma(\mathcal{C}^\cdot, <)^\perp$  .  
 Indeed,  $\Sigma(\mathcal{C}^\cdot, <)^\perp$  is not functorially ordered, since an atlas F lesser than a subgroupoid  $\mathcal{B}$  may not be a subgroupoid (e.g., if  $\mathcal{C}$  is the pseudogroup of transformations of a topological space).
- 438.6. References 1, 3, 4 are reproduced in O, III-1, and reference 2 in O, II-1.

**ON /71/ : COMPLÉTION DES CATÉGORIES SOUS-PRÉLOCALES.**

This Note sums up Section 3 of /76/, to which we refer for proofs and comments.

- 439.1 ¶  $\mathcal{F}_1$  satisfies the conditions to be a strict regular rocket, except that  $\alpha(F_1) \neq \alpha(\mathcal{B}_1)$  and  $\beta(F_1) \neq \alpha(\mathcal{B}'_1)$  . The good property is given in /76/, Proposition 1-3.
- 439.2. Cf. /76/, Theorem 1-3.
- 440.1 ¶ R. et  $\alpha(f) \neq 0 \neq \beta(f)$  si  $f \neq 0$  . Si i.o. . Si .



- 440.2. Cf. /76/, Proposition 4-3.
- 441.1. Cf. /76/, Theorems 2-3 and 3-3.
- 441.2. Cf. /76/, Theorem 2-3 and its corollary.
- 441.3. Cf. /76/, Theorem 4-3 and its corollary.
- 442.1. Cf. /76/, Theorem 5-3, and Comment 562.1.
- 442.2. Cf. /76/, Corollary of Theorem 5-3 for the first assertion. The second assertion is proved in Comment 562.1.
- 442.3. The theorem follows from the Completion Theorem, since  $J(\mathcal{C}, <)$  is easily proved to be a sublocal groupoid when  $\mathcal{C}$  is a subprelocal groupoid.

**ON /75/ : CATÉGORIES ORDONNÉES, HOLONOMIE ET COHOMOLOGIE.**

This paper, published in the Proceedings of the «Colloque international du C.N.R.S. : Structures feuilletées», Grenoble, 1963 develops a lecture given at this meeting. The text has been written in a hurry and not taken back later on; it remains several imprecisions corrected in the following comments.

- 443.1. Rockets are defined in /76/ and used to embed a subprelocal category into a sublocal one. But they have not been applied in cohomology theory. In fact, ordered categories are a special case of double categories; later, Charles developed a cohomology with values in multiple categories and, more generally, in enriched categories, which gives a partial answer to the two problems raised in this introduction (cf. /73, 74, 91, 102/ in O, III-2 and IV-1).
- 444.1. The problem is solved for subprelocal categories and for preinductive ones in /76/ (cf. also Synopsis, Section D.1).
- 444.2. The intended paper has not been written.
- 446.1. The order on atlases is not the inclusion (for which  $\mathcal{B}_j \cdot B \cdot \mathcal{B}_l$  may not be the least atlas containing  $B$ ) but the «full inclusion» order, defined in Corollary 1 of Theorem 2-2.
- 449.1 ¶  $\mathcal{A}(\mathcal{C})$  does not identify with a subcategory of  $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$ , because  $a(F'.F)$  may be strictly greater than  $a(F)$ , in which case the comp-

449.1... osite  $(b(F'), F'.F, a(F))$  of the images of  $F'$  and  $F$  in  $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C}')$  is not contained in the image of  $\mathcal{A}(\mathcal{C}')$ . However, if  $\mathcal{C}'$  is a groupoid,  $a(F'.F) = a(F)$  and  $\mathcal{A}(\mathcal{C}')$  becomes a groupoid.

449.2+ *Atlases: Examples and generalizations:*

Charles introduced atlases and maximal (or complete) atlases to construct structures locally isomorphic to a given transformation pseudogroup  $\Gamma$  (cf. O, II-1, Synopsis, Comment 284.1 and /125/). They are atlases in the groupoid of topological spaces, right compatible with a component of  $\Gamma$ . In /47, 85/, the construction is adapted to get the complete enlargement of a local species of structures (e. g. associated sheaves). Groupoids of atlases of a subpreinductive groupoid and their orders are studied in /68/, with an application to completion theorems. In these papers, the charts of an atlas are isomorphisms. But the example of second kind foliations in /47, 52/ suggested to define atlases with non-invertible charts, as it is done here.

Let us give two important cases of atlases :

1. If  $G$  is a group, an atlas of  $G$  reduces to a class  $g.B$  modulo a subgroup  $B$ , and the groupoid  $\mathcal{A}(G)$  of atlases is an inductive groupoid for the inclusion order. Joubert, in his Thesis [50], proves the following results: An ordered groupoid  $S$  is called a *localization of the group  $G$*  if  $G$  is a subgroup of  $S$  and a final sub-poset; then there exists an ordered functor  $S \rightarrow \mathcal{A}(G)$ ; conversely, any functorially ordered groupoid  $S'$  is universally embedded into a localization  $\hat{S}'$  of the group reflection of  $S'$ . The construction of  $\hat{S}'$  is an essential tool for exhibiting in [50] a foliation with a given holonomy groupoid.
2. In a category  $\mathcal{C}$ , an atlas  $F$  left compatible with a discrete subgroupoid  $\mathcal{B}'_0$  reduces to a section of the source map  $a$  over  $a(F)$ . More precise local sections of a topological category are studied in /92/ (cf. Comment 660.1). If  $\mathcal{C}$  is a groupoid, an invertible atlas  $F: \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}'_0$ , where  $\mathcal{B}_0$  and  $\mathcal{B}'_0$  are discrete, is a partial section of both  $a$  and  $\beta$ ; in the terminology of Renault [156], it is a  $\mathcal{C}$ -set. The composition of  $\mathcal{C}$ -sets [156] is but the pseudoproduct associated to

449.2... a subgroupoid of the ordered groupoid of atlases considered in Theorem 2.2.

Atlases have been generalized in several ways:

1. If  $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  is an atlas of the category  $\mathcal{C}$ , then  $F$  may be thought of as a distributor (in Bénabou's sense [96], or Lawvere's profunctor [135]) from  $\mathcal{B}$  to  $\mathcal{B}'$ ; whence a lax functor from the category  $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  of atlases into the bicategory of distributors. Atlases are so identified to the distributors between subgroupoids of  $\mathcal{C}$ , which are «representable» by morphisms of  $\mathcal{C}$  and whose two actions are transitive on the opposite fibres (i. e.,  $\mathcal{B}'$  acts transitively on each  $\alpha$ -fibre and dually). The associative up to isomorphisms composition of distributors is clearly suggested by the composition of atlases (which is associative because deduced from the associative composition of  $\mathcal{C}$ ).

2. If  $\mathcal{C}$  is an ordered category, atlases in which the change of (non invertible) charts is only locally defined are considered in /76/ under the name of *rockets* (cf. the corresponding comments); they are applied in completion problems for subprelocal categories.

3. Let  $\mathcal{I}$  be a class of categories containing the subgroupoids of  $\mathcal{C}$ . Let  $\mathcal{P}_{\text{roj}}\mathcal{C}$  be the category of  $\mathcal{I}$ -pro-objects of  $\mathcal{C}$ , which is the free completion of  $\mathcal{C}$  under projective limits indexed by members of  $\mathcal{I}$ . A morphism of  $\mathcal{P}_{\text{roj}}\mathcal{C}$  may be described (cf. O, IV-1, Comment 199.1) as an atlas  $A$  from  $P: I \rightarrow \mathcal{C}$  to  $Q: J \rightarrow \mathcal{C}$ , where  $I, J \in \mathcal{I}$ , that is  $P$  and  $Q$  are functors and  $A$  is a class of triples  $a: i \rightarrow j$  satisfying:

- (i)  $i \in I_0, j \in J_0$  and  $a: P(i) \rightarrow Q(j)$  in  $\mathcal{C}$ ;
- (ii)  $Q(\gamma). a: i \rightarrow j'$  belongs to  $A$  for each  $\gamma: j \rightarrow j'$  in  $J$ ;
- (iii) For each object  $j$  of  $J$ , the set

$$j.A = \{ a: i \rightarrow j \text{ in } A \mid i \in I_0 \}$$

is the class of objects of a component of the comma category  $P \downarrow j$ .

An atlas  $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  of  $\mathcal{C}$  is identified with the atlas  $A$  from  $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{C}$  to  $\mathcal{B}' \hookrightarrow \mathcal{C}$  consisting of the triples  $f: \alpha(f) \rightarrow \beta(f), f \in F$ . In this way, the category  $\bar{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  of atlases becomes a subcategory of  $\mathcal{P}_{\text{roj}}\mathcal{C}$  and of the dual of  $\mathcal{P}_{\text{rojop}}\mathcal{C}^{\text{op}}$ , which is the free cocompletion of  $\mathcal{C}$ .

449.2... under  $\mathcal{I}$ -inductive limits. If  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{B}'$  are subcategories (not sub-groupoids) of  $\mathcal{C}$ , an atlas from  $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{C}$  to  $\mathcal{B}' \hookrightarrow \mathcal{C}$  is a class of morphisms of  $\mathcal{C}$  on which  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{B}'$  act and with «zig-zags» (i.o. isomorphisms) of  $\mathcal{B}$  as changes of charts (on the right); if it has also the dual property with respect to  $\mathcal{B}'$ , it will be called an *atlas from  $\mathcal{B}$  to  $\mathcal{B}'$* . These *atlases form a category which contains  $\tilde{\mathcal{A}}(\mathcal{C})$  as a full subcategory*.

4. Frölicher [123] constructs a «good» cartesian closed category containing the smooth manifolds thanks to the data of both charts (or coordinates) and co-charts (or curves). His method suggests the following definition. Let  $\mathcal{C}$  be a category,  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{B}'$  be subcategories. A *bi-atlas*  $(F, G): \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  consists of two classes of morphisms of  $\mathcal{C}$  such that the conditions (i) and (ii) are satisfied:

$$(i) F = \{ f \in \mathcal{C} \mid \beta(f) \in \mathcal{B}'_0, f \cdot G \in \mathcal{B}' \},$$

$$G = \{ g \in \mathcal{C} \mid \alpha(g) \in \mathcal{B}'_0, F \cdot g \in \mathcal{B}' \};$$

$$(ii) \alpha(F) = \mathcal{B}'_0 = \beta(G), \beta(F) = \mathcal{B}'_0 = \alpha(G), F \cdot \mathcal{B} \subset F, G \cdot F \subset \mathcal{B}'.$$

If  $\mathcal{C}$  is a groupoid, an atlas  $F: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  is identified to the bi-atlas  $(F, F^{-1})$ . Frölicher considers the case  $\mathcal{C} = \mathcal{S}et$  and  $\mathcal{B}'$  is a given submonoid  $M$  of  $\mathcal{S}et$ ; he proves that the bi-atlases to  $M$  are the objects of a complete and cocomplete category, which is cartesian closed iff  $M$  is a *cartesian monoid*. In particular, if  $M = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , it is cartesian and the category contains the smooth manifolds. - Second kind foliations may also be described via bi-atlases (with transversal subspaces as «curves»).

450.1.  $\tilde{\mathcal{O}}$  is the category of posets, also denoted by  $\mathcal{O}_{rd}$ ; and  $\omega$  defines it as an initial structured concrete category (or, it is a «topological» functor, in Herrlich's [128] sense).

450.2. The morphisms of  $\tilde{\mathcal{O}}'$  are called *strictly ordered maps* /85, 86/.

450.3+ *Ordered categories as internal categories:*

Let us recall the notion of a structured category introduced in /58, 63/ and studied in several papers (O, III-1, III-2): If  $p: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{S}et$  is a concrete functor, a  $\mathcal{H}$ -structured category is an internal category  $C$

450.3 ... in  $\mathcal{K}$  sent by  $p$  on an ordinary category.  $\mathcal{C}$  is  $\mathcal{K}((\mathcal{K}', \mathcal{K}''), \mathcal{K}'')$ -structured, where  $\mathcal{K}'$  and  $\mathcal{K}''$  are subcategories of  $\mathcal{K}$ , when the source (or domain) morphism  $a$  and the target (or codomain) morphism  $\beta$ , from  $C_1$  to  $C_0$ , are contained in  $\mathcal{K}'$ , while the composition morphism  $\kappa: C_2 \rightarrow C_1$  is contained in  $\mathcal{K}''$ . It is  $\mathcal{K}(\mathcal{K}', \mathcal{K}'')$ -structured if  $\kappa$  is in  $\mathcal{K}''$  and if the morphism

$$[\beta, a]: C_1 \rightarrow C_0 \times C_0: x \mapsto (\beta(x), a(x))$$

is in  $\mathcal{K}'$ .

In particular,  $\tilde{\Omega}$ -structured categories are internal categories in the category of posets; ordered categories are the  $\tilde{\Omega}$ -structured categories in which the order induced on each Hom-set is trivial. For instance, an ordinary ordered group is a  $\tilde{\Omega}$ -structured category, but not an ordered category (except if the group is  $\{0\}$ ).

Several kinds of ordered categories are studied in this section; most were introduced in earlier papers, by abstraction from concrete examples (cf. Synopsis of Part II-1 and the guide /86/). Quasi-inductive categories are defined here because categories of atlases (Theorems 2-2 and 3-2) as well as the complete holonomy groupoid of a foliation (Section 3) are quasi-inductive, but not subinductive, categories. Ordered categories have been studied by several authors (cf. Comments of O, II-1 and Comments 454.1, 562.1).

451.1.  $\tilde{\Omega}'' \cap \tilde{\Omega}'_1$  consists of the étale maps  $f: M \rightarrow M'$ ; they are in 1-1 correspondence with the presheaves over  $M'$  (Synopsis of O, II-1).

451.2. A usual terminology for aggregates is «join».

451.3. R. partie non vide i.o. partie .

452.1. A subpreinductive category is an ordered category in which any two upper-bounded morphisms have a meet that is preserved by the source and target maps. For their study, cf. /67/ (in O, III-1).

452.2. The exact reference is Théorem 5 of /67/.

453.1. A *functorially ordered groupoid* /63/ is an ordered groupoid  $\mathcal{C}$  in which the source map  $a: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_0$  is étale; or equivalently,  $\mathcal{C}$  is a semi-regularly ordered groupoid in which the class  $\mathcal{C}_0$  of objects is

downward closed. For other characterizations, cf. O, II-1, Comments 137.1 and 262.1.

**454.1 + Pseudoproducts :**

In a transformation pseudogroup  $\Gamma$ , the pseudoproduct of the maps  $f: U \rightarrow U'$  and  $g: V \rightarrow V'$  is

$$gf: \mathbb{J}^1(U' \cap V) \rightarrow g(U' \cap V): x \mapsto g(f(x)) .$$

It is introduced in /125/, to simplify computations on atlases compatible with  $\Gamma$ . By analogy, the composition of an inductive groupoid or category is extended /47, 53/ into the everywhere defined pseudoproduct. In subpreinductive groupoids, the pseudoproduct is only partially defined /68/, and its definition is also valid in ordered categories /67/ ; however this definition is slightly modified here to get better existence criteria.

A characterization of (pre)inductive groupoids via the properties of their pseudoproduct is given in /53, 126/ ; it is generalized to subinductive groupoids in /68/. A similar result is proved by de Barros for regularly ordered categories or groupoids whose class of objects is downward closed and (sub)preinductive [93, 94].

Rinow extensively applies pseudoproducts, in the sense of /67/, in his paper on completions of ordered categories [78].

458.1. R. assez régulière i.o. régulière .

463.1. R. sous-classe i.o. sous-catégorie . Cf. Comment 449.1.

464.1. Add  $\alpha(F_1)$  et  $\beta(F_1)$  saturés par induction dans  $\alpha(F)$  et  $\beta(F)$  respectivement.

464.2. R. isomorphe i.o. équivalent .

**467.1 + Weak relative completion:**

If  $\mathcal{C}$  is a subpreinductive groupoid, it has as a weak relative completion the groupoid  $\bar{\mathcal{C}}$  of complexes of  $\mathcal{C}$  (cf. Theorem 3-4 of /68/ and Comment 306.2, in O, II-1). Let us show that  $\bar{\mathcal{C}}$  is then identical to the groupoid  $\hat{\mathcal{C}}$  defined here.

More generally, let  $\mathcal{C}$  be any regularly ordered groupoid, and denote by  $\hat{\mathcal{C}}$  the full subgroupoid of the groupoid  $\mathcal{A}(\mathcal{C})$  of atlases whose

467.1... objects are lesser than an identity of  $\mathcal{C}$  (it's also a full subgroupoid of  $\hat{\mathcal{C}}_f$ ).

PROPOSITION A.  $\hat{\mathcal{C}}$  is a regular quasi-inductive groupoid, each morphism of which is a sub-aggregate of morphisms of  $\mathcal{C}$ .

$\Delta$ . Each  $F$  in  $\hat{\mathcal{C}}$  is the sub-aggregate of  $\{f^> \mid f \in F\}$ . Indeed when  $g$  is in  $\beta(f^>).F.a(f^>)$ , then  $gf^{-1}$  exists and is lesser than the identity  $e$ , where  $e^>$  bounds  $\beta(F)$ ; it follows  $ga(f) < ef$ , from which we deduce

$$g = \beta(g)ga(g) < \beta(g)ga(f) < \beta(g)ef < \beta(f)ef = f.$$

Hence  $f^> < F$ . Moreover each upper bound  $G < F$  of  $\{f^> \mid f \in F\}$  is equal to  $F$ , because  $f \in G \subset F$  for each  $f$  in  $F$  implies  $G = F$ .  $\nabla$

Now let  $\mathcal{C}$  be a functorially ordered groupoid.  $\hat{\mathcal{C}}$  has a simpler description: Two morphisms  $f, f'$  are said to be *compatible* if  $fe = f'e$  and  $e'f = e'f'$  for each  $e$  lesser than  $\alpha(f)$  and  $\alpha(f')$  and each  $e'$  lesser than  $\beta(f)$  and  $\beta(f')$ . A class  $A$  of morphisms is said *complex of  $\mathcal{C}$*  if  $A$  is downward closed and if its members are, pairwise, compatible. It is easily seen that  $A$  is a complex iff it is downward closed and if  $AA^{-1}$  and  $A^{-1}A$  consist of identities. If each complex  $A$  of  $\mathcal{C}$  whose source  $\alpha(A)$  and target  $\beta(A)$  are upper-bounded admits a subaggregate,  $\mathcal{C}$  is *relatively complete*. For subpreinductive groupoids, the notions of /68/ are recovered.

PROPOSITION B. If  $\mathcal{C}$  is a functorially ordered groupoid,  $\hat{\mathcal{C}}$  consists of the complexes  $F$  of  $\mathcal{C}$  such that  $\alpha(F)$  and  $\beta(F)$  are upper-bounded; its order is the inclusion. Moreover,  $(\hat{\mathcal{C}}, \subset)$  is a relatively complete local groupoid.

$\Delta$ . The first assertion is clear. The second one is proved as Proposition B of Comment 306.2 (O, II-1). The join of a compatible family of complexes is its set-union.  $\nabla$

If  $\mathcal{C}$  is a subpreinductive groupoid,  $\hat{\mathcal{C}}$  has the following universal property: Let  $\mathcal{G}_{\alpha\epsilon}^l$  be the category of relatively complete local groupoids, with functors preserving joins and finite meets; let  $\mathcal{G}^a$  be the

467.1... category of subpreinductive groupoids, with functors preserving finite meets (but not subaggregates).

PROPOSITION C (*Weak relative completion Theorem*). If  $\mathcal{C}$  is a subpreinductive groupoid,  $\hat{\mathcal{C}}$  is a reflection of  $\mathcal{C}$  from  $\mathcal{G}^s$  into  $\mathcal{G}_{\text{rel}}^l$ .

Same proof as Proposition B of Comment 306.2 (O, II-1), which corresponds to the case  $\mathcal{C}$  is a preinductive groupoid.  $\square$

If  $\mathcal{C}$  is any functorially ordered groupoid, its embedding in the relatively complete local groupoid  $\hat{\mathcal{C}}$  might not satisfy the same universal property.

467.2+ *Complete atlases* :

A manifold is often described as a class of equivalent atlases; but Charles stressed the fact that among all these atlases there is a maximal one. In /125/ he proves that an atlas  $A$  compatible with a transformation pseudogroup  $\Gamma$  is included in a maximal one, which is the unique complete atlas  $\bar{A}$  containing  $A$ ; and he gives an explicit construction of  $\bar{A}$ . He gets a similar result for atlases in a prelocal groupoid in /68/, where he defines a (weakly) complete atlas as a regular atlas  $F$  which is closed under joins of upper bounded (in  $F$ ) families. In a regularly ordered groupoid, joins, or even relative joins (subaggregates) may not behave well; hence the concept of a regular atlas introduced here. An atlas  $A$  compatible with a transformation pseudogroup  $\Gamma$  (as in /125/) is regular iff  $A\Gamma \subset A$ , that is iff  $A$  contains the restrictions of its charts to smaller objects of  $\Gamma$  and if  $A$  is closed under the action of  $\Gamma$ .

467.3. Cf. /52/, in this volume.

469.1. It follows from this proposition that, if  $C$  admits an admissible subaggregate, it is unique (though it may not be a join of  $C$ ).

472.1 ¶ Replace by:  $H'$  s'identifie à un sous-groupe ordonné de  $\bar{H}'$ .

473.1 ¶ If  $f \in H'$ , the set  $f^>$  may not be closed under admissible subaggregates (for instance, if  $V$  is a simple open set,  $U$  and  $U'$  disjoint distinguished opens in  $V$  which have the same leave-closure in  $V$ ,



473.1... then  $U \cup U'$  is an admissible subaggregate of  $\{U, U'\} \subset V^>$ , but it is not lesser than  $V$ ); let  $\bar{f}^>$  be its closure. The map  $f \mapsto \bar{f}^>$  defines an isomorphism from  $H'$  onto a subgroupoid of  $\bar{H}'$ . This map preserves the order; indeed if  $f < g$ , the inclusion  $\beta(\bar{f}^>). \bar{g}^> . \alpha(\bar{f}^>) \subset \bar{f}^>$  (whence the equality) comes from the following remark: if  $f'$  is an admissible subaggregate of  $K \subset g^>$ , if

$$\alpha(f') = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{and} \quad \beta(f') = \bigcup_{j \in J} U'_j, \quad U_i < \alpha(f), \quad U'_j < \beta(f)$$

then  $f'$  is also the admissible subaggregate of the set

$$\{h \mid \exists k \in K, i \in I, j \in J: h < k, \alpha(h) < U_i, \beta(h) < U'_j\},$$

and this set is included in  $f^>$ .

On the other hand, an atlas  $A \in \bar{H}'$  may not be greater than  $\bar{f}^>$  for some  $f \in A$ , so that the last assertion in the proof is false.

474.1.  $\bar{\pi}: \bar{\Sigma} \rightarrow \mathcal{C}$  is the discrete fibration associated with  $\eta$  (already introduced in /47, 126/).

475.1 + The construction has been suggested by the method of complete enlargement of a local species of structures, which leads to study groupoids of atlases compatible with a subpreinductive discrete fibration /47, 85/.

If  $\mathcal{C}$  is a groupoid, the subgroupoid of  $\mathfrak{A}(\mathcal{C})$  with discrete objects (or  $\mathcal{C}$ -sets, cf. Comment 449.2, Example 2) acts on the partial sections of the fibration  $\bar{\pi}$  by restriction; this action of  $\mathcal{C}$ -sets is used by Renault [156] and by Westman [168] to study the cohomology of a groupoid with values in a sheaf of abelian groups.

477.1 ¶  $Z^0(\mathcal{C}')$  may not be a subcategory of  $\bar{Z}^0(\mathcal{C}')$  (cf. Comment 449.1) if  $\mathcal{C}$  is not a groupoid.

478.1 ¶ Delete catégorie (cf. above comment).

478.2 + The composition of atlases is a particular case of the tensor product of distributors (cf. Comment 449.2); so is the action between atlases and subfibrations; the composite  $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) [ \mathcal{B}, \pi', S ]$  may be seen as a representative of the product distributor

$$1 \dashrightarrow \mathcal{B} \dashrightarrow \mathcal{B}',$$

where  $\phi$  is the distributor associated to the discrete fibration  $\pi'$ .

481.1. Theorem 2 proves that ordered (resp. quasi-inductive, subinductive) species of structures are in 1-1 correspondence with the internal discrete fibrations  $\bar{\pi}: \bar{\Sigma} \rightarrow \mathcal{C}$  in the category  $\tilde{\Omega}$  of posets (resp.  $\mathcal{I}^{\cup}$  of quasi-inductive classes,  $\mathcal{I}^{\Delta}$  of subinductive classes) such that the induced orders on the Hom-sets of  $\mathcal{C}$  and on the fibres of  $\bar{\Sigma}$  be trivial. It generalizes results of /85/.

485.1. Etale species of structures over a discrete category  $\mathcal{C}_0$  correspond to presheaves over the order of  $\mathcal{C}_0$  (cf. O, II-1, Synopsis).

486.1. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .

The discrete fibration associated with  $Z_r^0(\tilde{\eta})$  generalizes, and if  $\tilde{\eta}$  is a subpreinductive species of structures, contains the category of  $\bar{\pi}$ -compatible weakly complete atlases constructed in /85/.

488.1. The notion of an action of a category on a category is equivalent to a split fibration and to a  $\mathcal{C}_{at}$ -valued functor (O, III-2, Comment 440.2).

489.1+ *Functorially ordered categories :*

An ordered category  $\mathcal{C}$  is functorially ordered iff  $\mathcal{C}_0$  is downward closed and a morphism lesser than a composite is composite of lesser factors. It is so in particular if  $\mathcal{C}$  has the property:

If  $f \in \mathcal{C}$ ,  $e \in \mathcal{C}_0$  and  $e < \alpha(f)$ , there exists one and only one  $f' < f$  with source  $e$ .

This remark cuts down the proof to its first five lines.

In [ 93, 94 ], C. de Barros gives a characterization of a functorially ordered category  $\mathcal{C}$  in which  $\mathcal{C}_0$  is (sub)preinductive by properties of its pseudoproduct: it must satisfy the axioms of a «regular» monoid (algebra). That generalizes results of /53, 126, 68/.

490.1. The functor  $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathcal{C}$  is constructed in /70/ (and in /122/ Chapter II); it is the split fibration, also called Grothendieck category associated to the action of  $\mathcal{C}$  on the category  $\Sigma$ . Looked at as an ordered functor, it is an internal fibration in the category of posets (O, III-2, Comments 440.2 and 475.1).

492.1. The proof uses the fact that  $S$  is downward closed in  $\bar{\Sigma}$ , result which follows from  $\Sigma$  functorially ordered (Proposition 1).

494.1. The proposition comes from /70/ (O, III-2).

495.1 ¶ Add: si  $(\mathcal{C}, <)$  est sous-prélocale .

In this case, if  $f = \bigcup F = \bigcup F'$ , where  $F \subset C_1$  and  $F' \subset C_2$  then

$$F \cap F' = \{ g \cap g' \mid g \in F, g' \in F' \},$$

since  $\mathcal{C}$  is subpreinductive, and the distributivity axiom gives

$$\bigcup F \cap F' = (\bigcup F) \cap (\bigcup F') = f .$$

495.2. The term «ordonné» does not mean that  $\phi$  (nor  $\Phi$ ) preserves the orders.

496.1. This definition makes sense when  $C$  generates  $(\mathcal{C}, <)$ , which is not always true (cf. Comment 495.1). The context (Proposition 5) seems to indicate that the definition should be:  $C$  is any subcategory of both  $C_1$  and  $C_2$  which generates  $(\mathcal{C}, <)$ .

497.1 ¶ Proposition 5 is valid if the definition is modified as said in Comment 496.1 and if  $(\mathcal{C}, <)$  is subprelocal.

498.1. If  $(\mathcal{C}, <)$  is subprelocal,  $C$  generates it.

The proof is shorter if the crossed equivalences are replaced by equivalences between the corresponding sections of the fibration.

498.2.  $C_2$  is not necessarily the intersection of  $C$  and  $C_1$ , but any subcategory generating  $(\mathcal{C}, <)$  and contained in  $C \cap C_1$ .

499.1.  $N \cup (\mathcal{C}, <)$  is a subcategory of the category of diagrams of  $\mathcal{C}$ .

499.2. The second assertion is valid if  $(\mathcal{C}, <)$  is subprelocal (Comment 497.1).

499.3+ *General cohomology:*

This section adapts the theory of 1-cohomology of a split fibration (as it is defined in /70/) to the case of internal fibrations in categories of posets. However the orders are probably not sufficiently taken into account.

Let us recall that Charles published several papers on cohomology, developing a general non-abelian cohomology theory (/73, 74, 84, 91,

499.3... 102/, in O, III-2 and IV-1). For comments, e.g. a comparison with other cohomology theories, cf. O, III-2 (Synopsis and Comments 450.1, 450.6, 579.3).

We still mention two recent papers on cohomology in topoi:

1. Duskin [116] gives the following much simpler interpretation of the Grothendieck-Giraud non-abelian 2-cohomology [124] of a Grothendieck topos  $\mathbf{E}$ : A *bouquet* is an internal groupoid in  $\mathbf{E}$  which is locally non-empty and connected; if  $K$  is a global lien,  $H^2(\mathbf{E}; L)$  denotes the class of connected components of the category of bouquets which have lien isomorphic to  $L$ ; Duskin constructs a 1-1 correspondence between  $H^2(\mathbf{E}; L)$  and Giraud's 2-cohomology set of  $\mathbf{E}$  with coefficients in  $L$ .

2. Bourn [99] exhibits an equivalence from the category of abelian complexes of length  $n$  to the category of internal  $n$ -categories in  $Ab$ ; by restriction,  $Ext^n(A_0, A_n)$  is equivalent to the category of  $(n-1)$  simply transitive internal actions of  $A_n$  (identified to an abelian group in  $(n-1)$ -Cat) on  $(n-1)$ -categories in  $Ab$  with object group  $A_0$ . Whence an interpretation, valid in any topos with NNO, of  $n$ -extensions from an abelian group to  $Z$  in terms of internal actions in  $(n-1)$ -Cat; it is compared with Duskin's interpretation in terms of  $n$ -torsors (cf. [115] and, for  $n = 1$ , Johnstone [48]).

500.1+ *Sheaves of categories*:

In his Thesis [42], Haefliger develops a cohomology with values in sheaves of groupoids (over a topology) for defining  $\Gamma$ -structures, so giving a manageable generalization of second kind foliations (cf. Comment 580.1). His theory is drawn along the lines of the cohomology with values in a sheaf of non-abelian groups, which provides a characterization of fibre bundles as 1-cohomology classes (Dedecker [114], Frenkel [122]).

Presheaves and sheaves of sets over a locale  $L$  are the same as etale and complete ordered maps over  $L$  (O, II-1, Synopsis). Similarly, let  $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathcal{C}$  be the ordered fibration defined (Theorem 1-5) by the action  $K$  of  $(\mathcal{C}, <)$  on the ordered category  $(\Sigma, <)$ ; let  $\bar{\pi}: \mathcal{C} * \Sigma \rightarrow \mathcal{C}$

500.1... be the ordered discrete fibration corresponding to the ordered species  $\tilde{\eta} = [(\mathcal{C}, <), (\Sigma, <), K]$ . As  $\Sigma$  is a functorially ordered category (Proposition 1-5),  $\tilde{\eta}$  is an etale (resp. complete) ordered map iff  $\bar{\eta}$  is so; then the presheaf (resp. sheaf) of sets defined by  $\bar{\eta}$  upside-down «is» a *presheaf* (resp. *sheaf*) of categories  $P_{\tilde{\eta}}$  over  $(\mathcal{C}, <)$ .

If  $\tilde{\eta}$  is an etale local fibration, its completion as a local map (O II-1, Synopsis) gives the sheaf of categories  $\hat{P}_{\tilde{\eta}}$  associated of  $P_{\tilde{\eta}}$ , i. e. the reflection of  $P_{\tilde{\eta}}$  into the category of sheaves of categories over  $(\mathcal{C}, <)$ . If  $\mathcal{C}$  reduces to a locale, e. g. a topology, we recover the usual associated sheaf of categories. If  $\mathcal{C}$  is right completely regular,  $\hat{P}_{\tilde{\eta}}$  is the associated sheaf of categories over the canonical site defined by  $(\mathcal{C}, <)$  (O, II-1 Comment 143.1). In fact, for presheaves of categories over any site a similar construction of the associated sheaf is done by Felix [120].

*Stacks* are complete non-necessarily split fibrations over a site, and any fibration over a site admits a reflection into stacks (Giraud [124]). Bourn [100] proves that the associated stack classifies weakly representable internal distributors in the topos of sheaves for the epimorphism topology. His proof lies on the construction of the associated (or *completion*) *stack* given by Bunge [105] for stacks over a regular category or a topos.

501.1. The covariant map  $(i_C, \psi)$  associated to the 1-cocycle  $(U_i, g_{ji})$  of the sheaf of groupoids is defined as follows: the objects of  $C$  are all the open subsets of one of the  $U_i$ .  $\Sigma_I$  consists of all the triples  $(U, j, i)$  with  $U \subset U_i \cap U_j$ ; and  $\psi(U, j, i)$  is the restriction to  $U$  of  $g_{ji}$  (defined on  $U_j \cap U_i$ ).

Conversely, if  $(i_C, \psi)$  is a covariant map, we have the 1-cocycle  $(U_i, g_{ji})$  such that

$$U_i = U \text{ if } (U, i, i) \in \Sigma_I \text{ and } g_{ji} = \psi(U_i \cap U_j, j, i).$$

501.2 ¶ For  $\Sigma_I$  to be a groupoid, the definition must be modified:  $\Sigma_I$  consists of all the triples  $(U'', U', U)$  of objects of  $C$  with  $U'' \subset U' \cap U$ ,

the covariant map associated to  $\bar{\phi}$  is defined by:

$$\psi(U'', U', U) = \phi(U'', U')^{-1} \cdot \phi(U'', U).$$

501.3. The ordered 1-cocycle depends upon the choice of  $(U, i, i)$  for each  $i$ , but its cohomology class does not.

501.4. It has not been published.

502.1. As  $\Sigma$  is not preinductive, two members of  $\Sigma$  may not have a meet, so the preservation of meets by  $\pi$  must be replaced by:

If  $s, s'$  are in  $C$  and if  $V < \pi(s), V < \pi(s')$ , then

$$V \subset \cup \{ \pi(\hat{s}) \mid \hat{s} < s, \hat{s} < s' \}.$$

502.2.  $\tilde{\eta}$  is (etale and) complete iff it corresponds to a sheaf over  $H'$  (cf. Comment 500.1).

505.1. Transverse measures of foliations used by Plante [147], Ruelle & Sullivan [158], ..., may also be defined in this way.

**ON / 76 / : COMPLÉTION DES CATÉGORIES ORDONNÉES.**

**507.1 + Completion Problem :**

Several completion problems originated in the construction of structures via atlases compatible with a given transformation pseudogroup (cf. / 125, 47/ and Synopsis in O, II-1).

In /68/ a prelocal groupoid is universally embedded into:

- (a) a complete local groupoid, i. e., there is a join for each family of morphisms which are compatible (they agree pairwise on the meets of their sources and of their targets);
- (b) a relatively complete local groupoid (each compatible family of morphisms whose sources are upper bounded as well as their targets admits a join);
- (c) a local groupoid.

In each case universal solutions are explicitly constructed, first under the condition that meets only be preserved («weak solutions»), then with preservation of meets and joins.

In this paper, the construction relative to the *localization problem*

507.1... is carried out to embed (sub)prelocal (P) categories into (sub-) local ones.

A weak solution for case (b) is given in /75/ for the subpre-inductive groupoids. Similar problems for local species of structures and local functors are solved in /47, 85, 110/.

The term «completion» is also used for the embedding of a category into a category admitting some kinds of limits (cf. O, IV).

508.1. R. prélocaux i.o. sous-locaux .

508.2. The intended paper has not been written.

508.3. It is an internal category in the category  $\tilde{\Omega}$  of posets.

508.4. All the results of the paper remain valid without the hypothesis that  $(\mathcal{C}_\gamma, <)$  is a semi-regular  $\tilde{\Omega}$ -structured groupoid if, in Definition 1, the technical condition  $(\mathcal{B}_\gamma, <)$  is semi-regular is omitted (we'll point out the slight necessary modifications).

509.1. Atlases were introduced to unify the construction of manifolds, fibre bundles, foliations, ... Rockets were suggested by the second kind foliations /47, 54/ in which the charts are not 1-1 and the changes of charts are only «locally» defined (Comments 563.2 and 580.1). However rockets are less precise, so they are refined later on.

509.2. R. atlas régulier i.o. atlas .

511.1. The hypothesis  $\mathcal{B}'_\gamma$  semi-regular is only used here to assert the existence of  $g'_1$ . It may be by-passed if we write more simply that:

$$\bar{f}'_1 \cdot \bar{f}'_2 < \bar{f}' \cdot \bar{f} \quad \text{and} \quad g'' \cdot \bar{f}'_1 \cdot \bar{f}'_2 = f'' \cdot \bar{f}'_2 < f'_1 \cdot g' \cdot \bar{f}'_1 = f'_1 \cdot f_1 < f' \cdot f.$$

511.2. Condition (C) means that two morphisms lesser than  $f$ , with the same source (resp. target) are isomorphic. It is satisfied e. g. if  $\mathcal{C}$  is a functorially ordered category, or a semi-regularly ordered groupoid or a semi-regular subpreinductive category.

512.1. This (non-essential) proposition requires that  $\mathcal{C}_\gamma$  be semi-regular.

512.2. The results remain still valid if  $\mathcal{C}_\gamma$  is not semi-regular.

515.1. Same comment.

518.1. Same comment.

519.1+ *Maximal rockets :*

They were defined by analogy with maximal (or complete) atlases. As for atlases, two regular rockets are equivalent (or define the same maximal rocket) iff their set-union is a rocket (proof of Theorem 5). This last condition is not sufficient for non-regular rockets, whence the more complicated equivalence of Theorem 3. In a local category, a maximal rocket is complete, i. e. closed under joins.

A concrete method for constructing maximal rockets is the following one: Let  $\mathcal{C}$  be a local category over  $\mathcal{S}et$  and  $p: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}et$  the forgetful functor; let  $\mathcal{J}^\lambda(\mathcal{C})$  be the topological category of its atomic local jets (defined in /53/, Section 7). If  $A$  is an atlas of  $\mathcal{J}^\lambda(\mathcal{C})$  (in the sense of /75/) and if  $A$  is open for the (etale) topology the set  $F$  of its solutions is a maximal rocket;  $F$  consists of the morphisms  $h: s \rightarrow s'$  in  $\mathcal{C}$  such that  $j_x^\lambda h \in A$  for each  $x$  in  $p(s)$ .

For instance, second kind foliations are maximal rockets of the category  $\mathcal{C}^r$  of  $r$ -differentiable manifolds constructed in this way (Comment 580.1). It follows that the category of manifold schemes (Van Est [164]) is a subcategory of the category of maximal rockets of  $\mathcal{C}^r$ , whose objects are downward closed subgroupoids of  $\mathcal{C}^r$ .

521.1. R. fusée régulière i.o. fusée .

526.1. As in the preceding section, the results are valid when  $\mathcal{C}_\gamma$  is not semi-regular if  $\mathcal{B}_\gamma$ , in Definition 1, is not required to be semi-regular.

527.1.  $(F_3^s)$  is a strong condition. For instance, it is not satisfied by second kind foliations. In a functorially ordered groupoid, it implies the rocket is an atlas.

530.1.  $\mathcal{C}_\gamma$  need not be semi-regular.

538.1. It is not necessary that  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{B}'$  be upper-bounded.

538.2. As before, the results remain valid if  $\mathcal{C}_\gamma$  is not semi-regular.

538.3. R. isomorphe i.o. équivalente .

538.4. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .

541.1+ *Weak localizations of preinductive categories :*

Let  $\mathcal{P}_{ind}$  be the category whose objects are the regular preinductive categories and the morphisms the functors preserving finite meets.



541.1... Let  $\mathcal{L}_{loc}$  be its (non-full) subcategory whose objects are the regular local categories, and the morphisms preserve both finite meets and all joins.

WEAK LOCALIZATION THEOREM.  $\mathcal{L}_{loc}$  is a reflective subcategory of  $\mathcal{P}ind$ , a reflection of  $\mathcal{C}$  being the category  $\bar{\mathcal{C}}$  (Theorem 6).

$\Delta$ . 1.  $\bar{\mathcal{C}}$  is a regular inductive category; to prove that it is local, let  $\mathcal{B}$  and  $\mathcal{B}_i, i \in I$ , be objects of  $\bar{\mathcal{C}}$ , where the  $\mathcal{B}_i$  are upper-bounded by  $e$ , and let us show that

$$(\bigvee_{i \in I} \mathcal{B}_i) \cap \mathcal{B} \subset \bigvee_{i \in I} (\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}).$$

Indeed, suppose  $g$  in the first term; as  $\bigvee \mathcal{B}_i = \bigcup \mathcal{B}_{i_0} \cdot e^{\triangleright} \cdot \bigcup \mathcal{B}_{i_0}$ , there exist  $j, j' \in I$  such that  $\alpha(g) \in \alpha(\mathcal{B}_j \cap \mathcal{B}), \beta(g) \in \alpha(\mathcal{B}_{j'} \cap \mathcal{B})$ ; it follows:

$$g \in \bigcup \alpha(\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}) \cdot e^{\triangleright} \cdot \bigcup \alpha(\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}) = \bigvee (\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}).$$

Notice that  $F$  belongs to  $\bar{\mathcal{C}}$  iff it is a downward closed subset of  $\mathcal{C}$  such that  $F = \beta(F) \cdot f^{\triangleright} \cdot \alpha(F)$  for every upper bound  $f$  of  $F$ . In particular,  $\sigma(f^{\triangleright}) = f^{\triangleright}$ .

2. The embedding  $\pi c: \mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$  preserves finite meets (but not joins). Let  $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$  be a functor to a local category which preserves finite meets (resp. of upper-bounded families). It extends into

$$\bar{\phi}: \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{S}: F \mapsto \bigvee \phi(F).$$

That  $\bar{\phi}$  is the unique functor which preserves joins and finite meets (resp. which is inductive) is proved as in Prop. B of Comment 306.2 (O, II-1). Hence  $\pi c$  is a reflector into  $\mathcal{L}_{loc}$ . (That does not contradict the corollary of Theorem 6, because  $\mathcal{L}_{loc}$  is not full subcategory.)  $\nabla$

COROLLARY. If  $\mathcal{C}$  is a preinductive groupoid,  $\bar{\mathcal{C}}$  is the reflection of  $\mathcal{C}$  into the full subcategory of  $\mathcal{L}_{loc}$  whose objects are the local groupoids.

$\Delta$ . Then  $\bar{\mathcal{C}}$  consists of all the downward closed and upper-bounded subsets, i. e., of all the bounded complexes of  $\mathcal{C}$ . Hence it is the weak localization of  $\mathcal{C}$  (with preservation of finite meets only) constructed in /68/ (O, II-1, Comment 306.2).  $\nabla$

- 542.1. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .  
 542.2. R. isomorphes i.o. équivalentes .  
 543.1. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .  
 543.2. The condition  $\mathcal{C}_\gamma$  semiregular may still be deleted.  
 545.1. R. fusée régulière i.o. fusée .  
 547.1. A regular inductive category satisfying condition (P) is called strongly regular in /110/. It means joins are preserved by «change of base» and image.  
 547.2. Cf. /71/ for another example.  
 547.3.  $\mathcal{C}_\gamma$  may still not be semiregular.  
 554.1.  $J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}$  is the category of local jets (in the sense of /53/) associated to the embedding  $\mathcal{C} \hookrightarrow \bar{J}(\mathcal{C}, <)$ . If  $\mathcal{C}$  is a functorially ordered groupoid,  $J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}$  is also one.  
 559.1. Condition (U) means that  $\phi$  preserves subaggregates.  
 562.1+ (Sub)localization Theorems:

Condition (P) is essential to construct  $J(\mathcal{C}, <)$ . The completion (or, more precisely, sublocalization) Theorem 5 may be strengthened into the *Sublocalization Theorem for (P) subprelocal categories*:

PROPOSITION A.  $J = (J(\mathcal{C}, <)^{\bullet}, <)$  satisfies (P), and it is a reflection of  $(\mathcal{C}, <)$  from the category of (P) regular subprelocal categories and inductive functors, to the full subcategory with objects the (P) regular sublocal categories.

$\Delta$ . It follows from Theorem 5 as soon we prove (P) is satisfied by J.

1.  $\bar{J} = (\bar{J}(\mathcal{C}, <), <)$  satisfies (P). Indeed, let  $(F, f) \in \bar{J}$  be such that  $a(F, f) = \bigvee^{a(F, f)} (\mathcal{B}_i, e_i)$ . Then  $a(f) = \bigvee^{a(f)} e_i$  and, by (P) in  $\mathcal{C}$ , we have  $f = \bigvee^f f e_i$ . By the construction,

$$\bigvee^{(F, f)} (F, f)(\mathcal{B}_i, e_i) = \overline{(\cup(F \mathcal{B}_i)_f, f) \prec (F, f)} ;$$

for each  $g$  in  $F$ ,  $a(g) \in \cup a(\mathcal{B}_i)_{a(f)}$  implies there exist  $e'_i \in \mathcal{B}_i$  such that  $a(g) = \bigvee^{a(f)} e'_i$ , whence by (P) in  $\mathcal{C}$ ,

$$g = \bigvee^f g e'_i \in \overline{(F \mathcal{B}_i)_f} .$$

562.1... It follows that  $(F, f)$  is the  $(F, f)$ -aggregate of the  $(F, f)(\mathcal{B}_i, e_i)$ .

The result comes by duality.

2.  $J$  satisfies (P): If  $N \in J$  and  $a^\bullet(N) = \bigvee^E E_i$ , we may choose representatives  $(F, f)$  of  $N$  and  $(\mathcal{B}_i, e_i)$  of  $E_i$  such that

$$(\mathcal{B}_i, e_i) < a(F, f) \text{ in } \bar{J}.$$

Part 1 proves that  $(F, f)$  is a sub-aggregate of  $(F, f)(\mathcal{B}_i, e_i)$ , so

$$N = \bar{\nu}(F, f) = \bigvee^N \bar{\nu}((F, f)(\mathcal{B}_i, e_i)) = \bigvee^N N E_i,$$

and condition (P) is satisfied.  $\nabla$

As a consequence, we deduce:

PROPOSITION B. *If  $\mathcal{C}$  is a regular prelocal category satisfying (P), so is  $J$ ; and  $J$  is a reflection of  $\mathcal{C}$ , from the category of regular prelocal categories satisfying (P) and inductive functors, into the full subcategory of regular local categories satisfying (P).*

Proposition B, which is the «Localization Theorem» for (P) prelocal categories, may be compared with the weak localization Theorem (Comment 541.1).

PROPOSITION C. *Let  $\mathcal{C}$  be a regular prelocal category satisfying (P). Then its localization  $\bar{J}$  is a quotient of its weak localization  $\bar{\mathcal{C}}$ .*

$\Delta$ .  $\bar{\mathcal{C}}$  is the universal embedding of  $\mathcal{C}$  into local categories preserving finite meets; hence the embedding  $\bar{\theta}: \mathcal{C} \rightarrow \bar{J}$  factorizes into

$$\mathcal{C} \rightarrow \bar{\mathcal{C}} \xrightarrow{\Theta} \bar{J}, \text{ where } \Theta(A) = \bar{A}_{\mathcal{C}} \text{ for each } A \in \bar{\mathcal{C}}.$$

We have to prove that  $\Theta$  is onto; it comes from the fact that each  $F \in \bar{J}$  satisfies  $F = \beta(F).f^\triangleright.a(F)$  for any upper bound  $f$  of  $F$  (cf. proof of Proposition 5.3); hence  $F$  belongs to  $\bar{\mathcal{C}}$  and  $\Theta$  is a retraction from  $\bar{\mathcal{C}}$  onto  $\bar{J}$ .  $\nabla$

Propositions A and B specialize to give the following (Sub)localization Theorem for (sub)prelocal groupoids /71/ :

PROPOSITION D. (i) *If  $\mathcal{C}$  is a subprelocal groupoid, so is  $J$ , and  $J$  is the reflection of  $\mathcal{C}$ , from the category of subprelocal groupoids and inductive functors, into the full subcategory of sublocal groupoids.*

562.1... (ii) Same assertion, with (pre)local i.o. sub(pre)local.

$\Delta$ .  $J$  is a groupoid, since  $N = \bar{v}(F, f)$  admits  $\bar{v}(F^{-1}, f^{-1})$  as its inverse. If  $N$  is lesser than an object  $\bar{v}(\mathcal{B}, e)$ , then  $N$  has a representative  $(A, a) < (\mathcal{B}, e)$ ; the relation  $A < a < e$  implies  $A$  consists of objects; hence  $N$  is an object of  $J$ . A regular sublocal category which is a groupoid whose class of objects is downward closed is a sublocal groupoid. Hence  $J$  is a sublocal groupoid.  $\nabla$

If  $\mathcal{C}$  is a prelocal groupoid,  $\bar{J}$  has been constructed in /68/ and its universality with respect to functors preserving joins and finite meets is proved in /66/. Notice that the universal property given here is somewhat stronger, since any inductive functor (i. e. a functor which preserves meets of upper-bounded finite families and all joins)  $\Phi$  from  $\mathcal{C}$  to a local groupoid  $\Sigma$  factorizes through  $\bar{J}$ . The difference just comes from the context, because the main point of /66/ was to get the universality of the completion of  $\mathcal{C}$ , not of its localization, through which only functors preserving joins and all finite meets factorize.

The completion problem has also been studied by Rinow [77, 78]. His basic assumption is that  $\mathcal{C}$  is a regularly ordered category such that  $\mathcal{C}_0$  be subpreinductive and that

$$e'e = e' = ee' \text{ if } e, e' \text{ are objects and } e' < e$$

(which implies  $\mathcal{C}_0$  is downward closed). He then constructs a universal embedding of  $\mathcal{C}$  into a quasi-inductive category which is a complete lattice

- with preservation of meets (take all downward closed subsets of  $\mathcal{C}$ ),
- with preservation of meets and joins, when  $\mathcal{C}_0$  is prelocal and (P) is satisfied (take all downward and join closed subsets of  $\mathcal{C}$ ).

He also exhibits subcategories of these «large» completions, e. g. a universal localization of  $\mathcal{C}$ , under somewhat stronger hypotheses than here. For groupoids, he finds back results of /68/.

562.2. R. prélocal i.o. sous-local.

In fact, the results of the present paper only encompass the local-

562.2... ization theorems of /68, 66/, not the completion or relative completion theorems given in these articles. For a generalization of the weak relative completion theorem, cf. /75/ and Comment 541.1.

**ON /54/ : STRUCTURES FEUILLETÉES :**

This article is included in the present volume, i.o. in O, I with the older papers on foliations, because it extensively applies results on ordered categories and complete enlargements given in /47, 53, 68, 85/ (O, II-1). It is not the case for the Note /45/ which defines locally simple foliations and states the Stability Theorem; so this Note is inserted in O, I, where it emphasizes Charles's interest in topological foliations, not only foliated manifolds.

We are at the junction between the older concise papers on Differential Geometry and the more explicit ones on Category theory. Here, some proofs are briefly sketched, others are entirely developed. We will provide missing proofs only for propositions useful in the sequel. We refer to O, I for more comments on foliations, e. g. on foliated manifolds.

Some parts of this paper are developed in a manuscript of Largillier from notes taken at a series of lectures on foliated structures I gave in Paris and Amiens (1972).

563.1. The only posterior paper (partially) dealing with foliations is /75/.

**563.2+ *Foliations with singularities* :**

An important literature has been devoted to foliated manifolds, specially in the last fifteen years (cf. Comments in O, I). Some problems require foliations with singularities, so that several generalizations have been proposed :

- The *topological foliations* studied here were introduced by Charles in his early fifties lectures; in particular, locally simple foliations offer a good framework for stability questions; they have not been well exploited.
- A close notion is Reeb's *generalized dynamical systems* (cf. Section 2-I for the exact relationship). They were defined to obtain a ma-

- 563.2... nageable species of local structures which englobes foliated manifolds and classical dynamical systems. In [155], Reeb studies the stability and limit properties of leaves (also called *trajectories*), Poisson stability and recurrence, limit points, wandering trajectories.
- *Second kind foliations* are introduced in /47/, along with the  $\mathcal{B} \# \mathcal{F}$ -foliations (or foliations with additional structures on leaves and on transverse spaces) as instances of local structures obtained by the complete enlargement method (cf. Sections 4-I, 5-I and Comment 580.1). They provide a concept of foliation which includes some singularities and stresses the «transverse structure».
  - Foliated manifolds are not preserved by inverse image along a continuous map. To remedy it, Haefliger introduced his  $\Gamma$ -structures [42], inspired by second kind foliations (cf. Comment 580.1). As an application, he proves that a compact real analytic manifold with a finite first homotopy group (as  $S_3$ ) admits no codimension 1 analytic foliated structure. In [125] a classifying space is defined for  $\Gamma$ -structures, and used to study characteristic classes of  $\Gamma$ -foliations and their link with the cohomology of the Lie algebra of formal vector fields.
  - Recently several authors have taken an interest in quotients of foliated manifolds. Pradines [152] defines a *QF-atlas* as an onto map  $q$  such that two points in the same  $q$ -fibre have locally  $q$ -diffeomorphic neighborhoods and the fibres are totally disconnected. A *QF-manifold* is an equivalence class of QF-atlases. QF-manifolds generalize Barre Q-varieties [92] and Molino foliages (equivalence classes of foliations) [143], and they contain all the quotients of foliated manifolds. In [112, 152] it is developed a cohomology for QF-manifolds, along the lines of Barre's cohomology for Q-varieties.
  - Van Est *manifold schemes* [164] are related to the QF-manifolds and to second kind foliations (cf. Comments 580.1, 586.1). They were introduced to describe non-separated manifolds, such as quotients of foliations or non-separated analytic groups, which restore a 1-1 correspondence between Banach Lie algebras and simply connected analytic groups. In [97], manifold schemes are used to study foliations

563.2... on the 2-torus and on the Klein bottle; in [164], an analytic connected and simply connected 1-dimensional manifold scheme is proved to be a tree, whence a simpler proof of Haefliger's theorem.

- A more abstract generalization consists in replacing topologies by paratopologies (or locales) in the definition of a foliation. Such *paratopological foliations* are studied by Coppey [18], Tanré [87].

564.1. Only isomorphisms are defined, because it is not clear what a morphism should be: a map which is continuous for both topologies may not preserve leaves; a continuous map which preserves leaves may not extend into a functor between the holonomy groupoids.

565.1. The concept of a pure chain is simplified in /75/ (Section 3).

565.2. *Proof:* It comes from the following facts:

- If  $F$  is a leaf and  $x \in F$ , the set consisting of the  $y \in F$  which are linked to  $x$  by a pure chain is open and closed in  $F$ , hence is identical to  $F$ . (It is closed because of the first proposition on page 566, which should be given beforehand.)

- If  $\Omega$  is an open subspace of  $T$  and if the pure chain  $\Gamma$  has its first link  $W_\Gamma$  contained in  $\Omega$ , then  $\Gamma$  is included in the leaf-closed subspace generated by  $\Omega$ .

566.1. The pure chain is constructed by induction, thanks to the preceding remark at each step.

566.2. *Proof:* Let us prove that a simple leaf  $F$  is proper, which amounts to prove that, if  $U'$  is an open neighborhood of  $x$  in  $T'/F$  and  $T/U' = T'/U'$ , then  $U'$  is open in  $T/F$ . Indeed, as  $T'$  is regular,  $U'$  contains the closure  $\bar{U}''$  of an open neighborhood  $U''$  of  $x$  in  $T'/F$ , and  $U''$  may be taken as the trace on  $U'$  of a distinguished open neighborhood  $V$  of  $x$  in  $T$ . As  $V \cap U'' = V \cap \bar{U}'' = V \cap U'$ , we have

$$V \cap F = (V \cap U'') \cup (V \cap \bar{U}'' );$$

It follows  $V \cap F = V \cap U'' \subset U'$ , since  $V \cap F$  is connected. Hence,  $U'$  is open in  $T/F$ . The other assertions are easily deduced.

567.1. Cf. /110/ (O, II-1).

568.1. These immersions are not to be confused with the (classical) dif-

ferentiable immersions.

568.2. R. de  $E$  contenant  $x$  i.o. de  $E$ .

The concept of a limit point has been suggested by Fox's completion of what he calls a *spread* [121] (or étale space with singularities)  $g$ ; the elements of the associated to  $g$  complete spread are just the limit points of the map  $g$ .

568.3. The proof comes from the following easily proved assertion: Let  $(T, T')$  be a simple foliation,  $F$  a leaf and  $X$  a filter on  $F$  which converges to  $x$  in  $T$  and with a basis  $B$  satisfying properties (1) and (3) of the definition of a limit point for  $f: T'/F \hookrightarrow T$ ; then  $x$  is in the closure of  $F$  and  $B$  generates the filter trace of the neighborhood filter of  $x$  in  $T$ .

569.1. It follows from the fact that  $X$  is a limit point of the leaf  $F$  over  $x$  iff the trace of  $X$  on a simple neighborhood  $U$  of  $x$  is a limit point of the unique plaque of  $U$  containing a ( $T'$ -connected) member of  $X$ .

572.1. Foliated manifolds are introduced in /19/; their theory is developed in Reeb's Thesis [75]; cf. also /30/. For more comments we refer to the comments of O, I.

$G \# G'$ -foliated manifolds are defined in /47/, as well as the special case of local products.

572.2. R. qui peut être non i.o. non.

574.1. Analytic foliations are e.g. studied by Haefliger [42].

574.2.  $S_i \times S'_i$  is just a notation for the pair  $(S_i, S'_i)$ , not a product in a suitable category.

575.1 + On the definition of  $(\mathcal{B} \# \mathcal{F})$ -foliations:

$(\mathcal{B} \# \mathcal{F})_0$  is the local class product of  $\mathcal{B}_0$  and  $\mathcal{F}_0$ . However  $\mathcal{B} \# \mathcal{F}$  (and  $\widetilde{\mathcal{B} \# \mathcal{F}}$ ) are sublocal, not local, classes: a family

$$h_i: S_1^i \times S'_1{}^i \rightarrow S_2^i \times S'_2{}^i, \quad i \in I,$$

may have two different subaggregates  $h$  and  $h'$ , since  $h$  and  $h'$  have only to coincide

$$\text{on } \cup(S_1^i \times S'_1{}^i) \quad \text{not on } \cup S_1^i \times \cup S'_1{}^i.$$



575.1... The forgetful functor  $\mathcal{B} \# \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}_{\text{op}}$  preserves meets of bounded finite families, but not joins («presque au-dessus», in the terminology of /85/). The laxified products are the objects of the enlargement of  $\mathcal{B} \# \mathcal{F}$  over  $\mathcal{I}_{\text{op}_\gamma}$ , which is just subinductive /85/ (Corollary 2 of Theorem 4-2). It follows that the concept of a compatible class  $C$  cannot be defined as in inductive classes (2 elements of  $C$  may not have a meet), but it must be localized. The corresponding complete enlargement of  $(\mathcal{B} \# \mathcal{F})_0$  is the local class  $\mathcal{L}(\mathcal{B} \# \mathcal{F})$  of the  $\mathcal{B} \# \mathcal{F}$ -foliations. Notice that  $\mathcal{L}(\mathcal{B} \# \mathcal{F})$  is already constructed in /47/ (Section IV-2), by a slightly different method which by-passes the recourse to subinductive classes. The groupoid  $\mathcal{B} \# \mathcal{F}$  is replaced by the local groupoid consisting of the local isomorphisms of  $\mathcal{B} \# \mathcal{F}$ : they are the triples  $f: S_1 \times S'_1 \rightarrow S_2 \times S'_2$  such that the bijection  $f$  from an open subspace of  $\tau(S_1) \times \tau(S'_1)$  to an open subspace of  $\tau(S_2) \times \tau(S'_2)$  be a join of morphisms of the here defined  $\mathcal{B} \# \mathcal{F}$ .

576.1. It is a subinductive groupoid (/85/, Theorem 4-2).

576.2. The proposition comes from the transitivity theorem for complete enlargements (/85/, Theorem 9.3).

577.1. Fibered structures are similarly defined in /47/ (Section IV-3). For commentaries and history on fibre bundles, cf. O, I.

578.1. At the time this paper was written, Kodaïra and Spencer had just published a series of important papers [132, 133] on «variations of structures», and Charles was directing Srinivasacharyulu's thesis on this subject [161].

579.1.  $\Theta$  is the class of objects of the comma category  $p_1 \downarrow p$ . As  $p$  and  $p_1$  preserve joins and bounded finite meets,  $p_1 \downarrow p$  is an inductive category. The homomorphisms from  $\mathcal{B}$  to  $\mathcal{B}$  constitute the join-closure of  $\mathcal{F}$  in  $\Theta$ .

579.2.  $\tilde{\mathcal{F}}$  is the join category of  $p: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{I}_{\text{op}}$  and  $p_1: \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{I}_{\text{op}}$  /77/.

580.1+ *Second kind foliations,  $\Gamma$ -structures and manifold schemes:*

Second kind foliations are introduced in /47/. In their definition, the term atlas has a wider meaning than it has in /75/; in fact, such an atlas is a maximal rocket of  $\tilde{\mathcal{F}}$ , but not a strict one, in the sense

580.1... of /76/ (which concepts have precisely been suggested by these foliations).

However a second kind  $(\mathcal{B}, \mathfrak{F})$ -foliation may alternately be described as an atlas (in the sense of /75/) of the category  $\mathfrak{J}^\lambda(\tilde{\mathfrak{F}})$  of atomic jets of the local category  $\tilde{\mathfrak{F}}$  over  $\mathcal{S}et$ . This category is a topological category for the etale topology on the jets (or germs /53/, n° 7).

PROPOSITION. *There is a 1-1 correspondence between second kind  $(\mathcal{B}, \mathfrak{F})$ -foliations on  $Z \in \mathcal{B}_0$  and atlases  $F^\lambda$  of  $\mathfrak{J}^\lambda(\tilde{\mathfrak{F}})$  which are left compatible with a (component closed subgroupoid of)  $\mathfrak{J}^\lambda(\mathcal{B})$ , open for the etale topology and such that  $\alpha(F^\lambda) = \{j_z^\lambda Z \mid z \in p_1(Z)\}$ .*

$\Delta$ . If  $A$  is a  $(\mathcal{B}, \mathfrak{F})$ -foliation,  $A^\lambda$  the set of the local jets of its elements and  $\mathcal{B}^\lambda$  the full subgroupoid of  $\mathfrak{J}^\lambda(\mathcal{B})$  with object class  $\beta(A^\lambda)$ , then  $A^\lambda$  is an open  $\mathcal{B}^\lambda$  left compatible atlas of  $\mathfrak{J}^\lambda(\tilde{\mathfrak{F}})$ . Conversely, we associate to the atlas  $F^\lambda$  the set  $F$  of its solutions.  $F$  consists of the  $(S, h, Z') \in \tilde{\mathfrak{F}}$  such that  $j_x^\lambda h \in F^\lambda$  for each  $x \in p_1(Z')$ ; then  $F$  is a  $(\mathcal{B}, \mathfrak{F})$ -foliation on  $Z$ .  $\nabla$

In particular, let us take for  $\mathcal{B}$  the groupoid  $\mathcal{T}_{op}$  of topological spaces, for  $\mathcal{B}$  a pseudogroup  $\Gamma$  of homeomorphisms between opens of a topological space  $B$ ; let  $\Gamma^\lambda$  be the local jet groupoid  $\mathfrak{J}^\lambda(\Gamma)$ . A second kind  $(\Gamma, \mathcal{T}_{op})$ -foliation on a topological space  $Z$  is identified with a  $\Gamma^\lambda$  left compatible open atlas  $A^\lambda$  of  $\mathfrak{J}^\lambda(\mathcal{T}_{op})$  such that  $Z = \alpha(A^\lambda)$ . Whence a comparison with two other related notions the interest of which is stressed in Comment 563.2.

1. A  $\Gamma$ -structure on  $Z$  is an element  $C$  of the first cohomology set of  $Z$  with values in the sheaf of groupoids formed by the local jets from  $Z$  to  $\Gamma^\lambda$  (Haefliger [42], cf. also /75/). Then, if  $(f_i, f_{ji})$  is a 1-cocycle in  $C$ , for each pair  $(f_i, f_j)$  of charts and each  $x$  in the intersection  $U_{ji}$  of their sources, there is given an invertible local jet  $\gamma_{ji}^x$ , namely  $j_x^\lambda f_{ji}$ , such that

$$\gamma_{ji}^x \cdot j_x^\lambda f_i = j_x^\lambda f_j, \quad \gamma_{ki}^x = \gamma_{kj}^{x'} \cdot \gamma_{ji}^x \quad \text{where } x' = f_{ji}(x),$$

the map  $x \mapsto \gamma_{ji}^x$  is continuous on  $U_{ji}$ .

580.1... It follows that the set  $A^\lambda$  of all local jets  $j_x^\lambda f_i$ ,  $x \in \alpha(f_i)$ , defines also a second kind  $(\Gamma, \mathcal{F}_{\text{op}})$ -foliation on  $Z$ ; but the data of  $C$  is more precise, since it not only requires the existence of a jet  $\gamma$  with  $\gamma \cdot j_x^\lambda f_i = j_x^\lambda f_j$  (as in a  $(\Gamma, \mathcal{F}_{\text{op}})$ -foliation), but it makes a coherent choice among all such jets. If  $\Gamma$  is a subpseudogroup of the category  $\mathcal{C}^r$  of  $r$ -differentiable manifolds, a  $\Gamma$ -foliation [42] is a  $\Gamma$ -structure on an  $r$ -manifold  $Z$  whose charts  $f_i$  are submersions; then it is equivalent to a regular  $(\Gamma, \mathcal{C}^r)$  foliation (Example 1 page 582).

2. Let  $\Gamma$  be a downward closed subpseudogroup of the pseudogroup  $\Lambda_B$  of local  $r$ -diffeomorphisms of an  $r$ -manifold  $B$ , which contains all the identities.  $M = (B, \Gamma)$  is called a *manifold scheme* (van Est [164]) and  $\Gamma$  its set of *transitions*.  $M$  is also characterized by the data of the groupoid of local jets  $\mathfrak{J}^\lambda(\Gamma)$ , which is an open subgroupoid  $\Gamma^\lambda$  of  $\mathfrak{J}^\lambda(\Lambda_B)$  containing all the identities;  $\Gamma$  is the set of solutions of  $\Gamma^\lambda$ . The inductive limit of the functor  $\Gamma \hookrightarrow \mathcal{F}_{\text{op}}$  is the quotient of  $B$  by the relation

$$x \sim \gamma(x) \text{ for each } \gamma \in \Gamma, x \in \alpha(\gamma);$$

it is denoted by  $\text{Top} M$  in [97]. Let  $\rho: B \rightarrow \text{Top} M$  be the surjection.

If  $M' = (Z, \Gamma')$  is another manifold scheme, a set  $A$  of local  $r$ -diffeomorphisms from  $Z$  to  $B$  defines a morphism  $M' \rightarrow M$  iff  $A$  is a  $(\Gamma, \mathcal{C}^r)$ -foliation on  $Z$ , with  $A\Gamma' \subset A$ . Then, by quotient,  $A$  defines a map  $a: \text{Top} M' \rightarrow \text{Top} M$  such that  $\rho f$ , for each  $f \in A$ , is a restriction of  $(Z \xrightarrow{f} \text{Top} M' \xrightarrow{a} \text{Top} M)$ .

581.1.  $\mathcal{C}^-$  must satisfy conditions (2) and (3).

581.2. Homomorphism means  $r$ -differentiable map.

582.1. It is the converse which is proved in Example 2: a  $\mathcal{B} \# \mathfrak{F}$ -foliation admits an underlying second kind foliation.

584.1. A topological groupoid is an internal groupoid in  $\mathcal{F}_{\text{op}} / 92/$ .

585.1. This order induces an order on  $\mathfrak{Y}/\rho$ , strictly finer than the quotient order of  $\mathfrak{Y}$ .

585.2.  $\mathfrak{Y}'$  and  $H'$  are regularly ordered groupoids, but not preinductive groupoids. A completion of  $H'$  is constructed in /75/ (section 3).

585.3 ¶ It is not an inductive class (joins may not exist).

586.1+ *The holonomy groupoid and the transverse structure:*

Transverse local jets and the holonomy groupoid  $\tilde{H}'$  are introduced in /45/. They are the basic tools for studying the transverse structure of a foliation. Let us give some applications:

1. *Transverse morphisms:* The quotient scheme of a foliated manifold recently constructed by Van Est ([97], Section 4.1) reduces to its holonomy groupoid. Similarly, if  $(T, T')$  is a locally simple foliation on  $E$ , its holonomy groupoid  $\tilde{H}'$  determines the  $(r=0)$  manifold scheme  $Q_E = (V_E, H')$ , where  $V_E$  is the disjoint sum of all the transverse spaces  $\check{U}$ , with  $U$  a simple open of  $E$ , and  $H'$  is the groupoid of holonomy isomorphisms. Now the identities of simple opens  $U$  also generate a manifold scheme  $M_E$  on  $E$ , and the set of all the canonical maps  $U \rightarrow \check{U}$  defines a morphism  $q_E: M_E \rightarrow Q_E$ ; or (equivalently, according to Comment 580.1) the second kind  $(H', \mathcal{F}_{\text{op}})$ -foliation on  $E$  underlying  $(T, T')$ ; so  $Q_E$  is the *quotient scheme* of  $(T, T')$ .

If  $(T_1, T'_1)$  is a locally simple foliation on  $E_1$ , a morphism  $A: Q_{E_1} \rightarrow Q_E$  of manifold schemes is given by an atlas  $A^\lambda$  of the category of local jets  $J^\lambda = J^\lambda(\mathcal{F}_{\text{op}})$ , left compatible with  $\tilde{H}'$  and closed under the action of  $\tilde{H}'_1$  (or by a second kind  $(H', \mathcal{F}_{\text{op}})$ -foliation on  $V_{E_1}$ );  $A$  defines a continuous map  $\check{E}_1 \rightarrow \check{E}$  (which may not come from a map:  $E_1 \rightarrow E$ ). Such a morphism  $A$  is called a *transverse morphism* from  $(T_1, T'_1)$  to  $(T, T')$ . The category of transverse morphisms between locally simple foliations is isomorphic to the full subcategory of the category of atlases of  $J^\lambda$  with objects the holonomy groupoids.

2. *The differentiable holonomy groupoid:* Pradines [149, 130] has equipped the holonomy groupoid  $\tilde{H}'$  of a foliated manifold with a differentiable structure for which it becomes a differentiable groupoid with  $[\beta, \alpha]: \tilde{H}' \rightarrow \tilde{H}'_0 \times \tilde{H}'_0$  an immersion. More generally, he gives a universal characterization of the differentiable holonomy groupoid of a QF-manifold [153]; that makes up the link with manifold schemes.

Recently, Connes [108] has considered this differentiable holonomy groupoid  $\tilde{H}'$  of a foliated manifold (with a different, but equivalent, description) and applied to it his general theory of integration based

586.1 ... on transverse measures on a measurable groupoid. His main result is an Atiyah-Singer Index Theorem for an elliptic operator on a leaf of a measurable foliation of a compact manifold. He also compares transverse measures on  $\tilde{H}'$  and transverse measures to the foliation in the sense of Plante [147], Ruelle and Sullivan [158].

3. A categorical construction of a foliation with a given finite holonomy groupoid is made by Joubert [50] (cf. Comment 449.2).

587.1.  $E^*(\omega)$ , constructed in /45/, shows how to replace a locally simple foliation by a simple one. It is used e. g. in the Stability Theorem.

588.1. The morphisms of  $\mathbb{C}/r$  may be identified with the irreducible pointed pure chains. The order on  $\mathbb{C}$  does not give an order after quotienting by  $r$ ; its quotient relation  $\rho$  only generates a preorder, and  $r'$  is the congruence on  $\mathbb{C}/r$  generated by  $\rho$ . The proof that there exists a quotient groupoid of  $\mathbb{C}/r$  by  $\rho$  lies on the fact that  $\mathbb{C}/r$ , considered as a subclass of  $\mathbb{C}$  and equipped with the induced order, is a functorially ordered groupoid.

590.1. Each path of  $F$  is «included» in a chain of  $\mathbb{C}_{\mathfrak{R}(F)}$ . Conversely, if the elements of  $\mathfrak{R}(F)$  are simply connected, each chain from  $x$  to  $x'$  contains a path from  $x$  to  $x'$ . It follows that  $\mathbb{C}_{\mathfrak{R}(F)}$  is then (isomorphic to) the fundamental groupoid of  $F$ , and  $\mathbb{C}_{\mathfrak{R}(x)}$  to the fundamental group. A fortiori,  $\tilde{E}_{\mathfrak{R}(F)}(x)$  is the universal covering of  $F$ .

593.1. This stability theorem is indicated without proof in /45/, with the assumption  $T'$  regular (i. o. Hausdorff). It generalizes the stability theorems for foliated manifolds (/19/ and Reeb [75]). Haefliger [42] adapts this theorem to  $\Gamma$ -structures. Cf. also comments of O, I.

598.1.  $R_i$  est le saturé de  $w_i$  dans  $A_i$  i. o.  $= w_i$ .

As it is said,  $w_i$  would be saturated in  $A_i$ , so that  $A_i$  might not contain the closure of  $w_i$  (Condition 1).

613.1.  $E^*(F_I)$  has not been defined. It is obtained by glueing together the spaces  $E^*(w_i)$ , where  $w_i$  are simple opens which cover  $F_I$  and each of which  $F_I$  intersects as an elementary transversal space.

618.1. For locally trivial groupoids, cf. Comment 642.1.

The proof comes from the fact that the groupoid of all  $r$ -jets is locally trivial.

618.2. It's a particular case of the equivalence between continuous actions of locally trivial groupoids, and fibre bundles /50/.

623.1. R. pour un certain  $k \leq r$ , on a  $\gamma_k(z') \in F$  i. o. pour  $k = r$ , on a  $\gamma_r(z') \in F$ .

623.2. Add irréductibles.

As the riemannian space  $E$  is reducible, there exists two supplementary foliations satisfying the hypotheses of the theorem (cf. de Rham [157]).

624.1. For the definitions, cf. /6, 28/.

625.1. R. différentiable i. o. topologique.

#### ON /92/ : CATÉGORIES TOPOLOGIQUES.

The article is devoted to the study of topological categories, in the sense *internal* (more precisely, structured) *categories in the category*  $\mathcal{T}_{op}$  of topologies. The first part uses results on internal categories given in O, III-1; but, as the main definitions are recalled, it may be read independently from the general theory. The more original second and third parts are centered on topological problems linked with orders: «quasi-uniform» structure of a microtransitive category, ordered and quasi-topological category of local sections of a topological category and its category of local jets. That is why this paper is included here, with applications of orders, i. o. in O, III (with papers on internal categories), or in O, I (with papers on differentiable categories).

627.1. The definition of a structured (or concrete internal) category is recalled in Comment 450.3.

628.1. Properties 1, 2, 3, 4 are equivalent to the fact that  $\theta: \mathcal{T}_{op} \rightarrow \mathcal{Set}$  is an initialstructured, hence also a finalstructured, concrete transportable functor (or a «topological functor» in Herrlich's terminology, very confusing here).

628.2.  $T'$  is a  $\theta$ -substructure of  $T$  (defined in /66/) iff  $T'$  is an initial

structure for the data  $(\theta(T') \hookrightarrow \theta(T), T)$ .

628.3.  $\hat{T}$  is a  $\theta$ -quotient structure of  $T$  by  $r$  (also defined in /66/) iff  $\hat{T}$  is a final structure for the data  $(T, \theta(T) \twoheadrightarrow \theta(T)/r)$ .

629.1. The «solid topology functor»  $\phi_g$  is a right adjoint of  $\theta$  and the «discrete topology functor»  $\phi_d$  is a left adjoint.

629.2. An inductive category is *completely right regular* if  $Ee: e \rightarrow E$ , for each objects  $e, E$  with  $e < E$  (cf. O, II-1, Comment 143.1).

629.3.  $\overline{\theta}$  is to be read: is a  $\theta'$ -substructure of .

629.4. A topological category (resp. groupoid) is just an internal category (resp. groupoid) in  $\mathcal{T}_{op}$ .

629.5+ *Motivations. Examples. Applications:*

They lack in this very general paper. In fact, Charles introduced topological categories and groupoids, and their actions, in the fifties, to solve concrete problems of Topology and Differential Geometry; that is made clear by the first papers on the subject /44, 50/.

The *motivating examples* are the following ones:

1. The topological groupoid  $HH^{-1}$  of isomorphisms from fibre to fibre of a (locally trivial) fibre bundle  $E(B, F, G, H)$ , and its action on  $E$  (/28/, where the topology is not explicited, /44/); it led to the theory of locally trivial categories /50/ (Comment 642.1).

2. Topological groupoids of local jets, implicitly used in /32, 39, 40/, which suggested the construction of the topological category of (atomic) local jets, or germs, of a local category over  $\mathcal{S}et$  in /53/; for instance, the holonomy groupoid of a foliation with the etale topology /54/ (Comment 586.1). This groupoid is also a topological one for the more elaborate structure defined by Pradines [153].

3. Topological categories underlying a differentiable category /50/; the theory of Lie groupoids, of the differentiable categories of infinitesimal jets, and of their actions are the core of Differential Geometry as it was conceived by Charles /32-48, 78, 101, 103, 116/.

4. Topological pseudogroups of transformations, considered in /42/ (cf. also Bourdaud [98], Abd-Allah & Brown [90]).

5. The topological fundamental groupoid of a topological space /111/

629.5 ... which Charles defined in his lectures in the fifties (cf. also Brown & Danesh-Naruie [101]).

The essential paper /50/ contains the formal definitions of a topological category, of a differentiable category, of their actions, though these notions are considered without the terminology in older papers e. g. /44/. Its Theorem 1 proves that the groupoid of isomorphisms of a topological category  $C$  is an open topological groupoid when  $C$  is a differentiable category or when  $C$  is «regular» in the sense:  $C$  becomes a foliated manifold for the foliations defined by the source and by the target maps. But the main part of /50/ is devoted to locally trivial categories.

Several results on topological categories are obtained in /66, 102, 112/ as applications of the theory of internal categories. Most of them are recalled here. In /81/, another construction of the (quasi-)topological category of local sections is given (it is summed up in /104, 105/). Topological actions (i. e. discrete fibrations in  $\mathcal{T}_{ap}$ ) are studied in /113/ (O, I).

In recent years the theory and the applications of *topological groupoids* have been much developed (while still few papers deal with general topological categories). For a bibliography up to 1975, we refer to Brown & Hardy [102], and for the works on Lie groupoids to the comments of O, I. We'll just point out some promising directions:

1. *General constructions*: Brown and his students adapt to topological groupoids the basic results of the theory of groupoids and topological groups [102, 103, 104, 113, 144]: quotient and free topological groupoids (defined here in Section 2);  $G$ -spaces and covering groupoids (i. e., actions of a topological groupoid  $G$  and the associated discrete topological fibration, in /50, 59, 78, 111/); universal covering groupoids (cf. also Pradines [149]). The cohomology of topological groupoids is studied by Mackenzie [140] and Westman [168]. Haefliger constructs the *classifying space of a topological groupoid* [126] which leads to a homotopic classification of  $\Gamma$ -structures (Comment 563.2); cf. also Puppe & Hardy [127].



629.5... 2. *Applications to measure theory: An ergodic* (or measured) *groupoid* is a Borel groupoid (internal in the category of Borel spaces) equipped with a quasi-invariant class of measures; a *virtual group* is a class of equivalent ergodic groupoids. These notions were introduced by Mackey [141] to get a notion of virtual subgroup of a separable locally compact group  $G$  bearing the same relationship to ergodic actions of  $G$  as do the closed subgroups to transitive actions. Following his lead, several authors generalized the theory of Haar measures to locally compact groupoids. Seda [159] and Westman [167] define systems of Haar measures on the  $\alpha$ -fibres while Lengagne [137] adopts a more global approach. I. o. fixing a class of measures Connes [108] considers the *transverse measures* on an ergodic groupoid to develop a general integration theory, with applications to foliations (Comment 586.1). In [154] (which contains an extensive bibliography), Ramsey unifies Mackey and Connes methods in proving that an ergodic groupoid is similar to a locally compact groupoid. Renault [156] associates a  $C^*$ -algebra to a locally compact groupoid with a chosen system of Haar measures  $G$ , so that the unitary representations of  $G$  are in 1-1 correspondence with the non-degenerate representations of its  $C^*$ -algebra.

4. *Applications to foliations*: cf. Comments 563.2, 586.1.

630.1. If  $C$  is a topological category and  $I$  a category, the category of functors  $C^I$  is a topological category for the «product topology», when a natural transformation  $I \rightarrow C$  is looked at as a functor  $\Phi: I \rightarrow \square C$  ( $\simeq C^2$ ), or as a family  $(\Phi(f))_{f \in I}$ .

631.1. It follows from general theorems on internal structures /106/ that these functors are concrete functors lifting projective limits.

631.2.  $m^*(G')$  consists of the triples  $(u', u, f)$ , where  $u, u'$  are in  $\theta(T')$  and  $f: m(u) \rightarrow m(u')$  in  $G$ .

632.1+ *Germes of categories*:

Charles used group kernels and their local actions in his earlier work /6/, to define locally homogeneous spaces. Another motivating

632.1... example of category kernel occurs in the categorical approach to optimization problems developed in [117]: the morphisms are (classes of) measurable maps from a variable closed interval of  $\mathbb{R}$  to  $\mathbb{R}$ ; the composition is by «juxtaposition of the graphs», and the topology is the compact-open topology. Local actions of category kernels («noyaux d'espèce de structures») are also defined in [117], as a frame for axiomatizing Bellman's theory.

It follows from abstract existence theorems /100, 106/ that the subcategory of topological categories (resp. groupoids) is reflective in the category of category kernels; and the category of actions of topological categories is reflective in the category of local actions (Bednarz [95]); but the reflectors may not be 1-1.

Germes of categories (that are equivalence classes of pointed category kernels) and *infinitesimal* germes of differentiable categories are used in /101/.

In [149], Pradines considers germes of differentiable groupoids, and their holonomy groupoid and he constructs an obstruction to the globalization of a germ of functor; that helps him to develop a Lie theory for differentiable groupoids ([150, 151], Pourreza [148], Tapia [162]) in which Lie algebras are replaced by *Lie algebroids* (i. e. vector bundles with a sheaf of algebras and some extra structure; cf. also /48/); e. g. the third Lie Theorem becomes: the category of differentiable groupoids with simply connected  $\alpha$ -fibres is equivalent to the category of Lie algebroids.

633.1.  $\mathcal{R}$ . (resp. quasi-quotient topologique, resp. une catégorie quasi-quotient topologique) de  $e$  i.o. de  $e$ .

633.2. Quasi-quotient structures are semifinal structures (cf. e. g. Tholen [163]), while quotient structures are final structures.

634.1.  $\mathfrak{M}$  is the category of small sets,  $\hat{\mathfrak{M}}$  the category of large sets.  $\hat{\mathfrak{M}}$  is just considered to apply the Adjoint Functor Theorem under the form given in /100, 102, 108/, with recourse to an auxiliary larger universe. However, in Theorem 1, the existence of  $\hat{\mathfrak{M}}$  is not necessary: the proof is easily adapted to show the conditions of Freyd's Theorem

(or Remark 3, page 155, O, IV-1) are satisfied.

634.2. In a modern terminology:  $\mathcal{F}(\mathcal{J})$  (or  $\mathcal{Cat}(\mathcal{Top})$ ) is a reflective subcategory of  $\mathcal{N}(\mathcal{J})$ , and the topological category freely generated by  $(G, T)$  is over the category  $N(G)$  freely generated by  $G$ .

637.1. R.  $r \times r$  i. o.  $r$  (Cf. O, III-1, Comment 203.1.)

A construction of quotient topological groupoids, and of the free topological groupoid on a topological graph is given in Brown & Hardy [102] and in Brown & Morris [103] respectively.

637.2. Cf. /100/, Section 4, Theorem 3 and Corollary (in O, III-1).

638.1. A  $(\mathcal{F}(\mathcal{J}^e), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{J}}^e), \mathcal{F}(\hat{\mathcal{J}}))$ -projection is a morphism  $\hat{v}_e: e \rightarrow e_c$  of  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{J}})$  with  $e_c$  in  $\mathcal{F}(\hat{\mathcal{J}}^e)$  through which any morphism  $e \rightarrow e'$  with  $e'$  in  $\mathcal{F}(\mathcal{J}^e)$  factorizes. Informally,  $e_c$  is a reflection of the small  $e$  into small compact categories, except that  $e_c$  may be large. The proof is still another application of the Adjoint Functor Theorem based on two universes of /100, 102/. In the compact case, the question is whether a more constructive proof could not show that  $e_c$  is small.

639.1+ *Uniform categories:*

An object of  $\mathcal{F}(\mathcal{J}^u)$  (resp.  $\mathcal{F}(\mathcal{J}^{uc})$ ) is a category  $C$  and a uniform (resp. a complete uniform) structure on  $C$  whose underlying topology makes of  $C$  a topological category. It is not a (complete) uniform category in the sense: internal category in the category of (complete) uniform spaces.

In [136], Lengagne obtains the analogue of Theorem 3 for uniform categories: Each small topological category  $C$  freely generates a small uniform category; to a small uniform category  $E$ , there is associated a (eventually large) complete uniform category  $\hat{E}$ , its *uniform completion*, through which factors any small uniform functor  $E \rightarrow E'$  with  $E'$  complete.

640.1.  $\mathcal{L}(\mathcal{J}^u)$  is the join category. It's one of the last papers in which Charles uses this cumbersome reduction of an adjoint functor to a reflection (cf. O, III-1, Comment 152.1).

642.1+ *Locally trivial categories:*

Microtransitive categories are introduced here, to provide for an

642.1 ... appropriate setting to study uniform structures on topological categories. Proposition 8 says that a topological category  $C$  is microtransitive if, for each object  $e$ , the objects  $e'$  close enough to  $e$  are linked to  $e$  by a small isomorphism  $e \rightarrow e'$ . If, more precisely there exist a neighborhood  $U$  of  $e$  in  $C_0$ , and a choice of isomorphisms  $s_{e'}: e \rightarrow e'$  for each  $e'$  in  $U$  such that  $e' \mapsto s_{e'}$  be continuous, then  $C$  is called a *locally trivial category* /50/. In [118], we prove that sufficient conditions for a microtransitive category  $C$  to be locally trivial may be deduced from selection theorems for set-valued maps (Michael [142]). For instance, it is sufficient that the topology of  $C_0$  be countable and regular and that of the groupoid  $C_Y$  be first countable. So a differentiable category, or a metrizable compact category, is microtransitive iff it is locally trivial.

The basic examples 1, 2, 5 of Comment 629.5 are locally trivial categories. The theory of locally trivial categories is developed in /50/ and, without the name, in /44/; essentially a 1-1 correspondence  $G \mapsto H_G$  is constructed between locally trivial groupoids and (locally trivial) fibre bundles; and it is extended into a 1-1 correspondence between actions of  $G$  and associated to  $H_G$  fibre bundles. For instance, that reduces the problem of restricting the structural group of a fibre bundle to the construction of locally trivial subgroupoids of a locally trivial groupoid.

642.2. The groupoid  $C_Y$  of isomorphisms of a topological category  $C$  is not always a topological groupoid: its inversion may not be continuous. Conditions for it to be are given in /50/ (cf. Comment 629.5).

If  $C$  is compact, then  $C_Y$  is a closed topological subgroupoid of  $C$ .

645.1. R. elle est i.o. elle .

646.1. R.  $h \neq e \in C_0$  i.o.  $e \in C_0$  .

646.2 + On quasi-uniform structures :

The topology of a topological group is uniformizable. Charles introduced quasi-uniform spaces to adapt this result to some topological categories, e. g. microtransitive groupoids (hence fibre bundles).

A quasi-uniform space may be seen as a coherent family of uniform

646.2... structures on the sets of a partition of  $E$ . This concept which unites topologies (partition into singletons) and uniform spaces (1 member partition) has not been much developed. Palias [145, 146] adapts the metrization theorems in this frame, thanks to a similarly defined notion of *quasi-metric*. Cordier [110] gives a fine construction of an internal Hom in the category  $\mathcal{Q}$  of quasi-uniform spaces, such that the functors  $\cdot \times U$  and  $Hom(U, \cdot)$  be adjoint for  $U$  quasi-discrete; so the initialstructured concrete category  $\mathcal{Q}$  is closed and «partially» cartesian closed.

Several generalizations of uniformities have been studied. The present quasi-uniform spaces are not to be confused with Csaszar's ones [111]; nor with the *uniform convergence spaces* of Cook & Fischer [109] which bear the same relationship to uniform spaces as convergence spaces (that is, quasi-topologies /81/) do to topologies; i. e., the filter of entourages is replaced by an ideal of filters. The category of *neamess spaces* (Herrlich [129]) is an initialstructured concrete category which englobes topologies and uniform spaces (as does  $\mathcal{Q}$ ), but it has no clear link with  $\mathcal{Q}$ .

647.1. It says that  $\mathcal{T}_{op}$  is a coreflective subcategory of  $\mathcal{Q}$ .

649.1. So  $\mathcal{Q}$  is an initialstructured concrete category over  $\mathcal{S}et$ .

650.1.  $\mathbb{M}_0$  is not useful; cf. Comment 634.1.

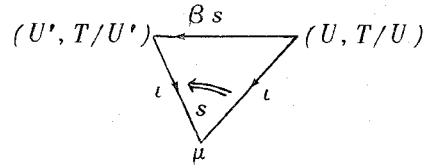
653.1. Idem.

660.1 + *Local sections and generalizations* :

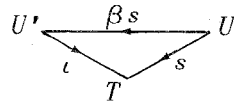
1. Geometrical motivations led to the category  $S(\mu)$  of local sections of the topological category  $\mu$ . A locally trivial groupoid  $G$  is characterized by the existence, for each object  $e$ , of a local section  $s$  around  $e$  with  $\beta s$  constant on  $e$ . If  $G$  is an  $r$ -differentiable groupoid, the  $r$ -jet at  $e$  of such an  $s$  is an  $r$ -th order connection /48, 101/. The composition of non-holonomic  $r$ -jets /41/ is deduced from the composition of local sections. More generally, the definitions of the prolongations of a differentiable groupoid or a fibre bundle /41, 101/ suggest the alternative description of  $S(\mu)$  given in /81/. The pseudogroup of invertible local sections of a locally compact groupoid  $G$

660.1... is the semigroup of G-sets recently used by Renault [156].

2. Let  $\mu = (C, T)$  be a topological category. A local section  $s$  from  $U$  to  $U'$  may be identified with the morphism of topological diagrams



(in  $\mathcal{F}(\mathcal{J}) = \text{Cat}(\mathcal{J}_{\text{op}})$ ) between insertions of open in  $C_0$ , discrete subcategories. Then the category  $S(\mu)$  is identified to a full subcategory of the category  $\text{Diag}_\mu$  of topological diagrams in  $\mu$  (which is a subcategory of the category of squares of the 2-category  $\text{Cat}(\mathcal{J}_{\text{op}})$ ). Hence the 2-category of internal diagrams of an internal category offers a good generalization of the category of local sections. Notice that the local section  $s$  may also be identified to a morphism



of the fibration over  $\mathcal{J}_{\text{op}}^{\text{op}}$  associated to  $\mu$ , which leads to the construction of  $S(\mu)$  given in /81/.

3. The construction of  $S(\mu)$  remains valid if  $U$  and  $U'$  are any subsets of objects i. o. open ones; the corresponding larger category is still a full subcategory of the above category of topological diagrams. For instance, if  $U$  and  $U'$  are paths, we speak of path-section; the path connections defined by Virsik [166] in a differentiable groupoid are their infinitesimal analogue. Dakin [113] considers path sections in a topological groupoid and calls them lifting functions.

661.1. The properties of quasi-topologies recalled up to Theorem 10 are proved in /81/, to which we refer for general comments.

662.1. Cf. /81/, Proposition 4.

662.2. Cf. /81/, Theorem 3 (in which the topologies are replaced by quasi-topologies).  $P$  is a cartesian closed category (Comment 683.1).

666.1. An inductive functor is regular iff it preserves the pseudoproducts

$f e$  and  $e' f$  where  $e$  and  $e'$  are objects lesser than  $\alpha(f)$  and  $\beta(f)$ .

667.1.  $T_f$  is the étale topology.

667.2 ¶ The second assertion does not seem valid.

667.3 ¶  $r$  is not open for  $\pi'_2$ , nor a fortiori for  $\pi'_1$ . Indeed, it would require that, given a compact  $K \subset K' \subset C_0$ , a continuous map from the compact  $K$  of  $T_0$  into  $T$  extend into a continuous map from  $K'$ . Hence the following proof is not valid.

668.1 ¶ If  $\eta_2$  (resp.  $T_2$ ) coincide with  $\varinjlim \Sigma_x$  (resp.  $\varinjlim \hat{r}\Sigma_x$ ) on  $x'.I.x$ , then  $\eta_2 = \pi'_2/r$  (resp.  $T_2 = \hat{r}(\eta_2)$ ), which is not true without further assumptions.

668.2. Proofs are given in /81/.

669.1+ *Infinitesimal prolongations:*

Non-holonomic, semi-holonomic and holonomic prolongations of a (quasi)topological category are defined in analogy with the prolongations of a differentiable category  $C$  or (as a particular case) of a differentiable manifold. These «infinitesimal» prolongations of  $C$  are appropriate quotients of its local prolongations /40, 101, 103, 116/, whose elements are infinitesimal jets. Charles introduced the  $r$ -jets and their composition to get a manageable differential calculus of higher order in manifolds. In the early fifties, he developed the theory of prolongations of manifolds, which gives an intrinsic theory of geometric objects /32-41, 46, 78/. His «coordinate-free» approach has been recently adopted in Synthetic Differential Geometry (Kock [131]).

#### ON /81/: CATÉGORIES QUASI-TOPOLOGIQUES ET PROLONGEMENTS

This course was written at about the same time as /92/, which it complements in proving the properties of the category  $\mathcal{P}$  of quasi-topologies used at the end of /92/. It also indicates another construction of the quasi-topological category of local sections of a (quasi)topological category  $C$ , as a subcategory of the (op)fibration over  $\mathcal{P}$  associated to the internal in  $\mathcal{P}$  category  $C$ ; that is an application of the general method given in the first chapter of the course (reproduced in /104/, O, III-2).

671.1.  $F(X)$  is a locale.

672.1.  $\bar{f}$  does not preserve meets of upper bounded finite families.

672.2+ *The genesis of quasi-topologies :*

If  $T$  and  $T'$  are topologies and if  $T$  is not locally compact, there is no smallest topology on the set  $C(T, T')$  of continuous maps from  $T$  to  $T'$  making the evaluation continuous (Arens [ 91 ]). Choquet [107] already in 1947 suggested to replace topologies by the convergent filters to get a «good» structure on  $C(T, T')$ ; or, in a modern terminology, to extend  $\mathcal{T}_{op}$  into a cartesian closed category. His *pseudo-topologies* are the quasi-topologies in which a filter converges if each finer ultrafilter does (so they are defined by the data of the convergent ultrafilters). The present concept of quasi-topology was defined by Kowalsky [134] under the name of limit-space; they are also called convergence structures. The word quasi-topology comes from my 64 paper [ 27 ], which proves that the category  $\mathcal{P}$  of quasi-topologies is cartesian closed (though this notion was not yet cleared) and because of that, advocates its use in Analysis and Differential Geometry, in particular for getting a manageable differential calculus in non-normable vector spaces. Taking up this idea, several authors developed and refined the theory of quasi-topologies and of other cartesian closed extensions of  $\mathcal{T}_{op}$ ; for more details, cf. Herrlich [129] and Comment 713.1 in O, III-2.

The present quasi-topologies are not to be confused with the quasi-topologies introduced in 1963 by Spanier [160] for use in Algebraic Topology, and which also form a cartesian closed category  $\mathcal{Q}$  containing  $\mathcal{T}_{op}$ ; such a quasi-topology on a set  $X$  is the data, for any compact space  $K$ , of a set of maps  $K \rightarrow X$  to be thought of as the continuous maps from  $K$  to  $X$ .

Notice that  $\mathcal{P}$  has also its use in Algebraic Topology; cf. e. g. Machado [138, 139]. However topologists often prefer keeping into the topologies' realm and working with the cartesian closed subcategory of  $\mathcal{T}_{op}$  whose objects are the Kelley spaces [34].



- 673.1. The image of  $\pi$  by  $f: X \rightarrow X'$  is a final structure for the data  $(\pi, f)$  and the inverse image of  $\pi'$  by  $f$  is an initial structure for the data  $(f, \pi')$ .
- 674.1. So  $\hat{\theta}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Set}$  is a transportable concrete functor.
- 674.2.  $\mathcal{I}_{\text{op}}$  is identified to a reflective subcategory of  $\mathcal{P}$ .
- 676.1. It means that  $\hat{\theta}$  lifts equalizers /63, 66/.
- 677.1. Cf. the Existence of colimits Theorem 2-2 /100/ (O, III-1).
- 677.2. An etale functor which lift products is an initialstructured (hence a finalstructured) functor; so is  $\hat{\theta}$ , according to Propositions 1, 2, 3.
- 679.1+ If  $\pi$  and  $\pi'$  are topologies,  $\lambda = \lambda(\pi', \pi)$  is a pseudotopology (cf. Comment 672.2), introduced by Choquet in [107]; this paper led to the general definition given in [27], where the herein Theorems 3, 4, 5 (that prove  $\mathcal{P}$  is cartesian closed) are established.
- 680.1. A discretely  $\hat{\theta}$ -structured category is the same as a  $\mathcal{P}$ -category (in Eilenberg-Kelly sense [119]), for the cartesian closed structure of  $\mathcal{P}$  (cf. O, III-2, Comment 699.1 for the relation between discretely structured, strongly dominated and enriched categories).
- 683.1+ At the time this paper was written, the theory of closed categories [119] was not yet developed; moreover, Charles still had some reluctance *vs* general adjoint functors. That explains the striking result:  $\lambda_{\pi}$  is coadjoint to  $\pi \times -$ , or equivalently,  $\mathcal{P}$  is cartesian closed is delayed and partially lost in the more technical Theorem 5. It would be more natural to begin with this statement, which implies Theorem 4 (a coadjoint preserves *all* limits) and Theorem 3 (since the evaluation is continuous). Chartrelle adopts this plan in his synthesis [106].
- 686.1. A quasi-topological category is an internal category in  $\mathcal{P}$ . The notion is defined in [27], for translating the theory of prolongations of manifolds done in /33-40, 44/ to manifolds modelled on a non-normable (quasi-)topological vector space.
- 686.2. The proof is the same as the proof of Theorem 1 and its corollaries in /92/.
- 687.1+ *Some recalls from /104/ :*  
 In a modern terminology, the action  $\kappa'$  of  $\mathcal{P}^{op}$  on the category

687.1...  $(\pi, \mathcal{P})^\bullet$  is the small  $\mathcal{P}$ -indexed category associated to the internal category  $C = (C', \pi)$  in  $\mathcal{P}$ ; and  $P'$  is the corresponding fibration. The fibre over  $\pi'$  is the category  $(\pi, \mathcal{P}, \pi')^\bullet$  obtained in equipping the set of quasi-continuous maps  $\pi' \rightarrow \pi$  of the composition:

$$(\eta', \eta) \mapsto \eta' \bullet \eta : x \mapsto \eta'(x) \cdot \eta(x) \text{ iff } \alpha \eta' = \beta \eta.$$

The objects of  $P'$  are the quasi-continuous maps  $\mu' : \pi' \rightarrow \pi \circ \hookrightarrow \pi$ , and its morphisms from  $\mu''$  to  $\mu'$  are the triples  $(\eta, h, \mu')$ , where

$$h : \pi' \rightarrow \pi'' \text{ in } \mathcal{P} \text{ and } \eta : \mu'' \cdot h \rightarrow \mu' \text{ in } (\pi, \mathcal{P}, \pi')^\bullet.$$

The fibration  $P' \rightarrow \mathcal{P}^*$  sends  $(\eta, h, \mu')$  to  $h$ .

The category  $P'$  underlies a  $\mathcal{P}$ -category with  $\lambda^\pi(\mu'', \mu')$  as its object of morphisms from  $\mu'$  to  $\mu''$ ; that is the meaning of the assertion:  $(P', \lambda^\pi)$  is strongly  $\hat{\theta}$ -dominated (O, III-2, Comment 699.1). In fact,  $P'$  is equipped with a finer structure: the  $\lambda^\pi(\mu'', \mu')$  corresponding to all  $\mu'$  and  $\mu''$  over fixed  $\pi'$  and  $\pi''$  glue together, and define on  $P'$  a polyspan indexed by  $\mathcal{P}_o$  (cf. O, III-2, Synopsis n° 6 and Comment 701.1).

689.1. A direct construction of the quasi-topological category  $S$  of local sections is given in /92/ (Theorems 9, 10 and Remark 2, page 668).

#### ON /56/ : ARCHIMÈDE ET LA SCIENCE MODERNE.

This paper is the only «historical» article published by Charles. Even the sparse notes of his last course on «Histoire et Fondements des mathématiques» /129/ are centered on the foundational aspect. Charles was much more interested in the history of ideas than of mathematicians (as the text proves). For this lecture, we collected many informations and we enjoyed reading the original works of Archimedes in Ver Eecke [165].

691.1. Charles, who was born in Strasbourg, was strongly attracted by the mediterranean countries and he made several stays in Italy, to participate in Conferences or to give courses of lectures. He had many italian friends. The last conference he attended to in a foreign country

COMMENTS ON /56/

was the Symposia Mathematica on Algebra omologica, Algebra categoriale, Topologia algebrica in Rome, in March 1969.

692.1. This anecdote was intentional: Charles had been much impressed by the Indian culture during his stay in India in 1955; and he thought Indian and Persian contributions to Mathematics were not sufficiently acknowledged.

694.1. R. peut être i.o. être .

695.1. When he prepared this lecture, Charles conceived a great admiration for Eudoxus in particular for his theory of ratios. It explains the somewhat long development on ratios given here, and which illustrates Charles's conception of history in Mathematics: make the old results clear in translating them in a modern language.

695.2. R. fraction continue i.o. fraction .

## COMMENTS

### SYNOPSIS

The oldest paper /54/ included in this volume is an extensive study of foliated structures, stability problems and supplementary foliations. It provides a good application of the theory of local structures and of ordered categories exposed in O, II-1.

Concrete situations met with in /54/ gave some motivations for the development of /75, 76/, which are a direct sequel of O, II-1. The atlases of a category /75/ (the charts may not be isomorphisms) and the rockets of an ordered category /76/ (or atlases with only «locally» defined changes of charts) have for examples the second kind foliations; they are the basic tools for extending the completion and localization theorems of O, II-1 to ordered categories (i.o. prelocal groupoids). Ordered fibrations and their cohomology /75/ lead to a categorical definition of the transverse structures of a foliation via the ordered holonomy groupoid.

The more recent /92/ is devoted to topological categories. Apart from general theorems on the category of topological categories it defines the microtransitive categories (which generalize locally trivial ones) and their quasi-uniform structures; finally it constructs the ordered and quasi-topological category  $S$  of local sections of a topological category  $C$ . Another construction of  $S$  is indicated in /81/. Local prolongations of  $C$  are obtained as categories of local jets of  $S$ .

/62, 71/ sum up /75, 76/; /56/ is a brief historical paper.

We are going to stress the main results in a modern language. The numbers between brackets refer to the comments. The text freely uses the terminology of the Synopsis of O, II-1.

#### 1. DEFINITIONS OF FOLIATED STRUCTURES.

A.  $G \# G'$ -foliated manifolds (/54/, Sections 3-I and 4-I). Foliated manifolds were introduced in /19/ (in the forties) to account for integral solutions of completely integrable Pfaff systems; their theory, developed by Reeb [75] has recently taken a large extension (563.2; Comments O, I).

COMMENTS

The notion is refined in equipping the leaves and the transverse spaces with richer structures /47, 54/. More precisely, let  $B$  and  $B'$  be  $r$ -manifolds,  $r = 0, 1, \dots, \infty$ ; let  $G$  and  $G'$  be subpseudogroups of the pseudogroups  $\Lambda_B^r$  and  $\Lambda_{B'}^r$ , of local  $r$ -diffeomorphisms (i. e.,  $r$ -diffeomorphisms between opens) of  $B$  and  $B'$  respectively, which contain all the identities.

We get a subpseudogroup  $G \# G'$  of  $\Lambda_{B \times B'}^r$ , by taking all the joins of the local  $r$ -diffeomorphisms of  $B \times B'$  of the form:

$$U \times U' \rightarrow \hat{U} \times \hat{U}': (x, y) \mapsto (g(x), g'_x(y)), \quad \text{with } g: U \rightarrow \hat{U} \text{ in } G \\ \text{and } g'_x: U' \rightarrow \hat{U}' \text{ in } G' \text{ for each } x \in U.$$

A  $G \# G'$ -foliation on a topological space  $E$  is a complete atlas  $A$  right compatible with  $G \# G'$  (in the classical sense of O, II-1); hence  $A$  is a class of homeomorphisms  $f: W \rightarrow V$ , where  $W$  is open in  $E$  and  $V$  in  $B \times B'$ , satisfying the conditions:

(A1)  $(G \# G'). A = A, \cup \alpha(A) = E.$

(A2)  $A \cdot A^{-1} \subset G \# G'.$

(A3)  $A$  is downward and join closed in the local groupoid  $Top_\gamma$  of homeomorphisms between topologies (for the order: restriction to opens).

This definition is given in /54/ in a more general setting. Foliated  $r$ -manifolds correspond to the case  $G = \Lambda_B^r$  and  $G' = \Lambda_{B'}^r$ .

$A$  underlies a local product structure if  $A$  is generated by an atlas  $A'$  right compatible with the pseudogroup generated by  $G \times G'$ ; then  $A'$  also generates a  $G' \# G$ -foliation on  $E$ , said to be supplementary to  $A$ .

**B. Second kind foliations** (/54/, Section 5-I). They are introduced to describe foliations with singularities.

Let  $A$  be a  $G \# G'$ -foliation on  $E$ . Its «transverse structure» is characterized (cf. /47/, Section 2-IV) by the class  $D$  of all joins (in the local category  $Top$ ) of composites

$$W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\pi} U,$$

where  $f \in A$  and  $\pi$  is a restriction to opens of the projection  $B \times B' \rightarrow B$ . This class  $D$  satisfies the conditions:

(A'1)  $G \cdot D = D, \cup \alpha(D) = E.$

(A'2) If  $d \in D, d' \in D$  and  $x \in \alpha(d) \cap \alpha(d')$ , there exists a  $g \in G$  such

that  $gd$  and  $d'$  have a common restriction to opens with  $x$  in its source.

(A'3) 1. If  $d: W \rightarrow U$  is in  $D$ ,  $W \xrightarrow{d} U \hookrightarrow U'$  is in  $D$  for  $U' \in G_a$ ,  $U' \supset U$ .

2.  $D$  is downward and join closed in the local category  $Top$  of topological spaces (with the order: is a restriction to opens).

More generally, if  $E$  is a topological space, a class  $D$  of continuous maps  $d: W \rightarrow U$  where  $W$  is open in  $E$  and  $U$  open in  $B$ , is called a *second kind  $(G, Top)$ -foliation on  $E$*  if it satisfies the conditions (A'1), (A'2) and (A'3). Notice that (A'2) is a «localization» of (A2); it leads to the definition of rockets in /76/.

**C. Equivalent definitions via local jets (580.1).** Let  $J^\lambda$  be the topological category of local jets (of continuous maps, cf. Synopsis O, II-1, Section D-5), equipped with the etale topology.

If  $P$  is a subclass of  $J^\lambda(E, B)$ , where  $E$  and  $B$  are topological spaces, a *solution of  $P$*  is a continuous map  $h: W \rightarrow U$ ,  $W$  open in  $E$  and  $U$  open in  $B$ , such that  $j_x^\lambda h \in P$  for each  $x \in W$ . If  $\Gamma$  is a transformation pseudogroup of  $B$ , the local jets  $j_x^\lambda \gamma$ ,  $\gamma \in \Gamma$ ,  $x \in \alpha(\gamma)$  form an open subgroupoid  $J^\lambda(\Gamma)$  (the *groupoid of local jets of  $\Gamma$* ) of the groupoid  $J_y^\lambda$  of all invertible jets.  $\Gamma$  is included in the set of the invertible solutions of  $J^\lambda(\Gamma)$ , and equal to it when  $\Gamma$  is downward closed in  $Top_y$ .

A  $G \# G'$ -foliation  $A$  on  $E$  may alternatively be defined by the data of a set  $A^\lambda$  of invertible local jets from  $E$  to  $B \times B'$  such that:

$$(A^\lambda 1) \quad J^\lambda(G \# G'). A^\lambda = A^\lambda, \quad \alpha(A^\lambda) = E.$$

$$(A^\lambda 2) \quad A^\lambda \cdot (A^\lambda)^{-1} \subset J^\lambda(G \# G').$$

$$(A^\lambda 3) \quad A^\lambda \text{ is open in } J_y^\lambda.$$

Indeed,  $A^\lambda$  is the set of all local jets of elements of  $A$ , and conversely  $A$  is recovered as invertible solutions of  $A^\lambda$ . These conditions imply that  $A^\lambda$  is an open atlas of  $J_y^\lambda$  (in the sense of /68/).

Similarly, a second kind  $(G, Top)$ -foliation  $D$  on  $E$  is also characterized by the set  $D^\lambda$  of all its local jets, which is a class of local jets from  $E$  to  $B$  satisfying the conditions:

$$(A^{\lambda 1}) \quad J^\lambda(G). D^\lambda = D^\lambda, \quad \alpha(D^\lambda) = E.$$

$$(A^{\lambda 2}) \quad \text{If } \delta \in D^\lambda, \delta' \in D^\lambda \text{ and } \alpha(\delta) = \alpha(\delta') \text{ there exists a (not ne-}$$

COMMENTS

cessarily unique)  $\gamma \in J^\lambda(G)$  such that  $\gamma \cdot \delta = \delta'$ .

(A<sup>λ</sup> 3)  $D^\lambda$  is open in  $J^\lambda$ .

Indeed,  $D$  is recovered as the set of all solutions of  $D^\lambda$  (580.1).

Atlases of a category are defined in /75/ so that  $D^\lambda$  becomes an open atlas of the category  $J^\lambda$  (with non-invertible charts).

For a comparison between second kind foliations,  $G$ -structures, manifold schemes, ... cf. (563.2, 580.1, 586.1).

**D. Locally simple foliations** (/54/, Section 1-I). Let  $D$  be a second kind  $(G, Top)$ -foliation on  $E$ . The sources of the charts  $d$  of  $D$  generate the topology  $T$  of  $E$ , and the sets

$$\bar{d}^{-1}(y) \subset W, \text{ where } d: W \rightarrow U \text{ is in } D, y \in U,$$

generate a finer topology  $T'$  such that:

(F) For each  $x \in E$ , there exists an open neighborhood  $V$  of  $x$  in  $T'$  on which  $T$  and  $T'$  induce the same topology.

More generally, a pair  $(T, T')$  of topologies on a set  $E$  which satisfies (F) is called a *topological foliation on  $E$* . Let us suppose that  $T'$  is locally connected; its components are called the *leaves*; they form the transverse space  $\check{E}$ , which is equipped with the quotient topology of  $T$ . A leaf  $F$  is *proper* if  $T$  and  $T'$  induce the same topology on  $F$ .

$(T, T')$  induces a topological foliation on each open subspace  $U$  of  $T$ ; let  $\check{U}$  be its transverse space;  $U$  is said to be *distinguished* if the canonical map  $\check{U} \rightarrow \check{E}$  is a homeomorphism onto an open subspace of  $\check{E}$ .

The foliation is *simple* if each point  $x$  of  $E$  has a basis of distinguished neighborhoods in  $T$ . It is *locally simple* if each  $x$  has a simple distinguished neighborhood (/54/, Section 1-I).

For instance, the topological foliation underlying a  $G \# G'$ -foliation or a «regular» second kind foliation is locally simple; that underlying a fibre bundle is simple.

## 2. HOLONOMY AND STABILITY OF LOCALLY SIMPLE FOLIATIONS.

Charles introduced the holonomy groupoid to describe the transverse

structure of a foliation upon which the stability of a leaf depends. It is defined as soon as the foliation is locally simple; and it is the essential tool to analyze the structure around a leaf.

**A. The holonomy groupoids** (/54/, Section 2-II). Let  $(T, T')$  be a locally simple foliation on  $E$ . A *small pure chain* is a pair  $(U, U')$  of simple opens one of which is contained in the other so that the canonical map between their transverse spaces be a homeomorphism. A *pure chain* from  $U_1$  to  $U_n$  is a sequence  $\Gamma = (U_1, \dots, U_n)$  where  $(U_i, U_{i+1})$  is a small pure chain for  $1 \leq i < n$  (/75/, Section 3, which simplifies the definition given in /54/); the canonical homeomorphism  $\gamma$  from  $\check{U}_1$  to  $\check{U}_n$  associated to  $\Gamma$  is called a *holonomy isomorphism from  $U_1$  to  $U_n$* , denoted  $(U_n, \gamma, U_1)$ . The holonomy isomorphisms form a groupoid  $H'$  whose objects are the simple opens.  $H'$  is a regularly ordered groupoid for:

$$\begin{aligned} (U', \gamma, U) < (W', \gamma', W) \text{ if } U \text{ is distinguished in } W, \\ U' \text{ is distinguished in } W' \text{ and} \\ (\check{U} \xrightarrow{\text{can}} \check{W} \xrightarrow{\gamma'} \check{W}') = (\check{U} \xrightarrow{\gamma} \check{U}' \xrightarrow{\text{can}} \check{W}'). \end{aligned}$$

The *holonomy groupoid  $\tilde{H}'$*  is the groupoid of local jets of  $H'$ . It is constructed as follows: The groupoid  $H'_*$  of *pointed holonomy isomorphisms* is the subgroupoid of  $H' \times (E \times E)$  consisting of the triples

$$(\tilde{\gamma}, x', x) \text{ such that } \tilde{\gamma} = (U', \gamma, U) \in H', \quad x \in U, \quad x' \in \gamma(\check{x}),$$

where  $\check{x}$  is the leaf of  $U$  containing  $x$ . The groupoid  $\tilde{H}'$  is the quotient groupoid of  $H'_*$  by the equivalence:

$$(\tilde{\gamma}, x', x) \sim (\tilde{\gamma}', x', x) \text{ iff there exists } (\tilde{\gamma}'', x', x) \in H'_* \text{ such that} \\ \tilde{\gamma}'' < \tilde{\gamma} \text{ and } \tilde{\gamma}'' < \tilde{\gamma}' \text{ in } H'.$$

$\tilde{H}'$  is a topological groupoid for the etale topology, and also for a finer one (586.1). It characterizes the transverse structure of the foliation, whence its use in several problems (586.1).

The *holonomy group at  $x$*  is the full subgroup  $\tilde{H}'_x$  of  $\tilde{H}'$  with object  $x$ . It is isomorphic to  $\tilde{H}'_x$ , for each  $x'$  on the same leaf as  $x$ . This group is trivial iff the foliation is simple, so that it measures the «obstruction to simplicity».



**B. Unfoldings** (/54/, Section 3-II). To prove some results (e. g. on stability) it is often easier to replace the locally simple foliation  $(T, T')$  by a simple one. An *unfolding* of  $(T, T')$  over a leaf-closed open  $O$  is a simple foliation which is etale over  $O$  and whose leaves are covers of leaves of  $O$ .

In particular, if  $O$  is the leaf-closure of a simple open  $W$ , there is constructed:

- The *weak unfolding*  $E^*(W)$ , which consists of jets of maps

$$U \longrightarrow \check{U} \xrightarrow{\gamma} \check{U}' \xrightarrow{can} \check{W},$$

where  $(U', \gamma, U)$  is a holonomy isomorphism and  $U'$  is distinguished in  $W$ . The leaf  $F^*$  of  $E^*(W)$  over the leaf  $F$  of  $E$  is a normal covering of  $F$  whose automorphism group at  $x^*$  over  $x$  is the holonomy group  $\tilde{H}'_x$ .

- The unfolding  $E_{\mathfrak{R}}(W)$  associated to a cover  $\mathfrak{R}$  of  $E$  by simple opens, whose leaves are normal coverings of leaves of  $E$ ; even universal coverings when all the members of  $\mathfrak{R}$  have simply connected leaves.

- The *perfect unfolding*  $\hat{E}(W)$  associated to a tube  $t(W)$  (cf. Section C). If  $\check{W}$  is a manifold,  $\hat{E}(W)$  and  $E^*(W)$  are identical.

More globally, let  $N$  be a transversal subspace; it means  $N$  glues together image-sections of maps  $U \xrightarrow{can} \check{U}$ , where  $U$  is a simple open. The unfoldings  $E^*(N)$ , resp.  $E_{\mathfrak{R}}(N)$ , over the leaf-closure  $O$  of  $N$  are obtained by glueing together unfoldings  $E^*(W_i)$ , resp.  $E_{\mathfrak{R}}(W_i)$  relative to a cover  $(W_i)$  of  $N$  by simple opens.

**C. The main results.**

1. *Stability* (/54/, Section 4-I). Let  $(T, T')$  be a locally simple foliation on  $E$  with  $T$  locally compact. The *Stability Theorem* asserts that, if  $F$  is a compact leaf, if the holonomy groupoid at  $x \in F$  is finite and if  $x$  has a basis of neighborhoods  $U$  with  $\check{U}$  separated, then  $F$  is proper and it has a special basis of leaf-closed neighborhoods (called tubes) the leaves of which are compact.

It is strengthened thanks to a fine analysis of the structure of the *tubes* and *perfect tubes*. A main tool for constructing tubes is the representation of a finite group of local jets at  $b$  of local homeomorphisms of a space

COMMENTS

$B$  as a group of automorphisms of  $B$ .

2. *Supplementary foliations* (/54/, Section 5-II). Two locally simple foliations on  $E$  with the same topology  $T$  are supplementary if they are underlying a local product (Section B-1); then each leaf of one foliation is transversal to the other foliation. A fine theorem states that this necessary condition is also sufficient under some conditions on  $T$  (page 614).

3. *Transverse structures*. In /75/, the ordered groupoid of holonomy isomorphisms is embedded in a regular quasi-inductive groupoid  $\hat{H}'$ . Given an action of  $\hat{H}'$  on a poset  $S$ , a *transverse structure of species  $S$*  is a section over  $H'$  of the corresponding discrete fibration (i. e., a 0-cocycle). Similarly for foliated  $r$ -manifolds, *transversal prolongations* are defined from actions of the groupoid of  $r$ -jets of holonomy. Examples are given in /54, 75/, e. g. riemannian transverse structures. And de Rham's decomposition of a complete reducible riemannian space is generalized to the case of two supplementary foliations  $(T, T')$  and  $(T, T'_1)$  such that the first has a transverse riemannian metric for which each leaf of  $(T, T'_1)$  is complete (page 622).

/54/ ends with an application to the supplementary foliations defined by the simultaneity leaves and the time lines on a universe of relativity theory.

**3. ATLASES. ROCKETS. COMPLETIONS OF ORDERED CATEGORIES.**

**A. Ordered categories** (/75/, Section 2). An *ordered category*  $C$  is an internal category in the category  $Ord$  of posets, such that the orders induced on the Hom sets be trivial. The composition of  $C$  is extended into the *pseudoproduct* (454.1) defined by:

$$(g, f) \mapsto gf = \hat{g} \cdot \hat{f} \quad \text{iff } (\hat{g}, \hat{f}) \text{ is a largest element of the set } \\ \{(g', f') \in C \times C \mid g' < g, f' < f, g' \cdot f' \text{ is defined}\}.$$

$C$  is *regular* if there exist pseudoproducts  $fe: e \rightarrow \hat{e}'$  and  $e'f: \hat{e} \rightarrow e'$ , if  $e$  and  $e'$  are objects lesser than the source and target of  $f$ , and if the pseudoproduct is associative when defined.

A *sub-preinductive category* is an ordered category  $C$  such that a upper-bounded finite family has a meet preserved by the source and target

COMMENTS

maps. A *quasi-inductive category* is an ordered category  $C$  in which each subclass upper-bounded by  $f$  has an  $f$ -aggregate which is preserved by the source and target maps. It is *subinductive* if it is both *subpreinductive* and *quasi-inductive*. And it is *sub(pre)local* if it is *sub(pre)inductive*, and if it satisfies the infinite distributivity axiom.

A regularly ordered category satisfies (P) if:

$$\bigvee fE = f \text{ if } \alpha(f) = \bigvee E, \quad \bigvee E'f = f \text{ if } \beta(f) = \bigvee E'$$

(that is subaggregates of objects are stable under a change of base or under taking image). The (P) inductive categories have been called *strongly regular* in O, II-1 /110/.

**B. The category of atlases of a category** (/75/, Sections 1, 2). The following concept of atlas makes precise the definition: a second kind foliation is an open atlas in the category of local jets (Section C-1).

Let  $C$  be a category,  $B'$  a subgroupoid of  $C$ . A *left  $B'$ -compatible atlas of  $C$*  is a class  $F$  of morphisms of  $C$  (the *charts*) such that

(i)  $B' \cdot F = F, \quad \beta(F) = B'_0.$

(ii) If  $f \in F, f' \in F$  and  $\alpha(f) = \alpha(f')$ , there exists a (perhaps not unique) isomorphism  $g \in B'_\gamma$  satisfying  $g \cdot f = f'$ .

Equivalently: for each  $e \in \alpha(F)$ , the class  $F \cdot e = \{ f \in F \mid \alpha(f) = e \}$  is the class of objects of a component of the comma category  $e \downarrow (B' \hookrightarrow C)$ , and  $\beta(F) = B'_0$ .

Dually we define a *right  $B$ -compatible atlas*. An *atlas  $F$  from  $B$  to  $B'$*  is both a left  $B'$ -compatible and a right  $B$ -compatible atlas, denoted by  $(B', F, B)$  where  $B$  and  $B'$  are subgroupoids of  $C$ .

For instance, the atlases of a group are the classes modulo a subgroup. If  $C$  is a groupoid,  $F$  is an atlas iff  $F \cdot F^{-1} \cdot F = F$ , and then

$$B = F^{-1} \cdot F \quad \text{and} \quad B' = F \cdot F^{-1};$$

if moreover  $B$  and  $B'$  are discrete, the atlas reduces to a  $C$ -set (449.2).

The atlases of  $C$  form a category  $\bar{A}(C)$  whose objects are the subgroupoids of  $C$ . It is a regular quasi-inductive category for the order

$$(B', F, B) < (\hat{B}', \hat{F}, \hat{B}) \text{ iff } F \subset \hat{F}, \quad B \text{ is a full subgroupoid}$$

COMMENTS

of  $\hat{B}$  and  $B'$  a full subgroupoid of  $\hat{B}$ .

$\bar{A}(C)$  admits embedding into:

- the bicategory of distributors: the atlas  $F$  may be looked at as a distributor from  $B$  to  $B'$  whose «structures» from  $e \in B_0$  to  $e' \in B'_0$  are the charts  $f: e \rightarrow e'$  of  $F$ ;
- the category  $Pro C$  of pro-objects of  $C$ , when a morphism of pro-objects is defined as an atlas between functors (O, IV-1, Comment 199.1); the category  $Ind C$  of ind-objects of  $C$ . Whence a concept of *atlas between subcategories* (i.o. subgroupoids) of  $C$ , the changes of charts being zig-zags (449.2).

If  $C$  is a regularly ordered groupoid,  $\bar{A}(C)$  has a regular quasi-inductive subcategory consisting of the *regular atlases*  $F$ , that is the atlases such that  $F(F^{-1}F) \subset F$ ; and if  $C$  is a subpreinductive groupoid the category of weakly complete atlases /68/ is a subinductive subcategory of  $\bar{A}(C)$  (467.2).

**C. Rockets and superrockets** /76/. Atlases were used in /68/, to complete prelocal groupoids. For ordered categories, atlases must be replaced by rockets, i.e. atlases with only local changes of charts (as suggested by the definition of second foliations, Section B-1).

Let  $C$  be a regularly ordered category,  $B'$  a regular subcategory. A *left  $B'$ -compatible rocket* is a class  $F$  of morphisms such that:

(R1)  $\beta(F)$  is cofinal and downward closed in  $B'_0$ , and  $B' \cdot F \subset F$ .

(R2) Two charts  $f$  and  $f'$  of  $F$  with the same source have « $B'$ -isomorphic restrictions», that is: there exist  $\hat{f} < f$  and  $g' \in B'_y$  such that:  $g' \cdot \hat{f} < f'$ .

The rocket is *strict* if the above  $\hat{f}$  has the same source as  $f$ ; and *regular* if  $B' \cdot F \subset F$ . The right  $B$ -compatible rockets are defined dually.

A *rocket*  $F$  from  $B$  to  $B'$  is a triple  $(B', F, B)$  where  $F$  is both a left  $B'$ -compatible and a right  $B$ -compatible rocket, where  $B$  and  $B'$  are regular subcategories which are rockets.

The rockets form a category  $F(C)$ . The subcategory  $F^r(C)$  of reg-

COMMENTS

ular rockets of  $C$  is equipped with the order:

$$F < \hat{F} \text{ iff } F \subset \hat{F} \text{ and } B, B' \text{ are full downward closed subcategories of } \hat{B}, \hat{B}'.$$

So it becomes a quasi-inductive category, except that the order on the Hom sets is not trivial. Its quotient by the equivalence

$$(B', F, B) \sim (B', F', B) \text{ iff } (B', F \cup F', B) \text{ is a rocket}$$

is a regular quasi-inductive category, whose morphisms are the *maximal* rockets; they are the analogue of the complete atlases (519.1).

The regular quasi-inductive category  $\Sigma(C)$  formed by the maximal strict rockets is defined similarly.

A *superrocket* is a pair  $(F, \hat{F})$  of regular rockets such that:

- (S1)  $\hat{F} = (\hat{B}', \hat{F}, \hat{B})$  is a strict rocket,  $\alpha(\hat{F}) = \hat{B}_0$ ,  $\beta(\hat{F}) = \hat{B}'_0$ .
- (S2)  $F < \hat{F}$  and  $F = B' \cdot \hat{F} \cdot B$ .

Superrockets form a regular quasi-inductive category  $\mathcal{J}(C)$  for the order:

$$(F_1, \hat{F}) < (F, \hat{F}) \text{ if } F_1 < F \text{ in } F^r(C).$$

If  $C$  is a (P) regular subprelocal category, then  $\mathcal{J}(C)$  admits a regular subinductive subcategory isomorphic to the category  $\bar{\mathcal{J}}(C)$  defined as follows: the morphisms are the pairs  $(F, f)$ , where  $F$  is a downward and join closed subclass of  $f^>$  and  $f \in C$ ; the composition is defined by:

$$\begin{aligned} (F', f') \cdot (F, f) &= ((\overline{F' \cdot F})_{f', f^>}, f' \cdot f) \\ \text{iff } \alpha(f') = \beta(f) = e \text{ and } \overline{\alpha(F')}_{e^>} &= \overline{\beta(F)}_{e^>} \end{aligned}$$

(where  $\bar{A}_{g^>}$  denotes the join closure of  $A$  into the poset  $g^> = \{g' < g\}$ ); the order is  $(F_1, f) < (F, f)$  if  $F_1 \subset F$ .

**D. Completion Theorems** (507.1, 562.1, 541.1, 467.1).

a) *Sublocalization Theorem* (/76/, Section 3). The category of (P) regular sublocal categories is a full reflective subcategory of the category of (P) regular subprelocal categories, with inductive functors: a reflection of  $C$  is the quotient  $J$  of  $\bar{\mathcal{J}}(C)$  by the equivalence:

$(F, f) \sim (F, f')$  iff there exists  $f'' \in C$  such that  
 $f'' < f, f'' < f', F < f''$ .

*Localization Theorem.* 1. If  $C$  is a (P) regular prelocal category,  $J$  is its reflection into (P) local categories; in this case, the morphisms of  $J$  are the upper-bounded, downward and join closed subclasses of  $C$  and the order is the inclusion.

2. If  $C$  is a (sub)prelocal groupoid,  $J$  is its reflection into the (sub) local groupoids /71, 68/.

b) *Weak localization Theorems* (/76/, Section 2). The category of regular local categories with inductive functors is a reflective (non full) subcategory of the category of regular preinductive categories with upper-bounded finite meets preserving functors; a reflection  $\bar{C}$  of  $C$  has for morphisms the upper-bounded, downward closed subclasses  $F$  of  $C$  containing each  $g$  such that  $\alpha(g) \in \alpha(F), \beta(g) \in \beta(F)$  and

$$g < F^< \text{ where } F^< = \{h \in C \mid F < h\}.$$

( $\bar{C}$  «is» the subcategory of  $\Sigma(C)$  constituted by the upper-bounded maximal strict rockets.) The reflector  $C \rightarrow \bar{C}$  preserves meets, but not joins.

If  $C$  is a preinductive groupoid,  $\bar{C}$  is its reflection in local groupoids, with preservation of meets, but not of joins.

c) *Weak relative completion Theorem* (/75/, Section 2). The category of relatively complete local groupoids with joins and finite meets preserving functors is a reflective subcategory of the category of subpreinductive groupoids with finite meets preserving functors. The reflection of  $C$  is the subcategory  $\hat{C}$  of the category  $\bar{A}(C)$  of atlases formed by the downward closed atlases  $F$  for which  $\alpha(F)$  and  $\beta(F)$  are upper-bounded, that is by the complexes of  $C$  (467.1).

If  $C$  is a preinductive groupoid,  $\hat{C}$  has been constructed in /68, 66/.

d) A completion of the ordered groupoid of holonomy isomorphisms  $H'$  of a foliation is deduced from the category of atlases of  $H'$  in /75/.

Let us recall that prelocal groupoids have a reflection into complete local groupoids /68/; completions of local functors are given in /85, 110/.

## COMMENTS

**E. Cohomology of ordered fibrations** (/75/, Sections 4-6). Let  $C$  be a category which acts on a set  $S$ , that is  $S$  is a species of structures over  $C$ ; let  $\pi: \bar{S} \rightarrow C$  be the corresponding discrete fibration. Then the category  $\bar{A}(C)$  of atlases of  $C$  acts on the class of subspecies of structures of  $S$  over subgroupoids of  $C$ . In particular, it acts on the set of  $0$ -cocycles, that are the sections  $\phi$  of  $\pi$  over subgroupoids of  $C$ ; and the source of the corresponding discrete fibration is a subcategory of  $\bar{A}(\bar{S})$ .

Now let  $C = (C, <)$  be an ordered category. An *ordered species of structures over  $C$*  corresponds to an internal discrete fibration in  $Ord$ , say  $\pi: (\bar{S}, <) \rightarrow C$  such that the order on the fibres be trivial; its *ordered 0-cocycles* are the ordered sections of  $\pi$ .

An action of the ordered category  $C$  on a regularly ordered category  $(S^*, <)$  is an action of  $C$  on the category  $S^*$  such that the poset  $(S, <)$  be an ordered species of structures over  $C$ . It is characterized by the internal fibration  $\tilde{\pi}: \tilde{S} \rightarrow C$  in  $Ord$ , where  $\tilde{S}$  is the regularly ordered *crossed product*. An *ordered 1-cocycle* is a section of  $\tilde{\pi}$  over a downward closed subcategory whose subaggregate closure is  $C$ ; the *1-cohomology classes* are equivalence classes of 1-cocycles.

In particular, it reduces to the usual 1-cohomology for sheaves of groupoids; and it gives a 1-cohomology for sheaves of categories (i.e., complete internal fibrations) and stacks (500.1). For recent papers on higher cohomology, cf. (499.3).

## 4. TOPOLOGICAL CATEGORIES.

The theory of topological categories was triggered by concrete problems of Topology and Differential Geometry, and important applications of topological groupoids to foliations and measure theory have been recently developed (629.5).

**A. Topological categories and quasi-topological categories** (/92/, Part I, /81/). Topological categories are internal categories in  $Top$ . As  $Top$  is an initial structured concrete category, it follows from the theory of internal categories that the category  $\mathcal{F}(\mathcal{J})$  (or  $Cat(Top)$ ) of topological

COMMENTS

categories is complete and cocomplete. (Quasi-)quotient topological categories and free topological categories are studied in /92/, Section 2. A topological category is universally embedded in a separated topological category, and in a (large) compact topological category (/92/, Section 2). Germs of categories describe the structure of open sub-graphs of a topological category; they intervene in Differential Geometry and in optimization problems (632.1).

As  $Top$  is not a cartesian closed category, exponentials are not defined in  $Cat(Top)$ . To remedy it,  $Top$  is replaced by the cartesian closed category of *quasi-topologies*, or *limit-spaces* (672.2); the internal Hom functor of this category  $\mathcal{P}$  equips the space of quasi-continuous maps  $\pi \rightarrow \pi'$  of the *local convergence quasi-topology*, which reduces to the compact-open topology if  $\pi$  «is» a locally compact topology.

Quasi-topological categories are internal categories in  $\mathcal{P}$ ; they form a cartesian closed category, briefly studied in /81, 112/.

**B. Microtransitive categories** (/92/, Section 3). The primitive examples of topological categories were locally trivial groupoids  $C$ : each object  $e$  has an open neighborhood  $U$  in  $C_0$  equipped with a continuous map  $s: U \rightarrow C$  such that  $s(e'): e' \rightarrow e$  for each  $e' \in U$ . In /50/, Charles proved the theory of locally trivial groupoids and of their actions is equivalent to the theory of (locally trivial) fibre bundles.

The *microtransitive categories* generalize the locally trivial categories, though both concepts coincide if the topology is «regular» enough (642.1). A microtransitive groupoid is a topological groupoid  $C$  such that the map

$$[\beta, a]: f \mapsto (\beta(f), a(f))$$

be open from  $C$  to  $C_0 \times C_0$ ; informally, objects close to  $e$  are linked to  $e$  by a small isomorphism. A microtransitive category is a topological category whose groupoid  $C_\gamma$  of isomorphisms is a microtransitive groupoid (for the induced topology).

The category of microtransitive categories is coreflective in the category of topological categories whose groupoid of isomorphisms is a



COMMENTS

topological groupoid: the coreflection of  $C$  is the microtransitive category on the same category, in which the filter of neighborhoods of  $f: e \rightarrow e'$  is generated by the sets  $U' \cdot W \cdot U$ , where  $U, U'$  are open neighborhoods of  $e, e'$  in  $C_\gamma$  and  $W$  is an open neighborhood of  $f$  in  $Hom(e, e')$ .

A topological group has a canonical uniform structure; the analogue for a microtransitive category is a *quasi-uniform structure*, in the sense of /92/, Section 3 (other concepts also bear this name (646.2)). Such a quasi-uniform structure on a set  $E$  may be thought of as a coherent family of uniform structures on the sets  $E_i, i \in I$ , of a partition of  $E$ . If  $I$  is a singleton, it reduces to a uniform structure, while it is just a topology if:  $I = E$  and  $E_x = \{x\}$  for each  $x \in E$ . The category  $Q$  of quasi-uniform structures is a concrete initialstructured category over  $Set$ , which admits  $Top$  as a coreflective category. Reflections are constructed into the subcategories of separated, of strict and of complete quasi-uniform structures.

**C. Local sections and prolongations** (/92/, Section 4 and /81/). Let  $C$  be a topological category. A *local section*  $s: U \rightarrow U'$ , where  $U$  and  $U'$  are opens of  $C_0$ , is a continuous map  $s$  from  $U$  to  $C$  such that

$$\alpha(s(e)) = e \text{ and } \beta(s(e)) \in U' \text{ for each } e \in U.$$

The local sections of  $C$  form an ordered category  $S$  for the composition:

$$\hat{s} \bullet s: U \rightarrow \hat{U}' : x \mapsto \hat{s} \beta s(x) \cdot s(x) \text{ iff } \hat{s}: U' \rightarrow \hat{U}',$$

and the «restriction to opens» order.

The category  $S$  is embedded into (660.1):

- the category of continuous diagrams in  $C$ ;
- the fibration  $P$  over  $Top^{op}$  associated to the internal category  $C$ .

If  $C_0$  is locally compact,  $S$  is a topological category for a topology deduced from the compact-open topology on local maps from  $C_0$  to  $C$ . More generally, the category  $S$  of local sections  $s: U \rightarrow U'$  of a quasi-topological category  $C$  is similarly constructed (with  $U$  and  $U'$  open for the underlying topology); it becomes a quasi-topological category for the quasi-topology deduced from the local convergence quasi-topology on local maps from  $C_0$  to  $C$ . This quasi-topological category is directly construct-

## COMMENTS

ed in /92/, and obtained as a quasi-topological subcategory of the fibration  $P$  over  $\mathcal{P}^{op}$  associated to  $C$  in /81/. If  $C$  is a topological category and  $C_0$  is locally compact, it reduces to the above mentioned topological category.

The quasi-topological category of (atomic) local jets of  $(S, <)$  over  $Set$  is a quotient of the quasi-topological category of pointed local sections of  $C$ . It is also a topological category for the etale topology. It is called the *first local prolongation of  $C$* ; higher order prolongations are obtained by induction.

If  $C$  is a topological category and if  $C_0$  is locally compact, these prolongations are topological categories.

Semi-holonomic and holonomic prolongations of the quasi-topological category  $C$  are defined from the first local prolongation, as the analogues infinitesimal prolongations of a differentiable category are (669.1).

COMMENTS

**BIBLIOGRAPHY**

The numbers up to 89 refer to the Bibliography at the end of Part II-1.

- ABBREVIATIONS. *AIFG* = Annales de l'institut Fourier, Grenoble.  
*CRAS* = Comptes-rendus Académie des Sciences, Paris.  
*CTGD* = Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle.  
*LN* = Lecture Notes in Mathematics, Springer.
90. A. ABD-ALLAH & R. BROWN, A compact-open topology on partial maps with open domains, *J. London Math. Soc.* (2) 21 (1980), 480-486.
  91. R. ARENS, A topology for spaces of transformations, *Ann. of Math.* (2) 47 (1946), 420-495.
  92. R. BARRE, De quelques aspects de la théorie des  $Q$ -variétés différentiables et analytiques, *AIFG* XXIII-3 (1973), 227-312.
  93. C. de BARROS, Catégories ordonnées régulières, groupoïdes ordonnés réguliers et groupes généralisés, *CRAS* 264 (1967), 813-816.
  94. C. de BARROS, Quelques structures algébriques définies par des lois de composition partielles et associatives, *CRAS*, 265 (1967), 163-166.
  95. N. BEDNARZ, Noyaux d'espèces de structures. Applications covariantes topologiques, *CTGD* XI-4 (1969), 387-404.
  96. J. BENABOU, Les distributeurs, *Rapport Inst. Math. Louvain* 33 (1973).
  97. L.G. BOUMA & W.T. Van EST, Manifold schemes and foliations on the 2-torus and the Klein bottle, *Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch.* Amsterdam A 81-3 (1978), 313-346.
  98. G. BOURDAUD, Foncteurs à structures initiales, *Esquisses Math.* 8 (1971).
  99. D. BOURN, Méthode  $n$ -catégorique d'interprétation des complexes et des extensions de longueur  $n$ , *Rapport Inst. Math. Louvain* (1982).
  100. D. BOURN, Une autre propriété universelle pour le champ associé, *CTGD* XXI 4 (1980), 403-409.
  101. R. BROWN & G. DANESH-NARUIE, The fundamental groupoid as a topological groupoid, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 19 (1975), 237-244.
  102. R. BROWN & J.P.L. HARDY, Topological groupoids: I, *Math. Nach.* 71 (1976), 273-286; II (with DANESH-NARUIE), *Id.* 74 (1976), 143-156.
  103. R. BROWN & S.A. MORRIS, Embeddings in contractible or compact objects, *Coll. Math.* 38 (1978), 213-222.
  104. R. BROWN & P. NICKOLAS, Exponential laws for topological categories, groupoids and groups and mapping spaces of colimits, *CTGD* XX-2 (1979), 179.
  105. M. BUNGE, Stack completions and Morita equivalence for categories in a topos, *CTGD* XX-4 (1979), 401-436.

COMMENTS

106. M. CHARTRELLE, Sur la catégorie des applications quasi-continues, *CTGD* XI-4 (1969), 215-225.
107. G. CHOQUET, Convergence, *AIFG* 23 (1947/48), 57.
108. A. CONNES, Sur la théorie non commutative de l'intégration, *LN* 725 (1978), 19-143.
109. C.H. COOK & H.R. FISCHER, Uniform convergence structures, *Math. Ann.* 173 (1967), 290-306.
110. J.-M. CORDIER, Espaces fonctionnels quasi-uniformes, *CTGD* XII-2 (1971), 113-136.
111. A. CSASZAR, *Fondements de la Topologie générale*, Gauthier-Villars, 1960.
112. C. CUMENGE, *Cohomologie de l'espace des feuilles d'un feuilletage*, Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Univ. Toulouse, 1981.
113. M.K. DAKIN, *Topological groupoids, G-spaces and Hurewicz lifting functions*, M. Sc. Diss., Univ. of Wales, 1974.
114. P. DEDECKER, Cohomologie à coefficients non abéliens et espaces fibrés, *Bull. Acad. Sc. Belg., Cl. sc. 5*, 41 (1955), 1132-1146.
115. J. DUSKIN, Higher dimensional torsors and the cohomology of topoi: the abelian theory, *LN* 753 (1977), 255-279.
116. J. DUSKIN, An outline of non-abelian cohomology in a topos I, *CTGD* XXIII-2 (1982), 165-192.
117. A. EHRESMANN (-BASTIANI), Systèmes guidables et problèmes d'optimisation, I à IV, *Rapport Lab. Automatique Théorique Caen* (1963-64).
118. A.C. EHRESMANN, Microtransitive categories and locally trivial categories, *CTGD* XXIII-4 (1982).
119. S. EILENBERG & G.M. KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on cat. Alg. La Jolla*, Springer (1966).
120. Y. FELIX, Faisceau associé à un préfaisceau, *Rapport Inst. Math. Louvain* 56 (1975).
121. R.H. FOX, Covering spaces with singularities, *Princeton Math. Series* 12 (1957), 243-257.
122. J. FRENKEL, Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, *Bull. Soc. Math. France* 85 (1957), 135-220.
123. A. FROLICHER, Catégories cartésiennement fermées engendrées par des monoïdes, *CTGD* XXI-4 (1980), 367-375.
124. J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne*, Springer, 1971.
125. A. HAEFLIGER, Sur les classes caractéristiques des feuilletages, *Sém. Bourbaki* Paris (1971/72), Exp. 402.
126. A. HAEFLIGER, Homotopy and integrability, *LN* 197 (1971), 133-163.
127. J.P.L. HARDY & D. PUPPE, Classifying spaces and universal categories.
128. H. HERRLICH, Topological functors, *Gen. Top. and Appl.* 4 (1974), 125-142.
129. H. HERRLICH, Some topological theorems which fail to be true, *LN* 540 (1975) 265-285.
130. J. W. KAMGA, *Structures transverses des feuilletages*, Thèse Univ. Toulouse,

COMMENTS

- 1979.
131. A. KOCK, *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lecture Notes 51, 1981.
  132. K. KODAIRA & D. SPENCER, On deformations of complex analytic structures I, II, *Ann. of Math.* 67 (1958), 329-416.
  133. K. KODAIRA & D. SPENCER, Idem III, *Ann. of Math.* 71 (1969), 43-76.
  134. J. J. KOWALSKY, Limesräume und Komplettierung, *Math. Nach.* 12 (1954), 301-340.
  135. F. W. LAWVERE, Teoria delle categorie sopra un topos di base, *Lecture notes Univ. Perugia* (1973).
  136. G. LENGAGNE, Sur les groupoïdes uniformes, *Esquisses Math.* 8 (1971).
  137. G. LENGAGNE, Moyennes invariantes sur les catégories et groupoïdes, *CTGD XIV-2* (1973), 43-44.
  138. A. MACHADO, Quasi-topologie algébrique, *Esquisses Math.* 10 (1971).
  139. A. MACHADO, Quasi-variétés complexes, *CTGD XI-3* (1969), 229-280.
  140. K. MACKENZIE, Rigid cohomology of topological groupoids, *J. Austral. Math. Soc.* 26 (1978), 277-301.
  141. G. W. MACKEY, Ergodic theory and virtual groups, *Math. Ann.* 166 (1966), 187-207.
  142. E. MICHAEL, Continuous selections and countable sets, *Fund. Math.* CXI-1 (1981), 1-10.
  143. M. P. MOLINO, Sur la géométrie transverse des feuilletages, *AIFG XVII* (1975) 279-284.
  144. P. NICKOLAS, *Free topological groups, and free products of topological groups*, Ph. D. Thesis, Univ. N.S.W., 1976.
  145. G. PALIAS, *Sur la catégorie des applications quasi-uniformes*, Thèse 3<sup>e</sup> cycle Univ. Paris, 1967.
  146. G. PALIAS, Structures quasi-métriques, *Diagrammes 6*, Paris (1981).
  147. J. F. PLANTE, Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.* 102 (1975), 327-361.
  148. E. POURREZA, *Fibrés à groupoïde structural local*, Thèse 3<sup>e</sup> cycle Univ. Toulouse, 1972.
  149. J. P. RADINES, Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables: I, *CRAS* 263 (1966), 907-910; II, *CRAS* 264 (1967), 245-248.
  150. J. P. RADINES, Géométrie différentielle au-dessus d'un groupoïde, *CRAS* 266 (1968), 1194-1196.
  151. J. P. RADINES, 3<sup>e</sup> théorème de Lie pour les groupoïdes différentiables, *CRAS* 267 (1968), 21-23.
  152. J. P. RADINES, Echelles et faisceaux sur les quotients de feuilletages, *CTGD XXII-1* (1981), 73-83.
  153. J. P. RADINES, & J. W. KAMGA, Relations d'équivalence transversalement différentiables, *CRAS* 283 (1976), 25-28.

COMMENTS

154. A. RAMSEY, Topologies on measured groupoids, Multigraphed, Univ. of Colorado, Boulder, 1980.
155. G. REEB, Sur la théorie générale des systèmes dynamiques, *AIFG* VI (1955), 89-115.
156. J. RENAULT, A groupoid approach to  $C^*$ -algebras, *LN* 793 (1980).
157. G. de RHAM, Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, *Comm. Math. Helv.* 26-4 (1952), 328-344.
158. D. RUELLE & D. SULLIVAN, Currents, flows and diffeomorphisms, *Topology* 14-4 (1975), 319-327.
159. A.K. SEDA, Un concept de mesures invariantes pour les groupoïdes topologiques, *CRAS* 280 (1975), 1603-1606.
160. E. SPANIER, Quasi-topologies, *Duke Math. J.* 30 (1963), 1-14.
161. K. SRINIVASACHARYULU, Sur les structures différentiables et les variations de structures complexes, *CTGD* IV (1963).
162. J. TAPIA, *Des sous-groupes de Lie aux sous-groupoïdes différentiables*, Thèse 3<sup>e</sup> cycle, Univ. Toulouse, 1981.
163. W. THOLEN, Lifting semifinal liftings, *LN* 719 (1979), 376-385.
164. W.T. Van EST, Sur le groupe fondamental des schémas de variétés à 1 dimension, *AIFG* XXX-2 (1980), 45-77.
165. P. Ver EECKE, *Les œuvres complètes d'Archimède*, I et II, Vaillant-Carmanie Liège, 1960.
166. J. VIRSIK, A generalized point of view to higher order connections on fibre bundles, *Czech. Math. J.* 94 (1969), 110-142.
167. J. WESTMAN, Harmonic analysis on groupoids, *Pacific J. Math.* 27 (1968), 621-632.
168. J. WESTMAN, Cohomology for ergodic groupoids, *Trans. AMS* 146 (1969), 465-471.

## INDEX DU VOLUME II - 2

- A**
- Ame 598
  - Application covariante ordonnée 493
    - » quasi-continue 661, 673
    - » quasi-uniforme 647
  - Associated sheaf 719
    - » stack 719
  - Atlas 444, 447, 708
    - » compatible à droite 444, 757
    - » » gauche 444
    - » complet 471, 714
    - » de jets locaux 752
    - » généralisé 709
    - » régulier 465
  - Bi-atlas** 710
  - Bouquet 718
  - Cartesian monoid** 710
  - Catégorie des atlas 448
    - » fusées 510
    - » » maximales 519
    - » » » strictes 534
    - » » régulières 513
    - » sections locales 665, 689, 743
    - » superfusées 544
    - » d'holonomie 505
    - » localement triviale 741
    - » microtransitive 641, 741
    - » ordonnée 450, 635, 710
    - » » d'opérateurs 488
    - » préinductive 436, 452
    - » quasi-inductive 461, 464
    - » quasi-topologique 661, 686
    - » sous-préinductive 756
    - »  $\Omega$ -structurée 435, 450
    - » » (assez) régulière 435, 455
    - » » quasi-inductive 436, 452
    - » » semi-régulière 451
    - » topologique 629, 737
    - » » compacte 638
    - » » (quasi-) quotient 636
    - » » séparée 638
    - » » uniforme (complète) 639, 741
  - Category kernel 739
  - Chaîne pure 468, 565
    - » simple (pointée) 565
  - Chaînon pur 468
  - Classifying space 738
  - 1-cobord ordonné 497
  - 0-cocycle 474
    - » ordonné 481
  - 1-cocycle 495
  - Cohomologie 717
    - » d'ordre 1 498
  - Compatible 713
  - Complete atlas 714
  - Completion problem 442, 713, 721, 726, 759
    - » quasi-uniforme 653
    - » uniforme 639, 741
  - Condition (C) 511
    - » ( $C^S$ ) 536
    - » (P) 547
  - Covitesse transverse 619
  - Déroutement faible** 587
    - » relatif à un recouvrement 589
    - » » tube 599
  - Distributeur 709
  - Equivalence croisée ordonnée** 496
  - Ergodic groupoid 739
  - Espace extrait 567
    - » (quasi-)transversal 583
    - » transverse 564
  - Espace de grandeurs 694
    - » structures ordonnées 479
    - » » étalée 485
    - » » régulière 484
    - » » quasi-inductive 479
  - Extension 718
  - Feuille (propre)** 564
    - » de simultanéité 625
    - » simple 564
  - Feuilletage avec singularités 727

## INDEX

- Feuilletage de 2<sup>e</sup> espèce 578, 582, 731
  - » localement simple 564
  - » simple 564
  - » stable 606
  - » supplémentaire 577, 611
  - » topologique 563, 727
- Fibration 577
- Filtre de Cauchy 653
- Foliated manifold 571, 750
- Forme extérieure transverse 624
- Functorially ordered category 716
  - » » groupoid 711
- Fundamental groupoid 737
- Fusée 509
  - » maximale 519, 722
  - » neutre 508
  - » régulière 512
  - » stricte (neutre) 436, 527
  - » » maximale 438, 533
- Germe de catégorie 739
  - » ruban 609
  - » sous-espace 567
  - » transverse 620
- Grandeur 694
- Graphe multiplicatif (pré) topologique 629
  - » » quotient 633
- Groupe d'holonomie 586
- Groupoïde complet d'holonomie 471
  - » des atlas réguliers 466
  - » » isomorphismes d'holonomie 585, 754
  - » d'holonomie 584, 734, 754
  - » » d'ordre  $r$  618
  - » localement trivial 741
  - » microtransitif 641
  - » ordonné d'holonomie 468
  - » topologique 629, 737
  - » » de jets 737
  - » transverse d'holonomie 584
- Holonomy groupoid 471, 584, 734, 754
- Idéal 672
- Immersion 568
- Infinite simal gem of category 740
  - » prolongation 745
- Internal diagram 744
- Isomorphisme transversal (strict) 583
  - » transverse 585
- Jet d'holonomie 584
  - » d'ordre  $r$  618
  - » transverse 619
- Lie algebroid 740
- Ligne de temps 625
- Localement compatible 575
- Localization Theorem 562, 725, 760
- Locally simple foliation 564, 753
  - » trivial category 741
- Local section 660, 687, 743
- Manifold scheme 728, 733
- Maximal rocket 519, 722
- Métrique riemannienne transverse 621
- Microtransitive category 641, 741, 762
- Module d'homologie transverse 624
- Néofoncteur continu 630
- Noyau de catégorie 632, 739
  - » groupoïde 632, 739
- Ordered category 435, 450, 756
  - » fibration 488, 761
  - » species of structures 761
- Ouvert distingué 564
  - » simple 565
- Paratopological foliation 729
- Partition locale 569
- Path section 744
- Plaque 565
- Point adhérent à l'infini 570
  - » limite (d'une feuille) 568
- Presheaf of categories 719
- Produit assoupli 575
  - » croisé ordonné 494
  - » local 573, 577, 751
- Prolongement local d'une catégorie topologique 667, 764



## INDEX

- Prolongement (semi-)holonome 668, 745  
   » transverse 679  
 Pro-object 709  
 Pseudogroupe d'holonomie 583  
 Pseudoproduit 452, 712  
  
**Q F-manifold** 728  
 Quasi-topological category 661, 686, 762  
 Quasi-topology 661, 672, 746  
   » de la convergence locale 662, 679, 684  
   » simple 679  
 Quasi-uniform structure 742  
  
**Réalisation d'un groupe de jets** 597  
 Regular 455, 756  
 Relative completion 467, 712  
 Relatively complete category 713  
 Rocket 509..., 758  
 Ruban 609  
  
**Second kind foliation** 578, 728, 731, 752  
 Section locale 660, 687, 743  
 Sheaf of categories 718  
 Simultanéité 624  
 Sous-agrégat admissible 469  
 Sous-catégorie régulière 459  
 Stability 592-608, 755  
 Stack 719  
 Sublocalization Theorem 559, 724  
 Structured category 710  
 Structure feuilletée 563, 727, 751  
   » différentiable 573  
   »  $\mathcal{B} \# \mathcal{F}$ -élargie 574, 730, 751  
   » quasi-uniforme 646, 742  
   » complète 653  
   » séparée 649  
   » stricte 651  
   » transversale 583  
   » transverse 503, 619  
 **$\Gamma$ -structure** 732  
  
 Superfusée, Superrocket 439, 543  
 (P) superfusée 440, 548  
 Supplementary foliations 577, 611  
 Système dynamique généralisé 570, 727  
  
**Théorème de stabilité** 592-608  
   » sur les catégories ordonnées :  
   complétion 714, 759  
   » faible 442, 467, 720, 760  
   (sous)localisation 559, 724  
   » faible 541, 723, 760  
**Théorème sur les catégories topologiques : compactification** 638  
   complétion uniforme 639, 741  
   microtransitivité 642  
   quasi-uniformité 656  
   séparation 638  
   uniformisation 639  
**Théorème sur les structures quasi-uniformes : séparation** 650  
   complétion 653  
**Topological category** 629, 737, 761  
   » diagram 744  
   » foliation 563, 727  
   » groupoid 629, 737  
**Trajectory** 728  
**Transverse measure** 739  
   » morphism 734  
   » structure 503, 619, 756  
**Tube (parfait)** 598  
  
**Uniform category** 741  
**Univers de la relativité** 624  
  
**Variété feuilletée** 571  
   » transversale 620  
**Variation de structures** 578  
**Vecteur transverse** 505  
**Virtual group** 739  
  
**Weak completion** 714, 720, 760  
   » (sub) localization 541, 723, 760

Les références renvoient indifféremment au mot français et /ou anglais.



## TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME II-I

	Pages
<b>INTRODUCTION</b>	VII
<b>REMERCIEMENTS</b>	IX
<b>PHOTOGRAPHIE</b>	XI
<b>FAC SIMILE</b>	XIII
<b>LISTE DES PUBLICATIONS</b>	XV
<b>DE 1955 A 1962</b>	X XIII

### / 125/ Structures locales et revêtements

1. La notion d'espèce de structures mathématiques	4	335
2. La notion d'espèce de structures locales	6	336
3. Exemple des structures topologiques	7	338
4. Le pseudogroupe des automorphismes locaux d'une structure locale	8	»
5. Structures localement isomorphes	9	»
6. L'espèce de structures locales associées à un pseudogroupe de transformations	10	339
7. Application des notions d'espace quotient et d'espace somme au recollement de sous-espaces	13	340
8. Espaces étalés	15	341
9. Revêtements	21	342

### / 55/ Élargissements de catégories

1. Compléments sur les catégories et les foncteurs	25	343
2. Espèces de structures et catégories d'homomorphismes	28	»
3. Catégories induites et extensions inessentiels	32	344
4. Élargissements	35	»
5. Groupoïdes préinductifs et inductifs	38	»
6. Complétion des groupoïdes inductifs	42	»
7. Groupoïdes sous-inductifs	47	»
8. Espèces de structures sous-inductives	56	»
9. Appendice: Perfectionnement d'une catégorie	70	»

### / 85/ Espèces de structures sous-inductives

Préface	75	349
1. Groupoïde inductif au-dessus d'un groupoïde inductif	76	350

Le second nombre renvoie à la page correspondante des « Comments ».

TABLE DES MATIÈRES

2. Groupoïdes inductifs induits et élargissements inductifs	84	352
3. Atlas complets compatibles avec un foncteur	93	353
<b>/ 86 / Guide des catégories ordonnées</b>		
I. Sommaire	117	357
II. Index de la terminologie actuelle	119	»
III. Compléments	123	»
Bibliographie	124	
<b>/ 47 / Gattungen von Lokalen Strukturen</b>		
I. Kategorien und Kategrien von Operatoren	126	359
II. Gattungen von Strukturen und Kategrien von Isomorphismen	129	360
III. Lokale Kategrien und Gattungen von lokalen Strukturen		
1. Induktive Kategrien	136	363
2. Gattungen von lokalen Strukturen über einer lokalen Kategrie	138	364
3. Induktive Kategrien von Homomorphismen	141	366
4. Lokal isomorphie Strukturen	144	368
5. Erweiterung einer Gattung von lokalen Strukturen	145	»
IV. Lokale Produkte, Blätterungen, Faserungen		
1. Lokale Produkte	148	370
2. Blätterungen	150	»
3. Faserungen	152	371
<b>/ 53 / Catégories inductives et pseudogroupes</b>		
1. Groupoïdes inductifs	155	372
2. Catégories inductives	163	374
3. Catégorie des filtres déduite d'une catégorie inductive	167	376
4. Groupoïdes inductifs au-dessus d'un groupoïde inductif	170	»
5. Catégories inductives au-dessus d'une catégorie inductive	171	»
6. Jets locaux	175	378
7. Catégories inductives au-dessus de la catégorie des applications	177	379
Bibliographie	180	
<b>/ 126 / Catégories différentiables et Géométrie différentielle, 1 et 2</b>		
Table des matières	181	
Chapitre 1: Structures et catégories d'homomorphismes		
I. Catégories et foncteurs	182	381
1. Catégories et groupoïdes	»	»
2. Foncteurs	185	»
3. Exemples de catégories	192	382
II. Espèces de structures	196	»
1. Catégories d'opérateurs	»	»

## TABLE DES MATIÈRES

2. Espèces de structures sur une catégorie	200	383
3. Applications covariantes	204	»
4. Catégorie au-dessus d'une catégorie	208	384
III. Élargissements	211	385
1. Catégories induites, extensions inessentielles	»	»
2. Élargissement d'une catégorie d'homomorphismes	220	387
Chapitre 2: Groupoïdes inductifs et structures locales		
I. Groupoïdes inductifs	232	388
1. Groupoïdes préinductifs et groupoïdes inductifs	»	»
2. Groupoïdes locaux et sous-pseudogroupes	244	389
<b>/ 68 / Groupoïdes sous-inductifs</b>		
Introduction	257	389
Plan	258	
Quelques rappels	258	»
1. Groupoïdes sous (pré) inductifs	259	390
2. Groupoïdes sous-locaux et sous-pseudogroupes	265	392
3. Atlas complets dans les groupoïdes sous-inductifs	273	393
4. Groupoïdes sous-préinductifs des atlas complets	285	»
5. Complétion des groupoïdes prélocaux	299	394
6. Groupoïde des filtres	308	397
Bibliographie	316	
<b>/ 110 / Élargissement complet d'un foncteur local</b>		
1. Complétion d'une application locale	317	398
2. Complétion d'un foncteur local	321	400
3. Élargissement complet	327	401
Bibliographie	331	
<b>COMMENTS ON PART II-I</b>		
Introduction	333	
General comments	335	
SYNOPSIS		
1. Species of structures. Enlargements of categories	404	
2. Local maps. Completion. Associated sheaf.	407	
3. Local species of structures. Complete enlargement	411	
4. Subinductive groupoids and species of structures	414	
5. Inductive categories. Complete enlargement of a local functor	416	
Bibliography	420	
<b>INDEX DU VOLUME II-I</b>	425	

## TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME II-2

	Pages
<b>REMERCIEMENTS</b>	
<b>FAC SIMILE</b>	
<b>/ 62/ Complétion des catégories ordonnées</b>	
1. Catégories ordonnées	435 706
2. Fusées strictes régulières	436 »
3. Applications	438 »
<b>/ 71/ Complétion des catégories sous-prélocales</b>	
1. Superfusées	439 »
2. Catégories vérifiant la condition (P)	440 »
3. Théorèmes de complétion	441 707
4. Cas particuliers	442 »
<b>/ 75/ Catégories ordonnées, Holonomie et cohomologie</b>	
Introduction	443 »
1. Atlas dans une catégorie	444 »
2. Catégories ordonnées	449 710
3. Groupoïde d'holonomie complet	467 714
4. 0-cocycle au-dessus d'une catégorie	474 715
5. Cohomologie d'ordre 1	487 716
6. Applications	500 718
Bibliographie	505 -
<b>/ 76/ Complétion des catégories ordonnées</b>	
Introduction	507 »
1. Fusées dans les catégories ordonnées	508 721
2. Fusées strictes	526 722
3. Superfusées	543 724
Bibliographie	562 -
<b>/ 54/ Structures feuilletées</b>	
Introduction	563 727
I. Définitions de diverses espèces de structures feuilletées	
1. Feuilletages topologiques	563 729
2. Partitions locales	569 730

TABLE DES MATIÈRES

3. Variétés feuilletées	571	730
4. Structures feuilletées de l'espèce $\mathcal{B} \# \mathcal{F}$ -élargie	574	»
5. Feuilletages de seconde espèce	578	731
II. Structure transversale d'un feuilletage		
1. Pseudogroupe d'holonomie	583	733
2. Groupe transverse d'holonomie	584	»
3. Déroulements d'un espace feuilleté	587	735
4. Questions de stabilité	592	»
5. Compléments relatifs à certaines structures feuilletées	611	»
Bibliographie	626	-

/ 92/ Catégories topologiques

Introduction	627	736
1. Graphes multiplicatifs topologiques. Catégories topologiques	628	737
Foncteurs continus	630	739
Noyaux de catégories	632	»
Graphes multiplicatifs quotient	633	740
2. Théorèmes de projection		
Catégories topologiques quotient	634	740
Catégories topologiques séparées ou compactes	637	741
Complétion des catégories topologiques	639	»
3. Catégories microtransitives	641	»
Structures quasi-uniformes	646	742
Structure quasi-uniforme sur une catégorie microtransitive	655	743
4. Sections locales		
Catégorie des sections locales	659	743
Catégorie quasi-topologique des sections locales	661	744
Prolongement local d'une catégorie topologique	666	»
Bibliographie	669	-

/ 81/ Catégories quasi-topologiques et leurs prolongements

Avertissement de l'éditeur		
1. Quasi-topologies		
A. Définition des quasi-topologies	671	745
B. Topologie associée à une quasi-topologie	673	747
C. Etude du foncteur $\theta$	675	»
2. Quasi-topologie de la convergence locale		
A. Quasi-topologie de la convergence locale	677	»
B. Quasi-convergence locale sur les sections	683	»
3. Catégorie quasi-topologique des sections locales		
A. Catégories quasi-topologiques	686	»
B. Catégorie des sections locales	687	»

## TABLE DES MATIÈRES

/ 56/ Archimède et la Science moderne 691 748

### COMMENTS ON PART II-2

Introduction	705
GENERAL COMMENTS	706
SYNOPSIS	
1. Definitions of foliated structures	750
2. Holonomy and stability of locally simple foliations	753
3. Atlases. Rockets. Completions of ordered categories	756
4. Topological categories	761
BIBLIOGRAPHY	765

INDEX DU VOLUME II-2 769

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME II-1 773

» DU VOLUME II-2 776

Le second nombre renvoie à la page correspondante des « Comments ».