Charles Ehresmann œuvres complètes et commentées

STRUCTURES LOCALES

PARTIE II 1

Editée et commentée par Andrée CHARLES EHRESMANN

AMIENS 1981

Ce livre constitue le

SUPPLÉMENT N° 2 au VOLUME XXII (1981) des

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

publication périodique, créée par Charles EHRESMANN en 1958, actuellement dirigée et éditée par :

Madame A.C. EHRESMANN
U.E.R. de Mathématiques, 33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS CEDEX. FRANCE.

IMPRIMERIE EVRARD. AMIENS.
Dépôt Légal : 1er Trimestre 1982

INTRODUCTION

Charles EHRESMANN s'est intéressé à des domaines très variés des Mathématiques. Il a profondément influencé le développement de la Topologie Algébrique, de la Géométrie Différentielle et de la Théorie des Catégories. Ses travaux (de 1932 à 1979, plus de 2.500 pages) sont souvent passés dans le domaine commun, mais beaucoup ne sont plus accessibles matériellement. C'est pourquoi, depuis plusieurs années, nous avions l'intention, Charles et moi, de publier ses œuvres complètes.

Pour ne pas faire seulement un travail de compilation, nous voulions profiter de cette occasion pour mettre en évidence la genèse des idées et les motivations, pour améliorer certains résultats, pour relier les articles entre eux et avec ceux d'autres auteurs, pour indiquer les développements ultérieurs et, éventuellement, des voies non encore exploitées.

Désirant être indépendants et n'engager que notre propre responsabilité (Charles a toujours été très individualiste), nous comptions éditer ces «*Oeuvres complètes et commentées*» sous forme de Suppléments à notre périodique «*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*». C'est pour réaliser ce projet tel qu'il avait été conçu que j'ai décidé, après le décès de Charles, d'entreprendre seule (contrairement à l'usage) cette publication. Je remercie tous ceux qui m'aident, par leur soutien moral ou leur souscription, à mener à bien ce travail dans cet esprit, comme l'avait souhaité Charles.

PLAN GENERAL.

Il est très difficile de classer les œuvres de Charles. L'ordre chronologique est loin d'être satisfaisant (ainsi les travaux de Géométrie Différentielle s'échelonnent de 1939 à 1973); une division par matières laisse à désirer, beaucoup d'articles contenant des parties très différentes.

Le plan adopté (sans doute peu convaincant) tient compte à la fois de la date de parution et du sujet. Il comporte quatre grandes parties:

I. *Topologie et Géométrie Différentielle.*

II. *Structures locales et catégories ordonnées.*

III. *Catégories internes et Fibrations.*

IV. *Esquisses. Complétions. Enrichissements.*

Chaque partie, divisée en deux volumes, contient:

- La liste des publications de Charles et une courte biographie de la période correspondant en gros à la partie,
- Les travaux originaux, reproduits par procédé photographique (et je remercie tous ceux qui m'ont accordé leurs droits de reproduction) ou recomposés lorsque la présentation n'était pas assez nette;
- Des commentaires fragmentés (en anglais) avec renvois aux textes, suivis d'un Synopsis guidant dans la lecture des articles et commentaires;
- Une bibliographie relative aux commentaires et un index dans chaque volume; parfois des documents annexes éclairant tel ou tel point.

SUR LA PARTIE II.

La Partie II regroupe les travaux sur les structures locales, leurs développements: groupoïdes inductifs, catégories ordonnées, espèces de structures ordonnées, et des applications aux feuilletages et aux prolongements des catégories topologiques. Les seize articles contenus dans cette partie ont été écrits de 1957 à 1964, à l'exception

- du premier /125/ fait en 1952 et inclus ici pour montrer les problèmes concrets qui ont motivé la théorie générale (de plus il ferait double emploi dans la Partie I, cf. page 335),
- du dernier /110/, rédigé en 1969 et qui est consacré à une construction directe et simple de l'élargissement complet d'un foncteur local /47/.

D'autres résultats sur les catégories ordonnées sont disséminés dans les Parties III et IV-1 comme cas particuliers de théorèmes sur les catégories internes; ils sont mentionnés dans le «Guide» /86/.

La théorie des structures locales et des «variétés généralisées» a suscité de nombreux travaux. Par contre les recherches sur les groupoïdes et catégories ordonnés ont été rares. Le récent regain d'intérêt pour les «locales» (en liaison avec la théorie des topos) devrait conduire à une meilleure compréhension des idées de Charles et à un développement de ses méthodes.

Andrée CHARLES EHRESMANN
Amiens, Décembre 1981

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce livre par leur aide

- matérielle : les Souscripteurs, individuels ou collectifs, dont l'apport financier est important, en particulier M^{elle} P. LIBERMANN et M. G. REEB qui avaient lancé une souscription confidentielle avant la parution du premier volume; l'Imprimerie Evrard qui assure l'impression avec soin ;

- mathématique : les catégoriciens qui ont fait remarques, critiques ou suggestions sur les tomes déjà parus, ou qui m'ont tenu au courant de leurs travaux ; M. P. Ver EECKE qui a revu le texte original de l'article /47/ écrit en allemand ;

- et, surtout, morale : les D^{rs} F. de la SIMONE et, plus encore J.-P. VANBREMEERSCH dont la compréhension et le ferme soutien m'ont donné le courage de poursuivre ce travail ; et le D^{r} J.-F. de FREMONT avec qui j'ai eu de vivifiants entretiens.

Andrée CHARLES EHRESMANN

CHARLES EHRESMANN

19 Avril 1905 - 22 Septembre 1979

Après une soutenance de thèse à Rio...

The fundamental structures
in differential geometry
(Bombay, octobre 1956 —)

The purpose of this course of lectures is to ~~give~~ analyse the fundamental structures which may be considered as the objects of differential geometry. We will have to define the notion of a category of infinitesimal elements or of a category of infinitesimal structures. However ~~infinitesimal belong to a m the first part of this course~~ it will be necessary to define firstly the the notion of a category of local structures. The word structure will be used very frequently, following a general trend of modern mathematics. So for our whole terminology it will be useful to ~~give shortly~~ give a general definition of the notion of a category of mathematical structures. There is the category of topological structures, group structures, ring struct

Brouillon d'une conférence donnée en 1956

the category of equivalence relations, of structures of ordered sets etc.
~~The word category has been used introduced with a very precise~~
recently with a very definite meaning by Eilenberg - Mac Lane. This will also be the precise meaning with which we shall use the word category. So I shall begin with the definition of the notions: category and functors.

I. Categories and functors

$\mathcal{C}$ class of elements called maps

$(f, g) \to fg$ partially defined

1°. $h(fg)$ or $(hf)g$ is defined if and only if hf and fg are defined. And then we have: $h(fg) = (hf)g$.

2°. Axiom of the units.
A unit is an element e of $\mathcal{C}$ such that $ef = f$ and $ge = g$ for all elements f and g for which ef and ge are defined.
To each $f \in \mathcal{C}$ correspond a unit e_f (right unit) and a unit e'_f (left unit) such that $fe_f = f$ and $e'_f f = f$.

Ehresmann

LISTE DES PUBLICATIONS DE CHARLES EHRESMANN

I. TRAVAUX DE RECHERCHE.

1. Les invariants intégraux et la topologie de l'espace projectif réglé, *C. R. A. S. Paris* 194 (1932), 2004-2006.
2. Sur la topologie de certaines variétés algébriques, *C. R. A. S. Paris* 196 (1933), 152-154.
3. Un théorème relatif aux espaces localement projectifs et sa généralisation, *C. R. A. S. Paris* 196 (1933), 1354-1356.
4. Sur la topologie de certains espaces homogènes, *Ann. of Math.* 35 (1934), 396-443. (Thèse Paris 1934.)
5. Groupes d'homologie, *Séminaire de Math.* Paris, III-B (1935), 1-25.
6. Sur les espaces localement homogènes, *Enseignement Math.* 35 (1936), 317-333.
7. Sur la notion d'espace complet en Géométrie différentielle, *C. R. A. S. Paris* 202 (1936), 2033-2035.
8. Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles, *J. de Math.* XVI (1937), 69-100.
9. Les groupes de Lie à r paramètres, *Séminaire de Math.* Paris, IV E et F (1937), 1-61.
10. Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan, *C. R. A. S. Paris* 205 (1938), 1433-1436.
11. Sur les congruences paratactiques et les parallélismes dans les espaces projectifs, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 153-155.
12. Sur la variété des génératrices planes d'une quadrique réelle et sur la topologie du groupe orthogonal à n variables, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 321-323.
13. Sur la topologie des groupes simples clos, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 1263-1265.
14. Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés, *C. R. A. S. Paris* 212 (1941), 945-948 (avec J. FELDBAU).
15. Espaces fibré associés, *C. R. A. S. Paris* 213 (1941), 762-764.

16. Espaces fibrés de structures comparables, *C. R. A. S. Paris* 214 (1942), 144-147.

17. Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 216 (1943), 628-630.

18. Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement, *Bull. Soc. Math. France* 72, Paris (1944), 27-54.

19. Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrables dans une variété continuement différentiable, *C. R. A. S. Paris* 218 (1944), 955-956 (avec G. REEB).

20. Sur la théorie des espaces fibrés, *Coll. Intern. Topo. algébrique Paris*, C.N.R.S. (1947), 3-15.

21. Sur les sections d'un champ d'éléments de contact dans une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 224 (1947), 444-445.

22. Sur les espaces fibrés différentiables, *C. R. A. S. Paris* 224 (1947), 1611-1612.

23. Sur les variétés plongées dans une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 226 (1948), 1879-1881.

24. Sur les formes différentielles extérieures de degré 2, *C. R. A. S. Paris*, 227 (1948), 420-421 (avec P. LIBERMANN).

25. Sur les extensions de groupes topologiques, *C. R. A. S. Paris* 228 (1949), 1551-1553 (avec L. CALABI).

26. Sur le problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques, *C. R. A. S. Paris* 229 (1949), 697-699 (avec P. LIBERMANN).

27. Sur la notion de connexion infinitésimale dans un espace fibré et sur les espaces à connexion de Cartan, Congrès d'Innsbruck, *Nach. Oest. Math. Gesellschaft* (1949), 22.

28. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Coll. de Topo.* Bruxelles, C.B.R.M. (1950), 29-55.

29. Sur les variétés presque complexes, *Proc. Intern. Cong. of Math.* Harvard (1950), Vol. 2, 412-419 (et *Séminaire Bourbaki* 1950).

30. Sur la théorie des variétés feuilletées, *Rend. Mat. e Appl.* Ser. V, X-1-2 Rome (1951), 64-83.

31. Sur les structures presque hermitiennes isotropes, *C. R. A. S. Paris* 232 (1951), 1281-1283 (avec P. LIBERMANN).

32. Les prolongements d'une variété différentiable, *Atti IV Cong. Un. mat. Italiana*, Taormina Ott. (1951), 1-9.

33. Les prolongements d'une variété différentiable, I: Calcul des jets, prolongement principal, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 598-600.

34. Les prolongements d'une variété différentiable, II: L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 777-779.

35. Les prolongements d'une variété différentiable, III: Transitivité des prolongements, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 1081-1083.

36. Structures locales et structures infinitésimales, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 587-589.

37. Les prolongements d'une variété différentiable, IV: Eléments de contact et éléments d'enveloppe, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 1028-1030.

38. Les prolongements d'une variété différentiable, V: Covariants différentiels, et prolongements d'une structure infinitésimale, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 1424-1425.

39. Structures locales, *Ann. di Mat.* (1954), 133-142. (Multigraphié Rome et Strasbourg, 1952.)

40. Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, *Coll. Intern. Géom. Diff. Strasbourg*, C.N.R.S. (1953), 97-110.

41. Extension du calcul des jets aux jets non holonomes, *C. R. A. S. Paris* 239 (1954), 1762-1764.

42. Sur les structures infinitésimales régulières & Sur les pseudogroupes de transformations de Lie, *Proc. Int. Cong.* Amsterdam (1954), II, 478-479.

43. Applications de la notion de jet non holonome, *C. R. A. S. Paris* 240, (1955), 397-399.

44. Les prolongements d'un espace fibré différentiable, *C. R. A. S. Paris* (1955), 1755-1757.

45. Sur les espaces feuilletés: théorème de stabilité, *C. R. A. S. Paris* 243 (1956), 344-346 (avec SHIH WEISHU).

46. Sur les connexions d'ordre supérieur, *Atti V Cong. Un. Mat. Italiana* Pavia-Torino (1956), 326-328.

47. Gattungen von Lokalen Strukturen, *Jahres. d. Deutschen Math.* 60-2 (1957), 49-77. (Traduit en français dans *CTGD* [1] III, 1961.)

48. Sur les pseudogroupes de Lie de type fini, *C. R. A. S. Paris* 246 (1958), 360-362.

49. Sur les appuis d'une pyramide convexe et sur les polyèdres convexes sans sommet, *C. R. A. S. Paris* 249 (1959), 2695-2697 (avec A. EHRESMANN).

50. Catégories topologiques et catégories différentiables, *Coll. Géom. Diff. Globale* Bruxelles, C.B.R.M. (1959), 137-150.

1) *CTGD* se lit «*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*».

51. Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie, *Rev. Un. Mat. Argent.* 19, Buenos-Aires (1960), 48.

52. Catégorie des foncteurs types, *Rev. Un. Mat. Argentina* XX (1960), 194-209.

53. Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier* X, Grenoble (1960), 307-332.

54. Structures feuilletées, *Proc.* 5^{th} *Can. Math. Cong., Montréal* (1961), 109-172.

55. Elargissements de catégories, *CTGD* III (1961), 25-73.

56. Archimède et la Science moderne, *Celeb. Archimedee*, Syracuse (1961), 25-37.

57. Catégories doubles et catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963) 1198-1201.

58. Catégorie double des quintettes; applications covariantes, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 1891-1894.

59. Catégories structurées d'opérateurs, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 2080-2083.

60. Sous-structures et applications $\mathcal{K}$-covariantes, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 2280-2283.

61. Structures quotient et catégories quotient, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 5031-5034.

62. Complétion des catégories ordonnées, *C. R. A. S. Paris* 257 (1963), 4110-4113.

63. Catégories structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 80, Paris (1963), 349-426.

64. Quintettes et applications covariantes, *CTGD* V (1963), 1-22.

65. Catégories structurées quotient, *CTGD* V (1963), 1-4.

66. Structures quotient, *Comm. Math. Helv.* 38 (1963), 219-283.

67. Teilstrukturen und Faktorstrukturen, *Jahrestagung Deutschen Math. Ver.* Frankfurt (1963), 1.

68. Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Inst. Fourier* XIII-2, Grenoble (1963), 1-60.

69. Sous-structures et catégories ordonnées, *Fund. Math.* LIV (1964), 211-228.

70. Produit croisé de catégories, *C. R. A. S. Paris* 258 (1964), 2461-2464.

71. Complétion des catégories sous-prélocales, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 701-704.

72. Expansion d'homomorphismes en foncteurs, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 1372-1375.

73. Cohomologie sur une catégorie, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 1683-1686.

74. Sur une notion générale de cohomologie, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 2050-2053.

75. Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, *Ann. Inst. Fourier* XIV 1, Grenoble (1964), 205-268.

76. Complétion des catégories ordonnées, *Ann. Inst. Fourier* XIV-2, Grenoble (1964), 89-144.

77. Catégories et Structures, Extraits, *CTGD* VI (1964), 1-31.

78. Prolongements des catégories différentiables, *CTGD* VI (1964), 1-8.

79. Expansion générale des foncteurs, *C. R. A. S. Paris* 260 (1965), 30-33.

80. Catégorie quotient d'une catégorie par une sous-catégorie, *C. R. A. S. Paris* 260 (1965), 2116-2119.

81. *Catégories quasi-topologiques et leurs prolongements*, Université Paris (1965), 1-15.

82. Quasi-surjections et structures quasi-quotient, *C. R. A. S. Paris* 261 (1965), 1577-1580.

83. Quasi-catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 261 (1965), 1932-1935.

84. Groupoïdes structurés quasi-quotient et quasi-cohomologie, *C. R. A. S.* 261 (1965), 4583-4586.

85. Espèces de structures sous-inductives, *CTGD* VII (1965), 1-42.

86. Guide des catégories ordonnées, *CTGD* VII (1965), 43-49.

87. Expansion des systèmes de structures dominés, *C. R. A. S. Paris* 262 (1966), 8-11.

88. Adjonction de limites aux catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 263 (1966), 655-658.

89. Quasi-élargissement d'un système de structures structuré, *C. R. A. S.* 263 (1966), 762-765.

90. 1^er^ théorème d'expansion structurée, *C. R. A. S. Paris* 263 (1966), 863-866.

91. Cohomologie à valeurs dans une catégorie dominée, *Coll. Topo. algébrique* Bruxelles, C. B. R. M. (1966), 21-80.

92. Catégories topologiques I, II, III, *Indig. Math.* 28-1 (1966), 133-175.

93. Introduction to the theory of structured categories, *Tech. Report* 10, Un. Kansas, Lawrence (1966), 96 pages.

94. Trends toward unity in Mathematics, *CTGD* VIII (1966), 1-7.

95. 2^e^ théorème d'expansion structurée, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 5-8.

96. Théorème de quasi-expansion régulière, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 56-59.

97. Problèmes universels relatifs aux catégories *n*-aires, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 273-276.

98. Sur les structures algébriques, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 840-843.

99. Adjonction de limites à un foncteur fidèle ou à une catégorie, *C. R. A. S. Paris* 265 (1967), 296-299.

100. Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), 293-363.

101. Propriétés infinitésimales des catégories différentiables, *CTGD* IX-1 (1967), 1-9.

102. Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *CTGD* IX-1-2 (1967), 33-180.

103. Sur les catégories différentiables, *Atti Conv. Int. Geom. Diff.* Bologna (1967), 31-40.

104. Catégories structurées généralisées, *CTGD* X-1 (1968), 139-168.

105. Catégories structurées et catégories différentiables, *Revue Roumaine Math. Pures et Appl.* 7, XIII (1968), 967-977.

106. Esquisses et types de structures algébriques, *Bul. Inst. Polit. Iaşi* XIV-1-2 (1968), 1-14.

107. Prolongements universels d'un foncteur par adjonction de limites, *Dissertationes Math.* LXIV, Varsovie (1969), 1-72.

108. Construction de structures libres, *Lecture Notes in Math.* 92, Springer (1969), 74-104.

109. Catégories de foncteurs structurés, *CTGD* XI-3 (1969), 329-383 (avec A. EHRESMANN).

110. Elargissement complet d'un foncteur local, *CTGD* XI-4 (1969), 405-420.

111. *Espaces fibrés et variétés différentiables*, Univ. Paris VII (1969), 1-44 (avec A. EHRESMANN).

112. Catégories de foncteurs structurés, *Coll. E. Cartan*, Un. Paris VII (1970) 1 page.

113. *Etude des catégories dans une catégorie*, Univ. Paris VII (1972), 1-45 (avec A. EHRESMANN).

114. *Sur le plongement d'un prototype dans un type*, Univ. Paris VII (1972), 1-12 (avec A. EHRESMANN).

115. Categories of sketched structures, *CTGD* XIII-2 (1972), 105-214 (avec A. EHRESMANN).

116. Categories in differential Geometry, Résumés Coll. Amiens 1973, *CTGD* XIV-2 (1973), 175-177.

117. Multiple functors, I: Limits relative to double categories, *CTGD* XV-3 (1974), 215-292 (avec A. EHRESMANN).

118. Tensor products of topological ringoids, *CTGD* XIX-1 (1978), 87-112 (avec A. EHRESMANN).

119. Multiple functors, II: The monoidal closed category of multiple categories, *CTGD* XIX-3 (1978), 295-334 (avec A. EHRESMANN).

120. Multiple functors, III: The cartesian closed category Cat_n, *CTGD* XIX-4 (1978), 387-444 (avec A. EHRESMANN).

121. Multiple functors, IV: Monoidal closed structures on Cat_n, *CTGD* XX-1 (1979), 59-104 (avec A. EHRESMANN).

2. LIVRES.

122. *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965, 375 pages.

123. *Algèbre* (Maîtrise de Math. C3), C.D.U. Paris, 1968, 168 pages.

3. COURS MULTIGRAPHIES.

124. *Cinématique*, Univ. Strasbourg (à Clermont-Ferrand), 1942.

125. *Espaces fibrés et structures infinitésimales*, 1er chapitre, Univ. Rio de Janeiro, 1952, 24 pages.

126. *Catégories différentiables et Géométrie différentielle*, Chapitres I et II, Sém. Soc. Can. Math., Montréal, 1961, 118 pages.

127. *Cours de Topologie algébrique*, Univ. Paris VII, 1970, 84 pages (avec A. EHRESMANN).

128. *Topologie algébrique*, Univ. Amiens, 1975, 150 pages (avec A. EHRESMANN).

129. *Histoire et Fondements des Mathématiques* (3 chapitres), Univ. Amiens 1977-1978 (avec A. EHRESMANN).

4. DIVERS.

130. Analyse de l'ouvrage de Seifert & Threlfall: «Lehrbuch der Topologie», *Enseignement Math.* 34 (1935), 404.

131. Analyse de l'ouvrage de Alexandroff & Hopf: «Topologie I», *Enseign. Math.* 35 (1936), 403.

132. Analyse de l'ouvrage de Schouten & Struik: «Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie», *Bull. Sc. Math.* 60 (1936), 129-131.

133. Revue critique des thèses de J. Cavaillès: Méthode axiomatique et formalisme, *Revue Philosophique* 131 (1941), 81-86.

134. Analyse de l'ouvrage d'E. Cartan: «Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques», *Bull. Sc. Math.* 70, Paris (1946), 117-122.

135. Analyse de l'ouvrage d'E. Cartan: «Leçons sur la théorie des espaces de Riemann», *Bull. Sc. Math.* 70, Paris (1946), 149-151.

136. *Travaux scientifiques de C. Ehresmann*, Univ. Strasbourg, 1955, 1-19.

137. Rapport sommaire sur les travaux de M. A. Lichnerowicz, *Atti V Cong. Un. Mat. Italiana* Pavia-Torino (1956), 21-26.

138. Topologie algébrique, *Formulaire de Math. à l'usage des Physiciens et Ingénieurs*, C.N.R.S. (1962), 202-220 (avec G. REEB).

139. Déjà vingt ans ..., *CTGD* XVIII-4 (1977), 431-432 (avec A. EHRESMANN).

5. ÉDITION DE TRAVAUX.

140. Edition de l'ouvrage posthume de J. Cavaillès: Sur la logique et la théorie de la Science, P.U.F., 1947, 1e édition (avec G. CANGUILHEM).

141. Edition du Colloque de Géométrie Différentielle de Strasbourg 1953, *Coll. Intern. C.N.R.S.* (1953), 1-198 (avec A. LICHNEROWICZ).

142. Edition des Résumés du Colloque sur l'Algèbre des catégories Amiens 1973, *CTGD* XIV-2 (1973), 153-223 (avec A. EHRESMANN).

143. Edition des Résumés du 2e Colloque sur l'Algèbre des Catégories, Amiens 1975, *CTGD* XVI-3 (1975), 217-340 (avec A. EHRESMANN).

144. Edition des Résumés des Journées T.A.C. de Chantilly, *CTGD* XVI-4 (1975), 425-442 (avec A. EHRESMANN).

145. Publication des:
   . *Receuils d'exposés du Colloque de Topologie de Strasbourg*: 1951, 1952 et 1954.
   . *CTGD*, Volumes 1 à 20, depuis 1957 (avec A. EHRESMANN).
   . *Esquisses Mathématiques*, Volumes 1 à 30, depuis 1970, Paris-Amiens (avec A. EHRESMANN).

A. C. E.

DE 1955 A 1962

Professeur à l'Université de Strasbourg depuis 1939, Charles aimait l'ambiance de sa ville natale. Aussi, malgré un certain désir de participer à la vie mathématique parisienne, a-t-il longtemps hésité à poser sa candidature à l'Université de Paris. C'est pendant son séjour à Yale en 1955 qu'il s'y décide. A Paris, il fait uniquement des cours de troisième cycle, où il expose ses travaux récents sur les structures fibrées et feuilletées, la Géométrie différentielle, puis la théorie des catégories. Trois thèses de Doctorat d'Etat sont soutenues sous sa direction pendant cette période: Haefliger (1958), Srinivasacharyulu et F. Benzécri (1962), et plusieurs autres sont en préparation. Parmi ses chercheurs figurent beaucoup d'étrangers, rencontrés au cours des longs voyages auxquels il consacre une partie de l'année: En 1956, il est invité en Iran et en Inde, pays dont la pensée et la culture l'ont attiré dès son adolescence (à travers Gœthe) et qui ne l'ont pas déçu comme en témoigne la chaleur avec laquelle il m'en parle lors de nos premières rencontres en 1957. Il est Expert de l'UNESCO à Mexico de Juin à Septembre 1958 (et, pour éviter l'avion qui l'inquiètera toujours, il va en bâteau de Paris à New-York et en train de New-York à Mexico). Nous passons l'été 1959 à Buenos-Aires, d'où il va aussi faire quelques conférences au Chili; l'été 1960 à Sao Paulo, dont il revient par la Bolivie, le Pérou, l'Equateur et le Venezuela; l'été 1961 à Montréal, où sont rédigés les mémoires /54/ et /126/. De plus il donne des séries de conférences en Europe: Allemagne de l'Est et de l'Ouest, Belgique, Italie, Pologne; plusieurs des articles écrits à cette époque sont ses contributions à des Colloques /46, 47, 50, 51, 52, 54, 56/.

Ces voyages, dont il dit volontiers être plus fier que de ses travaux mathématiques, étendent sa renommée en faisant connaître sa conception de la Géométrie différentielle comme étude de la catégorie des jets et de ses actions. S'il s'intéresse vivement à la théorie des catégories, c'est encore du point de vue du géomètre, et il commence seulement à amorcer le virage vers cette théorie qui, plus tard, lui vaudra une certaine incompréhension.

A Paris, il participe activement à la vie mathématique. A partir de 1957, il anime le *Séminaire de Topologie et Géométrie Différentielle*, auquel il invite de nombreux étrangers. Les exposés sont publiés dans les premiers volumes de ce qui deviendra le périodique «*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*». Bien que peu attiré par le travail administratif, il accepte pour 1958-59 d'être le premier Secrétaire du Département de Mathématiques de Paris. Il est aussi membre du Comité National des Mathématiciens Français et de l'Union Mathématique Internationale, et il entre en 1961 au bureau de la Société Mathématique de France. Enfin il est l'un des promoteurs d'une union mathématique européenne (qui ne verra malheureusement pas le jour à cette époque), car l'idée d'une Europe unie est chère à son cœur d'Alsacien.

A. C. E.

Les articles originaux faisant l'objet de cette Partie II-1 sont reproduits ci-après (par procédé photographique) ; les textes dont le format initial a dû être réduit (pages 3 à 124) précèdent les autres, de sorte que l'ordre chronologique n'est pas entièrement respecté. Les cours /125, 126/, qui avaient seulement été multigraphiés, ont été recomposés sur machine Varityper.

Les numéros rajoutés dans les marges extérieures réfèrent aux Commentaires situés à la fin du livre (cf. page 333).

/125/

STRUCTURES LOCALES ET REVÊTEMENTS

par Charles EHRESMANN

Premier chapitre du cours donné à l'Université du Brésil (Rio de Janeiro, Juillet-Décembre 1952) sur le sujet :
Espaces fibrés et *Structures infinitésimales*

(Texte multigraphié à Rio de Janeiro en 1952)

1. La notion d'espèce de structures mathématiques.

Nous aurons à considérer diverses espèces de structures mathématiques : structures topologiques, structures feuilletées, structures fibrées, structures infinitésimales. Toutes ces structures sont des structures de caractère *local.* Pour donner un sens précis à cette affirmation, il est indispensable d'avoir la notion générale de *structure mathématique* (1).

Partons de l'exemple de *structures topologiques.* Une *structure topologique* (ou une *topologie*) est définie par la donnée d'un ensemble O de parties de E vérifiant les conditions suivantes :

(O_1) La réunion d'une famille quelconque d'ensembles appartenant à O appartient aussi à O.

(O_2) L'intersection d'une famille finie d'ensembles appartenant à O appartient aussi à O.

Un *espace topologique* est un ensemble E muni d'une structure topologique. Toute partie de E appartenant à l'ensemble O correspondant est appelé ensemble ouvert de cet espace topologique.

Remarquons qu'en vertu de la condition (O_1) la partie vide $\emptyset$ de E est un ensemble ouvert et qu'en vertu de (O_2) l'ensemble E lui-même, c'est-à-dire la partie pleine de E, est un ensemble ouvert.

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. L'ensemble O est une partie de $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire un élément $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, que nous pouvons appeler *l'élément structural* définissant la topologie. Les propriétés (O_1) et (O_2) définissent une partie Ω de de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, ensemble des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ qui possèdent ces propriétés. Tout élément $\mathcal{T}$ de Ω définit une topologie sur E ; l'ensemble Ω définit l'espèce des structures topologiques sur E. Nous pouvons partir d'un ensemble E quelconque. La loi de formation de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ à partir de E et en plus les deux propriétés (O_1) et (O_2) définissent la classe des structures topologiques sur un ensemble quelconque, et cette classe s'appellera l'espèce des structures topologiques. Les propriétés (O_1) et (O_2) sont appelés les axiomes de l'espèce des structures topologiques.

D'une façon générale, une espèce de structures mathématiques est déterminée par :

1°) La donnée d'une loi de formation d'un ensemble M à partir d'un ensemble quelconque E et d'un certain nombre d'ensembles auxiliaires $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Cette loi de formation indique une suite d'opérations du type suivant : a) formation de l'en-

(1) N. Bourbaki, Théorie des Ensembles, fasc. Résultats (Paris, H).

semble des parties d'un ensemble déjà obtenu; b) formation du produit de deux ensembles déjà obtenus.

2°) La donnée d'un système d'axiomes imposant des conditions aux éléments de M, c'est-à-dire déterminant une partie W de M.

La loi de formation donnée définit un *type de structures*; tout élément de M définit une structure de ce type sur E.

L'ensemble W constitue une *espèce de structures mathématiques sur* E. Tout élément V de W sera une structure de cette espèce sur E. Les axiomes peuvent faire intervenir des structures définies préalablement sur E et sur les ensembles auxiliaires. Supposons qu'ils ne fassent intervenir aucune structure définie préalablement sur E. On pourra prendre alors pour E un ensemble quelconque, les ensembles auxiliaires étant aussi quelconques, ou bien fixés d'avance et munis éventuellement de structures déterminées préalablement. La loi de formation du type de structures et le système d'axiomes définissent alors une classe de structures sur E quelconque, et cette classe s'appellera une espèce de structures mathématiques. 1+

EXEMPLES. L'espèce des structures topologiques vérifiant des axiomes supplémentaires : structures topologiques séparées, structures d'espace topologique compact ou d'espace topologique connexe. Structures d'ordre. Structures algébriques. Structures composées des structures élémentaires précédentes; c'est-à-dire structures définies par un couple de deux structures vérifiant des axiomes supplémentaires; on obtient ainsi, par exemple, les structures de groupes topologiques, d'espaces vectoriels topologiques, etc.

Considérons une espèce de structures mathématiques pour laquelle les ensembles auxiliaires $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont fixés et munis éventuellement de structures déterminées préalablement. Etant donnés deux ensembles E et E', le type de structures considéré détermine, à partir de E et E', deux ensembles M et M', et le système d'axiomes en détermine deux sous-ensembles W et W'. Toute application biunivoque f de E sur E' admet une extension f' appliquant d'une façon biunivoque M sur M'. Comme les axiomes ne font intervenir aucune structure préalable sur E et sur E', l'extension f' applique 2
W sur W'; c'est-à-dire transforme toute structure de l'espèce considérée donnée sur E en une structure de même espèce sur E'. Si S et S' sont deux structures de l'espèce considérée sur E et sur E', c'est-à-dire deux éléments de W et W', un isomorphisme de S sur S' est une application biunivoque f de E sur E' dont l'extension f' applique S sur S'. En particulier le groupe des permutations de E laisse invariant W. Le sous-groupe qui laisse invariant S est le groupe des automorphismes de S. Etant donnée une espèce de structures sur E dont le système d'axiomes fait intervenir une structure

préalable sur E, cette espèce de structures est invariante par le groupe des automorphismes de cette structure préalable. 1

Considérons maintenant deux espèces de structures, en général de types différents. Sur un ensemble E, les deux types correspondent à deux ensembles M et M' et les deux espèces de structures correspondent à deux sous-ensembles $W \subset M$ et $W' \subset M'$. On dira que les deux espèces de structures sont *équivalentes* sur E lorsqu'on aura défini une application biunivoque de W sur W', *invariante par les permutations de* E. On pourra identifier alors les structures qui se correspondent par cette application. Si l'ensemble E n'est pas fixé, on dira que les deux espèces de structures sont équivalentes lorsque pour un ensemble E quelconque on aura défini une application biunivoque (dite application d'équivalence) de W sur W' de telle façon que les applications d'équivalences associées à deux ensembles E et E' se correspondent par toute application biunivoque de E sur E'.

Par exemple, une structure topologique sur E peut être identifiée à la structure définie par la donnée de l'ensemble des ensembles fermés, ou par la donnée des ensembles de voisinages des points de E, ou par la donnée des adhérences des sous-ensembles de E.

Plus généralement, considérons une application de W dans W' invariante par les permutations de E; nous dirons que c'est une application *canonique* de W dans W'. Si elle fait correspondre à une structure $S \in W$ une structure $S' \in W'$, on pourra dire que S' est une *structure sous-jacente* à S, ou que S' est une *infrastructure* de S, ou encore que S est une *superstructure* de S'. D'une façon générale, étant données deux structures S et S' sur E, la structure S peut être dite plus précise que S' lorsque son groupe d'automorphismes est un sous-groupe de celui de S'. En particulier S est appelée une structure triviale lorsque son groupe d'automorphismes est le groupe de toutes les permutations de E. On pourra identifier toutes les structures triviales sur E. Introduire une structure non triviale sur E revient à détruire l'homogénéité complète de E. 2 +

2. La notion d'espèce de structures locales.

Une *espèce de structures locales* est une espèce de structures (α) pour laquelle il existe une *loi d'induction*, c'est-à-dire une loi qui associe à toute structure S d'espèce (α), donnée sur un ensemble E, un ensemble Φ de parties de E et qui détermine sur tout ensemble $U \in \Phi$ une structure d'espèce (α) appelée structure induite par S sur U muni de cette structure induite étant appelée sous-espace distingué de E, de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites :

1°) *La loi d'induction est canonique.* C'est-à-dire si une application biunivoque f de E sur E' transporte la structure S sur une structure S' définie sur E', la restriction de f à chaque sous-espace distingué de E est un isomorphisme sur un sous-espace distingué de E' muni de la structure S'.

2°) Φ est l'ensemble des ensembles ouverts non vides d'une topologie $\mathcal{T}$ sur 1
E. On dira que S est une structure locale par rapport à cette topologie.

3°) *Transitivité des structures induites.* Si U est un sous-espace distingué de E (et par conséquent muni de la structure induite par S), les sous-espaces distingués de U sont les sous-espaces distingués de E qui sont contenus dans U.

4°) *Axiome du recollement.* Soit E' la réunion d'une famille de sous-ensembles de E dont chacun est muni d'une structure d'espèce (α) telle que la condition suivante soit satisfaite : si E_i et E_j sont deux ensembles de la famille dont l'intersection $E_i \cap E_j$ ne soit pas vide, celle-ci est sous-espace distingué de E_i et E_j et les structures induites sur $E_i \cap E_j$ par les structures données sur E_i et E_j sont identiques. Il existe alors sur E' une structure S' d'espèce (α) bien déterminée telle que chaque E_i muni de sa structure soit sous-espace distingué de E' muni de S'. Nous dirons que les structures données sur les E_i se raccordent et que E' muni de la structure S' est
obtenu par recollement des sous-espaces E_i. 2 +

En vertu des conditions précédentes la structure induite par S sur E est identique à S.

3. Exemple des structures topologiques.

Les structures topologiques forment une espèce de structures locales. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur E. Alors Φ est l'ensemble des ensembles ouverts non vides de cette topologie. La topologie induite sur $U \in \Phi$ est celle dont les ouverts sont les ouverts de E contenus dans U. La transitivité des topologies induites est évidente. Soit (E_i) un recouvrement de E' et supposons donné sur chaque E une topologie $\mathcal{T}_i$ telle que $E_i \cap E_j$ soit ouvert dans E_i et dans E_j, les topologies induites sur $E_i \cap E_j$ par $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_j$ étant identiques. Une topologie $\mathcal{T}'$ sur E' telle que E_i soit ouvert et telle que $\mathcal{T}_i$ soit la topologie induite par $\mathcal{T}'$ sur E_i est forcément la topologie qui admet pour ensembles ouverts les réunions quelconques d'ensembles ouverts des espaces E_i.

L'espace E' muni de $\mathcal{T}'$, c'est-à-dire l'espace topologique obtenu par recol- 3
lement des espaces E_i, peut être identifié canoniquement à l'espace suivant : considérons l'ensemble somme $\sum_i E_i$, c'est-à-dire l'ensemble des couples (i, x), où $x \in E_i$. L'application biunivoque $x \to (i, x)$ de E_i sur un sous-ensemble E'_i de $\Sigma_i E_i$ transporte la topologie $\mathcal{T}_i$ de E_i sur une topologie $\mathcal{T}'_i$ de E'_i. La topologie d'espace somme sur $\Sigma_i E_i$ est celle dont les ouverts sont des réunions quelconques d'ouverts des espaces E'_i. Soit f l'application $(i, x) \to x$ de $\Sigma_i E_i$ sur E'. Soit ρ la relation d'équivalence associée dans $\Sigma_i E_i$ et considérons l'espace topologique quotient $\Sigma_i E_i / \rho$. L'appli-

cation biunivoque de $\Sigma_i E_i/\rho$ sur E' canoniquement associée à f est un homéomorphisme, qui permet d'identifier canoniquement $\Sigma_i E_i/\rho$ avec E'.

Remarquons qu'on peut définir la topologie induite sur un sous-ensemble A quelconque d'un espace topologique E. Mais par recollement de sous-espaces A_i formant un recouvrement de E on ne retrouve pas forcément l'espace topologique E; la topologie sur E n'est pas toujours déterminée par les topologies induites sur les sous-espaces A_i. Il y a cependant un autre cas important où l'application canonique de $\Sigma_i A_i/\rho$ sur E est un isomorphisme, désignant toujours par ρ la relation d'équivalence associée à l'application canonique de $\Sigma_i A_i$ sur E. C'est le cas où les A_i sont des ensembles fermés tels que tout point de E admette un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini des ensembles A_i.

4. Le pseudogroupe des automorphismes locaux d'une structure locale.

Soit S une structure locale d'une espèce donnée définie sur E. Soit Γ l'ensemble des automorphismes locaux de E, c'est-à-dire des isomorphismes d'un sous-espace distingué sur un sous-espace distingué. Γ est un *pseudogroupe de transfor-*
1 *mations*, c'est-à-dire un ensemble de transformations vérifiant les axiomes suivants :

1°) Tout $f \in \Gamma$ est une application biunivoque dont la source et le but appartiennent à Φ, où Φ est l'ensemble des ouverts non vides d'une topologie sur E; cette topologie s'appellera la *topologie sous-jacente* au pseudogroupe de transformations.

2°) Soit U la réunion d'une famille d'ensembles $U_i \in \Phi$. Pour qu'une application biunivoque f de U sur un sous-ensemble $f(U)$ de E appartienne à Γ, il faut et il suffit que la restriction de f à U_i appartienne à Γ, pour chaque indice i.

3°) Pour tout $U \in \Phi$, l'application identique de U appartient à Γ. Si $f \in \Gamma$, on a aussi $f^{-1} \in \Gamma$. Si $f \in \Gamma$ et $f' \in \Gamma$ et si de plus $f'f$ est défini, on a aussi $f'f \in \Gamma$.

Le composé $f'f$ est le composé des applications f' et f; nous le considérerons comme défini seulement dans le cas où la source de f' est identique au but de f. Cette
2 loi de composition définit alors sur Γ une structure de groupoïde, c'est-à-dire une loi de composition interne non partout définie satisfaisant aux axiomes suivants :

1°) Si les composés xy et yz sont définis, les composés $(xy)z$ et $x(yz)$ sont définis et égaux.

2°) Si les composés xy et $x'y$ (respectivement yx et yx') sont définis et égaux, on a $x = x'$.

3°) A tout élément x de l'ensemble correspondent trois éléments notés e_x, e'_x et x^{-1} tels que $e_x x = x$, $xe'_x = x$, $x^{-1}x = e'_x$, $xx^{-1} = e_x$; e_x est appelé l'unité à gauche de x; e'_x l'unité à droite de x et x^{-1}, l'inverse de x.

On voit facilement que dans un groupoïde tout élément idempotent e, c'est-à-dire tel que $ee = e$, est unité à gauche (resp. à droite) pour tout élément x tel que ex (resp. xe) soit défini. Pour que le composé xy soit défini, il faut et il suffit que 1
$e'_x = e_y$. Un groupoïde sera dit connexe s'il satisfait à la condition suivante : étant donnés deux éléments idempotents quelconques e et e', il existe au moins un élément x admettant e comme unité à gauche et e' comme unité à droite.

Dans le cas d'un pseudogroupe de transformations, l'unité à gauche (resp. à droite) de f est l'application identique de la source (resp. du but) de f.

L'intersection d'une famille (Γ_i) de pseudogroupes de transformations sur E est un pseudogroupe de transformations Γ sur E. La topologie sous-jacente à Γ est l'intersection des topologies sous-jacentes aux Γ_i. Etant donné un pseudogroupe de transformations Γ, la topologie sous-jacente à un sous-pseudogroupe de Γ est moins fine que la topologie sous-jacente à Γ. Etant donnée une partie A de Γ, l'intersection de tous les sous-pseudogroupes de Γ qui contiennent à A est le sous-pseudogroupe engendré par A.

EXEMPLES. Le pseudogroupe des automorphismes locaux d'un espace topologique E. 2
Le plus petit sous-pseudogroupe admettant la même topologie sous-jacente est l'ensemble des applications identiques des ensembles ouverts non vides de E. Si la topologie sous-jacente à un pseudogroupe de transformations n'admet qu'un seul ensemble ouvert non vide, à savoir l'espace tout entier, le pseudogroupe est un groupe de transformations.

5. Structures localement isomorphes.

Soit S une structure locale sur E; soit S' une structure de même espèce sur E'. Un *isomorphisme local* f de E sur E', c'est-à-dire un isomorphisme d'un sous-espace distingué de E sur un sous-espace distingué de E', sera aussi appelé une *carte locale* de E sur E'. Etant données deux cartes locales f_1 et f_2 dont les buts (c'est-à-dire les buts des applications f_1 et f_2) ont une intersection non vide, au couple (f_1, f_2) est alors associé l'automorphisme local φ_{21} de E tel que $f_1(x) = f_2(x')$,
où $x \in E$ et $x' \in E$, soit équivalent à $x' = \varphi_{21}(x)$. Nous dirons que φ_{21} est le *changement de cartes locales* associé à (f_1, f_2). 3

Appelons *atlas* de E sur E' un ensemble de cartes locales de E sur E' dont les buts recouvrent E'.

S'il existe un atlas de E sur E', nous dirons que E' est *localement isomorphe* à E. Cette propriété est *transitive*, c'est-à-dire on a :

PROPOSITION. *Si E' est localement isomorphe à E et E'' localement isomorphe à E', alors E'' est localement isomorphe à E.* 4

Si E' est localement isomorphe à E, l'ensemble des cartes locales de E sur E' est appelé *atlas complet* de E sur E'.

Soit $\mathcal{A} = (f_i)$ un ensemble d'applications biunivoques de sous-espaces distingués U_i de E, muni de la structure locale S, sur des sous-espaces U'_i d'un ensemble E' sur lequel nous ne considérons aucune structure donnée d'avance. Appelons encore f_i une carte locale de E sur E'. Si les U'_i recouvrent E', c'est-à-dire si $E' = \bigcup_i U'_i$, nous dirons encore: $\mathcal{A}$ est un atlas de E sur E'. Si les changements de cartes locales φ_{ji} associés aux couples (f_i, f_j) appartiennent tous au pseudogroupe Γ des automorphismes locaux de E, nous dirons que $\mathcal{A}$ est compatible avec Γ.

1 Soit $\mathcal{A}$ un atlas compatible avec Γ. En transportant par f_i la structure de U_i sur U'_i, les structures ainsi définies sur les U'_i se raccordent. Donc $\mathcal{A}$ détermine sur E' une structure locale S' de même espèce que S.

6. L'espèce des structures locales associées à un pseudogroupe de transformations.[(1)]

Soit Γ un pseudogroupe de transformations défini dans E et soit $\mathcal{A}$ un atlas de E sur E' compatible avec Γ. Nous ne considérons que des cartes locales ayant pour source un ensemble ouvert de E, pour la topologie sous-jacente à Γ.

Une carte locale de E sur E' sera dite compatible avec $\mathcal{A}$ lorsqu'en l'adjoignant à $\mathcal{A}$ on obtient encore un atlas compatible avec Γ. Un atlas $\mathcal{A}$ sera appelé atlas complet compatible avec Γ lorsqu'il est identique à tout atlas compatible avec Γ et contenant $\mathcal{A}$.

PROPOSITION. *Etant donné un atlas $\mathcal{A}$ de E sur E', compatible avec Γ, soient f_λ et f_μ deux cartes locales de E sur E' dont chacune est compatible avec $\mathcal{A}$. Par adjonction à $\mathcal{A}$ de f_λ et f_μ on obtient encore un atlas compatible avec Γ.*

En effet, soit f_i une carte appartenant à $\mathcal{A}$. Considérons l'ensemble $U_{i\mu\lambda}$ des points x' de E tels qu'il existe des points x' et x'' de E vérifiant les relations $f_\lambda(x) = f_\mu(x') = f_i(x'')$. On a $x' = \varphi_{\mu\lambda}(x) = \varphi_{\mu i}(\varphi_{i\lambda}(x))$ où φ_{ba} désigne le changement de cartes locales associé à un couple de cartes (f_a, f_b). La restriction de $\varphi_{\mu\lambda}$ à $U_{i\mu\lambda}$ appartient donc à Γ. Comme $\mathcal{A}$ est un atlas de E sur E', les ensembles $U_{i\mu\lambda}$ recouvrent l'ensemble $U_{\mu\lambda}$, source de $\varphi_{\mu\lambda}$. Par conséquent $\varphi_{\mu\lambda}$ est réunion[(1')] d'applications appartenant à Γ c'est-à-dire $\varphi_{\mu\lambda}$ appartient à Γ.

PROPOSITION. *Tout atlas $\mathcal{A}$ compatible avec Γ est contenu dans un atlas complet $\overline{\mathcal{A}}$ compatible avec Γ. Cet atlas $\overline{\mathcal{A}}$ est unique et s'appellera l'atlas complet engendré par $\mathcal{A}$.*

En effet, l'atlas $\overline{\mathcal{A}}$ s'obtient par adjonction à $\mathcal{A}$ de toutes les cartes compatibles séparément avec $\mathcal{A}$. On pourra l'obtenir encore de la manière suivante : si $f \in \mathcal{A}$,

(1) C. Ehresmann. Sur la théorie des espaces fibrés (Colloque de Topologie algébrique, C.N.R.S., Paris, 1947).

(1') Soit f une application de source A et supposons que A soit la réunion d'une famille d'ensembles A_i. Si f_i est la restriction de f à A_i, nous dirons que f est réunion des f_i.

on adjoint à $\mathfrak{A}$ toute restriction de f à un ensemble ouvert de E. Soit $\mathfrak{A}'$ l'atlas ainsi obtenu. Si $g \in \mathfrak{A}'$, on adjoint à $\mathfrak{A}'$ toute carte $g\varphi$, où $\varphi \in \Gamma$. Soit $\mathfrak{A}''$ l'atlas ainsi obtenu. L'ensemble des réunions de cartes locales appartenant à $\mathfrak{A}''$ forme alors l'atlas
$\overline{\mathfrak{A}}$ engendré par $\mathfrak{A}$. 1

DÉFINITION. *Un atlas complet de E sur E' compatible avec Γ définit sur E' une* structure associée à Γ. *La classe des structures associées à Γ, sur un ensemble quelconque, s'appellera* l'espèce des structures associées à Γ.

D'après la proposition précédente, un atlas incomplet compatible avec Γ détermine déjà une structure associée à Γ unique, à savoir celle qui est définie par l'atlas complet engendré par lui.

PROPOSITION. *L'espèce des structures associées à Γ est une espèce de structures locales.*

On a, en effet, la loi d'induction suivante : soit S la structure définie sur E' par l'atlas complet $\mathfrak{A}$ de E sur E', compatible avec Γ. L'ensemble Φ des sous-ensembles distingués de E', associé à S, sera l'ensemble des réunions de buts de cartes locales appartenant à $\mathfrak{A}$. La structure induite par S sur $U \in \Phi$ est définie par l'ensemble des cartes locales appartenant à $\mathfrak{A}$ et dont le but est contenu dans U. Cet ensemble de cartes locales forme bien un atlas complet de E sur U compatible avec Γ. On vérifie facilement les axiomes auxquels doit satisfaire la loi d'induction d'une espèce de structures locales : les buts des cartes locales appartenant à $\mathfrak{A}$ forment la base d'une topologie sur E'. La transitivité des structures induites est évidente. Soit E' la réunion de sous-ensembles E'_i dont chacun est muni d'une structure S_i définie par un atlas complet $\mathfrak{A}_i$ de E sur E'_i, compatible avec Γ. Pour que les structures S_i se raccordent, il faut et il suffit que la réunion des atlas $\mathfrak{A}_i$ soit un atlas compatible avec Γ. Mais cette réunion engendre alors un atlas complet $\overline{\mathfrak{A}}$ compatible avec Γ, et celui-ci définit sur E' une structure associée à Γ induisant sur chaque E_i la structure S_i. Nous avons ainsi vérifié l'axiome du recollement.

Si f est une application biunivoque de E' sur E'', la structure déduite de S
par f est celle qui est définie par l'atlas $f\mathfrak{A}$ formé par l'ensemble des cartes (ff_i), 2
où f_i est une carte quelconque appartenant à $\mathfrak{A}$.

En particulier Γ définit un atlas complet de E sur E compatible avec Γ, donc une structure S_o associée à Γ. *Cette structure S_o admet Γ pour pseudogroupe des automorphismes locaux.*

Un atlas complet $\mathfrak{A}$ de E sur E', compatible avec Γ, est l'atlas complet des isomorphismes locaux de E muni de la structure S_o sur E' muni de la structure S définie par $\mathfrak{A}$.

Soit Γ' le pseudogroupe des automorphismes locaux de la structure S. On peut définir une application canonique de l'espèce des structures associées à Γ' dans l'espèce des structures associées à Γ. Soit S' la structure définie sur E'' par un atlas com-
1 plet $\mathcal{A}'$ de E' sur E'' compatible avec Γ'. Désignons par $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ l'ensemble des cartes locales $f'f$, où $f \in \mathcal{A}$ et $f' \in \mathcal{A}'$. Or $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ est un atlas complet de E sur E'' compatible avec Γ ; il définit donc sur E'' une structure associée à Γ. L'application $\mathcal{A}' \to \mathcal{A}'\mathcal{A}$ est l'application canonique cherchée de l'espèce des structures associées à Γ' dans l'espèce des structures associées à Γ. Montrons que cette application canonique est biunivoque.

Soit $\mathcal{A}^{-1}$ l'ensemble des cartes locales f^{-1}, où $f \in \mathcal{A}$; soit E_o la réunion des sources des cartes locales $f \in \mathcal{A}$. Alors $\mathcal{A}^{-1}$ est un atlas complet de E' sur E_o compatible avec Γ'.

L'ensemble ouvert E_o est *invariant par* Γ, c'est-à-dire identique à l'ensemble des transformés des éléments de E_o par des éléments quelconques de Γ. Soit Γ_o le sous-pseudogroupe de Γ formé par les éléments de Γ dont la source est contenue dans E_o.

Si un atlas $\mathcal{A}''$ de E_o sur E'' est complet en tant qu'atlas compatible avec Γ_o, il est aussi complet en tant qu'atlas de E sur E'' compatible avec Γ ; ceci permet d'identifier l'espèce des structures associées à Γ_o avec une partie de l'espèce des structures associées à Γ. L'application canonique $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'\mathcal{A}$, considérée ci-dessus, est une application biunivoque de l'espèce des structures associées à Γ' sur l'espèce des structures associées à Γ_o ; son inverse s'écrit $\mathcal{A}'' \to \mathcal{A}''\mathcal{A}^{-1}$. Ceci donne une identification canonique de ces deux espèces de structures.

En particulier, si $E_o = E$, les espèces de structures associées à Γ et à Γ' sont ainsi canoniquement identifiées. Ceci a toujours lieu lorsque Γ est transitif. Posons en effet les définitions suivantes :

Le pseudogroupe Γ sera dit *transitif au sens large* lorsque tout ouvert non vide invariant par Γ est identique à E ; il sera dit *transitif au sens strict* lorsque l'ensemble des transformés d'un point donné arbitraire de E par les éléments de Γ est identique à E. Une structure locale sur E sera dite *localement homogène au sens large* lorsque son pseudogroupe d'automorphismes locaux est transitif au sens large; elle sera dite *localement homogène au sens strict* lorsque ce pseudogroupe est transitif au sens strict.

Soit Γ le pseudogroupe des automorphismes locaux d'une structure locale S sur E. On peut considérer l'espèce des structures locales localement isomorphes à S. Cette espèce s'identifie canoniquement à l'espèce des structures associées à Γ, en faisant correspondre à toute structure localement isomorphe à S définie sur E' l'atlas complet des isomorphismes locaux de E sur E', munis respectivement des structures S et S'.

Considérons sur E deux pseudogroupes de transformations Γ et Γ' tels que $\Gamma \subset \Gamma'$. Toute structure S associée à Γ détermine canoniquement une structure S' associée à Γ' : si S est définie par l'atlas $\mathcal{A}$ de E sur E' compatible avec Γ et complet par rapport à Γ, $\mathcal{A}$ engendre un atlas $\mathcal{A}'$ compatible avec Γ' et complet par rapport à Γ'. L'atlas $\mathcal{A}'$ définit la structure S' associée à Γ', que nous appellerons sous-jacente à S; nous dirons aussi que S repose sur S' on est donné sur S'. Nous 1
sommes ainsi conduit aux deux problèmes suivants :

Problème d'existence des structures associées à Γ reposant sur une structure donnée associée à Γ'.

Problème d'isomorphie de deux structures données S_1 et S_2 associées à Γ par rapport à une structure S associée à Γ et sous-jacente à S_1 et à S_2, c'est-à-dire problème d'existence d'un automorphisme de S qui transforme S_1 en S_2.

7. Application des notions d'espace quotient et d'espace somme au recollement de sous-espaces.

Rappelons la définition de *l'espace topologique quotient* E/ρ, où ρ est une *relation d'équivalence* dans l'espace topologique E. L'ensemble E/ρ est l'ensemble des classes d'équivalence de E suivant ρ; l'application p qui fait correspondre à tout $x \in E$ la classe d'équivalence de x suivant ρ est l'application canonique de E sur E/ρ. Les parties de E/ρ dont les images réciproques par p sont des ensembles ouverts de E forment l'ensemble des ensembles ouverts d'une topologie sur E/ρ, appelée *topologie quotient* par ρ de la topologie donnée sur E. L'ensemble E/ρ muni de cette topologie est *l'espace topologique quotient* E/ρ. On dit aussi que cet espace se déduit de E par *identification* des points de E appartenant à une même classe d'équivalence suivant ρ.

Appelons ensemble *saturé* pour ρ toute réunion de classes d'équivalence suivant ρ. Appelons ensemble *saturé engendré* par une partie A de E la réunion des classes d'équivalence ayant une trace non vide sur A. La relation d'équivalence ρ est dite *ouverte* (resp. *fermée*) lorsque tout ensemble ouvert (resp. fermé) de E engendre un ensemble saturé ouvert (resp. fermé), c'est-à-dire lorsque tout ensemble ouvert (resp. fermé) de E se projette par ρ sur un ensemble ouvert (resp. fermé de E/ρ).

Rappelons de même la définition de *l'espace topologique somme* d'une famille d'espaces topologiques A_i, où $i \in I$. Nous supposons que les A_i sont des sous-ensembles d'un ensemble A. Nous appellerons *ensemble somme* de la famille (A_i) l'ensemble $\Sigma_i A_i$ des couples (i, x), où $i \in I$ et $x \in A_i$. Soit α_i l'application biunivoque $x \to (i, x)$ de A_i sur une partie A_i' de $\Sigma_i A_i$. Si τ_i est la topologie donnée sur A_i, soit τ_i' la topologie sur A_i' déduite de τ_i par α_i. L'ensemble des ouverts des espaces A_i' munis des topologies τ_i' forme une *base* d'une topologie τ' sur $\Sigma_i A_i$, c'est-à-dire un ouvert pour τ' est la réunion d'une famille quelconque d'ensembles ouverts des espaces A_i'. *L'ensemble* $\Sigma_i A_i$, *muni de cette topologie* τ', *est l'espace topologique somme de la famille* (A_i). Remarquons que la topologie induite par τ' sur A_i' est la topologie τ_i' et que le sous-espace A_i' est à la fois ouvert et fermé dans $\Sigma_i A_i$; si I comprend plus d'un élément, l'espace topologique somme est donc non connexe.

Supposons $A = \bigcup_i A_i$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout couple $(i, j) \in I \times I$ tel que $i \neq j$. La réunion des applications α_i est alors une application biunivoque canonique α de A sur $\Sigma_i A_i$, qui permet d'identifier A et $\Sigma_i A_i$. Supposons donné sur A une topologie τ telle que τ_i soit la topologie induite par τ sur A_i. Pour que l'application canonique α soit un homéomorphisme de τ sur τ', il faut et il suffit que A_i soit ouvert dans A quelque soit $i \in I$. Lorsque cette condition est vérifiée, l'application α permet donc d'identifier canoniquement l'espace A muni de la topologie τ avec l'espace topologique somme des sous-espaces A_i.

Etant donné un ensemble E muni d'un pseudogroupe de transformations Γ, soit $\mathfrak{A}$ un atlas de E sur E' compatible avec Γ. Soit U_i la source de la carte locale $f_i \in \mathfrak{A}$, l'indice i parcourant l'ensemble d'indices I en correspondance biunivoque avec $\mathfrak{A}$. Considérons l'espace somme $\Sigma_i U_i$ et soit α_i l'application canonique $x \to (i, x)$ de U_i dans $\Sigma_i U_i$. La réunion des applications $f_i \alpha_i^{-1}$ est une application π de $\Sigma_i U_i$ dans E'. Soit ρ la relation d'équivalence associée à π dans $\Sigma_i U_i$. Deux points (i, x) et (j, x') de $\Sigma_i U_i$ sont équivalents suivant ρ lorsque $\pi(i, x) = \pi(j, x')$, ce qui s'écrit aussi $f_i(x) = f_j(x')$ ou $x' = \varphi_{ji}(x)$, en appelant φ_{ji} le changement de cartes locales corres-
1+ pondant à (i, j). Soit E_o' l'espace quotient $(\Sigma_i U_i)/\rho$ et soit π' l'application biunivoque de E_o' sur E' associée à π; c'est-à-dire π' applique la classe d'équivalence de (i, x) sur $\pi(i, x)$. Soit $\mathfrak{A}_o$ l'atlas de E sur E_o' formé par l'ensemble des cartes locales $q\alpha_i$, où q désigne l'application canonique de $\Sigma_i U_i$ sur E_o'. L'atlas $\mathfrak{A}_o$ détermine sur E_o' une structure associée à Γ. *L'application* π' *est un isomorphisme de* E_o' sur E', munis respectivement des structures déterminées par $\mathfrak{A}_o$ et $\mathfrak{A}$, car on a $\mathfrak{A} = \pi' \mathfrak{A}_o$.

On peut considérer sur E une structure locale S dont le pseudogroupe des automorphismes locaux contient Γ. Les atlas $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_o$ déterminent alors sur E' et E_o' deux structures S' et S_o' localement isomorphes à S et π' est un *isomorphisme de* E_o' *sur* E' *munis des structures* S_o' et S'. On pourra dire que E_o' est l'espace obtenu par recollement de la famille de sous-espace (U_i) par les automorphismes locaux φ_{ji}. En particulier soit $E' = E$ et supposons que f_i soit l'application identique de U_i dans E. Alors E est canoniquement isomorphe à l'espace obtenu par recollement des sous-espaces

U_i par les automorphismes identiques φ_{ji} de $U_j \cap U_i$.

En particulier si S est une structure topologique sur E, les structures S'_o et S' sont des structures topologiques sur E'_o et E'. Un ensemble ouvert pour S'_o est l'image par q d'un ensemble ouvert de l'espace topologique $\Sigma_i U_i$, où U_i est muni de la structure induite par S. La relation d'équivalence ρ est ouverte puisque les φ_{ji} sont des automorphismes locaux de S. Il en résulte que E'_o muni de S'_o est l'espace topologique quotient par ρ de l'espace topologique $\Sigma_i U_i$. L'application π' est alors un homéomorphisme de cet espace E'_o sur E' muni de la topologie S.

8. Espaces étalés.

Soit E un espace topologique, soit Φ l'ensemble des ensembles ouverts non vides de E et soit Γ le pseudogroupe des applications identiques des ensembles appartenant à Φ (appelé pseudogroupe des applications identiques locales).

DÉFINITION. *Nous dirons qu'un atlas complet compatible avec Γ de E sur un ensemble E' définit sur E' une structure* d'espace étalé dans E.

Considérons un atlas $\mathfrak{A}$ compatible avec Γ de E sur E'. Il engendre un atlas complet $\overline{\mathfrak{A}}$ compatible avec Γ et détermine donc sur E' une structure d'espace étalé dans E. L'atlas $\mathfrak{A}^{-1}$ de E' sur un sous-espace E_o de E admet une réunion formant une application p de E' dans E. En effet, soient f_i et f_j deux cartes locales appartenant à $\mathfrak{A}$. En désignant par U_i et U_j les sources de f_i et f_j, par U'_i et U'_j leurs buts, les applications f_i^{-1} et f_j^{-1} coïncident sur $U'_i \cap U'_j$, car le changement de cartes φ_{ji} est l'application identique d'un ensemble ouvert U_{ij} contenu dans $U_i \cap U_j$. On a donc une application p bien déterminée de E' dans E dont la restriction à U'_i est f_i^{-1}, quel que soit $f_i \in \mathfrak{A}$. Nous dirons que p est la *projection canonique* de E' dans E, correspondant à la structure d'espace étalé. La topologie $\mathfrak{T}$ de E est transportée par $\mathfrak{A}$ sur une topologie $\mathfrak{T}'$ de E'. La restriction de p à U'_i, qui est ouvert pour $\mathfrak{T}'$, est un homéomorphisme sur U_i.

Inversement partons d'un espace topologique E' et d'une application p de E'
dans E. Nous dirons que p *étale* E' dans E lorsque tout point de E' admet un voisi- 1
nage ouvert U' tel que la restriction de p à U' soit un homéomorphisme sur un ensemble ouvert U de E. L'ensemble des restrictions de p qui possèdent cette propriété est un atlas de E' dans E formé d'homéomorphismes locaux. L'ensemble des cartes inverses est un atlas $\mathfrak{A}$ de E sur E', qui est compatible avec Γ et complet, c'est-à-dire qui détermine sur E' une structure d'espace étalé dans E. On a donc la proposition suivante :

PROPOSITION. *Un espace E' étalé dans E admet une projection canonique p qui étale*

E' dans E. Inversement une structure d'espace étalé dans E est déterminée sur E' par la donnée d'une topologie sur E' et d'une application p qui étale E' dans E.

Soit E' un espace étalé dans E et considérons sur E une structure locale S telle que tout ensemble de Φ soit aussi un ensemble ouvert pour la topologie sous-jacente à S. L'atlas $\mathfrak{A}$ qui définit la structure d'espace étalé est compatible avec le pseudogroupe des automorphismes locaux de S et détermine donc sur E' une structure S' localement isomorphe à S. Nous dirons que S' est *l'image réciproque* de S par la projection canonique p de E' dans E.

La projection p qui étale E' dans E applique tout ouvert de E' sur un ouvert de E. La relation d'équivalence ρ associée à p dans E' est donc une relation d'équivalence ouverte et l'application canonique de E'/ρ dans E, associée à p, est un homéomorphisme. Tout point de E' admet un voisinage ouvert tel que la restriction de ρ à ce voisinage soit l'identité. Réciproquement soit ρ une relation d'équivalence ouverte dans un espace topologique E' possédant cette propriété. La projection canonique de E' sur E'/ρ étale alors E' sur E'/ρ.

Soit Γ' le *pseudogroupe des automorphismes locaux* de E', par rapport à sa structure d'espace étalé dans E. Un automorphisme local $\varphi' \in \Gamma'$ est un automorphisme local de E' pour la topologie $\mathcal{T}'$ vérifiant de plus la condition $p = p\,\varphi'$. Remarquons que tout $\varphi' \in \Gamma'$ est aussi un automorphisme local de la structure S', image réciproque par p de la structure locale S considérée sur E.

Appelons *classe d'intransitivité suivant* Γ' l'ensemble des points de E' qui sont transformés d'un point par une transformation quelconque appartenant à Γ'. La relation d'équivalence ρ associée à p est aussi celle qui est définie par les classes d'intransitivité suivant Γ'. Réciproquement, étant donné un pseudogroupe d'automorphismes locaux Γ' d'une structure topologique sur E', la relation d'équivalence ρ définie par les classes d'intransitivité suivant Γ' est ouverte. Pour que E' soit étalé sur E'/ρ par l'application canonique, il faut et il suffit que tout point de E' admette un voisinage ouvert tel que la restriction à ce voisinage de la relation d'équivalence ρ soit l'identité. Un pseudogroupe d'automorphismes locaux d'un espace topologique sera dit *proprement discontinu*, lorsqu'il possède cette dernière propriété.

Soit E' un espace topologique étalé dans E par la projection p, soit Γ' le pseudogroupe de ses automorphismes locaux et soit $\mathfrak{A}^{-1}$ l'atlas de E' sur E formé de toutes les cartes locales qui sont des restrictions de p. Cet atlas $\mathfrak{A}^{-1}$ est un atlas complet compatible avec Γ'. Soit S' une structure locale sur E' telle que Γ' soit formé d'automorphismes locaux de S'. Alors l'atlas $\mathfrak{A}^{-1}$ détermine sur E une structure locale S, appelée *image de S' par p*.

A tout atlas $\mathcal{A}'$ compatible avec Γ' de E' sur E'' correspond l'atlas $\mathcal{A}'\mathcal{A}$ de E sur E'', compatible avec Γ; c'est-à-dire toute structure associée à Γ' détermine canoniquement une structure d'espace étalé dans E' et munit E'' d'une structure d'espace étalé dans E *(transitivité des structures d'espaces étalés).*

En supposant que E soit un espace topologique séparé, l'espace E' étalé dans E n'est pas forcément *séparé.* Pour que E' soit également séparé, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : la structure d'espace étalé étant déterminée par un atlas $\mathcal{A}$ de E sur E' compatible avec Γ, la source U_{ij} de tout changement de cartes φ_{ji} est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans $U_i \cap U_j$, avec les notations utilisées au début de ce paragraphe. Cette condition est aussi équivalente à la suivante : pour tout $\varphi \in \Gamma'$ (automorphisme local de E'), l'ensemble des points non fixes de φ est un ensemble ouvert.

Soit E' un espace topologique *séparé,* soit Γ' un pseudogroupe proprement discontinu d'automorphismes locaux de E' et soit ρ la relation d'équivalence définie par les classes d'intransitivité de Γ'. Pour que E'/ρ soit séparé, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : si x et y sont deux points de E' non équivalents suivant ρ, il existe un voisinage de y et un voisinage *saturé* de x sans point commun.

REMARQUE. Rappelons qu'un espace topologique E est dit séparé lorsque deux points distincts de E admettent deux voisinages sans point commun. Cette propriété est «héréditaire», c'est-à-dire si E la possède, tout sous-espace de E la possède également. Mais ce n'est pas une *propriété locale* d'une structure topologique. Cette notion de propriété locale peut être définie de la manière suivante : considérons une espèce de structures et une propriété qui a un sens pour les structures de cette espèce. Supposons qu'il existe une loi d'induction canonique qui associe à toute structure S de l'espèce considérée donnée sur E une topologie T sur E et qui détermine une structure de même espèce (appelée structure induite) sur tout ensemble ouvert non vide de cette topologie. Nous dirons que la propriété considérée est une propriété locale pour la topologie T lorsque la condition suivante est vérifiée : pour que la structure S possède la propriété, il faut et il suffit que tout point de E admette un voisinage ouvert tel que la structure induite par S sur ce voisinage possède la propriété.

EXEMPLES. 1) La *connexité locale* et la *compacité locale* sont des propriétés locales d'une structure topologique par rapport à cette topologie même; en ajoutant une de ces propriétés aux axiomes de l'espèce des structures topologiques, on obtient encore une espèce de structures locales (structures topologiques localement connexes ou localement compactes).

2) Etant donnés deux espaces topologiques E et E', soit f une applica-

tion de E dans E'. La *continuité* de f est une propriété locale de f relativement à la topologie de E, mais non relativement à la topologie de E'. La propriété suivante est une propriété locale par rapport à la topologie de E' : tout ensemble ouvert de E est appliqué par f sur un ensemble ouvert de E'; une application f qui possède cette propriété est appelée *application ouverte.*

DÉFINITIONS.

1) Etant donnés quatre espaces topologiques E, E', A, A', soit p une application continue de E' dans E, soit q une application continue de A dans A'. Une application continue f' de A' dans E' sera appelée un relèvement de f de A dans E si $fq = pf'$. On dira aussi que f est la projection *de f'.*

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q"'] & E' \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"'] & E \end{tikzcd}$$

2) En particulier, si q est l'application identique de A, un relèvement de f est une application continue f' de A dans E' telle que l'on ait $f = pf'$.

$$\begin{tikzcd} & E' \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "f"'] & E \end{tikzcd}$$

3) Si A est un sous-espace de E, soit f l'application canonique de A dans E.
1 *On appellera relèvement de A dans E' un relèvement f' de f, ou encore le but $f'(A)$.*

Nous verrons qu'une application f n'admet pas toujours un relèvement.

Considérons sur A' la structure définie par la donnée d'une topologie et d'une relation d'équivalence r, de même sur E' la structure définie par une topologie et une relation d'équivalence ρ. Appelons *représentation* de A' dans E', relativement à ces structures, une application continue f' de A' dans E' qui applique toute classe d'équivalence suivant r dans une classe suivant ρ. A la représentation f' est ainsi associée une application f de A'/r dans E'/ρ; on dit que f se déduit de f' par passage aux quotients, ou que f est la *projection canonique* de f'. On démontre facilement que *f est continu.* Si l'une des relations d'équivalence r ou ρ n'est pas indiquée, il est sous entendu qu'elle est réduite à l'identité. En particulier, si ρ est la relation d'équivalence associée à l'application continue p de E' dans E, *la projection canonique de*

p est une application continue de E'/ρ sur $p\,E$.

Si A est un sous-espace de E, soit f' un relèvement de A dans E', c'est-à-dire pf' est l'application identique de A. Alors *f' est un homéomorphisme de A sur $f'(A)$*; car son inverse est la restriction de p à $f'(A)$. Soit ρ_1 la relation d'équivalence induite par ρ sur $p^{-1}(A)$ et soit p_1, la restriction de p à $p^{-1}(A)$. *La projection canonique de p_1* est un homéomorphisme de $p^{-1}(A)/\rho_1$ sur A, car son inverse est la projection canonique de f'.

PROPOSITION. *Soit E' un espace étalé dans E par la projection p et soit f une application continue d'un espace topologique A dans E. Si E' est séparé et si A est* 1
connexe, il existe au plus un relèvement f' de f tel que $f'(a)$ soit un point donné de E', a étant un point donné de A.

En effet, soient f' et f'' deux relèvements de f tels que $f'(a) = f''(a)$. Soit X l'ensemble des points $x \in A$ tels que $f'(x) = f''(x)$. Montrons que X est un ensemble ouvert et fermé. Soit $x \in X$ et soit V un voisinage de $f'(x)$ tel que la restriction de p à V soit un homéomorphisme sur $p(V)$. La continuité de f' et de f'' entraîne l'existence d'un voisinage W de x tel que $f'(W)$ et $f''(W)$ soient contenus dans V. Les restrictions f'_W et f''_W de f' et f'' à W sont identiques, car on a $f'_W = f''_W = g\,f_W$, où f_W est la restriction de f à W et g l'inverse de la restriction de p à V. Donc $W \subset X$ et X est ouvert. D'autre part, si E' est séparé, l'équation $f'(x) = f''(x)$ définit un fermé de E'. Donc X est un ensemble ouvert et fermé et non vide. Si A est connexe, on a donc $X = A$.

En général f n'admet pas de relèvement. Si A est localement connexe, il existe un sous-ensemble connexe maximal A_0 contenant a et tel que la restriction de f à A_0 admette un relèvement f' pour lequel $f'(a)$ soit un point donné de E' se projetant sur $f(a)$. L'ensemble A_0 est ouvert et f' est unique.

Etant donnés deux espaces E', E'_1 étalés dans E par les projections p et p_1,
appelons *représentation* de E'_1 dans E' un relèvement f de p_1, c'est-à-dire $p_1 = pf$. 2
C'est aussi une représentation relative aux relations d'équivalence ρ et ρ_1, associées à p et p_1, mais telle que sa projection canonique soit l'application identique de E. Si les structures d'espaces étalés sont définies par deux atlas complets $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_1$ de E sur E' et E'_1 respectivement compatibles avec le pseudogroupe Γ, une représentation f de E'_1 dans E' est aussi caractérisée par la propriété $f\,\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$. Remarquons que la représentation f étale E'_1 dans E_1. Un *isomorphisme* de E'_1 sur E_1 est une représentation inversible.

Si E'_1 est connexe et E' séparé, il existe au plus une représentation appliquant un point a'_1 de E'_1 sur un point donné a' de E'. En particulier, si *E' est séparé et connexe, tout automorphisme de E' est sans point fixe.*

Appelons espace étalé pointé un espace E' étalé dans E et muni d'un point distingué a'. Etant donnés deux espaces étalés pointés E' et E'_1, de points distingués a' et a'_1 et étalés dans E, appelons représentation de E'_1 dans E' une représentation f relativement aux structures d'espaces étalés telle que $f(a'_1) = a'$. Lorsqu'il existe une telle représentation f, elle est unique et nous écrirons $E' < E'_1$. On vérifie facilement que cette relation est une relation d'ordre dans l'ensemble des espaces étalés pointés, étalés dans E, à condition d'identifier deux espaces étalés pointés isomorphes. De plus l'ensemble des espaces étalés pointés E'_i dont les points distingués a'_i se projettent sur $a \in E$ est un ensemble ordonné inductif : toute famille (E'_i) a une borne
1+ inférieure $E' < E'_i$.

Rappelons les définitions suivantes : Un *chemin* dans E est une application continue c de I dans l'espace E, en désignant par I le segment $[\,0, 1\,]$ de la droite numérique R; les points $c(0)$ et $c(1)$ sont *l'origine* et *l'extrémité* du chemin.

Etant donnée une application continue f de A dans E, une *déformation* de f est une famille d'applications (f_t), où $t \in I$ et $f_o = f$, telle que l'application $(x, t) \to f_t(x)$, où $x \in A$, soit une application continue φ de $A \times I$ dans E. Inversement toute application continue φ de $A \times I$ dans E détermine une déformation, f_t étant l'application $x \to \varphi(x, t)$; cette déformation sera aussi appelée φ. Appelons *chemin de déformation* de x le chemin c_x défini par $t \to \varphi(x, t)$.

Etant donné l'espace séparé E' étalé dans E, un chemin c dans E admet au plus un relèvement c' dans E' d'origine $c'(0)$ donnée. Le plus grand sous-ensemble connexe I' de I contenant le point 0 et tel que la restriction de c à I' admette un relèvement c' d'origine $c'(0)$ donnée est un intervalle $[\,0, t_1[$ ouvert à droite, ou bien $I' = I$.

L'espace E' étalé dans E étant supposé séparé, on a :

PROPOSITION. *Etant donnée une application continue f de A dans E admettant un relèvement f' dans E' toute déformation φ de f admet au plus un relèvement φ' formant une déformation de f', c'est-à-dire $\varphi'(x, 0) = f'(x)$.*

En effet, si φ' existe, c'est l'application $(x, t) \to \varphi'_x(t)$, où φ'_x est le relèvement d'origine $f'(x)$ du chemin de déformation c_x.

PROPOSITION. ***Etant donné un relèvement f' de f et une déformation φ de f, il existe toujours un voisinage V de $A \times \{\,0\,\}$ dans $A \times I$ tel que la restriction de φ à V admette
2 un relèvement φ' satisfaisant à la condition $\varphi'(x, 0) = f'(x)$.***

Pour $x \in A$ soit c_x le chemin $t \to \varphi(x,t)$ et soit c'_x le relèvement partiel maximal de c_x, d'origine $f'(x)$. Ce relèvement c'_x est défini dans un intervalle $I_x \subset I$, d'origine 0 et ouvert par rapport à I. Soit V l'ensemble des couples $(x,t) \in A \times I$ tels que $t \in I_x$. Soit φ' l'application $(x,t) \to c'_x(t)$, définie dans V. L'application $p\,\varphi'$ est la restriction de φ à V. Montrons que φ' est continu. Soit (x,t_1) un point de V tel que φ' soit continu en tout point (x,t), où $t < t_1$. Démontrons que φ' est continu dans un voisinage de (x,t_1) et il en résultera que φ' est continu dans V. Soit W' un voisinage ouvert de $\varphi'(x,t_1)$ tel que la restriction de p à W' soit un homéomorphisme sur un voisinage W de $\varphi(x,t_1)$. Il existe un voisinage $U \times [\,t_2, t_3\,]$ de (x,t_1) dans $A \times I$ tel que son image par φ soit contenue dans W. On a $t_2 < t_1$ ou bien $t_2 = t_1 = 0$.

Supposons d'abord $t_2 < t_1$. A cause de la continuité de φ' au point (x,t_2) on peut choisir le voisinage U de x de telle façon que $\varphi'(x_1,t_2) \in W'$ pour tout $x_1 \in U$ tel que $(x_1,t_2) \in V$. La trace de $U \times [\,t_2,t_3\,]$ sur V sera un voisinage V_1 de (x,t_1) relativement à V tel que $\varphi'(V_1) \subset W'$. La restriction de φ' à V_1 est en effet composée de la restriction de φ à V_1 et du relèvement de W sur W'.

Cette restriction de φ' est donc continue. Par suite φ' est continu dans le voisinage ouvert de (x,t_1) relativement à V formé par l'intérieur de V_1 relativement à V.

Si $t_1 = 0$, $U \times [\,0, t_3\,]$ est contenu dans V; la restriction de φ' à $U \times [\,0,t_3\,]$ est composée de la restriction de φ et du relèvement de W sur W'. Donc φ' est continu à l'intérieur de $U \times [\,0,t_3\,]$. Ceci démontre de plus que V est un voisinage de $A \times \{\,0\,\}$.

REMARQUE.

1. Si pour tout $x \in A$ le chemin de déformation c_x admet un relèvement d'origine $f'(x)$, on a $V = A \times I$ et φ admet un relèvement φ' tel que $\varphi'(x,0) = f'(x)$.

2. Si A est compact, V contient un ensemble de la forme $A \times [\,0,\tau]$. En effet, les ensembles $U \times [\,0, t_3^U]$ contenus dans V recouvrent $A \times \{\,0\,\}$; il y en a un nombre fini qui le recouvrent. La déformation φ_τ, $\tau = \min_i t_3^{U_i}$, obtenue en composant l'applica- $(x,t) \to (x,t\tau)$ avec φ admet un relèvement φ'_1 tel que $\varphi'_1(x,0) = f'(x)$.

9. Revêtements. 1

DÉFINITION. *Un revêtement de l'espace topologique B est un espace topologique E muni d'une application continue p de E sur B vérifiant la condition suivante : tout point x de B admet un voisinage ouvert U tel que $p^{-1}(U)$ admette une partition formée d'ensembles ouverts U'_i tels que la restriction de p à U'_i soit un homéomorphisme de U'_i sur U.*

Les ensembles U et U'_i seront appelés ensembles ouverts distingués de B et de E respectivement. Si U est distingué, tout ensemble ouvert contenu dans U est également distingué.

L'application p, appelée projection de E sur B, est aussi caractérisée de la manière suivante : p étale E sur B; $p(E) = B$; de plus tout $x \in B$ admet un voisinage ouvert U tel qu'il existe un homéomorphisme f de $U \times p^{-1}(x)$ sur $p^{-1}(U)$ se projetant sur l'application identique de U; c'est-à-dire pf est la projection canonique de $U \times p^{-1}(x)$ sur U.

Remarquons que $p^{-1}(x)$ est un sous-espace discret F_x de E; nous l'appellerons fibre du revêtement au-dessus de x.

Soit F la fibre au-dessus de $x_0 \in B$. Soit A le sous-ensemble de B tel qu'il existe une application biunivoque de F sur F_x pour $x \in A$. Si x_1 est adhérent à A, tout voisinage distingué U de x_1 appartient à A, car il existe une application biunivoque de F sur F_x pour $x \in U \cap A$ et une application biunivoque de F_x sur F_{x_1}. On a donc la proposition :

PROPOSITION. *L'ensemble A est ouvert et fermé dans B. Si B est connexe, il existe une application biunivoque de F sur F_x quel que soit $x \in B$.*

Dorénavant supposons B connexe.

Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des homéomorphismes de $U \times F$ sur $p^{-1}(U)$ se projetant sur l'application identique de U, où U est un ensemble ouvert distingué quelconque de B. On voit que $\mathfrak{A}$ est un atlas complet de $B \times F$ sur E compatible avec le pseudogroupe de transformations Γ défini de la manière suivante : les ensembles ouverts distingués de $B \times F$ sont les produits $U \times F$, où U est un ouvert quelconque de B; un élément φ de Γ est un automorphisme de l'espace topologique $U \times F$ se projetant sur l'application identique de U, c'est-à-dire de la forme :

$(x, y) \to (x, s_x y)$, où $x \in U, y \in F, s_x \in G$, en désignant par G le groupe des permutations de F et par sy le transformé de y par $s \in G$.

f_i et f_j appartenant à $\mathfrak{A}$, de sources $U_i \times F$ et $U_j \times F$ respectivement, le changement de cartes associé au couple (f_i, f_j) est de la forme $(x, y) \to (x, s_x^{ji} y)$, où $s_x^{ji} \in G$; il est défini dans $U_{ij} \times F$, où $U_{ij} = U_i \cap U_j$. L'ensemble des sources des éléments de $\mathfrak{A}$ recouvre $B \times F$, c'est-à-dire B est une réunion de ses ouverts distingués. La projection p de E sur B est déterminée par $\mathfrak{A}$, car p est la réunion des applications $f_i(x,y) \to x$, où $f_i \in \mathfrak{A}$.

Une structure de revêtement de B est donc aussi déterminée sur E par un atlas $\mathfrak{A}$ de $B \times F$ sur E, compatible avec Γ et vérifiant les conditions supplémentaires suivantes : le changement de cartes associé à deux cartes f_i et f_j appartenant à $\mathfrak{A}$ est

défini dans l'intersection des sources de f_i et f_j; l'ensemble des sources des cartes appartenant à $\mathcal{A}$ recouvre $B \times F$. Suivant la définition générale d'un espace fibré qui 1
sera donnée plus loin, un tel atlas $\mathcal{A}$ définit sur E *une structure d'espace fibré de base B et à fibres isomorphes à l'espace discret F.* Pour B connexe, *il y a donc équivalence entre l'espèce des structures de revêtements de B et l'espèce des structures fibrées de base B à fibres discrètes.*

PROPOSITION. *Soit E un revêtement de B et soit A un espace topologique connexe. Toute application continue f de A dans B admet au plus un relèvement f' appliquant A dans E et tel que $f'(a)$ soit un point donné de E, a étant un point donné de A.*

En effet, l'unicité du relèvement de f résulte des deux propriétés suivantes : E est étalé dans B par p. Deux points de E qui ont même projection dans B admettent deux voisinages sans point commun. Pour s'appuyer sur cette dernière propriété, toujours vérifiée dans le cas d'un revêtement, il faut remplacer la phrase de la ligne 18 page 17 par ce qui suit : si $f'(x) \neq f''(x)$, il existe un voisinage W de x tel que $f'(W)$ et $f''(W)$ appartiennent à deux voisinages sans point commun de $f'(x)$ et $f''(x)$.

Si B est séparé, tout revêtement de B est séparé.

Etant donnés deux revêtements E et E' de B une *représentation* de E dans E' est une application continue f de E dans E' telle que $p = p'f$, si p et p' désignent les projections de E et E' sur B; c'est-à-dire f est un relèvement de p dans E'. S'il existe une telle représentation, nous dirons que E est porté par E'. Un *isomorphisme* de E sur E' est une représentation inversible. Ces notions sont définies comme dans le cas des espaces étalés, un revêtement de B étant considéré comme un espace étalé dans B.

COROLLAIRE. *Si E est connexe, il existe au plus une représentation de E dans E' telle que $x_0 \in E$ soit appliqué sur un point donné $f(x_0)$ de E'.*

PROPOSITION. *Si A est un sous-espace de B, la restriction de p à $p^{-1}(A)$ définit $p^{-1}(A)$ comme revêtement de A.*

Supposons dorénavant B localement connexe ou F fini. On a alors les propositions suivantes :

PROPOSITION. *Pour qu'un sous-espace E_1 de E soit un revêtement de B, relativement à la restriction de p à E_1, il faut et il suffit que E_1 soit ouvert et fermé dans* 2
E. En particulier, si B est localement connexe, toute composante connexe de E est un revêtement de B.

PROPOSITION. *Toute représentation f de E dans E' définit E comme revêtement de $f(E)$, qui est lui-même revêtement de B relativement à la restriction de la projection p.*

PROPOSITION. *Le groupe G des permutations de F étant muni de la topologie discrète, tout automorphisme de $U \times F$ appartenant à Γ est de la forme $(x,y) \to (x, s_x y)$, où $x \to s_x$ est une application continue de U dans G (c'est-à-dire constante sur un voisinage de $x \in U$).*

REVÊTEMENT PRINCIPAL ASSOCIÉ À E.

Soit E un revêtement de B et soit H l'ensemble des isomorphismes (c'est-à-dire des applications biunivoques) de F sur une fibre quelconque F_x de E, F étant la fibre au-dessus de x_o. Le transformé de $y \in F$ par $h \in H$ sera noté hy. On peut associer à l'atlas $\mathcal{A}$ de $B \times F$ sur E un atlas $\hat{\mathcal{A}}$ de $B \times G$ sur H, qui définira sur H une structure de revêtement de B. A la carte $f_i \in \mathcal{A}$, de source $U_i \times F$, faisons correspondre l'application $\hat{f}_i$ de $U_i \times G$ dans H définie par

$$\hat{f}_i : (x,s) \to h_x^i s, \qquad x \in U, \ s \in G,$$

h_x^i étant l'isomorphisme $y \to f_i(x,y)$ de F sur F_x. Si $\hat{f}_j$ est associé de la même façon à $f_j \in \mathcal{A}$, le changement de cartes correspondant à (f_i, f_j) est l'automorphisme de $U_i \times G$ défini par $(x,s) \to (x, s_x^{ji} s)$. En effet, l'équation $f_i(x,y) = f_j(x, s_x^{ji} y)$ entraîne $h_x^i = h_x^j s_x^{ji}$. Soit $\hat{\mathcal{A}}$ l'ensemble des cartes $\hat{f}_i$ associées aux cartes de $\mathcal{A}$. Soit $\hat{\Gamma}$ le pseudogroupe des automorphismes locaux de $B \times G$ de la forme $(x,s) \to (x, s_x^{ji} s)$ où $x \in U$, $s \in G$, U étant un ouvert quelconque de B. On voit que $\hat{\mathcal{A}}$ est un atlas complet de $B \times G$ sur H compatible avec $\hat{\Gamma}$. Il détermine sur H une structure de revêtement de B. L'ensemble H muni de cette structure sera appelé *revêtement principal associé à E*. La projection h de H sur B est l'application $h \to p\,h(F)$. La fibre de H au-dessus de x_o est G; la fibre au-dessus de x est $H_x = h_x^i G$. A $h \in H_x$ correspond l'isomorphisme $\hat{h}$ de G sur H_x défini par $s \to hs$. On a ainsi un ensemble distingué d'isomorphismes de G sur H_x, à savoir l'ensemble $\hat{h} G$.

REMARQUE. L'atlas $\hat{\mathcal{A}}$ définit en réalité sur H une structure plus précise qu'une structure générale de revêtement de B. Le groupe des permutations de G est remplacé, dans la définition de $\hat{\Gamma}$, par un sous-groupe, à savoir le groupe des translations à gauche de
1+ G. Les notions générales de la théorie des espaces fibrés, exposées plus loin, conduisent dans le cas particulier d'une fibre discrète à la notion de *revêtement à groupe structural restreint;* dans la définition de Γ, pseudogroupe d'automorphisme locaux de $B \times F$, on remplacera le groupe général des permutations de F par un sous-groupe donné, qui sera appelé groupe structural des revêtements définis par un atlas compatible avec le pseudogroupe Γ restreint de cette façon. Ainsi $\tilde{\mathcal{A}}$ définit sur H une structure de revêtement ayant pour groupe structural le groupe des translations à gauche de G.

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Vol. III (1961)

/55/

ÉLARGISSEMENTS DE CATÉGORIES *)

par C. EHRESMANN

1. Compléments sur les catégories et les foncteurs. 1

Le système d'axiomes d'une catégorie est équivalent au suivant:

a) Tout élément f de $\mathcal{C}$ admet une unité à droite unique $\alpha(f)$ et une unité à gauche unique $\beta(f)$.

b) Pour que gf soit défini, il faut et il suffit que l'on ait: $\alpha(g) = \beta(f)$.

c) $\alpha(gf) = \alpha(f)$ et $\beta(gf) = \beta(g)$.

d) Si $(hg)f$ et $h(gf)$ sont définis, on a $(hg)f = h(gf)$.

Remarquons que a, b, c entraînent: si $(hg)f$ est défini, alors $h(gf)$ est défini.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un élément f' est appelé *inverse à gauche* (resp. *à droite*) de f si l'on a :

$$f' f = \alpha(f) \qquad\qquad (\text{resp. } f f' = \beta(f)).$$

PROPOSITION: Si dans une catégorie $\mathcal{C}$ tout élément f admet un inverse à gauche f', cet élément est inverse à droite et $\mathcal{C}$ est un groupoïde.

L'intersection d'une famille de sous-catégories (resp. sous-groupoïdes) de $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde). Si A est une partie de $\mathcal{C}$, l'intersection des sous-catégories (resp. sous-groupoïdes) contenant A est la *sous-catégorie* (resp. le *sous-groupoïde*) *engendré* par A.

DÉFINITION : Une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{C}$ est dite *saturée* si elle contient, avec une unité e, tout élément inversible f tel que $\alpha(f) = e$. Elle est dite *sursaturée* si elle contient avec e tout morphisme f tel que $\alpha(f) = e$ ou $\beta(f) = e$.

PROPOSITION : Toute unité e d'une catégorie $\mathcal{C}$ est contenue dans une catégorie sur-saturée minimale appelée *composante connexe* de e. Les composantes connexes de $\mathcal{C}$ forment une partition.

Sauf indication contraire, un foncteur est un foncteur covariant.

PROPOSITION : Soit $\mathfrak{M}_o$ une classe de catégories; la classe des triplets $(\mathcal{C}', \Phi, \mathcal{C})$, où $\mathcal{C} \in \mathfrak{M}_o$, $\mathcal{C}' \in \mathfrak{M}_o$ et Φ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, est une catégorie $\mathfrak{M}$ pour la multiplication : $(\mathcal{C}'', \Phi', \mathcal{C}_1)\,(\mathcal{C}', \Phi, \mathcal{C}) = (\mathcal{C}'', \Phi'\Phi, \mathcal{C})$ si et seulement si $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}'$.

* Nous complétons et précisons ici certaines notions esquissées dans "Espèces de structures locales". Les démonstrations sont omises; elles paraîtront dans le travail annoncé p. 1. 2

PROPOSITION : Si Φ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ admettant un inverse à gauche Π, alors $\Phi(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}'$.

DÉFINITION : Soit Π un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}'$ sur une catégorie $\mathcal{C}$; tout foncteur Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, inverse à droite de Π est appelé *foncteur section relativement à* Π.

PROPOSITION : Soit Φ un foncteur généralisé covariant (resp. contravariant) de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{C}'$. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a :

$\alpha(\Phi(f)) \subset \Phi(\alpha(f))$ et $\beta(\Phi(f)) \subset \Phi(\beta(f))$ (resp. $\beta(\Phi(f)) \subset \Phi(\alpha(f))$ et $\alpha(\Phi(f)) \subset \Phi(\beta(f))$). Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, on a $\alpha(\Phi(f)) = \Phi(\alpha(f))$ et $\beta(\Phi(f)) = \Phi(\beta(f))$ (resp. $\alpha(\Phi(f)) = \Phi(\beta(f))$ et $\beta(\Phi(f)) = \Phi(\alpha(f))$).

PROPOSITION : Si Φ est un foncteur généralisé de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{C}'$ et si f est un élément inversible de $\mathcal{C}$, alors $\Phi(f)$ est une classe d'éléments inversibles de $\mathcal{C}'$ et $\Phi(f^{-1})$ est la classe $(\Phi(f))^{-1}$ des inverses des éléments de $\Phi(f)$.

DÉFINITION : Soit Π un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}'$ sur une catégorie $\mathcal{C}$. Un foncteur généralisé Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ est appelé *foncteur généralisé section relativement à* Π si, pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a : $\Phi(f) \subset \Pi^{-1}(f)$.

PROPOSITION : Si Φ est un foncteur généralisé section relativement à Π, alors $\Phi(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}'$.

DÉFINITION : Soient Φ et Φ' deux foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$. *Une transformation naturelle de* Φ *vers* Φ' est un triplet (Φ', τ, Φ), où τ est une fonction de $\mathcal{C}_o$ dans $\mathcal{C}'$ telle que, si $f \in \mathcal{C}$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, on ait :

$$\alpha(\tau(e)) = \Phi(e);\ \beta(\tau(e)) = \Phi'(e);\ \Phi'(f)\tau(e) = \tau(e')\Phi(f).$$

Nous désignons par $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ la classe des foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$, par $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ la classe des transformations naturelles entre foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$. Nous écrirons : $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{N}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \mathcal{N}(\mathcal{C})$. $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ est une catégorie pour la composition des foncteurs; elle admet pour seule unité le foncteur identique $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION : $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ est une catégorie pour la multiplication suivante, appelée longitudinale :

$$(\Phi'', \tau', \Phi_1)(\Phi', \tau, \Phi) = (\Phi'', \tau'.\tau, \Phi) \text{ si et seulement si } \Phi_1 = \Phi'$$

$$\text{où } (\tau'.\tau)(e) = \tau'(e)\tau(e) \text{ pour tout } e \in \mathcal{C}_o.$$

L'unité à droite de (Φ', τ, Φ) est (Φ, Φ_o, Φ), où Φ_o est la restriction de Φ

à $\mathcal{C}_o$; l'unité à gauche est (Φ', Φ'_o, Φ'). Les éléments inversibles sont les transformations naturelles (Φ', τ, Φ) où τ est une application de $\mathcal{C}_o$ dans la classe des éléments inversibles de $\mathcal{C}'$; l'inverse de (Φ', τ, Φ) est (Φ, τ^{-1}, Φ'), où $\tau^{-1}(e) = (\tau(e))^{-1}$, pour tout $e \in \mathcal{C}_o$. Une transformation naturelle de ce type sera appelée *équivalence* de Φ vers Φ'.

DÉFINITION : Un *foncteur naturalisé* de la catégorie $\mathcal{C}$ est une transformation naturelle $(\Phi, \varphi, \mathrm{Id})$ du foncteur identique de $\mathcal{C}$ vers le foncteur Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$; on le désignera par (Φ, φ).

PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille de catégories. La classe $\sum_{i \in I} \mathcal{C}_i$ des couples (i, f_i) où $i \in I$ et $f_i \in \mathcal{C}_i$, munie de la multiplication définie par :

$$(j, f'_j)\,(i, f_i) = (i, f'_j f_i) \text{ si, et seulement si, } j = i \text{ et } \alpha(f'_j) = \beta(f_i),$$

est une catégorie appelée *catégorie somme* des catégories $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$.

PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille de catégories. La classe $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ des familles (f_i) telles que $f_i \in \mathcal{C}_i$ pour tout $i \in I$ munie de la multiplication :

$$(f'_i)\,(f_i) = (f'_i f_i) \text{ si, et seulement si } \alpha(f'_i) = \beta(f_i) \text{ pour tout } i \in I,$$

est une catégorie appelée *catégorie produit* des catégories $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$.

L'application canonique p_i de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ sur $\mathcal{C}_i$ qui associe à la famille (f_i) l'élément f_i de $\mathcal{C}_i$ est un foncteur de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ sur $\mathcal{C}_i$ appelé foncteur projection.

Soit $(\Phi_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs, où Φ_i est, pour tout $i \in I$, un foncteur de la catégorie $\mathcal{C}'$ vers la catégorie $\mathcal{C}_i$. L'application qui associe à $f \in \mathcal{C}'$ l'élément $(\Phi_i(f))$ de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ est un foncteur de $\mathcal{C}'$ vers $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$, que nous noterons $\underset{i \in I}{\pi} \Phi_i$.

DÉFINITION : Soit $(\mathcal{C}'_i)_{i \in I}$ et $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ deux familles de catégories, $(\Phi_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs, où Φ_i est un foncteur de $\mathcal{C}'_i$ vers $\mathcal{C}_i$. On appelle *foncteur produit* $\prod_{i \in I} \Phi_i$ le foncteur $\underset{i \in I}{\pi} \Phi_i\, p_i$ de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}'_i$ vers $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ compatible avec la multiplication. Une catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$ est appelée *catégorie quotient* de $\mathcal{C}$ par ρ lorsque : 1°) $\tilde{\mathcal{C}}$ est la classe des classes d'équivalence modulo ρ ; 2°) $\tilde{g}\tilde{f}$ est défini si et seulement si il existe $f' \in \tilde{f}$ et $g' \in \tilde{g}$ tels que $g'f'$ soit défini ; 3°) on a $\tilde{g}\tilde{f} = \widetilde{(g'f')}$, $\tilde{f}$ désignant la classe de f modulo ρ.

Pour qu'une relation d'équivalence ρ sur une catégorie $\mathcal{C}$ permette de déterminer une catégorie quotient de $\mathcal{C}$, il faut que $f' \sim f$ entraîne $\alpha(f) \sim \alpha(f')$, $\beta(f) \sim \beta(f')$, et que, si f et f' sont inversibles, alors $f^{-1} \sim f'^{-1}$. Ces relations ne sont pas suffisantes en général. Si $\mathcal{C}/\rho$ est la catégorie quotient de $\mathcal{C}$ par ρ, alors l'application : $h \to h$ modu-

-lo ρ est un foncteur de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}/\rho$.

PROPOSITION : Soit Φ un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}$ sur une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$. Pour que Φ définisse $\overline{\mathcal{C}}$ comme catégorie quotient de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que, si $\Phi(g)\Phi(f)$ est défini, alors il existe $f' \sim f$ et $g' \sim g$ tels que $g'f'$ soit défini, f et f' étant équivalents si, et seulement si $\Phi(f) = \Phi(f')$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ compatible avec la multiplication, telle que : $f \sim f'$ entraîne $\alpha(f) \sim \alpha(f')$ et $\beta(f) \sim \beta(f')$ et que, pour tout $e \sim \alpha(f)$, il existe $g \sim f$ avec $\alpha(g) = e$. Alors $\mathcal{C}/\rho$ est muni d'une structure de catégorie quotient.

En effet, la classe $\tilde{f}$ a pour unité à droite $\alpha(\tilde{f})$ et pour unité à gauche $\beta(\tilde{f})$. Supposons que $\tilde{h}(\tilde{g}\tilde{f})$ et $(\tilde{h}\tilde{g})\tilde{f}$ soient définis; alors $\alpha(\tilde{g}) = \beta(\tilde{f})$ et $\alpha(\tilde{h}) = \beta(\tilde{g})$; soit $f \in \tilde{f}$; il existe $g \in \tilde{g}$ tel que $\alpha(g) = \beta(f)$ et il existe $h \in \tilde{h}$ tel que $\alpha(h) = \beta(g)$, donc $h(gf)$ est défini, gf est un représentant de $\tilde{g}\tilde{f}$ et $h(gf)$ est un représentant de $\tilde{h}(\tilde{g}\tilde{f})$; d'autre part, hg est un représentant de $\tilde{h}\tilde{g}$ et $(hg)f = h(gf)$ est un représentant de $(\tilde{h}\tilde{g})\tilde{f}$. Il en résulte que l'on a :

$$(\tilde{h}\tilde{g})\tilde{f} = \tilde{h}(\tilde{g}\tilde{f}).$$

1 **2. Espèces de structures et catégories d'homomorphismes.**

PROPOSITION : Si un groupoïde Γ opère à gauche sur une classe $\mathcal{S}_o$ le composé de (f, S) étant fS, alors Γ opère aussi à droite sur $\mathcal{S}_o$, le composé Sf de (f, S) étant défini si, et seulement si, $p_o(S) = \beta(f)$ et étant égal à $Sf = f^{-1}S$, où p_o est la projection de $\mathcal{S}_o$ vers Γ.

Soit $\mathcal{S}_o$ une classe quelconque. La classe des applications d'une sous-classe de $\mathcal{S}_o$ dans une sous-classe de $\mathcal{S}_o$ est une catégorie $\mathcal{A}(\mathcal{S}_o)$ lorsqu'on la munit de la multi-plication suivante :

$(g, f) \to gf$ si et seulement si f est une application de S dans S' et g une application de S' dans S'', et l'application gf est l'application : $x \to g(f(x))$ de S dans S''.

PROPOSITION : Considérons une catégorie $\mathcal{C}$ et une classe $\mathcal{S}_o$. La donnée d'une loi de composition définissant $\mathcal{C}$ comme catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_o$ équivaut à la donnée d'un foncteur Φ de $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{A}(\mathcal{S}_o)$ vérifiant la condition (a) :

a) Soit $p_o^{-1}(e)$ la classe dont l'application identique est $\Phi(e)$, où $e \in \mathcal{C}_o$; alors

2 ¶ $$p_o^{-1}(e) \cap p_o^{-1}(e') \neq \emptyset \text{ si } e \neq e'.$$

DÉFINITION : Si $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs sur une classe $\mathcal{S}_o$, la catégorie $\mathcal{S}$ des couples (f, z), où $f \in \mathcal{C}$ et $z \in \mathcal{S}_o$, est appelée l'*extension de la catégorie d'opéra-teurs* $\mathcal{C}$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie opérant sur une classe $\mathcal{S}_o$; on dira que $\mathcal{S}_o$ est une *espèce de structures sur* $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{S}_o$ est une espèce de structures sur une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}$, nous dirons que $\mathcal{S}_o$ est une *espèce de structures au-dessus de* $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ opère à droite sur $\mathcal{S}_o$, on dira que $\mathcal{S}_o$ est une espèce de structures *contra-variantes* sur $\mathcal{C}$.

Soit p le foncteur projection de l'extension $\mathcal{S}$ de la catégorie d'opérateurs $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$; l'espèce de structures sera désignée par $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, ou par $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ dans le cas où $p(\mathcal{S}) = \mathcal{C}$. Le triplet $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ sera aussi appelé espèce de structures. Un élément S de $\mathcal{S}_o$ est appelé une *structure* sur l'unité $p(S)$ de $\mathcal{C}$ ou sur l'objet correspondant. Un couple (f, S), où $S \in \mathcal{S}_o$ et $f \in \mathcal{C}$ tel que fS soit défini, est appelé un *hypermorphisme* de S sur fS et, si f est inversible, un *isomorphisme* de S sur fS. La catégorie $\mathcal{S}$ est appelée *catégorie des hypermorphismes* correspondant à $\mathcal{S}_o$. Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, alors $\mathcal{S}$ est le *groupoïde des isomorphismes* correspondant à $\mathcal{S}_o$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur une catégorie $\mathcal{C}$; une espèce de structures $\mathcal{S}'_o$ sur une catégorie $\mathcal{C}'$ est une *sous-espèce de* $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}'_o$ une sous-classe de $\mathcal{S}_o$ sur laquelle $\mathcal{C}'$ opère par restriction de la loi de composition. Si de plus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des sous-catégories d'une catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$, alors $(\tilde{\mathcal{C}}, p', \mathcal{S}')$ est une sous-espèce de structures de $(\tilde{\mathcal{C}}, p, \mathcal{S})$. La sous-espèce $(\tilde{\mathcal{C}}, p', \mathcal{S}')$ est *pleine* si $\mathcal{S}'_o$ contient tout $S \in \mathcal{S}_o$ tel que $p(S) \in p'(\mathcal{S}')$.

Soit $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ une espèce de structures. La définition s'applique en particulier dans le cas où la sous-classe $\mathcal{S}_o$ est identique à $\mathcal{S}_o$, mais l'on considère seulement l'action de la sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$. On dira alors que l'espèce $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ est *plus souple* que l'espèce $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$, ou que l'espèce $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ est *plus rigide* que l'espèce $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$. Si l'espèce $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ est plus rigide que l'espèce $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$, alors la catégorie $\mathcal{S}'$ est une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{S}$. L'espèce la plus rigide déduite de l'espèce $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ est l'espèce $[\mathcal{C}_o, p', \mathcal{S}'_o]$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{S}_o$ est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$, alors dans $\mathcal{S}_o$ la relation : $S' < S$ si, et seulement si, il existe $f \in \mathcal{C}$ tel que $S = fS'$, est une relation de préordre. Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, cette relation est une relation d'équivalence.

PROPOSITION : Si $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ est une espèce de structures, alors la composante connexe de $S \in \mathcal{S}_o$ dans la catégorie $\mathcal{S}$ est une catégorie d'hypermorphismes sur la composante connexe de $p(\mathcal{S})$ dans $\mathcal{C}$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{S}'$ est un sous-groupoïde plein du groupoïde $\mathcal{S}$ des isomorphismes d'une espèce de structures $\mathcal{S}_o$ au-dessus d'un groupoïde $\mathcal{C}$ et si $\mathcal{S}'_o$ est saturée, alors $\mathcal{S}'_o$ est une sous-espèce de structures de $\mathcal{S}_o$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{S}'_o$ est une sous-espèce de structures de $\mathcal{S}_o$ sur un sous-groupoïde plein saturé du groupoïde $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{S}'_o$ est une sous-espèce de structures saturée.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}'_o$ une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}'$. *Une application covariante de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ dans $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ est un couple (φ_o, ψ) où ψ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ et φ_o une application de $\mathcal{S}_o$ dans $\mathcal{S}'_o$, tel que l'on ait:

$$\varphi_o(fS) = \psi(f)\,\varphi_o(S), \text{ si } f \in \mathcal{C},\ S \in \mathcal{S}_o \text{ et } fS \text{ est défini.}$$

Si φ_o est une application biunivoque de $\mathcal{S}_o$ sur $\mathcal{S}'_o$ et ψ un foncteur biunivoque de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, alors (φ_o, ψ) sera appelé une *équivalence de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ sur $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$.

PROPOSITION : Soient $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ et $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ deux espèces de structures et ψ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Les applications covariantes (φ_o, ψ) de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ dans $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ correspondent biunivoquement aux foncteurs φ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ tels que: $p'\varphi = \psi p$; à une équivalence correspond un foncteur biunivoque.

DÉFINITION : Soient p un foncteur d'une catégorie $\mathcal{S}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ et p' un foncteur d'une catégorie $\mathcal{S}'$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$, ψ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Un foncteur φ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ tel que $p'\varphi = \psi p$ sera appelé un *relèvement de* ψ relativement à (p', p).

PROPOSITION : Étant données deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et deux classes $\mathcal{S}_o$ et $\mathcal{S}'_o$, la donnée d'une application covariante (φ_o, ψ) d'une espèce de structures $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ vers une espèce de structures $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ équivaut à la donnée d'un foncteur ψ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ et d'une transformation naturelle $(\Phi'\psi, \tau, \Phi)$, où Φ et Φ' sont des foncteurs res-
1 -pectivement de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{A}(\mathcal{S}_o)$ et $\mathcal{C}'$ vers $\mathcal{A}(\mathcal{S}'_o)$ vérifiant la condition (a).

PROPOSITION : Soit Σ_o une classe d'espèces de structures et soit Σ la classe des applications covariantes d'un élément de Σ_o dans un élément de Σ_o. Alors Σ est une catégorie pour la loi de composition :

$$(\varphi'_o, \psi')(\varphi_o, \psi) = (\varphi'_o \varphi_o, \psi'\psi),$$

si, et seulement si, les foncteurs ψ et ψ' sont composables ainsi que les applications
2 φ'_o et φ_o.

Un cas particulier important d'applications covariantes est celui où la catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{C}'$ et où le foncteur ψ est le foncteur injec-tion de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ (c'est-à-dire que $\psi(f) = f$, pour tout $f \in \mathcal{C}$). Alors une application covariante de l'espèce de structures $\mathcal{S}_o$ au-dessus de $\mathcal{C}$ dans l'espèce de structures $\mathcal{S}'_o$ au-dessus de $\mathcal{C}'$ sera seulement désignée par φ_o (cas considéré dans l'article pré-
3 -cédent).

DÉFINITION : Soient $\mathcal{S}'_o$ une espèce de structures sur une catégorie $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures sur une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}'$. On dira que $\mathcal{S}'_o$ est une *espèce de structures sous-jacente* à $\mathcal{S}_o$ si l'on se donne une application covariante φ_o de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ vers $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{S}'_o$ est une espèce de structures sous-jacente à l'espèce $\mathcal{S}_o$, alors $\varphi_o(\mathcal{S}_o)$ est une sous-espèce de structures de $\mathcal{S}'_o$ et $\varphi(\mathcal{S})$ est la catégorie des hypermor-phismes correspondant à $\varphi_o(\mathcal{S}_o)$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}_o$ une espèce de structures au-dessus d'une catégorie $\mathcal{C}$ et $\overline{\mathcal{S}}_o$ une espèce de structures au-dessus de la catégorie $\mathcal{S}$ des hypermorphismes correspondant à $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, telles que $(\mathcal{C}, p\overline{p}(\overline{\mathcal{S}}))$ soit une sous-espèce de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$; alors $\overline{\mathcal{S}}_o$ est appelée une *espèce de superstructures au-dessus de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$.

THÉORÈME : Si $(\mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}})$ est une espèce de superstructures au-dessus de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, alors $\overline{\mathcal{S}}_o$ est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$, notée $(\mathcal{C}, \overline{\overline{p}}, \overline{\overline{\mathcal{S}}})$, telle que $(Id_{\overline{\mathcal{S}}_o}, p)$ soit une application covariante de $(\mathcal{S}, \overline{p}, \overline{\mathcal{S}})$ dans $(\mathcal{C}, \overline{\overline{p}}, \overline{\overline{\mathcal{S}}})$. De plus $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ est sous-jacent à $(\mathcal{C}, \overline{\overline{p}}, \overline{\overline{\mathcal{S}}})$ pour p : le foncteur associé à $(Id_{\overline{\mathcal{S}}_o}, p)$ est une équiva-lence des catégories d'hypermorphismes $\overline{\mathcal{S}}$ et $\overline{\overline{\mathcal{S}}}$ qui permet d'identifier $(\mathcal{C}, \overline{\overline{p}}, \overline{\overline{\mathcal{S}}})$ avec $(\mathcal{C}, p\overline{p}, \overline{\mathcal{S}})$.

RÉCIPROQUE : Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ est une espèce de structures sous-jacente à $(\overline{\mathcal{C}}, \overline{\overline{p}}, \overline{\mathcal{S}})$ pour l'application φ_o, alors $\overline{\mathcal{S}}_o$ est aussi une espèce de superstructures au-dessus de $(\mathcal{C}, \overline{p}, \varphi(\overline{\mathcal{S}}))$, où φ est le foncteur de la catégorie $\overline{\mathcal{S}}$ dans $\mathcal{S}$ correspondant à φ_o.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{H}$ une catégorie et $\mathcal{S}$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$. On appelle $\mathcal{H}$ une *catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ si l'on se donne un foncteur p de $\mathcal{H}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ vérifiant les axiomes suivants :

1) $\mathcal{H}_o$ est une espèce de structures $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, où p désigne ici la restriction de p à $\mathcal{S}$.
2) Si h et h' sont deux éléments de $\mathcal{H}$ tels que $p(h) = p(h')$, $\alpha(h) = \alpha(h')$ et $\beta(h) = \beta(h')$, alors $h = h'$.

La catégorie d'homomorphismes $\mathcal{H}$ pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ sera notée $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.

PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes; alors $\mathcal{H}$ peut être considérée comme une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{S}$ ou de $\mathcal{C}$.

Le composé de (f', S'), où $f' \in \mathcal{C}$, $S' \in \mathcal{H}_o$ et $p(S') = \alpha(f')$, avec $h \in \mathcal{H}$ est défini si, et seulement si, $\beta(h) = S'$ et est égal à $(f', S')h$; alors h est une structure sur $\beta(h)$.

Si $p(\mathcal{S})$ opérait à droite sur $\mathcal{S}$, le composé de $(S, f) \in \mathcal{S}$ avec $h \in \mathcal{H}$ serait défini si, et seulement si, $\alpha(h) = S$ et serait égal à $h(S, f)$; alors h serait une structure sur $\alpha(h)$ et $p(\mathcal{S})$ opèrerait aussi à droite sur $\mathcal{H}$, le composé hf de (f, h) étant défini si, et seulement si, $p(S) = \alpha(f)$ et $S = \alpha(h)$ et étant $hf = h(S, f)$.

PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est un groupoïde; alors $\mathcal{H}$ peut être considéré comme une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ou de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (cas de l'article précédent).

Une catégorie $\mathcal{H}$ munie d'un foncteur p vers $\mathcal{C}$ telle que l'axiome 2 des catégo--ries d'homomorphismes soit vérifié sera appelée *une catégorie au-dessus de* $\mathcal{C}$; c'est une catégorie d'homomorphismes où $\mathcal{S}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{H}$ réduite à $\mathcal{H}_o$. En particulier, une catégorie $\mathcal{C}$ est toujours une catégorie au-dessus d'elle-même pour le foncteur identique.

1 **3. Catégories induites et extensions inessentielles.**

Si Φ est un foncteur, sa restriction à la classe des unités est désignée par Φ_o. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, le groupoïde de ses éléments inversibles sera noté Γ, et γ désignera le foncteur $h \to (\beta(h), \alpha(h))$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_o \times \mathcal{C}_o$.

DÉFINITION : Soient $\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{H}$ des catégories, p un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$ et κ un foncteur de $\bar{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$. On appellera *catégorie induite de* $\mathcal{H}$ *par* (κ, p) et on notera $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ la sous-catégorie de $\mathcal{H} \times \bar{\mathcal{C}}$ formée des couples $(h, \bar{k})$ tels que $\kappa(\bar{k}) = p(h)$.

Les catégories $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ et $p^*(\mathcal{C}, \kappa)$ sont équivalentes.

THÉORÈME : Soient $\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{H}$ des catégories; il existe un foncteur $\bar{p}$ de $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\bar{\mathcal{C}}$ et un foncteur η relèvement de κ relativement à $(p, \bar{p})$ tels que, si p' est un foncteur d'une catégorie $\mathcal{H}'$ vers $\bar{\mathcal{C}}$ et η' un relèvement de κ relativement à (p, p'), il existe un foncteur $\bar{\eta}'$ de $\mathcal{H}'$ vers $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ tel que $\bar{p}\,\bar{\eta}' = p'$.

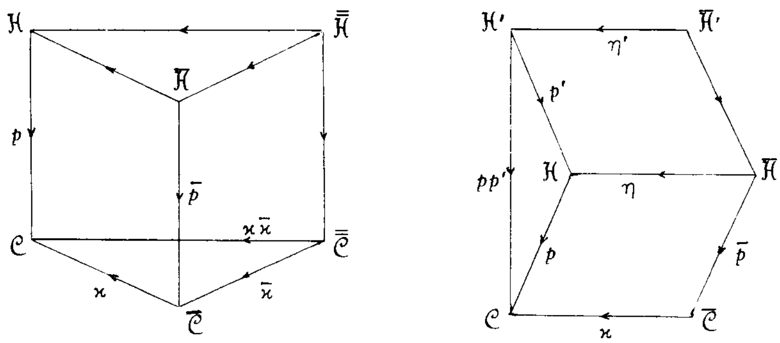
$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{H}' \arrow[lld, "\eta'"'] \arrow[ld, "\bar{\eta}'"] \arrow[ldd, "p'"] \\
\mathcal{H} \arrow[d, "p"'] & \kappa^*(\mathcal{H}, p) \arrow[l, "\eta"] \arrow[d, "\bar{p}"] & \\
\mathcal{C} & \bar{\mathcal{C}} \arrow[l, "\kappa"] &
\end{tikzcd}$$

COROLLAIRE 1 : Si p_o est une injection, alors $\bar{p}_o$ est une injection; si $p_o(\mathcal{H}_o) = \mathcal{C}_o$, alors $\bar{p}_o$ est une application sur $\bar{\mathcal{C}}_o$. Si $p(\mathcal{H}) = \mathcal{C}$, alors $\bar{p}(\varkappa^*(\mathcal{H}, p)) = \bar{\mathcal{C}}$; si $\varkappa(\bar{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$, alors $\eta(\varkappa^*(\mathcal{H}, p)) = \mathcal{H}$. Si p (resp. $\varkappa$) est une injection, alors $\bar{p}$ (resp. η) est une injection. Si p est le foncteur identité de $\mathcal{C}$, $\bar{p}$ est une équivalence de $\varkappa^*(\mathcal{C}, Id)$ sur $\bar{\mathcal{C}}$. Si p'_o ou η'_o sont des injections, alors $\bar{\eta}'_o$ est une injection; si p' ou η' sont des équivalences, alors $\bar{\eta}'$ est une équivalence.

COROLLAIRE 2 : Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ est une espèce de structures, alors $\varkappa^*(\mathcal{S}, p)$ est une catégorie d'hypermorphismes au-dessus de $\bar{\mathcal{C}}$. Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homo-morphismes, alors $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ est une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, \bar{p}, \varkappa^*(\mathcal{S}, p))$.

PROPOSITION (transitivité horizontale et verticale) : Soient $\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \bar{\bar{\mathcal{C}}}, \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ des catégories; si $\varkappa$ est un foncteur de $\bar{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$, p un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$ et $\bar{\varkappa}$ un foncteur de $\bar{\bar{\mathcal{C}}}$ vers $\bar{\mathcal{C}}$, alors $(\varkappa\,\bar{\varkappa})^*(\mathcal{H}, p)$ et $\bar{\varkappa}^*(\varkappa^*(\mathcal{H}, p), \bar{p})$ sont équivalents. Si p' est un foncteur de $\mathcal{H}'$ vers $\mathcal{H}$, alors $\varkappa^*(\mathcal{H}, p\,p')$ et $\eta^*(\mathcal{H}', p')$ sont équivalents; $\bar{p}$ et η désignent les applications canoniques de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\bar{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{H}$.

$$\bar{\mathcal{H}} = \varkappa^*(\mathcal{H}, p),$$
$$\bar{\bar{\mathcal{H}}} = (\varkappa\bar{\varkappa})^*(\mathcal{H}, p) \sim \bar{\varkappa}^*(\bar{\mathcal{H}}, \bar{p}),$$
$$\bar{\mathcal{H}}' = \eta^*(\mathcal{H}', p') \sim \varkappa^*(\mathcal{H}', p\,p').$$

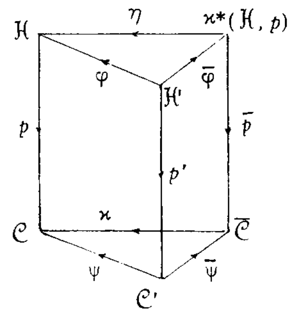


DÉFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et q une application d'une classe $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}_o$; on appelle *catégorie induite de $\mathcal{C}$ par q* et on note $q^*(\mathcal{C})$ la catégorie $(q \times q)^*(\mathcal{C}, \gamma)$ induite de $\mathcal{C}$ par $(q \times q, \gamma)$, le produit $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ étant muni de la loi de composition :

$$(u'', u'_1)(u', u) = (u'', u) \text{ si, et seulement si, } u'_1 = u'.$$

PROPOSITION : Tout foncteur Ψ d'une catégorie $\mathcal{C}'$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ admet une décomposition canonique $\Psi = \eta\bar{\Psi}$ dans laquelle $\bar{\Psi}_o$ est une injection et η est le foncteur canonique de $\Psi_0^*(\mathcal{C})$ vers $\mathcal{C}$; la restriction de η à la classe des éléments de $\overline{\Psi}(\mathcal{C}')$ de source et but fixés est une injection. Si Ψ_0 est une bijection, alors η est une équivalence.

PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ une espèce de structures et q une application d'une classe $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}_0$; la catégorie $(q\times q)^*(\mathcal{S}, \gamma p) = q^*(\mathcal{S})$ induite de $\mathcal{S}$ par $(q\times q, \gamma p)$ est une catégorie d'hypermorphismes au-dessus de $q^*(\mathcal{C})$; l'espèce de structures $(q^*(\mathcal{C}), \pi, q^*(\mathcal{S}))$ est appelée *espèce de structures induite de* $\mathcal{S}$ *au-dessus de* $q^*(\mathcal{C})$. Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes, alors la catégorie $q^*(\mathcal{H}) = (q\times q)^*(\mathcal{H}, \gamma p)$ induite de $\mathcal{H}$ par $(q\times q, \gamma p)$ est une catégorie d'homomorphismes pour $(q^*(\mathcal{C}), \pi, q^*(\mathcal{S}))$.

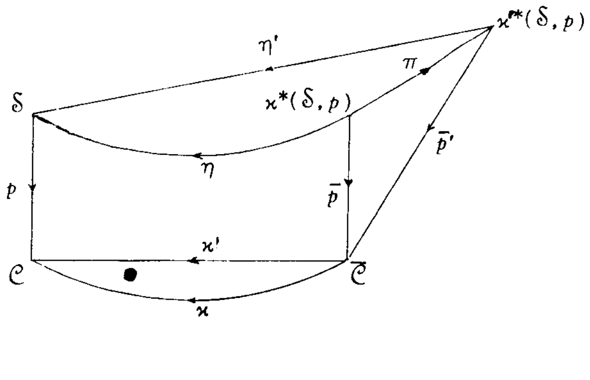


PROPOSITION prismatique : Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\overline{\mathcal{C}}$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ des catégories, ψ et $\varkappa$ des foncteurs de $\mathcal{C}'$ et $\overline{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$, p' un foncteur de $\mathcal{H}'$ vers $\mathcal{C}'$, p un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$, φ un relèvement de ψ relativement à (p, p'); Si $\overline{\psi}$ est un foncteur de $\mathcal{C}'$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ tel que l'on ait :

$$\varkappa\overline{\psi} = \psi,$$

alors il existe un foncteur $\overline{\varphi}$ de $\mathcal{H}'$ vers $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$, relèvement de $\overline{\psi}$ relativement à $(\overline{p}, p')$ tel que $\eta\overline{\varphi} = \varphi$, où $\overline{p}$ et η désignent les foncteurs canoniques de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\overline{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{H}$.

PROPOSITION : Soit $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ une catégorie d'hypermorphismes sur $\mathcal{C}$, $\varkappa$ et $\varkappa'$ deux foncteurs d'une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$ tels qu'il existe une transformation naturelle $(\varkappa', \theta, \varkappa)$ de $\varkappa$ vers $\varkappa'$. Alors il existe un foncteur π de $\varkappa^*(\mathcal{S}, p)$ vers $\varkappa'^*(\mathcal{S}, p)$ et une transformation naturelle $(\eta'\pi, \tau, \eta)$ de η vers $\eta'\pi$, où η et η' sont les foncteurs canoniques de $\varkappa^*(\mathcal{S}, p)$ et $\varkappa'^*(\mathcal{S}, p)$ vers $\mathcal{S}$, de sorte que l'on ait : $p\tau = \theta\overline{p}$.



PROPOSITION : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes, $\varkappa$ et $\varkappa'$ deux foncteurs d'une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$ et $(\varkappa', \theta, \varkappa)$ une équivalence naturelle de $\varkappa$ vers $\varkappa'$ telle que, pour tout $\bar{e} \in \overline{\mathcal{C}}_o$, $\theta(\bar{e})^{-1}$, $\theta(\bar{e}) \in p(\mathcal{S})$; alors il existe une équivalence $\bar{\pi}$ de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\varkappa'^*(\mathcal{H}, p)$ (resp. π de $\varkappa^*(\mathcal{S}, p)$ vers $\varkappa'^*(\mathcal{S}, p)$) et une équivalence naturelle $(\eta'\bar{\pi}, \bar{\tau}, \eta)$ (resp. $(\eta'\pi, \bar{\tau}, \eta)$) telles que : $p\bar{\tau} = \theta\bar{p}$, où η et η' désignent les foncteurs canoniques de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ et $\varkappa'^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\mathcal{H}$ (resp. de $\varkappa^*(\mathcal{S}, p)$ et $\varkappa'^*(\mathcal{S}, p)$ vers $\mathcal{S}$).

DÉFINITION : Soit $\overline{\mathcal{C}}$ une catégorie et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie; on dit que $(\varkappa, \overline{\mathcal{C}})$ est une *extension inessentielle de* $\mathcal{C}$ si $\varkappa$ est un foncteur de $\overline{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{C}$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ est l'identité. Soit p un foncteur d'une catégorie $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$ et $(\eta, \overline{\mathcal{H}})$ une extension inessentielle de $\mathcal{H}$; un relèvement $\bar{p}$ de p relativement à $(\varkappa, \eta)$ sera appelé une *extension* de p à $\overline{\mathcal{H}}$ si la restriction de $\bar{p}$ à $\mathcal{H}$ est p.

THÉORÈME : Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ des catégories, p un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$ et $(\varkappa, \overline{\mathcal{C}})$ une extension inessentielle de $\mathcal{C}$; alors la catégorie $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ induite de $\mathcal{H}$ par $(\varkappa, p)$ est une extension inessentielle $(\eta, \overline{\mathcal{H}})$ de $\mathcal{H}$ pour le foncteur canonique η de $\varkappa^*(\mathcal{H}, p)$ vers $\mathcal{H}$, appelée *extension canonique* de $\mathcal{H}$ à $(\varkappa, \overline{\mathcal{C}})$ ou à $\overline{\mathcal{C}}$.

PROPOSITION : Soit $(\varkappa', \overline{\mathcal{C}}')$ une extension inessentielle d'une catégorie $\mathcal{C}'$ et ψ un foncteur de $\mathcal{C}'$ sur une catégorie $\mathcal{C}$ tel que ψ_o soit une bijection. Alors il existe une extension inessentielle $(\varkappa, \overline{\mathcal{C}})$ de $\mathcal{C}$ et une extension $\bar{\psi}$ de ψ à $\overline{\mathcal{C}}'$ telle que $\bar{\psi}$ soit une surjection sur $\overline{\mathcal{C}}$ et que $\bar{\psi}_o$ soit une bijection.

4. Élargissements.

DÉFINITION : Soient $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ et $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ deux espèces de structures où $\mathcal{C}$ est un sous-groupoïde du groupoïde $\mathcal{C}'$. L'espèce $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ est appelée *élargissement* de l'espèce $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ est une sous-espèce de structures de $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$.

2) Σ est un sous-groupoïde plein de Σ'.

3) Toute structure $S' \in \Sigma'_o$ est isomorphe au moins à une structure $S \in \Sigma_o$ par un isomorphisme appartenant à Σ'.

Si de plus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des sous-groupoïdes d'une catégorie $\mathcal{C}''$, on dit que l'espèce $(\mathcal{C}'', p', \Sigma')$ est un *élargissement* de l'espèce $(\mathcal{C}'', p, \Sigma)$ au-dessus de $\mathcal{C}''$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$, alors la condition 1) entraîne la condition 2) et $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ est une sous-espèce pleine de $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$.

DÉFINITION : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes; une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$ est appelée *élargissement de* $\mathcal{H}$ *au-dessus de* $\mathcal{C}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$ est un élargissement de l'espèce $(\mathcal{C}', p, \Sigma)$, où Σ et Σ' sont les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

2) $\mathcal{H}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{S}$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Pour que $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$ soit un élargissement de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) $(\mathcal{C}', p, \Sigma)$ est une sous-espèce de $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$.

2) Σ est un sous-groupoïde plein de Σ' ; $\mathcal{H}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}'$ et on a : $\mathcal{S} = \mathcal{H} \cap \mathcal{S}'$.

3) Tout élément $h' \in \mathcal{H}'$ est isomorphe à un élément h de $\mathcal{H}$ relativement à $\Sigma' \times \Sigma'$.

COROLLAIRE : Pour que $\mathcal{H}'$ soit un élargissement de $\mathcal{H}$, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$ soit un élargissement de l'espèce $(\mathcal{C}', p, \Sigma)$ et que $\mathcal{H}'$ (resp. $\mathcal{S}'$) considéré comme espèce de structures au-dessus de $\Sigma' \times \Sigma'$ soit un élargissement de $\mathcal{H}$ (resp. de $\mathcal{S}$) considéré comme espèce de structures au-dessus de $\Sigma \times \Sigma$.

THÉORÈME : Si $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$ est un élargissement de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ et $(\mathcal{C}'', p'', \mathcal{H}'', \mathcal{S}'')$ est un élargissement de $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$, alors $\mathcal{H}''$ est un élargissement de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\mathcal{C}''$.

COROLLAIRE : Dans une classe de catégories d'homomorphismes, la relation : $\mathcal{H} \leftarrow \mathcal{H}'$ si, et seulement si, $\mathcal{H}'$ est un élargissement de la catégorie d'homomorphismes $\mathcal{H}$, est une relation d'ordre.

Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}'$; un élargissement maximal de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ dans la classe de tous les élargissements de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\mathcal{C}'$ est appelé *élargissement de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{C}'$* ou *élargissement maximal de* $(\mathcal{C}', p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Soient Γ et Γ' les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$; on dit que $\mathcal{C}'$ est un *élargissement de* $\mathcal{C}$ si la catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}', Id, \mathcal{C}', \Gamma')$ est un élargissement de $(\mathcal{C}, Id, \mathcal{C}, \Gamma)$.

PROPOSITION : Pour que $\mathcal{C}'$ soit un élargissement de $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que $\mathcal{C}$ soit plein dans $\mathcal{C}'$ et que Γ' soit le sous-groupoïde plein saturé de Γ' engendré par Γ. Si $\mathcal{C}_i$ est une composante connexe de $\mathcal{C}$, la composante connexe $\mathcal{C}'_i$ de $\mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{C}'$ est un élargissement de $\mathcal{C}_i$ et $\mathcal{C}'$ est la réunion des $\mathcal{C}'_i$.

COROLLAIRE : Pour que $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$ soit un élargissement de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \Sigma)$, où Σ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées.

1) $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ est une sous-espèce de structures de $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$.

2) $\mathcal{H}'$ est un élargissement de la catégorie $\mathcal{H}$ et $\mathcal{S}'$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}'$.

PROPOSITION : Si $\mathcal{C}'$ est un élargissement d'une sous-catégorie $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}'$ est une extension inessentielle $(\varkappa, \mathcal{C}')$ de $\mathcal{C}$ et est équivalente à la catégorie induite $\varkappa_0^*(\mathcal{C})$. Si $(\varkappa, \mathcal{C}')$ et $(\varkappa_1, \mathcal{C}')$ sont deux extensions inessentielles de $\mathcal{C}$, alors $\varkappa$ et $\varkappa_1$ sont équivalents.

PROPOSITION: Soient $\mathcal{C}$ un sous-groupoïde d'un groupoïde $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ le sous-groupoïde plein de $\mathcal{C}'$ ayant $\mathcal{C}_0$ pour classe de ses unités; pour que tout foncteur de $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{C}_1$ puisse se prolonger en un foncteur de $\mathcal{C}'$ vers $\mathcal{C}_1$, il faut et il suffit que $\mathcal{C}'$ soit une extension inessentielle de $\mathcal{C}$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie; pour toute classe d'intransitivité $\mathcal{C}_0^i$ de $\mathcal{C}_0$ relativement à Γ, choisissons une unité e_i. La sous-catégorie pleine $\check{\mathcal{C}}$ ayant les e_i pour unités est appelée *catégorie réduite* de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION : Une catégorie $\mathcal{C}$ est un élargissement de toute catégorie réduite $\check{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$, donc est équivalente à une catégorie induite $\check{\varkappa}_0^*(\check{\mathcal{C}})$. $\check{\mathcal{C}}$ est un élément minimal pour la relation d'ordre définie ci-dessus, dans toute classe de catégories contenant $\mathcal{C}$.

PROPOSITION: Soient p un foncteur d'une catégorie $\mathcal{H}$ sur une catégorie $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ un élargissement de $\mathcal{C}$; l'extension canonique $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ à $(\varkappa, \mathcal{C}')$ est un élargissement de $\mathcal{H}$ à $\mathcal{C}'$.

THÉORÈME : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \Sigma)$ une catégorie d'homomorphismes, où Σ est un groupoïde. Pour $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}}$, il existe un élargissement canonique $(\overline{\mathcal{C}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\Sigma})$ tel que tout élargissement de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\overline{\mathcal{C}}$ s'identifie à un élargissement $(\overline{\mathcal{C}}, p', \mathcal{H}', \Sigma') \prec (\overline{\mathcal{C}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\Sigma})$:

Soit $\mathcal{G}$ la classe des éléments f de $\overline{\Gamma}$ tels que $\alpha(f) \in \mathcal{C}$ et α l'application: $f \to \alpha(f)$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{C}_0$. Alors $\overline{\mathcal{H}}$ est la catégorie quotient de $\alpha^*(\mathcal{H})$ par la relation d'équivalence: $(h_1, f_1', f_1) \sim (h, f', f)$ si, et seulement si, $f_1 = f g^{-1}$, $f_1' = f' g'^{-1}$, $h_1 = g' h g^{-1}$, $(g, \alpha(h)) \in \Sigma$, $(g', \beta(h)) \in \Sigma$.

COROLLAIRE 1 : Soit Γ' un sous-groupoïde de $\overline{\mathcal{C}}$ tel que, pour tout $e' \in \Gamma'_0$, il existe $f \in \Gamma'$ avec $\alpha(f) \in p(\Sigma)$ et $\beta(f) = e'$. Alors l'image canonique dans $\overline{\mathcal{H}}$ de la sous-catégorie de $\alpha^*(\mathcal{H})$ formée des triplets (h, f', f), où $f \in \Gamma'$ et $f' \in \Gamma'$, est un élargissement $(\overline{\mathcal{C}}, p', \mathcal{H}', \Sigma')$ de $\mathcal{H}$ tel que $\Gamma' = p(\Sigma')$.

COROLLAIRE 2 : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes et $(\overline{\mathcal{C}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}, \overline{\Sigma})$ l'élargissement canonique de $(\overline{\mathcal{C}}, p, \mathcal{S}, \Sigma)$. Pour que $(\overline{\mathcal{C}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}})$ soit une espèce de structures, il suffit que la condition suivante soit vérifiée: Si $k' = k g$, où $k \in \mathcal{C}$, $k' \in \mathcal{C}$, $g \in \overline{\Gamma}$, alors $g \in \Gamma$. Dans ce cas on a $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S}) \prec (\overline{\mathcal{C}}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$.

THÉORÈME (transitivité verticale) : Soient Σ et Σ' deux groupoïdes et (Σ, p', Σ') une espèce de superstructures au-dessus de $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$; soient $(\mathcal{C}, \bar{p}, \overline{\Sigma})$ et $(\overline{\Sigma}, \bar{p}', \overline{\Sigma}')$ les élargissements maxima de $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ et $(\overline{\Sigma}, p', \Sigma')$. Alors $(\mathcal{C}, \bar{p}\bar{p}', \overline{\Sigma}')$ est équivalent à l'élargissement maximal de $(\mathcal{C}, p p', \Sigma')$.

COROLLAIRE 1 : Soit $(\mathcal{C}, p', \Sigma')$ une sous-espèce de $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$; l'élargissement maxi--mal $(\mathcal{C}, \bar{p}, \bar{\Sigma})$ de $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ est une espèce de structures sous-jacente à l'élargissement maximal $(\mathcal{C}, \bar{p}, \bar{\Sigma}')$ de $(\mathcal{C}, p', \Sigma')$ et $\bar{\Sigma}'$ s'identifie à l'élargissement maximal $\tilde{\Sigma}'$ de Σ' à $\bar{\Sigma}$.

COROLLAIRE 2 : Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \Sigma)$ une catégorie d'homomorphismes et $\bar{\mathcal{C}}$ une catégorie contenant $\mathcal{C}$; soit $\tilde{\mathcal{C}}$ l'élargissement de $\mathcal{C}$ à $\bar{\mathcal{C}}$. Alors l'élargissement canonique $\bar{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ à $\bar{\mathcal{C}}$ est équivalent à l'extension canonique de $\mathcal{H}$ à $\tilde{\mathcal{C}}$.

THÉORÈME : Soient $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ et $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ des espèces de structures, où Σ et Σ' sont des groupoïdes. Soient $[\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\Sigma}]$ et $[\bar{\mathcal{C}}', \bar{p}', \bar{\Sigma}']$ deux élargissements de $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ et $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$; soit (φ_o, ψ) une application covariante de $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ dans $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ et $\bar{\psi}$ un foncteur de $\bar{\mathcal{C}}$ vers $\bar{\mathcal{C}}'$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ est ψ; alors il existe une appli--cation covariante $(\bar{\varphi}_o, \bar{\psi})$, déterminée d'une façon unique, telle que φ_o soit la restric--tion de $\bar{\varphi}_o$ à Σ_o; le foncteur $\bar{\varphi}$ correspondant à $\bar{\varphi}_o$ est un élargissement de φ à $\bar{\Sigma}$.

THÉORÈME : Soient $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \Sigma)$ et $(\mathcal{C}', p', \mathcal{H}', \Sigma')$ des catégories d'homomorphismes et $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Sigma})$ et $(\bar{\mathcal{C}}', \bar{p}', \bar{\mathcal{H}}', \bar{\Sigma}')$ des élargissements de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$. Soit ψ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, $\bar{\psi}$ et $\bar{\psi}$ des foncteurs de $\bar{\mathcal{C}}$ vers $\bar{\mathcal{C}}'$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ est ψ. Tout foncteur φ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ relèvement de ψ relativement à (p', p) s'élargit d'une façon unique en un foncteur $\bar{\varphi}$ (resp. $\bar{\varphi}'$) de $\bar{\mathcal{H}}$ vers $\bar{\mathcal{H}}'$, relèvement de $\bar{\psi}$ (resp. $\bar{\psi}'$) relative--ment à $(\bar{p}', \bar{p})$. De plus il existe une équivalence naturelle $(\bar{\varphi}', \tau, \bar{\varphi})$.

1 **5. Groupoïdes préinductifs et inductifs.**

DÉFINITION : Une *classe préinductive* est une classe $\mathcal{A}$ munie d'une relation d'ordre telle que deux éléments quelconques aient une intersection et que $\mathcal{A}$ admette un plus petit élément noté 0. Une *classe prélocale* est une classe préinductive $\mathcal{A}$ vérifiant l'axiome de distributivité (D) suivant :

(D) Pour toute sous-classe B de $\mathcal{A}$ admettant un agrégat et pour tout $a \in \mathcal{A}$, la classe des éléments $a \cap b$, où $b \in B$, admet $a \cap (\cup B)$ pour agrégat: $a \cap (\cup B) = \bigcup_{b \in B} (a \cap b)$.

DÉFINITION : Un groupoïde $\mathcal{S}$ est appelé *groupoïde (pré)inductif* s'il est muni d'une relation d'ordre pour laquelle $\mathcal{S}$ soit une classe (pré)inductive et si l'axiome (I) suivant est vérifié :

(I) Soit $\varphi(f)$, pour tout $f \in \mathcal{S}$, la classe des éléments $f' < f$: alors l'application $\varphi: f \to \varphi(f)$ est un foncteur généralisé de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}$ appelé *foncteur d'induction*.

Dans un groupoïde préinductif, le composé de f et g, où $\alpha(g) = \beta(f)$, sera désigné par $g \cdot f$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif et $f \in \mathcal{S}$. Pour tout $e < \alpha(f)$, il existe un et un seul $g < f$ tel que $\alpha(g) = e$ et pour tout $e' < \beta(f)$, il existe un et un seul $g' < f$ tel que $\beta(g') = e'$. On appellera g *l'élément induit par* f sur e et g' *l'élément induit à gauche* par f sur e'.

PROPOSITION : L'agrégat d'une classe d'unités est une unité. Soit A une sous-classe du groupoïde préinductif $\mathcal{S}$. Si A admet un agrégat, alors $\cup\alpha(A)$, $\cup\beta(A)$ et $\cup A^{-1}$, où A^{-1} désigne la classe des inverses des éléments de A, sont définis; de plus, on a:

$$\cup\alpha(A) = \alpha(\cup A), \qquad \cup\beta(A) = \beta(\cup A), \qquad (\cup A)^{-1} = \cup A^{-1}.$$

Supposons A majorée par f; si $\cup\alpha(A)$ ou $\cup\beta(A)$ est défini, alors $\cup A$ existe; si $\cap A$ est défini, alors $\cap\alpha(A)$ et $\cap\beta(A)$ sont définis et l'on a:

$$\alpha(\cap A) = \cap\alpha(A), \qquad \beta(\cap A) = \cap\beta(A).$$

PROPOSITION : La loi de composition dans un groupoïde préinductif $\mathcal{S}$ peut être étendue à tous les couples (f', f) en une loi de composition associative $(f', f) \to f'f$, appelée *pseudomultiplication*, de la façon suivante:

Soit g' l'élément induit par f' sur $e = \alpha(f') \cap \beta(f)$ et g l'élément induit à gauche par f sur e; on pose: $f'f = g' . g$.
Alors $f'f$ est l'agrégat de la sous-classe K de $\mathcal{S}$ formée des produits $h'.h$, où $h' < f'$, $h < f$.

Muni de la pseudomultiplication, un groupoïde $\hat{(\text{pré})}$inductif $\mathcal{S}$ est appelé *$\hat{(\text{pré})}$-pseudogroupe*; pour tout $f \in \mathcal{S}$, tout $f' \in \mathcal{S}$ et $e \in \mathcal{S}_0$, on a les formules:

$$f'f = (f'\beta(f)) \cdot (\alpha(f')f), \quad \alpha(fe) = \alpha(f)e, \quad \beta(ef) = e\beta(f), \quad fe = \beta(fe)f = f\alpha(fe),$$
$$ef = f\alpha(ef) = \beta(ef)f, \quad (fe)^{-1} = ef^{-1}, \quad (ef)^{-1} = f^{-1}e, \quad (f'f)^{-1} = f^{-1}f'^{-1}.$$

PROPOSITION : Pour qu'un groupoïde $\mathcal{S}$ soit un groupoïde inductif, il faut et il suffit que $\mathcal{S}$ soit muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome (I), que $\mathcal{S}_0$ soit une classe inductive pour l'ordre induit et que toute sous-classe E de $\mathcal{S}_0$ majorée dans $\mathcal{S}_0$ admette un agrégat dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}$ deux groupoïdes $\hat{(\text{pré})}$inductifs; alors le groupoïde produit $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ est un groupoïde $\hat{(\text{pré})}$inductif, appelé *groupoïde produit*, pour la relation d'ordre:

$$(g', g) < (f', f) \text{ si, et seulement si, } g < f \text{ et } g' < f'.$$

DÉFINITION : Un *groupoïde $\hat{(\text{pré})}$local* est un groupoïde $\hat{(\text{pré})}$inductif dont la classe des unités vérifie l'axiome de distributivité (D).

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal; alors $\mathcal{S}$ est une classe prélocale.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal, A et A' deux sous-classes de $\mathcal{S}$ admettant des agrégats. Alors la sous-classe $A'A$ des pseudoproduits $a'a$, où $a' \in A'$ et $a \in A$ admet $(\cup A')(\cup A)$ pour agrégat.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe. On appelle *classe compatible* de $\mathcal{S}$ une sous-classe F de $\mathcal{S}$ telle que, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, on ait :

$$\alpha(f \cap f') = \alpha(f)\alpha(f'), \qquad \beta(f \cap f') = \beta(f)\beta(f').$$

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe, $f \in \mathcal{S}$ et $f' \in \mathcal{S}$. La condition : $\alpha(f \cap f') = \alpha(f)\alpha(f')$ (respectivement $\beta(f \cap f') = \beta(f)\beta(f')$) est équivalente à chacune des conditions suivantes :

1) $f\alpha(f') = f'\alpha(f)$; 2) $f\alpha(f') = f \cap f'$; 3) $f'f^{-1}$ est une unité

(respectivement: 1') $\beta(f)f' = \beta(f')f$; 2') $\beta(f)f' = f \cap f'$; 3') $f'^{-1}f \in \mathcal{S}_0$).

Elle entraîne aussi : $f'f^{-1} = \beta(f \cap f')$ (respectivement $f'^{-1}f = \alpha(f \cap f')$).

DÉFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe préinductive. Une sous-classe $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ est appelée *sous-classe* (respectivement *partie sous-*) *inductive* $\widehat{\textit{(faible)}}$ de $\mathcal{A}$ si elle vérifie les axiomes 1 (resp. 1') et 2 suivants :

1) $\mathcal{A}'$ est saturé par intersection finie.

1') Si $a < b$, $a' < b$, $a \in \mathcal{A}'$, $a' \in \mathcal{A}'$, $b \in \mathcal{A}'$, alors $a \cap a' \in \mathcal{A}'$.

2) Pour toute sous-classe B de $\mathcal{A}'$ $\widehat{\text{(majorée dans } \mathcal{A}')}$ admettant un agrégat dans $\mathcal{A}$, on a : $\cup B \in \mathcal{A}'$.

Si B est une sous-classe de $\mathcal{A}$, l'intersection $\mathcal{B}$ des sous-classes (resp. parties sous-) inductives $\widehat{\text{(faibles)}}$ contenant B est appelée *sous-classe* (resp. *partie sous-*) *inductive* $\widehat{\textit{(faible)}}$ *engendrée par* B *dans* $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{B}$ est la classe des agrégats des sous-classes de B $\widehat{\text{(majorées dans } B)}$ admettant un agrégat dans $\mathcal{A}$, B est appelé *base* de $\mathcal{B}$.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'une classe prélocale $\mathcal{A}$ qui contienne avec deux éléments majorés dans $\mathcal{A}$ leur intersection ; alors B est une base de la partie sous-inductive $\widehat{\text{(faible)}}$ $\mathcal{B}$ qu'elle engendre et $\mathcal{B}$ contient avec deux éléments majorés dans $\mathcal{A}$ leur intersection .

COROLLAIRE : Si B est une sous-classe d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$ telle que l'on ait : $B\alpha(B) \subset B$ (resp. $\beta(B)B \subset B$), alors B est une base de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}\alpha(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ (resp. $\beta(\mathcal{B})\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$).

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe; une sous-classe $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ est appelée *sous-pseudogroupe* $\widehat{\textit{(faible)}}$ de $\mathcal{S}$ si les axiomes suivants sont vérifiés :

1) $\mathcal{S}'$ est stable pour la pseudomultiplication.

2) L'inverse d'un élément de $\mathcal{S}'$ appartient à $\mathcal{S}'$.

3) $\mathcal{S}'$ contient $\cup B$ pour toute sous-classe B de $\mathcal{S}'$ (majorée dans $\mathcal{S}'$) et admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Pour qu'une sous-classe $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ vérifie les axiomes 1 et 2 de la définition ci-dessus, il faut et il suffit que $\mathcal{S}'$ soit un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ et que $f \in \mathcal{S}'$ et $e \in \mathcal{S}'_0$ entraîne $fe \in \mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Un sous-pseudogroupe (faible) $\mathcal{S}'$ d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$ contient avec deux éléments compatibles f et g leur intersection.

PROPOSITION : Un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$ stable pour la pseudo-multiplication est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $\mathcal{S}'_0$ contient $\cup B$ pour toute sous-classe B de $\mathcal{S}'_0$ majorée dans $\mathcal{S}'_0$ et admettant un agrégat.

PROPOSITION : Un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$ saturé par induction (c'est-à-dire contenant avec un élément tout élément plus petit) est un sous-pseudo-groupe faible de $\mathcal{S}$.

DÉFINITION : Soit B une sous-classe d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$; l'intersection $\mathcal{B}$ des sous-pseudogroupes (faibles) de $\mathcal{S}$ contenant B est appelée *sous-pseudogroupe (faible) engendré par B dans $\mathcal{S}$*.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\alpha(B) \subset B$; $\beta(B) \subset B$; $B^{-1} = B$.

2) Si $e \in B \cap \mathcal{S}_0$ et $b \in B$, alors $eb \in B$.

3) B contient $\cup B'$ pour toute sous-classe B' de B majorée dans B et admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$.

Alors le sous-groupoïde $\mathcal{B}$ engendré par B est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal et B une sous-classe de $\mathcal{S}$ vérifiant les axiomes 1 et 2 des sous-pseudogroupes. Alors B est une base du sous-pseudogroupe (faible) qu'il engendre.

PROPOSITION : Dans un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$, la sous-classe inductive (faible) F' engendrée par une classe compatible F est compatible.

COROLLAIRE : Si F' et G' sont deux sous-classes inductives compatibles de $\mathcal{S}$, alors la classe $G'F'$ des pseudoproduits gf où $g \in G'$ et $f \in F'$, est une base de la sous-classe inductive qu'elle engendre et celle-ci est compatible.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$; la composante connexe $\mathcal{B}$ de la sous-classe des éléments induits des éléments de B est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ appelé *composante inductive faible* de B dans $\mathcal{S}$; le sous-pseudogroupe engendré par $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{S}$ est appelé *composante inductive* de B.

1 **6. Complétion des groupoïdes inductifs.**

PROPOSITION : Soit F une sous-classe d'un groupoïde préinductif $\mathcal{S}$ telle que $F\alpha(F) = F$ et $\beta(F)F = F$ et que F contienne $\cup B$ pour toute sous-classe B de F majorée dans F et admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$. Alors F est une partie sous-inductive faible de $\mathcal{S}$ tandis que $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont des sous-classes inductives faibles; on a :

$$F^{-1}F = F^{-1}.F, \qquad FF^{-1} = F.F^{-1};$$

les groupoïdes engendrés par $a(F) = F^{-1}F$ et $b(F) = FF^{-1}$ sont des sous-pseudo-groupes faibles de $\mathcal{S}$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif, F une sous-classe de $\mathcal{S}$ et $a(F)$ la classe des pseudoproduits $f^{-1}f'$, où $f \in F$ et $f' \in F$. La classe F est appelée *atlas (faible) complet* de $\mathcal{S}$ si F contient $\cup B$ pour toute sous-classe B de F (majorée dans F) admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$ et si de plus on a : $Fa(F) = F$.

PROPOSITION : Si F est un atlas faible complet du groupoïde préinductif $\mathcal{S}$, alors $F\alpha(F) = F$ et $\beta(F)F = F$. De plus $a(F)$ et $b(F)$ sont des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$ admettant $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ pour classes des unités et on a : $b(F)F = F$.

COROLLAIRE : La classe F^{-1} des inverses des éléments de F est un atlas faible complet tel que $a(F^{-1}) = b(F)$ et $b(F^{-1}) = a(F)$.

PROPOSITION : Soient B une sous-classe d'un groupoïde préinductif $\mathcal{S}$, Γ un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ contenant $B^{-1}B$, A la composante inductive faible de $B^{-1}B$ dans Γ; alors BA est un atlas faible complet tel que $a(BA) = A$.

COROLLAIRE 1 : Si Γ est le sous-pseudogroupe faible engendré par $B^{-1}B$ dans $\mathcal{S}$, alors $B\Gamma$ est un atlas faible complet tel que $a(B\Gamma) = \Gamma$.

COROLLAIRE 2 : Soit B une sous-classe telle que la classe $B^{-1}.B$ soit un sous-pseudogroupe faible et que l'on ait: $\beta(B)B \subset B$ et $B(B^{-1}.B) \subset B$. Alors B est un atlas faible complet.

PROPOSITION : Soient F et G deux atlas faibles complets d'un groupoïde inductif $\mathcal{S}$ tels que $a(G) = b(F)$. Alors la classe GF est un atlas faible complet pour lequel $a(GF) = a(F)$ et $b(GF) = b(G)$.

COROLLAIRE : La classe des atlas faibles complets de $\mathcal{S}$ est un groupoïde pour la loi de composition :

$$(G, F) \to GF \text{ si, et seulement si, } a(G) = b(F).$$

La classe de ses unités est la classe des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Si F est un atlas faible complet d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$, la partie sous-inductive $\overline{F}$ engendrée par F dans $\mathcal{S}$ est un atlas complet de $\mathcal{S}$ admettant F pour base.

PROPOSITION : Soient F et G des atlas complets d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$; en dési--gnant par $\overline{a}(F)$ et $\overline{b}(F)$ les sous-pseudogroupes engendrés par $a(F)$ et $b(F)$, on a $F\overline{a}(F) = F = \overline{b}(F)F$. Si $\overline{b}(F) = \overline{a}(G)$, la partie sous-inductive $G \odot F$ engendrée par GF est un atlas complet, tel que $\overline{a}(G \odot F) = \overline{a}(F)$ et $\overline{b}(G \odot F) = \overline{b}(G)$.

THÉORÈME : La classe $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ des atlas complets d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$ est un groupoïde pour la loi de composition :

$$(G, F) \to G \odot F \text{ si, et seulement si, } \overline{a}(G) = \overline{b}(F).$$

Les unités de $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ sont les sous-pseudogroupes de $\mathcal{S}$. De plus la relation :

$F' < F$ si, et seulement si, F' est la partie sous-inductive engendrée par $F\alpha(F')$ ainsi que par $\beta(F')F$

est une relation d'ordre sur $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ qui vérifie l'axiome (I) et pour laquelle deux éléments majorés ont une intersection.

Suivant la terminologie introduite plus loin, $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-préin--ductif.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal. La classe $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ des sous-classes inductives compatibles de $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde plein de $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ saturé par induction, et un grou--poïde inductif pour la structure d'ordre induite de celle de $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$. Les unités de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ sont les sous-classes inductives de $\mathcal{S}_o$.

COROLLAIRE : $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-groupoïde de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ stable pour la pseudomultipli--cation en identifiant $f \in \mathcal{S}$ avec la classe $\varphi(f)$ des éléments induits de f. Si $\mathcal{S}$ est local, $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$, saturé par induction.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe; on appelle sous-classe complète (faible) de $\mathcal{S}$ une sous-classe inductive (faible) de $\mathcal{S}$ qui est compatible et saturée par induction.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal ; la sous-classe $\widetilde{\mathcal{S}}$ du groupoïde préinductif $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ formée par les sous-classes complètes de $\mathcal{S}$ est un sous-pseudogroupe faible de

$\mathcal{J}(\mathcal{S})$ saturé par induction et admettant $\mathcal{S}$ pour base. De plus, $\overline{\mathcal{S}}$ est un groupoïde local pour l'ordre induit de celui de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE: $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ est une extension inessentielle $(\sigma, \mathcal{J}(\mathcal{S}))$ de $\overline{\mathcal{S}}$, où σ est le foncteur qui associe à $F \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$ la sous-classe complète engendrée par F dans $\mathcal{S}$. σ est compatible avec la pseudomultiplication et l'intersection; $\overline{\mathcal{S}}$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$.

1 DÉFINITION: Un groupoïde inductif $\mathcal{S}$ est dit $\hat{(}$*relativement*$\hat{)}$ *complet* si toute sous-classe complète F de $\mathcal{S}$ $\hat{(}$telle que $\cup\alpha(F)$ et $\cup\beta(F)$ existent$\hat{)}$ admet un agrégat dans $\mathcal{S}$.

THÉORÈME (de complétion): Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal. Le groupoïde local $\overline{\mathcal{S}}$ est complet et caractérisé à une équivalence près par la condition (C) suivante:

(C) Si Σ est un groupoïde local complet dont $\mathcal{S}$ est une base, il existe un foncteur π de $\overline{\mathcal{S}}$ sur Σ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est l'identité et qui est compatible avec l'agrégation. (Ce foncteur π associe à $F \in \overline{\mathcal{S}}$ l'agrégat de la classe F dans Σ.)

COROLLAIRE: Il existe un foncteur section ψ relativement à π et Σ est un groupoïde quotient de $\overline{\mathcal{S}}$ (le foncteur ψ associe à $f' \in \Sigma$ la classe F des éléments $f \in \mathcal{S}$ tels que $f < f'$).

THÉORÈME: Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal; le sous-pseudogroupe *faible* de $\overline{\mathcal{S}}$ engendré par $\mathcal{S}$ dans $\overline{\mathcal{S}}$ est un groupoïde local $\check{\mathcal{S}}$, caractérisé à une équivalence près par la condition $(\check{C})$ suivante:

$(\check{C})$ Si $\check{\Sigma}$ est un groupoïde local contenant $\mathcal{S}$ et tel que le sous-pseudogroupe faible engendré par $\mathcal{S}$ dans $\check{\Sigma}$ soit $\check{\Sigma}$, alors il existe un foncteur défini comme plus haut $\check{\pi}$ de $\check{\mathcal{S}}$ sur $\check{\Sigma}$ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est l'identité et tel que, pour toute classe B de $\check{\mathcal{S}}$ admettant un agrégat, on ait: $\check{\pi}(\cup B) = \cup\, \check{\pi}(B)$.

COROLLAIRE: Si $\mathcal{S}$ est un groupoïde local, alors $\check{\mathcal{S}}$ s'identifie à $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE: Il existe un foncteur $\check{\psi}$ section relativement à $\check{\pi}$ et $\check{\Sigma}$ est un groupoïde quotient de $\check{\mathcal{S}}$.

THÉORÈME: Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde local; il existe un groupoïde local relativement complet $\hat{\mathcal{S}}$ équivalent au sous-groupoïde plein de $\overline{\mathcal{S}}$ ayant $\mathcal{S}_0$ comme classe des unités et caractérisé à une équivalence près par la condition $(\hat{C})$ suivante:

$(\hat{C})$ Si $\hat{\Sigma}$ est un groupoïde local relativement complet contenant $\mathcal{S}$ comme base et tel que $\hat{\Sigma}_0$ soit identique à $\mathcal{S}_0$, alors il existe un foncteur $\hat{\pi}$ de $\hat{\mathcal{S}}$ sur $\hat{\Sigma}$ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est l'identité et qui est compatible avec l'agrégation.

COROLLAIRE : Si $\mathcal{S}$ est relativement complet, on a $\hat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$.

COROLLAIRE : Il existe un foncteur $\hat{\psi}$ section relativement à $\hat{\pi}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde local ; il existe un sous-pseudogroupe $\tilde{\mathcal{S}}$ du pseudo-groupe $\overline{\mathcal{S}}$ dans lequel toute sous-classe compatible F de $\mathcal{S}$ telle que $\alpha(F)$ ou $\beta(F)$ admette un agrégat dans $\mathcal{S}$, admet un agrégat.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal et $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ la classe des atlas complets de $\mathcal{S}$. Sur $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ la relation :

$$F' \dot{<} F \text{ si, et seulement si, } F' \text{ est une sous-classe de } F \text{ et } F' < F,$$

est une relation d'ordre vérifiant l'axiome (I) et telle que toute classe majorée admette une intersection ; c'est-à-dire que $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ muni de la relation $F' \dot{<} F$ devient un groupoïde sous-inductif, noté $\dot{\mathcal{A}}(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE 1 : La relation $F' \dot{<} F$ détermine sur $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ une structure de groupoïde inductif, que nous désignerons par $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE 2 : Sur $\overline{\mathcal{S}}$ les relations $F' \dot{<} F$ et $F' < F$ induisent la même relation d'ordre :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F' \text{ est une sous-classe de } F.$$

DÉFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe préinductive ; une sous-classe inductive F de $\mathcal{A}$ admettant un plus grand élément f est appelée *paratopologie sur* f ou sur $\mathcal{A}$.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal. La classe des paratopologies sur $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde de $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$ stable pour la pseudomultiplication et l'intersection finie ; si $\mathcal{S}$ est local, c'est un sous-pseudogroupe faible de $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$ saturé par induction.

COROLLAIRE : La classe des paratopologies de $\mathcal{S}$ est un sous-pseudogroupe faible saturé par induction de $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$, que nous désignerons par $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe préinductive. On appellera *filtre* sur $\mathcal{A}$ une sous-classe F de $\mathcal{A}$ possédant les propriétés suivantes :

1) Pour tout $f \in F$ et tout $f' \in \mathcal{A}$ tel que $f < f'$, on a $f' \in F$.

2) Si $f \in F$ et $f' \in F$, alors $f \cap f' \in F$.

On appellera *base de filtre* une sous-classe B de $\mathcal{A}$ telle que, pour tout $b \in B$ et tout $b' \in B$, il existe $b'' \in B$ avec $b'' < b \cap b'$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe préinductive ; on appelle *quasi(-base de) filtre* sur $\mathcal{A}$ une sous-classe inductive de $\mathcal{A}$ dont la classe des éléments différents de 0 est un

$\hat{(}$une base de$\hat{)}$ filtre.

PROPOSITION : Si B est une $\hat{(}$quasi-$\hat{)}$ base de filtre sur la classe préinductive A, alors la classe F des majorants des éléments de B $\hat{(}$différents de $0\hat{)}$ est un $\hat{(}$quasi-$\hat{)}$ filtre, appelé $\hat{(}$*quasi-*$\hat{)}$ *filtre engendré par* B.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal et soit $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ la sous-classe de $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ formée des atlas complets qui sont des quasi-bases de filtres ; $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ est un sous-groupoïde de $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$; si $F \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$, $H \in \mathcal{B}(\mathcal{S})_0$, $H < \bar{a}(F)$, l'induit par F sur H est dans $\mathcal{B}(\mathcal{S})$.

PROPOSITION : Un quasi-filtre F sur un groupoïde préinductif $\mathcal{S}$ est un atlas complet de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif; si F et G sont des filtres de $\mathcal{S}$, alors $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont des bases de filtres $\alpha^*(F)$, $\beta^*(F)$; si $\alpha^*(G) = \beta^*(F)$, GF engendre un filtre $G*F$, pour lequel on a : $\alpha^*(G*F) = \alpha^*(F)$, $\beta^*(G*F) = \beta^*(G)$.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif; la classe $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ des filtres de $\mathcal{S}$ est un groupoïde inductif lorsqu'elle est munie de la loi de composition :

$$(G, F) \to G*F \text{ si, et seulement si, } \alpha^*(G) = \beta^*(F),$$

et de la loi d'induction :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F \text{ est une sous-classe de } F'.$$

COROLLAIRE : $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-groupoïde plein saturé $\mathcal{S}^<$ de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, en identifiant $f \in \mathcal{S}$ au filtre $f^<$ de ses majorants dans $\mathcal{S}$; $\mathcal{S}^<$ est saturé par intersection finie ; si $\mathcal{S}$ est inductif, alors $\mathcal{S}^<$ est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$.

Remarquons que le produit de deux filtres dans $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ peut être défini sans que le produit des quasi-filtres correspondants soit défini dans $\mathcal{B}(\mathcal{S})$; mais on a :

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal; alors $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ relativement au foncteur ψ qui associe à $F \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$ le filtre $\psi(\mathcal{F})$ engendré par F; ψ est compatible avec les ordres.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif; la classe $F^>$ des minorants d'un filtre F de $\mathcal{S}$ est une sous-classe complète, la classe $C^<$ des majorants d'une sous-classe complète C est un filtre. On a les relations : $C^< = ((C^<)^>)^<$ et $F^> = ((F^>)^<)^>$.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif; le sous-pseudogroupe $\mathcal{S}'$ engendré par $\mathcal{S}^<$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ est le groupoïde saturé de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ formé des filtres F tels que : $F = (F^>)^<$. Si $\mathcal{S}$ est prélocal, $\mathcal{S}'$ est un groupoïde quotient de $\check{\mathcal{S}}$.

Le foncteur de $\check{\mathcal{S}}$ sur $\mathcal{S}'$ est le foncteur q qui associe à $C \in \check{\mathcal{S}}$ le filtre $C^{<}$ de ses majorants; q est compatible avec l'agrégation et avec l'intersection finie et identi--fie le sous-groupoïde $\mathcal{S}$ de $\check{\mathcal{S}}$ avec le sous-groupoïde $\mathcal{S}^{<}$ de $\mathcal{S}'$.

7. Groupoïdes sous-inductifs. 1

DÉFINITION : Une classe ordonnée $\mathcal{A}$ est appelée *classe sous-$\hat{(}$pré$\hat{)}$inductive* si $\mathcal{A}$ a un plus petit élément 0 et si, pour tout $a \in \mathcal{A}$, la classe $\varphi(a)$ des éléments plus petits que a est une classe $\hat{(}$pré$\hat{)}$inductive pour l'ordre induit.

PROPOSITION : Pour qu'une classe ordonnée $\mathcal{A}$ soit sous-$\hat{(}$pré$\hat{)}$inductive, il faut et il suffit que $\mathcal{A}$ admette un plus petit élément 0 et que toute sous-classe $\hat{(}$finie$\hat{)}$ B non vide de $\mathcal{A}$, majorée dans $\mathcal{A}$, ait une intersection.

Si $a \cap b$ est défini dans la classe sous-préinductive $\mathcal{A}$, alors $a' \cap b'$ est aussi défini, pour tout $a' < a$ et tout $b' < b$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-$\hat{(}$pré$\hat{)}$inductive et B une sous-classe de $\mathcal{A}$ ma--jorée par $a \in \mathcal{A}$ et admettant un agrégat b dans $\varphi(a)$; alors b est aussi l'agrégat de B dans toute sous-classe $\varphi(a')$, où a' est un majorant de B tel que $a' \cap a$ soit défini dans $\mathcal{A}$. Si B admet un agrégat b_1 dans $\varphi(a_1)$, où $a_1 \in \mathcal{A}$, tel que $b \cap b_1$ soit défini, alors $b = b_1$.

COROLLAIRE : Si B admet un agrégat dans $\mathcal{A}$, alors $\cup B$ est un agrégat de B dans $\varphi(a)$, pour tout majorant a de B dans $\mathcal{A}$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive, B une sous-classe de $\mathcal{A}$; si B admet un agrégat dans la classe $\varphi(b)$ des éléments plus petits que $b \in \mathcal{A}$, alors cet agrégat sera appelé *b-agrégat* ou *sous-agrégat de* B et sera noté $\overset{b}{\cup} B$; la classe de tous les sous-agrégats de B sera appelée *congrégation de* B dans $\mathcal{A}$ et désignée par $\underline{\cup} B$; si B n'admet pas de sous-agrégat, nous écrirons : $\underline{\cup}\, B = \emptyset$. 2

PROPOSITION : Si $\mathcal{A}$ est une classe préinductive et si B est une sous-classe de $\mathcal{A}$ admettant un sous-agrégat m, alors $m = \cup B$.

DÉFINITION : Un groupoïde $\mathcal{S}$ est appelé *groupoïde sous-$\hat{(}$pré$\hat{)}$inductif* s'il est muni d'une relation d'ordre pour laquelle $\mathcal{S}$ est une classe sous-$\hat{(}$pré$\hat{)}$inductive et si l'axiome (I) est vérifié.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome (I); pour tout $f \in \mathcal{S}$ et tout $e \in \mathcal{S}_0$ tel que $e < \alpha(f)$ (resp. $e < \beta(f)$), il existe un et un seul élément $g < f$ pour lequel $\alpha(g) = e$ (resp. $\beta(g) = e$); g est appelé l'élément *induit* (resp. *induit à gauche*) par f sur e.

COROLLAIRE : Pour qu'un groupoïde $\mathcal{S}$ muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome (I) soit sous-$\hat{(}$pré$\hat{)}$inductif, il faut et il suffit que $\mathcal{S}_o$ soit une classe sous-$\hat{(}$pré$\hat{)}$inductive pour l'ordre induit.

Dans des exemples importants de groupoïdes $\mathcal{S}$ sous-préinductifs (groupoïde des isomorphismes d'espaces vectoriels, de simplexes), la condition suivante est vérifiée : Soit E une sous-classe de $\mathcal{S}_o$, e' et e'' deux sous-agrégats de E ; alors il existe un et un seul $f \in \mathcal{S}$ tel que $\alpha(f) = e$, $\beta(f) = e'$ et que, pour tout $e \in E$, l'élément induit par f sur e soit égal à e.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; si E est une sous-classe de $\mathcal{S}_o$, la congrégation de E dans $\mathcal{S}_o$ est contenue dans la congrégation de E dans $\mathcal{S}$; pour toute sous-classe A de $\mathcal{S}$, on a les relations :

$$\alpha(\underline{\cup} A) \subset \underline{\cup}\, \alpha(A); \qquad \beta(\underline{\cup} A) \subset \underline{\cup}\, \beta(A); \qquad (\underline{\cup} A)^{-1} = (\underline{\cup} A^{-1}).$$

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif, A une sous-classe de $\mathcal{S}$ majorée par $f \in \mathcal{S}$; si $\overset{\alpha(f)}{\cup} \alpha(A)$ ou $\overset{\beta(f)}{\cup} \beta(A)$ est défini, alors $\overset{f}{\cup} A$ est défini ; si $\cap A$ est défini, alors $\cap\, \alpha(A)$ et $\cap\, \beta(A)$ sont définis; si $\cap\, \alpha(A)$ ou $\cap\, \beta(A)$ est défini, $\cap A$ est défini et on a les relations :

$$\alpha(\cap A) = \cap\, \alpha(A); \qquad \beta(\cap A) = \cap\, \beta(A).$$

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; la loi de composition dans $\mathcal{S}$ peut être étendue en une loi de composition appelée *pseudomultiplication*, définie pour tous les couples (f', f) tels que $e = \alpha(f') \cap \alpha(f)$ soit défini, en posant :

$$(f', f) \to g' \cdot g,$$

où g est l'élément induit à gauche sur e par f et g' l'élément induit sur e par f'. Cette pseudomultiplication vérifie l'axiome d'associativité suivant : Si (hg) et (gf) sont définis, alors $h(gf)$ et $(hg)f$ sont définis et égaux.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; les unités du groupoïde $\mathcal{S}$ sont les seuls éléments idempotents pour la pseudomultiplication; si e et e' sont deux unités telles que $e \cap e'$ soit défini, on a $e \cap e' = ee' = e'e$. La relation d'ordre dans $\mathcal{S}$ est compatible avec la pseudomultiplication et elle peut aussi être définie par une des conditions suivantes :

$f' < f$ si, et seulement si, il existe $e \in \mathcal{S}_o$ tel que fe soit défini et égal à f';

$f' < f$ si, et seulement si, il existe $e' \in \mathcal{S}_o$ tel que $e'f$ soit défini et égal à f'.

COROLLAIRE : Soient $f \in \mathcal{S}$ et $f' \in \mathcal{S}$ tels que $f'f$ soit défini; alors on a les formules :

$$f'f = (f'\beta(f)).(\alpha(f')f); \qquad (f'f)^{-1} = f^{-1}f'^{-1}.$$

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ une classe munie d'une loi de composition partiellement définie, vérifiant l'axiome d'associativité : Si hg et gf sont définis, alors $h(gf)$ et $(hg)f$ sont définis et égaux.

Soit $\mathcal{S}_o$ une sous-classe de $\mathcal{S}$ formée d'idempotents, stable pour la loi de composition et admettant un élément 0 pour lequel: $0e = 0$, pour tout $e \in \mathcal{S}_o$. Si les axiomes 1, 2, 3, suivants sont vérifiés, alors $\mathcal{S}$ est un groupoïde sous-préinductif, pour la structure d'ordre définie par la relation:

$f' < f$ si, et seulement si, il existe $e \in \mathcal{S}_o$ tel que fe soit défini et égal à f'.

Si de plus $\mathcal{S}_o$ est une classe sous-inductive, alors $\mathcal{S}$ est un groupoïde sous-inductif.

1) La restriction de la loi de composition à $\mathcal{S}_o \times \mathcal{S}_o$ est commutative.

2) Pour tout $f \in \mathcal{S}$, la classe des éléments $e \in \mathcal{S}_o$ tels que fe soit défini et égal à f admet une intersection $\alpha(f)$ telle que $f\alpha(f)$ soit défini et égal à f; de même la classe des éléments e' de $\mathcal{S}_o$ tels que $e'f$ soit défini et égal à f admet une intersection $\beta(f)$ pour laquelle $\beta(f)f$ est défini et égal à f.

3) Pour tout $e \in \mathcal{S}$, il existe $f' \in \mathcal{S}$ tel que $f'f$ et ff' soient définis et que l'on ait: $f'f = \alpha(f)$, $ff' = \beta(f)$.

PROPOSITION : Le groupoïde produit de deux groupoïdes sous-$\widehat{(\text{pré})}$inductifs, muni de la structure d'ordre produit, est un groupoïde sous-$\widehat{(\text{pré})}$inductif, appelé *groupoïde sous-$\widehat{(\text{pré})}$inductif produit* des groupoïdes donnés.

DÉFINITION : Une *classe sous-$\widehat{(\text{pré})}$locale* est une classe sous-$\widehat{(\text{pré})}$inductive $\mathcal{A}$ dans laquelle l'axiome de distributivité (D) suivant est vérifié:

(D) Soit B une sous-classe de $\mathcal{A}$ admettant un c-agrégat et soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $(\mathcal{G}B) \cap a$ soit défini; alors la classe des éléments $b \cap a$, où $b \in B$, admet $(\mathcal{G}B) \cap a$ pour c-agrégat: $(\mathcal{G}B) \cap a = \underset{b \in B}{\mathcal{G}}(b \cap a)$.

Un *groupoïde sous-$\widehat{(\text{pré})}$local* est un groupoïde sous-$\widehat{(\text{pré})}$inductif dont la classe des unités est une classe sous-$\widehat{(\text{pré})}$locale.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-prélocale, B une sous-classe de $\mathcal{A}$ admettant un c-agrégat et $a \in \mathcal{A}$ avec $d = \underset{b \in B}{\mathcal{G}}(b \cap a)$ et $a \cap c$ définis ; alors $d = (\overset{c}{\cup} B) \cap a$.

PROPOSITION : Un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{S}$ est une classe sous-prélocale.

Etant donnés un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$, A et A' deux sous-classes de $\mathcal{S}$, nous désignerons par $A'A$ la classe des pseudoproduits $a'a$, où $a \in A$, $a' \in A'$, $a'a$ défini.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal, A et A' deux sous-classes de $\mathcal{S}$; on a:

$$(\underline{\cup} A')(\underline{\cup} A) \subset \underline{\cup}(A'A).$$

DÉFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive. Une sous-classe $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ est appelée *sous-classe inductive* (resp. *partie sous-inductive*) (*faible*) de $\mathcal{A}$ si elle vérifie les axiomes 1 et 2 (resp. 1' et 2) suivants :

1) Soient $a \in \mathcal{A}'$, $a' \in \mathcal{A}'$ tels que $a \cap a'$ soit défini; alors $a \cap a' \in \mathcal{A}'$.

1') Soient $a \in \mathcal{A}'$, $a' \in \mathcal{A}'$, $a'' \in \mathcal{A}'$ avec $a' < a$, $a'' < a$; on a : $a \cap a' \in \mathcal{A}'$.

2) Pour toute sous-classe B de $\mathcal{A}'$ admettant un b-agrégat (où $b \in \mathcal{A}'$), on a : $\overset{b}{\cup} B \in \mathcal{A}'$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive, B une sous-classe de $\mathcal{A}$; l'inter-section $\mathcal{B}$ des sous-classes inductives (resp. parties sous-inductives) (faibles) de $\mathcal{A}$ qui contiennent B est appelée *sous-classe inductive* (resp. *partie sous-inductive*) (*fai-ble*) *de $\mathcal{A}$ engendrée par B*. Si $\mathcal{B}$ est la classe des b-agrégats des sous-classes de B (où $b \in B$), B est appelée *base* de $\mathcal{B}$.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'une classe sous-prélocale $\mathcal{A}$ contenant avec deux éléments majorés dans $\mathcal{A}$ leur intersection; alors B est une base de la partie sous-inductive (faible) $\mathcal{B}$ qu'elle engendre dans $\mathcal{A}$.

COROLLAIRE : Si B est une sous-classe d'un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{S}$ telle que $B\alpha(B) \subset B$, alors B est une base de $\mathcal{B}$ et on a : $\mathcal{B}\alpha(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$; de plus $\alpha(\mathcal{B})$ est une sous-classe inductive faible de $\mathcal{S}_o$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle *sous-groupoïde sous-préinductif* de $\mathcal{S}$ un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) Soient $e \in \mathcal{S}'_o$, $e' \in \mathcal{S}'_o$, $e'' \in \mathcal{S}'_o$ avec $e' < e$, $e'' < e$; alors $e'e'' \in \mathcal{S}'_o$.

2) Soient $f \in \mathcal{S}'$, $e \in \mathcal{S}'_o$, $e < \alpha(f)$; alors on a : $fe \in \mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif et $\mathcal{S}'$ un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{S}$; alors $\mathcal{S}'$ contient $f' \cap f''$ avec deux éléments f' et f'' majorés par $f \in \mathcal{S}'$.

COROLLAIRE : $\mathcal{S}'$ est un groupoïde sous-préinductif pour l'ordre induit.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle *sous-pseudogroupe* (*faible*) de $\mathcal{S}$ un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ stable pour la pseudomultiplication, et véri-fiant l'axiome: Pour toute sous-classe B de $\mathcal{S}'$ admettant un b-agrégat (où $b \in \mathcal{S}'$), on a $\overset{b}{\cup} B \in \mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; pour qu'un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ soit un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que $\mathcal{S}'_o$ soit une sous-classe inductive faible de $\mathcal{S}_o$ et que $\mathcal{S}'$ soit un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ qui est saturé par induction est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif, B une sous-classe de $\mathcal{S}$; l'intersec--tion $\mathcal{B}$ des sous-pseudogroupes (faibles) de $\mathcal{S}$ contenant B est appelée *sous-pseudo--groupe (faible) de $\mathcal{S}$ engendré par B dans $\mathcal{S}$*; si tout élément de $\mathcal{B}$ est un b-agrégat d'une sous-classe de B (où $b \in B$), alors B est dit *base de $\mathcal{B}$*.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ vérifiant les conditions suivantes :

1) On a $\alpha(B) \subset B$; $\beta(B) \subset B$; $B^{-1} = B$.
2) Si $e \in B \cap \mathcal{S}_0$, $b \in B$ et si be est défini, alors on a $be \in B$.
3) B contient $\overset{b}{\cup} B'$ pour toute sous-classe B' de B admettant un b-agrégat dans $\mathcal{S}$, où $b \in B$.

Alors le sous-groupoïde $\mathcal{B}$ engendré par B dans $\mathcal{S}$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal et B un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ stable pour la pseudomultiplication ; alors B est une base du sous-pseudogroupe (faible) qu'il engendre dans $\mathcal{S}$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle *sous-classe compatible* de $\mathcal{S}$ une sous-classe F telle que, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, $f^{-1}f'$ et $f'f^{-1}$ soient définis et appartiennent à $\mathcal{S}_0$.

En particulier toute sous-classe majorée d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ est compatible ; pour qu'une classe d'unités de $\mathcal{S}$ soit compatible, il faut et il suffit que l'intersection de deux quelconques de ses éléments soit définie.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; pour qu'une sous-classe F de $\mathcal{S}$ soit telle que, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, on ait $f'f^{-1} \in \mathcal{S}_0$, il faut et il suffit que $f \cap f'$ soit défini et que l'on ait : $f \cap f' = f\alpha(f') = f'\alpha(f)$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif, F et G deux sous-classes compa--tibles de S; alors $\varphi(F)$, F^{-1} et GF sont des sous-classes compatibles, ainsi que la sous-classe inductive faible F' engendrée par F dans $\mathcal{S}$.

DÉFINITION : Un sous-pseudogroupe (faible) $\mathcal{S}'$ d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ est dit *propre* si $\mathcal{S}'$ admet une base B telle que $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient des sous-classes compatibles.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; si $\mathcal{S}'$ est un sous-pseudogroupe faible propre de $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}'_0$ est une sous-classe compatible de $\mathcal{S}$ et le sous-pseudogroupe engendré par $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$ est propre.

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$; la composante connexe de la classe $\varphi(B)$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$, saturé par induction, qui sera appelé *composante inductive faible* de B dans $\mathcal{S}$; le sous-pseudogroupe qu'elle engendre dans $\mathcal{S}$ sera appelé *composante inductive* de B dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal, B un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ et A la composante inductive faible de B dans $\mathcal{S}$; alors la composante inductive de B dans $\mathcal{S}$ est le sous-groupoïde plein A' de $\mathcal{S}$ tel que A'_o admette A_o pour base.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif et F une partie sous-inductive faible de $\mathcal{S}$ telle que $\beta(F)F=F$ et $F\alpha(F)=F$; alors on a: $F^{-1}F=F^{-1}.F$; $FF^{-1}=F.F^{-1}$; de plus les sous-groupoïdes engendrés dans $\mathcal{S}$ par $a(F)=F^{-1}F$ et $b(F)=FF^{-1}$ sont des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle *atlas (faible) complet* de $\mathcal{S}$ une sous-classe F de $\mathcal{S}$ qui contient $\overset{b}{\cup} B$ pour toute sous-classe B de F admettant un b-agrégat dans $\mathcal{S}$ (où $b \in F$) et telle que l'on ait: $Fa(F)=F$, où $a(F)=F^{-1}F$. Un atlas complet F de $\mathcal{S}$ qui admet pour base une sous-classe F' telle que $\alpha(F')$ et $\beta(F')$ soient compatibles est dit *propre*.

PROPOSITION : Un atlas faible complet F d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ est une partie sous-inductive faible de $\mathcal{S}$; on a: $F\alpha(F)=F$, $\beta(F)F=F$; de plus $a(F)$ et $b(F)=FF^{-1}$ sont des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$ admettant $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ respectivement pour classe de leurs unités et on a: $b(F)F=F$.

COROLLAIRE : La classe F^{-1} des inverses des éléments de F est un atlas faible complet de $\mathcal{S}$ pour lequel on a:

$$a(F^{-1})=b(F) \quad \text{et} \quad b(F^{-1})=a(F).$$

PROPOSITION : Soit B une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$, Γ un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ contenant $B^{-1}B$ et A la composante inductive faible de $B^{-1}B$ dans Γ; alors BA est un atlas faible complet tel que l'on ait :

$$a(BA)=A.$$

COROLLAIRE : Si Γ est le sous-pseudogroupe faible engendré par $B^{-1}B$ dans $\mathcal{S}$, alors $B\Gamma$ est un atlas faible complet tel que l'on ait :

$$a(B\Gamma)=\Gamma.$$

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif, F un atlas faible complet de $\mathcal{S}$; si $\beta(F)$ est contenu dans F, alors F est contenu dans $a(F)$; si on a: $F \subset a(F)$, $b(F)$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $a(F)$, dont $a(F)$ est un élargissement.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; la classe $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ des atlas faibles complets de $\mathcal{S}$ est un groupoïde pour la loi de composition définie par:

$$(G, F) \to G \cdot F \text{ si, et seulement si, } a(G) = b(F).$$

La classe des unités de $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ est la classe des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE : La sous-classe de $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ formée des atlas faibles complets de $\mathcal{S}$ tels que $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ soient des sous-classes compatibles est le sous-groupoïde plein $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ de $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ dont la classe des unités est la classe des sous-pseudogroupes faibles propres de $\mathcal{S}$.

Etant donné un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{S}$, nous désignerons par $\overline{GF}$ la partie sous-inductive engendrée dans $\mathcal{S}$ par la classe GF, où G et F sont deux sous-classes de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal et F un atlas faible complet de $\mathcal{S}$. La partie sous-inductive $\overline{F}$ engendrée dans $\mathcal{S}$ par F est un atlas complet de $\mathcal{S}$ admettant F pour base; si $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont des sous-classes compatibles, $\overline{F}$ est un atlas com-plet propre de $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE : Soit Γ un sous-pseudogroupe de $\mathcal{S}$ et B une sous-classe de $\mathcal{S}$ telle que $B^{-1}B$ soit contenu dans Γ; soit A la composante inductive faible et A' la composante inductive de $B^{-1}B$ dans Γ; alors la partie sous-inductive $\overline{BA'}$ engendrée par BA' est un atlas complet de $\mathcal{S}$, admettant BA pour base et tel que A' soit le sous-pseudogroupe engendré par $a(\overline{BA'})$ dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal, F un atlas complet de $\mathcal{S}$, $\bar{a}(F)$ et $\bar{b}(F)$ les sous-pseudogroupes engendrés dans $\mathcal{S}$ par $a(F)$ et $b(F)$; alors on a $F\bar{a}(F) = F = \bar{b}(F)F$. La classe des atlas complets de $\mathcal{S}$ est un groupoïde $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ pour la loi de composition définie par :

$$(G, F) \to G \odot F = \overline{GF} \text{ si, et seulement si, } \bar{a}(G) = \bar{b}(F).$$

Les unités de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ sont les sous-pseudogroupes de $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE : La sous-classe $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ formée des atlas complets propres de $\mathcal{S}$ est le sous-groupoïde plein de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ dont la classe des unités est la classe des sous-pseudogroupes propres de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit F un atlas complet d'un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{S}$ tel que F soit contenu dans $\bar{a}(F)$; alors $\bar{b}(F)$ est un sous-pseudogroupe plein saturé par induction de $\bar{a}(F)$, dont $\bar{a}(F)$ est la composante inductive dans $\bar{a}(F)$.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; le groupoïde $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-préinductif lorsqu'il est muni de la relation :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F' = F\alpha(F') = \beta(F')F.$$

COROLLAIRE : La classe $\mathcal{I}_f(\mathcal{S})$ des sous-classes inductives faibles compatibles de $\mathcal{S}$ est le sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ dont la classe des unités est la classe des sous-classes inductives faibles compatibles de $\mathcal{S}_o$.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; le groupoïde $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif, lorsqu'il est muni de la relation:

$F' \mathrel{\dot{<}} F$ si, et seulement si, F' est une sous-classe de F et si $F' = F\alpha(F') = \beta(F')F$.

COROLLAIRE 1 : $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{H}(\mathcal{S})$; muni de la relation $F' \mathrel{\dot{<}} F$, $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif que nous noterons $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE 2 : $\mathcal{I}_f(\mathcal{S})$, muni de la relation $F' \mathrel{\dot{<}} F$ est un groupoïde inductif que nous noterons $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S})$; $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-groupoïde sous-préinductif de $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S})$ en identifiant $f \in \mathcal{S}$ à la classe $\varphi(f)$ des éléments induits par f.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle *complexe* ou sous-classe *faiblement complète* de $\mathcal{S}$ une sous-classe de $\mathcal{S}$ saturée par induction et compatible.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal; la classe des complexes de $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde $\tilde{\mathcal{S}}$ saturé de $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S})$ sur lequel les relations: $F' < F$ et $F' \mathrel{\dot{<}} F$ induisent la même relation définie par:

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F' \text{ est une sous-classe de } F.$$

$\tilde{\mathcal{S}}$ est la composante inductive de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{I}_f(\mathcal{S})$ et admet $\mathcal{S}$ pour base. De plus $\tilde{\mathcal{S}}$ est un groupoïde local.

REMARQUE : Soient f et g deux éléments de $\mathcal{S}$ admettant $h \in \mathcal{S}$ pour sous-agrégat dans $\mathcal{S}$; alors f et g sont compatibles; dans $\tilde{\mathcal{S}}'$, les complexes $\varphi(f)$ et $\varphi(g)$ ont pour agrégat la classe réunion de $\varphi(f)$ et $\varphi(g)$; cette classe peut être différente de la classe $\varphi(h)$.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal; le groupoïde $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ des atlas complets propres de $\mathcal{S}$ est un groupoïde sous-préinductif pour la relation définie par:

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F}.$$

COROLLAIRE : La sous-classe $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ de $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ formée des sous-classes inductives de $\mathcal{S}$ admettant une base compatible est le sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ dont la classe des unités est la classe des sous-classes inductives de $\mathcal{S}$ admet- -tant pour base une sous-classe compatible de $\mathcal{S}_o$.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal ; le groupoïde $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif lorsqu'il est muni de la relation :

$$F' \prec F \text{ si, et seulement si, } F' \subset F \text{ et } F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F}.$$

COROLLAIRE 1 : $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ admet $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ comme sous-groupoïde saturé par induction; muni de la relation $F' \prec F$, $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif, que nous désignerons par $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE 2 : $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ muni de la relation $F' \prec F$, est un groupoïde inductif, que nous désignerons par $\dot{\mathcal{J}}(\mathcal{S})$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive; on appelle *paratopologie sur* $\mathcal{A}$, ou sur $a \in \mathcal{A}$, une sous-classe inductive faible de $\mathcal{A}$ admettant a pour plus grand élément.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ la classe des paratopologies sur un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$; $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{J}_f(\mathcal{S})$ et de $\dot{\mathcal{J}}_f(\mathcal{S})$. Si $\mathcal{S}$ est sous- -inductif, $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif pour la relation $T' \prec T$.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive; on appelle *base de filtre* une sous- -classe B de $\mathcal{A}$ telle que, pour tout $b \in B$ et tout $b' \in B$, il existe $b'' \in B$ avec $b'' < b$ et $b'' < b'$. On appelle *filtre* sur $\mathcal{A}$ une sous-classe F de $\mathcal{A}$ qui est une base de filtre et qui, pour tout $f \in F$, contient tout majorant de f.

Si un filtre sur $\mathcal{A}$ contient le 0, il contient tout élément de $\mathcal{A}$; un tel filtre sera appelé *filtre trivial.*

DÉFINITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive; on appelle *quasi(-base de) filtre* sur $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{A}$ contenant 0 et dont la classe des éléments différents de 0 est une (base de) filtre.

PROPOSITION : Soit B une (quasi-) base de filtre sur la classe sous-préinductive $\mathcal{A}$; alors la classe F formée (de 0 et) des majorants des éléments de B (différents de 0) est un (quasi-) filtre, appelé *(quasi-) filtre engendré par B dans* $\mathcal{A}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive et B une quasi-base de filtre qui est base d'une partie sous-inductive $\overline{B}$. Alors $\overline{B}$ est une quasi-base du filtre F engen- -dré par B dans $\mathcal{A}$.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal (resp. sous-préinductif) et $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ (resp. $\mathcal{K}(\mathcal{S})$) la sous-classe de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ (resp. $\mathcal{H}(\mathcal{S})$) formée des atlas faibles complets qui sont des quasi-bases de filtre; alors $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ sont respectivement des sous-groupoïdes saturés par induction de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{H}(\mathcal{S})$.

PROPOSITION : Un quasi-filtre F sur un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ est un atlas complet de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION : Soit F un filtre d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$; alors $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont des bases de filtres $\alpha^*(F)$ et $\beta^*(F)$. Si G est un filtre sur $\mathcal{S}$ tel que $\alpha^*(G)=\beta^*(F)$ la classe GF est base d'un filtre G_*F pour lequel on a :

$$\alpha^*(G_*F) = \alpha^*(F), \qquad \beta^*(G_*F) = \beta^*(G).$$

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; la classe $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ des filtres sur $\mathcal{S}$ est un groupoïde sous-inductif pour la loi de composition définie par :

$$(G, F) \to G_*F \text{ si, et seulement si, } \alpha^*(G) = \beta^*(F),$$

et la relation d'ordre :

$$F' < F \text{ si, et seulement si, } F \text{ est une sous-classe de } F'.$$

COROLLAIRE : $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-groupoïde plein saturé $\mathcal{S}^<$ de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, saturé par intersection finie, en identifiant $f \in \mathcal{S}$ au filtre $f^<$ des majorants de f dans $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ est sous-inductif, $\mathcal{S}^<$ est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{K}(\mathcal{S})$ relativement au foncteur ψ qui associe à F le filtre engendré par F; ce foncteur est compatible avec les ordres. Si $\mathcal{S}$ est sous-prélocal, $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ relativement à la restriction de ψ à $\mathcal{B}(\mathcal{S})$.

REMARQUE : Si $\mathcal{S}$ est un groupoïde sous-préinductif, la classe des minorants d'un filtre n'est généralement pas une sous-classe complète de $\mathcal{S}$ et la classe des majorants d'un complexe peut ne pas être un filtre.

1 **8. Espèces de structures sous-inductives.**

DÉFINITION : Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux classes sous-préinductives. Une application p de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ est dite *sous-inductive* si, pour tout $a \in \mathcal{A}'$, $b \in \mathcal{A}'$ et $c \in \mathcal{A}'$ tels que $a < c$ et $b < c$, on a :

$$p(a \cap b) = p(a) \cap p(b).$$

L'application p est dite *inductive* si elle est sous-inductive et si, pour toute sous-classe B de $\mathcal{A}'$, p applique la congrégation de B dans la congrégation de $p(B)$:

$p(\cup B) \subset \underline{\cup}\, p(B)$.

L'application p est dite (*sous-*) *inductive stricte* si p est (sous-) inductive et si les relations: $a < b$, $p(a) = p(b)$, où $a \in \mathcal{A}'$, $b \in \mathcal{A}'$, entraînent $a = b$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux classes sous-préinductives et p une application sous-inductive stricte de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$; alors, pour tout $c \in \mathcal{A}'$, la restriction de p à la classe $\varphi'(c)$ des éléments inférieurs à c est un isomorphisme de $\varphi'(c)$ sur $p(\varphi'(c))$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux classes sous-préinductives; pour qu'une application p sous-inductive stricte de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ soit inductive, il faut et il suffit que, pour toute sous-classe B de $\mathcal{A}'$ admettant un b-agrégat, il existe $s < \overset{b}{\cup} B$ tel que $p(s) = \overset{p(b)}{\cup} p(B)$; dans ce cas, on a : $s = \overset{b}{\cup} B$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ compatible avec les ordres et p_o sa restriction à $\mathcal{S}_o$. Pour que p soit (sous-) inductif, il faut et il suffit que p_o soit (sous-) inductif; pour que p soit sous-inductif strict, il faut et il suffit que p_o le soit.

DÉFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$ deux groupoïdes sous-préinductifs. On dit que $\tilde{\mathcal{S}}$ est un *groupoïde quotient* (*sous-*) *inductif* de $\mathcal{S}$ si $\tilde{\mathcal{S}}$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{S}$ et si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) Le foncteur canonique q de $\mathcal{S}$ sur $\tilde{\mathcal{S}}$ est (sous-) inductif.
2) Soient $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{S}}$, $\tilde{f}' \in \tilde{\mathcal{S}}$, $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{S}}$, $\tilde{f} < \tilde{g}$, $\tilde{f}' < \tilde{g}$; alors il existe $f \in \bar{q}^1(\tilde{f})$, $f' \in \bar{q}^1(\tilde{f}')$ et $g \in \bar{q}^1(\tilde{g})$ tels que $f < g$ et $f' < g$.

Ces conditions entraînent : $\tilde{f} \cap \tilde{f}' = \widetilde{(f \cap f')}$, où $\tilde{f} < \tilde{g}$, $\tilde{f}' < \tilde{g}$.

THÉORÈME : Soit $\tilde{\mathcal{S}}$ un groupoïde quotient d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ et q le foncteur canonique de $\mathcal{S}$ sur $\tilde{\mathcal{S}}$; si les conditions 1 et 2 suivantes sont vérifiées, alors il existe une relation d'ordre canonique sur $\tilde{\mathcal{S}}$ pour laquelle $\tilde{\mathcal{S}}$ est un groupoïde sous-préinductif, quotient inductif de $\mathcal{S}$:

1) Soient $g \in \mathcal{S}$, $f \in \mathcal{S}$ avec $g < f$; alors pour tout f' tel que $q(f') = q(f)$, il existe un et un seul $g' < f'$ avec $q(g') = q(g)$.
2) Deux éléments différents de $\bar{q}^1(e)$, où $e \in \tilde{\mathcal{S}}_o$, ne sont pas comparables.

Dans $\tilde{\mathcal{S}}$, la relation d'ordre est définie par $\tilde{g} < \tilde{f}$ si, et seulement si, il existe $g \in \bar{q}^1(\tilde{g})$ et $f \in q^{-1}(\tilde{f})$ avec $g < f$.

DÉFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs; on dit que $\mathcal{S}'$ est un *groupoïde sous-préinductif* (*presque*) *au-dessus* de $\mathcal{S}$ si l'on s'est donné un foncteur p de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ vérifiant les axiomes suivants:

1) p est (sous-) inductif strict.

2) $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ est une espèce de structures.

Cette espèce de structures dont les objets forment $\mathcal{S}'_o$, sera appelée alors *espèce de structures sous-préinductives* $\mathcal{S}'_o$ (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$ et sera désignée par $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$. Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des groupoïdes (pré-)inductifs, on dira que $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une *espèce de structures (pré-) inductives*.

CAS PARTICULIER : Si $\mathcal{S}'$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ et si p est l'injection canonique Id de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$, pour que l'on ait $\langle \mathcal{S}, Id, \mathcal{S}' \rangle$, il faut et il suffit que $\mathcal{S}'$ soit un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{S}'$.

Pour que Id soit inductif, il faut et il suffit que, de plus, pour toute classe B de $\mathcal{S}'_o$, la congrégation de B dans $\mathcal{S}'_o$ soit contenue dans la congrégation de B dans $\mathcal{S}$.

DÉFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; on dit que $\mathcal{S}'$ est *étalé au-dessus de* $\mathcal{S}$, ou que p est un *étalement de* $\mathcal{S}'$ *dans* $\mathcal{S}$, si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives au-dessus de $\mathcal{S}$ et si, pour tout $f \in \mathcal{S}'$, on a : $p(\varphi'(f)) = \varphi(p(f))$, où φ et φ' sont les foncteurs d'induction de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives telle que p_o soit un étalement de $\mathcal{S}'_o$ dans $\mathcal{S}_o$; alors p est un étalement de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$ et $p(\mathcal{S}')$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ saturé par induction.

COROLLAIRE : Si de plus $\mathcal{S}$ est sous-inductif, alors $\mathcal{S}'$ est sous-inductif.

DÉFINITION : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$ deux espèces de structures sous-pré-inductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$; on dit que $\langle \mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$ est une *sous-espèce sous-préinductive de* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ *(presque) au-dessus de* $\mathcal{S}$ si elle vérifie les conditions :
1) $(\mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1)$ est une sous-espèce de structures de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$.
2) $\mathcal{S}'_1$ est muni de la structure d'ordre induite de celle de $\mathcal{S}'$.

PROPOSITION : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$; pour qu'une sous-espèce de structures $(\mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1)$ de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ soit une sous-espèce sous-préinductive (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que $\langle \mathcal{S}', Id, \mathcal{S}'_1 \rangle$ soit (presque) au-dessus de $\mathcal{S}'$.

THÉORÈME (transitivité) : Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ trois groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur (sous-)inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ et p' un foncteur (sous-)inductif de $\mathcal{S}''$ vers $\mathcal{S}'$; alors pp' est un foncteur (sous-)inductif de $\mathcal{S}''$ vers $\mathcal{S}$. Si p et p' sont sous-inductifs stricts, alors pp' est sous-inductif strict.

COROLLAIRE : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}', p', \mathcal{S}'' \rangle$ deux espèces de structures sous-

-préinductives telles que $(\mathcal{S}', p', \mathcal{S}'')$ soit une espèce de superstructures au-dessus de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$; alors $\langle \mathcal{S}, pp', \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives; si de plus p et p' sont inductifs, pp' l'est également. Si p et p' sont des étalements, pp' est un étalement.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ des groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif strict de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$ et p' un foncteur de $\mathcal{S}''$ dans $\mathcal{S}'$ compatible avec les ordres. Si pp' est un foncteur sous-inductif, alors p' est sous-inductif. Si de plus $\mathcal{S}'$ est sous-inductif, p et pp' inductifs, alors p' est inductif.

DÉFINITION : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$ deux espèces de structures sous-pré-inductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_1$; on appelle *application covariante (sous-) inductive de* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ dans $\langle \mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$, et on note $\langle \chi_o, \psi \rangle$ une application covariante (χ_o, ψ) de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ dans $(\mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}'_1)$ telle que ψ et χ_o soient (sous-)inductifs. Si l'espèce de structures $(\mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}'_1)$ est sous-jacente à $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ par une application covariante (sous-)inductive, on dit que l'espèce de *structures sous-préinductives* $\langle \mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$ *est sous-jacente à* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

PROPOSITION : Si $\langle \chi_o, \psi \rangle$ est une application covariante (sous-)inductive de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ dans $\langle \mathcal{S}_1, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$, le foncteur χ correspondant est (sous-)inductif.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{R}_o$ une classe d'espèces de structures sous-préinductives et $\mathcal{R}$ la classe des applications covariantes (sous-)inductives d'un élément de $\mathcal{R}_o$ dans un élément de $\mathcal{R}_o$. Alors $\mathcal{R}$ est une catégorie pour la loi de composition :
$(\langle \chi_o, \psi \rangle, \langle \chi'_o, \psi' \rangle) \to \langle \chi'_o \chi_o, \psi' \psi \rangle$, si, et seulement si, les foncteurs ψ et ψ' sont composables ainsi que les applications χ_o et χ'_o. 1

DÉFINITION : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$. Une espèce de structures sous-préinductives $\langle \mathcal{S}', p', \mathcal{S}'' \rangle$ (presque) au-dessus de $\mathcal{S}'$ sera appelée *espèce de superstructures sous-préinductives (presque) au-dessus de* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ si $\langle \mathcal{S}, p, p'(\mathcal{S}') \rangle$ est une sous-espèce de structures sous-préinductives de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

PROPOSITION : Si $\langle \mathcal{S}', p', \mathcal{S}'' \rangle$ est une espèce de superstructures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$, alors $\langle \mathcal{S}, pp', \mathcal{S}'' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$, à laquelle $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est sous-jacente.

DÉFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, ψ et ψ' deux foncteurs (sous-) inductifs de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$; on appelle *transformation naturelle (sous-) inductive* de ψ vers ψ' une transformation naturelle (ψ', τ, ψ) telle que τ soit une appli-

-cation (sous-) inductive de $\mathcal{S}_o$ dans la classe sous-préinductive $\mathcal{S}'$; on la note par $\langle \psi', \tau, \psi \rangle$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, ψ et ψ' deux foncteurs de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ et (ψ', τ, ψ) une transformation naturelle de ψ vers ψ'; si ψ ou ψ' est (sous-) inductif et si τ est une application (sous-) inductive, alors (ψ', τ, ψ) est une transformation naturelle (sous-) inductive.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs; la classe $\mathfrak{N} \langle \mathcal{S}', \mathcal{S} \rangle$ des transformations naturelles (sous-) inductives entre foncteurs (sous-) inductifs de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ est une catégorie pour la multiplication longitudinale.

THÉORÈME : Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\overline{\mathcal{S}}$ trois groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ et $\varkappa$ un foncteur sous-inductif de $\overline{\mathcal{S}}$ vers $\mathcal{S}$; alors le groupoïde induit $\varkappa^*(\mathcal{S}', p)$ est un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{S}' \times \overline{\mathcal{S}}$ et les foncteurs canoniques $\bar{p}$ et η de $\varkappa^*(\mathcal{S}', p)$ vers $\overline{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{S}'$ sont sous-inductifs. Si p et $\varkappa$ sont inductifs, $\varkappa^*(\mathcal{S}', p)$ est de plus une partie sous-inductive faible de $\mathcal{S}' \times \overline{\mathcal{S}}$ et les foncteurs $\bar{p}$ et η sont inductifs.

COROLLAIRE 1 : Soit $\mathcal{S}''$ un groupoïde sous-préinductif, η' et p' des foncteurs de $\mathcal{S}''$ vers $\mathcal{S}'$ et $\overline{\mathcal{S}}$ tels que $p\,\eta' = \varkappa p'$. Si p, $\varkappa$, η' et p' sont (sous-) inductifs, alors le foncteur canonique $\bar{\eta}'$ de $\mathcal{S}''$ vers $\varkappa^*(\mathcal{S}', p)$ est (sous-) inductif. Si de plus, p' ou η' est sous-inductif strict, alors $\bar{\eta}'$ est sous-inductif strict.

COROLLAIRE 2 : Si $\mathcal{S}'$ et $\overline{\mathcal{S}}$ sont (sous-) inductifs, p et $\varkappa$ inductifs, alors $\varkappa^*(\mathcal{S}', p)$ est un groupoïde (sous-) inductif pour l'ordre produit.

COROLLAIRE 3 : Si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$ et si $\varkappa$ est (sous-) inductif, alors $\langle \overline{\mathcal{S}}, \bar{p}, \varkappa^*(\mathcal{S}', p) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\overline{\mathcal{S}}$. Si p est un étalement et $\varkappa$ un foncteur sous-inductif, $\bar{p}$ est un étalement.

COROLLAIRE 4 : Si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$ et si q est une application (sous-) inductive d'une classe sous-préinductive $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{S}_o$, l'espèce de structures $(q^*(\mathcal{S}), p, q^*(\mathcal{S}'))$ induite de $\mathcal{S}$ est une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $q^*(\mathcal{S})$.

PROPOSITION : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives, $\overline{\mathcal{S}}$ un groupoïde sous-préinductif et $\langle \varkappa', \theta, \varkappa \rangle \in \mathfrak{N} \langle \mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}} \rangle$ une transformation naturelle sous-inductive telle que $\theta(\overline{\mathcal{S}}_o)$, $\varkappa(\overline{\mathcal{S}})$ et $\varkappa'(\overline{\mathcal{S}})$ soient contenus dans $p(\mathcal{S}')$. Alors, il existe un foncteur sous-inductif π de $\kappa^*(\mathcal{S}',p)$ vers $\kappa'^*(\mathcal{S}',p)$ et une transformation naturelle sous-inductive $\langle \eta'\pi, \tau, \eta\rangle$ tels que : $p\tau = \theta\bar{p}$, η et η' étant les foncteurs canoniques de $\kappa^*(\mathcal{S}',p)$ et $\kappa'^*(\mathcal{S}',p)$ vers $\mathcal{S}'$. Si p, κ, κ' et θ sont inductifs, alors π et τ le sont aussi.

DÉFINITION: Soient $\overline{\mathcal{S}}$ un groupoïde sous-préinductif et $\mathcal{S}$ une partie sous-inductive faible de $\overline{\mathcal{S}}$; on dit que $\overline{\mathcal{S}}$ est une *extension inessentielle (sous-) inductive* $\langle \kappa, \overline{\mathcal{S}}\rangle$ de $\mathcal{S}$ s'il existe une extension inessentielle $(\kappa, \mathcal{S}_1)$ de $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}_1$ soit un sous-groupoïde sous-préinductif de $\overline{\mathcal{S}}$ et une base de $\overline{\mathcal{S}}$, et que κ soit un foncteur (sous-) inductif.

PROPOSITION: Soient $\langle \kappa, \overline{\mathcal{S}}\rangle$ une extension inessentielle sous-inductive d'un groupoïde local $\mathcal{S}$ et soit $\mathcal{S}_2$ le sous-pseudogroupe faible engendré dans $\overline{\mathcal{S}}$ par la source $\mathcal{S}_1$ de κ; alors κ peut être prolongé en un foncteur sous-inductif κ' de $\mathcal{S}_2$ sur $\mathcal{S}$, dont la restriction à $\mathcal{S}_1$ est κ; c'est-à-dire $(\kappa', \mathcal{S}_2)$ est une extension inessentielle de $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}_1$ est un groupoïde sous-local et si κ est inductif, κ' est inductif.

THÉORÈME: Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\overline{\mathcal{S}}$ des groupoïdes sous-préinductifs, $\langle \kappa, \overline{\mathcal{S}}\rangle$ une extension inessentielle inductive de $\mathcal{S}$, $\bar{\kappa}$ un foncteur inductif de $\overline{\mathcal{S}}$ sur $\mathcal{S}$ dont la restriction à la source $\mathcal{S}_1$ de κ est κ et p un étalement de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$. Alors $\langle \eta, \bar{\kappa}^*(\mathcal{S}',p)\rangle$ est une extension inessentielle inductive de $\mathcal{S}'$, η désignant le foncteur canonique de $\kappa^*(\mathcal{S}',p)$ sur $\mathcal{S}'$.

DÉFINITION: Soient $\mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{S}}$ deux groupoïdes sous-préinductifs; on dit que $\overline{\mathcal{S}}$ est un *élargissement inductif* de $\mathcal{S}$ et on note $\mathcal{S} \mathrel{\overline{<}} \overline{\mathcal{S}}$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\mathcal{S}$ est saturé par induction dans $\overline{\mathcal{S}}$.
2) $\overline{\mathcal{S}}$ admet pour base un sous-groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}_1$ qui est un élargissement de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION: Soient $\mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{S}}$ deux groupoïdes sous-préinductifs avec $\mathcal{S} \mathrel{\overline{<}} \overline{\mathcal{S}}$; alors l'élargissement $\mathcal{S}_1$ de $\mathcal{S}$ qui est base de $\overline{\mathcal{S}}$ est saturé par induction dans $\overline{\mathcal{S}}$; la composante inductive de $\mathcal{S}$ dans $\overline{\mathcal{S}}$ est $\overline{\mathcal{S}}$.

PROPOSITION: Soit $\mathcal{S}$ un sous-pseudogroupe d'un groupoïde sous-préinductif $\overline{\mathcal{S}}$; pour que l'on ait $\mathcal{S} \mathrel{\overline{<}} \overline{\mathcal{S}}$, il faut et il suffit que $\mathcal{S}$ soit un groupoïde plein saturé par induction et que la composante inductive de $\mathcal{S}$ dans $\overline{\mathcal{S}}$ soit $\overline{\mathcal{S}}$.

PROPOSITION: Pour qu'un groupoïde sous-préinductif $\overline{\mathcal{S}}$ soit un élargissement inductif d'un sous-groupoïde $\mathcal{S}$, il faut et il suffit qu'il existe un atlas faible complet F de $\overline{\mathcal{S}}$ tel que $\bar{a}(F) = \overline{\mathcal{S}}$ et $b(F) = \mathcal{S}$, où $\bar{a}(F)$ est le sous-pseudogroupe de $\overline{\mathcal{S}}$ engendré par $a(F)$; dans ce cas, F est saturé par induction.

COROLLAIRE : Pour que l'on ait $\mathcal{S} \lessdot \overline{\mathcal{S}}$, où $\mathcal{S}$ est un sous-pseudogroupe de $\overline{\mathcal{S}}$, il faut et il suffit qu'il existe un atlas complet $\bar{F}$ de $\overline{\mathcal{S}}$ avec $\bar{a}(\bar{F}) = \overline{\mathcal{S}}$ et $b(\bar{F}) = \mathcal{S}$.

THÉORÈME : Dans une classe $\mathcal{K}$ de groupoïdes sous-préinductifs la relation : $\mathcal{S} \lessdot \overline{\mathcal{S}}$ est une relation d'ordre.

DÉFINITION : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$ deux espèces de structures sous-pré-inductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$; on dit que $\langle \mathcal{S}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$ est un *élargissement inductif* (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$ de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$, et on note $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle \lessdot \langle \mathcal{S}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$, si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $\mathcal{S}'$ est saturé par induction dans $\overline{\mathcal{S}}'$.
2) Il existe un élargissement $(\mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1)$ de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ tel que $\langle \mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$ soit une sous-espèce sous-préinductive de $\langle \mathcal{S}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$ (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{S}'_1$ soit une base de $\overline{\mathcal{S}}'$.

PROPOSITION : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$ deux espèces de structures sous-préinductives; si l'on a $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle \lessdot \langle \mathcal{S}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$, alors on a $\mathcal{S}' \lessdot \overline{\mathcal{S}}'$.

COROLLAIRE : Si $\mathcal{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\overline{\mathcal{S}}'$, si $\mathcal{S}' \lessdot \overline{\mathcal{S}}'$ et si $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ est une sous-espèce de $(\mathcal{S}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}')$, alors on a : $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle \lessdot \langle \mathcal{S}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$.

THÉORÈME : Soit $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$ une espèce de structures et $(\mathcal{S}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}')$ son élargissement maximal au-dessus de $\mathcal{S}$; si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur (sous-)inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$, alors il existe une relation d'ordre sur $\overline{\mathcal{S}}'$, pour laquelle $\overline{\mathcal{S}}'$ est un élargissement inductif de $\mathcal{S}'$ et $\bar{p}$ un foncteur (sous-)inductif.

COROLLAIRE 1 : Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont (sous-)inductifs et p inductif, alors $\overline{\mathcal{S}}'$ est (sous-) inductif.

COROLLAIRE 2 : Si p est un étalement de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$, alors $\bar{p}$ est un étalement de $\overline{\mathcal{S}}'$ dans $\mathcal{S}$. Si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ *est une espèce de structures* sous-(pré)inductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$, $\langle \mathcal{S}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}}' \rangle$ est une espèce de structures sous-(pré)inductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$, élargissement inductif de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

COROLLAIRE 3 : Si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives au-dessus de $\mathcal{S}$ telle que $p(\mathcal{S}')$ soit une partie sous-inductive de $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\overline{\mathcal{S}}'$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ et E une sous-classe compatible de $\mathcal{S}'_0$ telle que la restriction de p à E soit compatible avec l'intersection finie (c'est-à-dire, pour tout $e \in E$ et tout $e' \in E$, $p(e') \cap p(e)$ est défini et égal à $p(e'e)$). Alors la restriction de p à $\varphi'(E)$

est compatible avec l'intersection finie. Si p est sous-inductif strict, sa restriction à E est un isomorphisme sur $p(E)$ pour les ordres induits.

DÉFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; un atlas (faible) complet F de $\mathcal{S}'$ est dit *compatible avec* p si les conditions suivantes sont vérifiées : soient $f \in F$, $f' \in F$; si $\alpha(f)\alpha(f')$ est défini, $p(\alpha(f))$ et $p(\alpha(f'))$ admettent $p(\alpha(f)\alpha(f'))$ pour intersection; si $\beta(f)\beta(f')$ est défini, alors $p(\beta(f))$ et $p(\beta(f'))$ admettent $p(\beta(f)\beta(f'))$ pour intersection.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; pour qu'un atlas faible complet F de $\mathcal{S}'$ soit compatible avec p, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :

1) Soient $f \in F$ et $f' \in F$; si $f^{-1}f'$ est défini, alors $p(f^{-1})p(f')$ est défini et égal à $p(f^{-1}f')$; si $f'f^{-1}$ est défini, on a de même : $p(f')\,p(f^{-1}) = p(f'f^{-1})$.

2) La restriction de p à $a(F)$ et $b(F)$ est compatible avec la pseudomultiplication dans $\mathcal{S}'$ et dans $\mathcal{S}$.

3) Soient $f \in F$, $h \in a(F)$ et $k \in b(F)$; si fh est défini, on a : $p(f)\,p(h) = p(fh)$; si kf est défini, on a : $p(kf) = p(k)\,p(f)$.

COROLLAIRE 1 : La classe $\mathcal{H}(\mathcal{S}', p)$ des atlas faibles complets de $\mathcal{S}'$ compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{H}(\mathcal{S}')$.

COROLLAIRE 2 : La sous-classe de $\mathcal{H}'(\mathcal{S}')$ formée des atlas faibles complets compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{H}'(\mathcal{S}')$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}')$) que nous désignerons par $\mathcal{H}'(\mathcal{S}', p)$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}', p)$).

COROLLAIRE 3 : La sous-classe intersection de $\mathcal{I}_f(\mathcal{S}')$ (resp. $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}')$) avec $\mathcal{H}'(\mathcal{S}', p)$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}', p)$) est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{I}_f(\mathcal{S}')$ (resp. $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}')$), qui contient $\mathcal{T}(\mathcal{S}')$ et que nous désignerons par $\mathcal{I}_f(\mathcal{S}', p)$ (resp. $\dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}', p)$).

COROLLAIRE 4 : La sous-classe des complexes de $\mathcal{S}'$ qui appartiennent à $\mathcal{I}_f(\mathcal{S}', p)$ est un groupoïde local $(\tilde{\mathcal{S}}', p)$ pour la relation $F' \subset F$, admettant $\mathcal{S}$ pour base.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-prélocaux, p un foncteur inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$ et F un atlas complet de $\mathcal{S}'$ compatible avec p. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1) F est un atlas propre compatible avec p.

2) F admet pour base une sous-classe B telle que $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient compatibles et que les restrictions de p à $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient compatibles avec l'intersection finie.

3) La restriction de p à $\bar{a}(F)$ et $\bar{b}(F)$ est compatible avec la pseudomultiplication dans $\mathcal{S}'$ et dans $\mathcal{S}$; de plus $\bar{a}(F)$ et $\bar{b}(F)$ sont propres.

4) F admet pour base un atlas faible complet appartenant à $\mathcal{H}'(\mathcal{S}',p)$.

COROLLAIRE : La classe $\mathcal{A}'(\mathcal{S}',p)$ des atlas complets propres compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{A}'(\mathcal{S}')$ et de $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S}')$; la classe inter-section $\mathcal{J}(\mathcal{S}',p)$ de $\mathcal{J}(\mathcal{S}')$ avec $\mathcal{A}'(\mathcal{S}',p)$ est un sous-groupoïde plein saturé par induc-tion de $\mathcal{J}(\mathcal{S}')$ et de $\dot{\mathcal{J}}(\mathcal{S}')$.

THÉORÈME : Soient $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal et $\mathcal{S}'$ un groupoïde sous-préinductif, p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; l'application p' qui associe à $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{S}',p)$ la partie sous-inductive faible engendrée par $p(F)$ dans $\mathcal{S}$ est un foncteur sous-inductif de $\mathcal{H}'(\mathcal{S}',p)$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}',p)$) vers $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S})$).

COROLLAIRE 1 : Si p est un foncteur sous-inductif strict, alors p' est un foncteur sous-inductif strict de $\mathcal{H}'(\mathcal{S}',p)$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}',p)$) vers $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S})$).

COROLLAIRE 2 : La restriction de p' à $\mathcal{J}_f(\mathcal{S}',p)$ est un foncteur sous-inductif de $\dot{\mathcal{J}}_f(\mathcal{S}',p)$ vers $\dot{\mathcal{J}}_f(\mathcal{S})$, qui applique $\mathcal{T}(\mathcal{S}')$ dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

THÉORÈME : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives au-dessus de $\mathcal{S}$, où $\mathcal{S}'$ est un groupoïde sous-inductif; désignons par p' l'application qui associe à $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{S}',p)$ la classe $p(F)$; alors $\langle \mathcal{H}'(\mathcal{S}), p', \dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}',p) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives, et p' est un étalement de $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}',p)$ dans $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S})$.

COROLLAIRE : La restriction de p' à $\mathcal{J}_f(\mathcal{S}',p)$ est un étalement de $\dot{\mathcal{J}}_f(\mathcal{S}',p)$ dans $\dot{\mathcal{J}}_f(\mathcal{S})$ qui étale $\mathcal{T}(\mathcal{S}')$ dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$. En particulier, la restriction de p' à $\mathcal{S}'$ est un étalement dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

THÉORÈME : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives étalée au-dessus de $\mathcal{S}$ et p' l'application qui associe la classe $p(F)$ à $F \in \dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}',p)$; alors p' est un étalement de $\mathcal{H}'(\mathcal{S}',p)$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S}',p)$) dans $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{S})$).

THÉORÈME : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-prélocaux et p un foncteur inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; alors l'application $\bar{p}$ qui associe à $F \in \mathcal{A}'(\mathcal{S}',p)$ la partie sous-inductive engendrée par $p(F)$ dans $\mathcal{S}$ est un foncteur sous-inductif de $\mathcal{A}'(\mathcal{S}',p)$ (resp. $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S}',p)$) vers $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S})$).

COROLLAIRE 1 : Si p est inductif strict, alors $\bar{p}$ est un foncteur sous-inductif strict de $\mathcal{A}'(\mathcal{S}',p)$ vers $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ et un foncteur inductif strict de $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S}',p)$ vers $\dot{\mathcal{A}}(\mathcal{S})$, qui étale $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S}',p)_o$ dans $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S})_o$.

COROLLAIRE 2: Si p est un étalement de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$, alors $\bar{p}$ est un étalement de $\mathcal{Q}'(\mathcal{S}',p)$ (resp. $\dot{\mathcal{Q}}'(\mathcal{S}',p)$) dans $\mathcal{Q}'(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{Q}}'(\mathcal{S})$). La restriction de $\bar{p}$ à $\mathcal{I}(\mathcal{S}',p)$ étale $\mathcal{I}(\mathcal{S}',p)$ (resp. $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S}',p)$) dans $\mathcal{I}(\mathcal{S})$ (resp. $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$). La sous-classe $\mathcal{C}(\mathcal{S}',p)$ de $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S}',p)$ formée des éléments F tels que $\bar{p}(F) \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ est un sous-groupoïde plein sous-préinductif de $\dot{\mathcal{I}}(\mathcal{S}',p)$, que $\bar{p}$ étale dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$, si $\mathcal{S}$ est prélocal.

DÉFINITION: Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; on appelle sous-classe *compatible relativement à* p une sous-classe compatible B de $\mathcal{S}'$ telle que la restriction de p à $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soit compati--ble avec l'intersection finie.

PROPOSITION: Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives; pour qu'une classe B de $\mathcal{S}'$ soit compatible relativement à p, il faut et il suffit que $\alpha(B)$ soit compatible relativement à p et que $p(B)$ soit une sous-classe compatible.

COROLLAIRE 1: Pour tout $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{S}',p)$ tel que $p(F)$ soit compatible, on a $F \in \mathcal{I}_f(\mathcal{S}',p)$; si $F \in \mathcal{Q}'(\mathcal{S}',p)$ et $\bar{p}(F) \in \mathcal{I}(\mathcal{S})$, alors $F \in \mathcal{I}(\mathcal{S}',p)$.

COROLLAIRE 2: Supposons $\mathcal{S}$ sous-prélocal et p tel que $p(f)\,p(e)$ appartienne à $p(\mathcal{S}')$, pour tout $f \in \mathcal{S}'$, $e \in \mathcal{S}'_0$ tels que $p(e) < \alpha(p(f))$. Alors $\langle \mathcal{I}_f(\mathcal{S}), p', \mathcal{I}_f(\mathcal{S}',p) \rangle$ (resp. $\langle \mathcal{I}_f(\mathcal{S}), p', \dot{\mathcal{I}}_f(\mathcal{S}',p) \rangle$) est une espèce de structures sous-préinductives (resp. inductives).

DÉFINITION: Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$. On dira que $\mathcal{S}'$ est *complet relativement à* p si p est un foncteur inductif strict et si p applique biunivoquement $\underline{\cup} B$ sur $\underline{\cup} p(B)$, pour toute sous-classe B de $\mathcal{S}'$ qui est compatible relativement à p. Une espèce de structures sous-préinductives $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est dite *complète* si $\mathcal{S}'$ est complet relativement à p.

Il résulte de cette définition que si $p(B)$ admet un agrégat dans $\mathcal{S}$, alors B admet un agrégat dans $\mathcal{S}'$; en particulier, si $\mathcal{S}$ est préinductif et $\mathcal{S}'$ sous-inductif, alors $\mathcal{S}'$ est inductif.

PROPOSITION: Soient $\mathcal{S}'$ un groupoïde sous-inductif et $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal; si p est un foncteur inductif strict de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{S}'$ est un groupoïde sous-local.

PROPOSITION: Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur inductif strict de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$. Si p applique biunivoquement $\underline{\cup} C$ sur $\underline{\cup} p(C)$ pour tout complexe $C \in (\tilde{\mathcal{S}}', p)$, alors $\mathcal{S}'$ est complet relativement à p.

COROLLAIRE: Si $\mathcal{S}$ est préinductif et $\mathcal{S}'$ local, et si $\cup \bar{C}$ est défini pour toute sous-classe complète $\bar{C}$ telle que $\cup p(\bar{C})$ soit défini, alors $\mathcal{S}'$ est complet relativement à p.

PROPOSITION: Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ des groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur de

$\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$, p' un foncteur de $\mathcal{S}''$ vers $\mathcal{S}'$, tels que $\mathcal{S}'$ soit complet relativement à p et $\mathcal{S}''$ relativement à p'; alors $\mathcal{S}''$ est complet relativement à pp'.

PROPOSITION : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives telle que $p(\mathcal{S}')$ soit un sous-groupoïde saturé de $\mathcal{S}$; si $\mathcal{S}'_0$ est complet relativement à p_0, alors $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives complète.

THÉORÈME : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal; soit θ l'application de $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ dans $\mathcal{S}$ qui applique la paratopologie T sur son plus grand élément t. Alors $\langle \mathcal{S}, \theta, \dot{\mathcal{T}}(\mathcal{S}) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives complète.

COROLLAIRE : Si $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-inductives au-dessus de $\mathcal{S}$, alors p se décompose canoniquement sous la forme $p = \theta\tau$, où τ est l'étalement canonique de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

THÉORÈME : Soient $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-(pré)inductif et $\hat{\mathcal{S}}$ la sous-classe du groupoïde produit $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ formée des couples (f', f), où $f' < f$, munie de la relation :

$$(f', f) < (g', g) \text{ si, et seulement si, } f = g \text{ et } f' < g', \text{ ou } (f', f) = (0, 0).$$

Alors $\hat{\mathcal{S}}$ est un groupoïde (pré)inductif. Soit $\mathcal{S}^-$ le groupoïde obtenu en ajoutant à $\mathcal{S}$ un élément $0^- < 0$; $\mathcal{S}^-$ est un groupoïde sous-préinductif, quotient inductif de $\hat{\mathcal{S}}$ pour le foncteur canonique π tel que :

$$\pi((0,0)) = 0^-; \qquad \pi((f', f)) = f', \text{ si } f \neq 0;$$

π est un étalement de la classe (pré)inductive $\hat{\mathcal{S}}$ dans $\mathcal{S}^-$.

COROLLAIRE 1 : Si $\mathcal{S}$ est sous-inductif, toute sous-classe compatible relativement à π admet un agrégat dans $\hat{\mathcal{S}}$.

COROLLAIRE 2 : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\mathcal{S}$; alors $\langle \hat{\mathcal{S}}, p \times p, \hat{\mathcal{S}}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de $\hat{\mathcal{S}}$. Si $\mathcal{S}'$ est sous-inductif et p inductif, alors $\hat{\mathcal{S}}'$ est complet relativement à $p \times p$.

COROLLAIRE 3 : Si p est un étalement de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$ (et si $\mathcal{S}'$ est complet relativement à p), alors $p \times p$ est un étalement de $\hat{\mathcal{S}}'$ dans $\hat{\mathcal{S}}$ (et $\hat{\mathcal{S}}'$ est complet relativement à $p \times p$).

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ un groupoïde local, $\mathcal{S}'$ un groupoïde sous-préinductif et p un foncteur sous-inductif de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}$; la classe $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}', p)$ des complexes $C \in (\tilde{\mathcal{S}}', p)$ tels qu'il existe $\cup p(C)$ dans $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $(\tilde{\mathcal{S}}', p)$. Le foncteur $\varkappa$ qui associe à $C \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}', p)$ l'élément $\cup p(C)$ est un foncteur inductif et toute sous-classe compatible relativement à $\varkappa$ dont l'image par $\varkappa$ admet un agrégat dans $\mathcal{S}$ admet un agrégat dans $\tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}', p)$.

REMARQUE : Si de plus $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductives, alors $(\mathcal{S}, \varkappa, \tilde{\mathcal{C}}(\mathcal{S}', p))$ est une espèce de structures; mais, en général, $\varkappa$ n'est pas un foncteur inductif strict.

THÉORÈME : Soit $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures locales au-dessus de $\mathcal{S}$; soit $(\bar{\mathcal{S}}', p)$ la sous-classe de $\mathcal{C}(\mathcal{S}', p)$ formée des sous-classes complètes (c'est-à-dire $C \in (\bar{\mathcal{S}}', p)$ est une sous-classe complète de $\mathcal{S}'$ compatible avec p et telle que $\cup p(C)$ soit défini et égal à $\theta \bar{p}(C)$); alors $\langle \mathcal{S}, \theta \bar{p}, (\bar{\mathcal{S}}', p) \rangle$ est une espèce de structures locales complète et un élargissement inductif de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$, déterminé à une équivalen--ce près par les conditions suivantes:

Pour toute espèce de structures locales complète $\langle \mathcal{S}, q, \Sigma' \rangle$ au-dessus de $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}'$ soit une base de Σ' et que p soit la restriction de q à $\mathcal{S}'$, il existe une application covariante inductive de $\langle \mathcal{S}, \theta \bar{p}, (\bar{\mathcal{S}}', p) \rangle$ sur $\langle \mathcal{S}, q, \Sigma' \rangle$ qui se réduit à l'identité sur $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

DÉFINITION : Avec les notations du théorème, l'espèce de structures locales $\langle \mathcal{S}, \theta \bar{p}, (\bar{\mathcal{S}}', p) \rangle$ est appelée la *complétion de* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

THÉORÈME : Soient $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ une espèce de structures locales au-dessus de $\mathcal{S}$, et $(\mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1)$ l'élargissement maximal de $(\mathcal{S}, p, \mathcal{S}')$; alors la complétion de $\langle \mathcal{S}, p_1, \mathcal{S}'_1 \rangle$ 1
est un élargissement inductif de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ appelé *élargissement complet de* $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$.

Une structure S de l'élargissement complet de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ s'identifie à un atlas faible complet F de $\mathcal{S}'_1$ tel que $a(F)$ soit une composante inductive faible de $\mathcal{S}'$ et que:

$$\theta_1 \bar{p}_1(S) = \cup p(\beta(F)).$$

THÉORÈME (transitivité verticale) : Soient $\langle \mathcal{S}', p', \mathcal{S}'' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ deux espèces de structures locales, où $\langle \mathcal{S}', p', \mathcal{S}'' \rangle$ est une espèce de superstructures locales au--dessus de $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$; soient $\langle (\bar{\mathcal{S}}', p), q', (\bar{\mathcal{S}}'', p'') \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, q, (\bar{\mathcal{S}}', p) \rangle$ les complé--tions de $\langle (\bar{\mathcal{S}}', p), p'', \mathcal{S}'' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ où p'' désigne le foncteur ip', i étant l'in--jection canonique de $\mathcal{S}'$ dans $(\bar{\mathcal{S}}', p)$; alors la complétion de $\langle \mathcal{S}, pp', \mathcal{S}'' \rangle$ est équiva--lente à $\langle \mathcal{S}, qq', (\bar{\mathcal{S}}'', p'') \rangle$.

COROLLAIRE : Soient $\langle \mathcal{S}'_1, \bar{p}'_1, \bar{\mathcal{S}}''_1 \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, \bar{p}_1, \bar{\mathcal{S}}'_1 \rangle$ les élargissements complets de $\langle \bar{\mathcal{S}}'_1, jp', \mathcal{S}'' \rangle$ et $\langle \mathcal{S}, p, \mathcal{S}' \rangle$ où j est l'injection canonique de $\mathcal{S}'$ dans $\bar{\mathcal{S}}'_1$; alors l'é--largissement complet de $\langle \mathcal{S}, pp', \mathcal{S}'' \rangle$ est équivalent à l'espèce de structures com--plète $\langle \mathcal{S}, \bar{p}'_1 \bar{p}_1, \bar{\mathcal{S}}''_1 \rangle$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif, I une classe d'indices, contenant en particulier 0, 1, 2, et munie de la relation : $i < j$ si, et seulement si, $i = j$ ou $i = 0$. Soient Γ un sous-pseudogroupe du groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S} \times (I \times I)$ et F_{ji} la classe des éléments f tels que $(f, (j, i)) \in \Gamma$; alors F_{ji} est un atlas complet, F_{ii} un sous-pseudogroupe et l'on a :

$$(F_{ji})^{-1} = F_{ij}, \quad \overline{F_{kj} F_{ji}} \prec F_{ki} \quad \text{pour tout } k \in I, \ j \in I \ \text{ et } \ i \in I.$$

COROLLAIRE : Soit F un atlas complet de $\mathcal{S}$; le sous-pseudogroupe faible $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S} \times (I \times I)$ engendré par la classe des triplets $(f, (2, 1))$, où $f \in F$, est un élargissement de $(a(F), (1, 1))$ (resp. de $(b(F), (2, 2))$) et le sous-pseudogroupe $\overline{\mathcal{F}}$ engendré par $\mathcal{F}$ est un élargissement inductif de $(a(F), (1, 1))$ (resp. $(b(F), (2, 2))$), qui est réunion de $(\bar{a}(F), (1, 1))$, $(F, (2, 1))$, $(F^{-1}, (1, 2))$, $(\bar{b}(F), (2, 2))$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, F un atlas complet de $\mathcal{S}$ et q un foncteur inductif de $\bar{a}(F)$ vers $\mathcal{S}'$; soit $\bar{q}$ une application inductive de F dans $\mathcal{S}'$ telle que l'on ait, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$:

$$(\bar{q}(f))^{-1} \ \bar{q}(f') = q(f^{-1} f'), \text{ si } f^{-1} f' \text{ est défini ;}$$

alors il existe un foncteur inductif q' de $\mathcal{F}$ (corollaire précédent) vers $\mathcal{S}'$ prolongeant $\bar{q} \times (Id \times Id)$ et dont la restriction à $(b(F), (2, 2))$ est un foncteur inductif. Le foncteur q' est défini par : $q'(b, (1, 1)) = q(b)$, $q'(f, (2, 1)) = \bar{q}(f)$, $q'(f', (1, 2)) = (\bar{q}(f'^{-1}))^{-1}$, $q'(k, (2, 2)) = \bar{q}(f') \, (\bar{q}(f))^{-1}$ où $k = f' f^{-1}$, $f \in F$, $f' \in F$.

COROLLAIRE 1 : Si $\mathcal{S}'$ est un groupoïde local complet, q' se prolonge en un foncteur inductif de $\overline{\mathcal{F}}$ vers $\mathcal{S}'$.

COROLLAIRE 2 : Si F est un atlas propre et si la restriction de q à $\alpha(a(F))$ est une
1 injection, alors $\bar{q}(F)$ est un atlas faible complet tel que : $a(\bar{q}(F)) = q(a(F))$ et la restriction de q' à $(\beta(F), (2, 2))$ est une injection.

DÉFINITION : Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux groupoïdes sous-préinductifs, F et F' deux atlas complets de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ resp., et q un foncteur inductif de $\bar{a}(F)$ vers $\bar{a}(F')$; on dit que F' est *associé* à F si l'on s'est donné une application $\bar{q}$ de F sur une base de F' telle que, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, on ait :

(1) $$(\bar{q}(f))^{-1} \bar{q}(f') = q(f^{-1} f'), \ \text{ si } f^{-1} f' \text{ est défini.}$$

On en déduit alors un foncteur inductif de $b(F)$ vers $b(F')$, et si $\mathcal{S}'$ est un groupoïde local complet, un foncteur inductif de $\bar{b}(F)$ vers $\bar{b}(F')$.

1 Si la restriction de q à $\alpha(a(F))$ est une injection, si $\mathcal{S}$ est sous-inductif et si F est propre, la relation (1) entraîne que $\bar{q}(F)$ est base d'un atlas complet associé à F par $\bar{q}$.

PROPOSITION : Soient $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif et $\overline{\mathcal{S}}$ un élargissement de $\mathcal{S}$ qui soit, aussi, un élargissement inductif de $\mathcal{S}$; soit q un foncteur inductif de $\mathcal{S}$ vers un groupoïde sous-préinductif Γ dont la restriction à $\mathcal{S}_o$ soit une bijection sur Γ_o; alors il existe un élargissement inductif $\overline{\Gamma}$ de Γ qui est un quotient inductif de $\overline{\mathcal{S}}$ relativement à un foncteur inductif $\overline{q}$ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est q.

COROLLAIRE 1 : Si $\mathcal{S}$ et Γ sont des groupoïdes locaux complets, la proposition est encore vraie si $\overline{\mathcal{S}}$ est seulement un élargissement inductif de $\mathcal{S}$; de plus, $\overline{\Gamma}$ est alors un groupoïde local complet déterminé à une équivalence près.

COROLLAIRE 2 : Soit Γ un groupoïde local complet et $\mathcal{S}$ un sous-pseudogroupe d'un groupoïde local complet $\mathcal{S}'$; soit F un atlas complet de $\mathcal{S}'$ tel que $\overline{a}(F) \prec \mathcal{S}$; alors deux atlas associés à F par une application prolongeant le foncteur q de la proposition sont isomorphes.

REMARQUE : Un atlas complet F peut être considéré comme une structure sur $\overline{\beta(F)}$. En particulier, supposons $\mathcal{S}$ local complet; soit H un sous-pseudogroupe de $\mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{S}}$ l'élargissement complet de H au-dessus de $\mathcal{S}$. A tout atlas F de $\mathcal{S}$ correspond biunivoquement un atlas $\tilde{F}$ de $\tilde{\mathcal{S}}$. Soit $\mathfrak{A}$ la classe des atlas F de $\mathcal{S}$ tels que $\overline{a}(F) \prec H$, et $\tilde{\mathfrak{A}}$ la classe des atlas $\tilde{F}$ correspondants à $F \in \mathfrak{A}$. $\mathfrak{A}$ est une espèce de structures équivalente à l'espèce de structures $\tilde{\mathcal{S}}_o$ au-dessus de $\mathcal{S}$. Soit q un foncteur inductif de H sur un groupoïde local complet Γ ; la proposition précédente associe à $\tilde{\mathcal{S}}$ un élargissement inductif $\tilde{\Gamma}$ de Γ qui est un quotient inductif de $\tilde{\mathcal{S}}$ relativement à un foncteur $\tilde{q}$ prolongeant q. A tout atlas $F \in \mathfrak{A}$ est associé l'atlas $\tilde{q}(\tilde{F})$ de $\tilde{\Gamma}$. L'espèce de structures ayant pour structures les atlas $\tilde{q}(\tilde{F})$ considérés comme structures sur $\beta(\tilde{F})$ est dite une *espèce de structures associée* à $\tilde{\mathcal{S}}_o$. Ce point de vue correspond à celui qui est esquissé dans "Espèces de structures locales" ; il sera développé dans une suite de cet article étudiant les catégories inductives, où on trouvera en particulier la catégorie 1
inductive des atlas complets, dont la loi de composition est différente de celle du groupoïde des atlas complets considéré ici.

1 **9. Appendice : Perfectionnement d'une catégorie.**

DÉFINITION : Un élément f d'une catégorie $\mathcal{C}$ est *régulier à droite* si l'égalité : $hf = h'f$, où h et $h' \in \mathcal{C}$, entraîne $h = h'$; il est *régulier à gauche* si l'égalité $fh = fh'$ entraîne $h = h'$; il est *régulier* s'il est régulier à gauche et à droite.

Tout élément inversible d'une catégorie est régulier. Une catégorie dont tous les
2 éléments réguliers sont inversibles sera dite *parfaite*. La classe des éléments réguliers d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie ainsi que la classe des éléments réguliers à droite (resp. à gauche).

PROPOSITION : Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $f \in \mathcal{C}$; si f admet un inverse à droite, alors f est régulier à droite ; si f est régulier à droite et admet un inverse à gauche, alors f est inversible. De même, si f admet un inverse à gauche, f est régulier à gauche ; si f est régulier à gauche et admet un inverse à droite, alors f est inversible.

DÉFINITION : Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}'$; soit $\mathcal{F}$ une sous-classe de $\mathcal{C}'$ contenant $\mathcal{C}_o$, telle que, pour tout $f \in \mathcal{F}$, on ait $\alpha(f) \in \mathcal{C}$ et que $\mathcal{F}$ contienne ff', pour tout $f' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$. Alors on dit que $\mathcal{F}$ est *distinguée* pour $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

Un *trio* de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ est un triplet (h, f', f), où $f \in \mathcal{F}$, $f' \in \mathcal{F}$, $h \in \mathcal{C}$, $\alpha(f) = \alpha(h)$, $\alpha(f') = \beta(h)$.

Un *quatuor* de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ est un quadruplet (h', f', f, h) tel que (f', f, h) soit un trio de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ et que : $h'f = f'h$.

Soient $\mathcal{C}'$ une catégorie, $\mathcal{C}$ une sous-catégorie et $\mathcal{F}$ une classe distinguée pour $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$.

3 PROPOSITION : La classe $\sqsupset(\mathcal{F}, \mathcal{C}')$ des trios de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ est équivalente à la catégorie induite $\alpha^*_{\mathcal{F}}(\mathcal{C})$, où $\alpha_{\mathcal{F}}$ est l'application : $f \to \alpha(f)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{C}_o$.

PROPOSITION : La classe des quatuors de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathcal{F} \cap \mathcal{C})$ est une catégorie $\square\square(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ pour la multiplication *longitudinale* définie par

$$(h'', g', g, h'_1)\,(h', f', f, h) = (h'', g'f', gf, h) \text{ si, et seulement si, } h' = h'_1.$$

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "g'"'] & \cdot \arrow[l, "f'"'] \\ \cdot \arrow[u, "h''"] & \cdot \arrow[l, "g"] \arrow[u, "h'"'] & \cdot \arrow[l, "f"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

PROPOSITION : La classe des quatuors de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ est une catégorie $\boxminus(\mathcal{F}, \mathcal{C}')$ pour la multiplication *latérale* définie par :

$$(h'_1, g', g, h_1)(h', f', f, h) = (h'_1 h', g', f, h_1 h)$$

si, et seulement si, $g = f'$. 1

$$\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, "g'"'] \\
\bullet \arrow[u, "h'_1"] & \bullet \arrow[l, "f'"'] \arrow[u, "h_1"'] \\
\bullet \arrow[u, "h'"] & \bullet \arrow[l, "f"'] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION : $\square\!\square(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ est une catégorie d'opérateurs sur $\sqsupset(\mathcal{F}, \mathcal{C}')$ pour la loi de composition :

$$(f', f, h)(k', g', g, k) = (f'g', fg, k)$$

si, et seulement si, $h = k'$.

$$\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, "f'"'] & \bullet \arrow[l, "g'"'] \\
\bullet & \bullet \arrow[l, "f"] \arrow[u, "h"'] & \bullet \arrow[l, "g"] \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

DÉFINITION : $\mathcal{C}'$ est appelé *élargissement de* $\mathcal{C}$ *pour* $\mathcal{F}$ si les conditions suivantes sont vérifiées : 2

1) Le foncteur $\tau : (h', f', f, h) \to (f', f, h)$ est un foncteur de $\boxminus(\mathcal{F}, \mathcal{C}')$ sur $\sqsupset(\mathcal{F}, \mathcal{C}')$.

2) Le foncteur $\pi : (h', f', f, h) \to h'$ est un foncteur de $\boxminus(\mathcal{F}, \mathcal{C}')$ sur $\mathcal{C}'$.

Cette définition signifie aussi que tout trio de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$ peut être complété en un quatuor et que tout élément de $\mathcal{C}'$ est la base d'un quatuor de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{F})$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{C}'$ un élargissement de $\mathcal{C}$ pour $\mathcal{F}$; pour que tout trio soit contenu dans un seul quatuor, il faut et il suffit que tout élément de $\mathcal{F}$ soit régulier à droite ; dans ce cas, $\boxminus(\mathcal{F}, \mathcal{C}')$ est une extension inessentielle de $\mathcal{C}$ pour le foncteur : $(h', f', f, h) \to h$ et l'application $\sigma : (f', f, h) \to h'$ est un foncteur qui applique sur h' la classe des unités de la composante connexe de (f', f, h) dans la catégorie extension de la catégorie d'opérateurs $\square\!\square(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ (voir § 2).

PROPOSITION : Si $\mathcal{C}'$ est un élargissement de $\mathcal{C}$ pour $\mathcal{F}$ et si les éléments de $\mathcal{F}$ sont réguliers à droite, alors tout élément de $\mathcal{F}$ est inversible. Si $\mathcal{C}'$ est un élargissement de $\mathcal{C}$ pour la classe des éléments réguliers de $\mathcal{C}'$ de source dans $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{C}'$ est une caté-gorie parfaite; dans ce cas, si hf et f sont réguliers, h est régulier. 3

THÉORÈME : La catégorie $\sqsupset(\mathfrak{F}, \mathcal{C}')$ est un élargissement de $\mathcal{C}$ pour la classe $\mathfrak{F}'$ formée des trios $\tilde{f}=(f, e, e)$, où $f \in \mathfrak{F}$ et $e=\alpha(f)$; $h \in \mathcal{C}$ est identifié avec $\tilde{h}=(\beta(h), \alpha(h), h)$.

Le trio $(\tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{h})$ est base du quatuor $((f', f, h), \tilde{f}', \tilde{f}, \tilde{h}))$.

1 DÉFINITION : On dit que $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathfrak{F})$ vérifie la *condition (P)* si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) Soient $f \in \mathfrak{F}$, $f' \in \mathfrak{F}$, tels que $\beta(f)=\beta(f')$; alors il existe $\varphi \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{C}$ et $\varphi' \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{C}$ tels que : $f\varphi = f'\varphi'$
2) Soient $f' \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{C}$ et $h' \in \mathcal{C}$ tels que $\beta(h') = \beta(f')$; alors il existe $f \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{C}$ et $h \in \mathcal{C}$ tels que : $f' h = h' f$.

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "f"'] \\ \cdot \arrow[u, "f'"] & \cdot \arrow[l, "\varphi'"] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "f'"'] \\ \cdot \arrow[u, "h'"] & \cdot \arrow[l, "f"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

La deuxième condition signifie aussi que le couple (f', h') peut être complété en un quatuor de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathfrak{F} \cap \mathcal{C})$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{C}'$ un élargissement de $\mathcal{C}$ pour une classe distinguée $\mathfrak{F}$ telle que :

1) les éléments de $\mathfrak{F}$ sont réguliers à droite,
2) les conditions $f \in \mathfrak{F}$, $g \in \mathfrak{F}$, $g = ff'$ entraînent $f' \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{C}$.

2 Alors $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathfrak{F})$ vérifie la condition (P).

PROPOSITION : Soient Γ et Γ' les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$; soit $\mathfrak{J}$ la classe distinguée des éléments f de Γ' tels que, ou bien $f \in \Gamma$, ou bien $\alpha(f) \in \mathcal{C}$ et $\beta(f) \notin \mathcal{C}$. Pour que $\mathcal{C}'$ soit un élargissement de $\mathcal{C}$ (au sens du § 3), il faut et il suffit que $\Gamma = \Gamma' \cap \mathcal{C}$ et que $\mathcal{C}'$ soit un élargissement de $\mathcal{C}$ pour $\mathfrak{J}$; dans ce cas, $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathfrak{J})$ vérifie la condition (P).

PROPOSITION : $(\mathcal{C}, \sqsupset(\mathfrak{F}, \mathcal{C}'), \mathfrak{F}')$ vérifie la condition (P). Si tout élément de $\mathcal{C}$ inver-

3 -sible dans $\mathcal{C}'$ est inversible dans $\mathcal{C}$, alors $\sqsupset(\mathfrak{F}, \mathcal{C}')$ est un élargissement de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION : Soit $\mathcal{C}'$ un élargissement de $\mathcal{C}$ pour $\mathfrak{F}$, les éléments de $\mathfrak{F}$ étant réguliers et $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathfrak{F})$ vérifiant la condition (P); alors l'image réciproque par le foncteur σ de $h' \in \mathcal{C}'$ est la classe des unités de la composante connexe d'un trio (f', f, h) dans la catégorie extension de la catégorie d'opérateurs $\boxminus(\mathfrak{F}, \mathcal{C})$, où (h', f', f, h) est un quatuor; c'est aussi la classe des trios (g', g, k) tels qu'il existe deux quatuors q et q'

4 de $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathfrak{F} \cap \mathcal{C})$, vérifiant la condition $(f', f, h)\, q = (g', g, k)\, q'$.

THÉORÈME : Si tout élément de $\mathfrak{F}$ est régulier à droite, si tout élément de $\mathfrak{F} \cap \mathcal{C}$ est régulier et si $(\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathfrak{F})$ vérifie la condition (P), les relations ρ et ρ' suivantes sont équivalentes :

$(f', f, h)\rho(g', g, k)$ si, et seulement si, il existe $q \in \sqsubset\!\sqsupset(\mathfrak{F}, \mathcal{C})$ et $q' \in \sqsubset\!\sqsupset(\mathfrak{F}, \mathcal{C})$ tels que $(f', f, h)q = (g', g, k)q'$;

$(f', f, h)\rho'(g', g, k)$ si, et seulement si, $f\varphi = g\gamma$, où $\varphi \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{C}$ et $\gamma \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{C}$, entraîne $f' h \varphi = g' k \gamma$.

De plus, il existe un élargissement $\overline{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ pour une classe $\overline{\mathfrak{F}}$ distinguée pour $(\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}})$ ayant les propriétés suivantes :

1) $\overline{\mathcal{C}}$ est la catégorie quotient de $\sqsupset(\mathfrak{F}, \mathcal{C}')$ par la relation ρ et $f \to (f, e, e) \bmod \rho$, où $f \in \mathfrak{F}$, est une bijection de $\mathfrak{F}$ sur $\overline{\mathfrak{F}}$.

2) Soit $\mathcal{C}''$ un élargissement de $\mathcal{C}$ relativement à une classe $\mathfrak{F}''$ admettant une applica- 1¶
-tion sur la classe $\mathfrak{F}'$ des trios $\bar{f} = (f, e, e)$, de la forme : $f'' \to (f, \alpha(f''), \alpha(f''))$, où $f'' \in \mathfrak{F}''$; alors $\overline{\mathcal{C}}$ est une catégorie quotient de $\mathcal{C}''$. 2+

COROLLAIRE : $(\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathfrak{F}})$ vérifie la condition (P).

DÉFINITION : Une catégorie $\overline{\mathcal{C}}$ est appelée un *perfectionnement* d'une sous-catégorie $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ et $\overline{\mathcal{C}}$ ont les mêmes unités et si $\overline{\mathcal{C}}$ est un élargissement de $\mathcal{C}$ pour la classe distinguée $\mathfrak{R}$ formée des éléments réguliers de $\mathcal{C}$ et si dans $\overline{\mathcal{C}}$, tout élément régulier de $\mathcal{C}$ est inversible.

THÉORÈME : Pour qu'une catégorie $\mathcal{C}$ admette un perfectionnement $\overline{\mathcal{C}}$, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathfrak{R})$ vérifie la condition (P). Alors $(\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}, \mathfrak{R})$ vérifie aussi la condition (P). 3+

(A SUIVRE)

CAHIERS
de
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
1965

Vol. VII

/85/

ESPÈCES DE STRUCTURES SOUS-INDUCTIVES

par Charles Ehresmann

Préface.

Comme le texte de mon cours d'été de Montréal (1961), intitulé «Catégories différentiables et géométrie différentielle», devait être multigraphié d'avance, j'avais commencé une rédaction, avec l'intention de la transformer ultérieurement en livre. La rédaction était divisée en trois chapitres : le premier sur la théorie algébrique des catégories, le second sur les espèces de structures locales; le troisième sur les catégories différentiables et la géométrie différentielle. Mais seuls le premier chapitre et une partie du second ont été achevés à temps pour être inclus dans le cours multigraphié [1]. Dès que le texte complet du chapitre 2 fut écrit (et partiellement multigraphié à Paris), nous en avons publié les résultats dans [0]. Cependant l'obtention de nouveaux résultats, à savoir la théorie des catégories structurées et des espèces de structures structurées [10 a], nous a conduit à modifier le projet initial de livre. Pour donner quand même les démonstrations des théorèmes énoncés dans [0], nous avons condensé les parties II et III du chapitre 2 dans l'article [2]. Le présent mémoire représente la partie IV (la dernière) de ce chapitre 2 rédigé en 1961; il fait donc suite à [2] dont les notations sont utilisées. Signalons toutefois les différences de notations suivantes entre [2] et le texte actuel :

1) Les lettres de ronde ont été remplacées par des majuscules italiques, pour simplifier la composition.

2) La relation d'ordre sur le groupoïde $H(S)$ (resp. sur $A(S)$) notée $\ll$ dans [2] est ici désignée par $\tilde{<}$.

Cet article est consacré à l'étude des foncteurs sous-inductifs et des espèces de structures sous-préinductives au-dessus d'un groupoïde sous-préinductif. Les principaux résultats sont contenus dans le n°3; en particulier, les théorèmes de complétion et d'élargissement complet d'une espèce de structures locales, utilisés dans tant de constructions mathématiques (variétés différentiables, espaces fibrés, structures feuilletées..). Dans un prochain travail, nous généraliserons ces résultats au cas des foncteurs sous- 1
prélocaux, à l'aide des fusées [9].

Au texte de 1961, nous ajoutons en Appendice un «guide» de nos récentes publications sur la théorie des catégories ordonnées.

1. Groupoïde inductif au-dessus d'un groupoïde inductif.

DÉFINITION 1. *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}'$ *deux classes sous-préinductives. Une application* p *de* $\mathcal{A}'$ *dans* $\mathcal{A}$ *est dite* sous-inductive *si, pour tout* $a \in \mathcal{A}'$, $b \in \mathcal{A}'$ *et* $c \in \mathcal{A}'$ *tels que* $a < c$ *et* $b < c$, *on a :*

$$p(a \cap b) = p(a) \cap p(b).$$

1 *L'application* p *est dite* inductive *si elle est sous-inductive et si, pour toute sous-classe* B *de* $\mathcal{A}'$, p *applique la congrégation de* B *dans la congrégation de* $p(B)$ *:* $p(\underline{\bigcup} B) \subset \underline{\bigcup}\, p(B)$.

Si p est application sous-inductive, p est compatible avec les structures d'ordre, c'est-à-dire que, si $a < b$, où $a \in \mathcal{A}'$ et $b \in \mathcal{A}'$, on a $p(a) < p(b)$.- Inversement si p est une application de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$ compatible avec les structures d'ordre, on a toujours pour tout $a \in \mathcal{A}'$ et $b \in \mathcal{A}'$, a et b majorés par $c \in \mathcal{A}'$:

$$p(a \cap b) < p(a) \cap p(b) \quad \text{et} \quad \overset{p(c)}{\bigcup} p(B) < p(\overset{c}{\bigcup} B),$$

pour toute sous-classe B de $\mathcal{A}'$ admettant un c-agrégat et telle que $p(B)$ admette un $p(c)$-agrégat.

Si p est une application inductive d'une classe préinductive $\mathcal{A}'$ dans une classe préinductive $\mathcal{A}$ et si B est une sous-classe de $\mathcal{A}'$ admettant un agrégat dans $\mathcal{A}'$, alors $p(B)$ admet $p(\bigcup B)$ pour agrégat dans $\mathcal{A}$.

DÉFINITION 2. *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}'$ *deux classes sous-préinductives. Une application* p *de* $\mathcal{A}'$ *dans* $\mathcal{A}$ *est dite* (sous)-inductive stricte *si* p *est une application (sous)-inductive et si les relations* $a < b$ *et* $p(a) = p(b)$, *où* $a \in \mathcal{A}'$ *et* $b \in \mathcal{A}'$, *entraînent* $a = b$.

PROPOSITION 1. *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}'$ *des classes sous-préinductives et* p *une application sous-inductive stricte de* $\mathcal{A}'$ *dans* $\mathcal{A}$*; alors, pour tout* $c \in \mathcal{A}'$, *la restriction de* p *à la classe* $\varphi'(c)$ *des éléments inférieurs à* c, *est un isomorphisme de* $\varphi'(c)$ *sur* $p(\varphi'(c))$.

DÉMONSTRATION. Soient a et b deux éléments de $\mathcal{A}'$ majorés par c. Comme p est sous-inductive, on a : $p(a \cap b) = p(a) \cap p(b)$. Si $p(a) = p(b)$, on en déduit $p(a \cap b) = p(a) = p(b)$, d'où $a \cap b = a = b$, puisque $a \cap b < a$ et $a \cap b < b$. Donc la restriction de p à $\varphi'(c)$ est une injection.- De la relation $p(a) < p(b)$, il résulte que $p(a) = p(a) \cap p(b) = p(a \cap b)$, d'où $a = a \cap b$ et $a < b$.

PROPOSITION 2. *Soient* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}'$ *des classes sous-préinductives. Pour qu'une application* p *sous-inductive stricte de* $\mathcal{A}'$ *dans* $\mathcal{A}$ *soit inductive, il faut et il suffit que, pour toute sous-classe* B *de* $\mathcal{A}'$ *admettant un* a*-agrégat, il existe* $s < \overset{a}{\bigcup} B$ *tel que* $p(s) = \overset{p(a)}{\bigcup} p(B)$*; dans ce cas, on a :* $s = \overset{a}{\bigcup} B$.

En effet, montrons que les conditions sont suffisantes. Pour tout $b \in B$, on a $p(b) < p(s)$ et il résulte de la proposition 1 que l'on a $b < s$; par suite $\overset{a}{\bigcup} B = \overset{s}{\bigcup} B < s$. Donc $s = \overset{a}{\bigcup} B$ et p est une application inductive.

PROPOSITION 3. *Soit p un foncteur d'un groupoïde sous-préinductif S' vers un groupoïde sous-préinductif S, compatible avec les ordres de S' et S. On a $p(gf) < p(g)p(f)$, pour tout $f \in S'$, $g \in S'$ tel que gf soit défini. Pour que p soit sous-inductif, il faut et il suffit que, pour tout $f \in S'$ et tout $s \in S'_0$ tels que s et $\alpha(f)$ soient majorés on ait $p(fs) = p(f)p(s)$.*

DÉMONSTRATION. Puisque $gf = (ge).(ef)$, où $e = \beta(f) \cap \alpha(g)$, on a $p(ge) < p(g)$ et $\alpha(p(ge)) = p(\alpha(ge)) = p(e)$, d'où $p(ge) = p(g)p(e)$; de même $p(ef) = p(e)p(f)$. Il en résulte $p(gf) = p(ge)p(ef) = p(g)p(e)p(f) < p(g)p(f)$.- Si p est sous-inductif, on a $p(\alpha(f))p(s) = p(\alpha(f)s)$ et par suite $p(fs) = p(f)p(\alpha(f))p(s) =$ $= p(f)p(s)$.- Inversement montrons que la condition est suffisante pour que p soit sous-inductif. Soient f et f' deux éléments de S' majorés par f'' ; on a $f \cap f' = f(\alpha(f)\alpha(f'))$; comme $p(f)$ et $p(f')$ sont majorés par $p(f'')$, il en résulte $p(f \cap f') = p(f) \cap p(f')$.

PROPOSITION 4. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur de S' vers S compatible avec les ordres et p_0 sa restriction à S'_0. Pour que p soit (sous)-inductif, il faut et il suffit que p_0 soit (sous)-inductif; pour que p soit sous-inductif strict, il faut et il suffit que p_0 le soit.*

DÉMONSTRATION. Supposons que p_0 soit sous-inductif strict. Soient $f \in S'$ et $g \in S'$ tels que $g < f$ et $p(g) = p(f)$; les relations $p(\alpha(g)) = p(\alpha(f))$ et $\alpha(g) < \alpha(f)$ entraînent $\alpha(g) = \alpha(f)$ et par suite $g = f$.- Soit $e \in S'_0$ tel que e, $\alpha(f)$ majorés ; on a $p(fe) < p(f)$ et $\alpha(p(fe)) = p(e\alpha(f)) = p(e)p(\alpha(f))$, d'où $p(fe) =$ $= p(f)p(\alpha(f))p(e) = p(f)p(e)$. -Supposons que p_0 soit inductif et soit B une sous-classe de S' admettant un a-agrégat; $\alpha(B)$ admet un $\alpha(a)$-agrégat dans S'_0 et l'on a : $p(\overset{\alpha(a)}{\bigcup}\alpha(B)) = \overset{s}{\bigcup}\alpha(p(B))$ où $s = p(\alpha(a))$. Comme la classe $p(B)$ est majorée par $p(a)$ et que $\alpha(p(B))$ admet un s-agrégat, la proposition 7-1-[2] montre que $p(B)$ admet un $p(a)$-agrégat pour lequel $\alpha(\overset{p(a)}{\bigcup} p(B)) = \alpha(p(\overset{a}{\bigcup} B))$. Donc $p(\overset{a}{\bigcup} B) \in \underline{\bigcup}\, p(B)$.

PROPOSITION 5. *Soient S' un groupoïde sous-inductif et S un groupoïde sous-prélocal, p un foncteur inductif strict de S' vers S; alors S' est un groupoïde sous-local.*

DÉMONSTRATION. Soit B une sous-classe de S'_0 admettant $d \in S'_0$ pour c-agrégat et soit $a \in S'_0$ tels que $a \cap d$ soit défini; p étant inductif, on a : $p((a \cap d) \cap d) =$ $= p(a \cap d) \cap \overset{p(c)}{\bigcup} p(B)$ et, en utilisant l'axiome (D) : $p(a \cap d) = \overset{p(c)}{\bigcup} p(a \cap d)p(B)$. Par ailleurs la classe des éléments $a \cap b$, où $b \in B$, étant majorée par c, admet un sous-agrégat d' qui est majoré par $a \cap d$ et $d' = \overset{c}{\bigcup} (a \cap d) \cap b$; on en déduit : $p(d') = \overset{p(c)}{\bigcup} (p(a \cap d) p(B))$, d'où $p(d') = p(d)$ et, puisque p est inductif strict, $d' = d$. Donc S' est sous-local.

DÉFINITION 3. *Soient S et $\tilde{S}$ deux groupoïdes sous-préinductifs. On dit que $\tilde{S}$ est un*
1+ groupoïde quotient (sous)- inductif de *S si $\tilde{S}$ est un groupoïde quotient de S et si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) Le foncteur canonique q de S sur $\tilde{S}$ est (sous)-inductif.

2) Soient $\tilde{f} \in \tilde{S}$, $\tilde{f}' \in \tilde{S}$, $\tilde{g} \in \tilde{S}$, $\tilde{f} < \tilde{g}$, $\tilde{f}' < \tilde{g}$; alors il existe $f \in q^{-1}(\tilde{f})$, $f' \in q^{-1}(\tilde{f}')$ et $g \in q^{-1}(\tilde{g})$ tels que $f < g$ et $f' < g$.

Ces conditions entraînent : $\tilde{f} \cap \tilde{f}' = q(f \cap f')$, où $\tilde{f} < \tilde{g}$, $\tilde{f}' < \tilde{g}$.

THÉORÈME 1. *Soit $\tilde{S}$ un groupoïde quotient d'un groupoïde sous-préinductif S et q le foncteur canonique de S sur $\tilde{S}$; si les conditions 1 et 2 suivantes sont vérifiées, alors il existe une relation d'ordre canonique sur $\tilde{S}$ pour laquelle $\tilde{S}$ est un groupoïde sous-préinductif, quotient inductif de S.*

1) Soient $g \in S$, $f \in S$ avec $g < f$; alors pour tout f' tel que $q(f') = q(f)$, il existe un et un seul $g' < f'$ avec $q(g') = q(g)$.

2 *2) Deux éléments différents de $q^{-1}(e)$, où $e \in \tilde{S}_0$, ne sont pas comparables.*

DÉMONSTRATION. Dans $\tilde{S}$, considérons la relation :

$$\tilde{g} < \tilde{f} \text{ si, et seulement si, il existe } g \in q^{-1}(\tilde{g}) \text{ et } f \in q^{-1}(\tilde{f}) \text{ avec } g < f.$$

Si l'on a $\tilde{g} < \tilde{f} < \tilde{g}$, il existe $g \in q^{-1}(\tilde{g})$, $g_1 \in q^{-1}(\tilde{g})$, $f \in q^{-1}(\tilde{f})$ et $f_1 \in q^{-1}(\tilde{f})$ avec $g_1 < f_1$ et $f < g$; d'après la condition 1, il existe $g' < f$ avec $q(g') = q(g_1)$; par suite $g' < f < g$, d'où $g' = g$ d'après la condition 2 et $\tilde{g} = \tilde{f}$.- Supposons $\tilde{f} < \tilde{g}$ et $\tilde{g} < \tilde{h}$; il existe $h \in q^{-1}(\tilde{h})$, $g \in q^{-1}(\tilde{g})$ et $f \in q^{-1}(\tilde{f})$ avec $f < g < h$, c'est-à-dire $\tilde{f} < \tilde{h}$. Donc la relation considérée est une relation d'ordre.- Soit $\tilde{e} \in \tilde{S}_0$ et $\tilde{f} < \tilde{e}$; comme il existe $f < e$, $q(f) = \tilde{f}$, $q(e) = \tilde{e}$, $q^{-1}(\tilde{f})$ contient une unité, donc $\tilde{f} \in \tilde{S}_0$. Soient $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ deux éléments de $\tilde{S}$ majorés par $\tilde{g}$ et tels que $\alpha(\tilde{f}) = \alpha(\tilde{f}')$; pour tout $g \in q^{-1}(\tilde{g})$, il existe $f < g$, $f' < g$, $q(f) = \tilde{f}$, $q(f') = \tilde{f}'$; comme $\alpha(f) < \alpha(g)$, $\alpha(f') < \alpha(g)$, $q(\alpha(f)) = q(\alpha(f'))$ entraînent $\alpha(f) = \alpha(f')$ d'après la condition 2, on en déduit $f = f'$, d'où $\tilde{f} = \tilde{f}'$.- Soient $\alpha(\tilde{g}) = \beta(\tilde{f})$, $\tilde{g}' < \tilde{g}$, $\tilde{f}' < \tilde{f}$, $\alpha(\tilde{g}') = \beta(\tilde{f}')$, $g \in q^{-1}(\tilde{g})$ et $f \in q^{-1}(\tilde{f})$ avec $\alpha(g) = \beta(f)$; il existe $f' \in q^{-1}(\tilde{f}')$, $f' < f$ et $g' \in q^{-1}(\tilde{g}')$, $g' < g$; des relations $\beta(f') < \beta(f) = \alpha(g)$, $\alpha(g') < \alpha(g)$ et $q(\beta(f')) = q(\alpha(g')) = \alpha(\tilde{g}')$ résulte $\alpha(g') = \beta(f')$ et $g'.f' < gf$, d'où $\tilde{g}'.\tilde{f}' < \tilde{g}.\tilde{f}$. -Soit $\tilde{k} < \tilde{g}.\tilde{f}$; on a $\alpha(\tilde{k}) < \alpha(\tilde{f})$, et il existe $e < \alpha(f)$ avec $q(e) = \alpha(\tilde{k})$; des relations $fe < f$, $g\beta(fe) < g$, $\alpha(q(fe)) = \alpha(\tilde{k})$, on tire :

$$q((g\beta(fe)).(fe)) = q(g\beta(fe)).q(fe) = (\tilde{g}.\tilde{f})\alpha(\tilde{k}) = \tilde{k}.$$

Ceci montre que la relation d'ordre dans $\tilde{S}$ est définie par un foncteur généralisé $\tilde{\varphi}$.- Soient $f \in S$ et $\tilde{f}' < q(f)$; puisqu'il existe $f'_1 < f_1$ avec $q(f'_1) = \tilde{f}'$, $q(f_1) = q(f)$, la condition 1 montre qu'il existe un et un seul $f' < f$ avec $q(f') = \tilde{f}'$; donc la restriction de q à $\varphi(f)$ est un isomorphisme sur $\tilde{\varphi}(q(f))$. Par conséquent $\tilde{S}$ est un groupoïde sous-préinductif, l'intersection de deux éléments $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ majorés par $\tilde{h}$ étant $q(f \cap g)$, où $g < h$, $f < h$, $q(f) = \tilde{f}$, $q(g) = \tilde{g}$ et $q(h) = \tilde{h}$.

COROLLAIRE. *Si S est sous-inductif, alors $\tilde{S}$ est sous-inductif. Si S est sous-local, $\tilde{S}$ est sous-local.* 1

Remarquons que S peut être inductif sans que $\tilde{S}$ le soit.

DÉFINITION 4. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs; on dit que S' est* un groupoïde sous-préinductif (presque) au-dessus de S ou que S'_0 est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de S, *si l'on s'est donné un foncteur* 2 *p de S' vers S vérifiant les axiomes suivants :*

1) p est (sous)-inductif strict.

2) (S, p, S') est une espèce de structures.

L'espèce de structures sous-préinductive S'_0 presque au-dessus de S sera désignée par $\langle S, p, S' \rangle$. Si de plus S et S' sont des groupoïdes (pré)-inductifs, on dira que $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures (pré)-inductive.

Il résulte de cette définition que $p(S')$ est un sous-groupoïde de S; en identifiant $f \in S'$ avec le couple $(p(f), \alpha(f))$ on identifie S' avec l'extension du groupoïde d'opérateurs $p(S')$; le composé de $(p(f), s)$, où $s \in S'_0$, est $\beta(g)$, en désignant par g l'élément de S' tel que $\alpha(g) = s$ et $p(g) = p(f)$.

D'après ce qui précède, pour que $\langle S, p, S' \rangle$ soit une espèce de structures sous-préinductive (resp. sous-préinductive presque au-dessus de S), il faut et il suffit que les conditions a, b, c, d, e (resp. a, b, c, d) suivantes soient vérifiées :

a) Soient $f \in S'$ et $s \in S'_0$ tels que $p(s) = p(\alpha(f))$; alors il existe un et un seul $g \in S'$ tel que $\alpha(g) = s$ et $p(g) = p(f)$.

b) p est compatible avec les structures d'ordre de S et S'.

c) Si $s' < s$, $s'' < s$, $s \in S'_0$, $s' \in S'_0$ et $s'' \in S'_0$, on a : $p(s' \cap s'') = p(s') \cap p(s'')$.

d) $s' < s$ et $p(s') = p(s)$, où $s \in S'_0$ et $s' \in S'_0$, entraînent $s = s'$.

e) Pour toute sous-classe B de S'_0 admettant un e-agrégat, où $e \in S'_0$, il existe $s < \overset{e}{\bigcup} B$ tel que $p(s) \in \underset{\sim}{\bigcup}\, p(B)$.

PROPOSITION 6. *Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductive; la condition $g < f$, où $g \in S'$ et $f \in S'$, est équivalente aux conditions : $\alpha(g) < \alpha(f)$ et $p(g) < p(f)$.* 3

En effet, montrons que ces conditions sont suffisantes. D'après la proposition 3, on a $p(f\alpha(g)) = p(f)p(\alpha(g)) = p(g)$. Les éléments $f\alpha(g)$ et g ont même projection et même unité à droite; par suite ils sont égaux. Donc $g < f$.

CAS PARTICULIER. Si S' est un sous-groupoïde de S et si p est le foncteur injection canonique Id de S' dans S, pour que l'on ait $\langle S, Id, S' \rangle$ il faut et il suffit que S' soit un *sous-groupoïde sous-préinductif* de S. Pour que $\langle S, id, S' \rangle$ soit une espèce de structures sous-préinductive, il faut et il suffit que, de plus : 3) Pour toute sous-classe B de S'_o, la congrégation de B dans S'_o est contenue dans sa congrégation dans S.

DÉFINITION 5. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs et (S, p, S') une*
1+ *espèce de structures; on dit que S' est* étalé dans S par p *ou que p est* un étalement de S' dans S *si la restriction de p à $\varphi'(f)$, pour tout $f \in S'$, est un isomorphisme sur $\varphi(p(f))$.*

PROPOSITION 7. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs; pour qu'un foncteur p de S' dans S soit un étalement, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :*

1) $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive au-dessus de S et $p(\varphi'(f)) = \varphi(p(f))$, pour tout $f \in S'$.

2) (S, p, S') est une espèce de structures, p est un foncteur compatible avec les ordres et la restriction p_o de p à S'_o est un étalement de S'_o dans S_o.

DÉMONSTRATION. Si p est un étalement, p est un foncteur inductif strict et la condition 1 est vérifiée. Supposons 2 vérifiée; pour que p_o soit un étalement, il faut et il suffit que la restriction de p_o à $\varphi'(e)$, pour tout $e \in S'_o$, soit un isomorphisme sur $\varphi(p(e))$; alors p est un foncteur inductif strict d'après la proposition 4; soit $a < p(f)$, où $f \in S'$ il existe :

$$e \in S'_o, \quad e < a(f), \quad p(e) = \alpha(a) < p(\alpha(f))$$

et l'élément fe est tel que $p(fe) = p(f)p(e) = a$, donc $p(\varphi'(f)) = \varphi(p(f))$.

COROLLAIRE. *Si S est un groupoïde sous-inductif, alors S' est un groupoïde sous-inductif.*

Si p est un étalement de S' dans S, nous dirons aussi que $\langle S, p, S' \rangle$ est *une espèce de structures sous-préinductive étalée au-dessus de S.*

DÉFINITION 6. *Soient $\langle S, p, S' \rangle$ et $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$ deux espèces de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de S; on dit que $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$ est une* sous-espèce sous-préinductive de $\langle S, p, S' \rangle$ (presque) au-dessus de S *si elle vérifie les conditions :*

1) (S, p_1, S'_1) *est une sous-espèce de structures de* (S, p, S').

2) S'_1 *est muni de la structure d'ordre induite par celle de* S'.

PROPOSITION 8. *Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de* S*; pour qu'une sous-espèce de structures* (S, p_1, S'_1) *de* (S, p, S') *soit une sous-espèce sous-préinductive (presque) au-dessus de* S*, il faut et il suffit que* $\langle S', Id, S'_1 \rangle$ *soit (presque) au-dessus de* S'.

DÉMONSTRATION. Montrons que la condition est nécessaire. Soient e' et e'' des unités de S'_1 majorées par e dans S'_1 ; alors on a : $p(e' \cap e'') = p(e') \cap p(e'')$; de plus les éléments e' et e'' ont une intersection e_1 dans S'_1 telle que : $e_1 < e' \cap e''$ et

$$p_1(e_1) = p_1(e') \cap p_1(e'') = p(e' \cap e'').$$

Comme p_1 est la restriction à S'_1 de l'application sous-inductive stricte p, il en résulte $e_1 = e' \cap e''$, d'où $e' \cap e'' \in S'_1$.- Soit $f \in S'_1$ et $e \in S'_1$ avec $e < \alpha(f)$; dans S'_1, il existe un élément induit par f sur e et cet élément doit être identique à fe. Donc S'_1 est un sous-groupoïde sous-préinductif de S'.

PROPOSITION 9. *Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures sous-préinductive et* S'' *un sous-groupoïde sous-préinductif de* S' *tel que tout élément de* S' *soit majoré par un élément de* S''*. Alors* $\langle S, p, S'' \rangle$ *est une sous-espèce de structures sous-préinductive de* $\langle S, p, S' \rangle$.

En effet, soient $f \in S''$ et $e \in S''_0$ avec $p(e) = p(\alpha(f))$, il existe $g \in S'$ et $f' \in S''$ tels que

$$p(g) = p(f),\ \alpha(g) = e \text{ et } g < f';$$

il en résulte $g = f'e \in S''$, donc (S, p, S'') est une espèce de structures.

COROLLAIRE. *Si* S'' *est un sous-groupoïde saturé par induction dans* S'*, qui est une base faible de* S'*, on a* $\langle S, p, S'' \rangle$. 1

THÉORÈME 2 (transitivité). *Soient* S, S' *et* S'' *trois groupoïdes sous-préinductifs,* p *un foncteur (sous)-inductif de* S' *vers* S *et* p' *un foncteur (sous)-inductif de* S'' *vers* S'*; alors* pp' *est un foncteur (sous)-inductif de* S'' *vers* S*. Si* p *et* p' *sont sous-inductifs stricts, alors* pp' *est sous-inductif strict.*

DÉMONSTRATION. Le foncteur composé pp' est compatible avec les ordres de S'' et S. Soient $s \in S''_0, s' \in S''_0, s'' \in S''_0, s' < s$ et $s'' < s$ on a :

$$p'(s') \cap p'(s'') = p'(s' \cap s'')$$

et

$$p'(s') < p'(s),\ p'(s'') < p'(s);$$

puisque p est sous-inductif, il en résulte :

$$pp'(s') \cap pp'(s'') = p(p'(s') \cap p'(s'')) = pp'(s' \cap s''),$$

et pp' est sous-inductif.- Si p et p' sont sous-inductifs stricts, les relations $f < f'$ et $pp'(f) = pp'(f')$, où $f \in S''$ et $f' \in S''$, entraînent $p'(f) < p'(f')$, d'où $p'(f) = p'(f')$ et $f = f'$. Donc pp' est sous-inductif strict.- Supposons p et p' inductifs et soit A une sous-classe de S''_o admettant un e-agrégat; on a : $p'(\overset{e}{\bigcup} A) = \overset{p'(e)}{\bigcup} p(A)$ et

$$pp'(\overset{e}{\bigcup} A) = p(\overset{p'(e)}{\bigcup} p'(A)) = \overset{pp'(e)}{\bigcup} pp'(A) \in \underline{\bigcup}\, pp'(A);$$

par suite pp' est inductif.

COROLLAIRE. *Soient $\langle S, p, S' \rangle$ et $\langle S', p', S'' \rangle$ deux espèces de structures sous-préinductives telles que (S', p', S'') soit une espèce de superstructures au-dessus de (S, p, S'); alors $\langle S, pp', S'' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive. Si p et p' sont inductifs, pp' l'est également. Si p et p' sont des étalements, alors pp' est un étalement.*

PROPOSITION 10. *Soient S, S' et S'' des groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif strict de S' dans S et p' un foncteur de S'' dans S' compatible avec les ordres. Si pp' est un foncteur sous-inductif, alors p' est sous-inductif. Si de plus S' est sous-inductif, p et pp' inductifs, alors p' est inductif.*

DÉMONSTRATION. Soient $e \in S''_o$, $e' \in S''_o$, $e'' \in S''_o$ tels que $e' < e$ et $e'' < e$; on a :

$$p'(e' \cap e'') < p'(e') < p'(e) \text{ et } p'(e' \cap e'') < p'(e).$$

Il en résulte :

$$pp'(e' \cap e'') = pp'(e') \cap pp'(e'')) = p(p'(e') \cap p'(e'')),$$

d'où, puisque p est sous-inductif strict, $p'(e' \cap e'') = p'(e') \cap p'(e'')$.- Si p est inductif strict et pp' inductif, soit B une sous-classe de S''_o admettant un e-agrégat; on a $p'(\overset{e}{\bigcup} B) < p'(e)$ et la classe $p'(\overset{e}{\bigcup} B)$ admet un $p'(e)$-agrégat b dans le groupoïde sous-inductif S' tel que : $p(b) = \overset{pp'(e)}{\bigcup} pp'(B) = pp'(\overset{e}{\bigcup} B)$. Donc $b = p'(\overset{e}{\bigcup} B)$ et p' est un foncteur inductif.

DÉFINITION 7. *Soient $\langle S, p, S' \rangle$ et $\langle S_1, p_1, S'_1 \rangle$ deux espèces de structures sous-préinductives (presque) au-dessus de S et S_1; on appelle* application covariante (sous)-inductive de $\langle S, p, S' \rangle$ dans $\langle S_1, p_1, S'_1 \rangle$ *et on note $\langle \chi_o, \psi \rangle$ une application covariante (χ_o, ψ) de (S, p, S') dans (S_1, p_1, S'_1) telle que ψ et χ_o soient (sous)-inductifs. Si l'espèce de structures (S_1, p_1, S'_1) est sous-jacente à (S, p, S') par une application covariante (sous)-inductive, on dit que l'espèce de structures sous-préinductive $\langle S_1, p_1, S'_1 \rangle$ est sous-jacente à $\langle S, p, S' \rangle$.*

PROPOSITION 11. *Si* $\langle \chi_o, \psi \rangle$ *est une application covariante (sous)-inductive de l'espèce de structures sous-préinductive* $\langle S, p, S' \rangle$ *dans l'espèce de structures sous-préinductive* $\langle S_1, p_1, S'_1 \rangle$ *, le foncteur* χ *correspondant est (sous)-inductif.*

En effet, puisque ψ et χ_o sont compatibles avec les ordres le foncteur χ (proposition 1-3-II[1]) est aussi compatible avec les ordres et par suite (sous)-inductif d'après la proposition 4.

PROPOSITION 12. *Soit* R_o *une classe d'espèces de structures sous-préinductives et* R *la classe des applications covariantes (sous)-inductives d'un élément de* R_o *dans un élément de* R_o*. Alors* R *est une catégorie pour la loi de composition :*

$(\langle \chi'_o, \psi' \rangle, \langle \chi_o, \psi \rangle) \to \langle \chi'_o \chi_o, \psi' \psi \rangle$ *, si, et seulement si, les foncteurs*
ψ *et* ψ' *sont composables ainsi que les applications* χ_o *et* χ'_o. 1

Cette proposition résulte de la proposition 3-3-II [1] et du théorème 2.

DÉFINITION 8. *Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de* S*; une espèce de structures sous-préinductive* $\langle S', p', S'' \rangle$ *(presque) au-dessus de* S' *sera appelée* espèce de superstructures sous-préinductive (presque) au-dessus de $\langle S, p, S' \rangle$ *si* $\langle S, p, p'(S') \rangle$ *est une sous-espèce de structures sous-préinductive de* $\langle S, p, S' \rangle$.

PROPOSITION 13. *Si* $\langle S', p', S'' \rangle$ *est une espèce de superstructures sous-préinductive (presque) au-dessus de* $\langle S, p, S' \rangle$ *, alors* $\langle S, pp', S'' \rangle$ *est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de* S*, à laquelle* $\langle S, p, S' \rangle$ *est sous-jacente.*

Cette proposition résulte du théorème 1-3-II [1] et du théorème 2.

DÉFINITION 9. *Soient* S *et* S' *deux groupoïdes sous-préinductifs,* ψ *et* ψ' *deux foncteurs (sous)-inductifs de* S *vers* S'*; on appelle* transformation naturelle (sous)-inductive de ψ vers ψ', *et on note* $\langle \psi', \tau, \psi \rangle$, *une transformation naturelle* (ψ', τ, ψ) *telle que* τ *soit une application (sous)-inductive de* S_o *dans la classe sous-préinductive* S'.

PROPOSITION 14. *Soient* S *et* S' *deux groupoïdes sous-préinductifs,* ψ *et* ψ' *deux foncteurs de* S *vers* S' *et* (ψ', τ, ψ) *une transformation naturelle de* ψ *vers* ψ'*; si* ψ *ou* ψ' *est (sous)-inductif et si* τ *est une application (sous)-inductive, alors* (ψ', τ, ψ) *est une transformation naturelle (sous)-inductive.*

DÉMONSTRATION. Soient $f' < f$, $f \in S$ et $f' \in S$; si ψ et τ sont sous-inductifs :

$$\psi'(f') = \tau(\beta(f'))\psi(f')\tau(\alpha(f'))^{-1} < \tau(\beta(f))\psi(f)\tau(\alpha(f))^{-1} = \psi'(f).$$

Soient e' et e'' deux unités de S majorées par $e \in S_o$; les relations $\tau(e') < \tau(e)$ et

$\tau(e'') < \tau(e)$ entraînent :

$$\psi'(e'e) = \beta(\tau(e'e)) = \beta(\tau(e) \cap \tau(e')) = \beta(\tau(e)) \cap \beta(\tau(e')) = \psi'(e)\psi'(e')$$

donc ψ' est sous-inductif.- Supposons ψ et τ inductifs; soit B une sous-classe de S_o admettant un e-agrégat; on a :

$$\psi'(\overset{e}{\bigcup} B) = \beta(\tau(\overset{e}{\bigcup} B)) = \beta(\overset{\tau(e)}{\bigcup_{b \in B}} \tau(b)) = \overset{\tau(e)}{\bigcup_{b \in B}} \beta(\tau(b)) = \overset{\tau(e)}{\bigcup} \psi'(B);$$

donc ψ' est inductif. La proposition s'en déduit.

1 PROPOSITION 15. *La classe $N\langle S', S\rangle$ des transformations naturelles (sous)-inductives entre foncteurs (sous)-inductifs du groupoïde sous-préinductif S vers le groupoïde sous-préinductif S' est une catégorie pour la multiplication longitudinale (proposition 7-2-II* [1]).

DÉMONSTRATION. Soient $\langle \psi'', \tau', \psi' \rangle \in N\langle S', S\rangle$ et $\langle \psi', \tau, \psi \rangle \in N\langle S', S\rangle$; si e' et e'' sont deux unités de S majorées par $e \in S_o$, on a :

$$(\tau'.\tau)(e'e'') = \tau'(e'e'').\tau(e'e'') = (\tau'(e') \cap \tau'(e'')).(\tau(e') \cap \tau(e'')).$$

Comme $\tau(e')$ et $\tau(e'')$, $\tau'(e')$ et $\tau'(e'')$ sont compatibles, on a aussi :

$$\tau'(e') \cap \tau'(e'') = \tau'(e')\alpha(\tau'(e'')) = \tau'(e')\beta(\tau(e') \cap \tau(e'')),$$

et $\tau(e') \cap \tau(e'') = \tau(e')\alpha(\tau(e''))$ d'où :

$$(\tau'.\tau)(e'e'') = \tau'(e')\tau(e')\alpha(\tau(e'')) = (\tau'.\tau)(e') \cap (\tau'.\tau)(e'').$$

Par suite $\tau'.\tau$ est une application sous-inductive.- Supposons τ et τ' inductives et soit E une sous-classe de S_o admettant un a-agrégat, où $a \in S_o$. Posons :

$$b = (\tau'.\tau)(\overset{a}{\bigcup} E) = \overset{\tau'(a)}{\bigcup} \tau'(E).\overset{\tau(a)}{\bigcup} \tau(E) < \tau'.\tau(a);$$

pour tout $e \in E$, on a $\tau'(e)\tau(e) < b$; la classe $(\tau'.\tau)(E)$ admettant pour unité à droite $\alpha(\tau(E))$, $\alpha((\tau'.\tau)(E))$ admet $\alpha(b)$ pour $\alpha(\tau'.\tau(a))$-agrégat; il résulte de la proposition 5-1 [2] que $(\tau'.\tau)(E)$ admet b pour $(\tau'.\tau)(a)$-agrégat, donc $\tau'.\tau$ est une application inductive. La proposition s'en déduit.

2. Groupoïdes inductifs induits et élargissements inductifs.

THÉORÈME 1. *Soient S, S' et $\bar{S}$ trois groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de S' vers S et κ un foncteur sous-inductif de $\bar{S}$ vers S; alors le groupoïde induit $\kappa^*(S', p)$ (définition 1-1-III* [1]) *est un sous-groupoïde sous-préinductif de $S' \times \bar{S}$ et les foncteurs canoniques $\bar{p}$ et η de $\kappa^*(S', p)$ vers $\bar{S}$ et S' sont sous-inductifs. Si p et κ sont inductifs, $\kappa^*(S', p)$ est une partie sous-inductive faible de $S' \times \bar{S}$ et les foncteurs $\bar{p}$ et η sont inductifs.*

DÉMONSTRATION. Soient (e', ε') et (e'', ε'') deux unités de $\kappa^*(S', p)$ majorées par $(e, \varepsilon) \in \kappa^*(S', p)_0$; elles admettent pour intersection $a = (e' \cap e'', \varepsilon' \cap \varepsilon'')$ dans $S' \times \overline{S}$; comme :

$$p(e' \cap e'') = p(e') \cap p(e'') = \kappa(\varepsilon') \cap \kappa(\varepsilon'') = \kappa(\varepsilon' \cap \varepsilon''),$$

a appartient à $\kappa^*(S', p)$ et $\overline{p}(a) = \varepsilon' \cap \varepsilon''$.- Soient $(h, f) \in \kappa^*(S', p)$ et $(e, \varepsilon) < \alpha(h, f)$; on a :

$$p(he) = p(h) p(e) = \kappa(f) \kappa(\varepsilon) = \kappa(f \varepsilon),$$

d'où $(he, f\varepsilon) \in \kappa^*(S', p)$. Donc $\kappa^*(S', p)$ est un sous-groupoïde sous-préinductif de $S' \times \overline{S}$, $\overline{p}$ et κ sont sous-inductifs.- Supposons p et κ inductifs; soit B une sous-classe de $\kappa^*(S', p)$ majorée dans $\kappa^*(S', p)$ et admettant un (e, ε)-agrégat (c, γ) dans $S' \times \overline{S}$; comme $c = \overset{e}{\bigcup} \eta(B)$ et $\gamma = \overset{\varepsilon}{\bigcup} \overline{p}(B)$, on trouve :

$$p(c) = \overset{p(e)}{\bigcup} p\eta(B) = \overset{\kappa(\varepsilon)}{\bigcup} \kappa\overline{p}(B) = \kappa(\gamma) \text{ et } (c, \gamma) \in \kappa^*(S', p).$$

COROLLAIRE 1. *Soit S'' un groupoïde sous-préinductif, η' et p' des foncteurs de S'' vers S' et $\overline{S}$ tels que $p\eta' = \kappa p'$. Si p, κ, η' et p' sont (sous)-inductifs, alors le foncteur canonique $\overline{\eta}'$ de S'' vers $\kappa^*(S', p)$ (théorème 1-1-III [1]) est (sous)-inductif. Si de plus, p' ou η' est un foncteur sous-inductif strict, alors $\overline{\eta}'$ est sous-inductif strict.*

DÉMONSTRATION. Par définition $\overline{\eta}'(k) = (\eta'(k), p'(k))$, où $k \in S''$. Soient k' et k'' des éléments de S'' majorés par k; on a :

$$\eta'(k' \cap k'') = \eta'(k') \cap \eta'(k''), \; p'(k' \cap k'') = p'(k') \cap p'(k''),$$

d'où
$$\overline{\eta}'(k' \cap k'') = \overline{\eta}'(k') \cap \overline{\eta}'(k'').$$

- Supposons p' et η' inductifs; soit A une sous-classe de S'' admettant un k-agrégat; on a :

$$\eta'(\overset{k}{\bigcup} A) = \overset{\eta'(k)}{\bigcup} \eta'(A) \text{ et } p'(\overset{k}{\bigcup} A) = \overset{p'(k)}{\bigcup} p'(A);$$

par suite :
$$\overline{\eta}'(\overset{k}{\bigcup} A) = (\overset{\eta'(k)}{\bigcup} \eta'(A), \overset{p'(k)}{\bigcup} p'(A)) \in \underline{\bigcup} \overline{\eta}'(A).$$

COROLLAIRE 2. *Si S' et $\overline{S}$ sont (sous)-inductifs (resp. (sous)-prélocaux) et p et κ inductifs, alors $\kappa^*(S', p)$ est un groupoïde (sous)-inductif (resp. (sous)-prélocal) pour l'ordre produit.*

Remarquons que, si S, S' et $\overline{S}$ sont des groupoïdes préinductifs, il n'en résulte pas que $\kappa^*(S', p)$ est préinductif; pour celà, il suffirait que p et κ appliquent toute intersection finie sur l'intersection des images.

COROLLAIRE 3. *Si $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive (presque)* *au-dessus de S et si κ est (sous)-inductif, alors $\langle \overline{S}, \overline{p}, \kappa^*(S', p) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de $\overline{S}$. Si p est un étalement et κ un foncteur sous-inductif, $\overline{p}$ est un étalement.*

En effet, si p est un étalement et si κ est sous-inductif, des relations

$$(h', f') < (h, f) \text{ et } \overline{p}(h', f') = \overline{p}(h, f),$$

où $(h, f) \in \kappa^*(S', p)$ et $(h', f') \in \kappa^*(S', p)$, résulte $f' = f$, d'où $p(h') = p(h) = \kappa(f)$. Par suite $h = h'$ et $\overline{p}$ est un étalement. Le reste du corollaire se déduit du corollaire 3 du théorème 1-1-III [1].

COROLLAIRE 4. *Si $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de S et si q est une application (sous)-inductive d'une classe sous-préinductive A dans S_0, l'espèce de structures $(q^*(S), p', q^*(S'))$ induite de S est une*
1 *espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de $q^*(S)$* (déf. 3-1-III [1]).

PROPOSITION 1. *Soient $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductive, $\overline{S}$ un groupoïde sous-préinductif et $\langle \kappa', \theta, \kappa \rangle \in N \langle S, \overline{S} \rangle$ une transformation naturelle sous-inductive telle que $\theta(S_0)$ soit contenu dans $p(S')$. Alors il existe un foncteur sous-inductif π de $\kappa^*(S', p)$ vers $\kappa'^*(S', p)$ et une transformation naturelle sous-inductive $\langle \eta' \pi, \tau, \eta \rangle$, où η et η' sont les foncteurs canoniques de $\kappa^*(S', p)$ et $\kappa'^*(S', p)$ vers S', tels que : $p\tau = \theta \overline{p}$. Si p, κ, κ' et θ' sont inductifs, alors π et τ le sont aussi.*

DÉMONSTRATION. Soient π et τ les applications construites à la proposition 6-1-III [1]; soient $(h, f) \in \kappa^*(S', p)$ et $(h_1, f_1) \in \kappa^*(S', p)$; la relation $(h_1, f_1) < (h, f)$ entraîne

$$f_1 < f,\ \kappa'(f_1) < \kappa'(f),\ \theta(\alpha(f_1)) < \theta(\alpha(f)),$$

d'où $\pi(h_1, f_1) < \pi(h, f)$.- Soient (e_1, ε_1) et (e_2, ε_2) deux unités de $\kappa^*(S', p)$ majorées par une unité (e, ε); les éléments

$$\tau(e_1 e_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2) = (\theta(\varepsilon_1 \varepsilon_2), e_1 e_2) \text{ et } (\theta(\varepsilon_1), e_1) \cap (\theta(\varepsilon_2), e_2)$$

de S' sont induits par $(\theta(\varepsilon), e)$ et ont $e_1 e_2$ pour unité à droite; ils sont donc égaux et τ est sous-inductif; comme $\pi(e, \varepsilon) = (\beta(\tau(e, \varepsilon)), \varepsilon)$, il en résulte que π est sous-inductif.- Supposons p et $\langle \kappa', \theta, \kappa \rangle$ inductifs; soit (C, Γ) une sous-classe de $(\kappa^*(S', p))_0$ admettant un a-agrégat, où $a = (e, \varepsilon)$; on a :

$$\tau(\overset{a}{\bigcup}(C, \Gamma)) = \tau(\overset{e}{\bigcup} C, \overset{\varepsilon}{\bigcup} \Gamma) = (\theta(\overset{\varepsilon}{\bigcup} \Gamma), \overset{e}{\bigcup} C) = \overset{a}{\bigcup}(\theta(\Gamma), C) = \overset{a}{\bigcup} \tau(C, \Gamma).$$

Donc τ, et par suite π, sont inductifs.

DÉFINITION 1. *Soit $\overline{S}$ un groupoïde sous-préinductif et S une partie sous-inductive faible de $\overline{S}$; on dit que $\overline{S}$ est une* extension inessentielle (sous)-inductive $\langle \kappa, \overline{S} \rangle$ de *S s'il existe une extension inessentielle (κ, S') de S telle que S' soit un sous-*

groupoïde sous-préinductif de $\overline{S}$ *et une base de* $\overline{S}$ *et que* κ *soit un foncteur (sous)-inductif.*

PROPOSITION 2. *Soit* $\langle \kappa, \overline{S} \rangle$ *une extension inessentielle sous-inductive d'un groupoïde sous-local* S *et* S'' *le sous-pseudogroupe faible engendré dans* $\overline{S}$ *par la source* 1
S' *de* κ*; alors* κ *peut être prolongé en un foncteur sous-inductif* κ' *de* S'' *sur* S*, dont la restriction à* S' *est* κ*. Si* S' *est un groupoïde sous-local et si* κ *est inductif,* κ' *est inductif.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $f'' \in S''$, il existe $f' \in S'$ tel que f'' soit un f'-agrégat d'une sous-classe de S'; par suite la classe $f''^{>}$ des éléments $f \in S'$ tels que $f < f''$ admet f'' pour f'-agrégat dans $\overline{S}$; la classe $\kappa(f''^{>})$ étant majorée par $\kappa(f') \in S$ admet un $\kappa(f')$-agrégat dans S, que nous désignerons par $\kappa'(f'')$. Comme, si $e \in S'_0$, 2
$e < \alpha(f'')$, l'élément $f'e$ appartient à S', on a $(\alpha(f''))^{>} = \alpha(f''^{>})$, d'où $\kappa'(\alpha(f'')) = \alpha(\kappa'(f''))$.- Si f'' et $g'' < g'$ sont deux éléments composables de S'', alors $\kappa'(g'').\kappa'(f'')$ est défini et appartient à $\bigcup(\kappa(g''^{>})\kappa(f''^{>}))$. Pour tout $g \in g''^{>}$ et tout $f \in f''^{>}$, on a $\alpha(g) < \beta(f')$ et $\beta(f) < \overline{\beta(f')}$; donc $e = \alpha(g) \cap \beta(f) \in S'$ et $gf = (g'e).(ef') \in S'$. Il en résulte

$$\kappa(e) = \alpha(\kappa(g)) \cap \beta(\kappa(f)) \text{ et } \kappa(g)\kappa(f) = \kappa(g)\kappa(e)\kappa(f) = \kappa(gf),$$

d'où :

$$\kappa(g)\kappa(f) \in \kappa((g''f'')^{>}) \text{ et } \kappa'(g'').\kappa'(f'') = \kappa'(g''.f'').$$

Par conséquent κ' est un foncteur de S'' vers S.- Soient e''_1 et e_2 deux unités de S'' majorées par $e' \in S'_0$; pour tout $e_1 < e''_1$ et tout $e_2 < e''_2$, on a $\kappa(e_1)\kappa(e_2) = \kappa(e_1 e_2)$; on en déduit :

$$\kappa'(e''_1)\kappa'(e''_2) = \overset{\kappa(e')}{\bigcup}\kappa(e''^{>}_1)\overset{\kappa(e')}{\bigcup}\kappa(e''^{>}_2) = \overset{\kappa(e')}{\bigcup}\kappa((e''_1 e''_2)^{>}) = \kappa'(e''_1 e''_2)$$

et κ' est sous-inductif.- Si κ est inductif, soit E'' une sous-classe de S''_0 admettant un e'-agrégat a''; pour tout $a \in a''^{>}$, on trouve, si S' est sous-local, $a = aa'' = \overset{e'}{\bigcup} E''a$, d'où :

$$\kappa'(a'') = \overset{\kappa(e')}{\bigcup}\kappa(a''^{>}) = \overset{\kappa(e')}{\bigcup}\kappa(E''^{>}) = \overset{\kappa(e')}{\bigcup}\kappa'(E''),$$

c'est-à-dire que κ' est inductif.

COROLLAIRE. *Si* S *est un groupoïde local complet, alors* κ *peut être prolongé en un foncteur inductif* $\overline{\kappa}$ *tel que* $(\overline{\kappa}, \overline{S})$ *soit une extension inessentielle de* S.

Démonstration analogue à celle de la proposition.

THÉORÈME 2. *Soient* S, S' *et* $\overline{S}$ *des groupoïdes sous-préinductifs,* $\langle \kappa, \overline{S} \rangle$ *une extension inessentielle inductive de* S, $\overline{\kappa}$ *un foncteur inductif de* $\overline{S}$ *sur* S *dont la restriction à la source de* κ *est* κ *et* p *un étalement de* S' *dans* S*. Alors* $\langle \eta, \overline{\kappa}^*(S', p) \rangle$ *est* *une extension inessentielle inductive de S', η désignant le foncteur canonique de $\kappa^*(S', p)$ sur S'.*

DÉMONSTRATION. Soit S_1 le sous-groupoïde sous-préinductif de $\overline{S}$ source de κ; d'après le théorème 2-1-III [1], $(\eta, \kappa^*(S', p))$ et $(\overline{\eta}, \overline{\kappa}^*(S', p))$, où $\overline{\eta}$ est la projection canonique de $\overline{\kappa}^*(S', p)$ sur S', sont des extensions inessentielles de S' (on identifie $f' \in S'$ avec $(f', p(f')) \in \kappa^*(S', p)$); d'après la proposition 1-1-III [1], $\kappa^*(S', p)$ s'identifie au groupoïde induit $Id^*(\overline{\kappa}^*(S', p), \overline{p}')$, où Id est le foncteur injection de S_1 dans $\overline{S}$ et $\overline{p}'$ le foncteur canonique de $\overline{\kappa}^*(S', p)$ vers $\overline{S}$; de la relation $\langle \overline{S}, Id, S_1 \rangle$ et du corollaire 3 du théorème 1, on déduit que $\kappa^*(S', p)$ s'identifie à un sous-groupoïde sous-préinductif de $\overline{\kappa}^*(S', p)$.- Soient e_1 et e_2 deux unités de S', majorées par $e \in S'_0$; on a :

$$p(e_1 e_2) = p(e_1) p(e_2);$$

si E est une sous-classe de S'_0 majorée par e et admettant un e-agrégat dans S', on a

$$p(\overset{e}{\bigcup} E) = \overset{p(e)}{\bigcup} p(E);$$

S_1 étant une partie sous-inductive faible de $\overline{S}$, il en résulte que S' est une partie sous-inductive faible de $\overline{\kappa}^*(S', p)$.- Soit $(h, f) \in \overline{\kappa}^*(S', p)$; il existe une sous-classe F de S_1 telle que $f \in \bigcup F$; $\overline{\kappa}$ étant inductif, on a $p(h) = \overline{\kappa}(f) = \overset{\kappa(f)}{\bigcup} \kappa(F)$. Puisque p est un étalement de S' dans S, pour tout $f' \in F$, il existe $h' < h$ tel que :

$$p(h') = \kappa(f') < \overline{\kappa}(f) = p(h);$$

la classe K des éléments (h', f') est majorée par (h, f); soit (h_1, f_1) un majorant de K dans $\overline{\kappa}^*(S', p)$ vérifiant $(h_1, f_1) < (h, f)$; on trouve :

$$F < f_1 < f, \text{ d'où } f = \overset{f}{\bigcup} F = f_1,$$

$$p(h_1) = \kappa(f) = p(h), h_1 < h.$$

Donc $h = h_1$ et $(h, f) \in \underline{\bigcup} K$. Ceci prouve que $\kappa^*(S', p)$ est une base de $\overline{\kappa}^*(S', p)$.

DÉFINITION 2. *Soient S et $\overline{S}$ deux groupoïdes sous-préinductifs; on dit que $\overline{S}$ est un* élargissement inductif de S *et on note $S \overline{\lessdot} \overline{S}$, si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1) S est saturé par induction dans $\overline{S}$.

2) $\overline{S}$ admet pour base un sous-groupoïde sous-préinductif S_1 qui est un élargissement de S (définition §2-II [1]).

Remarquons que si S_1 est un élargissement d'un groupoïde S, alors S_1^+ est un élargissement inductif de S^+ où $S_1^+ = S_1 + \{0\}$ et $S^+ = S + \{0\}$, muni de l'ordre

$$f' < f \text{ si, et seulement si, } f' = f \text{ ou } f' = 0.$$

PROPOSITION 3. *Soient* S *et* $\overline{S}$ *deux groupoïdes sous-préinductifs tels que* $S \overline{\overline{\leftarrow}} \overline{S}$; *alors l'élargissement* S_1 *de* S *base de* $\overline{S}$ *est saturé par induction dans* $\overline{S}$ *et* $\overline{S}$ *est la composante inductive de* S *dans* $\overline{S}$.

En effet, soit $g \in S_1$ et $g' < g$; il existe $f \in S_1$ tel que $\alpha(f) = \beta(g)$ et $\beta(f) \in S$; S étant saturé par induction dans $\overline{S}$, on a $\beta(f\beta(g')) \in S_0$; comme S_1 est un sous-groupoïde sous-préinductif de $\overline{S}$, on trouve

$$f\beta(g') = \beta(f\beta(g'))f \in S_1, \beta(g') \in S_1 \text{ et } g' = \beta(g')g \in S_1.$$

PROPOSITION 4. *Pour qu'un groupoïde sous-préinductif* $\overline{S}$ *soit un élargissement inductif d'un sous-pseudogroupe* S, *il faut et il suffit que* S *soit un sous-groupoïde plein saturé par induction et que la composante inductive de* S *dans* $\overline{S}$ *soit* $\overline{S}$.

DÉMONSTRATION. Si la composante inductive (définition 10 - 2 [2]) de S dans $\overline{S}$ est $\overline{S}$, la composante inductive faible S' de S dans $\overline{S}$ est un élargissement de S et une base de $\overline{S}$.- Inversement, soit $S \overline{\overline{\leftarrow}} \overline{S}$ et S_1 l'élargissement de S base de $\overline{S}$. Soit $g \in \overline{S}$ tel que $\alpha(g) \in S$ et $\beta(g) \in S$; par hypothèse, il existe une sous-classe F de S_1 admettant g pour sous-agrégat; pour tout $f \in F$, on a $\alpha(f) < \alpha(g)$ et $\beta(f) < \beta(g)$; comme S est plein dans S_1 et saturé par sous-agrégation dans $\overline{S}$, il en résulte $F \subset S$ et $g \in S$. Donc S est un sous-groupoïde plein de $\overline{S}$. La composante inductive faible de S dans $\overline{S}$ contenant S_1 est une base de $\overline{S}$.

PROPOSITION 5. *Pour qu'un groupoïde sous-préinductif* $\overline{S}$ *soit un élargissement inductif d'un sous-groupoïde* S, *il faut et il suffit qu'il existe un atlas faible complet* F *de* $\overline{S}$ *tel que* $\overline{a(F)} = \overline{S}$ *et* $b(F) = S$, *où* $\overline{a(F)}$ *est le sous-pseudogroupe de* $\overline{S}$ *engendré par* $a(F)$; *dans ce cas,* F *est saturé par induction.*

DÉMONSTRATION. S'il existe un atlas faible complet F vérifiant ces conditions, d'après la ; proposition 6 - 3 [2], $a(F)$ est un élargissement de $b(F)$ et $b(F)$ est saturé par induction dans $a(F)$; comme $a(F)$ est un sous-pseudogroupe faible de $\overline{S}$ base de $\overline{S}$, $a(F)$, et par suite aussi $b(F)$, est saturé par induction dans $\overline{S}$. Donc on a $S \overline{\overline{\leftarrow}} \overline{S}$.- Inversement, supposons $S \overline{\overline{\leftarrow}} \overline{S}$. Soit S_1 l'élargissement de S base de $\overline{S}$ et F la classe des éléments $f \in S_1$ tels que $\beta(f) \in S$; comme S_1 et S sont saturés par induction dans $\overline{S}$, F est aussi saturé par induction; si $f'' f^{-1} f'$ est défini, où $f \in F$, $f' \in F$, $f'' \in F$, on a $f'' f^{-1} f' \in S_1$ et $\beta(f'' f^{-1} f') < \beta(f'')$, d'où $f'' f^{-1} f' \in F$. Il en résulte que F est un atlas faible complet de $\overline{S}$ tel que $a(F)$ soit contenu dans S_1. Pour tout $g \in S_1$, il existe $f \in F$ avec $\alpha(f) = \beta(g)$; il en résulte $g = f^{-1}.(f.g) \in F^{-1}F = a(F)$ et $\overline{a(F)} = \overline{S}$.- Comme $\beta(F) \subset F$, la proposition 6 - 3 [2] montre que $b(F)$ est le sous-groupoïde plein de $a(F)$ ayant $\beta(F)$ pour classe de ses unités, donc $b(F) = S$.

COROLLAIRE 1. *Pour que l'on ait* $S \overline{\leqslant} \overline{S}$, *où* S *est un sous-pseudogroupe de* $\overline{S}$, *il faut et il suffit qu'il existe un atlas complet* $\overline{F}$ *de* $\overline{S}$ *avec* $\overline{a}(\overline{F}) = \overline{S}$ *et* $b(\overline{F}) = S$.

En effet, la condition est évidemment suffisante.- Si on a $S \overline{\leqslant} \overline{S}$, l'atlas complet $\overline{F}$ engendré par l'atlas F construit dans la proposition est tel que $\beta(\overline{F}) = S_o$; comme $\beta(\overline{F}) \subset \overline{F}$, on a $\overline{b}(\overline{F}) = b(\overline{F})$ et $b(\overline{F})$ est le sous-groupoïde plein de S ayant S_o pour classe de ses unités, d'où $b(\overline{F}) = S$.

COROLLAIRE 2. *Soit* $S \overline{\leqslant} \overline{S}$; *alors* $\overline{S}_o$ *s'identifie à la classe des atlas faibles complets* H *de* $\overline{S}$ *tels que* $H \overset{\cdot}{<} F$ (*th.* 2-4 [2] *où* $\overset{\cdot}{<}$ *est noté* $\ll$) *et que* $\bigcup \alpha(H) \neq \emptyset$.

DÉMONSTRATION. Soit $s \in \overline{S}_o$ et H la classe des éléments $h \in S_1$ tels que $\alpha(h) < s$ et $\beta(h) \in S$; puisque H est saturé par induction, H est un atlas faible contenu dans F; $a(F)$ étant une base de $\overline{S}$, la classe $\alpha(H)$ admet s pour sous-agrégat dans $\overline{S}$ et $b(H)$ est une composante inductive faible de S. Donc $H \overset{\cdot}{<} F$.- Inversement si H' est un atlas tel que $H' \overset{\cdot}{<} F$ et que $\alpha(H')$ admette un sous-agrégat s, alors H' est saturé par induction dans F, donc s'identifie à l'atlas H construit ci-dessus à partir de s.

THÉORÈME 3. *Dans une classe* K *de groupoïdes sous-préinductifs la relation* $S \overline{\leqslant} \overline{S}$ *est une relation d'ordre.*

DÉMONSTRATION. La relation $S \overline{\leqslant} \overline{S}$ est évidemment réflexive et propre. Soient $S \overline{\leqslant} \overline{S}$ et $\overline{S} \overline{\leqslant} \overline{\overline{S}}$; il existe un atlas faible complet de $\overline{\overline{S}}$ tel que $\overline{a}(F) = \overline{\overline{S}}$, $b(F) = \overline{S}$, et un atlas faible complet G de $\overline{S}$ pour lequel $\overline{a}(G) = \overline{S}$ et $b(G) = S$; comme F et G sont saturés par induction, G est un atlas faible complet de $\overline{\overline{S}}$ et GF est saturé par induction. On a :

$$(GF)^{-1}(GF) \subset F^{-1}G^{-1}GF \subset F^{-1}b(F)F = a(F).$$

et

$$GF((GF)^{-1}GF) \subset GF\,a(F) = GF;$$

donc GF est un atlas faible complet de $\overline{\overline{S}}$ et $\overline{a}(GF) \subset \overline{a}(F)$.- Soient $f \in F$, $f' \in F$ et $f^{-1}.f' \in a(F)$; il existe une sous-classe E de $\alpha(G)$ avec $\beta(f) \in \underline{\bigcup} E$; par suite

$$f^{-1}.f' \in \underline{\bigcup} f^{-1}Ef', \text{ d'où } a(F) \subset \overline{a}(GF).$$

Il en résulte $\overline{a}(GF) = \overline{a}(F) = \overline{\overline{S}}$.- Pour tout $gf \in GF$, on a $\beta(gf) < \beta(g)$, c'est-à-dire $\beta(gf) \in S_o$; par ailleurs, soit $e \in S_o$; alors $e \in G \subset \overline{S}$ et $e \in F$; il s'ensuit $e = ee \in GF$. Des relations $\beta(GF) = S_o \subset GF \subset \overline{a}(GF)$ et de la proposition 6-3 [2] on déduit $b(GF) = S$. Par conséquent $S \overline{\leqslant} \overline{\overline{S}}$ et $\overline{\leqslant}$ est une relation d'ordre.

DÉFINITION 3. *Soient* $\langle S, p, S' \rangle$ *et* $\langle S, \overline{p}, \overline{S}' \rangle$ *deux espèces de structures sous-préinductives* (*presque*) *au-dessus de* S; *on dit que* $\langle S, \overline{p}, \overline{S}' \rangle$ *est un* élargissement inductif de $\langle S, p, S' \rangle$ (presque) au-dessus de S *et on note* $\langle S, p, S' \rangle \overline{\leqslant} \langle S, \overline{p}, \overline{S}' \rangle$, *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) S' est saturé par induction dans $\overline{S'}$.

2) Il existe un élargissement (S, p_1, S'_1) de (S, p, S') tel que $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$ soit une sous-espèce sous-préinductive de $\langle S, \overline{p}, \overline{S'} \rangle$ (presque) au-dessus de S et S'_1 une base de $\overline{S'}$.

Ces conditions entraînent que $\langle S, p, S' \rangle$ est une sous-espèce sous-préinductive (presque) au-dessus de S de $\langle S, \overline{p}, \overline{S'} \rangle$ et de $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$.

PROPOSITION 6. *Soient $\langle S, p, S' \rangle$ et $\langle S, \overline{p}, \overline{S'} \rangle$ deux espèces de structures sous-préinductives; si l'on a $\langle S, p, S' \rangle \,\overline{\leqslant}\, \langle S, \overline{p}, \overline{S'} \rangle$, on a $S' \,\overline{\leqslant}\, \overline{S'}$.*

COROLLAIRE. *Si S' est un sous-pseudogroupe de $\overline{S'}$, si $S' \,\overline{\leqslant}\, \overline{S'}$ et si (S, p, S') est une sous-espèce de $(S, \overline{p}, \overline{S'})$, alors on a $\langle S, p, S' \rangle \,\overline{\leqslant}\, \langle S, \overline{p}, \overline{S'} \rangle$.*

En effet, soit S'_1 la composante inductive faible de S' dans $\overline{S'}$ et p_1 la restriction de $\overline{p}$ à S'_1; comme S'_1 est le sous-groupoïde plein saturé de $\overline{S'}$ engendré par S', (S, p_1, S'_1) est une espèce de structures, sous-espèce de $(S, \overline{p}, \overline{S'})$, d'après la proposition 3-2-II [1] et S'_1 est un élargissement de S', base de $\overline{S'}$.

THÉORÈME 4. *Soit (S, p, S') une espèce de structures et $(S, \overline{p}, \overline{S'})$ son élargissement maximal au-dessus de S; si S et S' sont des groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur sous-inductif de S vers S', alors il existe une relation d'ordre sur $\overline{S'}$ pour laquelle $\overline{S'}$ est un élargissement inductif de S' et $\overline{p}$ un foncteur sous-inductif.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2-2-III [1], $\overline{S'}$ est un groupoïde quotient du groupoïde $\alpha^*(S')$ induit de S', où α désigne l'application $f \to \alpha(f)$ de la classe I des éléments $f \in S$ tels que $\alpha(f) \in p(S')$ dans S_o. Ecrivons un élément de S' sous la forme d'un couple (f, s), où $f \in S$, $s \in S'_o$, $p(s) = \alpha(f)$. D'après le théorème 1, $\alpha^*(S')$ est canoniquement muni d'une structure de groupoïde sous-préinductif. Soit q le foncteur canonique de $\alpha^*(S')$ sur $\overline{S'}$; pour que l'on ait $q(h, f', f) = q(h_1, f'_1, f_1)$, il faut et il suffit qu'il existe $g \in S'$ et $g' \in S'$ tels que :

$$h_1 = g' . h . g^{-1},\ f_1 = f . p(g)^{-1},\ f'_1 = f' . p(g')^{-1};$$

dans ce cas, la relation

$$(h_1, f'_1, f_1) < (h, f', f) \text{ dans } \alpha^*(S')$$

entraîne

$$h_1 < h,\ f_1 < f,\ f'_1 < f', \text{ d'où } (h_1, f'_1, f_1) = (h, f', f).$$

Par suite deux éléments de $\alpha^*(S')$ ayant même image par q ne sont pas comparables.- Soient $(k, m', m) < (h, f', f)$, où $(k, m', m) \in \alpha^*(S')$; si $(h_1, f'_1, f_1) \in \overline{q}^{-1}(q(h, f', f))$, posons :

$$\gamma = g\,\alpha(k),\ \gamma' = g'\beta(k'),\ k_1 = \gamma'.k.\gamma^{-1},\ m_1 = m.p(\gamma)^{-1},\ m'_1 = m'.p(\gamma')^{-1};$$

on trouve :

$$(k_1, m'_1, m_1) \in \alpha^*(S') \text{ et } q(k_1, m'_1, m_1) = q(k, m', m).$$

Les conditions 1 et 2 du théorème 1-1 sont ainsi vérifiées; par suite on peut définir sur $\overline{S'}$ une structure de groupoïde sous-préinductif, quotient inductif de $\alpha^*(S')$ telle que S' s'identifie à un sous-groupoïde ordonné de $\overline{S'}$. - Soit $q(k, m', m) < h$, où $h \in S'$; il existe

$$(k_1, m'_1, m_1) \in \overset{-1}{q}(q(k, m', m))$$

avec

$$k_1 < h,\ m_1 < p(\alpha(h)),\ m'_1 < p(\beta(h)),$$

d'où $q(k_1, m'_1, m_1) \in S'$ et S' est saturé par induction dans $\overline{S'}$.- Nous désignerons désormais par $(f, s)S'$ l'élément $q(s, f, f) \in \overline{S'_0}$ et nous écrirons $\overline{p}(q(h, f', f)) = f'.p(h).f^{-1}$. Si $(f, s)S'$ et $(f', s')S'$ sont deux unités de $\overline{S'}$ majorées par $(f'', s'')S' \in \overline{S'_0}$, on a :

$$\overline{p}((f, s)S' \cap (f', s')S') = \overline{p}((f \cap f', s \cap s')S') = \beta(f \cap f') = \beta(f) \cap \beta(f')$$
$$= \overline{p}((f, s)S') \cap \overline{p}((f', s')S').$$

COROLLAIRE 1. *Si S et S' sont sous-inductifs et p inductif alors $\overline{S'}$ est sous-inductif. Si de plus S et S' sont inductifs et si $p(S')$ est $\bigcup$-saturé dans S, alors $\overline{S'}$ est inductif.*

DÉMONSTRATION. Soit $A = ((g_i, s_i)S')_{i \in I}$ une classe d'éléments de $\overline{S'}$ majorée par $(f, s)S'$, où $(g_i, s_i) < (f, s)$ pour tout $i \in I$; la classe A admet mS' pour $(f, s)S'$-sous-agrégat, où $m = (\overset{f}{\bigcup_{i \in I}} g_i, \overset{s}{\bigcup_{i \in I}} s_i)$. Supposons de plus S et S' inductifs et $p(S')$ saturé par agrégation dans S. Soit $(f', s')S'$ un autre majorant de A et $m'S'$ le $(f', s')S'$-sous-agrégat de A; on a : $m' = (\overset{f'}{\bigcup_{i \in I}} g'_i, \overset{s'}{\bigcup_{i \in I}} s'_i)$, où $(g'_i, s'_i) < (f', s')$ et $(g'_i, s'_i)S' \in A$. Les éléments $g_i^{-1}.g'_i \in p(S')$ étant majorés par $f^{-1}f'$ ils admettent un agrégat $k \in p(S')$ tel que :

1 $$\alpha(k) = p(\bigcup_{i \in I} s'_i),\ \beta(k) = p(\bigcup_{i \in I} s_i) \text{ et } \beta(\bigcup_{i \in I}(g_i^{-1}.g'_i, s'_i)) = \beta((k, \bigcup_{i \in I} s'_i)) = \bigcup_{i \in I} s_i;$$

il en résulte $mS' = m'S'$ et $\overline{S'}$ est inductif.

COROLLAIRE 2. *Si $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de S, alors $\langle S, \overline{p}, \overline{S'} \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de S, élargissement inductif de $\langle S, p, S' \rangle$. Si p est un étalement de S' dans S, $\overline{p}$ est un étalement de $\overline{S'}$ dans S.*

2 + En effet, soient $(f, s)S' \in \overline{S'}$ et $(f', s')S' < (f, s)S'$ tels que $\beta(f) = \beta(f')$; il en résulte

$$f = f',\ s' < s,\ p(s') = p(s) = \alpha(f),$$

d'où $s' = s$ et $\bar{p}$ est (sous)-inductif strict.- Si p est un étalement, soit $e < \bar{p}((f,s)S') = \beta(f)$; il existe $s'' < s$ tel que $p(s'') = \alpha(ef) < p(s)$; on a si $f'' = ef$:

$$(f'', s'')S' < (f, S)\; S' \text{ et } \bar{p}((f'', s'')S') = e.$$

Donc $\bar{p}$ est un étalement.

COROLLAIRE 3. *Si* $\langle S, p, S' \rangle$ *est une espèce de structures sous-préinductive au-dessus de* S *telle que* $p(S')$ *soit une partie sous-inductive de* S, *alors* S' *est un sous-pseudogroupe de* $\bar{S}'$.

En effet, soit E une sous-classe de S'_o admettant $(f,s)S'$ pour sous-agrégat dans $\bar{S}'$. Il existe $g_i < f$ tel que $(g_i, s_i)S' \in E$; si $s' < s$ est un élément tel que $s_i < s'$ on a :

$$(fp(s'), s')S' < (f, s)S' \text{ et } E < (fp(s'), s')S',$$

d'où $s = \overset{s}{\underset{i \in I}{\bigcup}} s_i$. Puisque p est inductif,

$$p(s) = \alpha(f) = \overset{\alpha(f)}{\underset{i \in I}{\bigcup}} \alpha(g_i)$$

et la classe des éléments g_i étant majorée par f admet un f-agrégat g dans S, tel que $\alpha(g) = p(s)$ et $g \in p(S')$; par suite $E < (g, s)S' < (f, s)S'$. Donc $f = g$, $(f, s)S' \in S'$ et S' est un sous-pseudogroupe de $\bar{S}'$.

3. Atlas complets compatibles avec un foncteur.

Etant donnés deux groupoïdes sous-préinductifs S et S', nous désignerons leurs foncteurs d'induction par φ et φ' respectivement.

PROPOSITION 1. *Soient* S *et* S' *deux groupoïdes sous-préinductifs,* p *un foncteur sous-inductif de* S' *dans* S *et* E *une sous-classe compatible de* S'_o *telle que la restriction de* p *à* E *soit compatible avec l'intersection finie (c'est-à-dire, pour tout* $e \in E$ *et tout* $e' \in E$, $p(e') \cap p(e)$ *est défini et égal à* $p(e'e)$*). Alors la restriction de* p *à* $\varphi'(E)$ *est compatible avec l'intersection finie. Si* p *est sous-inductif strict, sa restriction à* E *est un isomorphisme sur* $p(E)$.

DÉMONSTRATION. Soient $e_1 e$ et $e'e'_1$ deux éléments de $\varphi'(E)$, où $e \in E$, $e' \in E$, $e_1 \in S'_o$ et $e'_1 \in S'_o$; les éléments $ee'e_1$ et $ee'e'_1$ étant majorés par ee', on a

$$\begin{aligned} p((ee_1)(e'e'_1)) &= p(e_1 ee')\,p(e'ee'_1) = (p(e_1 e)p(ee'))\,(p(ee')p(e'e'_1)) \\ &= (p(e_1 e)p(e'))\,(p(e)p(e'e'_1)) = p(e_1 e)p(e'_1 e'), \end{aligned}$$

et la restriction de p à $\varphi'(E)$ est compatible avec l'intersection finie.- Supposons p sous-inductif strict. Soient $e \in E$ et $e' \in E$ tels que $p(e) = p(e')$; les relations :

$$p(e'e) = p(e)p(e') = p(e) = p(e'),\; e'e < e \text{ et } e'e < e'$$

entraînent $e'e = e = e'$; ainsi la restriction de p à E est une injection. Enfin soit $e'' \in E$, $p(e'') < p(e)$; des égalités

$$p(e''e) = p(e'')p(e) = p(e''),$$

on déduit $e''e = e''$, d'où $e'' < e$, de sorte que la restriction de p à E est un isomorphisme sur $p(E)$. Il en résulte aussi que la restriction de p à $\varphi'(E)$ est un isomorphisme sur $p(\varphi'(E))$, puisque cette restriction est compatible avec l'intersection finie d'après ce qui précède.

DÉFINITION 1. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de S' vers S; un atlas* ⌈*faible*⌉ *complet F de S' est dit* compatible avec p *si les conditions suivantes sont vérifiées, où $f \in F$, $f' \in F$:*

1°) Si $\alpha(f)\alpha(f')$ est défini, $p(\alpha(f))$ et $p(\alpha(f'))$ admettent $p(\alpha(f)\alpha(f'))$ pour intersection.

2°) Si $\beta(f)\beta(f')$ est défini, $p(\beta(f))$ et $p(\beta(f'))$ ont $p(\beta(f)\beta(f'))$ pour intersection.

PROPOSITION 2. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur sous-inductif de S' vers S; pour qu'un atlas faible complet F de S' soit compatible avec p, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :*

1°) Soient $f \in F$ et $f' \in F$; si $f^{-1}f'$ est défini, alors $p(f^{-1})p(f')$ est défini et égal à $p(f^{-1}f')$; si $f'f^{-1}$ est défini, on a de même $p(f')p(f^{-1}) = p(f'f^{-1})$.

2°) La restriction de p à $a(F)$ et $b(F)$ est compatible avec la pseudomultiplication dans S' et dans S.

3°) Soient $f \in F$, $h \in a(F)$ et $k \in b(F)$; si fh est défini, on a $p(f)p(h) = p(fh)$; si kf est défini, on a $p(kf) = p(k)p(f)$.

DÉMONSTRATION. Soient $f \in F$ et $f' \in F$. Supposons F compatible avec p. Si $f'f^{-1}$ est défini, $e = \alpha(f')\alpha(f)$ est défini et $p(e) = p(\alpha(f))\alpha(p(f'))$; par suite

$$p(f'f^{-1}) = p(f'e).p(fe)^{-1} = (p(f')p(e)).(p(e)p(f^{-1})) = p(f')p(f^{-1}).$$

De même si $f^{-1}f'$ est défini, on a $p(f^{-1}f') = p(f^{-1})p(f')$, de sorte que la condition 1 est vérifiée. Soient $h \in a(F)$ et $h' \in a(F)$ tels que $e' = \beta(h)\alpha(h')$ soit défini ; puisque $\alpha(a(F)) = \alpha(F)$, on a $p(e') = \beta(p(h))\alpha(p(h'))$ et $p(h'h) = p(h')p(h)$; on en déduit que la condition 2 est remplie. Si fh est défini, on a $fh = (fe'').(e''h)$, où $e'' = \alpha(f)\beta(h)$ et $p(e'') = \alpha(p(f)) \cap \beta(p(h))$, d'où

$$p(fh) = p(f)p(e'')p(h) = p(f)p(h).$$

- Inversement, supposons la condition 1 vérifiée. Soit $h = f^{-1}.f' \in a(F)$ et $f'' \in F$ tels que $f''h$ soit défini. Les relations :

$$f''(f^{-1}.f') = (f''f^{-1}).(\alpha(f''f^{-1})f'),$$
$$p(f''f^{-1}) = p(f'')p(f^{-1}) \text{ et } p(\alpha(f''f^{-1})f') = \alpha(p(f''f^{-1}))p(f')$$

entraînant

$$p(f''f^{-1}f') = p(f'')p(f^{-1})p(f') = p(f'')p(f^{-1}f'),$$

la condition 3 est aussi remplie. Pour tout $f_1 \in F$ et tout $f'_1 \in F$ tels que $e = \alpha(f_1)\alpha(f'_1)$ soit défini, on trouve :

$$p(e) = p(f_1^{-1}(f_1\alpha(f'_1))) = p(f_1^{-1})p(f_1\alpha(f'_1)) = p(f_1^{-1})p(f_1)p(\alpha(f'_1)) =$$
$$= p(\alpha(f_1))p(\alpha(f'_1)).$$

COROLLAIRE 1. *La classe $H(S', p)$ des atlas faibles complets de S' compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $H(S')$ (th. 2-4 [2])*

COROLLAIRE 2. *La sous-classe de $H'(S')$ formée des atlas faibles compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $H'(S')$ (respectivement de $\dot{H}'(S')$) que nous désignerons par $H'(S', p)$ (respectivement $\dot{H}'(S', p)$) (voir théorèmes 1-4 [2] et 2-4 [2]).*

En effet, soit $F \in H'(S', p)$ et $F' < F$, où $F' \in H'(S)$; puisque $F' = F\alpha(F')$ est contenu dans $\varphi'(F)$, il résulte de la proposition 1 que F' est compatible avec p. Il s'ensuit que $H'(S', p)$ est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $H'(S')$, et par suite de $\dot{H}'(S')$.

COROLLAIRE 3. *La sous-classe intersection de $I_f(S')$ (respectivement de $\dot{I}_f(S')$) avec $H'(S', p)$ (respectivement avec $\dot{H}'(S', p)$) est un sous-groupoïde saturé par induction de $I_f(S')$ (respectivement de $\dot{I}_f(S')$), qui contient $T(S')$ et que nous désignerons par $I_f(S', p)$ (respectivement $\dot{I}_f(S', p)$) (cor. th. 1 et 2 et th. 7 du § 4 [2]).*

En effet, un $F \in I_f(S', p)$ est une sous-classe inductive faible compatible telle que la restriction de p à F soit compatible avec l'intersection finie puisque, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, on a :

$$p(f \cap f') = p(f\alpha(f')) = p(f)p(\alpha(f')) = p(f'\alpha(f)) = p(f')p(\alpha(f)),$$

d'où $\quad p(f' \cap f) = p(f) \cap p(f').$

COROLLAIRE 4. *La sous-classe des complexes de S' qui appartiennent à $I_f(S', p)$ est un groupoïde local $(\tilde{S}', p)$, dont S est une base, pour la relation $F' \subset F$ (définition 1-4 [2]).*

PROPOSITION 3. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-prélocaux, p un foncteur inductif de S' vers S et F un atlas complet de S' compatible avec p. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) F est un atlas propre compatible avec p.

2) F admet pour base une sous-classe B telle que $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient compatibles et que les restrictions de p à $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient compatibles avec l'intersection finie.

3) F admet pour base un atlas faible complet F_1 appartenant à $H'(S', p)$.

4) $\overline{a}(F)$ et $\overline{b}(F)$ sont des sous-pseudogroupes propres auxquels la restriction de p est compatible avec la pseudomultiplication dans S et dans S'.

DÉMONSTRATION. Supposons que la condition 2 soit vérifiée. Alors tout élément $a \in \alpha(\overline{a}(F))$ est le a-agrégat d'une sous-classe E de $\alpha(B)$; supposons $b = aa'$ défini, où a' est le a'-agrégat d'une sous-classe E' de $\alpha(B)$; d'après la proposition 3-2 [2], on a :

$$a'a = \bigcup^{b} (E'E) \text{ et } p(a'a) = \bigcup^{p(b)} p(E'E);$$

pour tout $e \in E$ et tout $e' \in E'$, $e'e$ est défini et $p(e')p(e) = p(e'e)$, d'où

$$p(E'E) = p(E')p(E) \text{ et } p(a'a) = \bigcup^{p(b)} (p(E)p(E'));$$

il résulte de la proposition 3-2 [2] que

$$p(a') = \bigcup^{p(a')} p(E') \text{ et } p(a) = \bigcup^{p(a)} p(E)$$

admettent $\bigcup^{p(b)} (p(E)p(E'))$ pour intersection dans S, c'est-à-dire $p(a'a) = p(a')p(a)$; ainsi $\overline{a}(F)$ est compatible avec p. Il s'ensuit, d'après la proposition 2, que la condition 4 est vérifiée.- Montrons que la condition 2 entraîne la condition 3; soit $F' \in H'(S')$ une base de F (cor. 2, propo. 5-2 [2]) saturée par induction dans F; désignons par A et A' les sous-classes de $\alpha(F')$ et $\beta(F')$ formées des éléments induits des éléments de $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ respectivement. D'après la proposition 1, la restriction de p à A et A' est compatible avec l'intersection finie. La sous-classe F_1 des éléments $f \in F'$ tels que $\alpha(f) \in A$ et $\beta(f) \in A'$ est une sous-classe saturée par induction dans F', donc un atlas faible complet appartenant à $H'(S', p)$. Comme A et A' sont des bases de $\alpha(F)$ et $\beta(F)$, l'atlas F_1 est une base de F.- La proposition en résulte, les autres implications étant évidentes.

COROLLAIRE 1. *La classe $A'(S', p)$ des atlas complets propres compatibles avec p est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $A(S')$ et de $\mathring{A}(S')$ (théorèmes 4 4 [2] et 5-4 [2] où $\mathring{A}(S')$ est noté $(A(S'), \ll)$).*

DÉMONSTRATION. Si $F' < F$, où $F \in A'(S', p)$, et si $F_1 \in H'(S', p)$ est une base de F appartenant à $H'(S', p)$ et saturée par induction, l'atlas complet F' admet pour base la classe F'_1 des éléments $f' \in F'$ majorés par un élément de F_1 (voir théorème 4-4 [2]) ; puisque F'_1 est contenu dans $\varphi'(F_1)$, F'_1 est un atlas faible complet compatible avec p, donc $F' \in A'(S', p)$.

COROLLAIRE 2. *La classe $I(S', p)$ intersection de $A'(S', p)$ avec $I(S')$ (th. 6-4 [2] et co. théorème 4-4 [2]) est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $I(S')$ (resp. de $\dot{I}(S')$) désigné par $I(S', p)$ (resp. $\dot{I}(S', p)$).*

THÉORÈME 1. *Soient S un groupoïde sous-prélocal et S' un groupoïde sous-préinductif, p un foncteur sous-inductif de S' vers S; l'application p' qui associe à $F \in H'(S', p)$ la partie sous-inductive faible engendrée par $p(F)$ dans S est un foncteur sous-inductif de $H'(S', p)$ (respectivement $\dot{H}'(S', p)$) vers $H'(S)$ (respectivement $\dot{H}'(S)$).*

DÉMONSTRATION. Soit $H \in H'(S', p)_0$; pour tout $h \in H$, on a :

$$(p(h))^{-1} = p(h^{-1}) \in p(H);$$

soit $h' \in H$ tel que $p(h')p(h)$ soit défini; la restriction de p à H étant compatible avec la pseudomultiplication, on a $p(h'h) = p(h')p(h) \in p(H)$. Par suite $p(H)$ est un sous-groupoïde de S, qui est de plus stable pour la pseudomultiplication et $p'(H)$ est le sous-pseudogroupe faible qu'il engendre dans S.- Soit $F \in H'(S', p)$; pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, les éléments $p(f^{-1})$ et $p(f')$ de $p(F)$ admettent $p(f^{-1}f')$ pour pseudoproduit dans S; par suite $\alpha(p(F))$ et $\beta(p(F))$ sont des sous-classes compatibles de S ainsi que les sous-classes inductives faibles qu'elles engendrent dans S. Soit $f'' \in F$; on a :

$$p(f'')(p(f^{-1})p(f')) = p(f'')p(f^{-1}f') = p(f''f^{-1}f') \in p(F),$$

d'où $$p(a(F)) = p(F)^{-1}p(F) \text{ et } p(F)p(a(F)) = p(F).$$

D'après le corollaire de la proposition 9-2 [2], $p(F)$ est une base de $p'(F)$; la classe $p(F)p'(a(F))$ est un atlas faible complet admettant $p(F)p(a(F)) = p(F)$ pour base, en vertu de la proposition 4-3 [2]. Donc $p(F)p'(a(F)) = p'(F)$ et $p'(F)$ est un atlas faible complet de S.- Soit $G \in H'(S', p)$ avec $a(G) = b(F)$. On a $p(G.F) \subset p(G).p(F)$; soient $g \in G$ et $f \in F$ tels que $\alpha(p(g)) = \beta(p(f))$. La restriction de p à $\alpha(G)$ étant injective, on a $\alpha(g) = \beta(f)$, d'où $p(g).p(f) = p(g.f)$ et $p(G).p(F) = p(G.F)$. Par conséquent les atlas faibles complets $p'(G.F)$ et $p'(G).p'(F)$ qui admettent $p(G).p(F)$ pour base sont identiques et p' est un foncteur.- Soient F, F' et F'' trois éléments de $H'(S', p)$ tels que $F' < F$, $F'' < F$; comme $F' \subset \varphi'(F)$ et $F'' \subset \varphi'(F)$, on a, pour tout $f' \in F'$ et tout $f'' \in F''$,

$$p(f'\alpha(f'')) = p(f')p(\alpha(f')\alpha(f'')) = p(f')\alpha(p(f'')),$$

d'où $$p(F'\alpha(F'')) = p(F')\alpha(p(F'')).$$

Les atlas faibles complets $p'(F' \cap F'')$ et $p'(F') \cap p'(F'')$ admettant $p(F')\alpha(p(F''))$ pour base sont identiques et p' est un foncteur sous-inductif de $H'(S', p)$ vers $H'(S)$.-

Supposons maintenant $F' \precdot F$; on a $p'(F') \subset p'(F)$ et $p'(F') < p'(F)$ d'après ce qui précède, c'est-à-dire $p'(F') \precdot p'(F)$. Soient $H' \precdot H$ et $H'' \precdot H$, où H', H'' et H appartiennent à $H'(S', p)_o$. On a :

$$H' \dot{\cap} H'' = H\alpha(H')\alpha(H'') \text{ et } p'(H' \dot{\cap} H'') = p(H)p(\alpha(H'))p(\alpha(H'')).$$

Comme

$$p'(H') \dot{\cap} p'(H'') = p'(H)p'(\alpha(H'))p'(\alpha(H''))$$

admet $p(H)p(\alpha(H'))p(\alpha(H''))$ pour base, on a $p(H' \dot{\cap} H'') = p(H') \dot{\cap} p(H'')$. Ceci achève la démonstration.

COROLLAIRE 1. *Si p est un foncteur sous-inductif strict, alors p' est un foncteur sous-inductif strict de $H'(S', p)$ vers $H'(S)$ (resp. de $\dot{H}'(S', p)$ vers $\dot{H}'(S)$).*

DÉMONSTRATION. Soit $F' < F$, où F et F' appartiennent à $H'(S', p)$ et $p'(F) = p'(F')$. Pour tout $f' \in F'$, il existe une sous-classe A de F et $f \in F$ tels que

$$p(f') = \overset{p(f)}{\bigcup} p(A) = p(f) \overset{e}{\bigcup} \alpha(p(A)), \text{ où } e = \alpha(p(f)).$$

D'après la proposition 1, la restriction de p à $\varphi'(\alpha(F))$ est un isomorphisme sur $p(\varphi'(\alpha(F)))$; comme $\alpha(f') \in \varphi'(\alpha(F))$, on a :

$$\alpha(f') = \overset{\alpha(f)}{\bigcup} \alpha(A) \in \alpha(F) \text{ et } f' = f\alpha(f') \in F,$$

d'où $F' \precdot F$. Etant donné que F' est saturé par induction dans F, $p(\alpha(F'))$ est saturé par induction dans $p(\alpha(F))$ et $p(F') = p(F)p(\alpha(F'))$ est saturé par induction dans $p(F)$. Comme $p(F')$ est une base de la partie sous-inductive faible $p'(F')$, on en déduit $p(F') = p(F)$. La restriction de p à $\alpha(F)$ et $\alpha(F')$ étant une bijection sur $p(\alpha(F))$ et sur $p(\alpha(F'))$ resp., on a donc $\alpha(F) = \alpha(F')$, $F = F\alpha(F') = F'$.

COROLLAIRE 2. *La restriction de p' à $I_f(S', p)$ est un foncteur sous-inductif de $I_f(S', p)$ vers $I_f(S)$, qui applique $T(S')$ dans $T(S)$ (corollaire 3 proposition 2).*

En effet, pour tout $F \in I_f(S', p)$ la classe $p(F)$ est compatible dans S et la sous-classe inductive faible $p'(F)$ qu'elle engendre appartient à $I_f(S)$.- Si F est une paratopologie sur $f \in S'$, alors $p(F)$, et par suite $p'(F)$, admettent $p(f)$ pour plus grand élément, donc $p'(F) \in T(S)$.

THÉORÈME 2. *Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductive au-dessus de S, où S' est un groupoïde sous-inductif; soit encore p l'application qui associe à $F \in H'(S', p)$ la classe $p(F)$; alors $\langle H'(S), p, H'(S', p) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive et p est un étalement de $\dot{H}'(S', p)$ dans $\dot{H}'(S)$.*

DÉMONSTRATION. Soit A une sous-classe de F telle que $p(A)$ admette un $p(f)$-agrégat g dans S, où $f \in F$. Comme p définit un isomorphisme de $\alpha(F)$ sur $p(\alpha(F))$, la classe A est majorée par f et admet un f-agrégat b dans F tel que $p(b) = g$, d'où

$g \in p(F)$ et $p(F) \in H'(S)$. La démonstration du théorème 1 montre que p est un foncteur sous-inductif strict de $H'(S', p)$ vers $H'(S)$, l'axiome (D) dans S n'étant utilisé que pour passer de $p(F)$ à $p'(F)$.- Soient $f \in F$ et $f' \in F$ tels que $p(f) = p(f')$; d'après la proposition 1, on a $\alpha(f) = \alpha(f')$, d'où $f = f'$; par suite la restriction de p à F est un isomorphisme sur $p(F)$.- Soit $H \in H'(S', p)_0$ tel que $p(H) = a(p(F))$; soit G la classe des éléments $g \in S'$ tels que $p(g) \in p(F)$ et $\alpha(g) \in \alpha(H)$. Puisque la restriction de p à H est une bijection π sur $p(H)$ et qu'à tout couple $(p(f), \alpha(h))$, où $f \in F$, $h \in H$ et $\alpha(p(f)) = p(\alpha(h))$, correspond un et un seul $g \in G$, la restriction de p à G est un isomorphisme sur $p(F)$ et on a un isomorphisme $\hat{\pi}$ associant à $\beta(g)$ l'élément $\beta(f)$ tel que $p(f) = p(g)$. Pour tout $e \in \beta(G)$ et tout $e' \in \beta(G)$ l'élément $e'' = \hat{\pi}^{-1}(\hat{\pi}(e)\hat{\pi}(e'))$ est l'intersection de e' et de e dans $\beta(G)$; comme $e'' < e'e$, on a

$$p(e'') < p(e'e) < p(e)\,p(e'),$$

d'où
$$e'' = e'e \in \beta(G) \text{ et } G^{-1}G = G^{-1}.G = H;$$

on en déduit que $GH = G$ est un atlas faible complet tel que $\alpha(G) = H$. Cet atlas est déterminé d'une manière unique par la donnée de H et de $p(F)$, et $\langle H'(S), p, H'(S',p)\rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive.- Soit $K' \precsim p(H)$, où $H \in H'(S', p)$; puisque la restriction de p à H est un isomorphisme sur $p(H)$, la sous-classe de H formée des éléments k tels que $p(k) \in K'$ est saturée par induction dans H, donc $K \in H'(S', p)$ et $K \precsim H$. Ainsi p est un étalement de $\dot{H}'(S', p)$ sur $\dot{H}'(S)$.

COROLLAIRE. *La restriction de* p *à* $\dot{I}_f(S', p)$ *est un étalement de* $\dot{I}_f(S', p)$ *dans* $\dot{I}_f(S)$, *qui étale* $\dot{T}(S')$ *(resp.* S'*) dans* $\dot{T}(S)$.

En effet, comme $\dot{I}_f(S', p)$ est saturé par induction dans $\dot{H}'(S', p)$, le théorème entraîne que p étale $\dot{I}_f(S', p)$ dans $\dot{I}_f(S)$.- Pour tout $T \in T(S')$, on a $T \in I_f(S', p)$ et $p(T)$ est une paratopologie sur $p(t)$; soit $T' \precsim p(T)$ une paratopologie sur t' et $F' \in I_f(S', p)$ la sous-classe telle que $T' = p'(F')$. Alors F' est une paratopologie sur f', si $p(f') = t'$. Puisque S' est saturé par induction dans $T(S')$, p étale aussi S' dans $T(S)$.

Remarquons que, si S' n'est pas sous-inductif, p peut ne pas étaler S' dans $T(S)$. On a toutefois :

THÉORÈME 3. *Soient* $\langle S, p, S'\rangle$ *une espèce de structures sous-préinductive étalée au-dessus de* S *et* p' *l'application qui associe la classe* $p(F)$ *à* $F \in H'(S', p)$; *alors* p' *est un étalement de* $H'(S', p)$ *(resp. de* $\dot{H}'(S', p)$*) dans* $H'(S)$ *(resp. dans* $\dot{H}'(S)$*).*

DÉMONSTRATION. Soit g le $p(f)$-agrégat de $p(A)$, où A est une sous-classe de $F \in H'(S', p)$ et où $f \in F$. Puisque p est un étalement, il existe $f' \in F$ tel que $p(f') = g$, et on a $f' = \bigcup A$; donc $g \in p(F)$ et $p(F)$ est identique à la partie sous-inductive faible $p'(F)$ engendrée par $p(F)$. Ainsi $p'(F) \in H'(S)$. Une démonstration analogue à celle du théorème 2 et de son corollaire montre que $\langle H'(S), p', H'(S', p)\rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive et que p' est un étalement de $\dot{H}'(S', p)$ dans $\dot{H}'(S)$. - Soient $H \in H'(S', p)_o$ et $K' \in H'(S)$, tel que $K' < p(H)$. La classe $\varphi'(H)$ appartient à $H'(S', p)_o$ et est isomorphe à $p(\varphi(H))$; comme on a $p(\varphi'(h)) = \varphi(p(h))$ pour tout $h \in H$, on aura aussi $p'(\varphi'(H)) = \varphi(p'(H))$, et p' est un isomorphisme de $\varphi'(H)$ sur $\varphi(p(H))$. Il en résulte que la classe K formée des $k \in \varphi'(H)$ vérifiant $p(k) \in K'$ appartient à $H'(S, p)$ et que l'on a

$$K = H\,\alpha(K) = \beta(K)H < H \quad \text{et} \quad p'(K) = K'.$$

THÉORÈME 4. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-prélocaux et p un foncteur inductif de S' vers S; alors l'application $\overline{p}$ qui associe à $F \in A'(S', p)$ la partie sous-inductive engendrée par $p(F)$ dans S est un foncteur sous-inductif de $A'(S', p)$ (resp. de $\dot{A}'(S', p)$) vers $A'(S)$ (resp. vers $\dot{A}'(S)$).*

DÉMONSTRATION. Pour tout atlas $F \in A'(S', p)$, soit $F_1 \in H'(S', p)$ la base de F construite dans la proposition 3. D'après le théorème 1, $p'(F_1)$ est un atlas faible complet de S et la partie sous-inductive $\overline{p'(F_1)}$ est un atlas complet contenant $p(F)$. Pour tout $f \in F$, il existe une sous-classe A de F_1 telle que $f \in \bigcup A$; par suite $p(f) \in \bigcup p(A)$, et $p(F_1)$ est une base de $\overline{p(F_1)} = \overline{p}(F)$.- Soit $H \in A'(S', p)_o$; alors $H_1 \in H'(S', p)_o$ et $p'(H_1) \in H'(S)_o$; la partie sous-inductive engendrée par le sous-pseudogroupe faible $p'(H_1)$ est un sous-pseudogroupe de S.- Soit $G \in A'(S', p)$ tel que $\overline{a}(G) = \overline{b}(F)$. La classe $G_2 = G_1\beta(F_1)$ étant une sous-classe saturée par induction de G telle que $\alpha(G_2)$ soit contenu dans $\varphi'(\beta(F_1))$, elle appartient à $H'(S', p)$ et c'est une base de G. Puisque $G_2 F_1$ est une base de $G \odot F$ et que p est inductif, on a $\overline{p(G_2 F_1)} = \overline{p}(G \odot F)$. Par ailleurs, $\overline{p}(G) \odot \overline{p}(F)$ admet $p(G_2)\, p(F_1)$ pour base. Pour tout $f \in F_1$ et tout $g \in G_2$, l'élément gf est défini; on a :

$$p(e) = p(\alpha(g))p(\beta(f)), \text{ où } e = \alpha(g)\beta(f),$$

d'où $p(gf) = p(g)p(f)$. Il en résulte $p(G_2)p(F_1) = p(G_2 F_1)$, et par suite :

$$\overline{p}(G \odot F) = \overline{p(G_2 F_1)} = \overline{p}(G) \odot \overline{p}(F).$$

Ainsi $\overline{p}$ est un foncteur.- Soit $F' < F$, où $F' \in A'(S', p)$; d'après le théorème 4-4 [2], la classe F'_1 des éléments $f' \in F'$ qui sont majorés par un élément de F_1 est un atlas faible complet, saturé par induction dans F'; de plus F'_1 est une base de F' et $F'_1 < F_1$. Comme

$$\alpha(F'_1) \subset \varphi'(\alpha(F_1)) \text{ et } \beta(F'_1) \subset \varphi'(\beta(F_1)),$$

la restriction de p à $\alpha(F'_1)$ et $\beta(F'_1)$ est compatible avec l'intersection finie. Donc $F'_1 \in H'(S', p)$.- Supposons $F'' < F$, et soit F''_1 la classe des éléments $f'' \in F''$ majorés par un élément de F_1; l'atlas $F' \cap F''$ admet pour base la classe $F'_1 \alpha(F''_1) = F'_1 \cap F''_1$ et $\overline{p}(F') \cap \overline{p}(F'')$ admet $p'(F'_1) \cap p'(F''_1)$ pour base. Puisque

$$p'(F'_1) \cap p'(F''_1) = p'(F'_1 \cap F''_1)$$

d'après le théorème 1, on en déduit :

$$\overline{p}(F') \cap \overline{p}(F'') = \overline{p(F'_1 \cap F''_1)} = \overline{p}(F' \cap F'').$$

Ceci prouve que $\overline{p}$ est un foncteur sous-inductif de $A'(S', p)$ vers $A'(S)$.- On montre de même que $\overline{p}$ est un foncteur sous-inductif de $\dot{A}'(S', p)$ vers $\dot{A}'(S)$.

COROLLAIRE 1. *Si p est inductif strict, $\overline{p}$ est un foncteur sous-inductif strict de $A'(S', p)$ vers $A'(S)$ et un foncteur inductif strict de $\dot{A}'(S', p)$ vers $\dot{A}'(S)$, dont la restriction à $A'(S', p)_o$ est un étalement.*

DÉMONSTRATION. Supposons

$$F' < F, \ F \in A'(S', p), \ F' \in A'(S', p) \text{ et } \overline{p}(F) = \overline{p}(F');$$

soient F_1 et F'_1 les bases de F et F' considérées dans le théorème. La restriction de p à $\varphi'(\alpha(F'_1))$ (resp. à $\varphi'(\alpha(F_1))$) est un isomorphisme sur $p(\varphi'(\alpha(F'_1)))$ (resp. sur $p(\varphi'(\alpha(F_1)))$); comme $\overline{p}(F') = \overline{p}(F)$ admet $p(F_1)$ et $p(F'_1)$ pour bases, il en résulte

$$\overline{\alpha(F')} = \overline{\alpha(F)}, \text{ d'où } F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{F\alpha(F)} = F.$$

Donc $\overline{p}$ est un foncteur sous-inductif strict.- Soit $K \,\dot{<}\, \overline{p}(H)$, où $H \in A'(S', p)_o$ et $K \in A'(S)$; désignons par K' la sous-classe de H formée des $k \in H$ tels que $p(k) \in K$. Comme K est saturé et saturé par induction dans $\overline{p}(H)$, la classe K' est saturée, saturée par induction dans H, c'est-à-dire $K' \,\dot{<}\, H$. De plus, K admettant pour base la classe $p(H)\alpha(K)$, il admet aussi $p(K')$ pour base, et par suite $\overline{p}(K') = K$.

COROLLAIRE 2. *Si p est un étalement de S' dans S, alors $\overline{p}$ est un étalement de $A'(S', p)$ (resp. de $\dot{A}'(S', p)$) dans $A'(S)$ (resp. dans $\dot{A}'(S)$).*

DÉMONSTRATION. Soient H et H' deux sous-pseudogroupes propres compatibles avec p tels que $\overline{p}(H) = \overline{p}(H')$, $H_1 \in H'(S', p)$ et $H'_1 \in H'(S', p)$ les bases de H et H' saturées par induction dans H et H'. D'après le théorème 3, $p(H_1)$ est un sous-pseudogroupe faible; par suite $p(H_1)$ est saturé par induction dans $\overline{p}(H)$. Soit H_2 la sous-classe de H_1 formée des h tels que $p(h) \in p(H'_1)$ et H'_2 la sous-classe de H'_1 formée des h' tels que $p(h') \in p(H_1)$; alors H_2 et H'_2 sont des sous-groupoïdes saturés par induction de H et H' respectivement, et $p(H_2) = p(H'_2)$ est saturé par induction dans $\overline{p}(H)$. Pour tout $h \in H_1$, il existe une sous-classe A' de H'_1 telle que $p(h) \in \bigcup p(A')$; p étant un étalement, il existe une sous-classe A de H admettant h pour sous-agrégat et vérifiant $p(A) = \overline{p}(A')$. Comme A est contenu dans H_2, on en déduit que $H_2 \in H'(S', p)_o$ est une base de H, et $H'_2 \in H'(S', p)_o$ une base de H'.- Soit $F \in A'(S', p)$ tel que $\overline{a}(F) = H'$ et soit $F_1 \in H'(S', p)$ une base saturée par induction de F. La classe F_2 formée des éléments $f \in F_1$ tels que $\alpha(f) \in H'_2$ est saturée par induction dans F, et c'est une base de F; d'après le théorème 3, il existe $G \in H'(S', p)$ pour lequel on a :

$$p(G) = p(F_2) \text{ et } a(G) = H_2 .$$

La partie sous-inductive $\overline{G}$ engendrée par G est un atlas complet tel que

$$\overline{a}(\overline{G}) = \overline{H}_2 = H \text{ et } \overline{p}(\overline{G}) = \overline{p}(F).$$

Donc $(A'(S), \overline{p}, A'(S', p))$ est une espèce de structures et, d'après le corollaire 1 et la proposition 7.1, $\overline{p}$ est un étalement de $\dot{A}'(S', p)$ dans $\dot{A}'(S)$.- Soit $K < \overline{p}(H)$; la classe K_1 des éléments $k \in K$ qui sont majorés par un élément de $p(H_1)$ est un atlas faible complet qui est une base de K saturée par induction dans K, et on a $K_1 < p(H_1)$. D'après le théorème 3, il existe $K' < H_1$ avec $p(K) = K'$. Le sous-pseudogroupe engendré par K' dans S' admet $H_1 \alpha(K')$ pour base; par suite :

$$\overline{K'} = \overline{H\alpha(K')} = \overline{\beta(K')H} < H \text{ et } \overline{p}(\overline{K'}) = K.$$

Ainsi $\overline{p}$ est un étalement de $A'(S', p)$ vers $A'(S)$.

COROLLAIRE 3. *Soit p un étalement; alors la restriction de $\overline{p}$ à $I(S', p)$ étale $I(S', p)$ dans $I(S)$. Si de plus S est prélocal, la sous-classe $C(S', p)$ de $I(S', p)$ formée des F tels que $\overline{p}(F) \in T(S)$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\dot{I}(S', p)$ que $\overline{p}$ étale dans $T(S)$.*

En effet, la première affirmation résulte du théorème. Si S est prélocal, $T(S)$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\dot{I}(S)$; le corollaire s'en déduit.

REMARQUE. La condition que S soit prélocal est nécessaire dans le corollaire 3 car, si S est seulement sous-prélocal, $T(S)$ n'est pas contenu dans $I(S)$.

DÉFINITION 2. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur sous-inductif de S' vers S; alors, on appellera sous-classe* compatible avec *p une sous-classe compatible B de S' telle que la restriction de p à $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soit compatible avec l'intersection finie.*

PROPOSITION 4. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur sous-inductif de S' vers S; si B est une sous-classe de S' compatible avec p, alors $p(B)$ est compatible dans S et la restriction de p à B est compatible avec l'intersection finie.*

DÉMONSTRATION. Soient $f \in B$ et $g \in B$; puisque B est compatible, on a :

$$f \cap g = f\alpha(f \cap g) = g(\alpha(f)\alpha(g)),$$

d'où : $p(f \cap g) = p(f)(p(\alpha(f))p(\alpha(g))) = p(f)p(\alpha(g))$ et

$$p(f \cap g) = p(g)\alpha(p(f));$$

il en résulte :

$$p(f)\alpha(p(g)) = p(g)\alpha(p(f)) = p(f) \cap p(g) = p(f \cap g).$$

Donc $p(B)$ est compatible.

PROPOSITION 5. *Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductive; pour qu'une sous-classe B de S' soit compatible avec p, il faut et il suffit que $\alpha(B)$ soit compatible avec p et que $p(B)$ soit compatible.*

DÉMONSTRATION. Les conditions sont nécessaires d'après la proposition 4. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soient $f \in B$ et $g \in B$; les relations

$$p(f\alpha(g)) = p(f)p(\alpha(g)) = p(f) \cap p(g) = p(g)\alpha(p(f)) = p(g\alpha(f))$$

et $\quad \alpha(f\alpha(g)) = \alpha(g\alpha(f))$

entraînent

$$f\alpha(g) = g\alpha(f) = f \cap g \text{ et } p(f \cap g) = p(f) \cap p(g).$$

Puisque $f \cap g < \beta(g)f$, on trouve :

$$p(f \cap g) < p(\beta(g)f) < p(\beta(g))p(f) = p(f) \cap p(g) = p(f \cap g),$$

c'est-à-dire $p(\beta(g)f) = p(f \cap g)$; de même $p(\beta(f)g) = p(f \cap g)$, d'où

$$p(\beta(g)f) = p(\beta(f)g) \text{ et } \beta(g)f = \beta(f)g = f \cap g.$$

Donc B est compatible avec p.

COROLLAIRE 1. *Pour tout $F \in H'(S', p)$ tel que $p(F)$ soit compatible, on a $F \in I_f(S', p)$; si $F \in A'(S', p)$ et $\overline{p}(F) \in I(S)$, alors $F \in I(S', p)$.*

En effet, la première affirmation est évidente. Si $F \in A'(S', p)$ et $\overline{p}(F) \in I(S)$, il existe une base $F_1 \in H'(S', p)$ de F telle que $p(F_1) \in I_f(S)$; donc $F_1 \in I_f(S')$ et $F \in I(S', p)$.

COROLLAIRE 2. *Supposons que S soit sous-prélocal et que les conditions $g \in p(S')$, $e \in p(S')$ et $e < \alpha(g)$ entraînent $ge \in p(S')$. Alors $\langle I_f(S), p', I_f(S', p) \rangle$ (resp. $\langle \dot{I}_f(S), p', \dot{I}_f(S', p) \rangle$) est une espèce de structures sous-préinductive (théorème 1).*

DÉMONSTRATION. Soient $E \in I_f(S', p)_o$ et $F \in I_f(S', p)$ tels que $p'(E) = p'(\alpha(F))$. Soit G la classe des éléments $g \in S'$ tels que $p(g) \in p'(F)$ et $\alpha(g) \in E$; d'après la proposition 5, G est alors une sous-classe compatible avec p. Pour tout $e \in E$, il existe $f \in F$ avec $p(e) < \alpha(p(f))$; il en résulte $p(f)p(e) \in p(S')$; donc il existe $g \in G$ tel que

$$p(g) = p(f)p(e) \text{ et } \alpha(g) = e,$$

c'est-à-dire $\alpha(G) = E$. Pour tout $g' \in G$, les relations

$$g \cap g' = g(\alpha(g)\alpha(g')) \text{ et } p(g \cap g') = p(g) \cap p(g') \in p'(F)$$

entraînent $g \cap g' \in G$. Si A est une sous-classe de G admettant un g-agrégat a, on trouve :

$$p(a) = \overset{p(g)}{\bigcup} p(A) \in p'(F) \text{ et } \alpha(a) \in E,$$

d'où $a \in G$ et $G \in I_f(S', p)$. De plus, pour tout $k \in p'(F)$, il existe une sous-classe E' de E telle que $\alpha(k) \in \underline{\bigcup}\, p(E')$; soit M la sous-classe de G formée des m tels que $p(m) < k$ et $\alpha(m) \in E'$; puisque

$$p(\alpha(M)) = p(E') \text{ et } p(M) < k,$$

on a $k \in \underline{\bigcup}\, p(M)$, de sorte que $p(G)$ est une base de $p'(F)$. Ainsi $G \in I_f(S', p)$, $\alpha(G) = E$ et $p'(G) = p'(F)$. Le corollaire se déduit alors du corollaire 1, théorème 1.

DÉFINITION 3. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs, p un foncteur inductif de S' vers S; on dit que S' est* complet relativement à p *si la restriction de p à $\underline{\bigcup}\, B$ est une bijection sur $\underline{\bigcup}\, p(B)$, pour toute sous-classe B de S' compatible avec p. On dira qu'une espèce de structures sous-préinductive $\langle S, p, S' \rangle$ telle que S' soit*
1 *complet relativement à p est* complète.

Il résulte de cette définition que si $p(B)$ admet un agrégat dans S, alors B admet un agrégat dans S'; en particulier, si S est préinductif et S' sous-inductif, alors S' est inductif.

PROPOSITION 6. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs et p un foncteur inductif strict de S' dans S. Si, pour tout complexe $C \in (\tilde{S'}, p)$ (corol. 4, prop. 2), la restriction de p à $\underline{\bigcup}\, C$ est une bijection sur $\underline{\bigcup}\, p(C)$, alors S' est complet relativement à p.*

En effet, soit B une sous-classe de S' qui soit compatible avec p; alors le complexe C obtenu en saturant par induction B est compatible avec p d'après la proposition 1, et on a

$$\underline{\bigcup}\, B = \underline{\bigcup}\, C, \quad \underline{\bigcup}\, p(B) = \underline{\bigcup}\, p(C);$$

comme p applique biunivoquement $\underline{\bigcup}\, C$ sur $\underline{\bigcup}\, p(C)$, p applique aussi biunivoquement $\underline{\bigcup}\, B$ sur $\underline{\bigcup}\, p(B)$ et S' est complet relativement à p.

COROLLAIRE. *Si S est préinductif et S' local, et si $\bigcup \overline{C}$ est défini dans S' pour toute sous-classe complète $\overline{C}$ telle que $\bigcup p(\overline{C})$ soit défini, alors S' est complet relativement à p.*

En effet, soit C un complexe de S' et $\overline{C}$ la sous-classe complète qu'il engendre. Si $f = \bigcup p(C)$, puisque $p(C)$ est base de $p(\overline{C})$, la classe $p(\overline{C})$ admet aussi f pour agrégat. Comme $\overline{C}$ est une sous-classe qui est compatible avec p d'après la propo- 1
sition 1, $\overline{f} = \bigcup \overline{C}$ est défini. C étant contenu dans $\overline{C}$, il est majoré par $\overline{f}$, et par suite admet un agrégat dans le groupoïde inductif S'.

PROPOSITION 7. *Soient S, S' et S'' des groupoïdes sous-préinductifs, p et p' des foncteurs inductifs stricts de S' vers S et de S'' vers S' respectivement. Si S' est complet relativement à p et S'' complet relativement à p', alors S'' est complet relativement à pp'.*

PROPOSITION 8. *Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductive telle que $p(S')$ soit un sous-groupoïde saturé de S; si $\langle S_o, p, S'_o \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive complète, $\langle S, p, S' \rangle$ est complète.*

En effet, soit $C \in \tilde{(S', p)}$ et $f \in \bigcup p(C)$; puisque $\alpha(C)$ est un complexe et que $\alpha(f) \in \bigcup p(\alpha(C))$, il existe un et un seul $e \in \bigcup \alpha(C)$ tel que $p(e) = \alpha(f)$. Comme $p(S')$ est saturé dans S et que (S, p, S') est une espèce de structures, il existe $f' \in S'$ tel que $p(f') = f$ et $\alpha(f') = e$. La classe C admet f' pour sous-agrégat.

THÉORÈME 5. *Soit S un groupoïde sous-local; et soit θ l'application de $T(S)$ dans S qui applique la paratopologie T sur son plus grand élément t. Alors $\langle S, \theta, \dot{T}(S) \rangle$ (th.7- 4 [2]) est une espèce de structures sous-préinductive complète.*

DÉMONSTRATION. Si T est une paratopologie, nous désignons par t son plus grand élément. Soit $(T_i)_{i \in I}$ est une classe de paratopologies majorée par $T \in T(S)$. On a:

$$\theta(T_i) \dot{\cap} \theta(T_j) = \theta(T_i \dot{\cap} T_j) \quad \text{si } i, j \in I.$$

Si $(T_i)_{i \in I}$ admet un T- agrégat T', et si on a $t_i < m < t'$ pour tout $i \in I$, la paratopologie $T'\alpha(m)$ majore T_i, d'où

$$T' \lessdot T'\alpha(m) \text{ et } t' = \overset{t}{\bigcup_{i \in I}} t_i.$$

Donc θ est un foncteur inductif.- La relation $T' \lessdot T$ entraînant que T' est saturé par induction dans T, on a $T' = T$ si $\theta(T') = \theta(T)$.- Soient $f \in S$ et T_o une paratopologie sur $\alpha(f)$; la classe fT_o est l'unique paratopologie sur f telle que $\alpha(fT_o) = T_o$. Par suite $\langle S, \theta, \dot{T}(S) \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive sur S. - Soit C une sous-classe compatible de $\dot{T}(S)$ telle qu'il existe $t' = \overset{f}{\bigcup_{T \in C}} \theta(T)$; la sous-classe inductive faible T' engendrée dans $\varphi(f)$ par la classe réunion C' des sous-classes $T \in C$ est une paratopologie sur t' dont C' est une base. Soit $T \in C$; pour tout $T_1 \in C$, on a

$$T \cap T_1 = T\alpha(T_1) \lessdot T;$$

soient $g \in T$ et $g' \in T'$; puisque g' est le f-agrégat d'une sous-classe A de C', on obtient

$$g'\alpha(g) = g\alpha(g') = \overset{f}{\bigcup} g\alpha(A) \in T,$$

de sorte que T' est un majorant de C dans $\dot{\mathfrak{J}}(S)$. Pour tout majorant M de C, T' est contenu dans M; par ailleurs, soit $m \in M$; la relation

$$m\alpha(g') = \overset{f}{\bigcup} m\alpha(A) \in T'$$

entraîne $M\alpha(T') = T'$; il en résulte que M majore T', d'où $T' \in \underline{\bigcup} C$.

COROLLAIRE. *Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures sous-inductive au-dessus de* S; *alors* p *se décompose canoniquement sous la forme* $p = \theta\tau$, *où* τ *désigne l'étalement canonique de* S' *dans* $\dot{T}(S)$ *(corollaire du théorème 2).*

THÉORÈME 6. *Soit* S *un groupoïde sous-(pré)inductif et* $\underset{\wedge}{S}$ *la sous-classe du groupoïde produit* $S \times S$ *formée des couples* (f', f) *tels que* $f' < f$. *Muni de la relation*

$$(f', f) < (g', g) \text{ si, et seulement si, } f = g \text{ et } f' < g' \text{ ou } (f', f) = (0, 0),$$

$\underset{\wedge}{S}$ *est un groupoïde (pré)inductif. Soit* S^* *le groupoïde* S *auquel on a ajouté un élément* $0^* < 0$; *alors* S^* *est un groupoïde quotient inductif de* $\underset{\wedge}{S}$ *le foncteur projection canonique* π *étant défini par :*

$$\pi((f', f)) = f' \text{ si } f \neq 0 \text{ et } \pi((0,0)) = 0^*.$$

De plus π *est un étalement de la classe préinductive* $\underset{\wedge}{S}$ *dans* S^*.

DÉMONSTRATION. L'intersection de (f', f) et de (g', g) est $(0, 0)$ si $f \neq g$ et $(f' \cap g', f)$ si $f = g$. Tout élément de $\underset{\wedge}{S}$ est contenu dans un élément maximal. Supposons $g' . f'$ défini, où $g' \in S$ et $f' \in S$; comme

$$(g', g').(f', f') = (g'.f', g'.f')$$

a $g'.f'$ pour image par π, S^* est un groupoïde quotient de $\underset{\wedge}{S}$ d'après la proposition 10-2-I [1].- Si (f', f) et (f', f_1) sont deux éléments de $\overset{-1}{\pi}(f')$, ces éléments ne sont pas comparables dans $\underset{\wedge}{S}$. Si $f'_1 < f'$ dans S, pour tout $(f', g) \in \overset{-1}{\pi}(f')$, on a

$$(f'_1, g) \in \underset{\wedge}{S} \text{ et } (f'_1, g) < (f', g).$$

Il en résulte d'après le théorème 1-1 que $\underset{\wedge}{S}$ admet S^* pour groupoïde quotient inductif; de plus π est un étalement de la classe préinductive $\underset{\wedge}{S}$ dans S^*. Mais $(S^*, \pi, \underset{\wedge}{S})$ peut ne pas être une espèce de structures.

COROLLAIRE 1. *Si S est sous-inductif, toute sous-classe de $\underset{\wedge}{S}$ compatible avec π admet un agrégat dans $\underset{\wedge}{S}$.*

En effet, pour qu'une sous-classe B de $\underset{\wedge}{S}$ soit une classe compatible avec π, il faut et il suffit que B soit majorée par $(b', b) \in \underset{\wedge}{S}$. La classe B admettant un b-agrégat $\bar{b}$ dans S, on a : $\bigcup B = (\bar{b}, b)$ dans $\underset{\wedge}{S}$.

COROLLAIRE 2. *Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures sous-préinductive (presque) au-dessus de S; alors $\langle \underset{\wedge}{S}, p \wedge p, \underset{\wedge}{S}' \rangle$, où $p \wedge p$ est une restriction de $p \times p$, est une espèce de structures préinductive (presque) au-dessus de $\underset{\wedge}{S}$. Si S' est sous-inductif et p inductif, $\underset{\wedge}{S}'$ est complet relativement à $p \wedge p$. Si p est un étalement de S' dans S (et si S' est complet relativement à p), $p \wedge p$ est un étalement de $\underset{\wedge}{S}'$ dans $\underset{\wedge}{S}$ (et $\underset{\wedge}{S}'$ est complet relativement à $p \wedge p$).*

DÉMONSTRATION. La première affirmation est évidente. Soit p un étalement; pour tout $(b', b) < p \times p(f', f)$ on a $b = p(f)$ et $b' < p(f')$; par suite il existe $f'_1 < f'$ tel que $p(f'_1) = b'$ et

$$(p \times p)((f'_1, f)) = (b', p(f)) = (b', b).$$

Ainsi $p \wedge p$ est un étalement.- Soit C une sous-classe de $\underset{\wedge}{S}'$ qui soit compatible avec $p \wedge p$ et dont l'image par $p \wedge p$ admette un agrégat; soient $(f'_i, f_i) \in C$ et $(f'_j, f_j) \in C$; comme $p(f_i) = p(f_j)$ et

$$(p(f'_i) \cap p(f'_j), p(f_i)) = p \wedge p((f'_i, f_i) \cap (f'_j, f_j)),$$

on trouve

$$f_i = f_j \text{ et } p(f'_i) \cap p(f'_j) = p(f'_i \cap f'_j).$$

Si S' est sous-inductif, la classe B des f'_i tels que $(f'_i, f_i) \in C$ admet un f_i-agrégat b', d'où $(b', f_i) = \bigcup C$. Si p est un étalement et si S' est complet relativement à p, la classe B est une sous-classe qui est compatible avec p et dont la projection admet un $p(f_i)$-agrégat a, de sorte qu'il existe $a' \in S'$ tel que

$$p(a') = a \text{ et } a' = \overset{f_i}{\bigcup} B;$$

donc $\underset{\wedge}{S}'$ est complet relativement à $p \wedge p$.

PROPOSITION 9. *Soit S un groupoïde local, S' un groupoïde sous-préinductif et p un foncteur sous-inductif de S' vers S. La classe $\tilde{C}(S', p)$ des complexes $C \in (\tilde{S}', p)$ tels qu'il existe $\bigcup p(C)$ dans S est un sous-groupoïde saturé par induction de $(\tilde{S}', p)$ complet relativement au foncteur inductif κ qui associe $\bigcup p(C)$ à C.*

DÉMONSTRATION. Soit $C \in \tilde{C}(S', p)$. Si $C'.C$ est défini, où $C' \in \tilde{C}(S', p)$, on a

$$\kappa(C').\kappa(C) = \bigcup p(C').\bigcup p(C) = \bigcup p(C').p(C) = \bigcup p(C'.C),$$

d'où $C'.C \in \tilde{C}(S',p)$ et $\kappa(C').\kappa(C) = \kappa(C'.C)$. Soit $C_1 \in \tilde{C}(S',p)$ tel que $C_1 \subset C$. La classe $p(C_1)$ étant majorée par $\kappa(C)$ admet un agrégat et par suite $C_1 \in \tilde{C}(S',p)$. Soit $C_2 \subset C$, où $C_2 \in \tilde{C}(S',p)$; on a $C_1 \cap C_2 = C_1 \alpha(C_2)$, donc

$$\kappa(C_1 \cap C_2) = \kappa(C_1)\alpha(\kappa(C_2)) = \kappa(C_1) \cap \kappa(C_2).$$

Ainsi κ est un foncteur sous-inductif. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une sous-classe de $\tilde{C}(S',p)$ qui est compatible avec κ et telle que $a = \bigcup_{i \in I} \kappa(C_i)$ soit défini; d'après la proposition 1, pour tout $c \in C_i$ et tout $c' \in C_j$, où $i, j \in I$, on a

$$\kappa(c^{>}) \cap \kappa(c'^{>}) = \kappa(c^{>} \cap c'^{>}),$$

c'est-à-dire $p(c) \cap p(c') = p(c \cap c')$; la classe des éléments $c \in C_i$, où $i \in I$ étant compatible, elle engendre un complexe C tel que $\kappa(C) = a$. On a $C = \bigcup_{i \in I} C_i$, de sorte que $\tilde{C}(S',p)$ est complet relativement à κ.

REMARQUE. Si de plus $\langle S, p, S' \rangle$ est une espèce de structures sous-préinductive, alors $(S, \kappa, \tilde{C}(S',p))$ est une espèce de structures. Mais en général, κ n'est pas inductif strict; en effet, supposons p inductif et soient f et g deux éléments de S' admettant un sous-agrégat h; le complexe F engendré par f et g appartient à $\tilde{C}(S',p)$ et on a $\kappa(F) = p(h) = \kappa(h^{>})$.

THÉORÈME 7 *(Théorème de complétion). Soit $\langle S, p, S' \rangle$ une espèce de structures locale au-dessus de S; soit $(\overline{S}', p)$ la sous-classe de $C(S',p)$ formée des sous-classes complètes (corollaire 3 du théorème 4); alors $\langle S, \theta\overline{p}, (\overline{S}', p) \rangle$ est une espèce de structures locale complète, qui est un élargissement inductif de $\langle S, p, S' \rangle$ déterminé à une équivalence près par la condition (A) suivante :*

1 *(A) Pour toute espèce de structures locale complète $\langle S, q, \Sigma' \rangle$ telle que S' soit une base de Σ' et que la restriction de q à S' soit p, il existe une et une seule application covariante inductive $\langle Id_S, \sigma_o \rangle$ de $\langle S, \theta\overline{p}, (\overline{S}', p) \rangle$ sur $\langle S, q, \Sigma' \rangle$, telle que la restriction de σ_o à S'_o soit l'identité et que $q\sigma_o$ soit une restriction de $\theta\overline{p}$.*

DÉMONSTRATION. Un élément de $(\overline{S}', p)$ est une sous-classe complète C de S', compatible avec p et telle que $\overline{p}(C) \in T(S)$, c'est-à-dire que $\theta\overline{p}(C) = \bigcup p(C)$ soit défini. Le groupoïde $(\overline{S}', p)$ est saturé par induction dans $\dot{I}(S',p)$, car S est local. On peut se ramener au cas où p est un étalement en appliquant, si besoin est, la décomposition canonique du corollaire du théorème 5, puisque $(\overline{S}', p) = (\overline{S}', \tau)$, et que $T(T(S))$ est complet relativement à sa projection canonique sur $T(S)$, et par suite relativement à $\theta\theta'$.- Il résulte du corollaire 3 du théorème 4 que la restriction de $\overline{p}$ à $(\overline{S}', p)$ est un étalement dans $T(S)$ et que $\langle T(S), \overline{p}, (\overline{S}', p) \rangle$ est une espèce de structures locale; aussi $\langle S, \theta\overline{p}, (\overline{S}', p) \rangle$ est-elle une espèce de structures locale. Comme S' est une base de $(\overline{S}', p)$ saturée par induction et que p est la restriction de $\theta\bar{p}$ à S', on a : $\langle S, p, S' \rangle \,\bar{\prec}\, \langle S, \theta\bar{p}, (\bar{S}', p) \rangle$.- Soit A une partie de $(\bar{S}', p)$ compatible relativement à $\bar{p}$ telle que $\bigcup(\theta\bar{p}(A))$ soit défini. D'après la proposition 1, la classe des minorants dans $(\bar{S}', p)$ des éléments de A est compatible, de sorte que, si $c \in C$, $c' \in C'$, $C \in A$ et $C' \in A$, on a

$$\bar{p}(c^{>}) \cap \bar{p}(c'^{>}) = \bar{p}(c^{>} \cap c'^{>});$$

c'est-à-dire la classe des éléments $c \in C$, $C \in A$ est compatible dans S'. Donc elle engendre une sous-classe complète $\bar{A}$ telle que

$$\theta\bar{p}(\bar{A}) = \theta\bar{p}(A) \text{ et } \bar{A} = \bigcup A \text{ dans } (\bar{S}', p).$$

Par conséquent $\langle S, \theta\bar{p}, (\bar{S}', p) \rangle$ est une espèce de structures complète .- Soit $\langle S, q, \Sigma' \rangle$ une espèce de structures locale complète au-dessus de S telle que S' soit une base de Σ'. Pour tout $C \in (\bar{S}', p)$, la classe des éléments $c \in C$ est une classe compatible dans S' et $\bigcup p(C)$ existe; il en résulte que C est complète rela- 1
tivement à q; par suite elle admet un agrégat Γ dans Σ' tel que $q(\Gamma) = \bigcup p(C)$. Soit σ l'application $C \to \Gamma$ de $(\bar{S}', p)$ dans Σ'. Pour tout $\Gamma \in \Sigma'$, la sous-classe complète engendrée dans S' par les éléments $f \in S'$, $f < \Gamma$, est appliquée par σ sur 2
Γ. Soient $C \in (\bar{S}', p)$ et $C' \in (\bar{S}', p)$ tels que $\bar{a}(C') = \bar{b}(C)$; puisque $C' \odot C$ admet $C'.C$ pour base et que Σ' est local, on a

$$\sigma(C' \odot C) = \sigma(C').\sigma(C).$$

Ceci montre que σ est un foncteur, dont la restriction à S' est l'identité; de plus σ est un étalement de la classe locale $(\bar{S}', p)$ sur Σ'. Autrement dit, $\langle Id_S, \sigma_o \rangle$ vérifie la condition (A), en désignant par σ_o la restriction de σ à Σ'_o.- Inversement soit $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$ une espèce de structures locale complète vérifiant la condition (A) relativement à une application covariante $\langle Id_S, \sigma'_o \rangle$; celle-ci détermine un unique foncteur inductif σ' de S'_1 sur $(\bar{S}', p)$ se réduisant à l'identité sur S' et admettant σ'_o pour restriction à $(S'_1)_o$ (prop. 11-1). Soit $f' \in S'_1$; on a $f' = \bigcup_{S'_1} F$, où F est une sous-classe de S'. Par hypothèse $\sigma'(f')$ est une sous-classe complète contenant F et on a $\sigma'(f') = \bigcup \sigma'(F)$, de sorte que $\sigma'(f')$ est la sous-classe complète engendrée par F dans S' et, d'après ce qui précède, $\sigma(\sigma'(f')) = f'$. De même $\sigma'\sigma = Id$, donc σ' est une équivalence.- Remarquons que la condition (A) entraîne que S' est saturé par induction dans Σ'.

COROLLAIRE. Σ' *est un groupoïde quotient inductif de* $(\bar{S}', p)$.

Démonstration analogue à celle du corollaire du théorème 2-5 [2].

DÉFINITION 4. *Avec les notations du théorème 7, l'espèce de structures* $\langle S, \theta\bar{p}, (\bar{S}', p) \rangle$ *est appelée* la complétion de $\langle S', p, S \rangle$ *ou* la complétion de S' relativement à p. 3+

THÉORÈME 8 *(Théorème d'élargissement complet). Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *une espèce de structures locale au-dessus de* S *et soit* (S, p_1, S'_1) *l'élargissement maximal (thé. 2-2-III [1]) de* $(S, \theta\overline{p}, (\overline{S'}, p))$. *La complétion de l'espèce de structures locale* $\langle S, p_1, S'_1 \rangle$ *est un élargissement inductif* $\langle S, \theta_1 \overline{p}_1, (\overline{S'_1}, p_1) \rangle$ *de* $\langle S, p, S' \rangle$. *Une structure* $\overline{s}$ *de cet élargissement s'identifie à un atlas faible complet* F *saturé par induction tel que* $\overline{s} = \bigcup \beta(F)$ *et que* $\alpha(F)$ *soit une composante inductive faible de* S'.

Ce théorème résulte des théorèmes 7, 4·2 et du corollaire 2, proposition 5·2. L'atlas F est la classe des couples $(f, s) \in S \times S'_0$ tels que

1+ $$\alpha(f) = p(s) \quad \text{et} \quad (f, s) S' < \overline{s}.$$

DÉFINITION 5. *Avec les notations du théorème 8, l'espèce de structures complète* $\langle S, \theta_1 \overline{p}_1, (\overline{S'_1}, p_1) \rangle$ *est appelée* élargissement complet de $\langle S, p, S' \rangle$.

THÉORÈME 9 *(Transitivité verticale). Soit* $\langle S, p, S' \rangle$ *et* $\langle S', p', S'' \rangle$ *deux espèces de structures locales où* $\langle S', p', S'' \rangle$ *est une espèce de superstructures locale au-dessus de* $\langle S, p, S' \rangle$ *; soient* $\langle (\overline{S'}, p), q', (\overline{S''}, p'') \rangle$ *et* $\langle S, q, (\overline{S'}, p) \rangle$ *les complétions de* $\langle (\overline{S'}, p), p', S'' \rangle$ *et de* $\langle S, p, S' \rangle$. *Alors la complétion de* $\langle S, pp', S'' \rangle$ *est identique à* $\langle S, qq', (\overline{S''}, p'') \rangle$.

DÉMONSTRATION. Soit $C'' \in (\overline{S''}, p'')$; la classe $p'(C'')$ admettant un agrégat C' dans $(\overline{S'}, p)$, elle engendre la sous-classe complète C' et on a $\bigcup pp'(C'') = \bigcup q(C')$, d'où $C'' \in (\overline{S''}, pp')$.- Inversement, soit $C'' \in (\overline{S''}, pp')$; pour tout $c \in C''$ et tout $c' \in C''$, les relations

$$pp'(c \cap c') = pp'(c) \cap pp'(c'), \; p'(c \cap c') < p'(c) \cap p'(c')$$

et $$p(p'(c \cap c')) < p(p'(c) \cap p(c')) < pp'(c) \cap pp'(c')$$

entraînent $$p(p'(c) \cap p'(c')) = pp'(c) \cap pp'(c') = pp'(c \cap c'),$$

d'où $p'(C'') \in (\overline{S'}, p)$. Comme p est inductif strict, il en résulte $p'(c) \cap p'(c') = p'(c \cap c')$ de sorte que C'' est aussi compatible avec p'; par suite $C'' \in (\overline{S''}, p'')$. Ceci montre que $(\overline{S''}, p'') = (\overline{S''}, pp')$.

COROLLAIRE. *Si* $\langle \overline{S'_1}, \overline{p'_1}, \overline{S''_1} \rangle$ *et* $\langle S, \overline{p}_1, \overline{S'_1} \rangle$ *sont les élargissements complets de* $\langle \overline{S'_1}, p', S'' \rangle$ *et* $\langle S, p, S' \rangle$, *alors l'élargissement complet de* $\langle S, pp', S'' \rangle$ *est équivalent à l'espèce de structures complète* $\langle S, \overline{\overline{p'_1} \overline{p}_1}, \overline{S''_1} \rangle$.

Ce corollaire résulte du théorème 3-2-III [1] et admet des corollaires analogues.

Si F est un atlas faible complet d'un groupoïde sous-préinductif S', soit $\mathfrak{F}$ le sous-groupoïde de $S' \times I \times I$, où I est une classe, engendré par la classe $(F, (2, 1))$, où $2 \in I$ et $1 \in I$ (cor. 2 prop. 3-3 [2]).

PROPOSITION 10. *Soient S et S' deux groupoïdes sous-préinductifs, F un atlas faible complet de S' et q un foncteur inductif de $\alpha(F)$ vers S; si $\bar{q}$ est une application de F dans S telle que l'on ait, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$*

$$(\bar{q}(f))^{-1}\bar{q}(f') = q(f^{-1}f'), \text{ si } f^{-1}f' \text{ est défini,}$$

alors il existe un foncteur inductif q' de $\mathfrak{F}$ vers S prolongeant $\bar{q} \times Id \times Id$ et dont la restriction à $(b(F),(2,2))$ est un foncteur inductif. De plus $(F,(2,1))$ est compatible avec q'.

DÉMONSTRATION. Pour tout $f \in F$, on a

$$q(\alpha(f)) = (\bar{q}(f))^{-1}(\bar{q}(f)) = \alpha(\bar{q}(f)).$$

Soit $e \in \alpha(F)$, $e < \alpha(f)$; la relation $f^{-1}(fe) = e$ entraîne

$$(\bar{q}(f))^{-1}\bar{q}(fe) = q(e), \text{ d'où } \bar{q}(f)q(e) = \beta(\bar{q}(f))\bar{q}(fe) = \bar{q}(fe),$$

puisque $\bar{q}(fe) < \bar{q}(f)$. - Soit $b \in a(F)$. Soit $f.b$ défini; de l'égalité $f^{-1}(f.b) = b$, on déduit :

$$(\bar{q}(f))^{-1}\bar{q}(f.b) = q(b) \text{ et } \beta(\bar{q}(f))\bar{q}(f.b) = \bar{q}(f)q(b);$$

comme $\alpha(\bar{q}(f.b)) = q(\alpha(b))$ et $\alpha(\bar{q}(f)) = q(\alpha(f)) = \beta(q(b))$,

il en résulte $\bar{q}(f.b) = \bar{q}(f).q(b)$. Par ailleurs si $\beta(b)\alpha(f)$ est défini, on a

$$\bar{q}(fb) = \bar{q}(f\beta(b)).q(\alpha(f)b) = \bar{q}(f)q(b),$$

d'après ce qui précède. Soient f', f_1 et f'_1 des éléments de F tels que $f'f^{-1} = f'_1f_1^{-1}$ ou encore $f'f^{-1}f_1 = f'_1\alpha(f_1)$; on a :

$$\bar{q}(f'(f^{-1}f_1)) = \bar{q}(f')q(f^{-1}f_1) = \bar{q}(f')(\bar{q}(f))^{-1}\bar{q}(f_1) = \bar{q}(f'_1)\ \alpha(\bar{q}(f_1));$$

par suite $\bar{q}(f')(\bar{q}(f))^{-1}\beta(\bar{q}(f_1)) = \bar{q}(f'_1)\bar{q}(f_1)^{-1};$

de même : $\bar{q}(f'_1)(\bar{q}(f_1))^{-1}\beta(\bar{q}(f)) = \bar{q}(f')(\bar{q}(f))^{-1},$

donc : $\bar{q}(f'_1)(\bar{q}(f_1))^{-1} = \bar{q}(f')(\bar{q}(f))^{-1}.$

- Il s'ensuit qu'on définit une application q' de $\mathfrak{F}$ dans S en posant :

$$q'(g,(j,i)) = \begin{cases} \bar{q}(g) & \text{si } (j,i) = (2,1), \\ q(g) & \text{si } (j,i) = (1,1), \\ (\bar{q}(g^{-1}))^{-1} & \text{si } (j,i) = (1,2), \\ \bar{q}(f')(\bar{q}(f))^{-1} & \text{si } (j,i) = (2,2) \text{ et} \\ & g = f'f^{-1} \text{ où } f \in F,\ f' \in F. \end{cases}$$

Soient $(g',(k,j)) \in \mathfrak{F}$ et $(g,(j,i)) \in \mathfrak{F}$. La définition de q' entraîne

$$q'(g',(k,j))q'(g,(j,i)) = q'(g'g,(k,i))$$

si $(j,i) \neq (2,2)$. Supposons $(j,i) = (2,2)$, il existe $f \in F$ et $f' \in F$ tels que $g = f' f^{-1}$; si $k = 1$, on a $g' \in F^{-1}$ et :

$$q'(g' f' f^{-1}, (1,2)) = (\overline{q}(f f'^{-1} g'^{-1}))^{-1} = (\overline{q}(f)\overline{q}(f')^{-1}\overline{q}(g'^{-1}))^{-1}$$
$$= q'(g', (1,2))\, q'(g, (2,2));$$

si $k = 2$, c'est-à-dire si $g' = f'_1 f_1^{-1} \in b(F)$, on trouve $g'g = (g' f') f^{-1}$, d'où

$$q'(g'g, (2,2)) = \overline{q}(g' f')(\overline{q}(f))^{-1} = \overline{q}(f'_1)\overline{q}(f_1)^{-1}\overline{q}(f')\overline{q}(f)^{-1}$$
$$= q'(g', (2,2))\, q'(g, (2,2)).$$

Donc q' est un foncteur sous-inductif, ainsi que sa restriction à $(b(F), (2,2))$. - Soit $(A, (2,2))$ une sous-classe de $\beta(\mathcal{F})$ admettant un sous-agrégat $c \in (\beta(F), (2,2))$. Il existe $f \in F$ tel que $c = (\beta(f), (2,2))$. La classe Af étant majorée par f, on a:

$$f = \overset{f}{\bigcup} Af, \ \hat{f} = \overset{\overline{q}(f)}{\bigcup} \overline{q}(Af) < \overline{q}(f),$$
$$\alpha(\overline{q}(f)) = q(\alpha(f)) = \overset{q(e)}{\bigcup} q(\alpha(Af)) = \overset{q(e)}{\bigcup} \alpha(\overline{q}(Af)) = \alpha(\hat{f}),$$

où $e = \alpha(f)$, ce qui a pour conséquence :

$$\overline{q}(f) = \hat{f} = \overset{\overline{q}(f)}{\bigcup} q'(A, (2,2))\overline{q}(f)$$

et par suite :

$$\beta(\overline{q}(f)) = q'(c) = \overset{q'(c)}{\bigcup} \beta(q'(A), (2,2)).$$

D'après la proposition 4-1, q' est donc un foncteur inductif et, en vertu de la proposition 2, $(F, (2,1))$ est compatible avec q'.

COROLLAIRE 1. *Si $F \in H'(S')$ et si la restriction de q à $\alpha(a(F))$ est une bijection sur une sous-classe inductive faible Γ_o de S_o, alors la restriction de q' à $(\beta(F), (2,2))$ est une injection et $\overline{q}(F)$ est un atlas faible complet tel que $a(\overline{q}(F)) = q(a(F))$.*

DÉMONSTRATION. Nous désignerons par $\hat{q}'$ le foncteur $g \to q'(g, (2,2))$ de $b(F)$ vers S.- Soient $f \in F$ et $e \in \beta(F)$ tels que $\hat{q}'(\beta(f)) = \hat{q}'(e)$; on a

$$q'(ef, (2,1)) = \hat{q}'(e)\overline{q}(f) = \hat{q}'(\beta(f))\overline{q}(f),$$

d'où $$\alpha(q'(ef, (2,1)) = q(\alpha(ef)) = \alpha(\overline{q}(f)) = q(\alpha(f)),$$

ce qui entraîne $\alpha(f) = \alpha(ef)$ et $e = \beta(f)$.- Soit $\hat{E}'$ une sous-classe de $\hat{q}'(\beta(F))$ majorée par $\hat{e}' \in \hat{q}'(\beta(F))$; il existe une sous-classe E' de $\beta(F)$ et $e \in \beta(F)$ tels que $\hat{E}' = \hat{q}'(E')$, $\hat{e}' = \hat{q}'(e)$ et $E' < e$, car F est propre et que la restriction de $\hat{q}'$ à $\beta(F)$ est une bijection compatible avec l'intersection finie. Soit $e = \beta(f)$, où $f \in F$, et supposons que $\hat{E}'$ admette un $\hat{e}'$-agrégat b dans S. La classe $\hat{E}'\overline{q}(f)$ admet $b\overline{q}(f) = g$ pour $\overline{q}(f)$-agrégat et on a

$$\alpha(g) = \alpha(\overset{\overline{q}(f)}{\bigcup} \overline{q}(E'f)) = \overset{\alpha(g)}{\bigcup} q(\alpha(E'f)) \in \Gamma_o.$$

Par suite il existe $a \in \alpha(F)$ tel que $q(a) = \alpha(g)$; comme $fa \in F$, on a :

$$\overline{q}(fa) = \overline{q}(f)\,\alpha(g) = g, \text{ d'où } \beta(\overline{q}(fa)) = \hat{q}'(\beta(fa)) = b$$

et $b \in \hat{q}'(\beta(F))$. Donc $\hat{q}'(\beta(F))$ est une sous-classe inductive faible.- Soit $\mathcal{G}$ le sous-pseudogroupe faible de $S \times (I \times I)$ engendré par $(\overline{q}(F), (2,1))$; d'après ce qui précède, $\mathcal{G}_o$ est formé de $(\Gamma_o, (1,1))$ et de $(q'(\beta(F)), (2,2))$. L'application

$$(g, (j,i)) \to (q'(g), (j,i))$$

de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est un foncteur inductif, qui étale $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$; il résulte du théorème 3 que $(\overline{q}(F), (2,1))$ est un atlas faible complet de S tel que

$$a((\overline{q}(F), (2,1))) = (q(a(F)), (1,1)).$$

Par conséquent $\overline{q}(F)$ est un atlas faible complet de S et $a(\overline{q}(F)) = q(a(F))$.

COROLLAIRE 2. *Si S est un groupoïde local complet et si q_1 est un foncteur inductif de $\overline{a}(F)$ vers S prolongeant q, le foncteur q' construit dans la proposition peut être prolongé en un foncteur inductif q'_1 de $\overline{\mathcal{F}}$ vers S, dont la restriction à $(\overline{a}(F), (1,1))$ soit $q_1 \times Id \times Id$, en désignant par $\overline{\mathcal{F}}$ le sous-pseudogroupe de $S \times I \times I$ engendré par $\mathcal{F}$.*

DÉMONSTRATION. $\overline{\mathcal{F}}$ est la classe réunion de $(\overline{F}, (2,1))$, $(\overline{F}^{-1}, (1,2))$, $(\overline{a}(F), (1,1))$ et $(\overline{b}(F), (2,2))$. Soit $(h, (j,i)) \in \overline{\mathcal{F}}$ et soit $(A, (j,i))$ la classe des $(f, (j,i)) \in \mathcal{F}$ tels que $f < h$; la classe A admet h pour sous-agrégat; la classe $\overline{q}(A)$ étant compatible dans S, elle admet un agrégat a; nous poserons $q'_1(h, (j,i)) = a$; on a :

$$\alpha(a) = \bigcup \alpha(\overline{q}(A)) = q_1(\bigcup \alpha(A)) = q_1(\alpha(h)).$$

Si A' est une sous-classe de A admettant h pour sous-agrégat, la classe $\overline{q}(A')$ est majorée par a; comme $\alpha(\overset{h}{\bigcup} A') = \alpha(h)$, on a :

$$\alpha(a) = q_1(\alpha(h)) = \bigcup q(\alpha(A')) = \alpha(\bigcup \overline{q}(A')),$$

d'où $q'_1(\overset{\hat{h}}{\bigcup}(A', (j,i)) = q'_1(h, (j,i))$, où $\hat{h} = (h, (j,i))$.- Soient $(h', (k,j)) \in \overline{\mathcal{F}}$ et 1
$\hat{B} = (B, (k,j))$ la classe des $(b, (k,j)) \in \mathcal{F}$ tels que $b < h'$. La classe B admet h' pour sous-agrégat et $\hat{h}'\hat{h} = (h'h, (k,i)) \in \overline{\mathcal{F}}$ est un sous-agrégat de $\hat{B}.\hat{A}$ où $\hat{A} = (A, (j,i))$. Par suite

$$q'_1(\hat{h}'\hat{h}) = \bigcup q'(\hat{B}.\hat{A}) = \bigcup q'(\hat{B})\,q'(\hat{A}) = (\bigcup q'(\hat{B}))(\bigcup q'(\hat{A})) = q'_1(\hat{h}')\,q'_1(\hat{h}).$$

Donc q'_1 est un foncteur inductif de $\overline{\mathcal{F}}$ vers S prolongeant q'.

COROLLAIRE 3. *Soit $F \in H(S')$ et G un atlas complet de S contenant $\overline{q}(F)$, tel que $\overline{q(a(F))} = \overline{a}(G)$ et que la restriction de q à $\alpha(\overline{a(F)})$ soit une injection sur une sous-classe inductive faible, base de $\alpha(G)$. Si $\beta(G) = \beta(\overline{q}(F))$ (resp. si S est sous-prélocal et si $\beta(G)$ et $\beta(\overline{q}(F))$ admettent un même sous-agrégat), alors $\overline{q}(F)$*

est une base de G *et* $\hat{q}'(b(F))$ *une base de* $\overline{b}(G)$.

DÉMONSTRATION. $\overline{q}(F)$ est un atlas faible complet tel que $a(\overline{q}(F)) = q(a(F))$, d'après le corollaire 1; soit F' l'atlas complet qu'il engendre dans S. On a :

$$\overline{a}(F') = \overline{q(a(F))} = \overline{a}(G);$$

de plus $\beta(F')G \subset F'(F'^{-1}G) \subset F'\overline{a}(G) = F' \subset \beta(F')G$,

d'où $F' = \beta(F')G$.- Supposons $\overline{\beta(G)} = \overline{\beta(\overline{q}(F))} = \overline{\beta(F')}$; soient $g \in G$ et $f' \in F'$ tels que $g\alpha(f')$ soit défini. La relation

$$g\alpha(f') = \beta(g\alpha(f'))(g\alpha(f')) \in \overline{\beta(F')}G \subset F'$$

1 entraîne $F' = G\alpha(F')$; par suite $F' \prec G$ et $F' = G$.- De plus, $\overline{b}(G) = \overline{b}(F')$ admet $b(\overline{q}(F_1))$ pour base, où F_1 est une base de F appartenant à $H'(S')$. Comme q est une bijection de $\alpha(a(F))$ sur une base de $\alpha(G)$, si $h = \overline{q}(f'_1)\overline{q}(f_1)^{-1}$ est défini, où $f_1 \in F_1$ et $f'_1 \in F_1$, on a

$$h = \hat{q}'(f'_1 f_1^{-1}) \in \hat{q}'(b(F)).$$

Il en résulte que $\hat{q}'(b(F))$ est une base de $\overline{b}(G)$.- Supposons S sous-prélocal et $\overset{c}{\bigcup}\overline{\beta(G)} = \overset{c}{\bigcup}\overline{\beta(\overline{q}(F))}$. Soit $g \in G$; en appliquant l'axiome D, on obtient

$$\beta(g) = \overset{c}{\bigcup}\beta(\overline{q}(F))\beta(g).$$

Si $\beta(\overline{q}(f))g$ est défini, où $f \in F$, on a $\beta(\overline{q}(f))g \in \beta(F')G = F'$; par conséquent

$$\beta(g) \in \overline{\beta(\overline{q}(F))} \text{ et } \overline{\beta(G)} = \overline{\beta(\overline{q}(F))}.$$

On est ainsi ramené au cas précédent, ce qui achève la démonstration.

DÉFINITION 6. *Soient* S *et* S' *deux groupoïdes sous-préinductifs,* F *et* G *deux atlas complets de* S' *et* S *respectivement et* q *un foncteur inductif de* $\overline{a}(F)$ *vers* $\overline{a}(G)$; *on dit que* G *est* associé *à* F *si l'on s'est donné une application* $\overline{q}$ *de* F *sur une base de* G *telle que, si* $f \in F$, $f' \in F$ *et si* $f^{-1}f'$ *est défini, on ait :*

$$(\overline{q}(f))^{-1}\overline{q}(f') = q(f^{-1}f').$$

THÉORÈME 10. *Soit* S' *un groupoïde sous-préinductif et* $\overline{S}'$ *un élargissement inductif de* S' *qui soit aussi un élargissement de* S'; *soit* q *un foncteur inductif de* S' *vers un groupoïde sous-préinductif* S *dont la restriction à* S'_o *soit une bijection sur* S_o; *alors il existe un élargissement inductif* $\overline{S}$ *de* S *qui est un groupoïde quotient inductif de* $\overline{S}'$ *relativement à un foncteur inductif* $\overline{q}$ *dont la restriction à* S' *est* q.

DÉMONSTRATION. Soit κ' un foncteur inductif pour lequel $\overline{S}'$ est une extension inessentielle de S' (proposition 4-2-III [1]) et posons $p = q\kappa'$. D'après la proposition 8-1-III [1] et le corollaire de la proposition 4-2-III [1], l'image canonique de $\overline{S}'$ dans $p^*_o(S)$ est un élargissement de S (lequel est identifié à $q^*_o(S)$) et q se prolonge en un foncteur $\overline{q}$ de $\overline{S}'$ vers $\overline{S}$ tel que $\overline{q}_o$ soit une bijection. On a

$$\overline{q}(k) = (p(k), \beta(k), \alpha(k)).$$

De plus $\overline{S}$ est un groupoïde sous-préinductif pour la relation d'ordre induite sur $\overline{S}$ par la classe ordonnée produit $\overline{S}'_o \times \overline{S}'_o \times S$. Comme S' est saturé par induction dans $\overline{S}'$, la classe S est saturée par induction dans $\overline{S}$, de sorte que l'on a $S \preccurlyeq \overline{S}$. $\overline{q}$ est évidemment inductif.- Soit $k < k'$ dans $\overline{S}'$ et $k'' \in \overline{S}'$ tel que $\overline{q}(k') = \overline{q}(k'')$, i.e.

$$p(k') = p(k''), \ \alpha(k') = \alpha(k'') \text{ et } \beta(k') = \beta(k'').$$

Posons $k_1 = k''\alpha(k')$; on a :

$$k = k'\alpha(k), p(k) = p(k')\, q(\alpha(k))$$

et
$$p(k_1) = p(k'')q(\alpha(k')) = p(k')q(\alpha(k')) = p(k).$$

Donc les conditions du théorème 1.1 sont vérifiées et $\overline{S}$ est un groupoïde quotient inductif de $\overline{S}'$.

THÉORÈME 11. *Soient S et S' deux groupoïdes locaux. Soit q un foncteur inductif de S' vers S dont la restriction à S'_o soit une bijection sur S_o. Si $\tilde{S}'$ est un élargissement inductif de S', il existe un élargissement inductif $\tilde{S}$ de S, défini à un isomorphisme près, qui soit un groupoïde quotient inductif de $\tilde{S}'$ relativement à un foncteur inductif $\tilde{q}$ prolongeant q et dont la restriction à $\tilde{S}'_o$ soit une bijection.*

DÉMONSTRATION. Il existe un élargissement $\overline{S}'$ de S', base de $\tilde{S}'$. D'après la prop. 3.2, ce $\overline{S}'$ est un groupoïde local; on peut lui appliquer le théorème 10, dont nous reprenons les notations. D'après le corollaire de la proposition 2.2, κ' se prolonge en un foncteur inductif $\overline{\kappa}'$ de $\tilde{S}'$ sur S'. Soit $\tilde{S}$ l'image canonique de $\tilde{S}'$ dans $\overline{p}^*_o(S)$, où $\overline{p} = q\overline{\kappa}'$. L'application $\tilde{q}$:

$$k \mapsto (\overline{p}(k), \beta(k), \alpha(k)), \text{ où } k \in \tilde{S}',$$

définit un foncteur inductif $\tilde{q}$ de $\tilde{S}'$ sur $\tilde{S}$ prolongeant q. Puisque $\overline{S}'$ est une base de $\tilde{S}'$, pour tout $k' \in \tilde{S}'$ il existe $A \subset \overline{S}'$ tel que $k' = \bigcup A$, de sorte que l'on trouve :

$$\overline{q}(k') = \bigcup q(A), \text{ où } q(A) \subset \overline{S};$$

ainsi $\overline{S}$ est une base de $\tilde{S}$ et $\overline{S} \preccurlyeq \tilde{S}$. On voit comme dans la démonstration du théorème 10 que $\tilde{q}$ définit $\tilde{S}$ comme groupoïde quotient inductif de $\tilde{S}'$.- Soit $\tilde{S}_1$ un autre élargissement inductif de S et $\tilde{q}_1$ un foncteur inductif de $\tilde{S}'$ sur $\tilde{S}_1$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Soit $k \in \tilde{S}'$ et $k' \in \tilde{S}'$ tels que $\tilde{q}_1(k) = \tilde{q}_1(k')$. On a :

$$\alpha(k) = \alpha(k') \text{ et } \beta(k) = \beta(k'),$$

car la restriction de $\tilde{q}_1$ à $\tilde{S}'_o$ est bijective. Par suite, il existe $h \in S$ tel que 1¶

$$\overline{\kappa}'(k) = \overline{\kappa}'(k').h \text{ et } q(h) \in S_o .$$

Il en résulte :

$$\overline{p}(k) = \overline{p}(k').q(h) = \overline{p}(k'),$$

d'où $\tilde{q}(k) = \tilde{q}(k')$. Il s'ensuit que l'application $\tilde{q}_1(k) \to \tilde{q}(k)$ définit une équivalence de $\tilde{S}_1$ sur $\tilde{S}$.

COROLLAIRE. *Si S' est un sous-pseudogroupe d'un groupoïde local S'', il existe un élargissement inductif canonique $\tilde{S}$ de S vérifiant la condition : si F est un atlas complet de S'' tel que $\overline{a}(F) \prec S'$ et qu'il existe $\bigcup \beta(F)$, alors il existe un atlas complet de $\tilde{S}$ associé à F par une application prolongeant q.*

1 DÉMONSTRATION. Soit $\tilde{S}'$ l'élargissement complet de S' au-dessus de S'', qui est (th. 8) la complétion au-dessus de S'' du groupoïde quotient de $\overline{\alpha}^*(S)$, où $\overline{\alpha}$ désigne la restriction de α à $S''.S'_o$, par la relation d'équivalence ρ :

$$(k, m', m) \sim (k', m'_1, m_1) \text{ si, et seulement si, il existe } g \in S_\gamma \text{ et } g' \in S_\gamma$$
$$\text{tels que } m_1 = m.g,\ m'_1 = m'.g' \text{ et } k.g = g'.k'.$$

Soit j la projection canonique

$$(k, m', m) \bmod \rho \to m'.k.m^{-1}$$

de $\tilde{S}'$ vers S''. Soit $\tilde{F}$ la classe des éléments

$$\tilde{f} = (\alpha(f), f, \alpha(f)) \bmod \rho \text{ où } f \in F .$$

Si $f \in F$, $f' \in F$ et $\beta(f) = \beta(f')$, on a $f^{-1}.f' \in S'$, d'où $\beta(\tilde{f}) = \beta(\tilde{f}')$. L'application $f \to \tilde{f}$ est une bijection de F sur $\tilde{F}$ et $\tilde{F}$ est un atlas complet de $\tilde{S}'$ tel que $\overline{a}(\tilde{F}) = \overline{a}(F)$. Comme la restriction de j à $\beta(\tilde{F})$ est une bijection sur $\beta(F)$ et qu'il existe $\bigcup \beta(F)$ il existe aussi $\bigcup \tilde{\beta}(\tilde{F}) = \tilde{e}$ dans l'élargissement complet $\tilde{S}'$, de sorte que $\tilde{F}$ est l'atlas qui détermine la structure $\tilde{e}$ (théorème 8). Soit $\tilde{S}$ l'élargissement inductif de S construit dans le théorème 11, et $\tilde{q}$ le foncteur de $\tilde{S}'$ vers $\tilde{S}$ prolongeant q. D'après le théorème 4, $\tilde{q}(\tilde{F})$ est base d'un atlas complet G de $\tilde{S}$ et, en vertu de la proposition 2 et de la définition 6, G est associé à $\tilde{F}$ par la restriction de $\tilde{q}$ à $\tilde{F}$. Il en résulte que G est aussi associé à F par l'application $f \to \tilde{q}(\tilde{f})$.

REMARQUE. Un atlas complet F peut être considéré comme une structure sur $\overline{\beta(F)}$. Le corollaire du théorème 11 permet ainsi d'associer à la classe $\tilde{S}'_o$ la classe des atlas complets $G = \tilde{q}(\tilde{F})$, où $\tilde{F}$ désigne un des atlas déterminant une unité de $\tilde{S}'$, ou, ce qui revient au même, une classe de structures sur $\overline{\beta(G)}$; elle peut être appelée *la*

2 + *classe de structures associée à $\tilde{S}'_o$.*

CAHIERS
de
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
1965

/86/

APPENDICE

«Guide des catégories ordonnées»

par Charles Ehresmann

Les catégories ordonnées et les espèces de structures ordonnées entrent comme cas particulier dans la théorie générale des catégories structurées et des espèces de structures structurées exposée dans [5],[7] et [10 a]. Plusieurs de nos travaux étant consacrés partiellement ([1],[3],[5],[6],[7],[12]) ou entièrement ([2], [4], [8] et [9]) à l'étude des catégories ordonnées, il pourrait être utile de guider le courageux lecteur à travers ces quelque 700 pages. Nous allons donc donner : un bref sommaire de chacun de ces travaux; un index des notions et des problèmes qu'ils abordent (avec les changements de terminologie que nous avons été conduits à faire); enfin quelques remarques. L'article «Espèces de structures sous-inductives» précédant cet Appendice sera désigné par ESS.

I. Sommaire.

Les articles précédemment cités peuvent être groupés en trois classes :

1) *Premiers articles sur les groupoïdes et catégories inductives, antérieurs à la notion de catégorie structurée générale :*

a) [3] est l'article le plus ancien (1957) et les mémoires [2],[4] et [ESS] en sont des développements ou des généralisations. Il contient la définition des groupoïdes inductifs et des espèces de structures inductives et locales, pour lesquelles est énoncé le théorème d'élargissement complet; un cas particulier de catégories d'homomorphismes inductives y est considéré.

b) [4] étudie les groupoïdes inductifs, les catégories $\mathfrak{J}(\mathfrak{J}', \mathfrak{J}'')$- structurées (appelées inductives dans [4]) et les catégories inductives régulières. Les principaux résultats sont les suivants : caractérisation d'un groupoïde inductif par les propriétés de la pseudomultiplication; catégories des filtres et des jets locaux associées à une catégorie inductive suprarégulière au-dessus d'une autre.

c) [2] et [ESS] étendent aux groupoïdes sous-préinductifs et aux espèces de structures sous-préinductives au-dessus d'un groupoïde sous-préinductif les théorèmes donnés dans [4] dans le cas inductif régulier. Ces articles, dont la fin de [0] est un résumé, contiennent essentiellement l'étude des groupoïdes des atlas faibles complets et des atlas complets, notions qui généralisent les atlas considérés dans [3] (lesquels sont les atlas complets F d'un groupoïde inductif S tels que $a(F)$ soit saturé dans S et que $\beta(F)$ admette un agrégat). Les théorèmes de complétion et de complétion relative d'un groupoïde prélocal sont obtenus à partir de sous-groupoïdes des groupoïdes des atlas complets.

2) Articles contenant des résultats sur les catégories ordonnées obtenus en appliquant la théorie générale des catégories structurées :

a) [5] définit les catégories ordonnées et inductives et discute la question des groupoïdes fonctoriellement ordonnés et inductifs. A une catégorie ordonnée ou inductive est associée la catégorie ordonnée des homomorphismes locaux et la catégorie ordonnée ou inductive des quatuors.

b) Les catégories complètement régulières à gauche, sous-préinductives et sous-inductives sont définies dans [6]; elles y sont appliquées au problème de la recherche des p-injections relatives à un foncteur fidèle p ordonné, sous-préinductif ou sous-inductif.

c) Comme application de la théorie des structures quotient, nous étudions [7] les structures quotient d'une classe ordonnée, sous-préinductive ou sous-inductive et nous obtenons des théorèmes de passage au quotient pour les catégories et groupoïdes ordonnés, sous-préinductifs ou inductifs. De plus les théorèmes de complétion des groupoïdes prélocaux obtenus dans [2] sont énoncés sous forme de solution d'un problème universel.

3) Mémoires récents sur les catégories ordonnées :

a) Dans [8] sont définies les catégories semi-régulières, assez régulières et régulières (comme cas particuliers de catégories structurées), auxquelles sont associées des catégories d'atlas. La notion d'espèce de morphismes ordonnée ou quasi-inductive conduit au problème de la cohomologie ordonnée (d'ordre 0 et 1), par l'intermédiaire des homomorphismes croisés ordonnés. Ces résultats sont appliqués à la construction du groupoïde d'holonomie complet associé à une structure feuilletée (qui est un groupoïde quotient d'un sous-groupoïde du groupoïde des atlas associé au groupoïde d'holonomie du feuilletage), et à la définition de structures transverses à un feuilletage.

b) Dans [9], suite de [8], le problème général de la complétion des catégories ordonnées est abordé et résolu dans le cas des groupoïdes ordonnés, des catégories préinductives et des catégories sous-prélocales. L'outil utilisé est la notion de fusée et ses raffinements : fusées régulières, fusées strictes, fusées maximales et superfusées généralisations de la notion d'atlas, adaptées à la structure des catégories ordonnées. Les résultats de [9] ont été résumés dans [10 b].

4) Signalons enfin que nous avons utilisé les catégories sous-inductives dans différents problèmes, en particulier en relation avec la théorie des espaces fibrés et des structures feuilletées ([3], [11] et [12]).

II. Index de la terminologie actuelle.

Catégories d'homomorphismes entre classes ordonnées :

Voir [2] (p. 2, 3, 9) pour la définition des notions: classe inductive, sous-inductive, préinductive, sous-préinductive, sous-prélocale (*).

Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie pleine d'applications contenant avec une application toutes ses restrictions, avec deux applications leur produit. Ω_o désigne la classe des classes ordonnées $(M, <)$ telles que $M \in \mathfrak{M}_o$. Ω désigne la catégorie des applications ordonnées, i. e. la catégorie dont les éléments sont les triplets

$$\overline{h} = ((M', <), h, (M, <))$$

tels que $(M', h, M) \in \mathfrak{M}$ et que $x < y$ dans $(M, <)$ entraîne $h(x) < h(y)$ dans $(M', <)$. Le foncteur $p_\Omega = (\mathfrak{M}, \omega, \Omega)$, où $\omega(\overline{h}) = (M', h, M)$, est un foncteur d'homomorphismes saturé (déf. 20, II [12]). 1

Ω admet les sous-catégories suivantes :

1) Ω' = catégorie des applications ordonnées strictes :

$\overline{h} \in \Omega'$ si, et seulement si, $x' < x$ et $h(x') = h(x)$ entraîne $x = x'$.

Ω'_1 = catégorie des applications s - ordonnées :

$\overline{h} \in \Omega'_1$ si, et seulement si, les conditions $x' < x$, $x'' < x$ et $h(x') = h(x'')$ ont pour conséquence $x' = x''$.

Ω'_2 = sous-catégorie de Ω dont les éléments sont les $\overline{h} \in \Omega$ tels que les conditions $x' < x$, $x'' < x$ et $h(x'') < h(x')$ entraînent $x'' < x'$.

Ω'' = catégorie des applications ordonnées étalées :

$\overline{h} \in \Omega''$ si, et seulement si, pour tout $x \in M$ et tout $y < h(x)$ il existe $x' < x$ tel que $h(x') = y$.

Ω_2 = catégorie des applications ordonnées régulières $\subset \Omega''$:

$\overline{h} \in \Omega_2$ si, et seulement si, pour tout $x \in M$ et tout $y < h(x)$ la classe des $x' < x$ tels que $h(x') < y$ admet un plus grand élément $\overline{x}$ tel que $h(\overline{x}) = y$.

$\Omega^{\cup}$ = sous-catégorie de Ω dont les éléments sont les $\overline{h} \in \Omega$ tels que pour toute sous-classe C de M on ait

$$h(\underline{\bigcup} C) \subset \bigcup h(C),$$

où $\underline{\bigcup}\ C$ = congrégation de C (voir [2], p. 4).

2) Ω^s = sous-catégorie pleine de Ω ayant pour unités les classes sous-inductives $(M, <) \in \Omega$.

$\mathfrak{I}^{\cup}$ = catégorie des applications quasi-inductives $= \Omega^{\cup} \cap \Omega^s$.

$\mathfrak{I}^{ps}$ = catégorie des applications sous-préinductives :

$\overline{h} \in \mathfrak{I}^{ps}$ si, et seulement si, $(M, <)$ et $(M', <)$ sont des classes sous-préinductives et si les conditions $x' < x$ et $x'' < x$ dans $(M, <)$ entraînent

$$h(x' \cap x'') = h(x') \cap h(x'').$$

$\mathfrak{I}^s$ = catégorie des applications sous-inductives $= \mathfrak{I}^{\cup} \cap \mathfrak{I}^{ps}$.

$\mathfrak{I}$ = catégorie des applications inductives = sous-catégorie pleine de $\mathfrak{I}^s$ ayant pour unités les classes inductives $(M, <) \in \Omega_o$.

3) Si $\mathcal{H}$ est l'une des catégories $\mathfrak{I}^{\cup}$, $\mathfrak{I}^{ps}$, $\mathfrak{I}^s$ ou $\mathfrak{I}$, nous posons :

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cap \Omega', \quad \mathcal{H}'' = \mathcal{H} \cap \Omega''$$

et nous désignons par $\mathcal{H}_l$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}$ ayant pour unités les $(M, <) \in \mathcal{H}_o$ dans lesquelles est vérifié l'axiome de distributivité :

(D) : Si $x = (\overset{\sim}{\bigcup} C) \cap x'$ est défini, où $\overline{x} \in M$, $C \subset M$ et $x' \in M$, alors la classe des $c \cap x'$, où $c \in C$, admet x pour $\overline{x}$- agrégat.

Ainsi $\mathfrak{I}_l^{\cup}$ (resp. $\mathfrak{I}_l^{ps}, \mathfrak{I}_l^s, \mathfrak{I}_l$) = catégorie des applications quasi-locales (resp. sous-prélocales, sous-locales, locales).

REMARQUES. 1) Dans les articles [5] à [9] on utilise le symbole $\tilde{\Omega}$ au lieu du symbole Ω comme ci-dessus et, dans ces articles, Ω désigne le groupoïde des éléments inversibles de la catégorie $\tilde{\Omega}$ (que nous notons maintenant Ω_γ).

2) Les applications sous-préinductives et sous-inductives sont respectivement appelées application sous-inductives et inductives dans [0], [6], [7], [ESS].

Catégories structurées par des relations d'ordre :

1) Catégorie Ω- structurée [5], [8] et [9],

catégorie ordonnée $= \Omega(\Omega', \Omega)$- structurée [5] à [9],

catégorie s- ordonnée $= \Omega(\Omega'_1, \Omega)$- structurée [6] et [8],

catégorie semi-régulière $= \Omega((\Omega'', \Omega''), \Omega)$- structurée [8] et [9].

catégorie assez régulière $= \Omega((\Omega_2, \Omega_2), \Omega)$- structurée [8] et [9],

catégorie régulière $= \Omega((\Omega_2, \Omega_2), \Omega'')$- structurée [8] et [9],

catégorie complètement régulière à droite = catégorie s- ordonnée $(C^{\bullet}, <)$ telle que, si $e \in C^{\bullet}_o$, $E \in C^{\bullet}_o$ et $e < E$, il existe un pseudoproduit $Ee \in E . C . e$.

2) Catégorie quasi-inductive = $\mathcal{J}^{\cup}(\mathcal{J}^{\cup\prime},\mathcal{J}^{\cup})$- structurée [8] et [9],

catégorie sous-préinductive = $\mathcal{J}^{ps}(\mathcal{J}^{ps'},\mathcal{J}^{ps})$- structurée [6] , [8] et [9],

catégorie préinductive = catégorie sous-préinductive $(C^{\bullet}, <)$ telle que $(C, <)$ soit une classe préinductive [8] et [9],

catégorie sous- inductive = $\mathcal{J}^{s}(\mathcal{J}^{s'},\mathcal{J}^{s})$- structurée [6] , [8] et [9],

catégorie inductive = $\mathcal{J}(\mathcal{J}',\mathcal{J})$- structurée [3] , [4] , [5] , [7] et [8].

3) Groupoïde strictement ordonné = groupoïde $\Omega((\Omega',\Omega'),\Omega)$- structuré [5],

groupoïde fonctoriellement ordonné = groupoïde $\Omega((\Omega'\cap\Omega'', \Omega'\cap\Omega''),\Omega)$-structuré [5],

groupoïde sous- préinductif (resp. sous- inductif, préinductif, inductif) = groupoïde fonctoriellement ordonné qui est une catégorie sous- préinductive (resp. sous-inductive, préinductive, inductive) [0] , [2] , [3] , [4] , [8].

4) Catégorie (resp. groupoïde) sous-prélocale, prélocale, sous-locale ou locale =

catégorie (resp. groupoïde) sous-préinductive, préinductive, sous-inductive ou inductive $(C^{\bullet}, <)$ telle que $(C, <)$ soit une classe sous-prélocale.

5) Les foncteurs structurés correspondant à chacun des cas précédents sont appelés du même nom que la catégorie correspondante : ainsi foncteur Ω- structuré, ordonné, s-ordonné, quasi-inductif,. . .

REMARQUE. Dans [4], catégorie inductive signifie catégorie $\mathcal{J}(\mathcal{J}',\mathcal{J}'')$- structurée; dans [3], catégorie inductive est pris dans un sens encore plus particulier.

Pseudoproduit dans une catégorie ordonnée :

On définit dans [4] le pseudoproduit de deux éléments d'un groupoïde inductif. Dans [0] et [2], cette notion est étendue au cas d'un groupoïde sous-préinductif. Dans [5], la pseudomultiplication est définie dans une catégorie inductive; dans [6], elle est aussi définie dans une catégorie sous-préinductive. La définition générale du pseudo produit dans une catégorie ordonnée est donnée et utilisée dans [8], modifiant un peu celle indiquée dans [6].

Filtres :

Dans [4] est construite la catégorie inductive des filtres associée à une catégorie inductive. Dans [0] et [2], le groupoïde sous-inductif des filtres correspondant à un groupoïde sous-préinductif est construit et comparé aux groupoïdes des atlas faibles complets et complets. En liaison avec la catégorie des filtres, la catégorie des jets locaux relatifs à une catégorie inductive suprarégulière au-dessus d'une autre est étudiée dans [4].

Atlas :

Un cas particulier d'atlas dans une catégorie d'homomorphismes inductive est défini dans [3], en relation avec le théorème d'élargissement complet d'une espèce de structures locales. La notion générale d'atlas faible, d'atlas faible complet, d'atlas complet propre, est définie dans [0] et [2], où sont construits les groupoïdes sous-inductifs d'atlas complets associés à un groupoïde sous-préinductif. Ces groupoïdes admettent pour sous-groupoïdes sous-inductifs les groupoïdes des sous-classes compatibles (faibles), des complexes et des sous-classes complètes. La notion d'atlas dans une catégorie quelconque est introduite dans [8], où sont considérées les catégories ordonnées d'atlas réguliers associées à un groupoïde ordonné.

Fusées :

Les fusées, fusées maximales, fusées strictes, fusées maximales strictes et superfusées sont définies dans [9] et appliquées à la construction de catégories ordonnées régulières ou quasi-inductives régulières associées à une catégorie ordonnée régulière. Dans le cas des groupoïdes réguliers, la notion de fusée se réduit à celle d'atlas.

Espèces de structures ordonnées et catégories d'homomorphismes ordonnées :

Dans [3] sont définies les espèces de structures inductives ou locales et les catégories d'homomorphismes inductives régulières. Dans [ESS] est développée la théorie des espèces de structures sous-préinductives au-dessus d'un groupoïde sous-préinductif. La notion d'espèce de morphismes ordonnée est appliquée dans [8] à l'étude de la cohomologie ordonnée. Les catégories d'homomorphismes régulières inductives sont considérées dans [4], les catégories d'homomorphismes sous-préinductives, sous-inductives et ordonnées dans [6].

Théorèmes de complétion :

Le théorème d'élargissement complet d'une espèce de structures locales au-dessus d'un groupoïde est énoncé dans [3] et [0] et démontré dans [ESS], à l'aide des groupoïdes d'atlas complets. Les théorèmes de complétion d'un groupoïde prélocal en un groupoïde inductif, inductif complet ou inductif relativement complet sont obtenus dans [2], par l'intermédiaire des groupoïdes d'atlas complets, et présentés sous forme de solution d'un problème universel dans [7]. Les théorèmes de complétion d'une catégorie préinductive ou sous-prélocale sont énoncés dans [10 b] et démontrés dans [9]; le théorème de complétion d'une catégorie préinductive utilise la catégorie des fusées strictes; le théorème de complétion d'une catégorie sous-prélocale, qui résoud un problème universel, est la catégorie quotient d'une sous-catégorie de la catégorie des superfusées. Dans [8], se trouve le théorème de complétion d'un groupoïde ordonné utilisé pour construire le groupoïde d'holonomie complet d'une structure feuilletée. 1

Catégories ordonnées quotient :

Des théorèmes de passage au quotient sont indiqués et démontrés dans [7]. 2
D'autres résultats de la même espèce viennent d'être obtenus par Joubert [13], en liaison avec le problème de l'extension ordonnée d'un foncteur ordonné.

Graphes multiplicatifs ordonnés :

La théorie des graphes structurés de [7] a été appliquée par S. Legrand à l'étude des graphes multiplicatifs ordonnés; en particulier un graphe multiplicatif ordonné peut être «universellement» plongé dans une catégorie ordonnée [14].

III. Compléments.

1) Certains résultats des n° 1 et 2 de [ESS] peuvent actuellement se déduire de théorèmes généraux sur les espèces de structures structurées [10 a], les catégories structurées quotient et les catégories induites structurées [7] (une catégorie $\kappa^*(H,p)$ induite de (H,p) par κ, nous l'appelons maintenant catégorie produit fibré $p \vee \kappa$, en accord avec la terminologie générale des produits fibrés dans les catégories). Le théorème 1 du n° 2 signifie que la catégorie des foncteurs sous-préinductifs est à produits fibrés finis, ce qui peut aussi résulter du fait qu'elle est à produits finis et résolvante à droite au-dessus de $\mathfrak{M}$.

2) Les groupoïdes sous-inductifs d'atlas complets ou d'atlas complets propres pourraient être obtenus à partir des groupoïdes sous-inductifs des atlas faibles complets et faibles complets propres, par passage au quotient relativement à la relation d'équivalence :

$$F \sim F' \text{ si, et seulement si, } \overline{F} = \overline{F'} \text{ (notation de [2])},$$

en appliquant le théorème de passage au quotient de [7].

3) Nous étudierons dans un prochain article les questions suivantes : 3

a) Catégories de fusées, fusées strictes et superfusées compatibles avec un foncteur ordonné. Nous montrerons que, par un procédé analogue à celui utilisé dans [ESS] et en utilisant les théorèmes de complétion de [9], ces catégories permettent de résoudre d'une façon «universelle» le problème de la complétion relative d'un foncteur sous-prélocal, généralisant ainsi les résultats de [ESS].

b) Catégories des jets locaux associées à un foncteur ordonné régulier, généralisant les résultats de [4].

(*) Erratum : Dans [2] et [4], la définition d'une classe inductive (A, <) doit être lue : Toute partie *non vide* de A admet une intersection.

Bibliographie.

[0] Espèces de structures locales, élargissement de catégories, Top. et Géo. dif., 3 (1961), 73 p.

[1] Catégories différentiables et géométrie différentielle, Séminaire d'été Montréal (1961), 91 p.

[2] Groupoïdes sous-inductifs, Ann. Inst. Fourier, 13, 2 (1963), 1-60.

[3] Gattungen von Lokalen Strukturen, Jahresb. D.M.V. 60, 2 (1957), 49-77.

[4] Catégories inductives et pseudogroupes, Ann. Inst. Fourier, 10 (1960), 305-332.

[5] Catégories structurées, Ann. Ec. Norm. Sup. 80, 3e Série (1963), 349-426.

[6] Sous-structures et catégories ordonnées, Fund. Math. 54 (1964), 211-228.

[7] Structures quotient, Comm. Math. Helv. 38 (1963), 219-283.

[8] Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, Ann. Inst. Fourier, 14, 1 (1964), 205-268.

[9] Complétion des catégories ordonnées, Ann. Inst. Fourier, 14, 2 (1964), 89-144.

[10] a) C.R. 256 (1963), p. 1198, 1891, 2080, 2280, 5031.
b) C. R. 257 (1963), p. 4110; 259 (1964), 701.

[11] Structures feuilletées, Proc. 5 th Canad. Math. Cong. (1961), 109-172.

[12] Catégories et structures, extraits, Topo. et Géo. dif. 6 (1964), 31 p.

[13] JOUBERT G., C.R. 260 (1965), p. 3251.

[14] LEGRAND S., C.R. 260 (1965), p. 3255.

C.R. signifie « Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris ».

ADDENDUM. Voir page 357 pour des résultats plus récents.

Sonderdruck aus Jahresbericht der
Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 60, Heft 2
B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart

/47/

Ehresmann, Charles
Jahresbericht d. DMV
Bd. 60 (1957) S. 49—77

Gattungen von lokalen Strukturen.

Von CHARLES EHRESMANN in Paris.

In dieser Arbeit[1]) wird der allgemeine Begriff einer Gattung von
mathematischen Strukturen entwickelt, ausgehend von den Begriffen
„Kategorie" und „Funktor", die von Eilenberg-Mac Lane ein 1
geführt worden sind. Dies führt besonders zu einer Theorie der Gattungen von lokalen Strukturen[2]). Die Mannigfaltigkeiten der Kategorie C^r, die lokalen Produkte, die Blätterungen und die Faserungen bilden wichtige Gattungen dieser Art. Die Beweise sind bloß kurz angedeutet, da sie leicht ergänzt werden können. Die Grundstrukturen der
Differentialgeometrie sollen in einer Fortsetzung zu dieser Arbeit be- 2
handelt werden.

Wir unterscheiden zwischen Mengen und Klassen; eine Menge ist auch eine Klasse. Die Klasse aller Mengen ist keine Menge. Wir lassen

---

1) Diese Arbeit ist die Darstellung des ersten Teils meines Vortrags über „Grundbegriffe der Differentialgeometrie", gehalten bei der Tagung der Deutschen Mathematikervereinigung in Würzburg (September 1956). Der zweite Teil dieses Vortrags brachte eine Definition der Grundstrukturen der Differentialgeometrie. Er wird in einer Fortsetzung zu dieser Arbeit erscheinen.

2) Die Grundideen dieser Theorie habe ich schon in früheren Publikationen[3]) kurz angegeben und seit 1952 in verschiedenen Vorlesungen und Vorträgen ausführlich mit
Anwendungen dargestellt (z. B. in Rio de Janeiro, Princeton, Yale, Bombay, Paris). 3

3) a) Structures locales et structures infinitésimales (Comptes Rendus Acad. Sciences, Paris, 234, 1952, p. 587).

b) Structures locales (Annali di Mat., 1954, p. 133).

c) Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie (Colloque Int. de Géométrie diff. de Strasbourg, C.N.R.S., 1953).

für Klassen dieselben Operationen zu wie für Mengen. Wir vermeiden also nicht die Bildung von gewissen Klassen von Teilklassen einer Klasse. Sollten sich durch diese Begriffsbildungen Widersprüche ergeben, so wäre es immer möglich, Beschränkungen einzuführen, um im Rahmen der Mengenlehre zu bleiben; dadurch würde die Theorie
1 aber umständlicher werden.

I. Kategorien und Kategorien von Operatoren.

2 Definition. Eine Kategorie ist eine Klasse C von Elementen, in der eine Multiplikation gegeben ist $(f, g) \to fg$ für gewisse Paare (f, g) von Elementen von C, welche folgenden Axiomen genügt:

1. Wenn $h(fg)$ oder $(hf)g$ definiert ist, dann sind beide Elemente definiert und $h(fg) = (hf)g$.

2. Wenn hf und fg definiert sind, dann ist auch $h(fg)$ definiert.

Ein Element e von C wird eine Einheit genannt, falls $fe = f$ und $eg = g$ für alle Elemente f und g von C ist, für welche fe und eg definiert sind.

3. Für jedes $f \in C$ gibt es zwei Einheiten $\alpha(f)$ und $\beta(f)$, so daß $f\alpha(f)$ und $\beta(f)f$ definiert sind.

Folgerungen: Die Elemente $\alpha(f)$ und $\beta(f)$ sind eindeutig bestimmt und werden Rechtseinheit und Linkseinheit von f genannt. fg ist dann und nur dann definiert, falls $\alpha(f) = \beta(g)$.

Die Elemente von C werden im allgemeinen Fall Morphismen genannt. Wenn eine eineindeutige Abbildung der Klasse der Einheiten von C auf eine Klasse C_0 gegeben ist, dann wird C_0 oft eine Klasse von Objekten für C genannt.

Wir bezeichnen dann auch mit $\alpha(f)$ das Objekt E, welches $\alpha(f)$ entspricht und nennen es die Quelle von f; das Objekt E', welches $\beta(f)$ entspricht, wird auch mit $\beta(f)$ bezeichnet und wird das Ziel von f genannt; f ist ein Morphismus von E auf (oder nach) E'. Wenn keine besondere Klasse von Objekten angegeben ist, dann ist C_0 einfach die Klasse der Einheiten von C.

Ein Element f von C ist *umkehrbar*, falls ein Element f' in C existiert, so daß $f'f = \alpha(f)$ und $ff' = \beta(f)$. Das Element f' ist dann eindeutig bestimmt und wird das zu f inverse Element f^{-1} genannt.

Definition: Ein *Gruppoid* ist eine Kategorie C, deren Elemente alle umkehrbar sind. Ein Gruppoid ist ein *transitives* Gruppoid, falls zu jedem Paar (e', e) von Einheiten mindestens ein Morphismus von e auf e' gehört. (Die transitiven Gruppoide sind die Gruppoide im Sinne von Brandt, jedenfalls, wenn man sich auf Mengen beschränkt.)

Satz: *Die umkehrbaren Elemente einer Kategorie bilden ein Gruppoid.*

Definition: Eine Unterkategorie C' von C ist eine Teilklasse von C mit folgenden Eigenschaften:

1. Wenn $f \in C'$ und $g \in C'$ und wenn fg definiert ist, dann ist auch $fg \in C'$.
2. Wenn $f \in C'$, dann ist auch $\alpha(f) \in C'$ und $\beta(f) \in C'$.

C' ist eine *volle* Unterkategorie, falls C' jedes Element f von C enthält, für welches $\alpha(f)$ und $\beta(f)$ zu C' gehören.

Ein *Untergruppoid* eines Gruppoids C ist eine Unterkategorie C' von C mit folgender Eigenschaft: Wenn $f \in C'$, dann ist auch $f^{-1} \in C'$.

Definition: Ein *kovarianter* (bzw. *kontravarianter*) *Funktor* einer Kategorie C in eine Kategorie C' ist eine Abbildung Φ von C in C' mit folgenden Eigenschaften:

1. Wenn $f \in C$ und $g \in C$ und wenn fg definiert ist, dann ist

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g) \quad (\text{bzw. } \Phi(fg) = \Phi(g)\Phi(f)).$$

2. Wenn e eine Einheit von C ist, dann ist $\Phi(e)$ eine Einheit von C'.

Definition: Ein verallgemeinerter kovarianter Funktor einer Kate- 1
gorie C in eine Kategorie C' ist eine Funktion Φ, die jedem $f \in C$ eine Klasse $\Phi(f)$ von Elementen von C' zuordnet mit folgenden Eigenschaften:

1. Wenn $f \in C$, $g \in C$ und wenn fg definiert ist, dann ist

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\ \Phi(g),$$

wobei $\Phi(f)\Phi(g)$ die Klasse der Produkte $f'g'$ bezeichnet,

$$f' \in \Phi(f), \ g' \in \Phi(g).$$

2. Wenn e eine Einheit von C ist, dann ist $\Phi(e)$ eine Klasse von Einheiten von C'.

Beispiel: Es sei $\mathfrak{E}$ die Klasse aller eineindeutigen Abbildungen
irgendeiner Menge auf irgendeine Menge, und es sei $\tilde{\mathfrak{E}}$ die Klasse aller 2
Abbildungen irgendeiner Menge in irgendeine Menge. Mit der üblichen Definition des Produktes fg zweier Abbildungen f und g ist $\tilde{\mathfrak{E}}$ eine Kategorie. Eine Einheit von $\tilde{\mathfrak{E}}$ ist die Identitätsabbildung einer Menge E. Wenn f eine Abbildung von E in E' ist, dann ist $\alpha(f)$ die Identitätsabbildung von E, $\beta(f)$ die Identitätsabbildung von E'. Die Klasse aller Mengen ist eine Klasse $\mathfrak{E}_0$ von Objekten für $\tilde{\mathfrak{E}}$. $\mathfrak{E}$ ist das Gruppoid aller umkehrbaren Elemente von $\tilde{\mathfrak{E}}$. Eine andere Unterkategorie von $\tilde{\mathfrak{E}}$ ist die Klasse aller Abbildungen irgendeiner Menge auf irgendeine Menge.

Definition: Eine *Kategorie von Operatoren* auf einer Klasse $\mathfrak{S}_0$ ist eine Kategorie C mit einer Multiplikation $(f, z) \to fz$, welche definiert ist für gewisse Paare (f, z), wobei $f \in C$, $z \in \mathfrak{S}_0$, $fz \in \mathfrak{S}_0$, und welche folgende Axiome erfüllt:

1. Wenn $g(fz)$ oder $(gf)z$ definiert ist, dann sind beide Elemente definiert und $g(fz) = (gf)z$.

2. Wenn gf und fz definiert sind, dann ist auch $g(fz)$ definiert.

3. Wenn e eine Einheit von C ist und wenn ez definiert ist, dann ist $ez = z$.

4. Für jedes $f \in C$ existiert ein $z \in \mathfrak{S}_0$, so daß fz definiert ist, und für jedes $z \in \mathfrak{S}_0$ existiert ein $f \in C$, so daß fz definiert ist.

Bemerkung: Wenn nur die Axiome 1), 2) und 3) erfüllt sind, dann sei C' die Klasse der Elemente f von C, für welche fz definiert ist für mindestens ein $z \in \mathfrak{S}_0$, und es sei $\mathfrak{S}'_0$ die Klasse der Elemente $z \in \mathfrak{S}_0$, für welche fz definiert ist für mindestens ein $f \in C$. Dann ist C' eine Kategorie von Operatoren auf $\mathfrak{S}'_0$.

Falls in dem Axiom 1) die Gleichung $g(fz) = (gf)z$ ersetzt wird durch $g(fz) = (fg)z$, ist C eine Kategorie von Rechtsoperatoren auf $\mathfrak{S}_0$; an Stelle von fz schreibt man dann gewöhnlich zf.

Satz: Wenn C eine Kategorie von Operatoren auf $\mathfrak{S}_0$ ist, dann gehört zu jedem $z \in \mathfrak{S}_0$ genau eine Einheit $e \in C$, für welche ez definiert ist. Wir bezeichnen diese Einheit mit $p(z)$.

Für $z \in \mathfrak{S}_0$ existiert ein $f \in C$, so daß fz definiert ist. Dann ist $fz = (f\alpha(f))z = f(\alpha(f)z)$. Somit ist $\alpha(f)z$ definiert. Wenn e und e' zwei Einheiten sind, für welche ez und $e'z$ definiert sind, dann ist:

$$ez = e(e'z) = (ee')z.$$

Somit ist ee' definiert und $ee' = e = e'$.

Es ist also eine Projektion p von $\mathfrak{S}_0$ auf C_0 definiert; fz ist dann und nur dann definiert, wenn $\alpha(f) = p(z)$. Wenn fz definiert ist, dann ist $p(fz) = \beta(f)$.

Wenn C eine Kategorie von Operatoren auf $\mathfrak{S}_0$ ist, dann bezeichnen wir mit $\Phi(f)$ die Abbildung $z \to fz$ von $\overset{-1}{p}(\alpha(f))$ in $\overset{-1}{p}(\beta(f))$. Die Abbildungen $\Phi(f)$ bilden eine Kategorie $\Phi(C)$, und Φ ist ein Funktor von C auf $\Phi(C)$. Wenn f umkehrbar ist, dann ist auch $\Phi(f)$ umkehrbar.

Es sei Φ ein Funktor von C in $\tilde{\mathfrak{E}}$, welcher folgender Bedingung genügt: Bezeichnen wir mit $\overset{-1}{p}(e)$ die Menge, deren Identitätsabbil-
1 dung $\Phi(e)$ ist, wo e eine Einheit von C ist, dann ist $\overset{-1}{p}(e) \cap \overset{-1}{p}(e') = \emptyset$ (leere Menge), wenn $e \neq e'$. Es sei $\mathfrak{S}_0$ die Klasse aller Elemente z, die irgendeiner Menge $\overset{-1}{p}(e)$ angehören, und man definiere fz als das Bild von z durch $\Phi(f)$. Dann ist C eine Kategorie von Operatoren auf $\mathfrak{S}_0$.

Satz: *Es sei C eine Kategorie von Operatoren auf $\mathfrak{S}_0$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$ die Klasse der Paare (f, z), wo $f \in C$, $z \in \mathfrak{S}_0$, so daß fz definiert ist, dann ist $\mathfrak{S}$ eine Kategorie mit folgender Multiplikation:*

$$(f', z')\,(f, z) = (f'f, z), \quad \textit{falls} \quad z' = fz.$$

Die Einheiten dieser Kategorie sind die Paare (e, z), für welche ez definiert ist. $\mathfrak{S}_0$ ist eine Klasse von Objekten für $\mathfrak{S}$ durch die eineindeutige Abbildung $(e, z) \to z$. Wenn f umkehrbar ist, dann ist auch (f, z) umkehrbar; das inverse Element ist (f^{-1}, fz). Wenn C ein Gruppoid ist, dann ist auch $\mathfrak{S}$ ein Gruppoid. Die Abbildung $(f, z) \to f$ ist ein Funktor p von $\mathfrak{S}$ auf C.

Das Verhältnis von $\mathfrak{S}$ zu C kann auch folgendermaßen charakterisiert werden: Es seien gegeben zwei Kategorien C und $\mathfrak{S}$ und ein kovarianter Funktor p von $\mathfrak{S}$ auf C mit folgenden Eigenschaften: 1

1. Bezeichnen wir mit $\overset{-1}{p}(f)$ die Klasse der Elemente $g \in \mathfrak{S}$, für welche $p(g) = f$ ist, dann ist $\overset{-1}{p}$ ein verallgemeinerter Funktor von C auf $\mathfrak{S}$.

2. Zwei Elemente von $\overset{-1}{p}(f)$, welche die gleiche Rechtseinheit haben, sind identisch.

3. $\overset{-1}{p}(\alpha(f)) = \alpha(\overset{-1}{p}(f)) =$ Klasse der Elemente $\alpha(g)$, für alle $g \in \overset{-1}{p}(f)$.

Es sei $\mathfrak{S}'$ die Kategorie der Paare (f, z), $f \in C$, $z \in \mathfrak{S}_0$, $p(z) = \alpha(f)$, mit folgender Multiplikation, wo $\alpha(g) = z$, $p(g) = f$;

$$(f', z')\,(f, z) = (f'f, z), \quad \text{falls} \quad z' = \beta(g).$$

Die Abbildung $g \to (f, z)$, $g \in \mathfrak{S}$, $z = \alpha(g)$, $f = p(g)$, ist dann ein eineindeutiger Funktor, d. h. eine Äquivalenz, von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$, und C ist eine Kategorie von Operatoren auf $\mathfrak{S}_0$ mit der Multiplikation $fz = \beta(g)$. 2

II. Gattungen von Strukturen und Kategorien von Isomorphismen.

Definition: Es sei C ein Gruppoid von Operatoren auf einer Klasse $\mathfrak{S}_0$, und es sei $\mathfrak{S}$ das zugehörige Gruppoid der Paare

$$(f, S), \quad S \in \mathfrak{S}_0, \quad f \in C,$$

für welche fS definiert ist; p bezeichne die Projektion von $\mathfrak{S}_0$ auf C_0, sowie den Projektionsfunktor von $\mathfrak{S}$ auf C. Dann wird $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von Strukturen über C genannt. Ein Element S von $\mathfrak{S}_0$ wird eine Struktur über $p(S) \in C_0$ genannt. (f, S) wird ein Isomorphismus von S auf fS genannt. $\mathfrak{S}$ wird eine Kategorie von Isomorphismen genannt. Ein Isomorphismus (f, S) von S auf S wird ein Automorphismus von S genannt.

Die Klasse der Automorphismen von S bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{S}$, welche die Gruppe der Automorphismen von S genannt wird. Die Projektion p bildet dieselbe eineindeutig auf eine Untergruppe von C ab, welche oft auch die Gruppe der Automorphismen von $\mathfrak{S}$ genannt wird.

Wir bezeichnen wieder mit $\Phi(f)$ die eineindeutige Abbildung $S \to fS$. Die Abbildungen $\Phi(f)$ bilden ein Gruppoid $\Phi(C)$, und Φ ist ein Funktor von C auf $\Phi(C)$. Es sei C' die Klasse der Elemente f von C für welche $\Phi(f)$ eine Einheit ist. Dann ist C' ein *ausgezeichnetes* Unter-
1 gruppoid von C, und $\Phi(C)$ ist äquivalent mit dem *Faktorgruppoid* C/C'. $\mathfrak{S}_0$ kann auch als eine Gattung von Strukturen über $\Phi(C)$ oder C/C' betrachtet werden.

Wenn die Klasse der Strukturen über irgendeiner Einheit von C eine Menge bildet, dann kann die Gattung $\mathfrak{S}_0$ von Strukturen über C definiert werden durch einen Funktor Φ von C in $\mathfrak{E}$, welcher folgenden Bedingungen genügt: Es bezeichne $\Phi_0(e)$ die Menge, deren Identitätsabbildung $\Phi(e)$ ist, wo $e \in C_0$. Dann ist $\Phi_0(e) \neq \emptyset$ und

$$\Phi_0(e) \cap \Phi_0(e') = \emptyset,$$

falls $e \neq e'$. Ein Element S von $\Phi_0(e)$ ist dann eine Struktur über e und fS ist das Bild von S durch $\Phi(f)$.

Auch ein beliebiger kovarianter Funktor Φ von C in $\mathfrak{E}$ bestimmt eine Gattung von Strukturen in folgender Weise: Die Einheiten e von C, für welche $\Phi_0(e) \neq \emptyset$ ist, bestimmen ein volles Untergruppoid C_1 von C. Es sei $f \in C_1$, $\alpha(f) = e$, $\beta(f) = e'$. Wir bezeichnen mit $\Phi'(f)$ die Abbildung $(e, z) \to (e', \Phi(f)(z))$ von $\{e\} \times \Phi_0(e)$ auf $\{e'\} \times \Phi_0(e')$, $z \in \Phi_0(e)$. Dann ist Φ' ein Funktor von C_1 in $\mathfrak{E}$, welcher den obigen Bedingungen genügt und daher eine Gattung von Strukturen über C_1 bestimmt. Eine Struktur über e ist ein Paar (e, z), wo $z \in \Phi_0(e)$.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von Strukturen über einen Untergruppoid C von $\mathfrak{E}$. Dann ist jede Struktur S eine Struktur über einer Menge $E = p(S)$, die der Einheit e von C entspricht, für welche eS definiert ist. Das Paar (E, S), oder $E \times \{S\}$, wird dann auch ein *Raum* der Gattung $\mathfrak{S}_0$ genannt. Dem Isomorphismus (f, S) entspricht die eineindeutige Abbildung $(x, S) \to (f(x), fS)$ des Raumes $E \times \{S\}$ auf den Raum $E' \times \{S'\}$, $S' = fS$, $E' = p(S')$. Die Kategorie $\mathfrak{S}$ ist äquivalent mit der Kategorie $\overline{\mathfrak{S}}$ dieser Abbildungen; $\overline{\mathfrak{S}}$ ist ein Untergruppoid von $\mathfrak{E}$

Die Klasse C_0 von Einheiten oder von Objekten des Gruppoids C ist die einfachste Gattung von Strukturen über C, mit folgender Multiplikation: $f \in C$, $S = \alpha(f) \in C_0$, $f \cdot S = S' = \beta(f)$. (Man hat zu unterscheiden zwischen $f \cdot S$ und $fS = f$, wenn S als eine Einheit von C

betrachtet wird.) Der Isomorphismus (f, S) kann identifiziert werden mit f; d. h. C ist die entsprechende Kategorie von Isomorphismen. 1

Untergattung von Strukturen.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von Strukturen über C. Eine Untergattung ist eine Unterklasse $\mathfrak{S}'_0$ von $\mathfrak{S}_0$, auf welche ein Untergruppoid C' von C operiert: Wenn $S \in \mathfrak{S}'_0$, $f \in C'$, $p(S) = \alpha(f)$, dann ist $fS \in \mathfrak{S}'_0$; $p(\mathfrak{S}'_0) = C'_0$. Die entsprechende Kategorie $\mathfrak{S}'$ von Isomorphismen wird Unterkategorie von Isomorphismen von $\mathfrak{S}$ genannt.

Wenn ein Gruppoid C auf $\mathfrak{S}_0$ operiert, dann heißt die Klasse der Elemente fS die Intransitivitätsklasse von $S \in \mathfrak{S}_0$. Eine Teilklasse $\mathfrak{S}'_0$ von $\mathfrak{S}_0$ heißt gesättigt in bezug auf C, wenn $fS \in \mathfrak{S}'_0$ für jedes $S \in \mathfrak{S}'_0$ und $f \in C$. $\mathfrak{S}'_0$ ist dann eine gesättigte Untergattung über C', wo C' ein volles, gesättigtes Untergruppoid von C ist; d. h. die Klasse C'_0 ist gesättigt in bezug auf C.

Unterliegende Gattung von Strukturen.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von Strukturen über C, $\mathfrak{S}'_0$ eine Gattung von Strukturen über C', C ein Untergruppoid von C', $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ die entsprechenden Kategorien von Isomorphismen, p und p' die entsprechenden Projektionsfunktoren. Eine Abbildung φ_0 von $\mathfrak{S}_0$ in $\mathfrak{S}'_0$ heißt *kovariante Abbildung*, wenn φ_0 vertauschbar ist mit allen Operatoren $f \in C$, d. h. $f\varphi_0(S) = \varphi_0(fS)$, falls fS definiert ist. Daraus folgt

$$p(S) = p'(\varphi_0(S)).$$

Die kovariante Abbildung φ_0 bestimmt einen Funktor φ von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$, der definiert ist durch $\varphi(f, S) = (f, \varphi_0(S))$. Dieser Funktor hat die Eigenschaft: $p'\varphi = p$. Umgekehrt wird durch jeden kovarianten Funktor φ von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$ mit der Eigenschaft $p'\varphi = p$ eine kovariante Abbildung φ_0 von $\mathfrak{S}_0$ in $\mathfrak{S}'_0$ bestimmt: φ_0 ist die Beschränkung von φ auf $\mathfrak{S}_0$.

Wir nennen $\mathfrak{S}'_0$ eine *unterliegende Gattung von Strukturen* in bezug auf $\mathfrak{S}_0$, wenn eine kovariante Abbildung φ_0 von $\mathfrak{S}_0$ in $\mathfrak{S}'_0$ definiert ist, oder ein kovarianter Funktor φ von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$ mit der Eigenschaft $p'\varphi = p$. Die Struktur $\varphi_0(S)$ heißt die unterliegende Struktur von $S \in \mathfrak{S}_0$. Wir nennen $\mathfrak{S}'$ eine unterliegende Kategorie von Isomorphismen in bezug auf $\mathfrak{S}$. Man sieht leicht, daß $\varphi_0(\mathfrak{S}_0)$ eine Untergattung von Strukturen von $\mathfrak{S}'_0$ ist und $\varphi(\mathfrak{S})$ eine Unterkategorie von Isomorphismen von $\mathfrak{S}$.

Die kovariante Abbildung φ_0 heißt eine *Äquivalenz* von $\mathfrak{S}_0$ auf $\mathfrak{S}'_0$, wenn φ_0 eineindeutig von $\mathfrak{S}_0$ auf $\mathfrak{S}'_0$ ist. Der entsprechende Funktor φ
1 heißt eine Äquivalenz von $\mathfrak{S}$ auf $\mathfrak{S}'$.

Es seien $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}'_0$ zwei beliebige Gattungen von Strukturen, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ die entsprechenden Kategorien von Isomorphismen und φ
2 ein kovarianter Funktor von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$. Die entsprechende Abbildung φ_0 von $\mathfrak{S}_0$ in $\mathfrak{S}'_0$ wird dann auch kovariante Abbildung genannt, und
3+ $\varphi_0(S)$ wird *Kovariante* von $S \in \mathfrak{S}_0$ genannt.

Gattung von Superstrukturen.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von Strukturen über C, $\mathfrak{S}$ die entsprechende Kategorie von Isomorphismen, $\overline{\mathfrak{S}}_0$ eine Gattung von Strukturen über $\mathfrak{S}$, $\overline{\mathfrak{S}}$ die entsprechende Kategorie von Isomorphismen. Dann wird $\overline{\mathfrak{S}}_0$ eine Gattung von Superstrukturen über $(\mathfrak{S}, C)$ genannt.

Satz: *Wenn $\overline{\mathfrak{S}}_0$ eine Gattung von Superstrukturen über $(\mathfrak{S}, C)$ ist, dann ist C auch ein Gruppoid von Operatoren auf $\overline{\mathfrak{S}}_0$, und somit ist $\overline{\mathfrak{S}}_0$ auch eine Gattung von Strukturen über C. Die entsprechenden Kategorien von Isomorphismen über $\mathfrak{S}$ und C können kovariant identifiziert werden.*

Es sei $f \in C$, $(f, S) \in \mathfrak{S}$, $\overline{S} \in \overline{\mathfrak{S}}_0$, $\overline{p}(\overline{S}) = S$, $\overline{p}$ = Projektionsfunktor von $\overline{\mathfrak{S}}$ auf $\mathfrak{S}$. Dann ist $(f, S)\overline{S}$ definiert und hängt nur von $(f, \overline{S})$ ab. Man setze $f\overline{S} = (f, S)\overline{S}$, wodurch C als Gruppoid von Operatoren auf $\overline{\mathfrak{S}}_0$ definiert wird. Weiterhin kann man $((f, S), \overline{S}) \in \overline{\mathfrak{S}}$ mit $(f, \overline{S})$ identifizieren.

Satz: *Wenn $\mathfrak{S}_0$ eine unterliegende Gattung von Strukturen ist in bezug auf $\overline{\mathfrak{S}}_0$ und φ der entsprechende Funktor von $\overline{\mathfrak{S}}$ in $\mathfrak{S}$, dann ist $\overline{\mathfrak{S}}_0$ auch eine Gattung von Strukturen über $\varphi(\overline{\mathfrak{S}})$, indem man setzt:* $(f, S)\overline{S} = f\overline{S}$
4 für $(f, S) \in \varphi(\overline{\mathfrak{S}})$, $\varphi(\overline{S}) = S$.

Erweiterung einer Gattung von Strukturen.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von Strukturen über C, $\mathfrak{S}$ die entsprechende Kategorie von Isomorphismen. Wenn C ein Untergruppoid des Gruppoids $\tilde{C}$ ist, dann sei $\overline{C}$ das volle gesättigte Untergruppoid von $\tilde{C}$, das durch C erzeugt ist. Wir definieren eine Gattung $\overline{\mathfrak{S}}_0$ von Strukturen über $\overline{C}$, die eine Erweiterung der Gattung $\mathfrak{S}_0$ genannt wird. Es sei Σ die Klasse der Paare (f, S), $f \in \overline{C}$, $S \in \mathfrak{S}_0$, für welche $\alpha(f) = p(S)$.

Dann operiert $\mathfrak{S}$ rechts auf Σ in folgender Weise:

$$(f, S)\ (g, S_1) = (fg, S_1), \quad (g, S_1) \in \mathfrak{S},\ gS_1 = S.$$

Die Intransitivitätsklasse von (f, S) bezüglich $\mathfrak{S}$ werde mit $(f, S)\mathfrak{S}$ bezeichnet. Es sei $\overline{\mathfrak{S}}_0$ die Klasse aller Intransitivitätsklassen $(f, S)\mathfrak{S}$. Dann operiert $\overline{C}$ auf $\overline{S}_0$ in folgender Weise:

$$g((f, S)\mathfrak{S}) = (gf, S)\mathfrak{S}, \quad g \in \overline{C},$$

falls gf definiert ist. Somit ist $\overline{\mathfrak{S}}_0$ eine Gattung von Strukturen über $\overline{C}$; $(f, S)\mathfrak{S}$ ist eine Struktur über $\beta(f)$. Die Struktur $S \in \mathfrak{S}_0$ wird identifiziert mit $(e, S)\mathfrak{S}$, wo (e, S) der Identitätsautomorphismus von S ist. Dadurch wird $\mathfrak{S}_0$ eine Untergattung von $\overline{\mathfrak{S}}_0$ und $\mathfrak{S}$ eine Unterkategorie von $\overline{\mathfrak{S}}$ (Kategorie der Isomorphismen von $\overline{\mathfrak{S}}_0$). 1+

Es sei $\mathfrak{S}'$ ein Untergruppoid von $\mathfrak{S}$ und es sei Σ'' die Klasse der Paare (f, S), $f \in \overline{C}$, $S \in \mathfrak{S}_0'$, $\alpha(f) = p(S)$. Dann operiert $\mathfrak{S}'$ auf Σ'' und wir betrachten die Intransitivitätsklassen $(f, S)\mathfrak{S}'$. Sie bilden eine Gattung von Strukturen $\overline{\mathfrak{S}}_0'$ über einem Untergruppoid von $\overline{C}$:

$$g((f, S)\mathfrak{S}') = (gf, S)\mathfrak{S}', \ g \in \overline{C},$$

falls gf definiert ist. $\overline{\mathfrak{S}}_0$ ist eine Kategorie von unterliegenden Strukturen in bezug auf $\overline{\mathfrak{S}}_0'$; die kovariante Abbildung φ_0 von $\overline{\mathfrak{S}}_0'$ in $\overline{\mathfrak{S}}_0$ wird definiert durch: $\varphi_0((f, S)\mathfrak{S}') = (f, S)\mathfrak{S}$. 2

Beachten wir den folgenden Spezialfall: $\mathfrak{S}$ ist identisch mit C, $\mathfrak{S}'$ ist ein Untergruppoid C' von C. Dann haben wir die Gattung der Strukturen, deren Elemente die Intransitivitätsklassen fC' sind; die zugehörigen Operatoren sind die Elemente des vollen gesättigten Untergruppoids von $\tilde{C}$, das durch C' erzeugt ist.

Konstruktion von Gattungen von Strukturen über Mengen. 3

Die üblichen Gattungen von Strukturen sind definiert über Untergruppoiden von $\mathfrak{E}$ oder über einer Produktkategorie $\prod_i C_i$, wo C_i ein Untergruppoid von $\mathfrak{E}$ ist. Man konstruiert einen Funktor von $\prod_i C_i$ in $\mathfrak{E}$, indem man von den beiden Grundfunktoren $\mathfrak{P}$ und $\prod$ ausgeht.

Für eine Menge E bezeichnet $\mathfrak{P}(E)$ die Menge der Untermengen von E. Jeder eineindeutigen Abbildung f von E auf E' entspricht eine eineindeutige Abbildung $\mathfrak{P}(f)$ von $\mathfrak{P}(E)$ auf $\mathfrak{P}(E')$, und $\mathfrak{P}$ ist ein Funktor von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}$, der ein Untergruppoid C von $\mathfrak{E}$ auf ein Untergruppoid $\mathfrak{P}(C)$ von $\mathfrak{E}$ abbildet. Der Funktor $\prod$ ist ein Funktor von $\prod_i C_i$

in $\mathfrak{E}$, der auf folgende Weise definiert ist: Ein Element von $\prod_i C_i$ ist eine Familie (f_i), wo $f_i \in C_i$. Es sei $(x_i) \in \prod_i E_i$, $x_i \in E_i$. Dann ist $\prod (f_i)$ die Abbildung $(x_i) \to (f_i x_i)$, falls $E_i = \alpha(f_i)$.

Mit Hilfe von $\mathfrak{P}$ und $\prod$ kann man gewisse Funktoren Φ von $\prod_i C_i$ in $\mathfrak{E}$ definieren. Durch Φ ist dann eine Gattung $\mathfrak{S}_0$ von Strukturen über $\prod_i C_i$ von einem gewissen Typus definiert. Eine Untergattung von $\mathfrak{S}_0$, welche gewöhnlich definiert ist durch ein System von Axiomen, ist dann eine Gattung von Strukturen im Sinne von Bourbaki. Die Konstruktion von Φ kann in folgender Weise angedeutet werden:

Es sei $C_j = C =$ Untergruppoid von $\mathfrak{E}$ für $j \in J$. Dann sei Δ der Funktor von C in $\prod_j C_j$, für welchen $\Delta(f) = (f_j)_{j \in J}$, $f_j = f \in C$. Dann ist $\prod \Delta$ ein Funktor von C auf einem Untergruppoid von $\mathfrak{E}$, das mit $C^{(J)}$ bezeichnet wird. Falls J die Menge der Ordinalzahlen $< \iota$ ist, so bezeichnen wir $C^{(J)}$ durch $C^{(\iota)}$. Man definiert auch $\mathfrak{P}^\iota(C)$, wo ι eine be-
1 liebige Ordinalzahl ist: $\mathfrak{P}^\omega(E)$ ist definiert als induktiver Limes der Folge $\mathfrak{P}^1(E), \mathfrak{P}^2(E), \ldots, \mathfrak{P}^n(E), \ldots$. Es sei μ eine Funktion, die in einer Menge Λ definiert ist, so daß $\mu(\lambda) = (i_\lambda, m_\lambda, n_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, $i_\lambda \in I$, m_λ und n_λ beliebige Ordinalzahlen. Es sei C_i, für $i \in I$, ein Untergruppoid von $\mathfrak{E}$. Die Kategorie $\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{P}^{m_\lambda}\left(C_{i_\lambda}^{(n_\lambda)}\right)$ ist durch $\prod$ auf ein Untergruppoid C_μ von $\mathfrak{E}$ abgebildet, und wir haben einen Funktor Φ_μ von $\prod_{i \in I} C_i$ auf C_μ. Durch Φ_μ wird die Gattung von Strukturen vom Typus μ über $\prod_i C_i$ definiert. Über einer Familie von Gruppoiden C_μ von variablem Typus über $\prod_i C_i$ kann man wieder eine Kategorie C_ν von gegebenem Typus ν konstruieren. Dadurch wird ein Funktor Φ_ν von $\prod C_\mu$ auf C_ν definiert und somit auch ein Funktor Φ'_ν von $\prod_i C_i$ auf C_ν. Eine Kategorie, die man durch Iteration dieses Verfahrens erhält, soll eine Kategorie von bestimmtem Typus über $\prod_i C_i$ heißen. Die entsprechende Gattung von Strukturen ist eine Gattung von bestimmtem Typus.

Kategorien von Homomorphismen.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von Strukturen über C, $\mathfrak{S}$ die entsprechende Kategorie von Isomorphismen, $\mathfrak{H}$ eine Kategorie, welche $\mathfrak{S}$ als Unterkategorie enthält und für welche die Klasse der Einheiten (oder Objekte) identisch ist mit $\mathfrak{S}_0$. Dann wird $\mathfrak{H}$ eine zu $\mathfrak{S}$ oder $\mathfrak{S}_0$ gehörige Kategorie von Morphismen genannt. Wenn außerdem $\mathfrak{S}$ das Gruppoid der umkehrbaren Elemente von $\mathfrak{H}$ ist, dann wird $\mathfrak{H}$ eine zu $\mathfrak{S}_0$ oder $\mathfrak{S}$ gehörige Kategorie von Homomorphismen genannt.

Es sei $\widehat{C}$ eine zu C gehörige Kategorie von Morphismen (oder Homomorphismen) und es sei $\widehat{p}$ ein Funktor von $\mathfrak{H}$ in $\widehat{C}$, dessen Beschränkung auf $\mathfrak{S}$ der Projektionsfunktor p von $\mathfrak{S}$ auf C ist. $\mathfrak{H}$ wird eine Kategorie von Morphismen (oder Homomorphismen) über $\widehat{C}$ genannt, falls die folgende Bedingung erfüllt ist: Zwei Elemente h und h' von $\mathfrak{H}$ mit derselben Rechtseinheit, derselben Linkseinheit und derselben Projektion $\widehat{p}(h) = \widehat{p}(h')$ sind identisch. Jedes $h \in \mathfrak{H}$ entspricht also 1
eineindeutig einem Tripel (S', f, S), $\alpha(h) = S$, $\beta(h) = S'$, $f = \widehat{p}(h) \in \widehat{C}$. Die Klasse aller Tripel (S', f, S), für welche $\alpha(f) = p(S)$, $\beta(f) = p(S')$, $S \in \mathfrak{S}_0$, $S' \in \mathfrak{S}_0$, bilden eine Kategorie $\overline{\mathfrak{H}}$ mit folgender Multiplikation:

$$(S'', f', S')\ (S', f, S) = (S'', f'f, S).$$

Die Abbildung $h \to \big(\beta(h), \widehat{p}(h), \alpha(h)\big)$ ist ein eineindeutiger Funktor von $\mathfrak{H}$ auf eine Unterkategorie von $\overline{\mathfrak{H}}$.

$\mathfrak{H}$ kann auf verschiedene Weise als eine Gattung von Strukturen über C, $\mathfrak{S}$ oder über einem Untergruppoid von $C \times C$ oder von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ angesehen werden, welche in folgender Weise auf $\mathfrak{H}$ operieren:

$$h \in \mathfrak{H},\ \alpha(h) = S,\ \beta(h) = S',\ (f, S) \in \mathfrak{S},\ (g, S') \in \mathfrak{S},\ f \in C,\ g \in C:$$

dann sind die folgenden Produkte definiert:

$$h f^{-1} = h(f, S)^{-1},\ gh = (g, S')h,\ ghf^{-1} = (g, S')\,h\,(f, S)^{-1}.$$

Somit kann h als eine Struktur über $p(S)$, S, $p(S')$, S', $(p(S), p(S'))$ oder (S, S') betrachtet werden. Der Funktor $\widehat{p}$ definiert $\widehat{C}$ als eine unterliegende Gattung von Strukturen in bezug auf $\mathfrak{H}$.

Wir können allgemeiner zwei Kategorien von Isomorphismen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ betrachten und eine Gattung $\mathfrak{H}$ von Strukturen über einem vollen, gesättigten Untergruppoid von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$. Dann ist $\mathfrak{H}$ eine zu $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ gehörige Klasse von Morphismen.

Erweiterung einer Kategorie von Homomorphismen.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von Strukturen über C und $\overline{\mathfrak{S}}_0$ die oben definierte Erweiterung von $\mathfrak{S}_0$ über $\overline{C}$. Wenn $\mathfrak{H}$ eine zu $\mathfrak{S}_0$ gehörige Kategorie von Morphismen (oder Homomorphismen ist), dann läßt sich die Konstruktion der Erweiterung auch auf $\mathfrak{H}$ anwenden, da $\mathfrak{H}$ eine Gattung von Strukturen über einem vollen, gesättigten Untergruppoid von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ ist. Die Erweiterung $\overline{\mathfrak{H}}$ ist eine zu $\overline{\mathfrak{S}}_0$ gehörige Kategorie von Morphismen (oder Homomorphismen). Wenn $\mathfrak{H}$ eine 2
Kategorie von Homomorphismen über $\widehat{C}$ ist, dann ist $\overline{\mathfrak{H}}$ eine Kate-

gorie von Homomorphismen über der entsprechenden Erweiterung von $\hat{C}$.

III. Lokale Kategorien und Gattungen von lokalen Strukturen.

1. Induktive Kategorien.

Es sei $\mathfrak{S}$ ein Gruppoid, $\mathfrak{S}_0$ die entsprechende Klasse von Einheiten oder Objekten. Wir betrachten $\mathfrak{S}_0$ als eine Gattung von Strukturen über $\mathfrak{S}$.

Definition: Wir nennen das Gruppoid $\mathfrak{S}$ eine induktive Kategorie (von Isomorphismen), wenn ein verallgemeinerter Funktor Φ von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}$ gegeben ist, welcher Induktionsfunktor genannt wird und folgenden Axiomen genügt:

1. Es sei $f \in \mathfrak{S}$, $S = \alpha(f)$; dann ist $\Phi(S)$ die Klasse der Rechtseinheiten der Elemente von $\Phi(f)$, also $\Phi(\alpha(f)) = \alpha(\Phi(f))$.

2. Für jedes $s \in \Phi(\alpha(f))$ gibt es nur ein Element $g \in \Phi(f)$, so daß
1 $s = \alpha(g)$; g heißt das von f auf s induzierte Element.

3. Für jedes $g \in \Phi(f)$ hat man $\Phi(g) \subset \Phi(f)$.

4. Wenn $\Phi(f) = \Phi(f')$, dann ist $f = f'$.

5. Für jede Unterklasse A von $\Phi(f)$ existiert ein $g \in \mathfrak{S}$ mit folgender Eigenschaft: $A \subset \Phi(g)$ und $g \in \Phi(f')$, falls $A \subset \Phi(f')$.

Das Element g in 5. ist dann eindeutig bestimmt und heißt das Aggregat von A; wir bezeichnen es mit $\smile A$; das Aggregat von g und g' wird mit $g \smile g'$ bezeichnet. Das Aggregat einer Klasse von Einheiten ist eine Einheit. Die Rechtseinheit (bzw. Linkseinheit) von $\smile A$ ist das Aggregat der Rechtseinheiten (bzw. Linkseinheiten) von A, also $\alpha(\smile A) = \smile\alpha(A)$, $\beta(\smile A) = \smile\beta(A)$. Das Aggregat von $\Phi(f)$ ist f; daher ist $f \in \Phi(f)$.

Es sei $f \in \mathfrak{S}$ ein Isomorphismus von S auf S'. Dann entspricht f eine eineindeutige Abbildung $\overline{\Phi}(f)$ von $\Phi(S)$ auf $\Phi(S')$, welche die Rechtseinheit s von $g \in \Phi(f)$ auf die Linkseinheit s' von g abbildet. $\overline{\Phi}$ ist ein Funktor.

Die Relation $g \in \Phi(f)$ ist eine Ordnungsrelation und kann mit $g < f$ bezeichnet werden. Aus $g < f$ folgt $\alpha(g) < \alpha(f)$ und $\beta(g) < \beta(f)$. Das Aggregat einer beschränkten Klasse A ist die obere Grenze von A. Das Aggregat von $\Phi(g) \frown \Phi(g')$ wird Durchschnitt von g und g' genannt und mit $g \frown g'$ bezeichnet. Falls $\Phi(g) \frown \Phi(g')$ leer ist, setzen
2 wir $g \frown g' = 0$. Der Durchschnitt einer Klasse (g_i) von Elementen ist das Aggregat des Durchschnitts der Klassen $\Phi(g_i)$.

Die Multiplikation in $\mathfrak{S}$ kann ausgedehnt werden auf alle Paare (f', f). Es sei $s = \alpha(f') \frown \beta(f)$, g das induzierte Element von f, mit $s = \beta(g)$, g' das induzierte Element von f' mit $s = \alpha(g')$. Dann setzen wir $f' f = g' g$.

Für diese erweiterte Multiplikation ist $\mathfrak{S}$ keine Kategorie; aber diese Multiplikation ist assoziativ. 1+

Kategorie der lokalen Isomorphismen.

Ein lokaler Isomorphismus von S auf S' ist ein Tripel (S', f, S), wo $S \in \mathfrak{S}_0$, $S' \in \mathfrak{S}_0$, $f \in \mathfrak{S}$, $\alpha(f) < S$, $\beta(f) < S'$. Die Klasse $\mathfrak{S}^l$ dieser Tripel ist die Kategorie der lokalen Isomorphismen, die von $\mathfrak{S}$ abgeleitet ist, mit folgender Multiplikation:

$$(S'', f', S')\,(S', f, S) = (S'', f'f, S).$$ 2

Die Rechtseinheit von (S', f, S) ist (S, S, S); die Linkseinheit ist (S', S', S'). $\mathfrak{S}$ ist das Gruppoid der umkehrbaren Elemente von $\mathfrak{S}_l$; also ist $\mathfrak{S}^l$ auch eine zu $\mathfrak{S}$ gehörige Kategorie von Homomorphismen.

Wenn die Multiplikation beschränkt wird durch die Bedingung $\alpha(f') = \beta(f)$, dann ist $\mathfrak{S}^l$ ein Gruppoid. Die Rechtseinheit von (S', f, S) ist dann $(S, \alpha(f), S)$, die Linkseinheit ist $(S', \beta(f), S')$. $\mathfrak{S}^l$ ist auch eine induktive Kategorie mit der Ordnungsrelation $(S', g, S) < (S', f, S)$, äquivalent mit $g < f$.

Eine Teilklasse Γ von $\mathfrak{S}^l$ heißt *Pseudogruppe von lokalen Isomorphismen*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: 1. Γ ist eine Unterkategorie von $\mathfrak{S}^l$. 2. Γ ist ein Untergruppoid von $\mathfrak{S}^l$ für die beschränkte Multiplikation. 3. Das Aggregat einer Klasse von Elementen von Γ gehört zu Γ. Die Bedingungen 1. und 2. sind äquivalent mit: Wenn $(S', f, S) \in \Gamma$ und $(S'', f', S') \in \Gamma$, dann ist $(S'', f'f, S) \in \Gamma$, $(S, S, S) \in \Gamma$ und $(S, f^{-1}, S') \in \Gamma$.

Eine Pseudogruppe $\Gamma \subset \mathfrak{S}^l$ kann auch definiert werden als eine *induktive Unterkategorie* von $\mathfrak{S}^l$; d. h. ein Untergruppoid Γ von $\mathfrak{S}^l$, das gesättigt ist in bezug auf den Durchschnitt zweier Elemente und auf allgemeine Aggregation und das der weiteren Bedingung genügt: Es sei $\varphi \in \Gamma$ und $\varphi' < \varphi$; wenn die Rechtseinheit von φ' zu Γ gehört, 3
dann gehört auch φ' zu Γ.

Der Durchschnitt einer Familie von Unterpseudogruppen von Γ ist eine Unterpseudogruppe von Γ. Jede Teilklasse von Γ erzeugt somit eine Unterpseudogruppe von Γ.

Definition: Eine induktive Kategorie von Isomorphismen $\mathfrak{S}$ wird eine *lokale Kategorie* (von Isomorphismen) genannt, wenn außer den Axiomen 1. bis 5. noch folgende Axiome erfüllt sind:

6. $$(\cup A) \cap s' = \bigcup_{s \in A} (s \cap s'),$$

wenn $A \subset \Phi(S)$ und wenn S und s' Einheiten von $\mathfrak{S}$ sind (Distributivitätsaxiom).

7. $\Phi(S)$ ist eine Menge.

Beispiel 1: Das Gruppoid $\mathfrak{E}$ ist eine lokale Kategorie von Isomorphismen. Die induzierten Elemente der Abbildung f von E auf E' sind die Beschränkungen von f auf Teilmengen von E.

Beispiel 2. Eine Klasse $\mathfrak{S}_0$ möge *lokale Klasse* genannt werden, wenn in $\mathfrak{S}_0$ eine Ordnungsrelation gegeben ist mit den folgenden Eigenschaften: 1. Jede nach oben beschränkte Teilklasse A hat eine obere Grenze, die das Aggregat von A genannt wird. 2. Das Distributivitätsaxiom 6. ist erfüllt. 3. Die Elemente $s < S$ bilden eine *Menge* $\Phi(S)$. Es sei f ein Isomorphismus der geordneten Menge $\Phi(S)$ auf die geordnete Menge $\Phi(S')$. Die Beschränkungen von f auf die Mengen $\Phi(s)$, wobei $s < S$, bilden eine Menge $\Phi(f)$ von Isomorphismen. Es sei $\mathfrak{S}$ die Klasse aller Isomorphismen f. Dann ist $\mathfrak{S}$ eine lokale Kategorie von Isomorphismen mit dem Induktionsfunktor Φ.

1 Beispiel 3. Es sei Ω_0 die Klasse der Paare (x, M), wo $x \in M$ und wo M eine geordnete Menge ist mit folgenden Eigenschaften: Jede nach oben beschränkte Teilmenge von M hat eine obere Grenze (Aggregat) in M; das Distributivitätsaxiom ist in M erfüllt. Man führe in Ω_0 die Ordnungsrelation ein: $(x, M) < (x', M)$ äquivalent mit $x < x'$ in M. Dann ist Ω_0 eine lokale Klasse, von welcher wie oben eine lokale Kategorie von Isomorphismen Ω abgeleitet wird.

2 **2. Gattung von lokalen Strukturen über einer lokalen Kategorie.**

Definition: Es sei C ein Untergruppoid der lokalen Kategorie $\overline{C}$ mit dem Induktionsfunktor Φ, und es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von Strukturen über C, $\mathfrak{S}$ die entsprechende Kategorie von Isomorphismen mit dem Projektionsfunktor p auf C. Wir nennen $\mathfrak{S}_0$ eine *Gattung von lokalen Strukturen über* C (und $\mathfrak{S}$ eine lokale Kategorie von Isomorphismen über C), wenn in $\mathfrak{S}$ ein Induktionsfunktor Ψ gegeben ist, welcher den folgenden Axiomen genügt:

a) Es sei $(f, S) \in \mathfrak{S}$, $p(f, S) = f \in C$. Dann wird $\Psi(f, S)$ eineindeutig durch p auf eine Teilmenge von $\Phi(f)$ abgebildet; somit wird $\Psi(S)$ eineindeutig durch p auf eine Teilmenge von $\Phi(E)$ abgebildet, wo $E = p(S)$.

b) Wenn $s \in \Psi(S)$, $s' \in \Psi(S)$, dann ist

$$p(s \frown s') = p(s) \frown p(s'), \quad p(0) = 0.$$

c) Wenn $A \subset \Psi(S)$, dann existiert ein $\sigma \in \Psi(S)$, so daß $p(\sigma) = \smile p(A)$. Daraus folgt $\sigma = \smile A$, also $p(\smile A) = \smile p(A)$.

3 Aus a), b), c) folgt, daß $\mathfrak{S}$ eine lokale Kategorie in bezug auf Ψ ist.

Eine Familie (f_i, s_i) von Elementen von $\mathfrak{S}$ wird *kompatibel* genannt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$p(s_i \frown s_j) = p(s_i) \frown p(s_j)\,; \quad \alpha(f_i \frown f_j) = p(s_i \frown s_j)\,;$$

die Familie (f_i) hat ein Aggregat $f \in C$. Für eine Familie (s_i) von Einheiten lauten diese Bedingungen: $p(s_i \frown s_j) = p(s_i) \frown p(s_j)$; die Familie $(p(s_i))$ hat ein Aggregat.

Definition: Wir nennen $\mathfrak{S}_0$ eine *vollständige* Gattung von lokalen Strukturen über C, wenn a), b), c) und das folgende Axiom d) erfüllt sind:

d) Jede kompatible Familie (f_i, s_i) von Elementen von $\mathfrak{S}$ hat ein 1
Aggregat (f, S).

Daraus folgt: f ist das Aggregat von (f_i), S ist das Aggregat von (s_i). Wir werden sehen, daß eine Gattung von lokalen Strukturen über C immer vervollständigt werden kann.

Bemerkung: Der Funktor Ψ ist schon bestimmt durch Ψ_0, p und Φ, wo Ψ_0 die Beschränkung von Ψ auf $\mathfrak{S}_0$ bezeichnet. Die Axiome lassen sich leicht formulieren in bezug auf Ψ_0, p und Φ. Wir nennen Ψ_0 das Induktionsgesetz in $\mathfrak{S}_0$.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von lokalen Strukturen über C. Wenn $S \in \mathfrak{S}_0$, $E = p(S)$, dann bezeichnen wir mit $\tau(S)$ die Menge der Elemente $p(s)$ für alle $s < S$. Dann ist $\tau(S)$ eine Teilmenge von $\Phi(E)$ mit folgenden Eigenschaften: $\tau(S)$ ist gesättigt in bezug auf den endlichen Durchschnitt und die allgemeine Aggregation; außerdem gehören E und o zu $\tau(S)$. Somit ist $\tau(S)$ eine Paratopologie auf E gemäß folgender Definition:

Definition: Eine Paratopologie auf E ist eine beliebige Teilmenge T von $\Phi(E)$, welche gesättigt ist in bezug auf endlichen Durchschnitt und allgemeine Aggregation und welche E und o enthält.

Die Paratopologien auf den Objekten von $\overline{C}$ bilden eine Gattung von Strukturen $\mathfrak{T}_0(\overline{C})$ über $\overline{C}$. Es sei T eine Paratopologie auf E, $f \in \overline{C}$, $\alpha(f) = E$, $\beta(f) = E'$. Dann ist fT die Bildmenge von T in $\Phi(E')$ durch den Isomorphismus $\Phi(f)$ von $\Phi(E)$ auf $\Phi(E')$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{T}(\overline{C})$ die entsprechende Kategorie von Isomorphismen. *$\mathfrak{T}_0(\overline{C})$ ist eine vollständige Gattung von lokalen Strukturen über $\overline{C}$.* Der Induktionsfunktor Φ' in $\mathfrak{T}(\overline{C})$ wird in folgender Weise definiert: Für jedes $e \in T$ ist $\Phi(e) \frown T$ eine Paratopologie t auf e, welche die von T auf e induzierte Paratopologie ist. Jedes Element $e \in T$ heißt ein offenes Element von $\Phi(E)$ in bezug auf T. Der induzierte Isomorphismus von (f, T) auf t ist (g, t), wo g das von f auf e induzierte Element ist. Wenn $\overline{C}$ das

Gruppoid $\mathfrak{E}$ ist, dann ist $\mathfrak{T}_0(\mathfrak{E})$ die Gattung $\mathfrak{C}_0$ aller Topologien und $\mathfrak{C}(\mathfrak{E})$ die Kategorie $\mathfrak{C}$ aller Homeomorphismen.

Satz: *Die Klasse der Paratopologien $\tau(S)$, für $S \in \mathfrak{S}_0$, ist eine Gattung von Strukturen $\tau(\mathfrak{S}_0)$ über C, welche der Gattung $\mathfrak{S}_0$ unterliegt; dabei ist $\tau(S)$ die unterliegende Paratopologie zu S.*

Wenn (f, S) ein Isomorphismus von S auf S' ist, dann bezeichnen wir mit $f\tau(S)$ die Bildmenge von $\tau(S)$ durch $\overline{\Phi}(f)$. Die Abbildung τ ist vertauschbar mit C: $f\tau(S) = \tau(fS)$. Also ist $\mathfrak{T}_0(\overline{C})$, sowie $\tau(\mathfrak{S}_0)$, eine unterliegende Gattung von Strukturen in bezug auf $\mathfrak{S}_0$. Wir bezeichnen mit τ auch den entsprechenden Funktor von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{T}_0(\overline{C})$: $\tau(f, S) = (f, \tau(S))$. Für den Funktor p besteht die kanonische Zerlegung $p = q\tau$, wo q der Projektionsfunktor von $\mathfrak{T}(\overline{C})$ auf $\overline{C}$ ist. Somit ist $\tau(\mathfrak{S})$ eine Kategorie von Isomorphismen, die $\mathfrak{S}$ unterliegt. $\mathfrak{S}_0$ ist eine Gattung von lokalen Strukturen über $\tau(\mathfrak{S})$, und $\tau(\mathfrak{S}_0)$ ist eine Gattung von lokalen Strukturen über C. Wenn $\mathfrak{S}_0$ eine vollständige Gattung von lokalen Strukturen über C ist, dann ist $\tau(\mathfrak{S}_0)$ nicht immer vollständig über C; aber $\mathfrak{S}_0$ ist vollständig über $\tau(\mathfrak{S})$.

Bemerkung: Die meisten Begriffe, die für Topologien definiert sind, haben auch einen Sinn für Paratopologien: z. B. die Begriffe „zusammenhängend", „lokal zusammenhängend", „kompakt", sowie
1+ die *Cohomologiegruppen von* Čech.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine beliebige lokale Klasse, $E \in \mathfrak{S}_0$, T eine Paratopologie
2 auf E, $\mathfrak{S}$ die entsprechende lokale Kategorie. Auf jedem Element $e < E$ bestimmt T eine induzierte Paratopologie t, die definiert ist durch die Menge der Durchschnitte von e mit den Elementen von T. Man erhält hierdurch einen allgemeineren Induktionsfunktor; derselbe genügt
3 aber nicht mehr den Axiomen einer induktiven Kategorie. Ein Isomorphismus von T auf T' (Paratopologie auf $E' \in \mathfrak{S}_0$) ist ein Paar (f, T), wo f ein Isomorphismus von $\Phi(E)$ auf $\Phi(E')$ ist, der T auf T' abbildet. Die Klasse der Isomorphismen ist eine lokale Kategorie $\mathfrak{T}(\mathfrak{S})$ von Isomorphismen über der lokalen Kategorie $\mathfrak{S}$. Man definiert eine zu $\mathfrak{T}(\mathfrak{S})$ gehörige Kategorie von Homomorphismen in folgender Weise: Es sei $\check{\mathfrak{S}}$ die Klasse der Abbildungen h von $\Phi(E)$ in $\Phi(E')$ mit folgenden Eigenschaften: Es sei $x_i \in \Phi(E)$. Wenn $x_1 < x_2$, dann ist

$$h(x_1) < h(x_2)\,; \quad h(\cup x_i) = \cup\,(h(x_i))\,;$$

aus $h(x) = 0$ folgt $x = 0$. $\check{\mathfrak{S}}$ ist eine Kategorie von Homomorphismen, die zu $\mathfrak{S}$ gehört; h ist ein Homomorphismus von E auf E'.

Dem Homomorphismus $h \in \check{\mathfrak{S}}$ entspricht eine Abbildung h^* von $\Phi(E')$ in $\Phi(E)$: $h^*(x')$ ist das Aggregat der Elemente x von $\Phi(E)$, für welche $h(x) < x'$, $x' \in \Phi(E')$. Aus $x_1' < x_2'$ folgt

$$h^*(x_1') < h^*(x_2'),\ h^*(0) = 0,\ h^*(E') = E.$$ 1

Ein Tripel (T', h, T) ist ein Homomorphismus von T in T', wenn

$$h \in \tilde{\mathfrak{S}},\ \alpha(h) = E,\ \beta(h) = E'$$

und wenn $h^*(e')$ ein offenes Element in bezug auf T ist für jedes offene Element e' in bezug auf T'. Die Klasse der Homomorphismen (T', h, T) ist eine Kategorie von Homomorphismen über $\tilde{\mathfrak{S}}$. Wenn $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{E}_0$, dann ist $\tilde{\mathfrak{S}} = \mathfrak{T}$ und die entsprechende Kategorie von Homomorphismen ist die Kategorie der kontinuierlichen Abbildungen.

Bemerkung: Man hat allgemeiner den Begriff einer *induktiven Gattung* von Strukturen $\mathfrak{S}_0$ und einer *induktiven Kategorie von Iso-* 2
morphismen $\mathfrak{S}$ *über* C, wo C ein Untergruppoid einer induktiven Kategorie $\bar{C}$ ist, die also nicht immer die Axiome 6) und 7) erfüllt. Der Begriff ist definiert wie oben durch die Axiome a), b), c). Wenn man d) hinzufügt, dann ist $\mathfrak{S}_0$ oder $\mathfrak{S}$ wieder vollständig. Doch die wichtigsten Resultate aus der Theorie der lokalen Strukturen hängen vom Distributivitätsaxiom 6) ab.

Unterliegende Gattung von lokalen Strukturen.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von lokalen Strukturen über C und $\mathfrak{S}_0'$ eine Gattung von lokalen Strukturen über C', wobei $C \subset C' \subset \bar{C}$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ die entsprechenden Kategorien von Isomorphismen, mit p und p' die Projektionsfunktoren auf C und C', mit Ψ und Ψ' die Induktionsfunktoren in $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$. Wir nennen $\mathfrak{S}_0'$ eine unterliegende Gattung von lokalen Strukturen für $\mathfrak{S}_0$, wenn ein Funktor q von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}'$ gegeben ist mit den Eigenschaften:

$$p = p'q;\ q(\Psi(f)) \subset \Psi'(q(f)).$$

Dann ist $\mathfrak{S}_0$ auch eine Gattung von lokalen Strukturen über $q(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}'$.

Gattung von lokalen Superstrukturen.

Eine Gattung $\bar{\mathfrak{S}}_0$ von lokalen Strukturen über $\mathfrak{S}$ ist auch eine Gattung von lokalen Strukturen über C, und wir nennen $\bar{\mathfrak{S}}_0$ auch eine Gattung von lokalen Superstrukturen über $(\mathfrak{S}, C)$.

3. Induktive Kategorien von Homomorphismen.

Es seien $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ zwei induktive Kategorien von Isomorphismen. Dann ist das Produkt $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$ eine induktive Kategorie mit folgendem

Induktionsfunktor Θ: Für $(u, v) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$ ist $\Theta(u, v)$ die Klasse der Paare (u', v') mit der Eigenschaft: $u' < u$, $v' < v$. Das Aggregat einer Familie von Elementen (u_i, v_i) ist $(\cup u_i, \cup v_i)$; der Durchschnitt ist $(\cap u_i, \cap v_i)$. Es sei $\mathfrak{S}$ eine induktive Kategorie von Isomorphismen über $C \subset \overline{C}$ und $\mathfrak{S}'$ eine induktive Kategorie von Isomorphismen über $C' \subset \overline{C}'$. $\overline{C}$ und $\overline{C}'$ sind induktive Kategorien und somit $\overline{C} \times \overline{C}'$. Dann ist $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}'$ eine induktive Kategorie von Isomorphismen über

$$C \times C' \subset \overline{C} \times \overline{C}'.$$

Es sei $\mathfrak{H}$ eine Kategorie von Homomorphismen (oder allgemeiner von Morphismen) für $\mathfrak{S}$. Dann ist $\mathfrak{H}$ eine Gattung von Strukturen über $\mathfrak{S}$ oder über einem Untergruppoid Π von $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$. Wir nennen $\mathfrak{H}$ eine induktive Kategorie von Homomorphismen (bzw. Morphismen), wenn in $\mathfrak{H}$ ein Induktionsgesetz I gegeben ist, wodurch $\mathfrak{H}$ eine induktive Gattung von Strukturen über $\mathfrak{S}$ oder Π wird; außerdem sollen noch die folgenden Bedingungen erfüllt sein: 1. Wenn $I(h)$ die Klasse der induzierten Elemente von $h \in \mathfrak{H}$ bezeichnet, dann ist $I(h'h) = I(h')\, I(h)$, falls $h'h$ definiert ist. 2. Wenn $h \in \mathfrak{S}$, dann ist

1 $$\Psi(h) = I(h) \cap \mathfrak{S},$$

wo Ψ der Induktionsfunktor in $\mathfrak{S}$ ist. Wenn das Aggregationsaxiom d) erfüllt ist, dann wird $\mathfrak{H}$ vollständig genannt.

Betrachten wir den Fall, wo $\mathfrak{H}$ eine induktive Gattung von Strukturen über $\Pi \subset \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ ist. Es sei h ein Homomorphismus von S in S' und $h' < h$. Dann ist h' ein Homomorphismus von s in s', $s < S$, $s' < S'$; zu jedem Paar $(s, s') < (S, S')$ gehört höchstens ein Element h' mit den Eigenschaften $h' < h$, $\alpha(h') = s$, $\beta(h') = s'$. Für eine Familie von Elementen $h_i < h$ bestehen die Gleichungen:

$$\alpha(\cup h_i) = \cup(\alpha(h_i)), \quad \beta(\cup h_i) = \cup(\beta(h_i));$$
$$\alpha(h_i \cap h_j) = \alpha(h_i) \cap \alpha(h_j), \quad \beta(h_i \cap h_j) = \beta(h_i) \cap \beta(h_j).$$

Man kann dem Induktionsgesetz in $\mathfrak{H}$ weitere Bedingungen auferlegen, z. B. die folgenden Bedingungen: 1. Für jedes $s < S$ gibt es ein Element $h_s \in I(h)$, für welches $\alpha(h_s) = s$, $\beta(h_s) = S'$. 2. Es sei

$$h' \in \mathfrak{H}, \ \alpha(h') = s, \ \beta(h') = s', \ s' < S';$$

dann existiert genau ein Element $h \in \mathfrak{H}$, für welches

$$h' < h, \ \alpha(h) = s, \ \beta(h) = S'.$$

3. Aus $\beta(h) = 0$ folgt $h = 0$ und somit $\alpha(h) = 0$. Diese Bedingungen sind erfüllt im Falle der Kategorie der kontinuierlichen Abbildungen.

Es sei $h_{s'}$ das Aggregat der Elemente $h' \in I(h)$, für welche $\beta(h') = s'$. 1+
Dann ist $h_{s'} \in I(h)$. Bezeichnen wir mit $h^*(s')$ das Element $\alpha(h_{s'})$, dann ist h^* eine Abbildung von $\Psi(S')$ in $\Psi(S)$; $h^*(S') = S$, $h^*(0) = 0$. Die Funktionen $s \to h_s$ und $s' \to h_{s'}$ für $h \in \mathfrak{H}$ definieren zwei Induktionsgesetze, wodurch $\mathfrak{H}$ eine induktive Gattung von Strukturen über $\mathfrak{S}$ 2
wird; im ersten Fall wird h betrachtet als eine Struktur über $\alpha(h)$, im zweiten Fall über $\beta(h)$.

Es sei $\mathfrak{S}$ eine lokale Kategorie von Isomorphismen über $C \subset \overline{C}$, $\tilde{C}$ eine induktive Kategorie von Homomorphismen für $\overline{C}$, $\mathfrak{H}$ eine induktive Kategorie von Homomorphismen für $\mathfrak{S}$ und $\tilde{\mathfrak{p}}$ ein Funktor 3
von $\mathfrak{H}$ in $\tilde{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Beschränkung von $\tilde{\mathfrak{p}}$ auf $\mathfrak{S}$ ist der Projektionsfunktor von $\mathfrak{S}$ auf C.
2. Betrachten wir $\tilde{C}$ und $\mathfrak{H}$ als induktive Gattungen von Strukturen über zwei Untergruppoiden von $\overline{C} \times \overline{C}$, dann ist $\tilde{C}$ eine unterliegende induktive Gattung von Strukturen in bezug auf $\mathfrak{H}$ und $\tilde{\mathfrak{p}}$.
3. Jedem $h \in \mathfrak{H}$ entspricht ein Tripel

$$(S', f, S), \quad S = \alpha(h), \quad S' = \beta(h), \quad f = \tilde{\mathfrak{p}}(h).$$

Die Abbildung $h \to (S', f, S)$ ist eineindeutig.

Dann wird $\mathfrak{H}$ eine induktive Kategorie von Homomorphismen über $\tilde{C}$ genannt. Wir können jedes $h \in \mathfrak{H}$ darstellen durch ein Tripel (S', f, S); die induzierten Elemente von h sind dargestellt durch gewisse Tripel (s', g, s), $s' < S'$, $s < S$, $g < f$.

Kategorie von lokalen Homomorphismen.

Eine induktive Kategorie $\mathfrak{H}$ von Homomorphismen für $\mathfrak{S}$ kann erweitert werden zu einer Kategorie $\mathfrak{H}^l$ in folgender Weise: Ein lokaler Homomorphismus von S in S' ist ein Tripel

$$(S', h, S), \quad h \in \mathfrak{H}, \quad \alpha(h) = s < S, \quad \beta(h) = S'.$$

Die Klasse dieser Tripel bildet die Kategorie $\mathfrak{H}^l$ mit folgender Multiplikation:

$$(S'', h', S')\,(S', h, S) = (S'', h'h, S),$$

wo $h'h$ definiert ist durch $h'h_{s'}$, wo $h_{s'}$ das oben ausgezeichnete induzierte Element von h auf $s' = \alpha(h')$ ist. Die Kategorie $\mathfrak{S}^l$ der lokalen 4
Isomorphismen wird mit einer Unterkategorie von $\mathfrak{H}^l$ identifiziert, indem man einen Isomorphismus g von s auf $s' < S'$ identifiziert mit dem eindeutig entsprechenden Homomorphismus h von s in S', für welchen $h_s = g$.

Wenn $\mathfrak{H}$ eine induktive Kategorie von Homomorphismen über $\tilde{C}$ ist, dann kann der lokale Homomorphismus (S', h, S) auch dargestellt werden durch (S', f, S), $f = \bar{p}(h)$.

4. Lokal isomorphe Strukturen.

Es sei $\mathfrak{S}$ eine lokale Kategorie von Isomorphismen und A eine Klasse von lokalen Isomorphismen (S', f_i, S_i). Wenn S' das Aggregat der Elemente $\beta(f_i)$ ist, wird A ein *Atlas* von $\mathfrak{S}_0$ auf S' genannt. Wenn außerdem alle S_i mit S identisch sind, wird A ein Atlas von S auf S' genannt. Wir nennen S' *lokal isomorph* zu S, wenn ein Atlas A von S auf S' existiert. Es sei $\mathfrak{A}$ die Klasse aller Atlasse von S auf S', wo S und S' beliebige Elemente von $\mathfrak{S}_0$ sind. $\mathfrak{A}$ ist eine Kategorie von Homomorphismen für $\mathfrak{S}$ mit folgender Multiplikation: Es sei A ein Atlas von S auf S', A' ein Atlas von S' auf S'', dann ist $A'A$ die Klasse aller
1 Produkte $\varphi'\varphi$, $\varphi \in A$, $\varphi' \in A'$. Die Rechtseinheit von A ist der Atlas, der gebildet wird von (S, S, S) und der identifiziert wird mit S.

Es sei $\mathfrak{S}$ eine lokale Kategorie von Isomorphismen über $C \subset \bar{C}$. Der Projektionsfunktor p von $\mathfrak{S}$ auf C kann erweitert werden auf $\mathfrak{S}^l$: $p(S', f, S) = (p(S'), p(f), p(S)) \in \bar{C}^l$. Wenn S, S' und $(E', g, E) \in \bar{C}^l$ gegeben sind, dann gibt es höchstens ein $(S', f, S) \in \mathfrak{S}^l$, so daß

$$p(S', f, S) = (E', g, E).$$

Wir sagen (E', g, E) bestimmt einen lokalen Isomorphismus von S auf S', falls $(E', g, E) = p(S', f, S)$, und wir bezeichnen dann (S', f, S) auch mit (S', g, S). Wenn A ein Atlas von S auf S' ist, dann ist $p(A)$ ein Atlas von $p(S)$ auf $p(S')$. Wenn $\Gamma(S)$ die Pseudogruppe aller lokaler Automorphismen von S bezeichnet, dann ist $p(\Gamma(S))$ eine Unterpseudogruppe von $\Gamma(E)$, $E = p(S)$. Der Atlas $p(A)$ ist kompatibel mit $p(\Gamma(S))$ gemäß folgender Definition: Ein Atlas B von E auf $E' \in C_0$ heißt *kompatibel* mit einer Unterpseudogruppe Γ' von $\Gamma(E)$, wenn $(E, g_j^{-1} g_i, E) \in \Gamma'$, für jedes Paar von Elementen (E', g_i, E) und (E', g_j, E) von B. Es sei $\mathfrak{B}$ die Klasse aller Atlasse B, welche folgenden Bedingungen genügen: B ist ein Atlas von $E \in C_0$ auf $E' \in C_0$; wenn
2 $(E', g, E) \in B$, dann ist $g \in C$.

Satz: *Wenn $\mathfrak{S}$ eine vollständige lokale Kategorie von Isomorphismen über C ist, dann bestimmt jeder Atlas $B \in \mathfrak{B}$, der kompatibel ist mit $p(\Gamma(S))$, einen Atlas $A \in \mathfrak{A}$, so daß $\alpha(A) = S \in \mathfrak{S}_0$ und $p(A) = B$. Dadurch ist auch $S' = \beta(A)$ bestimmt; wir setzen $S' = B \cdot S$, und wir sagen,*
3 *daß B die Struktur S auf E in die Struktur S' auf E' überführt.*

Es sei $(E', g, E) \in B$, $\alpha(g) = p(s)$, $s < S$, $gs = s'$. Die Strukturen s' bilden dann eine kompatible Familie über E und haben ein Aggregat S'.

Die Tripel (S', g, S) bilden den Atlas A und $S' = B \cdot S$. Die Paare (B, S), für welche B kompatibel ist mit $p(\Gamma(S))$, bilden eine Kategorie, die äquivalent ist mit $\mathfrak{A}$.

Bemerkung: Wir erwähnen hier kurz eine andere wichtige Kategorie von Homomorphismen für $\mathfrak{S}$. Es sei φ eine Klasse von lokalen Isomorphismen $(S', f_i, S) \in \mathfrak{S}^l$ mit folgenden Eigenschaften: S ist das Aggregat der Elemente $\alpha(f_i)$; $\alpha(f_i \frown f_j) = \alpha(f_i) \frown \alpha(f_j)$; φ ist gesättigt in bezug auf Induktion und Aggregation. Dann nennen wir φ eine Ausbreitung von S in S'; (S, φ) ist eine in S' ausgebreitete Struktur (structure étalée). Die Ausbreitungen bilden eine Kategorie von Homomorphismen für $\mathfrak{S}$. Diese Kategorie sowie die Kategorie $\mathfrak{A}$ sind induktive Kategorien von Homomorphismen für $\mathfrak{S}$. 1

5. Erweiterung einer Gattung von lokalen Strukturen.

Es sei $\mathfrak{S}_0$ eine Gattung von lokalen Strukturen über $C \subset \overline{C}$. Dann kann $\mathfrak{S}_0$ erweitert werden zu einer Gattung $\mathfrak{S}_0'$ von lokalen Strukturen über C', wobei C' ein volles, gesättigtes Untergruppoid von $\overline{C}$ und $C \subset C'$ ist.

Eine *lokale Karte* von $\mathfrak{S}_0$ auf $E' \in \overline{C}_0$ ist ein Tripel (E', f, S), für welches $f \in C$, $S \in \mathfrak{S}_0$, $\alpha(f) = p(s)$, $s < S$, $\beta(f) < E'$. Ein *Atlas* von $\mathfrak{S}_0$ auf E' ist eine Klasse A von lokalen Karten (E', f_i, S_i) mit folgenden Eigenschaften: E' ist das Aggregat der Elemente $\beta(f_i)$; wenn

$$(E', f_i, S_i) \in A, \quad (E', f_j, S_j) \in A,$$

dann ist $(S_j, f_j^{-1} f_i, S_i) \in \mathfrak{S}^l$. $\mathfrak{S}^l$ operiert auf der Klasse Σ aller Karten (E', f, S) in folgender Weise: $(E', f, S)\,(S, g, S_1) = (E', fg, S_1)$, wo $(S, g, S_1) \in \mathfrak{S}^l$, $g \in C$. Das Aggregat einer Klasse von Karten (E', f_i, S) ist (E', f, S), $f = \smile f_i$. Ein Atlas A von $\mathfrak{S}_0$ auf E' heißt *vollständig*, 2
wenn er gesättigt ist in bezug auf $\mathfrak{S}^l$ und auf Aggregation. Indem man einen beliebigen Atlas A zuerst sättigt in bezug auf $\mathfrak{S}^l$ und dann in bezug auf Aggregation, erhält man einen vollständigen Atlas $\overline{A}$; jeder vollständige Atlas, der A enthält, ist identisch mit $\overline{A}$. Es sei $\mathfrak{S}_0'$ die Klasse aller vollständigen Atlasse von $\mathfrak{S}_0$ auf Elemente von $\overline{C}_0$. Diese Elemente bestimmen ein volles gesättigtes Untergruppoid C' von $\overline{C}$. Das Gruppoid C' operiert auf $\mathfrak{S}_0'$ in folgender Weise: Es sei A ein vollständiger Atlas auf E', $f \in C'$, $\alpha(f) = E'$; dann ist fA ein vollständiger Atlas auf $E'' = \beta(f)$. Somit ist $\mathfrak{S}_0'$ eine Gattung von Strukturen über C'; wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}'$ die entsprechende Kategorie von Isomorphismen.

Satz: *$\mathfrak{S}_0'$ ist eine vollständige Gattung von lokalen Strukturen über C'.* 3

Wenn A ein vollständiger Atlas von $\mathfrak{S}_0$ auf E' ist, dann bestimmt A auf E' eine Paratopologie $\tau(A)$; ein Element e' von $\tau(A)$ ist das Aggregat einer beliebigen Menge von Elementen $\beta(f_i)$, wo f_i einer Karte

$$(E', f_i, S_i) \in A$$

entspricht. Der Karte $(E', f_i, S_i) \in A$ entspricht die Karte (e', f_i, S_i), falls $\beta(f_i) < e'$. Die Klasse dieser Karten (e', f_i, S_i) ist ein vollständiger Atlas $A_{e'}$ von $\mathfrak{S}_0$ auf e'. Es sei $A_{e'}$ der induzierte Atlas von A auf e'. Dadurch wird in $\mathfrak{S}_0'$ ein Induktionsgesetz definiert, so daß $\mathfrak{S}_0'$ eine Gattung von lokalen Strukturen über C' ist. Man beweist leicht, daß das Aggregationsaxiom erfüllt ist. $\mathfrak{S}_0$ wird identifiziert mit einer Untergattung von $\mathfrak{S}_0'$, indem man $S \in \mathfrak{S}_0$ identifiziert mit dem vollständigen Atlas, der erzeugt wird von der Karte $(p(S), p(S), S)$.

Wir nennen $\mathfrak{S}_0'$ die vollständige Erweiterung von $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}'$ die vollständige Erweiterung von $\mathfrak{S}$.

Es sei $\mathfrak{S}_0''$ eine vollständige Gattung von lokalen Strukturen über C', so daß $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}_0''$ und daß jede Struktur $S'' \in \mathfrak{S}_0''$ ein Aggregat von Strukturen s_i'' ist, wo jedes s_i'' isomorph ist zu einer Struktur $s_i \in \mathfrak{S}_0$.
1 Dann ist $\mathfrak{S}_0''$ äquivalent mit $\mathfrak{S}_0'$.

Wenn $\mathfrak{S}_0$ eine unvollständige Gattung von lokalen Strukturen über C ist, dann kann $\mathfrak{S}_0$ immer erweitert werden zu einer vollständigen Gattung $\tilde{\mathfrak{S}}_0$ von lokalen Strukturen über C. $\tilde{\mathfrak{S}}_0$ ist die Klasse der Strukturen der Gattung $\mathfrak{S}_0'$ auf den Einheiten von C. Eine Struktur der Gattung $\tilde{\mathfrak{S}}_0$ kann auch definiert werden als eine Menge von kompatiblen Strukturen s_i über $E \in C_0$, d. h. $p(s_i) < E$ und

$$p(s_i \frown s_j) = p(s_i) \frown p(s_j),$$

welche außerdem gesättigt ist in bezug auf Induktion und Aggrega-
2 tion innerhalb $\mathfrak{S}_0$.

Die vollständige Erweiterung $\mathfrak{S}_0'$ von $\mathfrak{S}_0$ kann auch in folgender Weise definiert werden: Wir betrachten jetzt nur Karten (E', f, S), für welche $\alpha(f) = p(S)$, und Atlasse von $\mathfrak{S}_0$ auf E', welche von solchen Karten gebildet sind. Das Gruppoid $\mathfrak{S}$ operiert auf der Klasse aller Karten dieser Art: $(E', f, S)(g, S_1) = (E', fg, S_1)$, falls

$$(g, S_1) \in \mathfrak{S},\ gS_1 = S.$$

Ein Atlas A von $\mathfrak{S}_0$ auf E' wird nun vollständig genannt, wenn er gesättigt ist in bezug auf $\mathfrak{S}$, Induktion und Aggregation: Eine induzierte Karte von (E', f, S) ist (E', g, s), $g < f$, $s < S$, $\alpha(g) = p(s)$. Das Aggregat einer Klasse von Karten (E', f_i, S_i) ist $(E', \smile f_i, \smile S_i)$. Jeder

Atlas A führt durch Sättigung in bezug auf $\mathfrak{S}$, Induktion und Aggregation zu einem vollständigen Atlas $\bar{A}$. Die Klasse $\mathfrak{S}_0''$ der vollständigen Atlasse von $\mathfrak{S}_0$ auf Elemente von $\bar{C}_0$ ist eine Gattung von lokalen Strukturen über dem oben definierten Gruppoid C', und $\mathfrak{S}_0''$ ist äquivalent mit $\mathfrak{S}_0'$. Eine induzierte Struktur von $A \in \mathfrak{S}_0''$ ist hier einfach ein $A' \in \mathfrak{S}_0''$, so daß $A' \subset A$.

Erweiterung einer Pseudogruppe.

Es sei Γ eine Unterpseudogruppe von $\mathfrak{S}^l$. Wir ordnen Γ eine vollständige lokale Kategorie von Isomorphismen $\mathfrak{S}(\Gamma)$ zu. Es sei A ein Atlas von $\mathfrak{S}$ auf E'; die Elemente von A sind wieder lokale Karten (E', f_i, S_i), $f_i \in \bar{C}$, $\alpha(f_i) = p(s_i)$, $s_i < S_i$, $\beta(f_i) < E'$. Wir sagen, daß A mit Γ kompatibel ist, wenn $(S_j, f_j^{-1} f_i, S_i) \in \Gamma$ für jedes Paar von Karten (E', f_i, S_i) und (E', f_j, S_j) von A. Daraus folgt

$$(S_i, f_i^{-1} f_i, S_i) \in \Gamma, \quad \text{d. h.} \quad (S_i, \alpha(f_i), S_i) \in \Gamma.$$

Ein mit Γ kompatibler Atlas A heißt vollständig, wenn er gesättigt ist in bezug auf Γ und auf Aggregation. Es sei $\mathfrak{S}_0(\Gamma)$ die Klasse der vollständigen mit Γ kompatiblen Atlasse. *Dann bildet $\mathfrak{S}_0(\Gamma)$ eine vollständige Gattung von lokalen Strukturen über einem Untergruppoid C'' von $\bar{C}$, $C'' < C'$.* Da jeder Atlas $A \in \mathfrak{S}_0(\Gamma)$ einen vollständigen Atlas $\bar{A}$ in bezug auf $\mathfrak{S}^l$ bestimmt, ist $\mathfrak{S}_0'$ eine unterliegende Gattung von lokalen Strukturen für $\mathfrak{S}_0(\Gamma)$. Wir nennen $\mathfrak{S}_0(\Gamma)$ die zu Γ gehörige Gattung von Strukturen. 1

Es sei S, identifiziert mit (S, S, S), eine Einheit von Γ. Dann ist $(p(S), p(S), S)$ ein mit Γ kompatibler Atlas auf $p(S)$; derselbe bestimmt auf $p(S)$ eine Struktur $\bar{S} \in \mathfrak{S}_0(\Gamma)$, wofür S die unterliegende Struktur ist. Die Pseudogruppe $\bar{\Gamma}$ der lokalen Isomorphismen für die Klasse der Strukturen $\bar{S}$ projeziert sich eineindeutig auf Γ. Wir können Γ mit $\bar{\Gamma}$ identifizieren, und die Pseudogruppe der lokalen Isomorphismen von $\mathfrak{S}_0(\Gamma)$ ist eine Erweiterung von $\bar{\Gamma}$. Die Karte (E', f, S) von $A \in \mathfrak{S}_0(\Gamma)$ bestimmt den lokalen Isomorphismus $(A, f, \bar{S})$.

Beispiele: Die Konstruktion von $\mathfrak{S}_0(\Gamma)$ führt zu wichtigen Gattungen von lokalen Strukturen. Im Zahlenraum R^n sei Λ_n^r die Pseudogruppe der lokalen Homöomorphismen (R^n, f, R^n) der Klasse r; d. h. in $\alpha(f)$ hat f kontinuierliche partielle Ableitungen bis zur Ordnung r, und die Funktionaldeterminante ist von o verschieden in jedem Punkt von $\alpha(f)$. Dabei kann r die ganzen Werte von o bis ∞ annehmen; wenn f außerdem analytisch ist, dann hat man die Pseudogruppe Λ_n^ω.

Wir können (R^n, f, R^n) mit f identifizieren. Dann ist A^r_n eine lokale Kategorie von Isomorphismen: $A^r_n \subset A^k_n \subset A^0_n \subset \mathfrak{E}$, $k < r$. Es sei C^r_n die vollständige Erweiterung von A^r_n in bezug auf $\mathfrak{E}$. Die Kategorie C^k_n, für $k < r$, ist eine unterliegende lokale Kategorie von Isomorphismen
1 in bezug auf C^r_n. Man definiert $C^{r\cdot}$ als die Summe der Kategorien

$$C^r_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Die Strukturen der Gattung $(C^r)_0$ werden (differenzierbare) Mannigfaltigkeiten der Kategorie C^r genannt. (Weitere Beispiele in IV.)

Erweiterung einer induktiven Kategorie von Homomorphorismen.

Es sei $\mathfrak{S}$ eine lokale Kategorie von Isomorphismen, $\mathfrak{S}'$ eine Erweiterung von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{H}$ eine induktive Kategorie von Homomorphismen für $\mathfrak{S}$. Die Konstruktion der Erweiterung einer Gattung von lokalen Strukturen führt dann auch zu einer Erweiterung $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$, so daß $\mathfrak{H}'$ eine induktive Kategorie von Homomorphismen für $\mathfrak{S}'$ ist.

Es sei $\mathfrak{S}$ außerdem eine lokale Kategorie von Isomorphismen über $C \subset \bar{C}$, $\tilde{C}$ eine induktive Kategorie von Homomorphismen für $\bar{C}$, $\mathfrak{H}$ eine induktive Kategorie von Homomorphismen für $\mathfrak{S}$ über $\tilde{C}$. Dann ist die Erweiterung $\mathfrak{H}'$ von $\mathfrak{H}$ auch eine induktive Kategorie von Homomorphismen über $\tilde{C}$. Ein Element $h' \in \mathfrak{H}'$ ist ein Tripel (S', g, S) mit den Eigenschaften $S \in \mathfrak{S}'_0$, $S' \in \mathfrak{S}'_0$, $g \in \tilde{C}$, $(S'_1, f'^{-1} g f, S_1) \in \mathfrak{H}$,
2 + falls $(S, f, S_1) \in \mathfrak{S}'^l$, $(S', f', S'_1) \in \mathfrak{S}'^l$, $S_1 \in \mathfrak{S}$, $S'_1 \in \mathfrak{S}$.

IV. Lokale Produkte, Blätterungen, Faserungen.

1. Lokale Produkte.

Es seien C und C' zwei Untergruppoide von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ eine lokale Kategorie von Isomorphismen über C, $\mathfrak{F}$ eine lokale Kategorie von Isomorphismen über C', p und p' die entsprechenden Projektionsfunktoren. Wir haben schon Induktionsfunktoren in $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$ angegeben, wodurch $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$ eine Kategorie von lokalen Isomorphismen über

$$C \times C' \subset \mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$$

wird. Wenn $C \times C'$ identifiziert wird durch den Funktor Π mit einem Untergruppoid von $\mathfrak{E}$, dann haben wir den Induktionsfunktor in $\mathfrak{E}$ zu betrachten. Wir können $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$ erweitern zu einer lokalen Kategorie von Isomorphismen über einem Untergruppoid von $\mathfrak{E}$.

Es sei $S_i \in \mathfrak{B}_0$, $p(S_i) = B_i$, $S'_i \in \mathfrak{F}_0$, $p'(S'_i) = F_i$. Das Paar (S_i, S'_i) wird als eine Struktur $S_i \times S'_i$ über $B_i \times F_i$ betrachtet. Die Menge

$B_i \times F_i$ ist mit der Produkttopologie $\tau(S_i) \times \tau(S_i')$ versehen. Es sei

$$s_i < S_i,\ s_i' < S_i',\ g \in C,\ g' \in C',\ (g, s_1) \in \mathfrak{B},\ (g', s_1') \in \mathfrak{F},$$
$$g s_1 = s_2,\ g' s_1' = s_2'.$$

Dann ist $p(s_i) \times p'(s_i')$ eine offene Menge von $B_i \times F_i$, und $g \times g'$ ist ein Homöomorphismus von $p(s_1) \times p'(s_1')$ auf $p(s_2) \times p'(s_2')$. Es sei $f \in \mathfrak{E}$ das Aggregat einer Menge von Abbildungen $g \times g'$ bei fest gegebenen Strukturen S_i und S_i', $i = 1, 2$. Dann ist f ein Homöomorphismus einer offenen Menge von $B_1 \times F_1$ auf eine offene Menge von $B_2 \times F_2$. Das Tripel $(S_2 \times S_2', f, S_1 \times S_1')$ wird ein lokaler Isomorphismus von $S_1 \times S_1'$ auf $S_2 \times S_2'$ genannt. Die Klasse Γ dieser Tripel ist eine Kategorie mit folgender Multiplikation:

$$(S_3 \times S_3', f', S_2 \times S_2')\,(S_2 \times S_2', f, S_1 \times S_1') = (S_3 \times S_3', f' f, S_1 \times S_1').$$

Die Tripel $(S_2 \times S_2', f, S_1 \times S_1') \in \Gamma$, für welche

$$\alpha(f) = p(S_1) \times p'(S_1'),\ \beta(f) = p(S_2) \times p'(S_2'),$$

bilden ein Gruppoid Γ', welches $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$ als Untergruppoid enthält. Auf jeder offenen Menge U von $B_1 \times F_1$ in bezug $\tau(S_1) \times \tau(S_1')$ läßt sich eine von $S_1 \times S_1'$ induzierte Struktur $(S_1 \times S_1')_U$ definieren: $(S_1 \times S_1')_U$ ist die Klasse der Tripel $(U, f, S \times S')$, für welche

$$(S_1 \times S_1', f, S \times S') \in \Gamma,\ \beta(f) \subset U,\ \alpha(f) = p(S) \times p(S').$$

Die Teilklasse $(U, f, S \times S')\Gamma'$ möge eine zulässige Produktstruktur in U heißen; $(S_1 \times S_1')_U$ ist dann auch die Klasse der zulässigen Produktstrukturen in U. Wir identifizieren $S_1 \times S_1'$ mit der induzierten Struktur dieser Art auf $p(S_1) \times p'(S_1')$. Wenn

$$(S_2 \times S_2', f, S_1 \times S_1') \in \Gamma,\ \alpha(f) = U_1,\ \beta(f) = U_2,$$

dann ist $(f, (S_1 \times S_1')_{U_1})$ ein Isomorphismus von $(S_1 \times S_1')_{U_1}$ auf $(S_2 \times S_2')_{U_2}$. Diese Isomorphismen bilden eine lokale Kategorie, und Γ ist die Pseudogruppe der lokalen Isomorphismen zwischen Strukturen der Klasse $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{F}_0$.

Es sei $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ die Erweiterung von $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{F}_0$, die zu Γ gehört, $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ die entsprechende Kategorie von Isomorphismen. Eine Struktur $A \in \mathfrak{L}_0(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ ist also ein vollständiger mit Γ verträglicher Atlas auf eine Menge E. Eine zu A gehörige lokale Karte ist ein Tripel $(E, f_i, S_i \times S_i')$, $S_i \in \mathfrak{B}_0$, $S_i' \in \mathfrak{F}_0$, $f_i \in \mathfrak{E}$, $\alpha(f_i) =$ offene Menge von $p(S_i) \times p'(S_i')$ in bezug auf $\tau(S_i) \times \tau(S_i')$, $\beta(f_i) \subset E$. Die durch A definierte Struktur ist auch bestimmt durch die Teilklasse von A, die gebildet wird von den Elementen $(E, f_i, S_j \times S_i')$, für welche

$$\alpha(f_i) = p(S_i) \times p'(S_i');$$

eine solche Karte möge eine elementare Karte heißen; die Klasse

$$(E, f_i, S_i \times S'_i)\Gamma_0$$

definiert dann auf $\beta(f_i)$ eine Produktstruktur. Die Struktur A auf E ist also auch eine vollständige Klasse von kompatiblen Produktstrukturen auf Teilmengen e_i von $E = \cup e_i$. Man identifiziert wieder $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$ mit einer Unterkategorie von $\mathfrak{L}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$, und wir nennen $\mathfrak{L}_0(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ die zu $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$ gehörige *Gattung von lokalen Produkten.*

2. Blätterungen

Die Pseudogruppe Γ des vorigen Abschnitts kann erweitert werden in folgender Weise: Es sei $s_1 < S_1$, $s'_1 < S'_1$ und φ ein Homöomorphismus von $p(s_1) \times p(s'_1)$ auf einer offenen Menge von $B_2 \times F_2$ in bezug auf $\tau(S_2) \times \tau(S'_2)$, welcher dargestellt ist durch:

$$(x, y) \to (g(x), \psi(x, y)),\ x \in p(s_1),\ y \in p'(s'_1),\ (g, s_1) \in \mathfrak{B},$$
$$g s_1 < S_2,\ \psi(x, y) \in p(S'_2),$$

so daß außerdem die folgende Bedingung erfüllt ist: Wenn g'_x die Abbildung $y \to \psi(x, y)$ bezeichnet, dann ist (g'_x, s'_1) ein Isomorphismus von s'_1 auf $s'_2(x) < S'_2$. Es sei f ein Homöomorphismus einer offenen Menge in bezug auf $\tau(S_1) \times \tau(S'_1)$ auf eine offene Menge in bezug auf $\tau(S_2) \times \tau(S'_2)$, welcher ein Aggregat von solchen Homöomorphismen φ ist. Dann wird $(S_2 \times S'_2, f, S_1 \times S'_1)$ ein lokaler Isomorphismus von $S_1 \times S'_1$ auf $S_2 \times S'_2$ genannt. Die Klasse dieser lokalen Isomorphismen ist eine Pseudogruppe von lokalen Isomorphismen $\tilde{\Gamma}$. Man definiert wie oben die induzierte Struktur $(S_1 \times S'_1)_U$, unter Benutzung der lokalen Isomorphismen im verallgemeinerten Sinn; d. h. $(S_1 \times S'_1)_U$ ist wieder die Klasse der zulässigen Produktstrukturen auf der offenen Menge $U \subset B_1 \times F_1$.

Es sei $\tilde{\mathfrak{L}}(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ die zu $\tilde{\Gamma}$ gehörige Erweiterung von $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$. Eine Struktur der Gattung $\tilde{\mathfrak{L}}_0(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ heißt eine Blätterung auf einer Menge E. Sie ist definiert durch einen vollständigen mit $\tilde{\Gamma}$ kompatiblen Atlas A auf E. Eine *elementare Karte* ist wieder $(E, f, S \times S') \in A$, so daß $\alpha(f) = p(S) \times p'(S')$; die induzierte Blätterung auf $\beta(f)$ ist eine *elementare Blätterung*. Die Struktur A kann auch definiert werden durch eine vollständige, kompatible Klasse von elementaren Blätterungen über Mengen e_i, deren Aggregat E ist.

Es sei $(E, f, S \times S')$ eine elementare, zu A gehörige Karte. Wir bezeichnen mit f'_x die Abbildung

$$y \to f(x, y),\ x \in p(S),\ y \in p'(S'),\ f(x, y) \in E.$$

Die Klasse aller Abbildungen f_x, die zu irgendeiner elementaren Karte von A gehören, bilden einen Atlas A' von $\mathfrak{F}$ auf E. Somit ist auf E auch eine Struktur der vollständigen Erweiterung $\mathfrak{F}_0'$ der Gattung $\mathfrak{F}_0$ definiert. Wir haben somit auf E zwei unterliegende Topologien $\tau(A)$ und $\tau(A')$. Wenn $\tau(A')$ lokalzusammenhängend ist, dann ist jede Komponente in bezug auf $\tau(A')$ mit einer Struktur der Gattung $\mathfrak{F}_0'$ versehen. Die mit dieser Struktur versehene Komponente heißt ein *Blatt* der Blätterung.

Wenn A eine Blätterung auf E ist, dann sind auch ausgezeichnete lokale Homomorphismen von A in die Struktur der Gattung $\mathfrak{B}_0$ definiert. Es sei $(E, f, S \times S') \in A$ und es sei h das Produkt von f^{-1} mit der Projektion von $p(S) \times p'(S)$ auf $p(S)$. Dann werde (S, h, A) ein lokaler Homomorphismus von A in S genannt. Wenn (S_1, h_1, A) und (S_2, h_2, A) zwei Tripel dieser Art sind, dann gibt es für $x \in \alpha(h_1) \frown \alpha(h_2)$ einen lokalen Isomorphismus (S_2, g, S_1), so daß $g h_1 < h_2$.

Dies führt zu einer anderen Art von Blätterungen. Es sei $\mathfrak{Z}$ eine lokale Kategorie von Isomorphismen über $C_1 \subset \mathfrak{E}$ mit dem Projektionsfunktor p_1, und es sei $\mathfrak{H}^l$ eine Kategorie von lokalen Homomorphismen von $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{B}$, so daß $h \in \mathfrak{H}^l$ ein Tripel (S, f, Z) ist,

$$Z \in \mathfrak{Z}_0, \; f \in \tilde{\mathfrak{E}}, \; \alpha(f) = p_1(z), \; z < Z, \; \beta(f) \subset p(S).$$

Wir definieren nun eine Blätterung von Z durch eine Klasse A von lokalen Homomorphismen $(S_i, f_i, Z) \in \mathfrak{H}^l$ mit den Eigenschaften: 1. Für $x \in \alpha(f_i) \frown \alpha(f_j)$ existiert ein lokaler Isomorphismus (S_j, g, S_i), so daß $g f_i < f_j$. 2. Die Klasse A ist vollständig in bezug auf Induktion, Aggregation und $\mathfrak{B}^l$, das auf $\mathfrak{H}^l$ in folgender Weise operiert:

$$(S_j, g, S_i)\,(S_i, f, Z) = (S_j, g f, Z).$$

Die Gattung der Blätterungen dieser Art ist eine Gattung von lokalen Strukturen über $\mathfrak{Z}_0$. Zu einer Gattung von Blätterungen der ersten Art gehört eine unterliegende Gattung von Blätterungen der zweiten Art.

Oft ist ein Untergruppoid $\tilde{\Gamma}'$ von $\tilde{\Gamma}$ gegeben. Es sei $\tilde{\mathfrak{L}}'(\mathfrak{B} \times \mathfrak{F})$ die zu $\tilde{\Gamma}'$ gehörige Erweiterung von $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$. Die Strukturen der entsprechenden Gattung werden wieder Blätterungen genannt. So erhält man z. B. die Blätterungen der Klasse r oder die analytischen Blätterungen, wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{F} = C^r$ oder C^ω ist. 1+

Bemerkung: Ein lokales Produkt entspricht einer doppelten Blätterung.

3. Faserungen.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine Kategorie von Isomorphismen über $C \subset \mathfrak{C}$, wofür der Induktionsfunktor der Identitätsfunktor ist; $\mathfrak{B}$ sei wieder eine lokale Kategorie von Isomorphismen über $C' \subset \mathfrak{C}$. Wir betrachten die oben definierte Pseudogruppe $\tilde{\Gamma}$ in diesem speziellen Fall. Ein Element von $\tilde{\Gamma}$ ist ein Tripel $(S_2 \times S_2', f, S_1 \times S_1')$, wobei

$$\alpha(f) = p(s_1) \times p'(S_1'),\ s_1 < S_1,\quad \beta(f) = p(s_2) \times p'(S_2'),\ s_2 < S_2.$$

Der Homöomorphismus f ist dargestellt durch: $(x, y) \to (g(x), \psi(x, y))$, (g, s_1) ist ein Isomorphismus von s_1 auf s_2; $y \to \psi(x, y)$ ist für jedes $x \in p(s_1)$ eine Abbildung $g_x' \in C'$, so daß (g_x', S_1') ein Isomorphismus von S_1' auf S_2' ist. Man kann f zusätzliche Bedingungen auferlegen. Z. B. nehmen wir an, daß zu $S' \in \mathfrak{F}_0$ eine unterliegende Topologie $T(S')$ auf $p'(S')$ gehört. Dann haben wir die Produkttopologien $\tau(S_i) \times T(S_i')$, und wir setzen voraus, daß f ein Homöomorphismus in bezug auf diese Produkttopologien ist. Dadurch wird eine Unterpseudogruppe $\tilde{\Gamma}'$ von $\tilde{\Gamma}$ definiert. In anderen Fällen wird vorausgesetzt, daß f analytisch oder von der Klasse r ist. Die zu $\tilde{\Gamma}$ oder $\tilde{\Gamma}'$ gehörige Erweiterung von $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{F}_0$ ist die Gattung der *Faserungen*.

Die Fasern sind definiert wie oben die Blätter. Jede Faser ist mit einer Struktur versehen, die isomorph ist zu einer Struktur $S \in \mathfrak{F}_0$ in der vollständigen Erweiterung von $\mathfrak{F}$. Die Fasern einer Faserung auf E bilden eine Zerlegung von E, und der Faktorraum B dieser Zerlegung ist mit einer Struktur versehen, die zur vollständigen Erweiterung von $\mathfrak{B}_0$ gehört; wenn die Faserung definiert ist durch einen mit $\tilde{\Gamma}$ kompatiblen Atlas von $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{F}_0$ auf E, dann erhält man durch Übergang zu Faktorräumen einen Atlas von $\mathfrak{B}$ auf B. Wenn die Topologie auf B lokalzusammenhängend ist, dann sind alle Fasern der Faserung
1+ isomorph zu einer Struktur $S \in \mathfrak{F}_0$.

Bemerkung 1: Durch Erweiterung einer Kategorie von lokalen Homomorphismen, die zuerst für die Gattung $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{F}_0$ gegeben sind, erhält man durch die oben angegebene Konstruktion eine Kategorie von lokalen Homomorphismen für die entsprechenden Gattungen der lokalen Produkte, der Blätterungen oder der Faserungen.

Bemerkung 2: Man kann ausgehen von zwei lokalen Kategorien von Isomorphismen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{F}$, wo $\mathfrak{B}$ über $C \subset \overline{C}$ definiert ist und $\mathfrak{F}$ über $C' \subset \overline{C}'$; $\overline{C}$ und $\overline{C}'$ sind nun beliebige lokale Kategorien von Isomorphismen. Durch eine natürliche Verallgemeinerung kann man wieder lokale Produkte, Blätterungen und Faserungen definieren. Man muß zuerst $\bar{C} \times \bar{C}'$ zu einer lokalen Kategorie erweitern, z. B. zu der lokalen Kategorie des „Tensorprodukts" $\bar{C} \otimes \bar{C}'$: Ein Objekt von $\bar{C} \otimes \bar{C}'$ ist eine Menge U von Elementen $e \times e'$, $e < E$, $e' < E'$, mit folgenden Eigenschaften: 1. Wenn $e \times e' \in U$ und $e_1 < e$, $e_1' < e'$ ist, dann ist $e_1 \times e_1' \in U$; 2. U ist gesättigt in bezug auf „vertikale" Aggregation $(\smile(e \times e_i') = e \times \smile e_i')$ und „horizontale" Aggregation

$$(\smile(e_i \times e') = \smile e_i \times e').$$ 1+

Die Pseudogruppen Γ und $\tilde{\Gamma}$ können dann in ähnlicher Weise definiert werden.

(Eingegangen: 23. 6. 1957)

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 307-336.

/ 53/

CATÉGORIES INDUCTIVES ET PSEUDOGROUPES

par Charles EHRESMANN (Paris)

Le but de cet article est de préciser certaines notions algébriques qui permettent d'esquisser une théorie générale des structures locales. Il sera suivi d'une étude des pseudogroupes construits à partir d'un groupoïde différentiable, où seront 1
développés en particulier les notions et résultats résumés dans [4].

1. — Groupoïdes inductifs. 2

Nous précisons et complétons ici l'exposé qui se trouve dans [1]. Étant donnée une catégorie, nous désignons encore par α la fonction qui associe à tout élément de la catégorie son unité à droite, par β la fonction qui lui associe son unité à gauche.

DÉFINITION. — Un groupoïde inductif *est un groupoïde* $\mathfrak{S}$ *muni d'un foncteur généralisé covariant* φ *de* $\mathfrak{S}$ *dans* $\mathfrak{S}$, *appelé foncteur d'induction, un élément de* $\varphi(f)$, *où* $f \in \mathfrak{S}$, *s'appelant* élément induit par f. *Ce foncteur vérifie les axiomes suivants:*

1) *Pour* $s \in \varphi(\alpha(f))$, $f \in \mathfrak{S}$, *il existe un seul* $g \in \varphi(f)$ *tel que* $s = \alpha(g)$; *g est appelé l'élément induit par f sur s.*

2) *Si* $f' \in \varphi(f)$, *alors* $\varphi(f') \subset \varphi(f)$.

3) $\varphi(f) = \varphi(f')$ *entraîne* $f = f'$.

4) *Pour toute sous-classe* A *de* $\varphi(f)$, *il existe un* $g \in \varphi(f)$ *tel que* $A \subset \varphi(g)$ *et que* $g \in \varphi(h)$ *pour tout h tel que* $A \subset \varphi(h)$.

Ces axiomes entraînent les propriétés suivantes :

$\varphi(\alpha(f)) = \alpha\,(\varphi(f))$; ceci résulte de la définition d'un foncteur généralisé [1] qui donne les relations : $\varphi(f)\varphi(\alpha(f)) = \varphi(f)$ et $\varphi(f^{-1})\varphi(f) = \varphi(\alpha(f))$.

$\varphi(f^{-1}) = (\varphi(f))^{-1}$, c'est-à-dire les éléments induits par f^{-1} sont les inverses des éléments induits par f.

L'élément g de 4) est unique et s'appelle l'*agrégat* de A ; on le désignera par $\bigcup$ A. L'agrégat d'une classe d'unités est une unité. $\alpha(\bigcup \mathrm{A}) = \bigcup \alpha(\mathrm{A})$; $\beta(\bigcup \mathrm{A}) = \bigcup \beta(\mathrm{A})$; $\bigcup \varphi(f) = f$.

La relation $g \in \varphi(f)$ est une relation d'ordre que nous noterons $g \prec f$. Les fonctions α et β et la loi de composition de $\mathfrak{S}$ sont compatibles avec cette structure d'ordre. Toute classe majorée A admet une borne supérieure $\bigcup$ A. Nous supposerons dorénavant que $\mathfrak{S}$ admet un plus petit élément noté 0; si cette condi-
1 tion n'est pas vérifiée initialement, nous complèterons $\mathfrak{S}$ par l'adjonction de l'élément 0 tel que $0 \prec f$ pour tout $f \in \mathfrak{S}$ et
2¶ $\alpha(0) = 0$, $0.0 = 0$. Toute famille A de $\mathfrak{S}$ admet alors une intersection ou borne inférieure; c'est l'agrégat de $\bigcap_{f \in \mathrm{A}} \varphi(f)$.

Une classe munie d'une relation d'ordre telle que toute
3¶ partie admette une intersection s'appellera ici une *classe inductive*. Il en résulte l'existence d'un agrégat pour toute partie majorée. En particulier $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}_0$ sont des classes inductives, $\mathfrak{S}_0$ désignant la classe des unités de $\mathfrak{S}$.

On peut étendre la multiplication définie dans $\mathfrak{S}$ à tous les couples $(f', f) \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$, en posant $f'f = g'g$, où g est l'élément induit par f tel que $\beta(g) = \alpha(f') \cap \beta(f)$ et g' l'élément induit par f' tel que $\alpha(g') = \alpha(f') \cap \beta(f)$. La multiplication ainsi étendue sera appelée *pseudomultiplication* dans $\mathfrak{S}$. Elle possède les propriétés suivantes : Elle est associative. Sa restriction aux couples d'unités de $\mathfrak{S}$ est commutative. Les unités de $\mathfrak{S}$ forment une classe d'éléments idempotents (il peut y en avoir d'autres). Elle admet au plus une unité, l'agrégat, lorsqu'il existe, de toutes les unités de $\mathfrak{S}$. Si cette condition n'est pas remplie, on peut toujours compléter $\mathfrak{S}$ par l'adjonction d'un élément Ω qui soit une unité pour la multiplication de $\mathfrak{S}$ et pour la pseudomultiplication. Les éléments induits de $f \in \mathfrak{S}$ sont les pseudoproduits de f avec les unités de $\mathfrak{S}$. Le groupoïde inductif $\mathfrak{S}$ considéré avec sa pseudomultiplication sera appelé *pseudogroupe*.

Inversement, soit $\mathfrak{S}$ une classe munie d'une loi de composition appelée pseudomultiplication, partout définie et associative. De plus, supposons donnée une classe $\mathfrak{S}_0$ d'éléments idempotents, stable pour la pseudomultiplication, telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) La restriction de la pseudomultiplication à $\mathfrak{S}_0$ est commutative.

Soient e et e' deux éléments de $\mathfrak{S}_0$ tels qu'il existe $\varepsilon \in \mathfrak{S}_0$ satisfaisant à l'équation $e = e'\varepsilon$. Alors nous écrivons $e \prec e'$ et on montre que cette relation est une relation d'ordre dans $\mathfrak{S}_0$, équivalente à la relation $e = ee'$. Tout couple d'éléments (e, e') de $\mathfrak{S}_0$ admet une borne inférieure à savoir ee'.

2) Pour tout $f \in \mathfrak{S}$, la classe des éléments $e \in \mathfrak{S}_0$ tels que $fe = f$ admet une borne inférieure $\alpha(f)$ vérifiant l'équation $f\alpha(f) = f$; de même la classe des éléments $e \in \mathfrak{S}_0$ tels que $ef = f$ admet une borne inférieure $\beta(f)$ vérifiant l'équation $\beta(f)f = f$. (Il en résulte que $fe = f$ est équivalent à $\alpha(f) \prec e$.)

3) Pour tout $f \in \mathfrak{S}$, il existe un $f' \in \mathfrak{S}$ tel que $f'f = \alpha(f)$ et $ff' = \beta(f)$.

Proposition. — *L'axiome 3) entraîne l'existence pour tout $f \in \mathfrak{S}$ d'un élément f^{-1} tel que $f^{-1}f = \alpha(f)$, $ff^{-1} = \beta(f)$ et $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$.*

Montrons que $\beta(f) \prec \alpha(f')$. En effet, on a :

$$ff'\alpha(f') = \beta(f) = ff'\alpha(ff').$$

En multipliant par $(ff')'$, on a

$$\alpha(ff')\,\alpha(f') = \alpha(ff') = \beta(f) = \beta(f)\,\alpha(f').$$ 1

Soit $f^{-1} = f'\,\beta(f)$ et montrons que : $f^{-1}f = \alpha(f)$ et $ff^{-1} = \beta(f)$. En effet :

$$f^{-1}f = f'\,\beta(f)f = f'f = \alpha(f).$$
$$ff^{-1} = ff'\,\beta(f) = \beta(f).$$

De plus on a : $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$, en vertu du lemme :

Lemme. — $\alpha(fe) = e\alpha(f)$, $\beta(ef) = e\beta(f)$, où $e \in \mathfrak{S}_0$.

Posons $\varepsilon = \alpha(f)e$ et montrons que $\alpha(f\varepsilon) = \varepsilon$. L'équation $f\varepsilon = (f\varepsilon)\varepsilon$ entraîne $\alpha(f\varepsilon) \prec \varepsilon$. L'équation $f\varepsilon\alpha(f\varepsilon) = f\varepsilon$ entraîne, en multipliant à gauche par f' : $\alpha(f)\varepsilon\alpha(f\varepsilon) = \alpha(f)\varepsilon = \varepsilon = \varepsilon\alpha(f\varepsilon)$; d'où $\varepsilon \prec \alpha(f\varepsilon)$ et par suite $\alpha(f\varepsilon) = \varepsilon$, c'est-à-dire $\alpha(fe) = e\alpha(f)$. On démontre de même la deuxième formule.

Dans $\mathfrak{S}$ on définit la relation $f \prec f'$ équivalente à : il existe $e \in \mathfrak{S}_0$ tel que $f = f'e$. Cette relation est une relation d'ordre :

$f \prec f'$ et $f' \prec f''$ entraînent évidemment $f \prec f''$. En vertu de 2), on a $f \prec f$. Enfin, $f = f'e'$ et $f' = fe$ entraînent :

$$f' = fe = f'e'e = fee'e = fee' = f.$$

En vertu du lemme et de l'axiome 2), $f \prec f'$ entraîne $\alpha(f) \prec \alpha(f')$ et $\beta(f) \prec \beta(f')$.

Soit A une partie de $\mathfrak{S}_0$ admettant une borne inférieure dans $\mathfrak{S}$. Alors cette borne est aussi borne inférieure dans $\mathfrak{S}_0$. De même, si $A \subset \mathfrak{S}_0$ admet une borne inférieure dans $\mathfrak{S}_0$, celle-ci est aussi borne inférieure dans $\mathfrak{S}$. Ceci résulte du fait que
1 tout élément inférieur à une unité est une unité. Nous poserons encore l'axiome suivant :

2 ¶ 4) Pour la relation d'ordre dans $\mathfrak{S}_0$, toute partie de $\mathfrak{S}_0$ admet une borne inférieure. (Cet axiome entraîne l'existence d'un plus petit élément noté 0 .)

Si A est une partie majorée de $\mathfrak{S}_0$ (il revient au même de supposer majorée dans $\mathfrak{S}_0$ ou dans $\mathfrak{S}$), alors A admet une borne supérieure dans $\mathfrak{S}_0$, égale à la borne inférieure des majorants de A, dans $\mathfrak{S}_0$; remarquons que cette borne supé-
3 rieure est aussi borne supérieure de A dans $\mathfrak{S}$.

Théorème. — *La donnée de $\mathfrak{S}_0$ et de la pseudomultiplication vérifiant* 1), 2), 3), 4) *détermine sur $\mathfrak{S}$ une structure de groupoïde inductif: la classe de ses unités est $\mathfrak{S}_0$; sa multiplication est la restriction de la pseudomultiplication donnée aux couples (f', f) tels que $\alpha(f') = \beta(f)$; le produit correspondant sera désigné par $f'.f$; l'inverse de f est l'élément f^{-1} dont nous avons prouvé l'existence. La relation d'induction $f \prec f'$ est la relation d'ordre définie ci-dessus; la pseudomultiplication donnée coïncide avec la pseudomultiplication déduite de la loi d'induction et définit*
4 *sur $\mathfrak{S}$ une structure de pseudogroupe.*

Démontrons que $\mathfrak{S}_0$ est la classe des unités de $\mathfrak{S}$. Si $e \in \mathfrak{S}_0$, on a $\alpha(e) = \beta(e) = e$ d'après 2). Si $f.e$ est défini, on a $\alpha(f) = \beta(e) = e$, donc $f.e = f\alpha(f) = f$. De même si $e.f$ est défini, on a $e.f = f$. Donc e est une unité. Si ε est une unité, $\varepsilon\alpha(\varepsilon) = \varepsilon = \alpha(\varepsilon) \in \mathfrak{S}_0$.

Si $f'.f$ est défini, on a $\alpha(f'.f) = \alpha(f)$ et $\beta(f'.f) = \beta(f')$. En effet, si $e \in \mathfrak{S}_0$, $fe = f$ est équivalent à $f'fe = f'f$; car cette dernière équation entraîne $f'^{-1}f'fe = f'^{-1}f'f$, c'est-à-dire $\alpha(f')fe = \alpha(f')f$, ou encore, comme $\alpha(f') = \beta(f)$, $fe = f$. De même $ef' = f'$ est équivalent à $e(f'f) = f'f$. Ce qui précède montre que $\mathfrak{S}$ est une catégorie pour la multiplication restreinte. D'autre part l'élément f^{-1} est l'inverse « à gauche » de f pour la multiplication restreinte, car $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$. Donc $\mathfrak{S}$ est un groupoïde pour la multiplication restreinte d'après le lemme :

LEMME. — *Si dans une catégorie tout élément x admet un inverse à gauche x' (tel que $x'x = \alpha(x)$), cet inverse est inverse à droite (c'est-à-dire $xx' = \beta(x)$); la catégorie est un groupoïde et x' est l'inverse de x.*

En effet, soit $x'x = \alpha(x)$. On a

$$\alpha(x') = \beta(x) \qquad \text{et} \qquad \beta(x'x) = \beta(x') = \alpha(x).$$

Donc xx' est défini : $(xx')(xx') = x(x'x)x' = x\alpha(x)x' = xx'$. Il existe y tel que

$$y(xx') = \alpha(xx') = \beta(x) = y(xx')(xx') = \beta(x)xx' = xx',$$

donc $xx' = \beta(x)$.

PROPOSITION. — *La relation d'ordre $f \prec f'$ est encore définie par : il existe $e' \in \mathfrak{S}_0$ tel que $f = e'f'$.*

Montrons que $f'e = \beta(f'e)f'$. En effet :

$$\beta(f'e)\, f' = (f'e)\, (f'e)^{-1}\, f' = f'ef'^{-1}\, f' = f'e\, \alpha(f') = f'e.$$

Nous avons utilisé ici la formule $(ge)^{-1} = eg^{-1}$ qui s'obtient en écrivant : $(eg^{-1})\,(ge) = e\,\alpha(g)e = e\,\alpha(g) = \alpha(ge)$. Donc eg^{-1} est inverse « à gauche » de ge. Il est aussi inverse « à droite » d'après le lemme précédent.

On démontre de même que $e'f = f\alpha(e'f)$.

Pour compléter la démonstration du théorème, montrons que la fonction qui associe à f la classe des éléments $f' \prec f$ est un foncteur généralisé. Soit $h = g.f$; pour tout $e \in \mathfrak{S}_0$, on a : $he = (g.f)e = gfe$; posons $f' = fe$ et $g' = g\beta(f')$; alors $\alpha(g') = \beta(f')\alpha(g) = \beta(f')\beta(f) = \beta(f')$ et $g'.f' = g\beta(f')f' = gfe = he$. Inversement, soit $g' = g\varepsilon$ et $f' = f\varepsilon'$ tels que $\alpha(g') = \beta(f')$; alors $g'f' = g\varepsilon f\varepsilon'$; d'après le dernier lemme, $\varepsilon f = f\varepsilon''$, donc $g'f' = gf\varepsilon''\varepsilon' \prec h$.

Si g et f sont des éléments quelconques de $\mathfrak{S}$, leur pseudo-produit déduit de la loi d'induction est leur composé gf; en effet $gf = g\alpha(g)\,\beta(f)f = (ge)\,(ef)$, où $e = \alpha(g)\beta(f)$.

Démontrons que deux éléments quelconques f et g de $\mathfrak{S}$ ont une borne inférieure. Soit L la classe des éléments l tels que

$l \prec f$ et $l \prec g$. Montrons que ces éléments l ont un agrégat; soit $e = \bigcup_{l \in L} \alpha(l)$, $f' = fe$ et $g' = ge$. Alors $f' = g'$: En effet f' et g' sont deux éléments ayant même unité à droite et qui induisent des éléments égaux sur tout $\varepsilon = \alpha(l)$; on démontre
1 que $\beta(f')$ est l'agrégat des $\beta(f'\varepsilon)$ et comme $f'\varepsilon = g'\varepsilon$, on a $\beta(f') = \beta(g')$. Le composé $g'^{-1}.f'$ est donc défini; il induit sur chaque ε l'élément $(g'\varepsilon)^{-1}.(f'\varepsilon) = \varepsilon$. Par conséquent l'agrégat
2 des ε est induit par $g'^{-1}.f'$; comme $e = \alpha(g'^{-1}f')$, on a $e = g'^{-1}.f'$. Il en résulte $g' = f'$ et cet élément est la borne inférieure de f et g.

Si A est une partie bornée supérieurement dans $\mathfrak{S}$, alors il existe un agrégat $\cup$A, qui est l'élément fe où $e = \cup\alpha(A)$ et où f est un majorant pour A. En effet, fe est un majorant de A; soit g un majorant quelconque de A; alors $fe = ge$, d'après la démonstration qui précède; donc $fe \prec g$, c'est-à-dire $fe = \cup$A.

Définition. — *Un sous-pseudogroupe d'un pseudogroupe $\mathfrak{S}$ est une partie $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ qui vérifie les axiomes suivants :*

1) *Le pseudoproduit fg de deux éléments f et g de $\mathfrak{S}'$ appartient à $\mathfrak{S}'$.*

2) *L'inverse f^{-1} de $f \in \mathfrak{S}'$ appartient à $\mathfrak{S}'$.*

3) *L'agrégat d'une partie de $\mathfrak{S}'$ majorée dans $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}'$.*

L'axiome 3) appliqué à la partie vide de $\mathfrak{S}'$ entraîne que $0 \in \mathfrak{S}'$.

Ces axiomes sont équivalents aux suivants :

a) $\mathfrak{S}'$ est un sous-groupoïde de la structure de groupoïde de $\mathfrak{S}$ (relativement à la multiplication restreinte).

b) Si e est une unité appartenant à $\mathfrak{S}'$ et si $f \in \mathfrak{S}'$, alors $fe \in \mathfrak{S}'$.

c) L'agrégat d'une famille d'éléments de $\mathfrak{S}'$ majorée dans $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}'$.

Remarque. — La classe des unités $\mathfrak{S}'_0$ de $\mathfrak{S}'$ est une sous-classe de $\mathfrak{S}_0$ stable par rapport à l'intersection de deux éléments et par rapport à l'agrégation dans $\mathfrak{S}_0$. Cependant, l'intersection de deux éléments f_1 et f_2 de $\mathfrak{S}'$ appartient à $\mathfrak{S}'$ si la *relation de compatibilité* suivante est remplie :

$$\alpha(f_1 \cap f_2) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f_2),$$

relation équivalente à : $f_1 \cap f_2 = f_1(\alpha(f_1) \cap \alpha(f_2))$.

On rencontre aussi des sous-classes $\mathfrak{S}'$ de $\mathfrak{S}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$\mathfrak{S}'$ satisfait 1), 2), et

3′) L'agrégat d'une partie de $\mathfrak{S}'$, majorée dans $\mathfrak{S}'$, appartient à $\mathfrak{S}'$.

Une telle sous-classe $\mathfrak{S}'$ sera appelée *sous-pseudogroupe faible* de $\mathfrak{S}$. Elle vérifie encore *a*), *b*) et contient l'intersection de deux éléments de $\mathfrak{S}'$ liés par la relation de compatibilité.

On peut remplacer 3) par un axiome 3″) encore plus faible que 3′) :

3″) Toute partie A de $\mathfrak{S}'$ majorée dans $\mathfrak{S}'$ admet une borne supérieure pour la relation d'ordre induite dans $\mathfrak{S}'$ (mais cette borne supérieure n'est pas forcément l'agrégat de A dans $\mathfrak{S}$).

Une classe $\mathfrak{S}'$ qui vérifie 1), 2) et 3″) est encore un groupoïde inductif pour la relation d'ordre induite dans $\mathfrak{S}'$. Nous dirons que $\mathfrak{S}'$ est un pseudogroupe *contenu* dans $\mathfrak{S}$.

L'intersection d'une famille de sous-pseudogroupes de $\mathfrak{S}$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$. Si B est une sous-classe de $\mathfrak{S}$, l'intersection des sous-pseudogroupes de $\mathfrak{S}$ contenant B sera appelée *sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$ engendré par* B.

En particulier, soit B une partie de $\mathfrak{S}$ vérifiant les axiomes 1) et 2) et soit $\mathfrak{S}'$ le sous-pseudogroupe engendré par B. Alors $\mathfrak{S}'$ contient les agrégats dans $\mathfrak{S}$ des parties de B. En particulier $\mathfrak{S}'_0$ contient l'agrégat d'une classe d'unités A appartenant à B. Donc si e' est une unité de B, $\mathfrak{S}'_0$ contient aussi $e' \cap \left(\bigcup_{e \in A} e\right) = e'\left(\bigcup_{e \in A} e\right)$.

Supposons vérifié dans $\mathfrak{S}_0$ l'*axiome de distributivité* suivant :

(D) $$e' \cap \left(\bigcup_{e \in A} e\right) = \bigcup_{e \in A} (e' \cap e)$$

ou $$e'\left(\bigcup_{e \in A} e\right) = \bigcup_{e \in A} (e'e).$$

Alors on montre que $\mathfrak{S}'$ est la classe des agrégats des familles 1
d'éléments de B. Dans ce cas, nous dirons que B est une *base* du pseudogroupe $\mathfrak{S}'$.

On est ainsi conduit à poser la définition suivante :

Définition. — *Un groupoïde inductif $\mathfrak{S}$ sera appelé* groupoïde local *lorsque la classe $\mathfrak{S}_0$ de ses unités vérifie l'axiome de distributivité* (D).

Proposition. — *Si* $\mathfrak{S}_0$ *vérifie l'axiome* (D), *alors* $\mathfrak{S}$ *vérifie aussi l'axiome de distributivité :*

$$f' \cap \Big(\bigcup_{f\in A} f\Big) = \bigcup_{f\in A} (f \cap f')$$

où A *est une classe majorée d'éléments de* $\mathfrak{S}$.

En effet, soit $g = (\bigcup A) \cap f'$. Démontrons que l'on a: $g = (\bigcup A) \cap g = \bigcup_{f\in A} (f \cap g)$. Comme g et f sont induits par $\bigcup A$, l'unité à droite de $(\bigcup A) \cap g$ est $\alpha(\bigcup A) \cap \alpha(g)$, l'unité à droite de $\bigcup_{f\in A} (f \cap g)$ est $\bigcup_{f\in A} (\alpha(f) \cap \alpha(g))$. Comme $\alpha(\bigcup A)$ est l'agrégat des $\alpha(f)$, où $f \in A$, l'axiome (D) dans $\mathfrak{S}_0$ donne $\alpha(\bigcup A) \cap \alpha(g) = \bigcup_{f\in A} (\alpha(f) \cap \alpha(g))$. Il en résulte

$$(\bigcup A) \cap g = \bigcup_{f\in A} (f \cap g),$$

car les deux membres de cette égalité sont des éléments induits par $\bigcup A$. De plus $f \cap f' = f \cap g$, car $g \prec f'$ et $f \cap f' \prec g$. Donc $g = \bigcup_{f\in A} (f \cap f')$.

Soit $\mathfrak{S}'$ un sous-pseudogroupe du pseudogroupe $\mathfrak{S}$. Sur tout $e \in \mathfrak{S}'_0$, la donnée de $\mathfrak{S}'$ détermine [1] une *paratopologie* $T(\mathfrak{S}', e)$; c'est la classe des éléments $\varphi(e) \cap \mathfrak{S}'_0$. Tout $f \in \mathfrak{S}'$ détermine un isomorphisme de la paratopologie $T(\mathfrak{S}', \alpha(f))$ sur $T(\mathfrak{S}', \beta(f))$; c'est l'application: $\varepsilon \to \beta(f\varepsilon)$, où $\varepsilon \in T(\mathfrak{S}', \alpha(f))$. Si $e_1 \prec e$, $e_1 \in \mathfrak{S}'_0$, alors $T(\mathfrak{S}', e_1)$ est la paratopologie induite sur e_1 par $T(\mathfrak{S}', e)$.

Soit $\mathfrak{E}$ le groupoïde inductif de toutes les applications biunivoques (d'un ensemble quelconque sur un ensemble quelconque). Un sous-pseudogroupe Γ de $\mathfrak{E}$ sera appelé un *pseudogroupe de transformations*. En particulier, supposons que les unités de Γ admettent un agrégat qui sera l'application identique d'un ensemble E. Alors Γ est appelé *pseudogroupe de transformations sur* E. C'est un sous-pseudogroupe du pseudogroupe $\mathfrak{E}_E$ de toutes les applications biunivoques d'une partie de E sur une partie de E. Le pseudogroupe de transformations Γ détermine sur E une topologie $T(\Gamma, E)$ dont les ouverts sont les ensembles $\alpha(f)$, où $f \in \Gamma$; chaque $f \in \Gamma$ est un homéomorphisme de $\alpha(f)$ sur $\beta(f)$ par rapport à cette topologie.

Un exemple de sous-pseudogroupe faible s'obtient de la manière suivante : Soit E un ensemble muni d'une topologie T non séparée. Soit $\mathfrak{S}'_0$ la classe des ouverts séparés de E et $\mathfrak{S}'$ la classe des homéomorphismes dont la source et le but appartiennent à $\mathfrak{S}'_0$. Alors $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{C}_E$.

Un exemple de pseudogroupe $\mathfrak{S}'$ *contenu* dans $\mathfrak{S}$ s'obtient de la manière suivante : $\mathfrak{S}'_0$ est la classe des ensembles convexes contenus dans R^n et $\mathfrak{S}'$ est la classe des isomorphismes affines d'un convexe sur un convexe.

Les *pseudogroupes d'isomorphismes locaux* [1] sont aussi des exemples de pseudogroupes. Soit $\mathfrak{S}$ un pseudogroupe et soit $\mathfrak{S}^l$ la classe des triplets (S', f, S), où S et S' sont des éléments de $\mathfrak{S}_0$, $f \in \mathfrak{S}$, $\alpha(f) \prec S$, $\beta(f) \prec S'$. Munissons $\mathfrak{S}^l$ de la pseudomultiplication suivante :

$$(S'_1, f_1, S_1)\,(S', f, S) = \left| \begin{array}{lll} (S'_1, f_1 f, S) & \text{si} & S_1 = S' \\ (0, 0, 0) & \text{si} & S_1 \neq S'. \end{array} \right.$$

Soit $\mathfrak{S}^l_0$ la classe des éléments idempotents (S, e, S), où $e \prec S \in \mathfrak{S}_0$. Alors $\mathfrak{S}^l$ est un pseudogroupe : Les éléments induits par (S', f, S) sont les éléments (S', fe, S), c'est-à-dire (S', g, S), où $g \prec f$. La multiplication restreinte est :

$$(S'_1, f_1, S_1)\,(S', f, S) = (S'_1, f_1 f, S) \quad \text{si} \quad S_1 = S' \quad \text{et} \quad \alpha(f_1) = \beta(f).$$

Si l'on restreint la pseudomultiplication à :

$(S'_1, f_1, S_1)\,(S', f, S) = (S'_1, f_1 f, S)$ si et seulement si $S_1 = S'$, alors $\mathfrak{S}^l$ devient une catégorie dont les unités sont les triplets (S, S, S). Le groupoïde des éléments inversibles de $\mathfrak{S}^l$ s'identifie avec $\mathfrak{S}$, en identifiant (S', f, S) avec f lorsque $\alpha(f) = S$ et $\beta(f) = S'$. Donc $\mathfrak{S}^l$ est une catégorie d'homomorphismes pour $\mathfrak{S}$ (appelée catégorie des isomorphismes locaux déduite de $\mathfrak{S}$ dans [1]).

2. — Catégories inductives.

Définition. — Une catégorie inductive *est une catégorie* $\mathfrak{C}$ *munie d'une relation d'ordre appelée* loi d'induction, *la classe des éléments* f' *induits par* f, *c'est-à-dire tels que* $f' \prec f$, *étant notée* $I(f)$. *Cette loi d'induction vérifie les axiomes suivants :*

1) *Il existe un sous-groupoïde* $\mathfrak{S}$ *de* $\mathfrak{C}$ *admettant les mêmes unités que* $\mathfrak{C}$ *et tel que, si* $\varphi(f) = I(f) \cap \mathfrak{S}$, *pour tout* $f \in \mathfrak{S}$,

alors φ *est un foncteur d'induction dans le groupoïde* $\mathfrak{S}$. Remarquons que $\varphi(e)$ est alors une classe d'unités lorsque $e \in \mathfrak{C}_0$ (classe des unités de $\mathfrak{C}$).

2) *Soit* $p(h) = (\beta(h),\ \alpha(h))$, *pour* $h \in \mathfrak{C}$. *Alors l'application* p *applique* $\mathrm{I}(h)$ *d'une façon biunivoque sur une partie de* $\varphi(\beta(h)) \times \varphi(\alpha(h))$.

1¶ 3) *Toute partie de* $\mathfrak{C}$ *a une borne inférieure*. Il en résulte que toute partie A majorée de $\mathfrak{C}$ admet un agrégat $\cup$A.

4) *Si* h_1 *et* h_2 *sont induits par* $h \in \mathfrak{C}$, *on a :*

$$\alpha(h_1 \cap h_2) = \alpha(h_1) \cap \alpha(h_2); \qquad \beta(h_1 \cap h_2) = \beta(h_1) \cap \beta(h_2).$$

5) $$\alpha(\cup \mathrm{A}) = \bigcup_{h \in \mathrm{A}} \alpha(h), \qquad \beta(\cup \mathrm{A}) = \bigcup_{h \in \mathrm{A}} \beta(h).$$

6) $$\mathrm{I}(h'h) = \mathrm{I}(h')\mathrm{I}(h).$$

Remarquons que ces axiomes entraînent que $\mathfrak{C}$ est une espèce de structures inductives au-dessus du groupoïde inductif
2+ $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ (voir [1]). La notion de catégorie inductive exposée ici est équivalente à celle de catégorie inductive de morphismes de [1].

L'axiome 2) peut encore s'énoncer :

2') Si $h \in \mathfrak{C}$, $e \in \mathfrak{C}_0$, $e' \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \alpha(h)$, $e' \prec \beta(h)$, alors il existe au plus un $h' \prec h$ tel que $\alpha(h') = e$ et $\beta(h') = e'$.

Remarquons que les axiomes 2) et 4) entraînent : Si $h_1 \prec h$, $h_2 \prec h$, $\alpha(h_1) \prec \alpha(h_2)$, $\beta(h_1) \prec \beta(h_2)$, alors on a $h_1 \prec h_2$.

Proposition. — $\mathfrak{C}_0$ *est une sous-classe inductive de* $\mathfrak{C}$, *c'est-à-dire que si* e *et* $e' \in \mathfrak{C}_0$, *alors* $e \cap e' \in \mathfrak{C}_0$ *et si* E *est une sous-classe de* $\mathfrak{C}_0$, *majorée dans* $\mathfrak{C}$, *alors* $\cup \mathrm{E} \in \mathfrak{C}_0$.

En effet, il résulte de l'axiome 5) que, si E est une classe d'unités, majorée dans $\mathfrak{C}$, alors $\alpha(\cup \mathrm{E}) = \cup\, \alpha(\mathrm{E}) = \cup \mathrm{E} \in \mathfrak{C}_0$. Soit e et $e' \in \mathfrak{C}_0$, $e \bigcap\limits_{\mathfrak{S}} e' = \varepsilon$, $e \cap e' = \varepsilon'$; alors $\varepsilon \prec \varepsilon'$. Inversement soit A la classe des $u \in \mathfrak{C}$ tels que $u \prec e$ et $u \prec e'$; on a $\alpha(u) \prec e$ et $\alpha(u) \prec e'$, d'où $\alpha(u) \prec \varepsilon$; de même $\beta(u) \prec \varepsilon$. Or $\varepsilon' = \cup$A, donc
3 $\alpha(\varepsilon') \prec \varepsilon$ et $\beta(\varepsilon') \prec \varepsilon$ d'après l'axiome 5). Comme ε et ε' sont induits par e, on a $\varepsilon' \prec \varepsilon$, donc $\varepsilon = \varepsilon'$ et, puisque $\varepsilon \in \mathfrak{C}_0$, on a $\varepsilon' \in \mathfrak{C}_0$.

Proposition. — *Si* A *est une classe d'éléments de* $\mathfrak{S}$, *majorée dans* $\mathfrak{C}$, *l'agrégat* $\cup_{\mathfrak{S}}$A *de* A *dans* $\mathfrak{S}$ *est identique à l'agrégat* $\cup$A *de* A *dans* $\mathfrak{C}$.

En effet, $\alpha(\bigcup A)=\bigcup\alpha(A)=\alpha(\bigcup_{\mathfrak{S}}A)$, $\beta(\bigcup A)=\bigcup\beta(A)=\beta(\bigcup_{\mathfrak{S}}A)$. Or $\bigcup A \prec \bigcup_{\mathfrak{S}}A$ et, en vertu de 2), on a $\bigcup A = \bigcup_{\mathfrak{S}}A$.

Si A est une sous-classe de $\mathfrak{S}$, on a $\bigcap_{\mathfrak{S}}A \prec \bigcap A$.

On peut étendre la multiplication dans $\mathfrak{C}$ en posant :

$h'h = \bigcup(l'l)$, où $l' \prec h'$, $l \prec h$, $\alpha(l') = \beta(l)$, lorsque cet
agrégat existe. Cette multiplication étendue appelée *pseudo-* 1+
multiplication est associative. Remarquons que si f et f' appartiennent à $\mathfrak{S}$, leur pseudoproduit ainsi défini dans $\mathfrak{C}$, s'il existe, peut être différent du pseudoproduit défini dans $\mathfrak{S}$ par la structure de groupoïde inductif de $\mathfrak{S}$.

On voit que $\alpha(h'h) \prec \alpha(h)$ et que $\beta(h'h) \prec \beta(h')$. Si $e \in \mathfrak{C}_0$ et si $e \prec \alpha(h')$, alors $h'e$ est défini et on a $h'e \prec h'$. De même, si $e \prec \beta(h)$, alors eh est défini et on a $eh \prec h$.

Remarque. — Si pour tout $e \in \mathfrak{C}_0$, la classe $I(e)$ est un
ensemble, on peut démontrer par récurrence transfinie que $h'h$ 2
est toujours défini.

Proposition. — *$\alpha(h)$ est l'intersection de la classe* E *des $e \in \mathfrak{C}_0$ tels que $he = h$; de même $\beta(h)$ est l'intersection de la classe* E' *des $e' \in \mathfrak{C}_0$ tels que $e'h = h$.*

En effet, $h\alpha(h) = h$, donc $\bigcap E \prec \alpha(h)$; inversement, si $he = h$, alors $\alpha(he) = \alpha(h) \prec e$, d'après ce qui précède, donc $\alpha(h) \prec \bigcap E$; de même $\beta(h) = \bigcap E'$.

Remarquons que $\mathfrak{S}$ peut être réduit à $\mathfrak{C}_0$; mais le cas le plus intéressant est celui où $\mathfrak{S}$ est la classe de tous les éléments inversibles de $\mathfrak{C}$. Cette notion est alors équivalente à celle de catégorie inductive d'homomorphismes (voir [1]). On peut définir une telle catégorie à l'aide des axiomes 2'), 3), 4), 5), 6), 7), 8), où :

7) Si f est inversible et $e \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \alpha(f)$, il existe un élément inversible unique $g \prec f$ tel que $\alpha(g) = e$.

8) L'agrégat d'une famille d'éléments inversibles majorée par un élément inversible est inversible.

Une famille d'éléments (h_i) de $\mathfrak{C}$ est dite *compatible* si :

$$\alpha(h_i \cap h_j) = \alpha(h_i) \cap \alpha(h_j), \quad \beta(h_i \cap h_j) = \beta(h_i) \cap \beta(h_j).$$

Une catégorie inductive sera appelée *complète* si toute
famille (h_i) compatible et telle que $\bigcup_i \alpha(h_i)$ et $\bigcup_i \beta(h_i)$ existent
admet un agrégat dans $\mathfrak{C}$. 3

Si l'axiome (D) est vérifié dans $\mathfrak{C}_0$, il est vérifié dans $\mathfrak{C}$, qui sera appelé alors *catégorie locale.*

Une catégorie inductive sera dite ***régulière*** si elle vérifie les axiomes supplémentaires: *a*) Si $h \in \mathfrak{C}$, $e \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \alpha(h)$, alors $\alpha(he) = e$. *b*) Si $h \in \mathfrak{C}$, $e' \in \mathfrak{C}_0$, $e' \prec \beta(h)$, alors $\beta(e'h) = e'$. Elle sera dite *normale à droite* (resp. *à gauche*) si elle vérifie *a*) (resp. *b*)) et : *c*) si $f \in \mathfrak{S}$, $e \prec \alpha(f)$, $e \in \mathfrak{C}_0$, alors $fe \in \mathfrak{S}$ (resp. $e' \prec \beta(f)$, $e' \in \mathfrak{C}_0$, alors $e'f \in \mathfrak{S}$).

Proposition. — *Dans une catégorie inductive régulière,*
1 *$h'h$ est défini pour tout couple (h', h) et on a: $h'h = (h'e)(eh)$, où $e = \alpha(h') \cap \beta(h)$.*

En effet, soit $l \prec h$ et $l' \prec h'$ avec $\alpha(l') = \beta(l) \prec e$. Montrons que $l'l \prec (h'e)(eh)$. Or $l'\alpha(l') \prec h'e$ et $\beta(l)l \prec eh$, donc $l'l \prec (h'e)(eh)$. Par suite $h'h$ est défini et $h'h \prec (h'e)(eh)$. De plus, $(h'e)(eh) \prec h'h$, car $h'e \prec h'$, $eh \prec h$, $\alpha(h'e) = \beta(eh) = e$, donc $(h'e)(eh) = h'h$.

Proposition. — *Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive régulière, $\mathrm{I}(h)$ est la classe des pseudoproduits $e'he$, où $e' \prec \beta(h)$, $e \prec \alpha(h)$.*

En effet, $he \prec h$ et $e'(he)$ est l'agrégat des éléments $l'l$, où $l' \prec e' \prec \beta(h)$ et $l \prec he \prec h$; comme $l'l \prec \beta(h)h = h$, on a $e'he \prec h$. Montrons que si $h_1 \prec h$, alors $h_1 = \beta(h_1)h\alpha(h_1)$: On a $h_1 = h_1\alpha(h_1) \prec h\alpha(h_1)$ et $h_1 = \beta(h_1)h_1 \prec \beta(h_1)h\alpha(h_1)$. D'autre part, $\beta(h_1)h\alpha(h_1)$ et h_1 sont induits par h, car $\alpha(h_1) \prec \alpha(h)$ et $\beta(h_1) \prec \beta(h\alpha(h_1))$. Les unités à droite et à gauche de $\beta(h_1)h\alpha(h_1)$ étant induites par $\alpha(h_1)$ et $\beta(h_1)$, on a $\beta(h_1)h\alpha(h_1) \prec h_1$.

En particulier la catégorie des applications continues d'un espace topologique dans un autre et la catégorie des applications continues d'un espace topologique sur un autre sont des
2 catégories inductives; la première est régulière.

Définition. — *Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive, une sous-catégorie $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ est appelée* sous-catégorie inductive *lorsque les axiomes suivants sont vérifiés :*

1) *L'intersection de deux unités de $\mathfrak{C}'$ appartient à $\mathfrak{C}'$.*

2) *Pour toute partie* A *de $\mathfrak{C}'$, majorée dans $\mathfrak{C}$, l'agrégat $\bigcup$A appartient à $\mathfrak{C}'$.*

3) *Soit $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} \cap \mathfrak{C}'$. Si $f \in \mathfrak{S}'$, $e \in \mathfrak{C}'_0$, $e \prec \alpha(f)$, alors il existe $g \in \mathfrak{S}'$ tel que $g \prec f$ et $\alpha(g) = e$.*

Il en résulte que $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$.

Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive régulière, une sous-catégorie inductive $\mathfrak{C}'$ est dite *régulière* si elle vérifie de plus l'axiome :

4) Si $e \in \mathfrak{C}'_0$, $e' \in \mathfrak{C}'_0$, $h \in \mathfrak{C}'$, $e \prec \alpha(h)$ $e' \prec \beta(h)$, alors $he \in \mathfrak{C}'$ et $e'h \in \mathfrak{C}'$.

Le système d'axiomes 1), 2), 3), 4) est équivalent au suivant :

a) $\mathfrak{C}'$ est une sous-catégorie stable pour la pseudomultiplication.

b) $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$.

c) Identique à 2).

On dira que $\mathfrak{C}'$ est une *sous-catégorie inductive faible* si l'axiome 2) est remplacé par :

2') Pour toute partie A de $\mathfrak{C}'$, majorée dans $\mathfrak{C}'$, l'agrégat $\bigcup$ A appartient à $\mathfrak{C}'$.

Il en résulte alors que $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{S}$.

3. — Catégorie des filtres déduite d'une catégorie inductive.

Soit $\mathfrak{A}$ une classe munie d'une relation d'ordre telle que deux éléments quelconques de $\mathfrak{A}$ admettent une intersection et qu'il y ait un plus petit élément 0.

DÉFINITION. — *Une partie* F *de* $\mathfrak{A}$ *sera appelée* filtre *sur* $\mathfrak{A}$ 1
si l'intersection de deux éléments de F *appartient à* F *et si tout élément majorant d'un élément de* F *appartient à* F. *Une partie* B *de* $\mathfrak{A}$ *sera appelée une base de filtre lorsque l'intersection de deux éléments de* B *contient un élément de* B.

Si B est une base de filtre, la classe des majorants des éléments de B forme un filtre F appelé *filtre engendré par* B.

Si le filtre F contient 0, il est identique à $\mathfrak{A}$ et s'appellera le *filtre trivial*, ou *filtre* 0. Les autres filtres sont les *filtres propres*.

THÉORÈME. — *Soit* $\mathfrak{C}$ *une catégorie inductive régulière, la classe* $\mathfrak{F}$ *des filtres de* $\mathfrak{C}$ *forme une catégorie inductive régulière.*

La classe des éléments $\alpha(f)$, où $f \in$ F, est une base de filtre dans $\mathfrak{C}_0$ ou dans $\mathfrak{C}$, car $\alpha(f \cap g) \prec \alpha(f) \cap \alpha(g)$. Le filtre engendré par cette base de filtre sera désigné par α(F) et sera appelé la *source de* F. De même, le *but* de F est le filtre β(F) engendré par les éléments $\beta(f)$, $f \in$ F.

LEMME. — *Si* $h \in$ F, $\varepsilon \in \beta$(F) *et* $\varepsilon \prec \beta(h)$, *alors* $\varepsilon h \in$ F. *De même, si* $h \in$ F, $e \in \alpha$(F) *et* $e \prec \alpha(h)$, *alors* $he \in$ F.

En effet, il existe $l \in \mathrm{F}$ tel que $\beta(l) \prec \varepsilon$. Soit $l' = l \cap h$; on a
1 $l' \prec h$ et $\beta(l') \prec \varepsilon$; posons $l'' = l' \cup \varepsilon h$; alors $l'' \in \mathrm{F}$ et on a
$l'' \prec h$, $\beta(l'') = \beta(l') \cup \beta(\varepsilon h) = \varepsilon$. Donc $l'' \prec \varepsilon h$ et par suite
$\varepsilon h \in \mathrm{F}$. De même on démontre que $he \in \mathrm{F}$.

Démonstration du théorème. — Soient F' et F deux filtres sur $\mathfrak{C}$ tels que $\alpha(\mathrm{F}') = \beta(\mathrm{F})$. Le produit $\mathrm{F}'\mathrm{F}$ sera alors le filtre engendré par la classe des éléments $f'f$, où $f' \in \mathrm{F}'$, $f \in \mathrm{F}$, $\alpha(f') = \beta(f)$. Montrons que la classe M des éléments $f'f$ est la base d'un filtre. Si $h' \in \mathrm{F}'$ et $h \in \mathrm{F}$, alors le pseudoproduit $h'h$ est un élément de M, à savoir $(h'\varepsilon)(\varepsilon h)$, où $\varepsilon = \alpha(h') \cap \beta(h)$. Soient $f'f$ et $g'g$ deux éléments de M. Soit $h = f \cap g$ et $h' = f' \cap g'$. Alors $h' \in \mathrm{F}'$ et $h \in \mathrm{F}$ et le pseudoproduit $h'h$ appartient à M. Or $h'h \prec f'f$ et $h'h \prec g'g$, donc $h'h \prec f'f \cap g'g$. Donc M est la base d'un filtre que nous désignerons par $\mathrm{F}'\mathrm{F}$. Remarquons que M est aussi la classe des pseudoproduits $h'h$, où $h \in \mathrm{F}$, $h' \in \mathrm{F}'$.

Si B est une base de F, B′ une base de F′, alors B′B est une base de F′F, en désignant par B′B la classe des pseudoproduits $b'b$, où $b \in \mathrm{B}$, $b' \in \mathrm{B}'$. En effet, tout $f'f$ contient un tel élément $b'b$, où $b \prec f$, $b' \prec f'$.

Si E est un filtre dont une base est formée d'unités, alors $\mathrm{F}'\mathrm{E} = \mathrm{F}'$ et $\mathrm{EF} = \mathrm{F}$, pour tous les filtres F et F′ tels que $\alpha(\mathrm{F}') = \mathrm{E}$ et $\beta(\mathrm{F}) = \mathrm{E}$. En effet, soit $f' \in \mathrm{F}'$, e une unité appartenant à E; si $\varepsilon = \alpha(f') \cap e$, alors $\varepsilon \in \mathrm{E}$, $f'\varepsilon \in \mathrm{F}'$ et $f'\varepsilon \prec f'e$. Donc $\mathrm{F}'\mathrm{E} \subset \mathrm{F}'$. D'autre part, $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}'\mathrm{E}$. On démontre de même que $\mathrm{EF} = \mathrm{F}$.

Si $\mathrm{F} \in \mathfrak{F}$, $\mathrm{F}' \in \mathfrak{F}$, $\alpha(\mathrm{F}') = \beta(\mathrm{F})$, alors $\alpha(\mathrm{F}'\mathrm{F}) = \alpha(\mathrm{F})$ et $\beta(\mathrm{F}'\mathrm{F}) = \beta(\mathrm{F}')$. En effet, soit $f \in \mathrm{F}$; il existe $f' \in \mathrm{F}'$ tel que $\alpha(f') \prec \beta(f)$. L'élément $\alpha(f')f$ est un élément f_1 de F. On a $\alpha(f'f_1) = \alpha(f_1) \prec \alpha(f)$. Donc $\alpha(\mathrm{F}) \subset \alpha(\mathrm{F}'\mathrm{F})$. Comme $\alpha(\mathrm{F}'\mathrm{F}) \subset \alpha(\mathrm{F})$, on a $\alpha(\mathrm{F}'\mathrm{F}) = \alpha(\mathrm{F})$. On a de même $\beta(\mathrm{F}'\mathrm{F}) = \beta(\mathrm{F}')$.

Les résultats précédents montrent que $\mathfrak{F}$ est une catégorie dont les unités sont les filtres ayant une base formée d'unités, l'unité à droite de F étant $\alpha(\mathrm{F})$, son unité à gauche $\beta(\mathrm{F})$.

Soit $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ la classe des filtres F admettant une base B formée d'éléments de $\mathfrak{S}$. Alors $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ est un groupoïde; en effet, $\mathrm{F} \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ est inversible et son inverse F^{-1} admet pour base la classe des inverses f^{-1}, où $f \in \mathrm{B}$. Remarquons qu'une base de filtre dans $\mathfrak{S}$

est une base de filtre dans $\mathfrak{C}$ et une base de filtre dans $\mathfrak{C}$ formée d'éléments de $\mathfrak{S}$ est une base de filtre dans $\mathfrak{S}$. Il en résulte que les éléments f^{-1} forment bien une base de filtre, car $f \in \mathfrak{S}$, $g \in \mathfrak{S}$ entraîne $f \bigcap\limits_{\mathfrak{S}} g \in \mathfrak{S}$ et $f^{-1} \bigcap\limits_{\mathfrak{S}} g^{-1} = \left(f \bigcap\limits_{\mathfrak{S}} g\right)^{-1}$.

Considérons dans $\mathfrak{F}$ la relation d'ordre $F \prec F'$ équivalente à $F' \subset F$. Cette relation d'ordre est une loi d'induction dans $\mathfrak{F}$. La borne inférieure d'une famille de filtres pour cette loi 1
d'induction est le filtre engendré par la réunion des filtres de la famille. Le plus petit élément est le filtre 0. Toute partie bornée A de $\mathfrak{F}$ admet un agrégat; c'est l'intersection de tous les filtres $F \in A$.

Pour la relation d'ordre induite sur $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, le groupoïde $\mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$ est un groupoïde inductif : c'est le groupoïde inductif privilégié qui intervient dans la définition d'une catégorie inductive. En effet, si $F \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, $E \prec \alpha(F)$, $E \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{F}}$, alors le filtre induit par F sur E est le filtre engendré par les éléments induits par f sur e, où $f \in F$, $e \in E$, e est une unité $\prec \alpha(f)$.

Pour tout $F \in \mathfrak{F}$ et tout $E \in \mathfrak{F}_0$, $E \prec \alpha(F)$, la classe des pseudoproduits fe, où $f \in F$, $e \in E$, forme une base de filtre. Appelons FE le filtre qu'elle engendre; FE admet aussi pour base la classe des éléments fe, où $f \in F$, $e \in E$ et $e \prec \alpha(f)$. On définit de même E′F si $E' \prec \beta(F)$. On a $\alpha(FE) = E$, $\beta(E'F) = E'$. Si $G \prec F$, alors

$$\beta(G) \prec \beta(F\,\alpha(G)) \text{ et } G = \beta(G)F\,\alpha(G).$$

On démontre que, si $H \prec F'F$, alors $H = (\beta(H)F'E')\,(E'F\alpha(H))$, 2
où $E' = \beta(F\alpha(H)) \cap \alpha(\beta(H)F')$, donc $H = K'K$, avec $K' \prec F'$, $K \prec F$. Ce qui précède permet de vérifier facilement les axiomes d'une catégorie inductive.

Remarquons que $\mathfrak{C}$ est plongé dans $\mathfrak{F}$, en identifiant l'élément f au filtre formé de tous les majorants de f, que nous noterons $[f]$; la relation d'induction dans $\mathfrak{C}$ est induite par celle de $\mathfrak{F}$.

Soit $\mathfrak{C}'$ une sous-catégorie inductive, $\mathfrak{F}'$ la classe des filtres $F \in \mathfrak{F}$, ayant une base formée d'éléments de $\mathfrak{C}'$; on montre facilement que $\mathfrak{F}'$ est une sous-catégorie inductive de $\mathfrak{F}$. Si $\mathfrak{C}'$ est une sous-catégorie inductive faible, alors $\mathfrak{F}'$ est une sous-catégorie inductive faible de $\mathfrak{F}$.

1 4. — Groupoïdes inductifs au-dessus d'un groupoïde inductif.

DÉFINITION. — *Soient $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ deux groupoïdes inductifs, φ et φ' leurs foncteurs d'induction. $\mathfrak{S}$ est appelé groupoïde inductif au-dessus de $\mathfrak{S}'$ lorsqu'il est muni d'un foncteur covariant p de $\mathfrak{S}$ vers $\mathfrak{S}'$ vérifiant les axiomes suivants :*

1) *Soit $f \in \mathfrak{S}$, $s \in \mathfrak{S}_0$, tels que $p(s) = \alpha(p(f))$. Alors il existe $g \in \mathfrak{S}$ tel que $\alpha(g) = s$ et $p(g) = p(f)$.*

2) *L'élément g ci-dessus est unique.*

3) *$\varphi(f)$ est appliqué d'une façon biunivoque par p sur une sous-classe de $\varphi'(f')$, où $f' = p(f)$.*

4) *Si $s_1 \prec s$, $s_2 \prec s$, où s, s_1 et s_2 sont des unités de $\mathfrak{S}$, alors $p(s_1 \cap s_2) = p(s_1) \cap p(s_2)$.*

5) *Si A est une sous-classe de $\mathfrak{S}_0$ majorée par $s \in \mathfrak{S}_0$, il existe $s_1 \prec s$ tel que $p(s_1) = \bigcup p(\mathrm{A})$.*

Les axiomes 1) et 2) entraînent : $p(\mathfrak{S})$ est un sous-groupoïde G de $\mathfrak{S}'$ et G est un groupoïde d'opérateurs sur $\mathfrak{S}_0$. En effet, reprenant les notations de 1), le composé de $(p(f), s)$ sera $\beta(g)$, c'est-à-dire on peut écrire $s' = p(f)s$, où $s' = \beta(g)$. Cette multiplication vérifie les axiomes d'un groupoïde d'opérateurs, en d'autres termes, $\mathfrak{S}_0$ *est une espèce de structures sur* G *ou au-dessus* (1) *de* $\mathfrak{S}'$.

Les axiomes 3), 4), 5) expriment que $\mathfrak{S}_0$ est une espèce de structures *inductives* au-dessus de $\mathfrak{S}'$ (voir [1]) : l'élément f de $\mathfrak{S}$ peut être identifié avec le couple $(p(f), \alpha(f))$.

On démontre les propriétés suivantes :

$f_1 \prec f$ est équivalent à : $\alpha(f_1) \prec \alpha(f)$ et $p(f_1) \prec p(f)$.

Étant données trois unités s, s_1, s_2 de $\mathfrak{S}$ telles que $s_1 \prec s$, $s_2 \prec s$, pour que $s_1 \prec s_2$, il faut et il suffit que $p(s_1) \prec p(s_2)$.

(1) En accord avec la définition suivante (qui généralise légèrement celle de [1] page 52).

DÉFINITION. — Une catégorie $\mathfrak{C}$ est appelée *catégorie d'opérateurs* sur une classe E lorsqu'on a défini une multiplication pour certains couples (f, z), $(f, z) \to fz$, où $f \in \mathfrak{C}$, $z \in \mathrm{E}$, $fz \in \mathrm{E}$ satisfaisant aux axiomes suivants :

1) Si l'un des éléments $g(fz)$ ou $(gf)z$ est défini, alors les deux éléments sont définis et $g(fz) = (gf)z$.

2) Si gf et fz sont définis, alors $g(fz)$ est défini.

3) Si e est une unité de $\mathfrak{C}$ et si ez est défini, alors $ez = z$.

4) Pour tout $z \in \mathrm{E}$, il existe $f \in \mathfrak{C}$ tel que fz soit défini.

5) Pour tout $f \in \mathfrak{C}$, il existe $z \in \mathrm{E}$ tel que fz soit défini.

On dira aussi que E est une espèce de structures (covariantes) *sur* $\mathfrak{C}$. Si ces axiomes sont vérifiés sauf 5), on dira que E est une espèce de structures *au-dessus* de $\mathfrak{C}$; c'est alors une espèce de structures *sur* une sous-catégorie de $\mathfrak{C}$.

On a : $p(\bigcup A) = \bigcup p(A)$, où A est une partie majorée de $\mathfrak{S}_0$. Si B est une partie majorée de $\mathfrak{S}$, on a :

$$p(\bigcup B) = \bigcup p(B), \quad \alpha(\bigcup B) = \bigcup \alpha(B), \quad \beta(\bigcup B) = \bigcup \beta(B).$$

Si f_1 et f_2 sont deux éléments quelconques de $\mathfrak{S}$ et si $f_2 f_1$ est leur pseudoproduit, alors $p(f_2 f_1) \prec p(f_2)p(f_1)$. Si $s \prec \alpha(f)$, on a $p(fs) = p(f)p(s)$.

En général, $p(\mathfrak{S})$ n'est pas un sous-groupoïde inductif contenu dans $\mathfrak{S}'$. Si $p(\mathfrak{S})$ est un sous-groupoïde inductif contenu dans $\mathfrak{S}'$, alors $p(f_2 f_1) = p(f_2)p(f_1)$, où le deuxième membre est un pseudoproduit dans $p(\mathfrak{S})$. Si p est un foncteur biunivoque de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{S}'$, alors $p(\mathfrak{S})$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{S}'$. 1

Si $\mathfrak{S}'$ est un groupoïde local, alors $\mathfrak{S}$ est un groupoïde local.

Une famille d'éléments f_i de $\mathfrak{S}$ est appelée *compatible relativement à* $\mathfrak{S}'$ si elle possède les propriétés suivantes :

a) $p(s_i \cap s_j) = p(s_i) \cap p(s_j)$, où $s_i = \alpha(f_i)$, $s_j = \alpha(f_j)$.

b) $\alpha(p(f_i) \cap p(f_j)) = p(s_i) \cap p(s_j)$.

Il en résulte : $\alpha(f_i \cap f_j) = s_i \cap s_j$, $p(f_i \cap f_j) = p(f_i) \cap p(f_j)$, c'est-à-dire f_i et f_j sont compatibles dans $\mathfrak{S}$, $p(f_i)$ et $p(f_j)$ sont compatibles dans $\mathfrak{S}'$.

Définition. — *Un groupoïde inductif $\mathfrak{S}$ au-dessus de $\mathfrak{S}'$ est dit complet relativement à $\mathfrak{S}'$ lorsque l'axiome suivant est vérifié :*

c) *Toute famille d'éléments de $\mathfrak{S}$ qui est compatible relativement à $\mathfrak{S}'$ et dont la projection dans $\mathfrak{S}'$ admet un agrégat dans $\mathfrak{S}'$ admet elle-même un agrégat dans $\mathfrak{S}$.*

5. — Catégories inductives au-dessus d'une catégorie inductive :

Définition. — *Soient $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ deux catégories inductives, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ les sous-groupoïdes inductifs privilégiés dans $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$, I et I' les lois d'induction dans $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$; on appellera $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive au-dessus de $\mathfrak{C}'$ lorsque $\mathfrak{C}$ est muni d'un foncteur covariant π de $\mathfrak{C}$ vers $\mathfrak{C}'$ vérifiant les axiomes suivants :*

1) *Soient s, s_1, s_2 des unités de $\mathfrak{C}$, $s_1 \prec s$, $s_2 \prec s$. Alors $\pi(s_1 \cap s_2) = \pi(s_1) \cap \pi(s_2)$. De plus, $\pi(s_1) = \pi(s_2)$ entraîne $s_1 = s_2$.*

2) *Soit A une partie de $\mathfrak{C}_0$, majorée par S dans $\mathfrak{C}_0$, alors il existe $\sigma \prec$ S tel que $\pi(\sigma) = \bigcup \pi(A)$.*

3) *Soit $h \in \mathfrak{C}$; alors $\pi(\mathrm{I}(h)) \subset \mathrm{I}'(\pi(h))$.*

4) *L'application $h \rightarrow (\beta(h), \pi(h), \alpha(h))$ de $\mathfrak{C}$ sur une partie de $\mathfrak{C}_0 \times \mathfrak{C}' \times \mathfrak{C}_0$ est biunivoque.*

5) $\pi(\mathfrak{S}) \subset \mathfrak{S}'$.

6) *Soit* $f \in \mathfrak{S}'$, $s \in \mathfrak{C}_0$, *où* $\pi(s) = \pi(\alpha(f))$. *Alors il existe un*
1 $g \in \mathfrak{S}$ *et un seul tel que* $\alpha(g) = s$ *et* $\pi(g) = \pi(f)$.

On obtient un système d'axiomes équivalent en remplaçant 1), 2), 5), 6) par l'axiome : La restriction de π à $\mathfrak{S}$ définit $\mathfrak{S}$ comme groupoïde inductif au-dessus de $\mathfrak{S}'$. Une catégorie inductive $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{C}'$ a été appelée dans [1] catégorie inductive d'homomorphismes au-dessus de $\mathfrak{C}'$.

Les éléments induits par $h \in \mathfrak{C}$ s'identifient à des triplets (s_2, h', s_1) où $s_1 \prec \alpha(h)$, $s_2 \prec \beta(h)$, $h' \prec \pi(h)$. Si h_1 et h_2 sont induits par h, on a $\pi(h_1 \cap h_2) = \pi(h_1) \cap \pi(h_2)$ Si B est une partie de $\mathfrak{C}$, majorée dans $\mathfrak{C}$, alors $\pi(\bigcup B) = \bigcup \pi(B)$.

$\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie de $\mathfrak{C}'$, mais, en général, ce n'est pas une sous-catégorie inductive.

2 Si $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ sont des catégories régulières, pour la pseudo-multiplication on a :

$$\pi(h_2 h_1) \prec \pi(h_2)\pi(h_1).$$

Si $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie régulière faible de $\mathfrak{C}'$, alors
3¶ π est un isomorphisme de $\mathfrak{C}$ sur $\pi(\mathfrak{C})$ pour leurs structures de catégorie inductive.

Une famille d'éléments h_i de $\mathfrak{C}$ est dite *compatible relativement à* $\mathfrak{C}'$ si on a :

a) $\pi(s_i \cap s_j) = \pi(s_i) \cap \pi(s_j)$, $\pi(s'_i \cap s'_j) = \pi(s'_i) \cap \pi(s'_j)$,
où $s_i = \alpha(h_i)$, $s_j = \alpha(h_j)$, $s'_i = \beta(h_i)$, $s'_j = \beta(h_j)$.

b) $\alpha(\pi(h_i) \cap \pi(h_j)) = \pi(s_i) \cap \pi(s_j)$, $\beta(\pi(h_i) \cap \pi(h_j)) = \pi(s'_i) \cap \pi(s'_j)$.

Définition. — *Une catégorie inductive* $\mathfrak{C}$ *au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *est dite* complète relativement à $\mathfrak{C}'$ *lorsque l'axiome suivant est vérifié :*

4 c) *Toute famille d'éléments de* $\mathfrak{C}$ *qui est compatible relativement à* $\mathfrak{C}'$ *et dont la projection admet un agrégat dans* $\mathfrak{C}'$ *admet un agrégat dans* $\mathfrak{C}$.

Si $\mathfrak{C}'$ est une catégorie locale, alors $\mathfrak{C}$ est une catégorie locale.

Proposition. — *Au-dessus d'une catégorie inductive normale à droite (resp. à gauche)* $\mathfrak{C}$, *on peut définir une catégorie*
5 *inductive normale* $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ *dont les objets sont les paratopologies sur les unités de* $\mathfrak{C}$.

Soit T une paratopologie sur $e \in \mathfrak{C}_0$; c'est-à-dire T est une partie de $\varphi(e)$, classe des unités induites par e, telle que T soit saturé par rapport à l'intersection de deux éléments et par rapport à l'agrégation quelconque et contienne e et 0. Soit $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ la classe des triplets (T', h, T), où $h \in \mathfrak{C}$, T est une paratopologie sur $\alpha(h)$, T' une paratopologie sur $\beta(h)$, tels que $e \in T$
entraîne $\beta(he) \in T'$ (resp. $e' \in T'$ entraîne $\alpha(e'h) \in T$). La classe 1
$\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie inductive pour la loi de composition : 2
$(T'', h', T_1)(T', h, T) = (T'', h'h, T)$, si et seulement si $T_1 = T'$, et pour la loi d'induction :

$(t', h', t) \prec (T', h, T)$ si et seulement si $h' \prec h$, $t = T \cap \varphi(\alpha(h'))$, $\alpha(h') \in T$, $\beta(h') \in T'$, $t' = T' \cap \varphi(\beta(h'))$.

Une unité de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est un triplet (T, e, T), où $e \in \mathfrak{C}_0$. Il correspond d'une façon biunivoque à T; c'est-à-dire, la classe des paratopologies sur les unités de $\mathfrak{C}$ est une classe d'objets pour $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$.

Le sous-groupoïde inductif privilégié de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est la classe $\mathfrak{T}(\mathfrak{S})$ de triplets (T', f, T), où $f \in \mathfrak{S}$, $T' = fT =$ classe des élé-
ments $\beta(fe)$, où $e \in T$, fe est l'élément de $\mathfrak{S}$ induit par f sur e. 3

Soit $h' = he$, $e \prec \alpha(h)$, $e \in T$, t la paratopologie induite par T sur e, t' la paratopologie induite par T' sur $\beta(h')$. Alors $(t', h', t) \in \mathfrak{T}(\mathfrak{C})$. On a :

$$(1) \qquad (T', h, T)(t, e, t) = (t', he, t),$$

où le premier membre est un pseudoproduit dans la catégorie inductive $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$. On a respectivement une formule analogue :

$$(2) \qquad (t_1, e_1, t_1)(T', h, T) = (t_1, e_1h, t_1').$$

Ces deux formules montrent que $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie inductive régulière, si $\mathfrak{C}$ est régulier.

$\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie inductive au-dessus de $\mathfrak{C}$ par rapport au foncteur projection $\pi : (T', h, T) \to h$.

La formule (1) entraîne :

$$\pi((T', h, T)(t, e, t)) = he.$$

De même respectivement :

$$\pi((t_1, e_1, t_1)(T', h, T))) = e_1h.$$

Si $\mathfrak{C}$ est une catégorie locale, alors $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est une catégorie locale
complète relativement à $\mathfrak{C}$. 4

Définition. — *La catégorie* $\mathfrak{C}$ *est dite supraréguliére au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *lorsque* $\mathfrak{C}$ *et* $\mathfrak{C}'$ *sont des catégories inductives régulières,* $\mathfrak{C}$ *étant au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *par rapport à un foncteur projection* π *vérifiant l'axiome :*

$$\pi(hs) = \pi(h)\pi(s), \qquad \pi(s'h) = \pi(s')\pi(h),$$

où

$$h \in \mathfrak{C}, s \in \mathfrak{C}_0, \qquad s' \in \mathfrak{C}_0, \qquad s \prec \alpha(h), \qquad s' \prec \beta(h).$$

En particulier la catégorie $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ est supraréguliére au-dessus de $\mathfrak{C}$ si $\mathfrak{C}$ est régulier.

Définition. — *Soit* $\mathfrak{C}$ *une catégorie inductive au-dessus de la catégorie inductive* $\mathfrak{C}'$. *La catégorie* $\mathfrak{C}$ *sera dite* étalée au-dessus de $\mathfrak{C}'$ *lorsque la restriction du foncteur projection* π *à la classe* $\mathrm{I}(h)$
1 *est biunivoque sur* $\mathrm{I}'(\pi(h))$ *et que la restriction de* π *à* $\varphi(s)$, $s \in \mathfrak{C}_0$, *est biunivoque sur* $\varphi'(\pi(s))$.

Si $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}'$ et si $\mathfrak{C}$ ou $\mathfrak{C}'$ est régulière, alors $\mathfrak{C}$ est supraréguliére au-dessus de $\mathfrak{C}'$.

Proposition. — *Si* $\mathfrak{C}$ *est supraréguliére au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *normal, alors* $\mathfrak{C}$ *est étalée et supraréguliére au-dessus de* $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ *par rapport au foncteur projection* $\tau : h \to (\mathrm{T}', \pi(h), \mathrm{T})$, *où* T *est la paratopologie sur* $\pi(s)$ *définie par* $\pi(\varphi(s))$, *où* $s = \alpha(h)$, T′ *étant la paratopologie définie de la même façon sur* $\pi(s')$, *où* $s' = \beta(h)$.

Le groupoïde privilégié de $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ est $\mathfrak{S}$. De plus on a : $\pi = \pi'\tau$, où π' est le foncteur projection de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$ sur $\mathfrak{C}'$.

Cette proposition généralise la proposition de [1] page 64. $\tau(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive faible de $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$, qui est aussi supraréguliére au-dessus de $\mathfrak{C}'$. Si de plus la catégorie $\mathfrak{C}$ est complète relativement à $\mathfrak{C}'$, alors elle est complète relativement à $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$, mais la catégorie $\tau(\mathfrak{C})$ n'est pas forcément complète relativement à $\mathfrak{C}'$.

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive au-dessus de $\mathfrak{C}'$ telle que le foncteur projection π soit biunivoque sur $\pi(\mathfrak{C})$. Alors $\pi(\mathfrak{C})$ est
2 une sous-catégorie inductive faible de $\mathfrak{C}'$. Si $\mathfrak{C}$ est supraréguliére au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive régulière faible. Si $\mathfrak{C}$ est complet au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\pi(\mathfrak{C})$ est une sous-catégorie inductive de $\mathfrak{C}'$. Si $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}'$, alors $\pi(\mathfrak{C})$ est saturé par induction.

Une catégorie $\mathfrak{C}$ étalée et complète au-dessus de $\mathfrak{C}'$ généralise la notion de faisceau d'ensembles : Si $\mathfrak{C}$ se réduit à la classe des 1
unités $\mathfrak{C}_0$, alors $\mathfrak{C}_0$ peut s'appeler un faisceau de structures au-dessus de $\mathfrak{C}'_0$. En ajoutant des structures algébriques supplémentaires dans $\mathfrak{C}$, on peut généraliser la notion de faisceau (d'ensembles munis de structures algébriques).

6. — Jets locaux.

Proposition. — *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive supraréguliere au-dessus de $\mathfrak{C}'$, π le foncteur projection. La classe $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ des triplets (e', h, e), où $h \in \mathfrak{C}$, $e \in \mathfrak{C}'_0$, $e' \in \mathfrak{C}'_0$, $e \prec \alpha(\pi(h))$, $e' \prec \beta(\pi(h))$, $e \prec \alpha(\pi(s'h))$, $e' \prec \beta(\pi(hs))$ pour tout $s \prec \alpha(h)$ et tout $s' \prec \beta(h)$ tels que $e \prec \pi(s)$, $e' \prec \pi(s')$, est une catégorie inductive lorsqu'on la munit de la loi de composition: $(e'', h', e'_1)(e', h, e) = (e'', h'h, e)$, si et seulement si $e' = e'_1$ et $\alpha(h') = \beta(h)$, et de la loi d'induction :*

$$(e'_1, h_1, e_1) \prec (e', h, e) \quad \textit{si et seulement si} \quad e_1 = e,\ e'_1 = e',\ h_1 \prec h.$$ 2

Les unités sont les triplets (e, s, e), où $e \prec \pi(s)$, $s \in \mathfrak{C}_0$. Le groupoïde inductif privilégié dans $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ est la classe des triplets (e', f, e), où $f \in \mathfrak{S}$, $e' = \beta(g)$, *où* $g \in \mathfrak{S}'$, $g \prec \pi(f)$, $\alpha(g) = e$.

La catégorie $\mathfrak{C}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ par $h \to (\pi(\beta(h)), h, \pi(\alpha(h)))$. Si $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}'$, la catégorie $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ est une catégorie inductive au-dessus de $\Theta(\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'_0)$, le foncteur projection étant : $(e', h, e) \to (e', \pi(h), e)$. 3

Dans $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$, nous considérons la relation d'équivalence ρ suivante :
$(e', h, e) \sim (e'_1, h_1, e_1)$ si et seulement si $e = e_1$, $e' = e'_1$, $e \prec \alpha(\pi(h \cap h_1))$, $e' \prec \pi(\beta(h \cap h_1))$.

ρ est effectivement une relation d'équivalence: $e \prec \pi(\alpha(h \cap h_1))$ et $e \prec \pi(\alpha(h_1 \cap h_2))$ entraînent $e \prec \pi(\alpha(h \cap h_2))$, car $(h \cap h_1) \cap (h_1 \cap h_2) \prec h \cap h_2$ et comme $h \cap h_1$ et $h_1 \cap h_2$ sont induits par h_1, on a :

$$\pi((h \cap h_1) \cap (h_1 \cap h_2)) = \pi(h \cap h_1) \cap \pi(h_1 \cap h_2)).$$

Si $(e', h, e) \sim (e', h_1, e)$ et $(e'_1, l, e_1) \sim (e'_1, l_1, e_1)$ et si de plus h et l sont majorés dans $\mathfrak{C}$, alors $(e' \cap e'_1, h \cap l, e \cap e_1) \sim (e' \cap e'_1,$ 4

$h_1 \cap l_1$, $e \cap e_1$). Si A est une famille d'éléments (e'_i, h_i, e_i) majorée dans $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ et si $(e'_i, h_i, e_i) \sim (e'_i, l_i, e_i)$, alors $\cup A \sim \cup B$, où B est la famille d'éléments (e'_i, l_i, e_i).

La relation d'équivalence ρ est compatible avec la multiplication dans $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$. Par passage au quotient, on en déduit une multiplication dans la classe $\mathfrak{J}'$ dont les éléments sont les classes d'équivalence suivant ρ. Désignons par ${}_{e'}j_e h$ la classe d'équivalence de (e', h, e). Alors la multiplication dans $\mathfrak{J}'$ est définie par :

$$(1) \quad ({}_{e''}j_{e'}h')\,({}_{e'}j_e h) = {}_{e''}j_e(h'h), \qquad \text{où} \qquad \alpha(h') = \beta(h).$$

1+ Pour cette multiplication $\mathfrak{J}'$ est une catégorie : l'unité à droite ou *source* de ${}_{e'}j_e h$ est ${}_e j_e \alpha(h)$, son unité à gauche ou *but* est ${}_{e'}j_{e'}\beta(h)$. Une unité quelconque ${}_e j_e s$, où $s \in \mathfrak{C}_0$, $e \prec \pi(s)$, sera appelée *germe de structure* au-dessus de $\mathfrak{C}'$. Un élément de $\mathfrak{J}'$ sera appelé *jet local* de $\mathfrak{C}$ au-dessus de $\mathfrak{C}'$.

Le jet local ${}_{e'}j_e h$ est aussi le filtre le plus fin dans $\Theta\,(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ possédant les propriétés suivantes : il contient (e', h, e) et le foncteur $(e', l, e) \to \pi(l)$ de $\Theta\,(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ vers $\mathfrak{C}'$ l'applique dans le filtre η engendré par les éléments $h' \prec \pi(h)$ tels que $e \prec \alpha(h')$, $e' \prec \beta(h')$. Remarquons que l'application ${}_{e'}j_e h \to \eta$ n'est pas un foncteur.

Soit $h \in \mathfrak{C}$ tel qu'il existe $g \in \mathfrak{C}'$ où $g \prec \pi(h)$, $\alpha(g) = e$, $\beta(g) = e'$. Les jets locaux ${}_{e'}j_e h$ correspondants forment une sous-classe $\mathfrak{J}$ de $\mathfrak{J}'$. $\mathfrak{J}$ est une sous-catégorie de $\mathfrak{J}'$ contenant tous les germes de structures au-dessus de $\mathfrak{C}'$. Le filtre η correspondant à ${}_{e'}j_e h$ est alors le filtre $[g]$ engendré dans $\mathfrak{C}'$ par g. L'application : ${}_{e'}j_e h \to g$ est un foncteur.

PROPOSITION. — *$\mathfrak{J}'$ est une catégorie inductive régulière pour la loi d'induction suivante :*

2 *${}_{e'_1}j_{e_1}h_1 \prec {}_{e'}j_e h$ si et seulement si $e'_1 \prec e'$, $e_1 \prec e$ et ${}_{e'_1}j_{e_1}h_1 = {}_{e'_1}j_{e_1}h$.*

Le groupoïde inductif privilégié dans $\mathfrak{J}'$ est le groupoïde dont les éléments sont les jets ${}_{e'}j_e f$, où $f \in \mathfrak{S}$, $e' = \beta(\pi(f)e)$, où $\pi(f)e$ est l'élément de $\mathfrak{S}'$ induit par $\pi(f)$ sur e.

$\mathfrak{J}$ est une sous-catégorie inductive de $\mathfrak{J}'$. De plus la formule (1) est aussi valable plus généralement lorsque la condition $\alpha(h') = \beta(h)$ est remplacée par ${}_{e'}j_{e'}\alpha(h') = {}_{e'}j_{e'}\beta(h)$ en considérant $h'h$ comme un pseudoproduit.

PROPOSITION. — *Si* $\mathfrak{C}$ *est suprarégulier au-dessus de* $\mathfrak{C}'$, *alors* $\mathfrak{J}$ *est une catégorie inductive étalée au-dessus de* $\mathfrak{C}'$. 1¶

PROPOSITION. — *Si* $\mathfrak{C}$ *est suprarégulier au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *normal, la catégorie* $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\,\mathfrak{C}')}$ *des jets locaux de* $\mathfrak{C}$ *au-dessus de* $\mathfrak{C}'$ *est une catégorie inductive étalée au-dessus de* $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{T}(\mathfrak{C}'),\,\mathfrak{C}')}$, *le foncteur projection étant :* ${}_{e'}j_e h \to {}_{e'}j_e \tau(h)$, *où* τ *est le foncteur qui étale* $\mathfrak{C}$ *au-dessus de* $\mathfrak{T}(\mathfrak{C}')$.

La catégorie $\mathfrak{C}$ s'identifie avec une sous-catégorie $[\mathfrak{C}]$ de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\,\mathfrak{C}')}$, en identifiant $h \in \mathfrak{C}$ avec $[h] = {}_{e'}j_e h$, où $e = \pi(\alpha(h))$, $e' = \pi(\beta(h))$; la loi d'induction dans $\mathfrak{C}$ correspond à la restriction à $[\mathfrak{C}]$ de la loi d'induction dans $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\,\mathfrak{C}')}$. L'intersection de deux éléments de $[\mathfrak{C}]$ appartient à $[\mathfrak{C}]$: $[h] \cap [h'] = [h \cap h']$. L'agrégat d'une partie de $[\mathfrak{C}]$ majorée dans $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\,\mathfrak{C}')}$ appartient à $[\mathfrak{C}]$. Tout élément de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\,\mathfrak{C}')}$ est induit par un élément de $[\mathfrak{C}]$. Nous exprimons ces trois dernières propriétés en disant que $[\mathfrak{C}]$ est une *paratopologie* sur $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\,\mathfrak{C}')}$. 2

7. — Catégories inductives au-dessus de la catégorie des applications.

Soit $\tilde{\mathfrak{F}}$ la catégorie inductive des applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble quelconque, le sous-groupoïde inductif priviligié étant $\mathfrak{F}$. Une sous-catégorie inductive (faible) de $\tilde{\mathfrak{F}}$ sera appelée catégorie inductive (faible) d'applications.

Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie inductive suprarégulière au-dessus de $\tilde{\mathfrak{F}}$, π le foncteur projection de $\mathfrak{C}$ vers $\tilde{\mathfrak{F}}$, $\mathfrak{S}$ la classe des éléments inversibles. Soit $\mathfrak{J}^{\lambda}(\mathfrak{C})$ la sous-catégorie de $\mathfrak{J}_{(\mathfrak{C},\,\tilde{\mathfrak{F}})}$ formée des *jets locaux* « *atomiques* » de la forme ${}_{x'}j_x f$, où $f \in \mathfrak{C}$, où x est un point de $\pi(\alpha(f))$, $x' = \pi(f)(x)$; un tel jet sera désigné par $j^{\lambda}_x f$. Soit $\mathfrak{J}^{\lambda}(\mathfrak{C}_0)$ la classe de ses unités ou *germes structuraux* « *atomiques* ». $\mathfrak{J}^{\lambda}(\mathfrak{S})$ s'identifie avec le groupoïde des éléments inversibles de $\mathfrak{J}^{\lambda}(\mathfrak{C})$.

L'image $\hat{f}$ de $\alpha(\pi(f))$ par l'application $j^{\lambda}f$: $x \to j^{\lambda}_x f$ sera appelée *ouvert élémentaire* de $\mathfrak{J}^{\lambda}(\mathfrak{C})$. L'intersection de deux ouverts élémentaires est un ouvert élémentaire. Les réunions quelconques d'ouverts élémentaires sont les ouverts d'une « métatopologie » sur $\mathfrak{J}^{\lambda}(\mathfrak{C})$, c'est-à-dire d'une structure définie 3

sur la classe $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ par la donnée d'une famille de parties vérifiant les axiomes des ouverts d'une topologie. $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ devient
1 alors une catégorie topologique [2]. $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$ est un ouvert de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. Si $\mathfrak{S}'$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}$, alors $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S}')$ est un sous-groupoïde ouvert de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. Inversement un sous-groupoïde ouvert G de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$ détermine le sous-pseudogroupe $\mathfrak{S}'$ dont les éléments sont les éléments f de $\mathfrak{S}$ tels que $\hat{f} \subset G$; tout sous-pseudogroupe $\mathfrak{S}''$ de $\mathfrak{S}$ tel que $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S}'') = G$ est un sous-pseudogroupe de $\mathfrak{S}'$. Les éléments de $\mathfrak{S}$ correspondent d'une façon biunivoque aux ouverts élémentaires de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{S})$. Un élément f de $\mathfrak{C}$ peut s'identifier au couple $(U', \hat{f})$, où U' est un ouvert élémentaire de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$ contenant $\beta(\hat{f})$. Plus généralement on
2 montre que $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ détermine complètement $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}, \tilde{\mathfrak{C}})$.

L'application α étale l'espace topologique $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ au-dessus de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$. L'application β est une application continue de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ dans $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$. Les applications α et β sont ici les applications source et but dans $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$.

Soit $\mathfrak{T}$ la catégorie $\mathfrak{T}(\tilde{\mathfrak{C}})$ dont les objets sont les topologies. Alors $\mathfrak{C}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{T}$ par le foncteur τ. Désignons
3 $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{T})$ par $\mathfrak{J}^\lambda$, $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{T}_0)$ par $\mathfrak{J}^\lambda_0$ qui est la classe des germes de topologies, ces classes étant munies des métatopologies définies ci-dessus. Alors on a :

PROPOSITION. — *La restriction* $\hat{\tau}$ *à* $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ *du foncteur qui étale* $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}, \tilde{\mathfrak{C}})$ *au-dessus de* $\mathfrak{J}(\mathfrak{T}, \tilde{\mathfrak{C}})$ *étale l'espace topologique* $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ *au-dessus de* $\mathfrak{J}^\lambda$ *et de même* $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}_0)$ *au-dessus de* $\mathfrak{J}^\lambda_0$. *L'application* $\hat{\tau}$ *est :* $j^\lambda_x f \to j^\lambda_x \tau(f)$, *où* $f \in \mathfrak{C}$.

Le procédé d'élargissement d'une espèce de structures [1] conduit à munir $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ d'une métastructure de l'espèce $\mathfrak{C}_0$ élargie; nous considérons $\mathfrak{C}_0$ comme une espèce de structures au-dessus de $\tilde{\mathfrak{C}}$ (pour laquelle $\mathfrak{C}$ est une catégorie inductive d'homomor-
4 phismes au-dessus de $\tilde{\mathfrak{C}}$). Le couple $(j^\lambda f, s)$, où $s \in \mathfrak{C}_0$, $f \in \mathfrak{C}$, est une *carte locale élémentaire* de $\mathfrak{C}_0$ sur l'ouvert élémentaire $\hat{f}$ de $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$. Étant donnée une deuxième carte locale $(j^\lambda g, s')$, le changement de carte est le triplet $(\sigma, \varepsilon, \sigma)$, où $\sigma = \alpha(f \cap g)$ et $\varepsilon = \pi(\sigma)$. La métastructure sur $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ est définie par l'atlas formé par les cartes locales élémentaires. En supposant $\mathfrak{C}$ complet au-dessus de $\tilde{\mathfrak{C}}$, le couple $(j^\lambda f, s)$ définit une structure

$\hat{s}$ de l'espèce $\mathfrak{C}_0$ sur $\hat{f}$. Les structures $\hat{s}$ forment une classe de structures compatibles qui définit également la métastructure sur $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$.

En particulier, soit $\mathfrak{C}^r$ la catégorie des applications r fois continûment différentiables dont les objets sont les structures de variétés r fois continûment différentiables de classe $\mathfrak{C}^r_0$. Soit $\mathfrak{J}^{\lambda, r} = \mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}^r)$, $\mathfrak{J}^{\lambda, r}_0 = \mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C}^r_0)$ = classe des germes (atomiques) de structures r fois continûment différentiables. Alors $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$ ainsi que $\mathfrak{J}^{\lambda, r}_0$ est muni d'une métastructure r fois continûment différentiable. Si $k \leqslant r$, $\mathfrak{C}^r$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{C}^k$, qui est étalé au-dessus de $\mathfrak{T}$. De plus $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$ est étalé au-dessus de $\mathfrak{J}^{\lambda, k}$, qui est étalé *au-dessus* de $\mathfrak{J}^\lambda$, ces classes étant munies des métastructures correspondantes.

Étant donné un germe de structure $\hat{x} \in \mathfrak{J}^{\lambda, r}_0$, un *repère* pour $\hat{x}$ est un jet inversible $h \in \mathfrak{J}^{\lambda, r}$ tel que $\beta(h) = \hat{x}$ et $\alpha(h) =$ germe $\hat{O}_n$ de R^n en l'origine O. Dans $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$ on a la relation d'équivalence ρ_r : $j^\lambda_x f \sim j^\lambda_x g$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $j^\lambda_x f$ et $j^\lambda_x g$ ont la même unité à droite $\hat{x}$ ainsi que la même unité à gauche $\hat{x}'$.

2) Soit h un repère pour $\hat{x}$, h' un repère pour $\hat{x}'$. Soit $h'^{-1}(j^\lambda_x f)h = j^\lambda_0 \bar{f}$, où $\bar{f} \in \mathfrak{C}^r$ est une application dans R^p d'un voisinage de O relativement à R^n telle que $O = \bar{f}(O)$. Soit de même $h'^{-1}(j^\lambda_x g)h = j^\lambda_0 \bar{g}$. Alors $\bar{f} - \bar{g}$ est une fonction définie dans un voisinage de O telle que toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leqslant r$ soient nulles.

La classe d'équivalence de $j^\lambda_x f$ suivant ρ_r sera désignée par $j^r_x f$ et s'appellera un *jet infinitésimal d'ordre r de $\hat{x}$ vers $\hat{x}'$*. La relation d'équivalence ρ_r est compatible avec la multiplication dans $\mathfrak{J}^{\lambda, r}$; la classe $\mathfrak{J}^r$ des jets infinitésimaux d'ordre r est une catégorie admettant encore $\mathfrak{J}^{\lambda, r}_0$ comme classe d'objets. Soit Π^r le groupoïde des éléments inversibles de $\mathfrak{J}^r$.

Les catégories $\mathfrak{J}^r$ sont les catégories fondamentales de la 1+
géométrie différentielle. Une classe d'éléments infinitésimaux d'ordre r (ou d'*objets géométriques d'ordre r*) est une classe $\mathfrak{M}$ admettant Π^r comme groupoïde d'opérateurs, plus généralement admettant $\mathfrak{J}^r$ ou une de ses sous-catégories comme catégorie d'opérateurs. Soit $\mathfrak{M}'$ une classe d'éléments infinitésimaux d'ordre k, par rapport à Π^k, où $k \leqslant r$. Une *application*

covariante de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$ est une application γ de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{M}'$ telle que :

$$\gamma(Xz) = (j^k X)\gamma(z),$$

où $X \in \Pi^r$, $j^k X$ l'élément de Π^k qui se déduit de X par le foncteur canonique j^k de Π^r sur Π^k; l'élément $\gamma(z)$ est appelé *covariant différentiel* de z.

Ces notions conduisent à une théorie générale des prolongements d'ordre r d'une variété différentiable ainsi que des structures infinitésimales définies par des sections de ces prolongements (voir les références dans [3]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Ehresmann, Gattungen von lokalen Strukturen (*Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, 60, 1957, p. 49-77).

[2] Catégories topologiques et catégories différentiables (*Colloque Geométrie Différentielle Globale*, Bruxelles, 1958 CBRM).

[3] Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie (*Colloque Int. de Géométrie diff. de Strasbourg, C.N.R.S.*, 1953).

[4] Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie (*Revista Union Mat. Argentina*, 1960, vol XIX, p. 48).

UNIVERSITE DE MONTREAL
Département de Mathématiques
1961

/126/

CATÉGORIES DIFFÉRENTIABLES ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CHAPITRES 1 ET 2

Professeur Charles EHRESMANN
Université de Paris

Ces notes couvrent la matière des deux premiers chapitres du cours donné par le professeur Ehresmann au Séminaire de la Société Mathématique du Canada tenu à l'Université de Montréal du 14 août au 2 septembre 1961. Les chapitres suivants, qui traitaient de la Géométrie Différentielle, n'ont pas été publiés.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE 1
STRUCTURES ET CATÉGORIES D'HOMOMORPHISMES

I. CATÉGORIES ET FONCTEURS

1. Catégories et groupoïdes.

DÉFINITION 1. Soit $\mathcal{C}$ une classe munie d'une loi de composition partiellement définie : $(g,f) \mapsto gf$, où $g \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}$, $gf \in \mathcal{C}$. Un élément e de $\mathcal{C}$ est une *unité* si $fe = f$ et $eg = g$ pour tout élément f tel que fe soit défini et pour tout élément g tel que eg soit défini.

DÉFINITION 2. Une *catégorie* est une classe $\mathcal{C}$ munie d'une loi de composition partiellement définie $(g,f) \mapsto gf$, où $g \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}$, $gf \in \mathcal{C}$, satisfaisant aux axiomes suivants :

1° *Associativité :* Si $h(gf)$ ou $(hg)f$ est défini, alors les deux composés sont définis et égaux : $h(gf) = (hg)f$.

2° Si hg et gf sont définis, alors $(hg)f$ est défini.

3° Etant donné un élément f de $\mathcal{C}$, il existe une unité e telle que fe soit défini et une unité e' telle que $e'f$ soit défini.

PROPOSITION 1. *L'unité e (resp. e') dont l'existence est affirmée dans l'Axiome 3 est unique.*

En effet, soit e et e_1 deux unités telles que $fe = f$ et $fe_1 = f$. Alors $fe_1 = (fe)e_1$, donc $f(ee_1)$ est défini. Il en résulte $ee_1 = e_1 = e$, c'est-à-dire deux unités composables sont identiques.

L'unité e est appelée *unité à droite de* f, l'unité e' *unité à gauche*. En général, e sera désigné par $\alpha(f)$ et e' par $\beta(f)$. L'élément f sera appelé *morphisme de* $\alpha(f)$ *vers* $\beta(f)$. La classe des unités de $\mathcal{C}$ sera désignée par $\mathcal{C}_0$.

PROPOSITION 2. *Pour que gf soit défini, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha(g) = \beta(f)$.*

En effet, si gf est défini,

$$gf = (g\alpha(g))f = g(\alpha(g)f),$$

donc $\alpha(g)f$ est défini et par suite $\alpha(g) = \beta(f)$. Réciproquement si l'on a $\alpha(g) = \beta(f)$, alors $g\alpha(g)$ et $\alpha(g)f$ sont définis, donc $(g\alpha(g))f$ est défini, c'est-à-dire que gf est défini.

PROPOSITION 3. *On a les formules:* $\alpha(gf) = \alpha(f)$ *et* $\beta(gf) = \beta(g)$.

En effet, si gf est défini, alors $g(f\alpha(f))$ est défini, donc $(gf)\alpha(f)$ est défini.

Le système d'axiomes 1, 2, 3 est équivalent au suivant:

a) Tout élément f de $\mathcal{C}$ admet une unité à droite unique $\alpha(f)$ et une unité à gauche unique $\beta(f)$.

b) Pour que gf soit défini, il faut et il suffit que l'on ait $\alpha(g) = \beta(f)$.

c) $\alpha(gf) = \alpha(f)$ et $\beta(gf) = \beta(g)$.

d) Si $(hg)f$ et $h(gf)$ sont définis, on a $(hg)f = h(gf)$.

Remarquons que a, b, c entraînent: si $(hg)f$ est défini, alors $h(gf)$ est défini.

On se donne souvent une application ω de la classe des unités d'une catégorie $\mathcal{C}$ sur une classe $\mathcal{C}'_0$ appelée *classe des objets de* $\mathcal{C}$. L'objet $\omega(\alpha(f))$ sera désigné par $\alpha_0(f)$ et l'objet $\omega(\beta(f))$ par $\beta_0(f)$. Nous dirons que $\alpha_0(f)$ est la *source de* f et $\beta_0(f)$ est le *but de* f; l'élément f est aussi appelé un morphisme de $\alpha_0(f)$ vers $\beta_0(f)$. En particulier la classe des unités est une classe d'objets de $\mathcal{C}$. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, α_0 et β_0 sont désignés par α et β.

DÉFINITION 3. Un élément f de la catégorie $\mathcal{C}$ est dit *inversible* lorsqu'il existe un élément f' de $\mathcal{C}$ tel que l'on ait:

$$f'f = \alpha(f) \quad \text{et} \quad ff' = \beta(f).$$

PROPOSITION 4. *Si* f *est inversible, l'élément* f' *est unique.*

En effet, soit f'' tel que $f''f = \alpha(f)$. Puisque $ff' = \beta(f)$, le composé $(f''f)f'$ est défini, et l'on a

$$(f''f)f' = f''(ff'), \quad \text{ou} \quad \alpha(f)f' = f''\beta(f),$$

c'est-à-dire $f' = f''$.

L'élément unique f' sera désigné par f^{-1} et appelé *inverse de* f.

On a : $\alpha(f^{-1}) = \beta(f)$ et $\beta(f^{-1}) = \alpha(f)$.

DÉFINITION 4. Un *groupoïde* est une catégorie dont tous les éléments sont inversibles. Un groupoïde est dit *transitif* si, pour tout couple d'unités (e, e'), il existe au moins un morphisme de e vers e'.

Un groupoïde transitif est un groupoïde au sens de Brandt, si c'est
1 un ensemble.

Un *groupe* est un groupoïde ne possédant qu'une seule unité.

DÉFINITION 5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un élément f' est appelé *inverse à gauche* (resp. à *droite*) *de* f si l'on a : $f'f = \alpha(f)$ (resp. $ff' = \beta(f)$).

PROPOSITION 5. *Si dans une catégorie $\mathcal{C}$ tout élément f admet un inverse à gauche f', cet élément est inverse à droite et $\mathcal{C}$ est un groupoïde.*

En effet, soit $f \in \mathcal{C}$ et $f'f = \alpha(f)$. On a : $\beta(f'f) = \beta(f') = \alpha(f)$. Donc ff' est défini. Comme $\alpha(f') = \beta(f)$, le produit $(ff')(ff')$ est défini. On a

$$(ff')(ff') = f(f'f)f' = f\alpha(f)f'.$$

Il existe un $g \in \mathcal{C}$ tel que $g(ff') = \alpha(ff') = \beta(f)$. Par suite :

$$g(ff')(ff') = g(ff') = \beta(f) = \beta(f)(ff').$$

Donc $ff' = \beta(f)$ et $f' = f^{-1}$.

DÉFINITION 6. Une *sous-catégorie* $\mathcal{C}'$ d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-classe de $\mathcal{C}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Si $f \in \mathcal{C}'$ et $g \in \mathcal{C}'$ et si gf est défini, alors $gf \in \mathcal{C}'$.

Autrement dit, $\mathcal{C}'$ est *stable par rapport à la multiplication.*

2° Si $f \in \mathcal{C}'$, on a aussi $\alpha(f) \in \mathcal{C}'$ et $\beta(f) \in \mathcal{C}'$.

On dit que $\mathcal{C}'$ est une *sous-catégorie pleine* si elle contient tout élément f tel que $\alpha(f) \in \mathcal{C}'$ et $\beta(f) \in \mathcal{C}'$.

DÉFINITION 7. Un *sous-groupoïde* d'une catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ telle que si $f \in \mathcal{C}'$, alors f^{-1} est défini et appartient à $\mathcal{C}'$.

Une sous-classe $\mathcal{C}'$ d'un groupoïde $\mathcal{C}$ est un sous-groupoïde si elle est stable par rapport à la multiplication et si $f \in \mathcal{C}'$ entraîne $f^{-1} \in \mathcal{C}'$.

Une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde) d'une catégorie est une catégorie (resp. un groupoïde).

PROPOSITION 6. *La classe des éléments inversibles d'une catégorie* $\mathcal{C}$ *est un groupoïde.*

En effet, si g et f sont deux éléments inversibles de $\mathcal{C}$ et si gf est défini, alors gf est aussi inversible et admet pour inverse $f^{-1}g^{-1}$. En effet, $(f^{-1}g^{-1})(gf)$ est défini puisque $\alpha(g^{-1}) = \beta(g)$. On a:

$$(f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(g^{-1}g)f = f^{-1}f = \alpha(f) = \alpha(gf);$$

de même $(gf)(f^{-1}g^{-1}) = \beta(gf)$.

L'intersection d'une famille de sous-catégories (resp. sous-groupoïdes) de $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde). Si A est une partie de $\mathcal{C}$, l'intersection des sous-catégories (resp. sous-groupoïdes) contenant A est la sous-catégorie (resp. le sous-groupoïde) *engendré par* A.

DÉFINITION 8. Une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{C}$ est dite *saturée* si elle contient, avec une unité e, tout élément inversible f tel que $\alpha(f) = e$. Elle est dite *sursaturée* si elle contient avec e tout morphisme f tel que $\alpha(f) = e$ ou $\beta(f) = e$.

On voit que toute sous-catégorie sursaturée est pleine; une catégorie saturée n'est pas nécessairement pleine.

PROPOSITION 7. *Toute unité* e *d'une catégorie* $\mathcal{C}$ *est contenue dans une sous-catégorie sursaturée minimale, appelée composante connexe de* e. *Les composantes connexes de* $\mathcal{C}$ *forment une partition.*

En effet, l'intersection d'une famille de sous-catégories sursaturées de $\mathcal{C}$ contenant e est une sous-catégorie sursaturée de $\mathcal{C}$. La relation ρ: $e \rho e'$ si et seulement si e et e' appartiennent à la même composante connexe est une relation d'équivalence dans $\mathcal{C}$ et tout morphisme de $\mathcal{C}$ appar- 1
tient à une seule composante connexe.

2. Foncteurs.

DÉFINITION 1. Un *foncteur covariant* (resp. *contravariant*) d'une catégorie

1 $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$ est une application Φ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ vérifiant les conditions suivantes :

1° Si $f \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathcal{C}$ et si gf est défini, alors on a :

$$\Phi(gf) = \Phi(g)\Phi(f) \quad (\text{resp. } \Phi(gf) = \Phi(f)\Phi(g)).$$

2° Si e est une unité de $\mathcal{C}$, alors $\Phi(e)$ est une unité de $\mathcal{C}'$.

Si Φ est de plus une application biunivoque de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, alors Φ est ap-
2 pelé une *équivalence* de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$.

PROPOSITION 1. *Si Φ est un foncteur covariant (resp. contravariant) de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, on a*

$$\Phi(\alpha(f)) = \alpha(\Phi(f)) \quad et \quad \Phi(\beta(f)) = \beta(\Phi(f))$$
$$(resp. \ \Phi(\alpha(f)) = \beta(\Phi(f)) \quad et \quad \Phi(\beta(f)) = \alpha(\Phi(f))).$$

Si f est inversible, alors $\Phi(f)$ est inversible et $\Phi(f^{-1}) = (\Phi(f))^{-1}$.

Sauf indication contraire, un foncteur est un foncteur covariant.

PROPOSITION 2. *Soit Γ_0 une classe de catégories ; la classe des triplets $(\mathcal{C}', \Phi, \mathcal{C})$, où $\mathcal{C} \in \Gamma_0$, $\mathcal{C}' \in \Gamma_0$ et Φ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, est une catégorie Γ pour la multiplication :*

$$(\mathcal{C}'', \Phi', \mathcal{C}_1)(\mathcal{C}', \Phi, \mathcal{C}) = (\mathcal{C}'', \Phi'\Phi, \mathcal{C}) \quad si\ et\ seulement\ si \quad \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}'.$$

$\Phi'\Phi$ désigne le foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}''$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}$, on ait $\Phi'\Phi(f) = \Phi'(\Phi(f))$. Les unités de Γ sont les triplets $(\mathcal{C}, Id_{\mathcal{C}}, \mathcal{C})$, où $Id_{\mathcal{C}}$ est le foncteur identique de $\mathcal{C}$ et Γ_0 est une classe d'objets pour Γ, en associant $\mathcal{C}$ à $(\mathcal{C}, Id_{\mathcal{C}}, \mathcal{C})$. Les éléments inversibles de Γ sont les triplets $(\mathcal{C}', \Phi, \mathcal{C})$, où Φ est une équivalence ; l'inverse de ce triplet est $(\mathcal{C}, \Phi^{-1}, \mathcal{C}')$.

Si π est un foncteur de $\mathcal{C}'$ vers $\mathcal{C}$, un foncteur Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ sera appelé *inverse à gauche de π* si $(\mathcal{C}', \Phi, \mathcal{C})$ est inverse à gauche de $(\mathcal{C}, \pi, \mathcal{C}')$ (Définition 5-1) ; cette notion est indépendante de la classe Γ_0 choisie.

PROPOSITION 3. *Si Φ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ admettant un inverse à gauche π, alors $\Phi(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}'$.*

En effet, si $g \in \Phi(\mathcal{C})$ et $g' \in \Phi(\mathcal{C})$ avec $\alpha(g') = \beta(g)$, alors

$$g = \Phi(\pi(g)) \quad \text{et} \quad g'g = \Phi(\pi(g'))\Phi(\pi(g)) = \Phi(\pi(g'g)).$$

DÉFINITION 2. Soit π un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}'$ sur une catégorie $\mathcal{C}$; tout foncteur Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ inverse à droite de π est appelé *foncteur section relativement à* π.

En général l'image d'une catégorie $\mathcal{C}$ par un foncteur n'est pas une sous-catégorie de $\mathcal{C}'$; il en est ainsi par exemple si la restriction du foncteur Φ à $\mathcal{C}_0$ est biunivoque, ou si Φ vérifie la condition :

si $f \in \mathcal{C}$, $e \in \mathcal{C}_0$ tels que $\Phi(e) = \alpha(\Phi(f))$ (resp. $\Phi(e) = \beta(\Phi(f))$), il existe $f' \in \mathcal{C}$ tel que $\Phi(f) = \Phi(f')$ et $\alpha(f') = e$ (resp. $\beta(f') = e$).

La classe des éléments f de $\mathcal{C}$ tels que $\Phi(f) \in \mathcal{C}'_0$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$, qu'on appelle le *noyau de* Φ.

DÉFINITION 3. *Un foncteur généralisé covariant* (resp. *contravariant*) d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$ est une application Φ qui, à chaque $f \in \mathcal{C}$, fait correspondre une classe $\Phi(f)$ d'éléments de $\mathcal{C}'$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

1° Si $f \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathcal{C}$ et si gf est défini, alors on a :

$$\Phi(gf) = \Phi(g)\Phi(f) \quad (\text{resp. } \Phi(gf) = \Phi(f)\Phi(g)),$$

où $\Phi(g)\Phi(f)$ désigne la classe des produits

$$g'f', \quad \text{où} \quad g' \in \Phi(g) \quad \text{et} \quad f' \in \Phi(f).$$

2° Si e est une unité de $\mathcal{C}$, alors $\Phi(e)$ est une classe d'unités de $\mathcal{C}'$.

Nous désignerons par $\alpha(\Phi(f))$ la classe des unités à droite des éléments de $\Phi(f)$ et par $\beta(\Phi(f))$ la classe des unités à gauche de ces éléments.

PROPOSITION 4. *Soit Φ un foncteur généralisé covariant (resp. contravariant) de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{C}'$. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a :*

$$\alpha(\Phi(f)) \subset \Phi(\alpha(f)) \quad \textit{et} \quad \beta(\Phi(f)) \subset \Phi(\beta(f))$$

$$(\textit{resp.} \quad \beta(\Phi(f)) \subset \Phi(\alpha(f)) \quad \textit{et} \quad \alpha(\Phi(f)) \subset \Phi(\beta(f)) \;).$$

Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, on a :

$$\alpha(\Phi(f)) = \Phi(\alpha(f)) \quad \textit{et} \quad \beta(\Phi(f)) = \Phi(\beta(f))$$

$$(\textit{resp.}\ \alpha(\Phi(f)) = \Phi(\beta(f)) \ \textit{ et } \ \beta(\Phi(f)) = \Phi(\alpha(f))\ ).$$

En effet, supposons que Φ est un foncteur covariant. La relation $f\alpha(f) = f$ entraîne $\Phi(f)\Phi(\alpha(f)) = \Phi(f)$; donc pour tout $g \in \Phi(f)$, il existe $e \in \Phi(\alpha(f))$ et $g' \in \Phi(f)$ tels que $g'e = g$, donc

$$g' = g \quad \text{et} \quad \alpha(g) = e \in \Phi(\alpha(f)) .$$

Si f est inversible, $f^{-1}f = \alpha(f)$ entraîne $\Phi(f^{-1})\Phi(f) = \Phi(\alpha(f))$. Soit $e \in \Phi(\alpha(f))$; il existe $g \in \Phi(f)$ et $g' \in \Phi(f^{-1})$ tels que $g'g = e$; par suite $e = \alpha(g)$; c'est-à-dire $\Phi(\alpha(f)) \subset \alpha(\Phi(f))$. On démontre de même les autres relations.

REMARQUE. Soit Φ un foncteur généralisé covariant de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{C}'$. En général, $\Phi(\alpha(f)) \neq \alpha(\Phi(f))$. Si l'axiome 2 est remplacé par l'axiome :

$$\Phi(\alpha(f)) = \alpha(\Phi(f)) \quad \text{et} \quad \Phi(\beta(f)) = \beta(\Phi(f)),$$

alors Φ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{B}(\mathcal{C}')$ qui est définie de la manière suivante : Un élément F de $\mathcal{B}(\mathcal{C}')$) est une classe d'éléments de $\mathcal{C}'$; le produit GF est défini si et seulement si $\alpha(G) = \beta(F)$ et il est alors égal à la classe des éléments $g'f'$, où $g' \in G$ et $f' \in F$; les unités de $\mathcal{B}(\mathcal{C}')$ sont les classes d'unités de $\mathcal{C}'$.

PROPOSITION 5. *Si Φ est un foncteur généralisé de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{C}'$ et si f est un élément inversible de $\mathcal{C}$, alors $\Phi(f)$ est une classe d'éléments inversibles de $\mathcal{C}'$ et $\Phi(f^{-1})$ est la classe $(\Phi(f))^{-1}$ des inverses des éléments de $\Phi(f)$.*

En effet, supposons Φ covariant ; si $g \in \Phi(f)$, on a

$$\alpha(g) = e \in \Phi(\alpha(f)) \quad \text{et} \quad \beta(g) = e' \in \Phi(\beta(f))$$

d'après la Proposition 2. Comme $\beta(f) = \alpha(f^{-1})$, il existe $g' \in \Phi(f^{-1})$ tel que $\alpha(g') = e'$. Alors $g'g$ est défini. La relation $\Phi(f^{-1})\Phi(f) = \Phi(\alpha(f))$ entraîne $g'g = e$. Par suite $\alpha(g) = \beta(g') = e$ et le composé gg' est défini. La relation $\Phi(f)\Phi(f^{-1}) = \Phi(\beta(f))$ entraîne $gg' = e'$. Donc $g' = g^{-1}$.

DÉFINITION 4. Soit π un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}'$ sur une catégorie $\mathcal{C}$. Un foncteur généralisé Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ est appelé *foncteur généralisé* *section relativement à* π si, pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a $\Phi(f) \subset \overset{-1}{\pi}(f)$.

PROPOSITION 6. *Si* Φ *est un foncteur généralisé section relativement à* π, *alors* $\Phi(\mathcal{C})$ *est une sous-catégorie de* $\mathcal{C}'$.

En effet, soit $g \in \Phi(\mathcal{C})$ et $g' \in \Phi(\mathcal{C})$ tels que $\alpha(g') = \beta(g)$; alors

$$g'g \in \Phi(\pi(g'))\Phi(\pi(g)) = \Phi(\pi(g'g)).$$

Remarquons qu'en général si Φ est un foncteur de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, alors l'application Φ^{-1} n'est pas un foncteur généralisé.

DÉFINITION 5. Soit Φ et Φ' deux foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$. Une *transformation naturelle de* Φ *vers* Φ' est un triplet (Φ', τ, Φ), où τ est une fonction de $\mathcal{C}_0$ dans $\mathcal{C}'$ telle que, si $f \in \mathcal{C}$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, on ait :

$$\alpha(\tau(e)) = \Phi(e), \quad \beta(\tau(e)) = \Phi'(e), \quad \Phi'(f)\tau(e) = \tau(e')\Phi(f).$$

Nous désignons par $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ la classe des foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$, par $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ la classe des transformations naturelles entre foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$. Nous écrirons

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(\mathcal{C}, \mathcal{C}) = \mathcal{N}(\mathcal{C}).$$

$\mathcal{F}(\mathcal{C})$ est une catégorie pour la composition des foncteurs ; elle admet pour seule unité le foncteur identique $Id_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 7. $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ *est une catégorie pour la multiplication suivante, appelée longitudinale :*

$$(\Phi'', \tau', \Phi_1)(\Phi', \tau, \Phi) = (\Phi'', \tau'.\tau, \Phi) \text{ si et seulement si } \Phi_1 = \Phi',$$
$$\text{où } (\tau'.\tau)(e) = \tau'(e)\tau(e) \text{ pour tout } e \in \mathcal{C}_0.$$

L'unité à droite de (Φ', τ, Φ) est (Φ, Φ_0, Φ), où Φ_0 est la restriction de Φ à $\mathcal{C}_0$; l'unité à gauche est (Φ', Φ'_0, Φ'). L'associativité résulte de la formule

$$(\tau''.(\tau'.\tau))(e) = \tau''(e)(\tau'(e)\tau(e)) = (\tau''(e)\tau'(e))\tau(e) =$$
$$= (\tau''.\tau').\tau(e)$$

pour tout $e \in \mathcal{C}_0$. $\mathcal{F}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ est une classe d'objets en identifiant (Φ, Φ_0, Φ) à Φ. Les éléments inversibles sont les transformations naturelles (Φ', τ, Φ)

où τ est une application de $\mathcal{C}_0$ dans la classe des éléments inversibles de $\mathcal{C}'$; l'inverse de (Φ', τ, Φ) est (Φ, τ^{-1}, Φ'), où $\tau^{-1}(e) = (\tau(e))^{-1}$ pour tout $e \in \mathcal{C}_0$. Une transformation naturelle de ce type sera appelée *équivalence de* Φ *vers* Φ'.

1 DÉFINITION 6. Un *foncteur naturalisé* de la catégorie $\mathcal{C}$ est une transformation naturelle $(\Phi, \phi, Id_{\mathcal{C}})$ du foncteur identique de $\mathcal{C}$ vers le foncteur Φ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$; on le désignera par (Φ, ϕ).

PROPOSITION 8. *Soit* $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ *une famille de catégories. La classe somme* $\sum_{i \in I} \mathcal{C}_i$ *formée des couples* (i, f_i) *où* $i \in I$ *et* $f_i \in \mathcal{C}_i$, *munie de la multiplication définie par:*

$$(j, f_j')(i, f_i) = (i, f_j' f_i) \quad \text{si et seulement si } j = i \text{ et } \alpha(f_j') = \beta(f_i)$$

est une catégorie.

Les unités sont les couples (i, e_i), où e_i est une unité de $\mathcal{C}_i$; l'associativité résulte de l'associativité dans $\mathcal{C}_i$.

DÉFINITION 7. La catégorie $\sum_{i \in I} \mathcal{C}_i$ définie dans la Proposition 8 est appelée *catégorie somme des catégories* $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$.

PROPOSITION 9. *Soit* $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ *une famille de catégories. La classe produit formée des familles* (f_i) *telles que* $f_i \in \mathcal{C}_i$ *pour tout* $i \in I$ *munie de la multiplication*

$$(f_i')(f_i) = (f_i' f_i) \quad \text{si et seulement si } \alpha(f_i') = \beta(f_i) \text{ pour tout } i \in I$$

est une catégorie.

Les unités sont les familles (e_i), où e_i est une unité de la catégorie $\mathcal{C}_i$, pour tout $i \in I$.

DÉFINITION 8. La catégorie $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ définie dans la Proposition 9 est appelée *catégorie produit des catégories* $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$. *Si* $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}$ pour tout $i \in I$, la catégorie produit sera désignée par $\mathcal{C}^I$.

L'application canonique p_i de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ sur $\mathcal{C}_i$ qui associe à la famille (f_i) l'élément f_i de $\mathcal{C}_i$ est un foncteur de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ sur $\mathcal{C}_i$, appelé *foncteur projection.*

Soit $(\Phi_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs, où Φ_i est, pour tout $i \in I$, un foncteur de la catégorie $\mathcal{C}'$ vers la catégorie $\mathcal{C}_i$. L'application qui associe à $f \in \mathcal{C}'$ l'élément $(\Phi_i(f))$ de $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ est un foncteur de $\mathcal{C}'$ vers $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$, que nous noterons $\underset{i \in I}{\pi} \Phi_i$.

DÉFINITION 9. Soit $(\mathcal{C}'_i)_{i \in I}$ et $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ deux familles de catégories, et $(\Phi_i)_{i \in I}$ une famille de foncteurs, où Φ_i est un foncteur de $\mathcal{C}'_i$ vers $\mathcal{C}_i$. On appelle *foncteur produit* $\prod_{i \in I} \Phi_i$ le foncteur

$$\underset{i \in I}{\pi} \Phi_i p_i \quad \text{de} \quad \prod_{i \in I} \mathcal{C}'_i \quad \text{vers} \quad \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i .$$

DÉFINITION 10. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ compatible avec la multiplication. Une catégorie $\bar{\mathcal{C}}$ est appelée *catégorie quotient de* $\mathcal{C}$ *par* ρ lorsque $\bar{\mathcal{C}}$ est la classe des classes d'équivalence modulo ρ, que $\bar{g}\bar{f}$ est défini si et seulement si il existe $f' \in \bar{f}$ et $g' \in \bar{g}$ tels que $g'f'$ soit défini et que l'on a : $\bar{g}\bar{f} = \overline{(g'f')}$, $\bar{f}$ désignant la classe de f modulo ρ.

Pour qu'une relation d'équivalence ρ sur une catégorie $\mathcal{C}$ permette de déterminer une catégorie quotient de $\mathcal{C}$, il faut que $f \sim f'$ entraîne

$$\alpha(f) \sim \alpha(f'), \quad \beta(f) \sim \beta(f')$$

et que, si f et f' sont inversibles, alors : $f^{-1} \sim f'^{-1}$. Ces relations ne sont pas suffisantes en général. 1+

Si $\mathcal{C}/\rho$ est la catégorie quotient de $\mathcal{C}$ par ρ, alors l'application $h \mapsto h$ *modulo* ρ est un foncteur de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}/\rho$.

PROPOSITION 10. *Soit* Φ *un foncteur d'une catégorie* $\mathcal{C}$ *sur une catégorie* $\bar{\mathcal{C}}$. *Pour que* Φ *définisse* $\bar{\mathcal{C}}$ *comme catégorie quotient de* $\mathcal{C}$, *il faut et il suffit que, si* $\Phi(g)\Phi(f)$ *est défini, alors il existe* $f' \sim f$ *et* $g' \sim g$ *tels que* $g'f'$ *soit défini,* f *et* f' *étant équivalents si et seulement si on a* $\Phi(f) = \Phi(f')$.

PROPOSITION 11. *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie et* ρ *une relation d'équivalence sur* $\mathcal{C}$ *compatible avec la multiplication, telle que*

$$f \sim f' \ \textit{entraîne} \ \alpha(f) \sim \alpha(f') \ \textit{et} \ \beta(f) \sim \beta(f')$$

et que, pour tout $e \sim \alpha(f)$, *il existe* $g \sim f$ *avec* $\alpha(g) = e$. *Alors* $\mathcal{C}/\rho$ *est munie d'une structure de catégorie quotient.*

En effet, la classe $\tilde{f}$ de f a pour unité à droite $\widetilde{\alpha(f)}$ et pour unité à gauche $\widetilde{\beta(f)}$. Supposons que $\tilde{h}(\tilde{g}\tilde{f})$ et $(\tilde{h}\tilde{g})\tilde{f}$ soient définis ; alors : $\alpha(\tilde{g}) = \beta(\tilde{f})$ et $\alpha(\tilde{h}) = \beta(\tilde{g})$; soit $f \in \tilde{f}$; il existe

$$g \in \tilde{g} \ \text{ tel que } \ \alpha(g) = \beta(f)$$

et il existe $h \in \tilde{h}$ tel que $\alpha(h) = \beta(g)$; donc hgf est défini ; gf est un représentant de $\tilde{g}\tilde{f}$ et $h(gf)$ est un représentant de $\tilde{h}(\tilde{g}\tilde{f})$; d'autre part, hg est un représentant de $\tilde{h}\tilde{g}$ et $(hg)f = h(gf)$ est un représentant de $(\tilde{h}\tilde{g})\tilde{f}$. Il en résulte que l'on a : $(\tilde{h}\tilde{g})\tilde{f} = \tilde{h}(\tilde{g}\tilde{f})$.

3. Exemples de catégories.

1° Soit I une classe quelconque ; la classe $I \times I$ des couples (x', x), où $x \in I$ et $x' \in I$ est un groupoïde pour la multiplication

$$(x'', x_1)(x', x) \quad \text{si et seulement si} \quad x_1 = x'.$$

Les unités sont les couples (x, x) formant la diagonale de $I \times I$. L'inverse de (x', x) est (x, x'). La donnée d'une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $I \times I$ contenant la diagonale revient à la donnée d'un préordre sur I : la relation $(x', x) \in \mathcal{C}$ est équivalente à la relation $x' < x$, qui vérifie les axiomes :

1. $x'' < x'$ et $x' < x$ entraînent $x'' < x$.
2. $x < x$.

Si $\mathcal{C}$ n'admet pas d'éléments inversibles autres que les unités, la relation $x' < x$ correspondante est une relation d'ordre. Toute partie de $I \times I$, c'est-à-dire toute relation dans I, engendre un préordre dans I, qui en général, n'est pas une relation d'ordre.

2° *Catégorie des relations :* Une relation est un triplet (E', A, E), où E et E' sont des ensembles quelconques et A une partie de l'ensemble produit $E' \times E$. La classe de ces triplets est une catégorie $\mathcal{R}$ lorsqu'on la munit de la multiplication suivante :

$$(E'', A', E_1)(E', A, E) = (E'', A'A, E) \quad \text{si et seulement si} \quad E_1 = E',$$

où $A'A$ désigne l'ensemble des couples (x'', x) où $x'' \in E''$ et $x \in E$ tels qu'il existe $x' \in E'$ avec

$$(x', x) \in A \quad \text{et} \quad (x'', x') \in A'.$$

L'unité à droite de (E', A, E) est le triplet (E, Δ_E, E), où Δ_E est la diagonale de $E \times E$; l'unité à gauche de ce triplet est $(E', \Delta_{E'}, E')$. La classe des ensembles est une classe d'objets pour $\mathfrak{R}$, en associant à l'unité (E, Δ_E, E) l'ensemble E. Les éléments inversibles sont les triplets (E', A, E) tels qu'il existe une application biunivoque f de E sur E' et que A soit le sous-ensemble de $E' \times E$ formé par les couples $(f(x), x)$ où $x \in E$. Alors l'inverse de (E', A, E) est le triplet (E, A', E'), où A' est l'ensemble des couples $(x, f(x))$, $x \in E$.

3° *Catégorie des ensembles :* Soit $\mathfrak{E}_0$ la classe de tous les ensembles, $\bar{\mathfrak{E}}$ la classe de toutes les *surjections* d'un ensemble quelconque sur un ensemble quelconque ; le mot surjection désignera de façon générale une application d'une classe sur une classe. Si f est une surjection de l'ensemble E sur l'ensemble E' et g une surjection de l'ensemble E_1 sur l'ensemble E'', le composé gf est défini si et seulement si $E' = E_1$ et gf est alors la surjection de E sur E'' qui applique $x \in E$ sur $g(f(x)) \in E''$. Pour cette multiplication, $\bar{\mathfrak{E}}$ est une catégorie. Une unité est l'application identique d'un ensemble E. L'unité à droite de f est l'application identique de E, que nous noterons Id_E, son unité à gauche est $Id_{E'}$. La classe $\mathfrak{E}_0$ est une classe d'objets pour $\bar{\mathfrak{E}}$. Les éléments inversibles sont les *bijections* f, c'est-à-dire les applications biunivoques de E sur E'. La classe de toutes les bijections est un groupoïde $\mathfrak{E}$, admettant encore $\mathfrak{E}_0$ comme classe des objets.

Soit $\tilde{\mathfrak{E}}$ la classe de toutes les applications d'un ensemble quelconque dans un ensemble quelconque. On peut représenter une telle application par un triplet (E', f, E), où E et E' sont deux ensembles et f une surjection de E sur une partie $f(E)$ de E'. La classe $\tilde{\mathfrak{E}}$ est une catégorie lorsqu'on la munit de la multiplication :

$$(E'', g, E_1)(E', f, E) = (E'', gf, E) \quad \text{si et seulement si} \quad E_1 = E'.$$

L'unité à droite de (E', f, E) est (E, Id_E, E) ; son unité à gauche est $(E', Id_{E'}, E')$. L'application $f \mapsto (E', f, E)$ où $E' = f(E)$ est un foncteur covariant de $\bar{\mathfrak{S}}$ vers $\tilde{\mathfrak{S}}$ qui permet d'identifier $\bar{\mathfrak{S}}$ à une sous-catégorie de $\tilde{\mathfrak{S}}$. Le groupoïde des éléments inversibles de $\tilde{\mathfrak{S}}$ est encore $\mathfrak{S}$.

On appelle *injection de* E *dans* E' un triplet $(E', f, E) \in \tilde{\mathfrak{S}}$ où f est une bijection de E sur $f(E)$. La classe $\tilde{\mathfrak{S}}'$ de toutes les injections est une sous-catégorie de $\tilde{\mathfrak{S}}$ dont le groupoïde des éléments inversibles est encore $\mathfrak{S}$.

Soit $\hat{\mathfrak{S}}$ la classe de tous les triplets (E', f, E), où E et E' sont des ensembles, f une surjection d'une partie $\alpha(f)$ de E sur une partie $\beta(f)$ de E'. La classe $\hat{\mathfrak{S}}$ est une catégorie pour la multiplication

$$(E'', g, E_1)(E', f, E) = (E'', gf, E) \text{ si et seulement si } E_1 = E' \text{ et } \alpha(g) = \beta(f).$$

L'unité à droite de (E', f, E) est $(E, \alpha(f), E)$; son unité à gauche est $(E', \beta(f), E')$. Les éléments inversibles sont les triplets (E', f, E) tels que f soit une bijection. $\tilde{\mathfrak{S}}$ est la sous-catégorie de $\hat{\mathfrak{S}}$ formée par les triplets (E', f, E) tels que $\alpha(f) = E$.

La classe $\hat{\mathfrak{S}}$ devient encore une catégorie lorsqu'on la munit de la multiplication plus générale suivante :

$$(E'', g, E_1)(E', f, E) = (E'', gf, E) \text{ si et seulement si } E_1 = E',$$

où gf est la surjection, que nous appellerons *pseudoproduit*, qui applique x sur $g(f(x))$, pour tout x appartenant à la source U de f, tel que $f(x)$ appartienne à la source U_1 de g. Si $U_1 \cap U'$, où U' est le but de f, est vide, la surjection gf est la surjection vide que nous supposons appartenir à $\hat{\mathfrak{S}}$, que nous désignons par $\emptyset$ et que nous identifions avec l'ensemble vide. L'unité à droite de (E', f, E) est alors (E, Id_E, E) ; son unité à gauche est $(E', Id_{E'}, E')$. La classe $\mathfrak{S}_0$ est encore une classe d'objets pour $\hat{\mathfrak{S}}$, et $\tilde{\mathfrak{S}}$ s'identifie à la sous-catégorie de $\hat{\mathfrak{S}}$ formée des triplets (E', f, E) où $\alpha(f) = E$. Le groupoïde des éléments inversibles de $\hat{\mathfrak{S}}$ est encore $\mathfrak{S}$. La catégorie $\hat{\mathfrak{S}}$ est une sous-catégorie de la catégorie $\mathfrak{R}$ des relations, si on identifie le triplet (E', f, E) avec la relation (E', A, E), où A est le sous-ensemble de $E' \times E$ formé des couples $(f(x), x)$.

4° *Foncteurs* $\mathcal{P}$ *et* Π^I. Désignons par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de l'ensemble E. Pour toute application f de E dans un ensemble E' on note $\mathcal{P}(f)$ l'extension de f à $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire l'application qui à un $U \in \mathcal{P}(E)$ fait correspondre $f(U) \in \mathcal{P}(E')$. On vérifie que l'application

$$(E', f, E) \mapsto (\mathcal{P}(E'), \mathcal{P}(f), \mathcal{P}(E))$$

est un foncteur covariant $\mathcal{P}$ de $\tilde{\mathfrak{E}}$ vers $\tilde{\mathfrak{E}}$. Ce foncteur est naturalisé (Déf. 6-2) par la fonction γ telle que $\gamma(E)$ soit l'application $x \mapsto \{x\}$ de E dans $\mathcal{P}(E)$, où $\{x\}$ est la partie de E dont x est le seul élément.

Par récurrence, on définit les puissances du foncteur naturalisé $(\mathcal{P}, \gamma)$: pour tout entier naturel n, le foncteur $\mathcal{P}^n$ est le foncteur tel que :

$$\mathcal{P}^0 = Id, \quad \mathcal{P}^n = \mathcal{P}^{n-1}\mathcal{P},$$

où $\mathcal{P}^{n-1}\mathcal{P}$ désigne le produit dans la catégorie $\mathfrak{F}(\tilde{\mathfrak{E}})$. Le foncteur naturalisé $(\mathcal{P}, \gamma)^n$ est défini par les relations :

$$(\mathcal{P}, \gamma)^0 = (Id, Id_0),$$
$$(\mathcal{P}, \gamma)^n = (\mathcal{P}^n, \gamma_n) \text{ où } \gamma_n(E) = \gamma_{n-1}(\mathcal{P}(E))\gamma(E).$$

Si f est une application de l'ensemble E dans l'ensemble E' soit $f^{-1}(U')$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \in U'$, où U' est une partie de E'. L'application

$$(E', f, E) \mapsto (\mathcal{P}(E), f^{-1}, \mathcal{P}(E'))$$

est un foncteur contravariant $\mathcal{P}^{-1}$ de $\tilde{\mathfrak{E}}$ vers $\tilde{\mathfrak{E}}$. Si $f \in \mathfrak{E}$, alors

$$\mathcal{P}^{-1}(f) \in \mathfrak{E} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^{-1}(f) = (\mathcal{P}(f))^{-1}.$$

Soit I un ensemble et $\tilde{\mathfrak{E}}^I$ la catégorie produit (Déf. I-2). Cette catégorie peut être identifiée à une sous-catégorie de $\tilde{\mathfrak{E}}$ par le foncteur π^I de $\tilde{\mathfrak{E}}^I$ vers $\tilde{\mathfrak{E}}$ qui associe à la famille $(E'_i, f_i, E_i)_i \in \tilde{\mathfrak{E}}^I$ le triplet

$$(\prod_{i \in I} E'_i, \prod_{i \in I} f_i, \prod_{i \in I} E_i) \in \tilde{\mathfrak{E}},$$

où $\prod_{i \in I} f_i$ est l'application de $\prod_{i \in I} E_i$ dans $\prod_{i \in I} E'_i$ qui associe à $(x_i)_{i \in I}$ la famille $(f_i(x_i))$ pour tout $x_i \in E_i$. Si $\mathcal{C}_i$ est, pour tout $i \in I$, une sous-catégorie de $\tilde{\mathfrak{S}}$, alors le produit $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ est une sous-catégorie de $\tilde{\mathfrak{S}}^I$. La restriction du foncteur π^I à cette sous-catégorie permet d'identifier $\prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ à une sous-catégorie de $\tilde{\mathfrak{S}}$.

Soit Π^I le foncteur composé $\pi^I \cdot \pi_{i \in I} Id_{\tilde{\mathfrak{S}}}$, c'est-à-dire le foncteur qui associe à l'application f de E dans E' l'application

$$(x_i)_{i \in I} \mapsto (f(x_i))_{i \in I} \text{ de } E^I \text{ dans } E'^I.$$

Ce foncteur est naturalisé par la fonction δ^I telle que $\delta^I(E)$ soit l'application diagonale :

$$x \mapsto (x_i)_{i \in I}, \text{ où } x \in E \text{ et } x_i = x \text{ pour tout } i \in I.$$

1 Nous verrons plus loin comment on peut engendrer une large classe de foncteurs de $\tilde{\mathfrak{S}}$ vers $\tilde{\mathfrak{S}}$ à l'aide des foncteurs naturalisés $(\mathcal{P}, \gamma)$ et (Π^I, δ^I),

5° Soit $\mathcal{S}_0$ une classe quelconque. La classe des applications d'une
2 sous-classe de $\mathcal{S}_0$ dans une sous-classe de $\mathcal{S}_0$ est une catégorie $\mathcal{A}(\mathcal{S}_0)$, lorsqu'on la munit de la multiplication suivante :

$(g, f) \mapsto gf$ si et seulement si f est une application de S dans S' et g une application de S' dans S'', et où gf est l'application $x \mapsto g(f(x))$ de S dans S''.

La classe $\mathcal{P}(\mathcal{S}_0)$ est une classe d'objets pour $\mathcal{A}(\mathcal{S}_0)$ lorsqu'on associe à la sous-classe S de $\mathcal{S}_0$ l'application identique Id_S de cette sous-classe.

3 *II. ESPÈCES DE STRUCTURES*

1. Catégories d'opérateurs.

DÉFINITION 1. Une *catégorie d'opérateurs à gauche sur une classe* $\mathcal{S}_0$ est une catégorie $\mathcal{C}$ telle qu'on ait défini une multiplication $(f, z) \mapsto fz$ pour certains couples (f, z), où $f \in \mathcal{C}$, $z \in \mathcal{S}_0$ et $fz \in \mathcal{S}_0$, cette multiplication vérifiant les axiomes suivants :

1° Associativité : Si $g(fz)$ ou $(gf)z$ est défini, alors ces deux éléments sont définis et on a : $g(fz) = (gf)z$.

2° Si gf et fz sont définis, alors $g(fz)$ est défini.

3° Axiome des unités : Si e est une unité de $\mathcal{C}$ et si ez est défini, alors on a : $ez = z$.

4° Pour tout $f \in \mathcal{C}$, il existe toujours au moins un $z \in \mathcal{S}_0$ tel que fz soit défini. De même pour tout $z \in \mathcal{S}_0$, il existe au moins un $f \in \mathcal{C}$ tel que fz soit défini.

On définit de même la notion de catégorie $\mathcal{C}$ opérant à droite sur la classe $\mathcal{S}_0$ en remplaçant dans l'axiome 1 l'égalité $g(fz) = (gf)z$ par l'égalité : $g(fz) = (fg)z$. Il est préférable dans ce cas d'écrire le produit associé au couple (f, z) sous la forme zf de sorte que l'égalité s'écrive $(zf)g = z(fg)$.

Dans la suite, une catégorie d'opérateurs sera une catégorie d'opérateurs à gauche sauf indication contraire.

REMARQUE. Si seulement les axiomes 1, 2, 3 sont satisfaits, alors soit $\mathcal{C}'$ la classe des éléments $f \in \mathcal{C}$ tels que fz soit défini pour au moins un $z \in \mathcal{S}_0$ et soit $\mathcal{S}'_0$ la classe des éléments z pour lesquels fz est défini pour au moins un $f \in \mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}'$ est une catégorie d'opérateurs à gauche sur $\mathcal{S}'_0$.

PROPOSITION 1. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_0$, alors à tout $z \in \mathcal{S}_0$ correspond exactement une unité e telle que ez soit défini; nous désignons cette unité par $p_0(z)$. Pour que fz soit défini, il faut et il suffit que l'on ait : $\alpha(f) = p_0(z)$; alors $\beta(f) = p_0(fz)$.*

En effet, pour $z \in \mathcal{S}_0$, il existe $f \in \mathcal{C}$ tel que fz soit défini ; alors $fz = (f\alpha(f))z$ et $\alpha(f)z$ est défini. D'autre part, soit e et e' des unités telles que ez et $e'z$ soient définis ; alors

$$ez = e(e'z) = (ee')z,$$

donc ee' est défini et par suite $ee' = e = e'$. En désignant par $p_0(z)$ l'unité composable avec z, on définit une projection p_0 de $\mathcal{S}_0$ sur $\mathcal{C}_0$. Si fz est défini, on a $\alpha(f) = p_0(z)$; réciproquement, si $\alpha(f) = p_0(z)$, alors $f\alpha(f)$ et $\alpha(f)z$ étant définis, $(f\alpha(f))z$ est défini.

REMARQUE. Si $\mathcal{C}$ opère à droite sur $\mathcal{S}_0$, alors zf est défini si et seulement si $p_0(z) = \beta(f)$; on a alors $p_0(fz) = \alpha(f)$.

PROPOSITION 2. *Si un groupoïde* Γ *opère à gauche sur une classe* $\mathcal{S}_0$, *le composé de* (f, S) *étant* fS, *alors* Γ *opère aussi à droite sur* $\mathcal{S}_0$, *le composé de* (f, S) *étant défini si et seulement si* $p_0(S) = \beta(f)$ *et étant égal à* $Sf = f^{-1}S$, *où* p_0 *est la projection de* $\mathcal{S}_0$ *vers* Γ.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_0$, nous désignerons par $\Phi(f)$ l'application

$$fz \mapsto fz \quad \text{de } p_0^{-1}(\alpha(f)) \text{ dans } p_0^{-1}(\beta(f)).$$

L'application $f \mapsto \Phi(f)$ est un foncteur Φ de $\mathcal{C}$ sur une sous-catégorie de $\mathcal{A}(\mathcal{S}_0)$ (Exemple 5-3-I). Inversement, soit Φ un foncteur d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{A}(\mathcal{S}_0)$, où $\mathcal{S}_0$ est une classe quelconque, vérifiant la condition :

(a) Soit $p_0^{-1}(e)$ la classe dont l'application identique est $\Phi(e)$, où $e \in \mathcal{C}_0$; alors

1 $$p_0^{-1}(e) \cap p_0^{-1}(e') = \emptyset \quad \text{si et seulement si} \quad e \neq e'.$$

Alors $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_0$, le composé de $f \in \mathcal{C}$ avec $S \in \mathcal{S}_0$ étant défini si et seulement si $z \in p_0^{-1}(\alpha(f))$ et étant l'image $\Phi(f)(z)$ de z par $\Phi(f)$. On en déduit la:

PROPOSITION 3. *Considérons une catégorie* $\mathcal{C}$ *et une classe* $\mathcal{S}_0$. *La donnée d'une loi de composition définissant* $\mathcal{C}$ *comme catégorie d'opérateurs sur* $\mathcal{S}_0$ *équivaut à la donnée d'un foncteur* Φ *de* $\mathcal{C}$ *vers la catégorie* $\mathcal{A}(\mathcal{S}_0)$ *vérifiant la condition (a).*

La catégorie $\Phi(\mathcal{C})$ opére également sur $\mathcal{S}_0$ le composé de z avec $\Phi(f)$ étant fz ; la catégorie $\Phi(\mathcal{C})$ est la catégorie quotient de $\mathcal{C}$ par le
2 ¶ noyau (n° 2-I) du foncteur Φ ; ce noyau est une réunion de monoïdes.

REMARQUES. Soit Φ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{A}(\mathcal{S}_0)$ ne vérifiant plus la condition (a); soit $\mathcal{S}'_0$ la classe des couples (e, z) tels que $z \in p_0^{-1}(e)$. Si $\alpha(f) = e$, posons :

$$f(e, z) = (\beta(f), \Phi(f)z) ;$$

pour cette loi de composition, $\mathcal{C}$ devient une catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}'_0$.

2° Soit $\hat{\mathcal{C}}$ une catégorie et ψ un foncteur de $\hat{\mathcal{C}}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$

qui opère sur une classe $\mathcal{S}_0$. Alors $\hat{\mathcal{C}}$ est une catégorie d'opérateurs sur
$\mathcal{S}_0$ seulement si ψ applique les unités de $\hat{\mathcal{C}}$ biunivoquement sur les uni- 1
tés de $\mathcal{C}$.

THÉORÈME 1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie d'opérateurs sur une classe $\mathcal{S}_0$; alors la classe $\mathcal{S}$ des couples (f, z), où $f \in \mathcal{C}$ et $z \in \mathcal{S}_0$ tels que fz soit défini est une catégorie pour la multiplication:*

$$(f', z')(f, z) = (f'f, z) \quad \textit{si et seulement si} \quad z' = fz.$$

L'application $(f, z) \mapsto f$ est un foncteur p de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{C}$ appelé foncteur projection. Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, alors $\mathcal{S}$ est un groupoïde.

Les unités de $\mathcal{S}$ sont les couples (e, z) composables, où $e \in \mathcal{C}_0$; la classe $\mathcal{S}_0$ est une classe d'objets pour $\mathcal{S}$ en associant (e, z) à z. Si f est inversible, alors $f^{-1}\beta(f)$ est défini; il en résulte que le couple (f^{-1}, fz) est composable et l'on a:

$$(f, z)(f^{-1}, fz) = (\beta(f), fz) \doteq fz, \quad (f^{-1}, fz)(f, z) = (\alpha(f), z) \doteq z,$$

ce qui prouve que (f^{-1}, fz) est l'inverse de (f, z).

DÉFINITION 2. La catégorie $\mathcal{S}$ définie dans le Théorème 1 est appelée *l'extension de la catégorie d'opérateurs* $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, on appellera aussi $\mathcal{S}$ *le groupoïde des isomorphismes relatif à* $\mathcal{S}_0$.

Si $\mathcal{C}$ opère sur $\mathcal{S}_0$, alors l'application qui associe à $f \in \mathcal{C}$ la classe des couples (f, S) tels que fS soit défini est un foncteur généralisé $\bar{\Phi}$ de $\mathcal{C}$ vers l'extension $\mathcal{S}$ de $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 4. *Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}$ deux catégories, p un foncteur de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}$ satisfaisant aux conditions suivantes:*

1° Soit $p^{-1}(f)$ la classe des éléments $g \in \mathcal{S}$ tels que $p(g) = f$; alors deux éléments de $p^{-1}(f)$ ayant même unité à droite sont identiques.

2° $p^{-1}(\alpha(f)) = \alpha(p^{-1}(f))$ = classe des éléments $\alpha(g)$, $g \in p^{-1}(f)$. Alors $\mathcal{C}$ opère sur la classe $\mathcal{S}_0$ des unités de $\mathcal{S}$.

Le composé fz est défini si et seulement si $\alpha(f) = p(z)$, et on a $fz = \beta(g)$, où g est l'élément unique tel que $p(g) = f$ et $z = \alpha(g)$. En identifiant g au couple (f, z), la catégorie $\mathcal{S}$ s'identifie à l'extension de

$\mathcal{C}$ considérée comme catégorie d'opérateurs sur $\mathcal{S}_0$.

EXEMPLE 1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie d'opérateurs sur la classe $\mathcal{C}_0$ des unités : le composé $f.e$ est défini si et seulement si $e = \alpha(f)$, et $f.e = \beta(f)$. (Il convient de distinguer ici $f.e$ et $fe = f$.) L'extension de la catégorie d'opérateurs $\mathcal{C}$ s'identifie à $\mathcal{C}$, en identifiant (f, e) avec f.

2. Espèces de structures sur une catégorie.

DÉFINITION 1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie opérant sur une classe $\mathcal{S}_0$; on dira que $\mathcal{S}_0$ est une *espèce de structures sur* $\mathcal{C}$; si $\mathcal{S}_0$ est une espèce de structures sur une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}$, nous dirons que $\mathcal{S}_0$ est une *espèce de structures au-dessus de* $\mathcal{C}$.

Soit p le foncteur projection de l'extension $\mathcal{S}$ de la catégorie d'opérateurs $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ (Théorème 1-1); *l'espèce de structures sera désignée*
1 *par* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, *ou par* $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ *dans le cas où* $p(\mathcal{S}) = \mathcal{C}$. Le triplet $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ sera aussi appelé espèce de structures. Un élément S de $\mathcal{S}_0$ est appelé une *structure sur l'unité* $p(S)$ de $\mathcal{C}$ ou sur l'objet correspondant. Un couple (f, S) où $S \in \mathcal{S}_0$ et $f \in \mathcal{C}$ tel que fS soit défini est appelé un *hypermorphisme de* S *sur* fS et, si f est inversible, un *isomorphisme de* S *sur* fS. La catégorie $\mathcal{S}$ est appelée *catégorie des hypermorphismes* correpondant à $\mathcal{S}_0$. Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, alors $\mathcal{S}$ est le *groupoïde des isomorphismes* correspondant à $\mathcal{S}_0$. Un isomorphisme de S sur S est un *automorphisme de* S ; la classe des automorphismes de S forme un sous-groupe de $\mathcal{S}$, appelé groupe des automorphismes de S ; il est appliqué par p biunivoquement sur un sous-groupe de $\mathcal{C}$, encore appelé groupe des automorphismes de S. La classe des hypermorphismes de S sur S se projette sur une sous-catégorie de $\mathcal{C}$.

EXEMPLES. 1° Une topologie sur un ensemble E est définie par un élément de $\mathcal{P}^2(E)$ (Exemple 4-3-I) satisfaisant au système d'axiomes des ouverts. Soit f une bijection de E sur un ensemble E'. L'application $\mathcal{P}(f)$ applique $\mathcal{T}_0(E)$, ensemble des topologies sur E, sur l'ensemble $\mathcal{T}_0(E')$ des topologies sur E', car on a les égalités :

$$\mathcal{P}(f)(\cup A_i) = \cup\,\mathcal{P}(f)(A_i),\quad \mathcal{P}(f)(\cap A_i) = \cap\,\mathcal{P}(f)(A_i).$$

Soit $\Phi(f)$ la restriction de $\mathcal{P}^2(f)$ à l'ensemble $\mathcal{T}_0(E)$ et désignons par fT la topologie transformée de la topologie T de $\mathcal{T}_0(E)$ par $\Phi(f)$. Soit $\mathcal{T}_0$ la classe de toutes les topologies sur un ensemble quelconque. La loi de composition $(f, T) \mapsto fT$ définit $\mathcal{E}$ (Exemple 3-3-I) comme un groupoïde d'opérateurs sur $\mathcal{T}_0$; Φ est un foncteur de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$; $\mathcal{T}_0$ est l'espèce des structures topologiques ; c'est une espèce de structures sur $\mathcal{E}$. Un couple (f, T) composable est un homéomorphisme de T sur fT. La classe de ces couples forme le groupoïde de tous les homéomorphismes. $\tilde{\mathcal{E}}$ opère à droite sur la classe $\mathcal{T}_0$ des topologies de la façon suivante : soit $(E', f, E) \in \tilde{\mathcal{E}}$ et T' une topologie au-dessus de E' ; alors $T'f$ est la topologie T sur E image réciproque de T' par f. Le couple (T', f) est alors un hypermorphisme de T' sur T ; la catégorie de ces hypermorphismes sera notée $\mathcal{T}'$.

2° On définit de manière analogue l'espèce des structures algébriques définies par une loi de composition interne. Plus particulièrement, on définit l'espèce des structures de groupes. Ce sont également des espèces de structures sur $\mathcal{E}$.

3° Soit $\mathcal{S}_0$ une espèce de structures sur une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\tilde{\mathcal{E}}$ (Exemple 3-3-I). Alors chaque $S \in \mathcal{S}_0$ est une structure sur un ensemble $p(S) = E$, correspondant à une unité e de $\mathcal{C}$ telle que eS soit défini. Le couple (E, S) ou $E \times \{S\}$ est un *ensemble structuré*, ou un espace de l'espèce $\mathcal{S}_0$. L'hypermorphisme (f, S) correspond à l'application :

$$(x, S) \mapsto (f(x), fS) \text{ de l'espace } E \times \{S\} \text{ sur l'espace } E' \times \{S'\}$$
$$\text{où } S' = fS \text{ et } E' = p(S').$$

La catégorie $\mathcal{S}$ des hypermorphismes est isomorphe à la catégorie $\hat{\mathcal{S}}$ de ces applications ; $\hat{\mathcal{S}}$ est une sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{E}}$; si $\mathcal{C}$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{E}$, alors $\hat{\mathcal{S}}$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{E}$.

4° Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, Γ le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{C}$. La catégorie $\mathcal{C}$ peut être considérée comme une espèce de structures au-dessus du groupoïde produit $\Gamma \times \Gamma$: le composé de $f \in \mathcal{C}$ avec le couple $(\phi, \phi') \in \Gamma \times \Gamma$ étant défini si et seulement si

$$\alpha(f) = \alpha(\phi) \quad \text{et} \quad \beta(f) = \alpha(\phi')$$

et $(\phi, \phi')f$ étant alors $\phi' f \phi^{-1}$. La classe $\mathcal{C}_0$ est aussi une espèce de structures sur $\mathcal{C}$ ou Γ (Exemple 1-1); on désignera cette espèce par $[\mathcal{C}_0, \mathcal{C}]$.

DÉFINITION 2. Soit $\mathcal{S}_0$ une espèce de structures sur une catégorie $\mathcal{C}$; une espèce de structures $\mathcal{S}'_0$ sur une sous-catégorie $\mathcal{C}'$ est une *sous-espèce* de $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ si $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}'_0$ une sous-classe de $\mathcal{S}_0$ sur laquelle $\mathcal{C}'$ opère par restriction de la loi de composition. Si de plus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des sous-catégories d'une catégorie $\tilde{\mathcal{C}}$, alors on dit que $(\tilde{\mathcal{C}}, p', \mathcal{S}')$ est une sous-espèce de structures de $(\tilde{\mathcal{C}}, p, \mathcal{S})$. La sous-espèce $(\tilde{\mathcal{C}}, p', \mathcal{S}')$ est *pleine* si $\mathcal{S}'_0$ contient tout $S \in \mathcal{S}_0$ tel que $p(S) \in p'(\mathcal{S}')$.

PROPOSITION 1. *Soit $(\mathcal{C}, p', \mathcal{S}')$ une sous-espèce de structures de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$. Alors $\mathcal{S}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{S}$, $p'(\mathcal{S}')$ une sous-catégorie de $p(\mathcal{S})$ et p' la restriction de p à $\mathcal{S}'$.*

En général une sous-catégorie de $\mathcal{S}_0$ n'est pas la catégorie des hypermorphismes correspondant à une sous-espèce de $\mathcal{S}_0$.

Soit $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ une espèce de structures. La Définition 2 s'applique en particulier dans le cas où la sous-classe $\mathcal{S}'_0$ est identique à $\mathcal{S}_0$, mais où l'on considère seulement l'action de la sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$. On dira alors que l'espèce de structures $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ est *plus souple* que l'espèce $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ ou que l'espèce $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ est *plus rigide* que l'espèce $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$. Si l'espèce $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ est plus rigide que l'espèce $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$, alors la catégorie $\mathcal{S}'$ est une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{S}$. L'espèce la plus rigide déduite de $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ est l'espèce $[\mathcal{C}_0, p_0, \mathcal{S}_0]$.

PROPOSITION 2. *Si $\mathcal{S}_0$ est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$, alors dans $\mathcal{S}_0$ la relation :*

$$S' < S \quad \textit{si, et seulement si, il existe } f \in \mathcal{C} \textit{ tel que } S = fS'$$

est une relation de préordre. Si $\mathcal{C}$ est un groupoïde, cette relation est une relation d'équivalence.

PROPOSITION 3. *Si* $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ *est une espèce de structures, la composante connexe (Proposition 7-1-1) de* $S \in \mathcal{S}_0$ *dans la catégorie* $\mathcal{S}$ *est une catégorie d'hypermorphismes sur la composante connexe de* $p(\mathcal{S})$ *dans* $\mathcal{C}$.

Ainsi toute sous-catégorie $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ peut être étendue en une catégorie d'hypermorphismes relative à une sous-espèce de structures de $\mathcal{S}_0$ en prenant la réunion des composantes connexes de ses unités.

DÉFINITION 3. Si $\mathcal{S}_0$ est une espèce de structures au-dessus d'un groupoïde $\mathcal{C}$, la classe des éléments fS de $\mathcal{S}_0$, où $f \in \mathcal{C}$ et $S \in \mathcal{S}_0$, s'appelle la
classe d'intransitivité (ou d'isomorphie) de S. Une sous-classe $\mathcal{S}'_0$ de 1
$\mathcal{S}_0$ est dite *saturée au-dessus de* $\mathcal{C}$ si elle est réunion des classes d'intransitivité de ses éléments.

En particulier, une sous-catégorie $\mathcal{C}'$ de la catégorie $\mathcal{C}$ est saturée (Définition 7-1-I) si et seulement si elle est saturée lorsqu'on la considère comme espèce de structures au-dessus de $\Gamma \times \Gamma$ (Exemple 4); la classe des unités d'une sous-catégorie saturée $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ est saturée au-dessus de Γ (Exemple 4).

PROPOSITION 4. *Si* $\mathcal{S}'$ *est un sous-groupoïde plein du groupoïde* $\mathcal{S}$ *des isomorphismes d'une espèce de structures* $\mathcal{S}_0$ *au-dessus d'un groupoïde* $\mathcal{S}$ *et si* $\mathcal{S}'_0$ *est saturée, alors* $\mathcal{S}'_0$ *est une sous-espèce de structures de* $\mathcal{S}_c$.

Le groupoïde $\mathcal{C}'$ qui opère alors sur $\mathcal{S}'_0$ est le sous-groupoïde de $\mathcal{C}$ projection de $\mathcal{S}'$. Remarquons que tout sous-groupoïde du groupoïde $\mathcal{S}$ peut être étendu par saturation en un groupoïde d'isomorphismes pour une sous-espèce de l'espèce $\mathcal{S}_0$.

PROPOSITION 5. *Si* $\mathcal{S}'_0$ *est une sous-espèce de structures de* $\mathcal{S}_0$ *sur un sous-groupoïde plein saturé du groupoïde* $\mathcal{C}$, *alors* $\mathcal{S}'_0$ *est une sous-espèce de structures saturée.*

EXEMPLE. 5° Dans l'espèce des topologies (Exemple 1), on peut considérer les sous-espèces suivantes: topologies métrisables, topologies compactes, etc...

3. Applications covariantes.

DÉFINITION 1. Soit $\mathcal{S}_0$ une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$, et $\mathcal{S}'_0$ une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}'$. Une *application covariante* de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ dans $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ est un couple (ϕ_0, ψ) où ψ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ et ϕ_0 une application de $\mathcal{S}_0$ dans $\mathcal{S}'_0$ tel que l'on ait:

$$\phi_0(fS) = \psi(f)\,\phi_0(S) \quad \text{si } f \in \mathcal{C},\ S \in \mathcal{S}_0 \text{ et } fS \text{ est défini.}$$

Si ϕ_0 est une application biunivoque de $\mathcal{S}_0$ sur $\mathcal{S}'_0$ et ψ un foncteur biunivoque de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{C}'$, alors (ϕ_0, ψ) sera appelé une *équivalence de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ *sur* $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$.

PROPOSITION 1. *Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ et $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ deux espèces de structures et ψ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Les applications covariantes (ϕ_0, ψ) de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ dans $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ correspondent biunivoquement aux foncteurs ϕ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ tels que $p'\phi = \psi p$; à une équivalence correspond un foncteur biunivoque.*

En effet, si (ϕ_0, ψ) est une application covariante et si fS est défini, alors $\psi(f)\phi_0(S)$ est défini et par suite :

$$p'(\phi_0(S)) = \alpha(\psi(f)) = \psi(\alpha(f)) = \psi(p(S)).$$

L'application $(f, S) \mapsto (\psi(f), \phi_0(S))$ est un foncteur ϕ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ et

$$p'\phi(f, S) = \psi(f) = \psi(p(f, S)).$$

Réciproquement, soit ϕ_0 la restriction à $\mathcal{S}_0$ d'un foncteur ϕ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ vérifiant la condition $p'\phi = \psi p$; si fS est défini, on a $p(S) = \alpha(f)$, donc

$$\alpha(\psi(f)) = \psi(\alpha(f)) = \psi\, p(S) = p'\phi_0(S)$$

et $\psi(f)\phi_0(S)$ est défini; $(\psi(f), \phi_0(S))$ et $\phi(f, S)$ ont même unité à droite $\phi_0(S)$ et

$$p'(\psi(f), \phi_0(S)) = \psi(f) = p'(\phi(f, S)) ;$$

donc ces éléments sont égaux et $\psi(f)\,\phi_0(S) = \beta\phi(f, S) = \phi_0(fS)$.

DÉFINITION 2. Soit p un foncteur d'une catégorie $\mathcal{S}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ et p' un foncteur d'une catégorie $\mathcal{S}'$ vers une catégorie $\mathcal{C}'$, ψ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Un foncteur ϕ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ tel que $p'\phi = \psi p$ est appelé un *relèvement de* ψ *relativement à* (p', p).

PROPOSITION 2. *Etant donné deux catégories* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *et deux classes* $\mathcal{S}_0$ *et* $\mathcal{S}'_0$, *la donnée d'une application covariante* (ϕ_0, ψ) *d'une espèce de structures* $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ *vers une espèce de structures* $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ *équivaut à la donnée d'un foncteur* ψ *de* $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{C}'$ *et d'une transformation naturelle (Définition 5-2-1)* $(\Phi'\psi, \tau, \Phi)$, *où* Φ *et* Φ' *sont des foncteurs respectivement de* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *vers* $\tilde{\mathcal{E}}$ *à valeurs dans* $\mathfrak{A}(\mathcal{S}_0)$ *et* $\mathfrak{A}(\mathcal{S}'_0)$ *vérifiant la condition (a). (Exemple 5-3-1 et Proposition 3-1-II.)*

En effet à $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ et $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$ sont associés par la Proposition 3-1 des foncteurs Φ et Φ' de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ vers $\tilde{\mathcal{E}}$, à valeurs dans $\mathfrak{A}(\mathcal{S}_0)$ et $\mathfrak{A}(\mathcal{S}'_0)$; soit $\tau(e)$, où $e \in \mathcal{C}_0$, la restriction de l'application ϕ_0 à la classe $p_0^{-1}(e)$; si $f \in \mathcal{C}$ et $S \in \mathcal{S}_0$ sont tels que $\alpha(f) = e$, $\beta(f) = e'$ et $S \in p_0^{-1}(e)$, on a :

$$\tau(e')\Phi(f)(S) = \phi_0(fS) = \psi(f)\phi_0(S) = \Phi'\psi(f)(\tau(e)(S)),$$

et $(\Phi'\psi, \tau, \Phi)$ est une transformation naturelle de Φ vers $\Phi'\psi$. Réciproquement, la donnée de Φ et Φ' définit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ comme catégories d'opérateurs sur $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}'_0$ respectivement ; soit ϕ_0 l'application de $\mathcal{S}_0$ dans $\mathcal{S}'_0$

$$S \mapsto \tau(e)S, \quad \text{où } S \in p_0^{-1}(e) \text{ et } e \in \mathcal{C}_0 \ ;$$

on a

$$\phi_0(fS) = \tau(e')fS = \tau(e')\Phi(f)S = \Phi'\psi(f)(\tau(e)S) = \psi(f)\phi_0(S),$$

d'où (ϕ_0, ψ) est une application covariante de $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ dans $[\mathcal{C}', p', \mathcal{S}']$.

PROPOSITION 3. *Soit* Σ_0 *une classe d'espèces de structures et soit* Σ *la classe des applications covariantes d'un élément de* Σ_0 *dans un élément de* Σ_0. *Alors* Σ *est une catégorie pour la loi de composition :*

$$(\phi'_0, \psi')(\phi_0, \psi) = (\phi'_0\phi_0, \psi'\psi)$$

si et seulement si (ϕ_0, ψ) *est une application covariante de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ *dans* $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ *et* (ϕ'_0, ψ') *une application covariante de* $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ *dans* $(\mathcal{C}'', p'', \mathcal{S}'')$.

L'unité à droite de (ϕ_0, ψ) est $(Id_{\mathcal{S}_0}, Id_{\mathcal{C}})$, son unité à gauche

$(Id_{\mathcal{S}'_0}, Id_{\mathcal{C}'})$. Les éléments inversibles de Σ sont les équivalences.

Remarquons que cette loi de composition peut aussi s'interpréter comme une loi de composition entre transformations naturelles de foncteurs (Voir V).

1+ Un cas particulier important d'applications covariantes est celui où la catégorie $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{C}'$ et où le foncteur ψ est le foncteur injection de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ (c'est-à-dire $\psi(f) = f$ pour tout $f \in \mathcal{C}$). Alors une application covariante de l'espèce de structures $\mathcal{S}_0$ au-dessus de $\mathcal{C}$ dans l'espèce de structures $\mathcal{S}'_0$ au-dessus de $\mathcal{C}'$ sera seulement désignée par ϕ_0 et, si $S \in \mathcal{S}_0$, la structure $\phi_0(S)$ sera appelée une *structure sous-jacente à* S ; dans ce cas, la définition d'une application covariante entraîne que $\phi_0(S)$ et S sont deux structures sur le même objet $p(S)$.

DÉFINITION 3. Soit $\mathcal{S}'_0$ une espèce de structures sur une catégorie $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{S}_0$ une espèce de structures sur une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}'$. On dira que $\mathcal{S}'_0$ est une *espèce de structures sous-jacente à* $\mathcal{S}_0$ si l'on se donne une application covariante ϕ_0 de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ vers $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$.

D'après la Proposition 1, il revient au même de se donner un foncteur ϕ de la catégorie $\mathcal{S}$ des hypermorphismes correspondant à $\mathcal{S}_0$ vers la catégorie $\mathcal{S}'$ des hypermorphismes correspondant à $\mathcal{S}'_0$ tel que $p'\phi = p$, où p et p' sont les foncteurs projection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

PROPOSITION 4. *Si* $\mathcal{S}'_0$ *est une espèce de structures sous-jacente à l'espèce* $\mathcal{S}_0$, *alors* $\phi_0(\mathcal{S}_0)$ *est une sous-espèce de structures de* $\mathcal{S}_0$ *et* $\phi(\mathcal{S})$ *est la catégorie des hypermorphismes correspondant à* $\phi_0(\mathcal{S}_0)$.

En effet la sous-catégorie $p(\mathcal{S}')$ opère sur $\phi_0(\mathcal{S}_0)$ puisque $f\phi_0(S)$ est défini si et seulement si fS est défini, où $f \in \mathcal{C}$ et $S \in \mathcal{S}_0$.

EXEMPLES. 1° Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories, ψ un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ et ψ_0 sa restriction à $\mathcal{C}_0$; alors (ψ_0, ψ) est une application covariante de $[\mathcal{C}_0, \mathcal{C}]$ vers $[\mathcal{C}'_0, \mathcal{C}']$ (Exemple 3-1).

2° Si $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ est une espèce de structures sur $\mathcal{C}$, alors un foncteur section de p (Définition 2-2-I) définit une application covariante de

$[\mathcal{C}, Id_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}]$ dans $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$.

3° On définit une application covariante de l'espèce des structures métriques dans l'espèce des structures topologiques : chaque métrique admet une topologie sous-jacente. L'image de l'espèce des structures métriques est l'espèce des structures topologiques métrisables.

DÉFINITION 4. Soit $\mathcal{S}_0$ une espèce de structures au-dessus d'une catégorie $\mathcal{C}$ et $\bar{\mathcal{S}}_0$ une espèce de structures au-dessus de la catégorie $\mathcal{S}$ des hypermorphismes correspondant à $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ telles que $(\mathcal{C}, p, \bar{p}(\bar{\mathcal{S}}))$ soit une sous-espèce de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$; alors $\bar{\mathcal{S}}_0$ est appelée une *espèce de superstructures au-dessus de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$.

THÉORÈME 1. *Si* $(\mathcal{S}, \bar{p}, \bar{\mathcal{S}})$ *est une espèce de superstructures au-dessus de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, *alors* $\bar{\mathcal{S}}_0$ *est une espèce de structures* $(\mathcal{C}, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{\mathcal{S}}})$ *au-dessus de* $\mathcal{C}$, *telle que* $(Id_{\bar{\mathcal{S}}_0}, \bar{p})$ *soit une application covariante de* $(\mathcal{S}, \bar{p}, \bar{\mathcal{S}})$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$. *De plus,* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ *est sous-jacent à* $(\mathcal{C}, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{\mathcal{S}}})$ *pour* $\bar{p}$; *le foncteur associé (Proposition 1) à* $(Id_{\bar{\mathcal{S}}_0}, \bar{p})$ *est une équivalence des catégories d'hypermorphismes* $\bar{\mathcal{S}}$ *et* $\bar{\bar{\mathcal{S}}}$ *qui permet d'identifier* $(\mathcal{C}, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{\mathcal{S}}})$ *à* $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \bar{\mathcal{S}})$.

En effet, soit $\bar{p}_0$ la projection de $\bar{\mathcal{S}}_0$ vers $\mathcal{S}_0$; le composé $f\bar{S}$ de $f \in p\bar{p}(\bar{\mathcal{S}}), \bar{S} \in \bar{\mathcal{S}}_0$ est défini si et seulement si $p\bar{p}(\bar{S}) = \alpha(f)$ et on a alors $f\bar{S} = (f, \bar{p}(\bar{S}))\bar{S}$. L'équivalence de $\bar{\mathcal{S}}$ sur $\bar{\bar{\mathcal{S}}}$ est l'application :

$$((f, \bar{p}(\bar{S})), \bar{S}) \mapsto (f, \bar{S}).$$

Si on suppose de plus que $\mathcal{S}_0$ est une espèce de structures sur $\mathcal{C}$ et $\bar{\mathcal{S}}_0$ une espèce de structures sur $\mathcal{S}$, alors $\bar{\mathcal{S}}_0$ est aussi une espèce de structures sur $\mathcal{C}$.

RÉCIPROQUE. *Si* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ *est une espèce de structures sous-jacente à* $(\mathcal{C}, \bar{\bar{p}}, \bar{\bar{\mathcal{S}}})$ *pour l'application* ϕ_0, *alors* $\bar{\bar{\mathcal{S}}}_0$ *est aussi une espèce de superstructures au-dessus de* $(\mathcal{C}, p, \phi(\bar{\bar{\mathcal{S}}}))$, *où* ϕ *est le foncteur de la catégorie* $\bar{\bar{\mathcal{S}}}$ *dans* $\mathcal{S}$ *correspondant à* ϕ_0.

En effet, $(f, S)\bar{S}$ est défini si et seulement si $\phi_0(\bar{S}) = S$ et on a alors $(f, S)\bar{S} = f\bar{S}$.

EXEMPLES. 4° Soit $\mathcal{S}_0$ l'espèce $\mathcal{T}_0$ des topologies et $\bar{\mathcal{S}}_0$ la classe des

couples (T, T') de topologies où T' est une topologie plus fine que T, définie sur le même ensemble que T. Le couple (T, T') sera considéré comme une superstructure sur T. Avec des conditions supplémentaires,
1 on définit ainsi un feuilletage de l'espace topologique T.

5° Les structures métriques forment une espèce de superstructures sur l'espèce des structures topologiques métrisables.

REMARQUE. La recherche et l'étude d'applications covariantes est un des problèmes fondamentaux des mathématiques. En particulier, lorsque ψ est un foncteur constant, l'application covariante est appelée une application *invariante* et l'image $\phi_0(S)$ d'une structure S un invariant de S. Un autre problème important revient à trouver et étudier des superstructures d'une structure donnée.

4. Catégorie au-dessus d'une catégorie.

DÉFINITION 1. Soit $\mathcal{H}$ une catégorie et $\mathcal{S}$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$. On appelle $\mathcal{H}$ *catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ si l'on se donne un foncteur p de $\mathcal{H}$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ vérifiant les axiomes suivants :

1° $\mathcal{H}_0$ est une espèce de structures $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, où p désigne ici la restriction de p à $\mathcal{S}$.

2° Si h et h' sont deux éléments de $\mathcal{H}$ tels que

$$p(h) = p(h'), \quad \alpha(h) = \alpha(h') \quad \text{et} \quad \beta(h) = \beta(h'),$$

2 alors $h = h'$.

La catégorie d'homomorphismes $\mathcal{H}$ pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ sera aussi notée $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Tout $h \in \mathcal{H}$ peut être représenté par un triplet (S', f, S), où $f \in p(\mathcal{H})$, $\alpha(f) = p(S)$ et $\beta(f) = p(S')$, où $S = \alpha(h)$ et $S' = \beta(h)$; l'application $h \mapsto (S', p(h), S)$ est un foncteur biunivoque de $\mathcal{H}$ sur une sous-catégorie de la catégorie induite $p_0^*(\mathcal{C})$ (cf. III) p_0 étant la restriction de p à $\mathcal{H}_0$; remarquons qu'en identifiant (f, fS, S) à (f, S), $p_0^*(\mathcal{C})$ est aussi une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$.

PROPOSITION 1. *Soit* $\mathcal{H}$ *une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ *; alors* $\mathcal{H}$ *peut être considérée comme une espèce de structures au-dessus de* $\mathcal{S}$ *ou de* $\mathcal{C}$.

Le composé de (f', S'), où $f' \in \mathcal{C}$, $S' \in \mathcal{H}_0$ et $p(S') = \alpha(f')$ avec $h \in \mathcal{H}$ est défini si et seulement si $\beta(h) = S'$ et est égal à $(f', S')h$; alors h est une structure sur $\beta(h)$. Il en résulte que $p(\mathcal{S}) \subset \mathcal{C}$ opère sur $\mathcal{H}$, le composé (f', h) étant défini si et seulement si $p(\beta(h)) = \alpha(f')$, le composé $f'h$ étant égal à $(f', S')h$, où $S' = \beta(h)$.

Si $p(\mathcal{S})$ opérait à droite sur $\mathcal{S}_0$, le composé de $(S, f) \in \mathcal{S}$ avec $h \in \mathcal{H}$ serait défini si et seulement si $\alpha(h) = S$ et serait égal à $h(S, f)$; alors h serait une structure sur $\alpha(h)$ et $p(\mathcal{S})$ opèrerait aussi à droite sur $\mathcal{H}$, le composé hf de (f, h) étant défini si et seulement si $p(S) = \beta(f)$ et $S = \alpha(h)$ et étant $hf = h(S, f)$.

1

Un cas particulier important est celui où $\mathcal{S}$ est un groupoïde d'isomorphismes. Alors $p(\mathcal{S})$ opère à gauche et à droite (Proposition 2-1) sur $\mathcal{S}_0$ et par suite $\mathcal{H}$ est aussi une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{S}$ pour les lois de composition :

1° $((f', S'), h) \mapsto (f', S')h$ si et seulement si

$$\beta(h) = S', \quad p(S') = \alpha(f') ;$$

2° $((S, f), h) \mapsto h(f, S)^{-1}$ si et seulement si $\alpha(h) = S$, $p(S) = \beta(f)$.

De même $\mathcal{H}$ est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$ pour les deux lois de composition :

1° $(f', h) \mapsto (f', S')h$ si et seulement si $p(\beta(h)) = \alpha(f')$, $S' = \beta(h)$,

2° $(f, h) \mapsto h(f, S)^{-1}$ si et seulement si $p(\alpha(h)) = \beta(f)$, $S = \alpha(h)$.

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{H}$ une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est un groupoïde. Alors $\mathcal{H}$ peut être considérée comme une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ ou de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.*

Le composé de $((f', S'), (f, S), h)$, où $(f', S') \in \mathcal{S}$, $(f, S) \in \mathcal{S}$, et $h \in \mathcal{H}$ est défini si et seulement si $\alpha(h) = S$ et $\beta(h) = S'$ et est égal à $(f', S')h(f, S)^{-1}$; alors h est une structure sur $(\beta(h), \alpha(h))$. Le groupoïde qui opère sur $\mathcal{H}$ est le sous-groupoïde plein de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ dont les unités sont les couples (S', S) tels qu'il existe

$$h \in \mathcal{H} \text{ avec } \alpha(h) = S \text{ et } \beta(h) = S'.$$

La catégorie $\mathcal{H}$ est aussi une espèce de structures sur le sous-groupoïde plein de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ projection du groupoïde précédent: le composé $f'hf^{-1}$ de (f', f, h), où $f\in p(\mathcal{S})$ et $f'\in p(\mathcal{S})$ est défini si et seulement si

$$\alpha(f)=p(S),\quad \alpha(f')=p(S'),\quad S=\alpha(h) \text{ et } S'=\beta(h),$$

et l'on a: $f'hf^{-1} = (f', S')h(f, S)^{-1}$.

EXEMPLES. 1° Une catégorie $\mathcal{H}$ munie d'un foncteur p vers $\mathcal{C}$, telle que l'axiome 2 des catégories d'homomorphismes soit vérifié sera appelée une catégorie au-dessus de $\mathcal{C}$; c'est une catégorie d'homomorphismes où $\mathcal{S}$ est la sous-catégorie de $\mathcal{H}$ réduite à $\mathcal{H}_0$. En particulier, une catégorie $\mathcal{C}$ est toujours une catégorie au-dessus d'elle-même pour le foncteur identique.

2° Si $\mathcal{H}$ est une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ et si Φ est un foncteur généralisé section (Définition 4-2-I) relativement à p, alors $(\mathcal{C}, p', \Phi(\mathcal{C}), \Phi(\mathcal{C})\cap\mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes, où p' est la restriction de p à $\Phi(\mathcal{C})$.

3° Soit $\mathcal{T}_0$ l'espèce des topologies et p_0 sa projection sur $\mathcal{E}_0$ (Exemple 3-3-I); soit $\hat{\mathcal{T}}$ la classe des applications continues d'un espace topologique dans un autre; un élément de $\hat{\mathcal{T}}_0$ est un triplet (T', f, T), où T et T' sont des topologies sur E et E' respectivement et f une application continue de l'ensemble E muni de T dans l'ensemble E' muni de T'. La classe $\hat{\mathcal{T}}$ est une catégorie pour la multiplication suivante:

$$(T'', f', T_1)(T', f, T) = (T'', f'f, T) \text{ si et seulement si } T_1 = T'.$$

C'est une catégorie d'homomorphismes pour $(\tilde{\mathcal{E}}, p, \mathcal{T})$, où p est defini par

$$p(T', f, T) = (p_0(T'), f, p_0(T)),$$

et où $\mathcal{T}$ est le sous-groupoïde formé de tous les homéomorphismes. C'est aussi une catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\tilde{\mathcal{E}}$, la catégorie distinguée étant $(\tilde{\mathcal{E}}, p', \mathcal{T}')$ (Exemple 1-2-II). La classe des applications ouvertes d'un espace topologique dans un espace topologique est aussi une catégorie d'homomorphismes pour $(\tilde{\mathcal{E}}, p', \mathcal{T}')$.

III. ÉLARGISSEMENTS

I . Catégories induites, extensions inessentielles.

Si Φ est un foncteur, sa restriction à la classe des unités est désignée par Φ_0.

DÉFINITION 1. Soit $\mathcal{C}$, $\bar{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{H}$ des catégories, p un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$ et κ un foncteur de $\bar{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}$. On appellera *catégorie induite de* $\mathcal{H}$ *par* (κ, p), et on notera $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$, la sous-catégorie de $\mathcal{H} \times \bar{\mathcal{C}}$ formée des couples $(h, \bar{k})$ tels que $\kappa(\bar{k}) = p(h)$

Les unités de $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ sont les couples $(\epsilon, \bar{e})$ tels que $\kappa(\bar{e}) = p(\epsilon)$, où $\epsilon \in \mathcal{H}_0$ et $\bar{e} \in \bar{\mathcal{C}}_0$. Les catégories $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ et $p^*(\bar{\mathcal{C}}, \kappa)$ sont équivalentes.

THÉORÈME 1. *Soit* $\mathcal{C}$, $\bar{\mathcal{C}}$ *et* $\mathcal{H}$ *des catégories; il existe un foncteur* $\bar{p}$ *de* $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ *vers* $\bar{\mathcal{C}}$ *et un foncteur* η *relèvement de* κ *relativement à* $(p, \bar{p})$ *(Définition 2-3-11) tels que, si* p' *est un foncteur d'une catégorie* $\mathcal{H}'$ *vers* $\bar{\mathcal{C}}$ *et* η' *un relèvement de* κ *relativement à* (p, p'), *alors il existe un foncteur* $\bar{\eta}'$ *de* $\mathcal{H}'$ *vers* $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ *tel que* $\bar{p}\bar{\eta}' = p'$ *et* $\eta\bar{\eta}' = \eta'$. 1

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{H}' \arrow[llld, "\eta'"'] \arrow[ld, "\bar{\eta}'"] \arrow[ldd, "p'"] \\
\mathcal{H} \arrow[d, "p"'] & & \kappa^*(\mathcal{H}, p) \arrow[ll, "\eta"'] \arrow[d, "\bar{p}"] & \\
\mathcal{C} & & \bar{\mathcal{C}} \arrow[ll, "\kappa"] &
\end{tikzcd}$$

DÉMONSTRATION. Le foncteur $\bar{p}$ est l'application

$$(h, \bar{k}) \mapsto \bar{k} \quad \text{de } \kappa^*(\mathcal{H}, p) \text{ vers } \bar{\mathcal{C}}$$

et le foncteur η est l'application

$$(h, \bar{k}) \mapsto h \quad \text{de } \kappa^*(\mathcal{H}, p) \text{ vers } \mathcal{H}.$$

On a :

$$p\eta(h, \bar{k}) = p(h) = \kappa(\bar{k}) = \kappa\bar{p}(h, \bar{k}).$$

Si p' est un foncteur de $\mathcal{H}'$ vers $\mathcal{C}$ et η' un relèvement de κ relativement à (p, p'), alors l'application $\bar{\eta}' : h' \mapsto (\eta'(h'), p'(h'))$ est un foncteur de

$\mathcal{H}'$ vers $\kappa^*(\mathcal{H},p)$, puisque l'on a $p\eta'(h') = \kappa p'(h')$.

COROLLAIRE 1. *Si* p_0 *est une injection, alors* $\bar{p}_0$ *est une injection; si* $p_0(\mathcal{H}_0) = \mathcal{C}_0$, *alors* $\bar{p}_0$ *est une application sur* $\bar{\mathcal{C}}_0$. *Si* $p(\mathcal{H}) = \mathcal{C}$, *alors* $\bar{p}(\kappa^*(\mathcal{H},p)) = \bar{\mathcal{C}}$; *si* $\kappa(\bar{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$, *alors* $\eta(\kappa^*(\mathcal{H},p)) = \mathcal{H}$. *Si* p *(resp.* κ*) est une injection, alors* $\bar{p}$ *(resp.* η*) est une injection. Si* p *est le foncteur identité de* $\mathcal{C}$, $\bar{p}$ *est une équivalence de* $\kappa^*(\mathcal{C},Id)$ *sur* $\mathcal{C}$.

En effet, si p_0 est biunivoque, alors $\bar{p}_0(\epsilon,\bar{e}) = \bar{p}_0(\epsilon',\bar{e}')$ entraîne $\bar{e} = \bar{e}'$, donc

$$p(\epsilon) = \kappa(\bar{e}) = p(\epsilon') \quad \text{et} \quad \epsilon = \epsilon'.$$

Si $p_0(\mathcal{H}_0) = \mathcal{C}_0$ et si $\bar{e} \in \bar{\mathcal{C}}_0$, il existe $\epsilon \in \mathcal{H}_0$ tel que $p_0(\epsilon) = \kappa(\bar{e})$, par suite $\bar{p}(\epsilon,\bar{e}) = \bar{e}$. Si $p(\mathcal{H}) = \mathcal{C}$, soit $\bar{k} \in \bar{\mathcal{C}}$; il existe $h \in \mathcal{H}$ tel que $p(h) = \kappa(\bar{k})$ et par suite $\bar{p}(h,\bar{k}) = \bar{k}$. Si $\kappa(\bar{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$ et si $h \in \mathcal{H}$, il existe $\bar{k} \in \bar{\mathcal{C}}$ tel que $\kappa(\bar{k}) = p(h)$, et $\eta(h,\bar{k}) = h$.

COROLLAIRE 2. *Si* p'_0 *ou* η'_0 *sont des injections, alors* $\bar{\eta}'_0$ *est une injection; si* p' *ou* η' *sont des équivalences, alors* $\bar{\eta}'$ *est une équivalence.*

En effet, $\bar{\eta}'(e') = (\eta'(e'),p'(e'))$ et $\bar{\eta}'(e') = \bar{\eta}'(e'_1)$ entraînent $\eta'(e') = \eta'(e'_1)$ et $p'(e') = p'(e'_1)$; si une de ces relations entraîne $e' = e'_1$, alors η'_0 est biunivoque. Si p' est une équivalence et si

$$(\eta'(h'),\, p'(h')) = (\eta'(h''),p'(h'')),$$

on a $\eta'(h') = \eta'(h'')$ et $p'(h') = p'(h'')$, donc $h' = h''$.

COROLLAIRE 3. *Si* $(\mathcal{C},p,\mathcal{S})$ *est une espèce de structures, alors* $\kappa^*(\mathcal{S},p)$ *est une catégorie d'hypermorphismes au-dessus de* $\bar{\mathcal{C}}$.

En effet, $\bar{p}(\kappa^*(\mathcal{S},p))$ est une sous-catégorie de $\bar{\mathcal{C}}$, puisque c'est l'image réciproque par κ de la sous-catégorie $p(\mathcal{S})$ de $\mathcal{C}$; cette sous-catégorie opère sur $(\kappa^*(\mathcal{S},p))_0$ pour la loi de composition:

$$\bar{k}(S,\bar{e}) = (\kappa(\bar{k})S,\, \beta(\bar{k})), \quad \text{où} \quad \bar{e} = a(\bar{k}).$$

L'application $(\bar{k},(S,\bar{e})) \mapsto ((\kappa(\bar{k}),S),\bar{k})$ est alors une équivalence de la catégorie d'hypermorphismes de $(\kappa^*(\mathcal{S},p))_0$ sur $\kappa^*(\mathcal{S},p)$.

COROLLAIRE 4. *Si* $\mathcal{H}$ *est une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C},p,\mathcal{S})$, *alors* $\kappa^*(\mathcal{H},p)$ *est une catégorie d'homomorphismes pour* $(\bar{\mathcal{C}},\bar{p},\kappa^*(\mathcal{S},p))$.

En effet, la relation $\bar{p}(h,\bar{k}) = \bar{p}(h',\bar{k}')$ jointe aux relations

$$\alpha(h,\bar{k}) = \alpha(h',\bar{k}') \quad \text{et} \quad \beta(h,\bar{k}) = \beta(h',\bar{k}'),$$

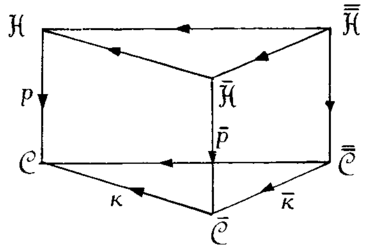
où $(h,\bar{k})$ et $(h',\bar{k}')$ appartiennent à $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$, entraînent

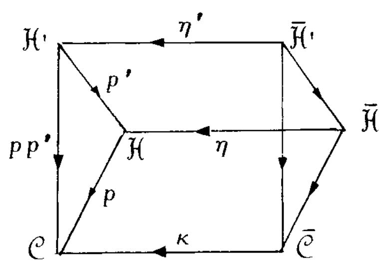
$$\bar{k} = \bar{k}', \quad \alpha(h) = \alpha(h'), \quad \beta(h) = \beta(h'),$$

donc $\kappa(\bar{k}) = p(h) = p(h')$ et $h = h'$.

PROPOSITION 1 *(transitivité horizontale et verticale). Soit* $\mathcal{C}, \bar{\mathcal{C}}, \bar{\bar{\mathcal{C}}}, \mathcal{H}$ 1
et $\mathcal{H}'$ *des catégories; si* κ *est un foncteur de* $\bar{\mathcal{C}}$ *vers* $\mathcal{C}$, p *un foncteur de* $\mathcal{H}$ *vers* $\mathcal{C}$ *et* $\bar{\kappa}$ *un foncteur de* $\bar{\bar{\mathcal{C}}}$ *vers* $\bar{\mathcal{C}}$, *alors* $(\kappa\bar{\kappa})^*(\mathcal{H}, p)$ *et* $\bar{\kappa}^*(\kappa^*(\mathcal{H},p),\bar{p})$ *sont équivalents. Si* p' *est un foncteur de* $\mathcal{H}'$ *vers* $\mathcal{H}$, *alors* $\kappa^*(\mathcal{H}', pp')$ *et* $\eta^*(\mathcal{H}', p')$ *sont équivalents;* $\bar{p}$ *et* η *désignent les applications canoniques de* $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ *vers* $\bar{\mathcal{C}}$ *et* $\mathcal{H}$.

$$\bar{\mathcal{H}} = \kappa^*(\mathcal{H}, p), \quad \bar{\bar{\mathcal{H}}} = (\kappa\bar{\kappa})^*(\mathcal{H}, p) \approx \bar{\kappa}^*(\bar{\mathcal{H}}, \bar{p}),$$
$$\bar{\mathcal{H}}' = \eta^*(\mathcal{H}', p') \approx \kappa^*(\mathcal{H}', pp').$$





DÉMONSTRATION. Soit $(h,\bar{\bar{k}}) \in (\kappa\bar{\kappa})^*(\mathcal{H}, p)$; on a $\kappa\bar{\kappa}(\bar{\bar{k}}) = p(h)$, et $((h,\bar{k}),\bar{\bar{k}})$, où $\bar{k} = \bar{\kappa}(\bar{\bar{k}})$, appartient à $\bar{\kappa}^*(\kappa^*(\mathcal{H}, p), \bar{p})$; l'application $(h,\bar{\bar{k}}) \mapsto ((h,\bar{k}),\bar{\bar{k}})$ est une équivalence. Soit $(h',\bar{k}) \in \kappa^*(\mathcal{H}', pp')$. Alors $(p'(h'),\bar{k}) \in \kappa^*(\mathcal{H}, p)$ et on a $p'(h') = \eta(p'(h'),\bar{k})$, donc $(h',(p'(h'),\bar{k})) \in \eta^*(\mathcal{H}', p')$; l'application $(h',\bar{k}) \mapsto (h',(p'(h'),\bar{k}))$ est une équivalence.

DÉFINITION 2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et q une application d'une classe $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}_0$; on appelle *catégorie induite de* $\mathcal{C}$ *par* q et on note $q^*(\mathcal{C})$ la catégorie $(q\times q)^*(\mathcal{C},\gamma)$ induite de $\mathcal{C}$ par $(q\times q,\gamma)$, où γ désigne le foncteur $h \mapsto (\beta(h),\alpha(h))$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0$, le produit $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ étant muni de la loi de composition :

$$(u'', u'_1)(u', u) = (u'', u) \quad \textit{si et seulement si} \quad u'_1 = u'.$$

La catégorie $q^*(\mathcal{C})$ est donc la classe des triplets (h, u', u) tels que $h \in \mathcal{C}$, $\alpha(h) = q(u)$ et $\beta(h) = q(u')$, munie de la loi de composition

$$(h', u'', u_1)(h, u', u) = (h'h, u'', u) \quad \text{si et seulement si} \quad u' = u_1 .$$

Une unité est un triplet $(q(u), u, u)$, correspondant d'une façon biunivoque à u ; donc la classe $\mathcal{B}$ est une classe d'objets pour cette catégorie. Le foncteur canonique η de $q^*(\mathcal{C})$ vers $\mathcal{C}$ applique (h, u', u) sur h ; sa restriction à $\mathcal{B}$ est q et l'image $\eta(q^*(\mathcal{C}))$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ dont les unités appartiennent à $q(\mathcal{B})$. La restriction de η à la sous-classe formée par les triplets (h, u', u), où u et u' sont fixés, est une application biunivoque. Si Γ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{C}$, alors $q^*(\Gamma)$ est le groupoïde des éléments inversibles de $q^*(\mathcal{C})$.

PROPOSITION 2. *Tout foncteur ψ d'une catégorie $\mathcal{C}'$ vers une catégorie $\mathcal{C}$ admet une décomposition canonique $\psi = \eta\bar{\psi}$ dans laquelle $\bar{\psi}_0$ est une injection et η est le foncteur canonique de $\psi_0^*(\mathcal{C})$ vers $\mathcal{C}$. La restriction de η à la classe des éléments de $\psi(\mathcal{C}')$ de source et but fixés est une injection. Si ψ_0 est une bijection, alors η est une équivalence.*

En effet, l'application

$$\gamma' : h' \mapsto (\beta(h'), \alpha(h')) \quad \text{de} \quad \mathcal{C}' \quad \text{vers} \quad \mathcal{C}'_0 \times \mathcal{C}'_0$$

est un relèvement de l'application γ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ relativement à $(\psi_0 \times \psi_0, \psi)$; puisque $\psi_0^*(\mathcal{C})$ est la catégorie induite de $\mathcal{C}$ par $(\psi_0 \times \psi_0, \gamma)$ il résulte du Théorème 1 que $\psi = \eta\bar{\psi}$; la biunivocité de $\bar{\psi}_0$ résulte de celle de γ'_0. Si ψ_0 est une bijection, alors η est une équivalence d'après le Corollaire 1 du Théorème 1.

PROPOSITION 3. *Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ une espèce de structures et q une application d'une classe $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}_0$; la catégorie $(q \times q)^*(\mathcal{S}, \gamma p) = q^*(\mathcal{S})$ induite de $\mathcal{S}$ par $(q \times q, \gamma p)$, où γ est le foncteur $h \mapsto (\beta(h), \alpha(h))$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$ est une catégorie d'hypermorphismes au-dessus de $q^*(\mathcal{C})$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\bar{\gamma}$ et η les foncteurs canoniques de $q^*(\mathcal{C})$ vers $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, $\bar{p}$ et $\bar{\eta}$ les foncteurs canoniques de $(q \times q)^*(\mathcal{S}, \gamma p)$ vers

$\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ et $\mathcal{S}$. D'après la Proposition 1, la catégorie $q^*(\mathcal{S})$ est équivalente à la catégorie $\eta^*(\mathcal{S}, p)$, laquelle est une catégorie d'hypermorphismes au-dessus de $q^*(\mathcal{C})$. Donc $(q^*(\mathcal{C}), \pi, q^*(\mathcal{S}))$ est une espèce de structures; une classe d'objets $q^*(\mathcal{S}_0)$ pour $q^*(\mathcal{S})$ est formée des couples (S, u), où $u \in \mathcal{B}$, $S \in \mathcal{S}_0$ et $p(S) = q(u)$. La loi de composition entre $q^*(\mathcal{C})$ et $q^*(\mathcal{S}_0)$ est définie par:

$(h, u', u)(S, u_1) = (hS, u')$ si et seulement si $u = u_1$ et hS défini.

DÉFINITION 3. Avec les notations de la Proposition 3, l'espèce de structures $(q^*(\mathcal{C}), \pi, q^*(\mathcal{S}))$ est appelée *espèce de structures induite de* $\mathcal{S}$ *au-dessus de* $q^*(\mathcal{C})$

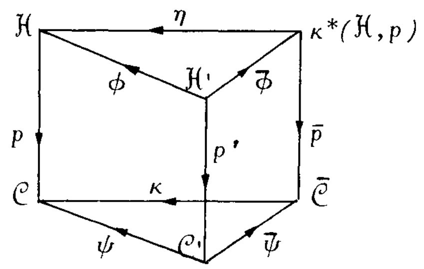
1+

PROPOSITION 4. *Si* $\mathcal{H}$ *est une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ *et si* q *est une application d'une classe* $\mathcal{B}$ *dans* $\mathcal{C}_0$, *alors la catégorie* $q^*(\mathcal{H}) = (q\times q)^*(\mathcal{H}, \gamma p)$ *induite de* $\mathcal{H}$ *par* $(q\times q, \gamma p)$, *où* γ *est le foncteur* $h \mapsto (\beta(h), a(h))$ *de* $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{C}_0\times\mathcal{C}_0$, *est une catégorie d'homomorphismes pour* $(q^*(\mathcal{C}), \pi, q^*(\mathcal{S}))$.

DÉMONSTRATION. Soit $\bar{\gamma}$ et η les foncteurs canoniques de $q^*(\mathcal{C})$ vers $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, $\bar{p}$ et η' les foncteurs canoniques de $q^*(\mathcal{H})$ vers $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ et $\mathcal{H}$. D'après la Proposition 1, $q^*(\mathcal{H})$ est équivalente à la catégorie $\eta^*(\mathcal{H}, p)$, laquelle est une catégorie d'homomorphismes pour $(q^*(\mathcal{C}), \pi, q^*(\mathcal{S}))$ d'après le Corollaire 4 du Théorème 1. Donc $q^*(\mathcal{H})$ est une catégorie d'homomorphismes pour $(q^*(\mathcal{C}), \pi, q^*(\mathcal{S}))$.

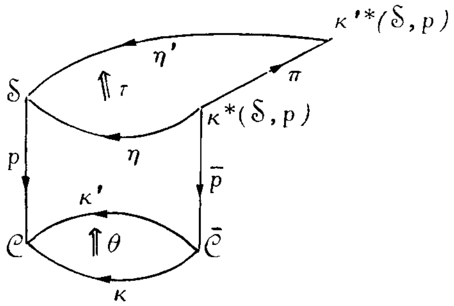
PROPOSITION 5 *(prismatique). Soit* $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\bar{\mathcal{C}}$, $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}'$ *des catégories,* ψ *et* κ *des foncteurs de* $\mathcal{C}'$ *et* $\bar{\mathcal{C}}$ *vers* $\mathcal{C}$, p' *un foncteur de* $\mathcal{H}'$ *vers* $\mathcal{C}'$, p *un foncteur de* $\mathcal{H}$ *vers* $\mathcal{C}$, ϕ *un relèvement de* ψ *relativement à* (p, p'); *si* $\bar{\psi}$ *est un foncteur de* $\mathcal{C}'$ *vers* $\bar{\mathcal{C}}$ *tel que l'on ait* $\kappa\bar{\psi} = \psi$, *alors il existe un foncteur* $\bar{\phi}$ *de* $\mathcal{H}'$ *vers* $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ *relèvement de* $\bar{\psi}$ *relativement à* $(\bar{p}, p')$ *tel que* $\eta\bar{\phi} = \phi$, *où* $\bar{p}$ *et* η *désignent les foncteurs canonique de* $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ *vers* $\bar{\mathcal{C}}$ *et* $\mathcal{H}$.

En effet, le foncteur ϕ est un relèvement du foncteur κ relativement à $(p, \bar{\psi}p')$, puisque $\kappa\bar{\psi}p' = \psi p' = p\phi$; d'après le Théorème 1, il existe un foncteur $\bar{\phi}$ tel que l'on ait $\phi = \eta\bar{\phi}$ et $\bar{\psi}p' = \bar{p}\bar{\phi}$ donc $\bar{\phi}$ est un relèvement de $\bar{\psi}$ relativement à $(\bar{p}, p')$.



Si de plus $\mathcal{H}' = \psi^*(\mathcal{H}, p)$, d'après la Proposition 1 $\bar{\psi}^*(\kappa^*(\mathcal{H}, p), \bar{p})$ est équivalent à $\psi^*(\mathcal{H}, p)$; alors $\bar{\phi}$ s'identifie au foncteur canonique de $\bar{\psi}^*(\kappa^*(\mathcal{H}, p), \bar{p})$ vers $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$.

PROPOSITION 6. *Soit* $[\mathcal{C}, p, \mathcal{S}]$ *une catégorie d'hypermorphismes sur* $\mathcal{C}$, κ *et* κ' *deux foncteurs d'une catégorie* $\bar{\mathcal{C}}$ *vers* $\mathcal{C}$ *tels qu'il existe une transformation naturelle* $(\kappa', \theta, \kappa)$ *de* κ *vers* κ'. *Alors il existe un foncteur* π *de* $\kappa^*(\mathcal{S}, p)$ *vers* $\kappa'^*(\mathcal{S}, p)$, *et une transformation naturelle* $(\eta'\pi, \tau, \eta)$ *de* η *vers* $\eta'\pi$, *où* η *et* η' *sont les foncteurs canoniques de* $\kappa^*(\mathcal{S}, p)$ *et* $\kappa'^*(\mathcal{S}, p)$ *vers* $\mathcal{S}$, *de sorte que l'on ait* $p\tau = \theta\bar{p}$.



DÉMONSTRATION. Soit $(h, \bar{k}) \in \kappa^*(\mathcal{S}, p)$; on a $p(h) = \kappa(\bar{k})$; soit

$$h' = (\kappa'(\bar{k}), \theta(\bar{e})\alpha(h)), \quad \text{où} \quad \bar{e} = \alpha(\bar{k}) ;$$

alors h' est un élément de $\mathcal{S}$ tel que $p(h') = \kappa'(\bar{k})$, donc $(h', \bar{k}) \in \kappa'^*(\mathcal{S}, p)$. Le foncteur π est l'application $(h, \bar{k}) \mapsto (h', \bar{k})$. Si $(\epsilon, \bar{e}) \in \kappa^*(\mathcal{S}, p)$, alors $(\theta(\bar{e}), \epsilon) \in \mathcal{S}$ et l'application τ est l'application

$$(\epsilon, \bar{e}) \mapsto (\theta(\bar{e}), \epsilon) ;$$

en effet, si $(h,\bar{k}) \in \kappa^*(\mathcal{S},p)$, $\alpha(h)=\epsilon$, $\beta(h)=\epsilon'$, $\alpha(\bar{k})=\bar{e}$, $\beta(\bar{k})=\bar{e}'$, on a $h=(\kappa(\bar{k}),\epsilon)$ et

$$\tau(\epsilon',\bar{e}')\eta(h,\bar{k}) = (\theta(\bar{e}'),\beta(h))h = (\theta(\bar{e}')\kappa(\bar{k}),\epsilon),$$

$$\eta'\pi(h,\bar{k})\tau(\epsilon,\bar{e}) = (\kappa'(\bar{k}),\theta(\bar{e})\epsilon)(\theta(\bar{e}),\epsilon) = (\kappa'(\bar{k})\theta(\bar{e}),\epsilon).$$

Puisque $\kappa'(\bar{k})\theta(\bar{e}) = \theta(\bar{e}')\kappa(\bar{k})$, $(\eta'\pi,\tau,\eta)$ est une transformation naturelle. On a:

$$p\tau(\epsilon,\bar{e}) = \theta(\bar{e}) = \theta(\bar{p}(\epsilon,\bar{e})).$$

COROLLAIRE 1. *L'application* $(\kappa',\theta,\kappa) \mapsto (\eta'\pi,\tau,\eta)$ *est un foncteur de* $\mathcal{N}(\mathcal{C},\bar{\mathcal{C}})$ *(Proposition 7-2-1) vers la classe des transformations naturelles* $(\eta'\pi,\tau,\eta)$ *associées aux transformations* (κ',θ,κ)*, munie de la loi de composition (voir n° V):*

$$(\eta''\pi',\tau',\eta')(\eta'\pi,\tau,\eta) = (\eta''\pi'\pi,\tau'\pi.\tau,\eta).$$ 1+

En effet, soit $(\eta''\pi'',\tau'',\eta)$ la transformation naturelle associée à $(\kappa'',\theta'.\theta,\kappa)$; on a:

$$\pi'\pi(h,\bar{k}) = \pi'(h',\bar{k}) = ((\kappa''(\bar{k}),\theta'(\bar{e})\alpha(h')),\bar{k}) =$$

$$= ((\kappa''(\bar{k}),\theta'(\bar{e})\theta(\bar{e})\alpha(h)),\bar{k}) = (h'',\bar{k}) = \pi''(h,\bar{k}).$$

De plus

$$\pi(\epsilon,\bar{e}) = ((\kappa'(\bar{e}),\theta(\bar{e})\epsilon),\bar{e}) = (\theta(\bar{e})\epsilon,\bar{e})$$

et

$$\tau'(\pi(\epsilon,\bar{e}))\tau(\epsilon,\bar{e}) = (\theta'(\bar{e}),\theta(\bar{e})\epsilon)(\theta(\bar{e}),\epsilon) = (\theta'.\theta(\bar{e}),\epsilon).$$

Il en résulte que, si (κ',θ,κ) est une équivalence, alors π est une équivalence et $(\eta'\pi,\tau,\eta)$ est une équivalence naturelle.

COROLLAIRE 2. *La proposition est aussi valable en supposant que* $(\mathcal{C},p,\mathcal{S})$ *est une espèce de structures au-dessus de* $\mathcal{C}$*, que* $\kappa(\bar{\mathcal{C}}) \subset p(\mathcal{S})$, $\kappa'(\bar{\mathcal{C}}) \subset p(\mathcal{S})$ *et que, pour tout* $\bar{e} \in \bar{\mathcal{C}}_0$*, on ait* $\theta(\bar{e}) \in p(\mathcal{S})$.

PROPOSITION 7. *Soit* $\mathcal{H}$ *une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C},p,\mathcal{S})$, κ *et* κ' *deux foncteurs d'une catégorie* $\bar{\mathcal{C}}$ *vers* $\mathcal{C}$ *et* (κ',θ,κ) *une équivalence naturelle de* κ *vers* κ' *telle que, pour tout* $\bar{e} \in \bar{\mathcal{C}}_0$*, on ait:*

$$\theta(\bar{e}) \in p(\mathcal{S}) \quad et \quad \theta(\bar{e})^{-1} \in p(\mathcal{S});$$

alors il existe une équivalence $\bar{\pi}$ *de* $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ *vers* $\kappa'^*(\mathcal{H}, p)$ *et une équivalence naturelle* $(\eta'\bar{\pi}, \bar{\tau}, \eta)$ *telles que* $p\bar{\tau} = \theta\bar{p}$, *où* η *et* η' *désignent les foncteurs canoniques de* $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ *et* $\kappa'^*(\mathcal{H}, p)$ *vers* $\mathcal{H}$.

DÉMONSTRATION. Soit $(h, \bar{k}) \in \kappa^*(\mathcal{H}, p)$, $\bar{e} = \alpha(\bar{k})$, $\bar{e}' = \beta(\bar{k})$; soit h_1 l'élément $\theta(\bar{e}')h(\theta(\bar{e}))^{-1}$ de $\mathcal{H}$ ayant pour unités à droite et à gauche

$$\epsilon_1 = \theta(\bar{e})\alpha(h) \quad \text{et} \quad \epsilon_1' = \theta(\bar{e}')\beta(h)$$

et pour projection $p(h_1) = \kappa'(\bar{k})$; alors $(h_1, \bar{k}) \in \kappa'^*(\mathcal{H}, p)$ et le foncteur $\bar{\pi}$ est l'application

$$(h, \bar{k}) \mapsto (h_1, \bar{k}) \quad \text{de} \quad \kappa^*(\mathcal{H}, p) \quad \text{vers} \quad \kappa'^*(\mathcal{H}, p)\ ;$$

la restriction π de $\bar{\pi}$ à $\mathcal{S}$ est le foncteur π considéré dans la proposition précédente et l'application $\bar{\tau}$ est l'application τ de cette même proposition. On a, en effet, en posant $\epsilon = \alpha(h)$, $\epsilon' = \beta(h)$:

$$\eta'\bar{\pi}(h, \bar{k})\tau(\epsilon, \bar{e}) = h_1(\theta(\bar{e}), \epsilon) \quad \text{et} \quad \tau(\epsilon', \bar{e}')\eta(h, \bar{k}) = (\theta(\bar{e}'), \epsilon')h$$

où

$$\alpha(h_1(\theta(\bar{e}), \epsilon)) = \epsilon = \alpha((\theta(\bar{e}'), \epsilon')h),$$

$$\beta(h_1(\theta(\bar{e}), \epsilon)) = \epsilon_1' = \theta(\bar{e}')\epsilon' = \beta((\theta(\bar{e}'), \epsilon')h),$$

$$p(h_1(\theta(\bar{e}), \epsilon)) = \kappa'(\bar{k})\theta(\bar{e}) = \theta(\bar{e}')\kappa(\bar{k}) = p((\theta(\bar{e}'), \epsilon')h).$$

Donc $(\eta'\bar{\pi}, \bar{\tau}, \eta)$ est une transformation naturelle. On démontre, comme dans le Corollaire 1 de la Proposition 6, que $\bar{\pi}$ et $(\eta'\bar{\pi}, \bar{\tau}, \eta)$ sont des équivalences.

DÉFINITION 5. Soit $\bar{\mathcal{C}}$ une catégorie et $\mathcal{C}$ une sous-catégorie ; on dit que
1 $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$ est une *extension inessentielle de* $\mathcal{C}$ si κ est un foncteur de $\bar{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{C}$ dont la restriction à $\mathcal{C}$ est l'identité. Soit p un foncteur d'une catégorie $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$ et $(\eta, \bar{\mathcal{H}})$ une extension inessentielle de $\mathcal{H}$; un relèvement $\bar{p}$ de p relativement à (κ, η) sera appelé une *extension de* p *à* $\bar{\mathcal{H}}$ si la restriction de $\bar{p}$ à $\mathcal{H}$ est p.

THÉORÈME 2. *Soit* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{H}$ *des catégories,* p *un foncteur de* $\mathcal{H}$ *vers* $\mathcal{C}$ *et* $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$ *une extension inessentielle de* $\mathcal{C}$ *; alors la catégorie* $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ *induite de* $\mathcal{H}$ *par* (κ, p) *est une extension inessentielle* $(\eta, \bar{\mathcal{H}})$ *de* $\mathcal{H}$ *pour* *le foncteur canonique* η *de* $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ *vers* $\mathcal{H}$. *Si* $(p, \mathcal{H})$ *est une extension inessentielle de* $\mathcal{C}$, *alors* $(\bar{p}, \bar{\mathcal{H}})$ *est une extension inessentielle de* $\bar{\mathcal{C}}$, *où* $\bar{p}$ *désigne le foncteur canonique de* $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ *vers* $\bar{\mathcal{C}}$. *Si* $\mathcal{C}$ *est plein dans* $\bar{\mathcal{C}}$, *alors* $\mathcal{H}$ *est plein dans* $\bar{\mathcal{H}}$.

En effet, l'application $h \mapsto (h, p(h))$ identifie $\mathcal{H}$ à une sous-catégorie de $\bar{\mathcal{H}}$. Si $(p, \mathcal{H})$ est une extension inessentielle de $\mathcal{C}$, l'application $\bar{k} \mapsto (\kappa(\bar{k}), \bar{k})$ identifie $\bar{\mathcal{C}}$ à une sous-catégorie de $\bar{\mathcal{H}}$ et on a: $\bar{p}(\kappa(\bar{k}), \bar{k}) = \bar{k}$.

DÉFINITION 6. Avec les notations du Théorème 2, la catégorie $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ est appelée *extension canonique de* $\mathcal{H}$ *à* $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$ ou à $\bar{\mathcal{C}}$.

D'après les résultats précédents, l'extension canonique à $\bar{\mathcal{C}}$ d'une espèce de structures $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ est une espèce de structures $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\mathcal{S}})$; l'extension canonique $\bar{\mathcal{H}}$ d'une catégorie d'homomorphismes $\mathcal{H}$ pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes pour $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\mathcal{S}})$. Il y a transitivité horizontale et verticale des extensions canoniques et la proposition prismatique est encore vraie en supposant que $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$ est une extension inessentielle de $\mathcal{C}$; alors $(\eta, \bar{\mathcal{H}})$ est une extension inessentielle de $\mathcal{H}$.

PROPOSITION 8. *Soit* $(\kappa', \bar{\mathcal{C}}')$ *une extension inessentielle d'une catégorie* $\mathcal{C}'$ *et* ψ *un foncteur de* $\mathcal{C}'$ *sur une catégorie* $\mathcal{C}$ *tel que* ψ_0 *soit une bijection. Alors il existe une extension inessentielle* $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$ *de* $\mathcal{C}$ *et une extension* $\bar{\phi}$ *de* ψ *à* $\bar{\mathcal{C}}'$ *telle que* $\bar{\phi}$ *soit une surjection sur* $\bar{\mathcal{C}}$ *et que* $\bar{\phi}_0$ *soit une bijection.*

DÉMONSTRATION. Soit $\phi = \psi\kappa'$. Considérons les décompositions canoniques $\psi = \eta\bar{\psi}$ et $\phi = \eta'\bar{\phi}$, où ϕ est considéré comme la surjection de $\bar{\mathcal{C}}'$ sur son image canonique $\bar{\mathcal{C}}$ dans $\phi_0^*(\mathcal{C})$. Pour $\bar{k} \in \bar{\mathcal{C}}'$, on a:

$$\bar{\phi}(\bar{k}) = (\phi(\bar{k}), \beta(\bar{k}), a(\bar{k}));$$

pour $k \in \mathcal{C}'$, on a $\bar{\psi}(k) = (\psi(k), \beta(k), a(k))$. En posant $k = \kappa'(\bar{k})$, on a $\bar{\psi}(k) = (\phi(\bar{k}), \beta(k), a(k))$. L'application

$$(\phi(\bar{k}), \beta(\bar{k}), a(\bar{k})) \mapsto (\phi(\bar{k}), \beta(k), a(k))$$

est un foncteur κ de $\bar{\mathcal{C}}$ sur $\psi_0^*(\mathcal{C})$ qui se réduit à l'identité sur $\bar{\psi}(\mathcal{C}')$.

Donc $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$ est une extension inessentielle de $\bar{\psi}(\mathcal{C}')$ et $\bar{\psi}\kappa' = \kappa\bar{\phi}$. Si ψ_0 est une bijection, η est une équivalence et par suite, en identifiant $\mathcal{C}$ à $\psi_0^*(\mathcal{C})$, alors $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$ s'identifie à une extension inessentielle de $\mathcal{C}$.

CAS PARTICULIER. Si $\mathcal{G}'$ est un sous-groupe plein d'un groupoïde $\bar{\mathcal{C}}'$ supposé connexe et si ψ est un homomorphisme de $\mathcal{G}'$ sur $\mathcal{G}$ de noyau N,
1 alors il existe un groupoïde quotient $\bar{\mathcal{C}}$ de $\bar{\mathcal{C}}'$, le foncteur $\bar{\phi}$ de $\bar{\mathcal{C}}'$ sur $\bar{\mathcal{C}}$ ayant pour noyau $\bar{N}$ la réunion des sous-groupes de $\bar{\mathcal{C}}'$ équivalents à N, c'est-à-dire de la forme fNf^{-1}.

2 2. Élargissement d'une catégorie d'homomorphismes.

DÉFINITION 1. Soit $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ et $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ deux espèces de structures, où $\mathcal{C}$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{C}'$. L'espèce $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ est appelée *élargissement de l'espèce* $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

1° $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ est une sous-espèce de $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$.

2° Σ est un sous-groupoïde plein de Σ'.

3° Toute structure $S' \in \Sigma'_0$ est isomorphe au moins à une structure $S \in \Sigma_0$ par un isomorphisme appartenant à Σ'.

Si de plus $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des sous-groupoïdes d'une catégorie $\mathcal{C}''$, on dit que l'espèce $(\mathcal{C}'', p', \Sigma')$ au-dessus de $\mathcal{C}''$ est un *élargissement de l'espèce* $(\mathcal{C}'', p, \Sigma)$ au-dessus de $\mathcal{C}''$.

PROPOSITION 1. *Si, avec les notations de la Définition 1,* $\mathcal{C}$ *est une sous-catégorie pleine de* $\mathcal{C}'$, *alors la condition 1 entraîne la condition 2 et alors* $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ *est une sous-espèce pleine de* $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$.

DÉFINITION 2. Soit $\mathcal{H}$ une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$; une catégorie $\mathcal{H}'$ d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ est appelée *élargissement de* $\mathcal{H}$ au-dessus de $\mathcal{C}'$ si les conditions suivantes sont vérifiées:

1° L'espèce $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$ est un élargissement de l'espèce $(\mathcal{C}', p, \Sigma)$, où Σ et Σ' désignent les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ respectivement.

2° $\mathcal{H}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{S}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}'$.

PROPOSITION 2. *Pour qu'une catégorie d'homomorphismes* $\mathcal{H}'$ *pour* $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ *soit un élargissement de la catégorie d'homomorphismes* $\mathcal{H}$ *pour* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

a) L'espèce $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ *est une sous-espèce de* $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$, *où* Σ *et* Σ' *sont les groupoïdes des éléments inversibles de* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}'$ *respectivement.*

b) Σ *est un sous-groupoïde plein de* Σ', $\mathcal{H}$ *est une sous-catégorie de* $\mathcal{H}'$ *et on a:* $\mathcal{S} = \mathcal{H} \cap \mathcal{S}'$.

c) Tout élément h' *de* $\mathcal{H}'$ *est isomorphe à un élément* h *de* $\mathcal{H}$ *relativement à* $\Sigma' \times \Sigma'$.

DÉMONSTRATION. Si $\mathcal{H}'$ est un élargissement de $\mathcal{H}$, soit h' un élément de $\mathcal{H}'$, $\alpha(h') = e'$ et $\beta(h') = e''$; il existe $(f, S) \in \Sigma'$ et $(f', S') \in \Sigma'$ tels que $S \in \Sigma_0$, $S' \in \Sigma_0$, $fS = e'$, $f'S' = e''$, d'après la condition 3 de la Définition 1. Par suite $h = (f', S')^{-1} h'(f, S) \in \mathcal{H}$, puisque $\alpha(h) = S$ et $\beta(h) = S'$ et que $\mathcal{H}$ est plein dans $\mathcal{H}'$.
Inversement, si les conditions a, b et c sont vérifiées, alors soit $S'' \in \Sigma'_0$; il existe

$$h \in \mathcal{H},\ (f, S) \in \Sigma',\ (f', S') \in \Sigma' \text{ tels que } S'' = (f', S') h (f, S)^{-1} ;$$

par suite $S'' = fS$ et la condition 3 est vérifiée. Soit

$$h' \in \mathcal{H}',\quad \alpha(h') = e' \in \mathcal{H} \text{ et } \beta(h') = e'' \in \mathcal{H} ;$$

d'après la condition c, il existe $(f, S) \in \Sigma'$ et $(f', S') \in \Sigma'$ tels que l'on ait

$$h' = (f', S') h (f, S)^{-1},\quad \text{où } f'S' = e'' \text{ et } fS = e' ;$$

puisque Σ est plein dans Σ', on a $(f, S) \in \Sigma$ et $(f', S') \in \Sigma$, donc $h' \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$ est plein dans $\mathcal{H}'$; si on suppose de plus que h' appartient à $\mathcal{S}'$, alors $h = (f', S')^{-1} h'(f, S)$ appartient à $\mathcal{S}'$ et à $\mathcal{H}$, donc à $\mathcal{S}$ en vertu de la condition b et $\mathcal{S}$ est plein dans $\mathcal{S}'$.

COROLLAIRE 1. *Pour que* $\mathcal{H}'$ *soit un élargissement de* $\mathcal{H}$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

a') L'espèce $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$ *est un élargissement de l'espèce* $(\mathcal{C}', p, \Sigma)$.

b') $\mathcal{H}'$ *(respectivement* $\mathcal{S}'$*) considéré comme espèce de structures au-dessus de* $\Sigma' \times \Sigma'$ *est un élargissement de* $\mathcal{H}$ *(resp.* $\mathcal{S}$*) considéré comme* *espèce de structures au-dessus de* $\Sigma \times \Sigma$ *(Proposition 2-3-II).*

COROLLAIRE 2. *Si* $\mathcal{H}'$ *est une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ *élargissement de* $\mathcal{H}$ *pour* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, *pour que* $\mathcal{S}'$ *soit le groupoïde* Σ' *des éléments inversibles de* $\mathcal{H}'$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{S}$ *soit le groupoïde* Σ *des éléments inversibles de* $\mathcal{H}$.

En effet, supposons $\mathcal{S} = \Sigma$; pour tout $g' \in \mathcal{S}'$, il existe f et f' dans $\Sigma' \cap \mathcal{S}'$ et $h \in \Sigma$ tels que $g' = f' h f^{-1}$ et par suite $g' \in \Sigma'$; si $g \in \Sigma'$ alors il existe $h \in \mathcal{H}$ tel que $g = f_1' h f_1^{-1}$, où f_1 et f_1' appartiennent à $\mathcal{S}' \cap \Sigma'$, donc $h \in \Sigma$ et $g \in \mathcal{S}'$. Inversement, soit $\mathcal{S}' = \Sigma'$; alors la relation $\mathcal{S} = \mathcal{H} \cap \Sigma'$ et le fait que $\mathcal{H}$ est plein dans $\mathcal{H}'$ entraînent $\mathcal{S} \subset \Sigma$; donc $\mathcal{S} = \Sigma$ puisque $\mathcal{S}$ est plein dans Σ'.

THÉORÈME 1 *(Transitivité horizontale). Si* $\mathcal{H}'$ *est une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ *élargissement de la catégorie d'homomorphismes* $\mathcal{H}$ *pour* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$, *et si* $\mathcal{H}''$ *est une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}'', p'', \mathcal{S}'')$, *élargissement de la catégorie d'homomorphismes* $\mathcal{H}'$, *alors* $\mathcal{H}''$ *est un élargissement de la catégorie* $\mathcal{H}$ *au-dessus de* $\mathcal{C}''$.

COROLLAIRE. *Dans une classe de catégories d'homomorphismes, la relation :*

$\mathcal{H} < \mathcal{H}'$ *si et seulement si* $\mathcal{H}'$ *est un élargissement de la catégorie d'homomorphismes* $\mathcal{H}$

est une relation d'ordre.

Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie d'une catégorie $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{H}$ une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$. Un élargissement maximal de $\mathcal{H}$ dans la classe de tous les élargissements de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\mathcal{C}'$ sera appelé *élargissement de* $\mathcal{H}$ *à* $\mathcal{C}'$ ou élargissement *maximal* de la catégorie d'homomorphismes $\mathcal{H}$ pour $(\mathcal{C}', p, \mathcal{S})$.

Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie d'une catégorie $\bar{\mathcal{C}}$, Γ et $\bar{\Gamma}$ les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{C}$ et $\bar{\mathcal{C}}$. On dira que $\bar{\mathcal{C}}$ est un *élargissement de* $\mathcal{C}$ si $\bar{\mathcal{C}}$ considéré comme catégorie d'homomorphismes pour $(\bar{\mathcal{C}}, Id, \bar{\Gamma})$ est un élargissement de $\mathcal{C}$ considéré comme catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, Id, \Gamma)$.

PROPOSITION 3. *Soit* $\mathcal{C}$ *une sous-catégorie de* $\bar{\mathcal{C}}$, Γ *et* $\bar{\Gamma}$ *les groupoïdes des éléments inversibles de* $\mathcal{C}$ *et* $\bar{\mathcal{C}}$ *; pour que* $\bar{\mathcal{C}}$ *soit un élargissement de* $\mathcal{C}$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{C}$ *soit plein dans* $\bar{\mathcal{C}}$ *et que* $\bar{\Gamma}$ *soit le sous-groupoïde plein saturé de* $\bar{\mathcal{C}}$ *engendré par* Γ.

COROLLAIRE 1. *Si* $\mathcal{C}^i$ *est une composante connexe de* $\mathcal{C}$, *la composante connexe* $\bar{\mathcal{C}}^i$ *de* $\mathcal{C}^i$ *dans* $\bar{\mathcal{C}}$ *est un élargissement de* $\mathcal{C}^i$ *et* $\bar{\mathcal{C}}$ *est la réunion des* $\bar{\mathcal{C}}^i$.

COROLLAIRE 2. *Pour qu'une catégorie d'homomorphismes* $\mathcal{H}'$ *pour* $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ *soit un élargissement d'une catégorie d'homomorphismes* $\mathcal{H}$ *pour* $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$, *où* Σ *est le groupoïde des éléments inversibles de* $\mathcal{H}$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1° (C, p, Σ) *est une sous-espèce de structures de* $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$.

2° $\mathcal{H}'$ *est un élargissement de la catégorie* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{S}'$ *est le groupoïde des éléments inversibles de* $\mathcal{H}'$.

PROPOSITION 4. *Si* $\bar{\mathcal{C}}$ *est un élargissement d'une sous-catégorie* $\mathcal{C}$, *alors* $\bar{\mathcal{C}}$ *est une extension inessentielle* $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$ *de* $\mathcal{C}$ *et est équivalente à la catégorie induite* $\kappa_0^*(\mathcal{C})$. *Si* $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$ *et* $(\kappa', \bar{\mathcal{C}})$ *sont deux extensions inessentielles de* $\mathcal{C}$, *alors* κ *et* κ' *sont équivalents.*

DÉMONSTRATION. Pour tout $\bar{e} \in \bar{\mathcal{C}}_0$, choisissons un élément

$$f_{\bar{e}} \in \bar{\Gamma} \text{ tel que } \alpha(f_{\bar{e}}) \in \mathcal{C} \text{ et } \beta(f_{\bar{e}}) = \bar{e} ;$$

tout élément $\bar{k}$ de $\bar{\mathcal{C}}$ est de la forme

$$\bar{k} = f_{\bar{e}'} k f_{\bar{e}}^{-1}, \quad \text{où } k \in \mathcal{C},\ \alpha(\bar{k}) = \bar{e} \text{ et } \beta(\bar{k}) = \bar{e}'.$$

L'application $f_{\bar{e}} \mapsto \alpha(f_{\bar{e}})$ s'étend d'une facon unique en un foncteur κ de $\bar{\mathcal{C}}$ sur $\mathcal{C}$ qui prolonge l'identité sur $\mathcal{C}$, en posant $\kappa(\bar{k}) = k$. Tout $\bar{k} \in \bar{\mathcal{C}}$ peut s'identifier biunivoquement au triplet $(k, \bar{e}', \bar{e})$. Soit κ et κ' deux extensions du foncteur identité de $\mathcal{C}$ à $\bar{\mathcal{C}}$; si $\bar{e} \in \bar{\mathcal{C}}_0$ et $f \in \bar{\Gamma}$, $\alpha(f) \in \mathcal{C}_0$ et $\beta(f) = \bar{e}$, posons $\tau(\bar{e}) = \kappa'(f)\kappa(f^{-1})$. L'élément $\tau(\bar{e})$ ne dépend que de $\bar{e}$; en effet, si $f' \in \bar{\Gamma}$, $\alpha(f') \in \mathcal{C}$ et $\beta(f') = \bar{e}$, alors $f' = fk$, où $k \in \mathcal{C}$, et on a :

$$\kappa'(f')\kappa(f'^{-1}) = \kappa'(f)kk^{-1}\kappa(f^{-1}) = \tau(\bar{e}).$$

En particulier, si $e \in \mathcal{C}_0$, alors $\tau(e) = e$. Le triplet (κ', τ, κ) est une équivalence de κ sur κ' ; en effet, soit $\bar{k} \in \bar{\mathcal{C}}$, $\alpha(\bar{k}) = \bar{e}$ et $\beta(\bar{k}) = \bar{e}'$; de la relation $\bar{k} = f'kf^{-1}$, où f et $f' \in \bar{\Gamma}$, $k \in \mathcal{C}$, $\beta(f) = \bar{e}$, $\beta(f') = \bar{e}'$, on déduit:

$$\tau(\bar{e}')\kappa(\bar{k}) = \kappa'(f')\kappa(f')^{-1}\kappa(f')k\kappa(f^{-1}) =$$

$$= \kappa'(f')k\,\kappa'(f^{-1})\kappa'(f)\kappa(f)^{-1} = \kappa'(\bar{k})\tau(\bar{e}).$$

COROLLAIRE. *Soit $\bar{\mathcal{C}}'$ un élargissement d'une catégorie $\mathcal{C}'$ et ψ un foncteur de $\mathcal{C}'$ sur une catégorie $\mathcal{C}$ tel que ψ_0 soit une bijection. Alors il existe un élargissement $\bar{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ et une extension $\bar{\phi}$ de ψ à $\bar{\mathcal{C}}'$ tels que $\bar{\phi}$ soit une surjection sur $\bar{\mathcal{C}}$ et que $\bar{\phi}_0$ soit une injection.*

DÉMONSTRATION. Les notations sont celles utilisées dans la Proposition 8-1 et $\bar{\mathcal{C}}$ est identifié à $\psi_0^*(\mathcal{C})$. Un élément h de $\bar{\mathcal{C}}$ est de la forme $(\phi(\bar{k}), \beta(\bar{k}), \alpha(\bar{k}))$, où $\bar{k} \in \bar{\mathcal{C}}'$; si $\alpha(h)$ et $\beta(h)$ appartiennent à $\mathcal{C}_0$, on a $\alpha(\bar{k}) \in \mathcal{C}'_0$ et $\beta(\bar{k}) \in \mathcal{C}'_0$; il en résulte $\bar{k} \in \mathcal{C}'$, donc $h \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ est plein dans $\bar{\mathcal{C}}$. Soit $(e, \bar{e}', \bar{e}') \in \bar{\mathcal{C}}_0$; il existe $h' \in \bar{\Gamma}'$ avec $\alpha(h') = \bar{e}'$ et $\beta(h') = e'$, où $\psi(e') = e$; par suite $(\phi(h'), e', \bar{e}')$ est un élément de $\bar{\Gamma}$ admettant $(e, \bar{e}', \bar{e}')$ et $(e, e', e') \in \mathcal{C}_0$ pour unités ; par conséquent la composante connexe de Γ dans $\bar{\Gamma}$ est $\bar{\Gamma}$ et $\bar{\mathcal{C}}$ est un élargissement de $\mathcal{C}$. D'après la proposition, $\bar{\mathcal{C}}$ est déterminé à une équivalence près.

PROPOSITION 5. *Soit $\mathcal{C}$ un sous-groupoïde d'un groupoïde $\bar{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{C}'$ le sous-groupoïde plein engendré par $\mathcal{C}$ dans $\bar{\mathcal{C}}$; pour que tout foncteur de $\mathcal{C}$ dans une catégorie $\mathcal{C}''$ puisse se prolonger en un foncteur de $\bar{\mathcal{C}}$ vers $\mathcal{C}''$, il faut et il suffit que $\bar{\mathcal{C}}$ soit une extension inessentielle de $\mathcal{C}$.*

En effet, la condition est suffisante : on se ramène au cas où $\mathcal{C}$ est connexe ; alors $\bar{\mathcal{C}}$ est un élargissement de $\mathcal{C}'$, donc une extension inessentielle de $\mathcal{C}'$.

DÉFINITION 4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et Γ le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{C}$; pour toute classe d'intransitivité $\mathcal{C}_0^i$ de $\mathcal{C}_0$ relativement à Γ (Définition 3-2-II), choisissons une unité c_i. La sous-catégorie pleine $\check{\mathcal{C}}$ ayant pour unités les c_i est appelée *catégorie réduite de* $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 6. *Une catégorie $\mathcal{C}$ est un élargissement de toute catégorie réduite $\check{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$, donc est équivalente à une catégorie induite $\kappa_o^*(\check{\mathcal{C}})$.*

Une catégorie réduite $\check{\mathcal{C}}$ est un élément minimal pour la relation d'ordre définie ci-dessus (Corollaire du Théorème 1) dans toute classe de catégories contenant $\mathcal{C}$.

PROPOSITION 7. *Soit p un foncteur d'une catégorie $\mathcal{H}$ sur une catégorie $\mathcal{C}$; l'extension canonique (Définition 6-1) $\bar{\mathcal{H}}$ de $\mathcal{H}$ à $\bar{\mathcal{C}}$, où $\bar{\mathcal{C}}$ est un élargissement de $\mathcal{C}$, est un élargissement de $\mathcal{H}$ à $\bar{\mathcal{C}}$.*

En effet, soit κ le foncteur construit à la Proposition 3 et soit $\bar{\mathcal{H}}$ l'extension canonique de $\mathcal{H}$ à $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$; alors, si $(h, \bar{k}) \in \bar{\mathcal{H}}$, on a:

$$\bar{k} = f'_{\bar{e}'}\, k f_{\bar{e}}^{-1}, \quad \text{où} \quad \bar{e} = \alpha(\bar{k}) \text{ et } \bar{e}' = \beta(\bar{k}) ;$$

par suite $(h, \bar{k}) = (\beta(h), f'_{\bar{e}'})h(\alpha(h), f_{\bar{e}}^{-1})$. Donc $\bar{\mathcal{H}}$ est un élargissement de $\mathcal{H}$; cet élargissement est défini à une équivalence près dépendant du choix de κ, d'après les Propositions 7-1 et 4.

COROLLAIRE. *Soit $\mathcal{H}$ une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$; si $\bar{\mathcal{S}}$ est l'extension canonique de $\mathcal{S}$ à $\bar{\mathcal{C}}$, la catégorie $\bar{\mathcal{H}}$ est une catégorie d'homomorphismes pour $(\bar{\mathcal{C}}, p, \bar{\mathcal{S}})$, élargissement de la catégorie d'homomorphismes $\mathcal{H}$.*

THÉORÈME 2. *Soit $\mathcal{H}$ une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$, où Σ est un groupoïde, et soit $\bar{\mathcal{C}}$ une catégorie contenant $\mathcal{C}$. Alors tout élargissement de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\bar{\mathcal{C}}$ est équivalent à une sous-catégorie d'un élargissement canonique de $\mathcal{H}$ à $\bar{\mathcal{C}}$.*

DÉMONSTRATION. Soit Γ et $\bar{\Gamma}$ les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{C}$ et $\bar{\mathcal{C}}$, $\mathcal{H}'$ une catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$, où Σ' est un groupoïde élargissement de $\mathcal{H}$ au-dessus de $\bar{\mathcal{C}}$. A un élément h' de $\mathcal{H}'$ correspond la classe $\pi(h')$ des triplets

$$(h, f', f), \quad \text{où } f, f' \in \bar{\Gamma},\ p(\alpha(h)) = \alpha(f),\ p(\beta(h)) = \alpha(f'),$$
$$\text{tels que } h = f'^{-1} h' f \in \mathcal{H}.$$

Si on a aussi $(h, f_1', f_1) \in \pi(h')$, alors

$$h' = f'hf^{-1} = f_1'h_1f_1^{-1} \quad \text{et} \quad h = (f_1'^{-1}f')h(f_1^{-1}f)^{-1}.$$

Posons $f_1'^{-1}f' = g'$ et $f_1^{-1}f = g$; on a

$$g\alpha(h) = \alpha(h_1) \in \Sigma_0 \quad \text{et} \quad g'\beta(h) = \beta(h_1) \in \Sigma_0 ;$$

puisque Σ est plein dans Σ', alors $(g, \alpha(h)) \in \Sigma$ et $(g', \beta(h)) \in \Sigma$. Il en résulte que $\pi(h')$ est la classe des triplets $(h_1, f'g'^{-1}, fg^{-1})$, où

$$h_1 = g'hg^{-1}, \quad (g, \alpha(h)) \in \Sigma \quad \text{et} \quad (g', \beta(h)) \in \Sigma.$$

Soit $\alpha^*(\mathcal{H})$ la catégorie induite de $\mathcal{H}$ (Proposition 3-1) par α, où α désigne l'application $f \mapsto \alpha(f)$ de la classe $\mathcal{I}$ des éléments f de $\bar{\Gamma}$ tels que $\alpha(f) \in \mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}_0$. Soit ρ la relation d'équivalence :

$$(h_1, f_1', f_1) \sim (h, f', f) \text{ si et seulement si } f_1 = fg^{-1}, \; f_1' = f'g'^{-1}$$
$$h_1 = g'hg^{-1}, \; (g, \alpha(h)) \in \Sigma, \; (g', \beta(h)) \in \Sigma.$$

La relation ρ est compatible avec la multiplication dans $\alpha^*(\mathcal{H})$; soit $(h, f', f) \in \alpha^*(\mathcal{H})$; une unité équivalente modulo ρ à $(\alpha(h), f, f)$ est de la forme

$$(S_1, fg, fg), \quad \text{où } (g, S_1) \in \Sigma, \quad gS_1 = \alpha(h) ;$$

cette unité est l'unité à droite du triplet (hg, f', fg). D'après la Proposition 11-1-I on déduit de $\alpha^*(\mathcal{H})$ par passage au quotient selon ρ une catégorie quotient $\bar{\mathcal{H}}$. L'application π construite ci-dessus est une équivalence de $\mathcal{H}'$ sur une sous-catégorie de $\bar{\mathcal{H}}$; $\pi(\mathcal{H}')$ est l'image canonique dans $\bar{\mathcal{H}}$ de la sous-catégorie de $\alpha^*(\mathcal{H})$ formée des triplets (h, f', f), où f et f' sont dans $p'(\Sigma')$. L'application

$$(h, f', f) \text{ modulo } \rho \mapsto f'p(h)f^{-1}$$

est un foncteur $\bar{p}$ de $\bar{\mathcal{H}}$ vers $\bar{\mathcal{C}}$.

Σ opère sur la classe des couples (f, S) tels que

$$f \in \mathcal{I}, \quad S \in \mathcal{H}_0, \quad p(S) = \alpha(f),$$

par la loi de composition

$$(f, S)(g, S_1) = (fg, S_1) \quad \text{si et seulement si} \quad S = gS_1 .$$

Une unité (S, f, f) *modulo* ρ correspond de façon biunivoque à la classe d'intransitivité $\bar{S} = (f, S)\Sigma$ de (f, S) relativement à Σ (Définition 3-2-II);

$\bar{\mathcal{H}}_0$ s'identifie à la classe des élements $\bar{S}$. Alors (f', f, h) *modulo* ρ est un homomorphisme de $(f, S)\Sigma$ vers $(f', S')\Sigma$, où $S = a(h)$, $S' = \beta(h)$. La classe d'équivalence modulo ρ d'un triplet $((g, S), f', f)$, où $(g, S) \in \Sigma$ est formée de triplets (h_1, f_1', f_1), où $h_1 \in \Sigma$; en particulier, elle contient le triplet $(S, f'g, f)$. Soit Γ_1 le groupoïde plein saturé engendré par Γ dans $\bar{\mathcal{C}}$ et $\bar{\Sigma}$ le groupoïde des couples

$$(g, \bar{S}), \quad \text{où } \bar{S} \in \bar{\mathcal{H}}_0,\ g \in \Gamma_1,\ p(\bar{S}) = a(g).$$

Γ_1 opère sur $\bar{\Sigma}_0$ pour la loi de composition :

$$g((f, S)\Sigma) = (gf, S)\Sigma \quad \text{si et seulement si } gf \text{ est défini.}$$

En identifiant $(g, \bar{S})$, où $\bar{S} = (f, S)\Sigma$, à la classe (S, gf, f) *modulo* ρ on identifie $\bar{\Sigma}$ à un groupoïde d'isomorphismes et $\bar{\mathcal{H}}$ est une catégorie d'homomorphismes pour $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\Sigma})$. Identifions de plus $h \in \mathcal{H}$ avec

$$(h, e', e) \text{ modulo } \rho, \quad \text{où } e = p(a(h)) \text{ et } e' = p(\beta(h)) ;$$

donc en particulier $S \in \mathcal{H}_0$ avec (S, e, e) *modulo* $\rho = (S, e)\Sigma$. Alors (f, S) devient un isomorphisme de S sur $\bar{S} = (f, S)\Sigma$ et (f', f, h) *modulo* ρ s'identifie avec $(f', S')h(f, S)^{-1}$, où $S = a(h)$ et $S' = \beta(h)$. Enfin $\mathcal{H}$ est plein dans $\bar{\mathcal{H}}$. 1+

COROLLAIRE 1. *Soit Γ' un sous-groupoïde de $\bar{\mathcal{C}}$ tel que pour tout $e' \in \Gamma'_0$ il existe $f \in \Gamma'$ avec $a(f) \in p(\Sigma)$ et $\beta(f) = e'$. Alors l'image canonique dans $\bar{\mathcal{H}}$ de la sous-catégorie de $a^*(\mathcal{H})$ formée des triplets (h, f', f), où $f \in \Gamma'$, $f' \in \Gamma'$, est un élargissement $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$, catégorie d'homomorphismes pour $(\bar{\mathcal{C}}, p', \Sigma')$ telle que $\Gamma' = p'(\Sigma')$.*

CAS PARTICULIER. Prenons pour $\mathcal{H}$ la catégorie $\mathcal{C}$, considérée comme catégorie d'homomorphismes pour $(\mathcal{C}, Id, \Gamma)$ et soit $\bar{\mathcal{C}}$ l'élargissement maximal de $\mathcal{C}$ à $\bar{\mathcal{C}}$. On identifie (f, e), où $e = a(f)$ avec f ; alors les objets pour $\bar{\mathcal{C}}$ sont les classes $f\Gamma$.

COROLLAIRE 2. *Pour que $\bar{\mathcal{C}}$ soit une catégorie d'hypermorphismes au-dessus de $\bar{\mathcal{C}}$, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : si on a $gk = k'$, où k et k' appartiennent à $\mathcal{C}$ et où $g \in \mathcal{G}$, alors $g \in \Gamma$.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $\bar{\mathcal{C}}$ est une catégorie d'hypermorphismes.

Les triplets $(k', \beta(g), e)$ et (k, g, e), où $gk = k'$, $e = \alpha(k')$ ont même projection $k' = gk$ sur $\bar{\mathcal{C}}$ et même unité à droite (e, e, e) ; ils appartiennent donc à la même classe modulo ρ, c'est-à-dire que $g \in \Gamma$. Inversement, supposons la condition vérifiée ; soit (k, f', f) et (k_1, f_1', f_1) deux triplets de $\alpha^*(\mathcal{C})$ tels que

$$f' k f^{-1} = f_1' k_1 f_1^{-1} \quad \text{et} \quad (\alpha(k), f, f) \sim (\alpha(k_1), f_1, f_1) \text{ modulo } \rho .$$

De cette dernière relation, on déduit que $f_1 = fg$, où $g \in \Gamma$. Alors

$$k_1 = f_1'^{-1} f' k g, \quad \text{où} \quad k_1 \in \mathcal{C}, \ kg \in \mathcal{C}, \ g' = f_1'^{-1} f' \in \Gamma',$$

donc $g' \in \Gamma$ et $k_1 = g' k g$; par suite, les deux triplets sont équivalents modulo ρ.

THÉORÈME 3 *(Transitivité verticale). Soit* Σ *et* Σ' *deux groupoïdes et* (Σ, p', Σ') *une espèce de superstructures au-dessus de* $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ *(Définition 4-3-II); soit* $(\mathcal{C}, \bar{p}, \bar{\Sigma})$ *et* $(\bar{\Sigma}, \bar{p}', \bar{\Sigma}')$ *les élargissements maximaux de* $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ *et* (Σ, p', Σ'). *Alors* $(\mathcal{C}, \bar{p}\bar{p}', \bar{\Sigma}')$ *est équivalent à l'élargissement maximal de* $(\mathcal{C}, pp', \Sigma')$.

DÉMONSTRATION. Soit $(\mathcal{C}, p'', \Sigma'')$ l'espèce de structures correspondant à Σ' au-dessus de $\mathcal{C}$ (Théorème 1-3-II), qu'on identifiera à $(\mathcal{C}, pp', \Sigma')$; soit $(\mathcal{C}, \bar{p}'', \bar{\Sigma}'')$ l'élargissement maximal de $(\mathcal{C}, p'', \Sigma'')$; alors $\bar{p}''(\bar{\Sigma}'')$ est le sous-groupoïde plein saturé engendré dans $\mathcal{C}$ par $pp'(\Sigma')$. Par définition, $\bar{p}'(\bar{\Sigma}')$ est le sous-groupoïde plein saturé de $\bar{\Sigma}$ engendré par $p'(\Sigma')$; par suite $(\mathcal{C}, \bar{p}, \bar{p}'(\bar{\Sigma}'))$ est une sous-espèce de $(\mathcal{C}, \bar{p}, \bar{\Sigma})$ et $(\bar{\Sigma}, \bar{p}', \bar{\Sigma}')$ est une espèce de superstructures sur $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\Sigma})$; de plus, $\bar{p}(\bar{p}'(\bar{\Sigma}'))$ est un sous-groupoïde plein saturé de $\mathcal{C}$ ayant mêmes unités que $\bar{p}''(\bar{\Sigma}'')$; donc $\bar{p}(\bar{p}'(\bar{\Sigma}'))$ est identique à $\bar{p}''(\bar{\Sigma}'')$. Puisque Σ' est plein dans $\bar{\Sigma}'$, alors l'espèce $(\mathcal{C}, \bar{p}\bar{p}', \bar{\Sigma}')$ est un élargissement de l'espèce $(\mathcal{C}, pp', \Sigma')$ sur le même sous-groupoïde de $\mathcal{C}$ que l'élargissement maximal $(\mathcal{C}, \bar{p}'', \bar{\Sigma}'')$, donc il est équivalent à cet élargissement maximal.

COROLLAIRE 1. *Soit* $(\mathcal{C}, p', \Sigma')$ *une sous-espèce de* $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$; *l'élargissement maximal* $(\mathcal{C}, \bar{p}, \bar{\Sigma})$ *de* $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ *est une espèce de structures sous-jacente à l'élargissement maximal* $(\mathcal{C}, \bar{p}', \bar{\Sigma}')$ *de* $(\mathcal{C}, p', \Sigma')$ *et* $\bar{\Sigma}'$

s'identifie à l'élargissement maximal $\bar{\Sigma}'$ *de* Σ' *à* $\bar{\Sigma}$.

En effet, Σ'_0 est une espèce de structures au-dessus de Σ, car Σ' opère sur Σ'_0, le composé de $((f, S'), S')$ où $(f, S') \in \Sigma'$ étant fS'.

COROLLAIRE 2. *Soit* (Σ, p', Σ') *une espèce de superstructures au-dessus de* $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$, *où* Σ *et* Σ' *sont des groupoïdes; soit* $\mathcal{H}$ *une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ *et* $\mathcal{H}'$ *une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{H}, p', \Sigma')$. *Soit* $\bar{\mathcal{H}}$ *l'élargissement à* $\bar{\mathcal{C}}$ *de* $\mathcal{H}$ *et* $\bar{\mathcal{H}}'$ *l'élargissement à* $\bar{\mathcal{C}}$ *de* $\mathcal{H}'$ *considéré comme catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}, pp', \Sigma')$. *En considérant* $\mathcal{H}'$ *comme catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{H}, p', \Sigma')$, *soit* $\bar{\mathcal{H}}''$ *la catégorie d'homomorphismes pour* $(\bar{\mathcal{H}}, \bar{p}', \bar{\Sigma}')$ *qui est un élargissement de* $\mathcal{H}'$ *(Corollaire 2 du Théorème 1). Alors* $\bar{\mathcal{H}}''$ *considéré comme catégorie d'homomorphismes pour* $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}\bar{p}', \bar{\Sigma}')$ *est équivalent à* $\bar{\mathcal{H}}'$.

En effet, l'application

$$(\bar{f}', S')h'(\bar{f}, S)^{-1} \mapsto (f', S')h'(f, S)^{-1}, \quad \text{où } h' \in \mathcal{H}', \ \bar{f} \in \bar{p}'(\bar{\Sigma}'),$$
$$\bar{f}' \in \bar{p}'(\bar{\Sigma}'), \ f = \bar{p}(\bar{f}), \ f' = \bar{p}(\bar{f}'),$$

est une équivalence de l'élargissement $\bar{\mathcal{H}}''$ de $\mathcal{H}'$ sur l'élargissement $\bar{\mathcal{H}}'$ de $\mathcal{H}'$.

COROLLAIRE 3. *Soit* $\mathcal{H}$ *une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ *et* $\bar{\mathcal{C}}$ *une catégorie contenant* $\mathcal{C}$; *soit* $\tilde{\mathcal{C}}$ *l'élargissement à* $\mathcal{C}$ *de* $\bar{\mathcal{C}}$. *Alors l'élargissement canonique* $\bar{\mathcal{H}}$ *de* $\mathcal{H}$ *à* $\bar{\mathcal{C}}$ *est équivalent à l'extension canonique de* $\mathcal{H}$ *à* $\tilde{\mathcal{C}}$.

Ce corollaire résulte du Corollaire 2 et de la Proposition 7.

THÉORÈME 4. *Soit* $\mathcal{H}$ *une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ *et* $\bar{\mathcal{C}}$ *une catégorie contenant* $\mathcal{C}$ *telle que la condition suivante soit vérifiée:*

$k' = kg$, où $k \in \mathcal{C}$, $k' \in \mathcal{C}$ et g inversible dans $\bar{\mathcal{C}}$, entraîne que g est inversible dans $\mathcal{C}$.

Alors il existe un élargissement maximal $(\tilde{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\mathcal{S}})$ *de* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ *et une catégorie d'homomorphismes* $\bar{\mathcal{H}}$ *pour* $(\tilde{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\mathcal{S}})$ *qui soit un élargissement de* $\mathcal{H}$ *tels que, si* $\mathcal{H}'$ *est une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$, *élargissement de* $\mathcal{H}$, *alors* $\mathcal{H}'$ *est équivalent à une sous-catégorie d'homo-*

morphismes de $\bar{\mathcal{H}}$, *c'est-à-dire* $\mathcal{H}'$ *s'identifie à une sous-catégorie de* $\bar{\mathcal{H}}$ *et*
1 $(\mathcal{C}', p', \mathcal{S}')$ *à une sous-espèce de* $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\mathcal{S}})$.

THÉORÈME 5. *Soit* $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ *et* $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$ *deux espèces de structures où* Σ *et* Σ' *sont des groupoïdes; soit* (ϕ_0, ψ) *une application covariante de* $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ *dans* $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$; *soit* $[\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\Sigma}]$ *et* $[\bar{\mathcal{C}}', \bar{p}', \bar{\Sigma}']$ *deux élargissements de* $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$ *et* $[\mathcal{C}', p', \Sigma']$. *Si* $\bar{\psi}$ *est un foncteur de* $\bar{\mathcal{C}}$ *vers* $\bar{\mathcal{C}}'$ *dont la restriction à* $\mathcal{C}$ *est* ψ, *alors il existe une application covariante* $(\bar{\phi}_0, \bar{\psi})$ *déterminée d'une façon unique telle que* ϕ_0 *soit la restriction de* $\bar{\phi}_0$ *à* Σ_0 ; *le foncteur* $\bar{\phi}$ *correspondant à* $\bar{\phi}_0$ *(Proposition 1-2-II) est un élargissement de* ϕ *à* $\bar{\Sigma}$.

En effet, $\bar{\phi}_0$ est l'application :

$$(f, S)\Sigma \mapsto (\bar{\psi}(f), \phi_0(S))\Sigma', \quad \text{où } \alpha(f) = p(S) \,;$$

$(\bar{\phi}_0, \bar{\psi})$ est une application covariante puisque l'on a :

$$\bar{\phi}_0(g(f, S)\Sigma) = (\bar{\psi}(gf), \phi_0(S))\Sigma' = \bar{\psi}(g)(\bar{\psi}(f), \phi_0(S))\Sigma',$$

où $g \in \bar{\mathcal{C}}$, $\alpha(g) = \beta(f)$.

COROLLAIRE. *Soit* $\mathcal{H}$ *une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$, $\mathcal{H}'$ *une catégorie d'homomorphismes pour* $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$; *soit* $\bar{\mathcal{H}}$ *et* $\bar{\mathcal{H}}'$ *des catégories d'homomorphismes pour* $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\Sigma})$ *et* $(\bar{\mathcal{C}}', \bar{p}', \bar{\Sigma}')$, *élargissements de* $\mathcal{H}$ *et* $\mathcal{H}'$. *Soit* ψ *un foncteur de* $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{C}'$ *et* $\bar{\psi}$ *un foncteur de* $\bar{\mathcal{C}}$ *vers* $\bar{\mathcal{C}}'$ *dont la restriction à* $\mathcal{C}$ *est* ψ. *Tout foncteur* ϕ *de* $\mathcal{H}$ *vers* $\mathcal{H}'$ *relèvement de* ψ *relativement à* (p', p) *s'élargit d'une façon unique en un foncteur* $\bar{\phi}$ *de* $\bar{\mathcal{H}}$ *vers* $\bar{\mathcal{H}}'$ *relèvement de* $\bar{\psi}$ *relativement à* $(\bar{p}', \bar{p})$.

En effet, la restriction de $\bar{\phi}$ à $\bar{\Sigma}$ est déterminée par le théorème. Alors, pour

$$\bar{h} = (f', S')h(f, S)^{-1}, \quad \text{où } h \in \mathcal{H},\ (f, S) \in \bar{\Sigma},\ (f', S') \in \bar{\Sigma},$$

on posera $\bar{\phi}(\bar{h}) = \bar{\phi}(f', S')\,\phi(h)\,\bar{\phi}(f, S)^{-1}$.

THÉORÈME 6. *Avec les notations du corollaire du Théorème 5, soit* $\bar{\psi}'$ *un autre foncteur de* $\bar{\mathcal{C}}$ *vers* $\bar{\mathcal{C}}'$ *dont la restriction à* $\mathcal{C}$ *est* ψ *et soit* $\bar{\phi}'$ *son relèvement relativement à* $(\bar{p}', \bar{p})$. *Alors il existe une équivalence naturelle* $(\bar{\phi}', \tau, \bar{\phi})$.

DÉMONSTRATION. Soit $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\Sigma})$ et $(\bar{\mathcal{C}}', \bar{p}', \bar{\Sigma}')$ les élargissements maximaux de $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ et $(\mathcal{C}', p', \Sigma')$. D'après le corollaire du Théorème 5 il existe des foncteurs $\bar{\phi}$ et $\bar{\phi}'$, élargissements de ϕ et ϕ' à $\bar{\mathcal{H}}$ et $\bar{\mathcal{H}}'$. Soit $\bar{S} \in \bar{\Sigma}_0$ et $(f, S) \in \bar{\Sigma}$ un isomorphisme de $S \in \Sigma_0$ vers $\bar{S}$; posons: $\tau(\bar{S}) = \bar{\phi}'(f, S)\bar{\phi}(f, S)^{-1}$; l'élément $\tau(\bar{S})$ ne dépend que de la donnée de $\bar{S}$; en effet, si (f', S') est un isomorphisme de $S' \in \Sigma_0$ vers $\bar{S}$, alors on a:

$$(f', S') = (f, S)(g, S_1), \quad \text{où} \quad (g, S_1) \in \Sigma \ ;$$

par suite

$$\bar{\phi}'(f', S')\bar{\phi}(f', S')^{-1} = \bar{\phi}'(f, S)\phi(g, S_1)\phi(g, S_1)^{-1}\bar{\phi}(f, S)^{-1} = \tau(\bar{S}).$$

Soit τ l'application $\bar{S} \mapsto \tau(\bar{S})$ de $\bar{\Sigma}_0$ vers $\bar{\Sigma}'$. Montrons que $(\bar{\phi}', \tau, \bar{\phi})$ est une équivalence naturelle; soit $\bar{h} \in \bar{\mathcal{H}}$; on a $\bar{h} = (f', S')h(f, S)^{-1}$, où

$h \in \mathcal{H}$, $(f, S) \in \bar{\Sigma}$, $(f', S') \in \bar{\Sigma}$, $fS = \bar{S}$, $f'S' = \bar{S}'$, $\alpha(h) = \bar{S}$, $\beta(h) = \bar{S}'$.

Alors on trouve:

$$\begin{aligned}
\tau(\bar{S}')\bar{\phi}(\bar{h}) &= \bar{\phi}'(f', S')\bar{\phi}(f', S')^{-1}\bar{\phi}(f', S')\phi(h)\bar{\phi}(f, S)^{-1} \\
&= \bar{\phi}'(f', S')\phi(h)\bar{\phi}'(f, S)^{-1}\bar{\phi}'(f, S)\bar{\phi}(f, S)^{-1} \\
&= \bar{\phi}'(\bar{h})\tau(\bar{S}).
\end{aligned}$$

CHAPITRE 2
GROUPOÏDES INDUCTIFS ET STRUCTURES LOCALES

1 ## *I. GROUPOÏDES INDUCTIFS*

1. Groupoïdes préinductifs et groupoïdes inductifs.

Rappelons que, dans une classe ordonnée $\mathfrak{A}$, on dit que a est la *borne inférieure d'une sous-classe B de $\mathfrak{A}$* si, pour tout $b \in B$, on a $a < b$ et si la relation $a' < b$ pour tout $b \in B$ entraîne $a' < a$. On dit que d est la *borne supérieure de B* si, pour tout $b \in B$, on a $b < d$ et si les relations $b < d'$ pour tout $b \in B$ entraînent $d < d'$. La borne inférieure de B est donc le plus grand élément de la classe des minorants de B et la borne supérieure de B est le plus petit élément de la classe des majorants de B.

Dans toute la suite, la borne supérieure d'une sous-classe B sera appelée *agrégat de B* et désignée par $\cup B$; la borne inférieure de B sera appelée *intersection de B* et notée $\cap B$. Si B est la classe réduite aux deux éléments a et b, nous écrirons aussi :

$$\cup B = a \cup b, \quad \cap B = a \cap b.$$

DÉFINITION 1. Une *classe préinductive* est une classe $\mathfrak{A}$ munie d'une relation d'ordre telle que deux éléments quelconques aient une intersection et que $\mathfrak{A}$ admette un plus petit élément, noté 0. Une *classe prélocale* est une classe préinductive $\mathfrak{A}$ vérifiant l'axiome de distributivité (D) suivant :

(D) Pour toute sous-classe B de $\mathfrak{A}$ admettant un agrégat et pour tout $a \in \mathfrak{A}$, la classe des éléments $a \cap b$, où $b \in B$, admet $a \cap (\cup B)$ pour agrégat : $a \cap (\cup B) = \bigcup_{b \in B} (a \cap b)$.

DÉFINITION 2. Une *classe inductive* est une classe $\mathfrak{A}$ munie d'une relation d'ordre telle que toute sous-classe non vide de $\mathfrak{A}$ admette une intersection. Une *classe locale* est une classe inductive dans laquelle l'axiome (D) est vérifié.

Une classe inductive $\mathfrak{A}$ est aussi une classe préinductive ; son plus petit élément est l'intersection de la classe $\mathfrak{A}$, que nous noterons 0 ;

cet élément est aussi l'agrégat de la sous-classe vide, puisque tout élément de $\mathcal{A}$ est un majorant de la sous-classe vide.

PROPOSITION 1. *Pour qu'une classe ordonnée $\mathcal{A}$ soit une classe inductive, il faut et il suffit que toute sous-classe B de $\mathcal{A}$, majorée dans $\mathcal{A}$, admette un agrégat.*

En effet, si $\mathcal{A}$ est une classe inductive, $\cup B$ est l'intersection de la classe des majorants de B, qui n'est pas vide par définition. Inversement, si toute sous-classe B majorée admet un agrégat, alors la sous-classe vide admet un agrégat noté 0, qui est le plus petit élément de $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{A}'$ une sous-classe non vide de $\mathcal{A}$. La classe des minorants de $\mathcal{A}'$ n'est pas vide puisqu'elle contient 0, et son agrégat est l'intersection de $\mathcal{A}'$.

REMARQUES. 1° Une classe préinductive est aussi appelée *$\cap$-demi-treillis* ayant un plus petit élément. Une classe inductive est un $\cap$-demi-treillis complet. 1¶

2° La notion d'ensemble inductif au sens de Bourbaki est une notion différente de celle de classe inductive.

Soit B une sous-classe majorée d'une classe inductive $\mathcal{A}$ et soit $a \in \mathcal{A}$; la classe B' ayant pour éléments $a \cap b$, où $b \in B$, est majorée par a et on a: $\cup B' < a \cap (\cup B)$. $\mathcal{A}$ est une classe locale lorsque cette inégalité est une égalité quels que soient la sous-classe majorée B et l'élément a.

DÉFINITION 3. Un groupoïde $\mathcal{S}$ est appelé *groupoïde (pré)inductif* s'il est muni d'une relation d'ordre pour laquelle $\mathcal{S}$ soit une classe (pré)inductive et si l'axiome (I) suivant est vérifié:

(I) Soit $\phi(f)$, pour tout $f \in \mathcal{S}$, la classe des éléments $f' < f$; alors l'application $\phi : f \mapsto \phi(f)$ est un foncteur généralisé de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}$, appelé *foncteur d'induction*.

Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif; nous désignerons le composé de deux éléments f et g tels que $\alpha(g) = \beta(f)$ par $g.f$. L'axiome (I) est équivalent à l'axiome suivant:

(I') Si $e \in \mathcal{S}_0$ et $f < e$, alors $f \in \mathcal{S}_0$. La relation $h < g.f$ est équivalente à la relation $h = g'.f'$, où $g' < g$ et $f' < f$.
Il en résulte en particulier que 0 est une unité, puisque $0 < e$ pour tout $e \in \mathcal{S}_0$. Les fonctions α et β sont compatibles avec l'induction c'est-à-dire $f < f'$ entraîne $\alpha(f) < \alpha(f')$ et $\beta(f) < \beta(f')$. Plus précisément, d'après la Proposition 4-2-I, Chapitre 1, on a

$$\phi(\alpha(f)) = \alpha(\phi(f)) \quad \text{et} \quad \phi(\beta(f)) = \beta(\phi(f)) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S} ;$$

d'après la Proposition 5-2-I, Chapitre 1, la classe $\phi(f^{-1})$ est la classe des inverses des éléments de $\phi(f)$. De plus, $f = \cup\phi(f)$.

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde préinductif et $f \in \mathcal{S}$. Pour tout $e < \alpha(f)$ il existe un et un seul $g < f$ tel que $\alpha(g) = e$ et pour tout $e' < \beta(f)$, il y a un et un seul $g' < f$ tel que $\beta(g') = e'$. On appellera g l'élément induit par f sur e et g' l'élément induit à gauche par f sur e'.*

En effet, l'égalité $\phi(\alpha(f)) = \alpha(\phi(f))$ montre qu'il existe un $g \in \phi(f)$ tel que $\alpha(g) = e$. Soit aussi $g_1 \in \phi(f)$ tel que $\alpha(g_1) = e$; alors $g_1 . g^{-1}$ est défini; comme $g^{-1} \in \phi(f^{-1})$, on a $g_1 . g^{-1} < f.f^{-1} = \beta(f)$; par suite $g_1 . g^{-1}$ est une unité, c'est-à-dire :

$$g_1 . g^{-1} = \beta(g_1) = \alpha(g^{-1}) = \beta(g).$$

Donc $g_1 = g$. On démontre de même l'existence et l'unicité de g'.

COROLLAIRE. *Si $g < f$, $h < f$ et $\alpha(g) < \alpha(f)$, alors on a $g < h$.*

En effet, l'élément induit par h sur $\alpha(g)$ est identique à l'élément g induit par f sur $\alpha(g)$, d'où $g < h$.

PROPOSITION 3. *L'agrégat d'une classe d'unités est une unité. Si A est une sous-classe du groupoïde préinductif $\mathcal{S}$ admettant un agrégat, alors $\cup\alpha(A)$, $\cup\beta(A)$ et $\cup A^{-1}$, où A^{-1} désigne la classe des inverses des éléments de A, sont définis; de plus, on a:*

$$\cup\alpha(A) = \alpha(\cup A), \quad \cup\beta(A) = \beta(\cup A), \quad (\cup A)^{-1} = \cup A^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. Soit E une classe d'unités admettant un agrégat f; alors $\alpha(f)$ est un majorant de E, d'où $f < \alpha(f)$ et $f \in \mathcal{S}_0$. Pour tout $a \in A$, on a $\alpha(a) < \alpha(\cup A)$. Soit f un majorant de $\alpha(A)$; les éléments $\alpha(f)$ et

$e = f \cap \alpha(f)$ sont aussi des majorants de $\alpha(A)$. Soit a' l'élément induit par $\cup A$ sur $e \cap \alpha(\cup A)$; comme les éléments a et a' sont induits par $\cup A$ et que $\alpha(a) < \alpha(a')$, on a : $a < a'$ et $\cup A < a'$. Donc

$$a' = \cup A \quad \text{et} \quad \alpha(\cup A) = e \cap \alpha(\cup A),$$

d'où

$$\alpha(\cup A) < e < f \quad \text{et} \quad \alpha(\cup A) = \cup \alpha(A).$$

On montre de même que $\beta(\cup A) = \cup \beta(A)$. Les relations $a < \cup A$ entraînent $a^{-1} < (\cup A)^{-1}$; soit b un majorant de A^{-1} ; on a :

$$a < b^{-1} \text{ et } \cup A < b^{-1}, \text{ par suite } (\cup A)^{-1} < b \text{ et } (\cup A)^{-1} = \cup A^{-1}.$$

PROPOSITION 4. *Soit A une sous-classe du groupoïde préinductif $\mathcal{S}$ majorée par f. Si $\cup \alpha(A)$ ou $\cup \beta(A)$ est défini, alors $\cup A$ existe. $\cap A$ est défini si et seulement si $\cap \alpha(A)$ ou $\cap \beta(A)$ est défini, et alors*

$$\alpha(\cap A) = \cap \alpha(A), \quad \beta(\cap A) = \cap \beta(A).$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $e = \cup \alpha(A)$ soit défini ; soit f' l'élément induit par f sur e ; pour tout $a \in A$, on a $a < f'$. Soit g un autre majorant de A ; alors $h = g \cap f$ est aussi un majorant de A et $\alpha(h)$ est un majorant de $\alpha(A)$; par suite $\alpha(f') = e < \alpha(h)$. Les éléments h et f' étant induits par f, il en résulte $f' < h < g$. Donc f' est l'agrégat de A.
Supposons défini $\cap \alpha(A) = e$; alors $e < \alpha(f)$ et l'élément f'' induit par f sur e étant identique à l'élément induit par a sur e, pour tout $a \in A$, est un minorant de A ; de plus si h est un autre minorant de A, on a

$$h < f, \quad \alpha(h) < e, \quad \text{donc} \quad h < f'',$$

c'est-à-dire $f'' = \cap A$.
Supposons maintenant que $\cap A$ soit défini ; les relations $\cap A < a$ pour tout $a \in A$ entraînent $\alpha(\cap A) < \alpha(a) < \alpha(f)$. Soit e' un minorant de $\alpha(A)$; on a $e' < \alpha(f)$ et les éléments f''' et a' induits par f et a sur e' sont identiques ; par conséquent :

$$f''' < a \quad \text{et} \quad f''' < \cap A, \quad \text{d'où} \quad e' = \alpha(f''') < \alpha(\cap A),$$

c'est-à-dire $\alpha(\cap A) = \cap \alpha(A)$. On montre de même $\beta(\cap A) = \cap \beta(A)$.

COROLLAIRE. *Un groupoïde préinductif dont la classe des unités est une classe inductive pour l'ordre induit est un groupoïde inductif.*

En effet, si A est une sous-classe de $\mathcal{S}$ majorée par f, alors $\alpha(A)$ admet $\alpha(f)$ pour majorant, donc $\cup\alpha(A)$ et par suite $\cup A$ sont définis.

PROPOSITION 5. *Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde muni d'un foncteur généralisé ϕ de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}$. Pour que $\mathcal{S}$ soit un groupoïde inductif ayant ϕ pour foncteur d'induction, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

a) Si $f' \in \phi(f)$, alors $\phi(f') \subset \phi(f)$.

b) La relation $\phi(f) = \phi(f')$ entraîne $f = f'$.

c) Pour toute sous-classe A de $\phi(f)$, il existe $g \in \phi(f)$ tel que
1 *$A \subset \phi(g)$ et que $g \in \phi(h)$ pour tout h tel que $A \subset \phi(h)$.*

DÉMONSTRATION. Les conditions sont évidemment nécessaires et $g = \cup A$. Inversement, considérons la relation

$$f' < f \text{ si et seulement si } f' \in \phi(f).$$

L'axiome a signifie que cette relation est transitive. Si $f \in \phi(f')$ et si $f' \in \phi(f)$, on a

$$\phi(f) \subset \phi(f') \text{ et } \phi(f') \subset \phi(f), \text{ d'où } \phi(f) = \phi(f') \text{ et } f = f'$$

(axiome b). L'axiome c appliqué à $\phi(f)$ prouve qu'il existe $g \in \phi(f)$ tel que $\phi(f) \subset \phi(g)$; l'axiome a entraînant $\phi(g) \subset \phi(f)$, on a $f = g \in \phi(f)$. Donc la relation $f' < f$ est une relation d'ordre. Si g et g' sont deux éléments vérifiant l'axiome c pour A, on a

$$g' \in \phi(g) \text{ et } g \in \phi(g'), \text{ d'où } g = g' = \cup A.$$

PROPOSITION 6. *La loi de composition dans un groupoïde préinductif $\mathcal{S}$ peut être étendue à tous les couples (f', f) en une loi de composition associative $(f', f) \mapsto f'f$, de la façon suivante :*

Soit g' l'élément induit par f' sur $e = \alpha(f') \cap \beta(f)$ et g l'élément induit à gauche par f sur e ; on pose $f'f = g'.g$.

Alors $f'f$ est l'agrégat de la sous-classe K de $\mathcal{S}$ formée des produits $h'.h$, où $h' < f'$, $h < f$.

DÉMONSTRATION. Si $\alpha(f') = \beta(f)$, alors $g'.g = f'.f = f'f$. Montrons que la classe K admet $f'f$ pour agrégat. En effet, $g' < f'$, $g < f$, et $\alpha(g') = \beta(g)$ entraînent $g'.g \in K$; inversement, soit $h'.h \in K$; on a $\alpha(h') < \alpha(f')$ et $\beta(h) < \beta(f)$, c'est-à-dire

$$\alpha(h') = \beta(h) < e = \alpha(g') = \beta(g),$$

par suite $h' < g'$; de même $h < g$; donc $h'.h < g'.g$. Il en résulte $f'f = \cup K$. Si f, f' et f'' sont des éléments de $\mathcal{S}$, alors $f''(f'f)$ est l'agrégat des produits $h''.k$, où $k \in \phi(g'.g)$ et $h'' < f''$; puisque ϕ est un foncteur généralisé, on a $k = h'.h$, où $h' < f'$ et $h < f$; d'où $h''.k = h''.(h'.h)$ et $f''(f'f)$ est l'agrégat des produits $h''.(h'.h)$, où

$$h'' < f'', \quad h' < f', \quad h < f, \quad \alpha(h'') = \beta(h'), \quad \alpha(h') = \beta(h).$$

Comme $h''.(h'.h) = (h''.h').h$, on voit que $f''(f'f) = (f''f')f$.

DÉFINITION 4. La loi de composition définie dans la Proposition 6 est appelée *pseudomultiplication* ; un groupoïde (pré)inductif muni de sa pseudomultiplication est appelé un *(pré)pseudogroupe*.

La Proposition 6 signifie encore que, pour la pseudomultiplication, $\mathcal{S}$ est un demi-groupe ; pour que ce demi-groupe admette une unité, il faut et il suffit que $\mathcal{S}_0$ admette un agrégat dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION 7. *Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe ; les unités du groupoïde $\mathcal{S}$ sont les seuls éléments idempotents de $\mathcal{S}$ pour la pseudomultiplication ; si e et e' appartiennent à $\mathcal{S}_0$, on a $ee' = e'e = e \cap e'$. La relation d'ordre dans $\mathcal{S}$ est compatible avec la pseudomultiplication et elle est équivalente à chacune des relations suivantes :*

$f' < f$ si, et seulement si, il existe $e \in \mathcal{S}_0$ tel que $f' = fe$;
$f' < f$ si, et seulement si, il existe $e' \in \mathcal{S}_0$ tel que $f' = e'f$.

DÉMONSTRATION. Par définition, on a : $ee' = e \cap e' = e'e$.
Si f est idempotent, on a $ff = f$; en multipliant à droite et à gauche par f^{-1}, on trouve :

$$f^{-1}fff^{-1} = f^{-1}ff^{-1}, \quad \text{ou encore} \quad \alpha(f)\beta(f) = f^{-1}$$

et $f \in \mathcal{S}_0$. Si $f' < f$, alors $\alpha(f') < \alpha(f)$ et f' est l'élément induit par f sur

$\alpha(f')$, donc $f' = f\alpha(f')$; de même on montre $f' = \beta(f')f$.

COROLLAIRE. *Pour tout* $f \in \mathcal{S}$, $f' \in \mathcal{S}$ *et* $e \in \mathcal{S}_0$, *on a les formules suivantes :*

$$f'f = (f'\beta(f)).(\alpha(f')f),\ \alpha(fe) = \alpha(f)e,\ \ \beta(ef) = e\beta(f),$$
$$fe = \beta(fe)f = f\alpha(fe),\quad ef = f\alpha(ef) = \beta(ef)f,$$
$$(ef)^{-1} = f^{-1}e,\quad (fe)^{-1} = ef^{-1},\quad (f'f)^{-1} = f^{-1}f'^{-1}.$$

En effet, montrons que l'on a $(fe)^{-1} = ef^{-1}$; les éléments $(fe)^{-1}$ et ef^{-1} sont induits par f^{-1}; de plus

$$\beta(fe)^{-1} = \alpha(fe) = \alpha(f)e \quad \text{et} \quad \beta(ef^{-1}) = e\beta(f^{-1}) = e\,\alpha(f)\ ;$$

donc $\beta(fe)^{-1} = \beta(ef^{-1})$ et $(fe)^{-1} = ef^{-1}$. Posons

$$e' = \alpha(f')\beta(f) = \beta(f'^{-1})\alpha(f^{-1});$$

on a:

$$(f'f)^{-1} = ((f'e').(e'f))^{-1} = (e'f)^{-1}(f'e')^{-1} =$$
$$= (f^{-1}e').(e'f'^{-1}) = f^{-1}f'^{-1}.$$

PROPOSITION 8. *Pour qu'un groupoïde* $\mathcal{S}$ *soit un groupoïde inductif, il faut et il suffit que* $\mathcal{S}$ *soit muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome (1) de la Définition 3, que* $\mathcal{S}_0$ *soit une classe inductive pour l'ordre induit et que toute sous-classe* E *de* $\mathcal{S}_0$ *majorée dans* $\mathcal{S}_0$ *admette un agrégat dans* $\mathcal{S}$.

DÉMONSTRATION. *Montrons que la condition est suffisante.* Soit $\cup E$ l'agrégat de E dans $\mathcal{S}_0$; alors l'agrégat de E dans $\mathcal{S}$ est majoré par $\cup E$, donc appartient à $\mathcal{S}_0$ et coïncide avec $\cup E$. Soit F une sous-classe non vide de $\mathcal{S}$ et A la sous-classe des minorants de F. Les sous-classes $\alpha(A)$ et $\beta(A)$ étant des sous-classes majorées dans $\mathcal{S}_0$ admettent des agrégats dans $\mathcal{S}$; posons $\cup\alpha(A) = e$, $\cup\beta(A) = e'$. Montrons que, pour tout $f \in F$, on a $fe = e'f$. En effet, tout élément a de A étant induit par f sur $\alpha(a) < e$, fe est un majorant de A ; par suite $e' < \beta(fe)$ et d'après le corollaire de la Proposition 7, $e'f < \beta(fe)f = fe$; de même $e'f$ majorant A, on a

$$fe < f\alpha(e'f) = e'f, \quad \text{d'où} \quad fe = e'f.$$

Soit f' un autre élément de F ; puisque $\beta(f'e)=e'=\beta(fe)$ le composé $g=(f'e)^{-1}.(fe)$ est défini et $\alpha(g)=e$; pour tout $a\in A$, on a

$$\alpha(a)=a^{-1}.a<(f'e)^{-1}(fe)=g\ ;$$

par conséquent e est induit par g et les éléments e et g qui ont même unité à droite sont égaux. Il en résulte que $(f'e)^{-1}$ est inverse à gauche de fe ; on voit de même qu'il est inverse à droite, donc $f'e=fe$. Ainsi fe est un minorant de F et un majorant de A, c'est-à-dire $fe=\cap F=\cup A$. Par suite $\mathcal{S}$ est une classe inductive. 1

Nous allons chercher maintenant quelles sont les conditions que doit vérifier un demi-groupe pour former un pseudogroupe. Pour énoncer le théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 1. *Soit $\mathcal{S}_0$ une classe munie d'une loi de composition associative et commutative telle que tous les éléments soient idempotents; alors la relation*

$e<e'$ si, et seulement si, il existe a tel que $e=e'a$

est une relation d'ordre équivalente à la relation

$e<e'$ si, et seulement si, $e=e'e$.

De plus, si $\mathcal{S}_0$ admet un élément 0 tel que $0e=e$ pour tout $e\in\mathcal{S}_0$, alors $\mathcal{S}_0$ est une classe préinductive.

DÉMONSTRATION. Si $e=e'e$, alors $e<e'$ pour la première relation ; inversement, si $e=e'a$, on a

$$e'e=e'(e'a)=e'a=e,$$

donc les deux relations sont équivalentes. Comme $ee=e$, on a $e<e$; si $e=e'e$ et $e'=ee'$, alors $e=e'$; si $e<e'$ et $e'<e''$, on a :

$$e=e'e=(e''e')e=e''(e'e)=e''e \quad \text{et} \quad e<e''\ ;$$

par suite cette relation est une relation d'ordre. L'élément 0 de $\mathcal{S}_0$, s'il existe, est le plus petit élément. Enfin, si $a<e$ et $a<e'$, on a :

$$a(e'e)=(ae')e=ae=a, \quad \text{donc} \quad a<e'e,$$

c'est-à-dire $e'e$ est l'intersection de e et e'.

1 THÉORÈME 1. *Soit* $\mathcal{S}$ *une classe munie d'une loi de composition associative; soit* $\mathcal{S}_0$ *une sous-classe de* $\mathcal{S}$ *formée d'idempotents et stable pour la loi de composition; supposons les axiomes suivants vérifiés:*

1° La restriction de la loi de composition à $\mathcal{S}_0$ *est commutative.*

2° Pour tout $f \in \mathcal{S}$, *la classe des éléments* $e \in \mathcal{S}_0$ *tels que* $fe = f$ *admet une intersection* $\alpha(f)$ *telle que* $f\alpha(f) = f$, *pour la structure d'ordre définie dans* $\mathcal{S}_0$ *par la loi de composition (Lemme 1); de même la classe des éléments* e' *de* $\mathcal{S}_0$ *tels que* $e'f = f$ *admet une intersection* $\beta(f)$ *pour laquelle* $\beta(f)f = f$.

3° Pour tout $f \in \mathcal{S}$, *il existe un élément* f' *de* $\mathcal{S}$ *tel que*

$$f'f = \alpha(f), \quad ff' = \beta(f).$$

Alors $\mathcal{S}$ *est muni d'une structure d'ordre par la relation:*

$$f' < f \quad \text{si, et seulement si, il existe } e \in \mathcal{S}_0 \text{ tel que } f' = fe.$$

Si de plus l'axiome 4(a) suivant est satisfait, alors $\mathcal{S}$ *est muni d'une structure de (pré)pseudogroupe dont la pseudomultiplication est la loi de composition donnée dans* $\mathcal{S}$ *et telle que* $\mathcal{S}_0$ *soit la classe des unités du groupoïde associé:*

4° $\mathcal{S}_0$ *est une classe inductive (pour l'ordre induit par* $\mathcal{S}$*) et toute sous-classe de* $\mathcal{S}_0$ *majorée dans* $\mathcal{S}_0$ *admet un agrégat dans* $\mathcal{S}$.

4a° $\mathcal{S}$ *est une classe préinductive.*

La démonstration du théorème résultera des lemmes suivants:

LEMME 2. *Pour tout* $e \in \mathcal{S}_0$ *et pour tout* $f \in \mathcal{S}$, *on a:*

$$\alpha(fe) = e\alpha(f) \quad \text{et} \quad \beta(ef) = e\beta(f).$$

En particulier, $\alpha(e) = \beta(e) = e$.

En effet, on a:

$$fe(e\,\alpha(f)) = (f\alpha(f))e = fe, \quad \text{donc} \quad \alpha(fe) < e\alpha(f);$$

d'autre part, en multipliant les deux membres de l'égalité $fe\,\alpha(fe) = fe$ par un élément f' tel que $f'f = \alpha(f)$, on trouve:

$$f'fe\,\alpha(fe) = (f'f)e, \quad \text{ou encore} \quad (\alpha(f)e)\alpha(fe) = \alpha(f)e,$$

ce qui prouve, d'après le Lemme 1, que $\alpha(f)e < \alpha(fe)$. D'où $\alpha(fe)=e\alpha(f)$. On démontre de même $\beta(ef) = e\beta(f)$ en utilisant l'égalité $ff' = \beta(f)$. En particulier $\alpha(e) = \alpha(ee) = e\alpha(e) = e$.

LEMME 3. *Dans $\mathcal{S}$, la restriction de la loi de composition aux couples (g, f) tels que $\alpha(g) = \beta(f)$ définit sur $\mathcal{S}$ une structure de catégorie pour laquelle $\mathcal{S}_0$ est la classe des unités.*

DÉMONSTRATION. Lorsque nous écrirons le composé de g et f sous la forme $g.f$, ceci signifiera que $\alpha(g) = \beta(f)$. Pour que $f.e$ soit défini, il faut et il suffit que $\alpha(f) = \beta(e) = e$; alors $f.e = f.\alpha(f) = f$; de même pour que $e'.f$ soit défini, il faut et il suffit que $e' = \beta(f)$ et on a $e'.f = f$. Donc $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ sont les unités à gauche et à droite de f pour la multiplication restreinte. Comme pour tout $e \in \mathcal{S}_0$ on a $\alpha(e) = e$, il en résulte que $\mathcal{S}_0$ est la classe des unités de $\mathcal{S}$. Si $g.f$ est défini, on a :

$$(g.f)\,\alpha(f) = gf \quad \text{et par suite } \alpha(g.f) < \alpha(f) ;$$

d'autre part, soit g' un élément tel que $g'g = \alpha(g)$; en multipliant à droite par g' les deux membres de l'équation $g.f\alpha(gf) = g.f$, on obtient

$$(g'g)f\alpha(gf) = (g'g)f, \quad \text{ou encore} \quad \alpha(g)f\alpha(gf) = \alpha(g)f ;$$

puisque $\alpha(g) = \beta(f)$, on a

$$\beta(f)f\alpha(gf) = f\alpha(gf) = f, \quad \text{d'où} \quad \alpha(f) < \alpha(gf) \text{ et } \alpha(g.f) = \alpha(f).$$

On montre de même que $\beta(g.f) = \beta(g)$. Par suite les axiomes a, b, c, d d'une catégorie sont vérifiés par $\mathcal{S}$.

LEMME 4. *La catégorie $\mathcal{S}$ définie au Lemme 3 est un groupoïde et tout élément idempotent pour la loi de composition initiale dans $\mathcal{S}$ appartient à $\mathcal{S}_0$.*

DÉMONSTRATION. Montrons que si f' désigne un élément tel que l'on ait $f'f = \alpha(f)$ et $ff' = \beta(f)$, alors $\beta(f) < \alpha(f')$. En effet, en mutipliant à droite et à gauche les deux membres de l'égalité $f'\alpha(f') = f'$ par f, on trouve

$$ff'\alpha(f')f = f, \quad \text{d'où} \quad \beta(f)\,\alpha(f')f = f,$$

ou encore en utilisant l'axiome 1 et l'associativité, $\alpha(f')f = f$; donc $\beta(f) < \alpha(f')$ d'après l'axiome 2. En partant de la relation $\beta(f')f' = f'$ on démontre de même $\alpha(f) < \beta(f')$. Posons $f^{-1} = f'\beta(f)$; on a:

$f^{-1}f = f'\beta(f)f = f'f = \alpha(f)$ et $ff^{-1} = ff'\beta(f) = \beta(f)\beta(f) = \beta(f)$;

1 d'où $\beta(f) < \alpha(f^{-1})$ et $\alpha(f) < \beta(f^{-1})$. De plus

$f^{-1}\beta(f) = f'\beta(f)\beta(f) = f^{-1}$ et $\alpha(f)f^{-1} = f^{-1}(ff^{-1}) = f^{-1}\beta(f) = f^{-1}$;

il en résulte d'après les Lemmes 1 et 2,

$$\alpha(f^{-1}) = \beta(f)\alpha(f^{-1}) = \beta(f) \quad \text{et} \quad \beta(f^{-1}) = \alpha(f)\beta(f^{-1}) = \alpha(f).$$

Ainsi f^{-1} est inverse de f dans la catégorie $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est un groupoïde. Soit $f \in \mathcal{S}$ tel que $ff = f$; en multipliant à droite et à gauche par f^{-1} cette égalité, on trouve

$$f^{-1}fff^{-1} = f^{-1}ff^{-1} \quad \text{ou encore} \quad \alpha(f)\beta(f) = f^{-1},$$

d'où $f^{-1} \in \mathcal{S}_0$ et $f \in \mathcal{S}_0$.

LEMME 5. *Dans $\mathcal{S}$, la relation*

$f < g$ *si, et seulement si, il existe $e \in \mathcal{S}_0$ tel que $f = ge$,*

est une relation d'ordre compatible avec les fonctions α et β.

En effet, on a $f = f\alpha(f)$, donc $f < f$; si $f = ge$ et $g = fe'$, alors

$$f = (fe')e = (ge)e'e = gee' = fe' = g ;$$

si $f = ge$ et $g = he'$, alors $f = h(e'e)$ donc $f < h$. De plus, si $f < g$, on a $f = ge$, d'où, en vertu du Lemme 2,

$$\alpha(f) = \alpha(ge) = e\,\alpha(g) \quad \text{et} \quad \alpha(f) < \alpha(g) ;$$

en multipliant par $\beta(g)$ les deux membres de l'égalité $f = ge$ on obtient $\beta(g)f = \beta(g)ge = ge = f$, ou encore $\beta(f) < \beta(g)$ d'après l'axiome 2.

LEMME 6. *La relation d'ordre définie au Lemme 5 équivaut à:*

$f < g$ *si, et seulement si, il existe $e' \in \mathcal{S}_0$ tel que $f = e'g$.*

De plus $f < g$ entraîne $f = g\,\alpha(f) = \beta(f)g$.

DÉMONSTRATION. Si $f = ge$, montrons que $f = \beta(f)g$. En effet, puisque $\alpha(f) = \alpha(g)e$, on a:

$$(fg^{-1})(fg^{-1}) = (fg^{-1})geg^{-1} = f\alpha(g)eg^{-1} = fg^{-1}$$

et l'élément fg^{-1}, étant idempotent, appartient à $\mathcal{S}_0$. De plus

$$\beta(eg^{-1}) = e\alpha(g) = \alpha(ge), \quad \text{donc} \quad fg^{-1} = (ge).(eg^{-1}),$$

et $fg^{-1} = \beta(ge)$. En multipliant à droite par g les deux membres de cette égalité, il vient

$$f(g^{-1}g) = \beta(ge)g, \quad \text{ou encore} \quad ge\,\alpha(g) = (g\alpha(g))e = f = \beta(ge)g.$$

D'une manière analogue, on prouve $f = g\,\alpha(f)$.

LEMME 7. *L'application ϕ qui associe à g la classe des éléments $f < g$ est un foncteur généralisé de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}$.*

DÉMONSTRATION. Si $f < e$, où $e \in \mathcal{S}_0$, alors $f \in \mathcal{S}_0$, puisque $\mathcal{S}_0$ est stable pour la loi de composition donnée. Soit $h = g.f$ et $h' < h$; on a :

$$h' = he = (g.f)e = g(fe) = g\beta(fe)fe\ ;$$

de plus

$$\alpha(g\beta(fe)) = \alpha(g)\beta(fe) = \beta(fe), \quad \text{puisque} \quad \beta(fe) < \beta(f) = \alpha(g)$$

d'où $h' = g'.f'$, avec

$$g' = g\beta(fe) < g \quad \text{et} \quad f' = fe < f\ ;$$

ceci prouve $\phi(h) \subset \phi(g).\phi(f)$.

Inversement, soit $g' < g$ et $f' < f$ tels que $\alpha(g') = \beta(f')$; d'après le Lemme 6, on a $g' = e'g$ et $f' = fe$, où $e \in \mathcal{S}_0$ et $e' \in \mathcal{S}_0$; par suite

$$g'.f' = (e'g).(fe) = e'(gfe) < gfe < gf$$

et $\phi(g).\phi(f) \subset \phi(h)$.

Les Lemmes 1 à 7 utilisent seulement les axiomes 1, 2 et 3. Si de plus l'axiome 4a est vérifié, $\mathcal{S}$ est un prépseudogroupe. Si l'axiome 4 est vérifié, il résulte de la Proposition 8 que $\mathcal{S}$ est un pseudogroupe.

PROPOSITION 9. *Soit $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}$ deux groupoïdes (pré)inductifs; alors le groupoïde produit (Définition 8-2-1-1) $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ est un groupoïde (pré) inductif pour la relation d'ordre :*

$$(g', g) < (f', f) \quad \textit{si, et seulement si,} \quad g < f \ \textit{et} \ g' < f'.$$

DÉMONSTRATION. Soit ϕ et ϕ' les foncteurs d'induction dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}'$. Soit $\phi' \times \phi$ l'application $(f', f) \mapsto \phi'(f') \times \phi(f)$ de $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ dans la classe des sous-classes de $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$. Si (e', e) est une unité de $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$, alors $\phi'(e') \times \phi(e)$ est une classe d'unités. Soit (f', f) et (g', g) deux éléments de $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ tels que $g.f$ et $g'.f'$ soient définis. Un élément de

$$[(\phi' \times \phi)(g', g)].[(\phi' \times \phi)(f', f)]$$

est de la forme

$$(g_1', g_1).(f_1', f_1) = (g_1'.f_1', g_1.f_1),$$

où $f_1' < f'$, $g_1' < g'$, $f_1 < f$, $g_1 < g$, donc appartient à $(\phi' \times \phi)(g'.f', g.f)$. Inversement, si $(h', h) \in (\phi' \times \phi)(g'.f', g.f)$, on a $h' \in \phi'(g'.f')$, $h \in \phi(g, f)$, d'où

$$(h', h) = (g_1'.f_1', g_1.f_1) = (g_1', g_1).(f_1', f_1),$$

$g_1' < g'$, $f_1' < f'$, $g_1 < g$, $f_1 < f$ et

$$(h', h) \in [(\phi' \times \phi)(g', g)].[(\phi' \times \phi)(f', f)].$$

Par suite $\phi' \times \phi$ est un foncteur généralisé de $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ et définit une relation d'ordre dans $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$. Pour tout couple $(f', f) \in \mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ et $(g', g) \in \mathcal{S}' \times \mathcal{S}$, on a:

$$(f', f) \cap (g', g) = (f' \cap g', f \cap g).$$

Si $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des groupoïdes inductifs et si B est une sous-classe majorée de $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$, alors ses projections canoniques A et A' dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont majorées dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}'$ et $(\cup A', \cup A)$ est la borne supérieure de B dans $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ est un groupoïde inductif. Le plus petit élément de $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ est $(0, 0)$.

DÉFINITION 5. Avec les notations de la Proposition 9, $\mathcal{S}' \times \mathcal{S}$ sera appelé *produit des groupoïdes (pré)inductifs* $\mathcal{S}'$ *et* $\mathcal{S}$.

2. Groupoïdes locaux et sous-pseudogroupes.

DÉFINITION 1. Un *groupoïde (pré) local* est un groupoïde (pré)inductif dont la classe des unités vérifie l'axiome de distributivité (D).

PROPOSITION 1. *Soit* $\mathcal{S}$ *un groupoïde prélocal; alors* $\mathcal{S}$ *est une classe* *prélocale.*

DÉMONSTRATION. Soit A une sous-classe de $\mathcal{S}$ ayant un agrégat et soit $f \in \mathcal{S}$. Posons $g = f \cap (\cup A)$; on a $g = g \cap (\cup A)$ et, pour tout $a \in A$, $f \cap a = g \cap a$. Puisque g et a sont induits par $\cup A$, les Propositions 3-1 et 4-1 entraînent

$$\alpha(g) = \alpha(g) \cap \alpha(\cup A) \quad \text{et} \quad \alpha(g \cap a) = \alpha(g) \cap \alpha(a).$$

En utilisant l'axiome (D) dans $\mathcal{S}_0$, on trouve

$$\alpha(g) \cap \alpha(\cup A) = \bigcup_{a \in A} \alpha(g)\, \alpha(a),$$

d'où

$$\alpha(g) = \bigcup_{a \in A} \alpha(g \cap a) = \bigcup_{a \in A} \alpha(f \cap a).$$

Par suite, d'après la Proposition 4-1, la classe des éléments $f \cap a$, où $a \in A$, admet un agrégat ayant $\alpha(g)$ pour unité à droite. Donc $\bigcup_{a \in A} f \cap a = g$ et l'axiome (D) est vérifié dans $\mathcal{S}$.

PROPOSITION 2. *Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal, A et A' deux sous-classes de $\mathcal{S}$ admettant des agrégats. Alors la sous-classe $A'A$ des pseudo-produits $a'a$, où $a' \in A'$ et $a \in A$, admet $(\cup A')(\cup A)$ pour agrégat.*

DÉMONSTRATION. Soit E une sous-classe de $\mathcal{S}_0$ ayant $\bar{e}$ pour agrégat. L'axiome (D) entraîne les relations suivantes :

$$\beta(\bar{e}(\cup A)) = \bar{e}\beta(\cup A) = \bar{e} \cap (\cup \beta(A)) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ e \in E}} (e\beta(a)) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ e \in E}} \beta(ea).$$

La classe EA des éléments ea, où $a \in A$ et $e \in E$, étant majorée par $\cup A$, la Proposition 4-1 montre que EA admet $\bar{e}(\cup A)$ pour agrégat. Soit A et A' des sous-classes admettant des agrégats. Alors $(\cup A')(\cup A)$ est un majorant de $A'A$. De plus,

$$\alpha((\cup A')(\cup A)) = \alpha(\alpha(\cup A')(\cup A))\ ;$$

d'après ce qui précède, on a :

$$\alpha(\cup A')(\cup A) = (\cup \alpha(A'))(\cup A) = \cup B,$$

où B est la sous-classe de $\mathcal{S}$ ayant pour éléments les pseudoproduits $\alpha(a')a$, où $a' \in A'$, $a \in A$; puisque $\alpha(a'a) = \alpha(\alpha(a')a)$, les sous-classes $\alpha(B)$ et $\alpha(A'A)$ de $\mathcal{S}_0$ sont identiques ; par conséquent :

$$\alpha((\cup A')(\cup A)) = \alpha(\cup B) = \cup\alpha(B) = \cup\alpha(A'A) = \alpha(\cup A'A),$$

donc $(\cup A')(\cup A) = \cup A'A$.

DÉFINITION 2. Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe. On appellera *classe compatible de* $\mathcal{S}$ une sous-classe F de $\mathcal{S}$ telle que, pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, on ait :

$$\alpha(f \cap f') = \alpha(f)\alpha(f'), \quad \beta(f \cap f') = \beta(f)\beta(f').$$

En particulier, une sous-classe de $\mathcal{S}$ majorée dans $\mathcal{S}$ est compatible d'après la Proposition 4-1.

PROPOSITION 3. *Soit* $\mathcal{S}$ *un prépseudogroupe,* $f \in \mathcal{S}$ *et* $f' \in \mathcal{S}$. *La condition :*

$$\alpha(f \cap f') = \alpha(f)\,\alpha(f') \quad (\textit{resp. } \beta(f \cap f') = \beta(f)\beta(f'))$$

est équivalente à chacune des conditions suivantes :

1^o $f\alpha(f') = f'\alpha(f)$,

2^o $f\alpha(f') = f \cap f'$,

3^o $f'f^{-1}$ *est une unité*

(*resp.* $1'^o$ $\beta(f)f' = \beta(f')f$,

$2'^o$ $\beta(f)f' = f \cap f'$,

$3'^o$ $f'^{-1}f$ *est une unité*).

Elle entraîne aussi : $f'f^{-1} = \beta(f \cap f')$ (*resp.* $f'^{-1}f = \alpha(f \cap f')$).

En effet, d'après le corollaire de la Proposition 7-1,

$$f'f^{-1} = (f'\beta(f^{-1})).(\alpha(f')f^{-1}) = (f'\alpha(f)).(f\alpha(f'))^{-1} \ ;$$

pour que $f'f^{-1}$ soit une unité, il faut et il suffit que $f'\alpha(f) = f\alpha(f')$; cette égalité entraîne

$$f'\alpha(f)\alpha(f') = f\alpha(f)\alpha(f') = f \cap f'.$$

PROPOSITION 4. *Soit* $\mathcal{S}$ *un prépseudogroupe,* F *et* G *deux classes compatibles,* $\phi(F)$ *la classe des éléments induits par les éléments de* F, F^{-1} *la classe des inverses des éléments de* F *et* GF *la classe des pseudoproduits* gf, *où* $g \in G$, $f \in F$; *alors* $\phi(F)$, F^{-1} *et* GF *sont des classes compatibles. Si* F *et* G *sont de plus saturés par intersection finie, il en* *est de même pour F^{-1} et GF.*

DÉMONSTRATION. Soit $f \in F$, $f' \in F$, $g \in G$, $g' \in G$, $e \in \mathcal{S}_0$ et $e' \in \mathcal{S}_0$. D'après le corollaire de la Proposition 7-1,

$$(fe)^{-1} f'e' = ef^{-1} f'e' \in \mathcal{S}_0 \quad \text{et} \quad (f'e')^{-1}(fe) \in \mathcal{S}_0 ,$$

d'où $\phi(F)$ est compatible. Les relations :

$$(f'^{-1})^{-1} f^{-1} = f' f^{-1} \in \mathcal{S}_0 \quad \text{et} \quad f^{-1}(f'^{-1})^{-1} = f^{-1} f' \in \mathcal{S}_0$$

entraînent que F^{-1} est compatible. On a

$$(g'f')(gf)^{-1} = g'f'f^{-1}g^{-1} = g'\beta(f \cap f')g^{-1} =$$
$$= \beta(g'\beta(f \cap f'))g'g^{-1} \in \mathcal{S}_0 ;$$

de même $(g'f')^{-1} gf \in \mathcal{S}_0$ et GF est compatible. De la relation

$$f^{-1} \cap f'^{-1} = f^{-1}\beta(f') = (\beta(f')f)^{-1} = (f \cap f')^{-1}$$

on déduit que, si $f \cap f' \in F$, alors $f^{-1} \cap f'^{-1} \in F^{-1}$. Enfin on a:

$$(g \cap g')(f \cap f') = g'\alpha(g) f \alpha(f') \quad \text{et} \quad \alpha(\alpha(g)f) = \alpha(gf) ;$$

par suite $\alpha(g)f = f\alpha(gf)$ et

$$(g \cap g')(f \cap f') = g'f\alpha(gf)\alpha(f') = g'f'\alpha(f)\,\alpha(gf) =$$
$$= g'f'\alpha(gf) = g'f' \cap gf.$$

Donc de $f \cap f' \in F$ et $g \cap g' \in G$, il résulte

$$g'f' \cap gf = (g \cap g')(f \cap f') \in GF.$$

COROLLAIRE. *Si $f \in F$, $f' \in F$, $e \in \mathcal{S}_0$, $e' \in \mathcal{S}_0$, on a:*

$$ef \cap e'f' = ee'(f \cap f').$$

En effet, ef et $e'f'$ étant compatibles, on a :

$$ef \cap e'f' = e'\beta(f')ef = ee'\beta(f')f = ee'(f \cap f').$$

DÉFINITION 3. Soit $\mathfrak{A}$ une classe préinductive. Une sous-classe $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ est appelée *sous-classe inductive (faible) de* $\mathfrak{A}$ si elle vérifie les axiomes suivants :

1° $\mathfrak{A}'$ est saturé par intersection finie.

2° Pour toute sous-classe B de $\mathfrak{A}'$ (majorée dans $\mathfrak{A}'$) admettant un agrégat dans $\mathfrak{A}$, on a $\cup B \in \mathfrak{A}'$.

Il en résulte que $\mathfrak{A}'$ est une classe préinductive, pour l'ordre induit; si $\mathfrak{A}$ est inductive, toute sous-classe inductive (faible) est une classe inductive pour l'ordre induit. L'intersection d'une classe de sous-classes inductives (faibles) d'une classe préinductive $\mathfrak{A}$ est une sous-classe inductive (faible) de $\mathfrak{A}$. Si B est une sous-classe de $\mathfrak{A}$, l'intersection des sous-classes inductives (faibles) de $\mathfrak{A}$ contenant B est appelée *sous-classe inductive (faible) engendrée par B dans $\mathfrak{A}$*.

DÉFINITION 4. Soit $\mathfrak{A}$ une classe préinductive. Une sous-classe $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ est appelée *partie sous-inductive (faible) de $\mathfrak{A}$* si elle vérifie les axiomes suivants:

1'° Si $a < b$, $a' < b$, $a \in \mathfrak{A}'$, $a' \in \mathfrak{A}'$, $b \in \mathfrak{A}'$, alors $a \cap a' \in \mathfrak{A}'$.

2'° Pour toute sous-classe B de $\mathfrak{A}'$ (majorée dans $\mathfrak{A}'$) admettant un un agrégat dans $\mathfrak{A}$, on a $\cup B \in \mathfrak{A}'$.

1 Si $\mathfrak{A}$ est une classe inductive, une partie sous-inductive (faible) $\mathfrak{A}'$ de $\mathfrak{A}$ est une classe inductive pour l'ordre induit par $\mathfrak{A}$; l'agrégat d'une sous-classe de $\mathfrak{A}'$ dans $\mathfrak{A}'$ est identique à son agrégat dans $\mathfrak{A}$; l'intersection de deux éléments de $\mathfrak{A}'$ dans $\mathfrak{A}'$ diffère en général de leur intersection dans $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{A}$ est seulement préinductif, $\mathfrak{A}'$ peut ne pas être une classe préinductive pour l'ordre induit.

L'intersection d'une classe de parties sous-inductives (faibles) d'une classe préinductive $\mathfrak{A}$ est une partie sous-inductive (faible) de $\mathfrak{A}$. Si B est une sous-classe de $\mathfrak{A}$, l'intersection $\mathfrak{B}$ des parties sous-inductives (faibles) contenant B est appelée *partie sous-inductive (faible) engendrée par B dans $\mathfrak{A}$*. Si $\mathfrak{B}$ est la classe des agrégats des sous-classes de B (majorées dans B) admettant un agrégat dans $\mathfrak{A}$, B est appelé *base de $\mathfrak{B}$*.

PROPOSITION 5. *Soit B une sous-classe d'une classe prélocale $\mathfrak{A}$ qui contienne avec deux éléments majorés dans $\mathfrak{A}$ leur intersection; alors B est une base de la partie sous-inductive (faible) $\mathfrak{B}$ qu'elle engendre et $\mathfrak{B}$ contient avec deux éléments majorés dans $\mathfrak{A}$ leur intersection.*

En effet, soit F la classe des agrégats des sous-classes de B (majorées dans B) admettant un agrégat dans $\mathcal{A}$; soit B' et B'' deux sous-classes de B telles que $\cup B' \in F$ et $\cup B'' \in F$ et qu'il existe $a \in \mathcal{A}$ avec $\cup B' < a$ et $\cup B'' < a$; utilisant l'axiome (D), on trouve :

$$(\cup B') \cap (\cup B'') = \bigcup_{\substack{b' \in B' \\ b'' \in B''}} b' \cap b'' \in F,$$

d'où $F = \mathcal{B}$.

COROLLAIRE. *Si B est une sous-classe d'un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$ telle que l'on ait $B\alpha(B) \subset B$ (resp. $\beta(B)B \subset B$), alors B est une base de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}\alpha(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ (resp. $\beta(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$).*

En effet, les relations $b \in B$, $b' \in B$, $b < a$ et $b' < a$, où $a \in \mathcal{S}$, entraînent $b \cap b' = b\alpha(b') \in B$ et la proposition prouve que B est une base de $\mathcal{B}$. Soit B' et B'' deux sous-classes de B telles que $\cup B' \in \mathcal{B}$ et $\cup B'' \in \mathcal{B}$; en utilisant la Proposition 2, on trouve :

$$(\cup B')\alpha(\cup B'') = \bigcup_{\substack{b' \in B' \\ b'' \in B''}} b'\alpha(b'') \in \mathcal{B},$$

d'où $\mathcal{B}\alpha(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$.

DÉFINITION 5. Soit $\mathcal{S}$ un prépseudogroupe ; une sous-classe $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ est appelée *sous-pseudogroupe (faible) de* $\mathcal{S}$ si les axiomes suivants sont vérifiés :

1° $\mathcal{S}'$ est stable pour la pseudomultiplication.

2° L'inverse d'un élément de $\mathcal{S}'$ appartient à $\mathcal{S}'$.

3° $\mathcal{S}'$ contient $\cup B$ pour toute sous-classe B de $\mathcal{S}'$ (majorée dans $\mathcal{S}'$) admettant un agrégat.

Il résulte de ces axiomes que $\mathcal{S}'_0$ est une sous-classe inductive (faible) de $\mathcal{S}_0$. La classe $\mathcal{S}_0$ est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{S}$.

Si tout élément de $\mathcal{S}$ est une unité, alors un sous-pseudogroupe (faible) est une sous-classe inductive (faible) de la classe $\mathcal{S}$.

PROPOSITION 6. *Un sous-pseudogroupe (faible) $\mathcal{S}'$ d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$ contient avec deux éléments compatibles f et g leur intersection.*

En effet, on a $f \cap g = f\alpha(g) \in \mathcal{S}'$.

COROLLAIRE. $\mathcal{S}'$ *est*

COROLLAIRE. $\mathcal{S}'$ *est une partie sous-inductive* $\hat{(}$*faible*$\hat{)}$ *de* $\mathcal{S}$.

PROPOSITION 7. *Un sous-pseudogroupe faible* $\mathcal{S}'$ *d'un pseudogroupe* $\mathcal{S}$ *muni de l'ordre induit est un pseudogroupe.*

En effet, soit $f \in \mathcal{S}'$ et $g \in \mathcal{S}'$ tels que $g.f$ soit défini et soit $h \in \mathcal{S}'$ tel que $h < g.f$. Alors

$$h = (\beta(h)\, g).(f\, a(h)), \quad \text{où} \quad \beta(h) g \in \mathcal{S}' \text{ et } f a(h) \in \mathcal{S}' ;$$

donc l'axiome 1 (Definition 3-1) est vérifié.

Remarquons que la Proposition 7 n'est pas vraie en remplaçant pseudogroupe par prépseudogroupe.

PROPOSITION 8. *Pour qu'une sous-classe* $\mathcal{S}'$ *d'un prépseudogroupe* $\mathcal{S}$ *vérifie les axiomes 1 et 2 de la Définition 5, il faut et il suffit que* $\mathcal{S}'$ *soit un sous-groupoïde de* $\mathcal{S}$ *et que* $f \in \mathcal{S}'$ *et* $e \in \mathcal{S}'_0$ *entraîne* $fe \in \mathcal{S}'$.

En effet, supposons ces conditions vérifiées; soit $f \in \mathcal{S}'$ et $e \in \mathcal{S}'$; d'après le corollaire de la Proposition 7-1, on a $f^{-1} e = (ef)^{-1}$; de plus,

$$f^{-1} \in \mathcal{S}' \text{ et } f^{-1} e \in \mathcal{S}', \text{ donc } ef = (f^{-1} e)^{-1} \in \mathcal{S}'.$$

Soit f et g deux éléments de $\mathcal{S}'$; on a $a(g) \in \mathcal{S}'_0$ et $\beta(f) \in \mathcal{S}'_0$; alors

$$gf = (g\beta(f)).(a(g)f), \quad \text{où} \quad g\beta(f) \in \mathcal{S}' \text{ et } a(g) f \in \mathcal{S}',$$

d'où $gf \in \mathcal{S}'$.

PROPOSITION 9. *Un sous-groupoïde* $\mathcal{S}'$ *d'un prépseudogroupe* $\mathcal{S}$ *stable pour la pseudomultiplication est un sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{S}$ *si et seulement si* $\mathcal{S}'_0$ *contient* $\cup B$ *pour toute sous-classe* B *de* $\mathcal{S}'_0$ *majorée dans* $\mathcal{S}'_0$ *et admettant un agrégat.*

En effet, montrons que la condition est suffisante; soit A une sous-classe de $\mathcal{S}'$ majorée dans $\mathcal{S}'$ par f et admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$. La sous-classe $a(A)$ de $\mathcal{S}'_0$ est majorée par $a(f) \in \mathcal{S}'_0$ et admet un agrégat dans $\mathcal{S}$ d'après la Proposition 3-1; donc $e = \cup a(A) \in \mathcal{S}'_0$; par suite, $\cup A = fe$ appartient à $\mathcal{S}'$.

PROPOSITION 10. *Un sous-groupoïde* $\mathcal{S}'$ *d'un prépseudogroupe* $\mathcal{S}$ *saturé par induction (c'est-à-dire contenant avec un élément tout élément plus petit) est un sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{S}$.

L'intersection d'une classe de sous-pseudogroupes (faibles) d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$ est un sous-pseudogroupe (faible) de $\mathcal{S}$.

REMARQUES. 1° Si dans la Définition 5 l'axiome 3 est remplacé par l'axiome suivant:

3'° Toute sous-classe B de $\mathcal{S}'$ majorée dans $\mathcal{S}'$ (et admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$) admet un agrégat dans $\mathcal{S}'$,

on dira que $\mathcal{S}'$ est un *(pré)pseudogroupe contenu dans* $\mathcal{S}$. Un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ est un prépseudogroupe contenu dans $\mathcal{S}$ et tel que les agrégats d'une sous-classe B dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}'$ coïncident. L'intersection d'une classe de (pré) pseudogroupes contenus dans $\mathcal{S}$ peut ne pas être un (pré)pseudogroupe contenu dans $\mathcal{S}$.

2° Soit $\mathcal{S}$ un (pré)pseudogroupe. Un sous-groupoïde $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ est appelé *sous-groupoïde inductif de* $\mathcal{S}$ s'il vérifie les axiomes suivants :

1° Pour la relation d'ordre induite par $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$ est un groupoïde (pré)-inductif dont le plus petit élément est l'élément 0 de $\mathcal{S}$.

2° Pour tout $e < E$, $e' < E$, où e, e', $E \in \mathcal{S}'_0$, on a $e \underset{\mathcal{S}}{\cap} e' = e \underset{\mathcal{S}'}{\cap} e'$.

Il en résulte que $\mathcal{S}'$ contient avec deux éléments majorés dans $\mathcal{S}'$ leur intersection dans $\mathcal{S}$; $\mathcal{S}'$ n'est pas stable pour la pseudomultiplication. Nous verrons au Paragraphe III une généralisation de cette notion. 1

DÉFINITION 6. Soit B une sous-classe d'un prépseudogroupe $\mathcal{S}$; l'intersection $\mathcal{B}$ des sous-pseudogroupes (faibles) de $\mathcal{S}$ contenant B est appelée *sous-pseudogroupe (faible) engendré par B dans* $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{B}$ est de plus la classe des agrégats des sous-classes de B admettant un agrégat (et majorées dans B), alors B est appelé *base de* $\mathcal{B}$.

PROPOSITION 11. *Soit B une sous-classe d'un groupoïde préinductif $\mathcal{S}$ vérifiant les conditions suivantes:*

1° $\alpha(B) \subset B$ et $\beta(B) \subset B$;

2° La classe B^{-1} des inverses des éléments de B est contenue dans B;

3° Si $e \in B_0$ et $b \in B$, alors $e b \in B$;

4° B contient $\cup B'$ pour toute sous-classe B' de B majorée dans B et admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$.

Alors le sous-groupoïde $\mathcal{B}$ *engendré par* B *est un sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{S}$.

DÉMONSTRATION. $\mathcal{B}$ est la classe des composés finis d'éléments de B. Soit $b_n \cdot \ldots b_2 \cdot b_1 \in \mathcal{B}$ et $\alpha(b) \in B$; on a

$$b_1 \alpha(b) \in B, \quad \text{d'où} \quad \beta(b_1 \alpha(b)) \in B \; ;$$

si $(b_{i-1}, \ldots, b_2, b_1)\alpha(b) \in B$, alors

$$b_i \beta(b_{i-1} \cdot \ldots b_1 \alpha(b)) \in B \quad \text{et} \quad (b_i \cdot b_{i-1} \cdot \ldots)\alpha(b) \in \mathcal{B},$$

d'où $(b_n \cdot \ldots b_2 \cdot b_1)\alpha(b) \in \mathcal{B}$. De même $\beta(b)(b_n \cdot \ldots \cdot b_1) \in \mathcal{B}$. Par suite $\mathcal{B}$ est un sous-groupoïde stable pour la pseudomultiplication. Soit A une sous-classe de $\mathcal{B}$ admettant un agrégat majoré par $b_n \cdot \ldots \cdot b_2 \cdot b_1 \in \mathcal{B}$; pour tout $a \in A$, on a $\alpha(a) \in B$ et $\alpha(a) < \alpha(b_1) \in B$. Puisque A admet un agrégat dans $\mathcal{S}$, la classe $\alpha(A)$ admet aussi un agrégat et d'après l'axiome 4, on aura $e = \cup \alpha(A) \in B$. Du début de la démonstration, on déduit que $\cup A = (b_n \cdot \ldots \cdot b_2 \cdot b_1)e$ appartient à $\mathcal{B}$; donc $\mathcal{B}$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$.

Remarquons que, même si l'axiome 4 est remplacé par:

4'° B contient $\cup B'$ pour toute sous-classe B' de B admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$,

il n'en résulte pas que $\mathcal{B}$ est un sous-pseudogroupe.

PROPOSITION 12. *Soit* $\mathcal{S}$ *un groupoïde prélocal et* B *une sous-classe de* $\mathcal{S}$ *vérifiant les axiomes 1 et 2 de la Définition 5. Alors* B *est une base du sous-pseudogroupe (faible) qu'il engendre.*

DÉMONSTRATION. Soit $\hat{\mathcal{B}}$ la classe des agrégats des sous-classes de B (majorées dans $\hat{B}$) admettant un agrégat dans $\mathcal{S}$. Soit A et A' deux sous-classes de B telles que $\cup A \in \mathcal{B}$ et $\cup A' \in \mathcal{B}$; alors la sous-classe $A'A$ des pseudoproduits $a'a$, où $a \in A$ et $a' \in A'$, est une sous-classe de B (majorée dans $\hat{B}$) qui, d'après la Proposition 2, admet pour agrégat:

$$(\cup A')(\cup A), \quad \text{donc} \quad (\cup A')(\cup A) \in \mathcal{B},$$

et $\mathcal{B}$ est stable pour la pseudomultiplication ; de plus, pour tout $a \in B$, on a $a^{-1} \in B$ et, d'après la Proposition 3-1,

$$(\cup A)^{-1} = \bigcup_{a \in A} a^{-1}, \quad \text{d'où} \quad (\cup A)^{-1} \in \hat{\mathcal{B}};$$

ainsi $\hat{\mathcal{B}}$ vérifie les conditions 1 et 2 de la Définition 3. Enfin, soit B' une sous-classe de $\hat{\mathcal{B}}$ (majorée dans $\hat{\mathcal{B}}$) admettant un agrégat; tout élément b' de B' étant l'agrégat d'une sous-classe $A_{b'}$ de B (majorée dans $\hat{B}$), on a:

$$B' = \bigcup_{b' \in B'} (\cup A_{b'}) = \cup B'' \in \hat{\mathcal{B}},$$

où B'' est la réunion des classes $A_{b'}$, $b' \in B'$.

COROLLAIRE 1. *Si F est une sous-classe quelconque de $\mathcal{S}$, alors le sous-pseudogroupe (faible) engendré par F dans $\mathcal{S}$ admet pour base la classe B obtenue en saturant pour la pseudomultiplication le sous-groupoïde F' engendré par F dans $\mathcal{S}$.*

En effet, B est alors la classe des pseudoproduits finis d'éléments de F'. Soit $f_n \dots f_1 \in B$, où $f_i \in F'$; d'après le corollaire de la Proposition 7-1, on a

$$(f_n \dots f_1)^{-1} = f_1^{-1} \dots f_n^{-1}, \quad \text{où} \quad f_i^{-1} \in F';$$

donc $(f_n \dots f_1)^{-1} \in B$ et B est un sous-groupoïde de $\mathcal{S}$ stable pour la pseudomultiplication, auquel la proposition s'applique.

COROLLAIRE 2. *Soit F une sous-classe de $\mathcal{S}$ saturée par intersection finie; alors F est une base de la sous-classe inductive (faible) F' qu'elle engendre dans $\mathcal{S}$. Si F_1 est une autre base de F', alors F' admet aussi pour base la classe des éléments $f \cap f_1$ où $f \in F$ et $f_1 \in F_1$.*

En effet il suffit d'appliquer la proposition à la classe prélocale $\mathcal{S}$.

COROLLAIRE 3. *Soit F une sous-classe de $\mathcal{S}$ saturée par induction; alors F est une base de la partie sous-inductive qu'elle engendre, laquelle est identique à la sous-classe inductive engendrée par F et saturée par induction.*

En effet soit F' la sous-classe inductive engendrée par F dans $\mathcal{S}$; tout élément de F' étant l'agrégat d'une sous-classe de F appartient à toute partie sous-inductive contenant F, donc F' est la partie sous-inductive engendrée par F dans $\mathcal{S}$. Soit $(\cup F_1')e$ un élément induit par un élément de F' ; d'après la Proposition 2, on a:

$$(\cup F'_1)e = \bigcup_{f' \in F'_1} f'e \in F',$$

d'où F' est saturé par induction.

Remarquons que toute sous-classe F saturée par induction dans $\mathcal{S}$ est une sous-classe inductive faible.

PROPOSITION 13. *Dans un groupoïde prélocal $\mathcal{S}$, la sous-classe inductive (faible) F' engendrée par une classe compatible F est compatible.*

DÉMONSTRATION. D'après la Proposition 4, la sous-classe de $\mathcal{S}$ formée par les intersections finies d'éléments de F est compatible puisque contenue dans la sous-classe des éléments induits des éléments de F. Cette sous-classe F_1 est une base de la sous-classe inductive F' engendrée par F. Soit A et A' deux sous-classes de F_1 telles que $\cup A$ et $\cup A'$ existent. On a $\cup A \in F'$ et $\cup A' \in F'$. L'axiome (D) étant vérifié dans $\mathcal{S}$, en vertu de la Proposition 1, on a:

$$(\cup A) \cap (\cup A') = \bigcup_{\substack{a \in A \\ a' \in A'}} a \cap a' \quad \text{et} \quad \alpha((\cup A) \cap (\cup A')) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ a' \in A'}} \alpha(a \cap a');$$

comme F_1 est compatible, $\alpha(a \cap a') = \alpha(a)\alpha(a')$; l'axiome (D) dans $\mathcal{S}_0$ donne:

$$\alpha((\cup A) \cap (\cup A')) = \bigcup_{\substack{a \in A \\ a' \in A'}} \alpha(a)\alpha(a') = (\cup \alpha(A))(\cup \alpha(A')) =$$
$$= \alpha(\cup A)\,\alpha(\cup A').$$

Donc F' est compatible.

COROLLAIRE. *Si F et G sont deux sous-classes inductives compatibles de $\mathcal{S}$, alors la classe GF des pseudoproduits gf, où $g \in G$ et $f \in F$, est une base de la sous-classe inductive qu'elle engendre et celle-ci est compatible.*

En effet, d'après la Proposition 4, GF est compatible et saturée par intersection finie; la sous-classe inductive engendrée par GF est donc compatible et admet GF pour base.

PROPOSITION 14. *Soit B une sous-classe de $\mathcal{S}$ et B' le groupoïde en-*

gendré par la classe des éléments induits des éléments de B dans $\mathcal{S}$; alors B' est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ ainsi que la composante connexe A de B' dans $\mathcal{S}$ (Proposition 7-1-1, Chapitre I).

En effet, B' étant saturé par induction est un sous-pseudogroupe faible. A est le sous-groupoïde engendré par la classe A' des éléments f tels que $\alpha(f) \in B'$ ou $\beta(f) \in B'$; comme A' est saturé par induction il en est de même de A et A est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$.

DÉFINITION 7. Avec les notations de la Proposition 14, A sera appelé *composante inductive faible de B dans $\mathcal{S}$* et le sous-pseudogroupe engen- 1
dré par A, *composante inductive de B dans $\mathcal{S}$*.

NOTE. Ce Chapitre 2 comprenait deux autres parties, qui n'ont pas été multigraphiées dans ce cours (cf. Introduction de /85/).

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13, 2 (1963), 1-60.

/68/

GROUPOÏDES SOUS-INDUCTIFS

par Charles EHRESMANN (Paris)

INTRODUCTION

Cet article a été rédigé, il y a deux ans, avec l'intention d'en faire une partie du 2^e chapitre d'un livre sur la théorie des catégories ordonnées. Le plan du livre ayant été modifié depuis, en fonction de résultats nouveaux (catégories structurées [3]), seul le premier chapitre et la partie I du 2^e chapitre ont été publiés ([1] et [2]). Ici nous avons réuni le texte
des parties II et III du chapitre 2, en l'abrégeant; la partie IV 1
sera publiée plus tard.

La théorie des groupoïdes sous-inductifs, et plus particulièrement des atlas complets dans les groupoïdes sous-inductifs, a été exposée dans différentes conférences, tant à Paris qu'à l'étranger; la partie II a aussi été multigraphiée à Paris. De plus les théorèmes ont été publiés, sans démonstration, dans [4].

Les principaux résultats de ce mémoire sont : l'existence et les propriétés des groupoïdes sous-préinductifs des atlas faibles complets et des atlas complets attachés à un groupoïde sous-préinductif; les théorèmes de complétion d'un groupoïde prélocal; les théorèmes d'existence du groupoïde sous-inductif des filtres sur un groupoïde sous-préinductif. Cet article est une généralisation, et une étude plus approfondie, de la théorie des groupoïdes inductifs, qui interviennent dans de nombreuses questions; il peut donc être considéré comme la suite de [5].

PLAN

QUELQUES RAPPELS

Le texte avait été écrit en supposant connue la partie I ([2]); bien que certaines démonstrations tout à fait analogues à celles faites dans [2] aient été omises dans les n^{os} 1 et 2, nous allons rappeler quelques définitions et conventions afin que cet article puisse être lu indépendamment de la partie I [2].

Dans une catégorie $\mathcal{C}$, la loi de composition est toujours
1 désignée par le signe ., le composé de g et f étant donc noté $g.f$, s'il est défini. La classe des unités de $\mathcal{C}$ est notée $\mathcal{C}_0$, les unités à droite et à gauche de f étant représentées resp. par $\alpha(f)$ et $\beta(f)$. Le mot foncteur signifie toujours foncteur covariant.

Si $\mathcal{A}$ est une classe ordonnée, et si A est une sous-classe de $\mathcal{A}$ admettant une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathcal{A}$, nous appellerons cette borne supérieure (resp. inférieure) *l'agrégat* (resp. *l'intersection*) de A et nous la noterons $\bigcup$ A (resp. $\bigcap$ A). Si B ne contient que deux éléments a et a', nous écrirons aussi : $\bigcap \mathrm{A} = a \cap a'$ et $\bigcup \mathrm{A} = a \cup a'$.

Définition 1. — *On appelle* classe préinductive *une classe ordonnée $\mathcal{A}$ telle que deux éléments quelconques aient une intersection et que $\mathcal{A}$ admette un plus petit élément* 0. *On appelle* classe inductive, *une classe ordonnée $\mathcal{A}$ dans laquelle toute sous-*
2 ¶ *classe admet une intersection.*

Définition 2. — *On appelle* groupoïde ⟨pré⟩inductif [1] *un groupoïde $\mathcal{G}$ muni d'une relation d'ordre $<$ pour laquelle $\mathcal{G}$ soit une classe ⟨pré⟩inductive et telle que l'axiome suivant soit vérifié :*

(I) *Pour tout $f \in \mathcal{G}$, soit $\varphi(f)$ la classe des éléments $f' < f$; l'application : $f \to \varphi(f)$ est un foncteur généralisé de $\mathcal{G}$ vers $\mathcal{G}$ appelé* foncteur d'induction.

L'axiome (I) est équivalent à :

1) Soit $e \in \mathcal{G}_0$ et $h < e$; alors on a $h \in \mathcal{G}_0$;

2) On a $h < g.f$ si, et seulement si, $h = g'.f'$, où $g' < g$ et $f' < f$.

En particulier, si $f' < f$, on a $\alpha(f') < \alpha(f)$ et $\beta(f') < \beta(f)$.

1. GROUPOÏDES SOUS-⟨PRÉ⟩INDUCTIFS

Dans une classe ordonnée, nous désignerons par $a^{>}$ la classe des éléments plus petits qu'un élément a.

Définition 1. — *Une classe ordonnée $\mathcal{A}$ est appelée* classe sous-⟨pré⟩inductive *si $\mathcal{A}$ a un plus petit élément 0 et si, pour tout élément $a \in \mathcal{A}$, la classe $a^{>}$ est une classe ⟨pré⟩inductive pour l'ordre induit.*

Proposition 1. — *Soient $\mathcal{A}$ une classe ordonnée et B une sous-classe de $\mathcal{A}$ majorée par $a \in \mathcal{A}$. Pour que b soit l'intersection de B dans $\mathcal{A}$, il faut et il suffit que b soit l'intersection de B dans $a^{>}$.*

En effet, la classe des minorants de B dans $\mathcal{A}$ est identique à celle des minorants de B dans $a^{>}$.

Corollaire. — *Pour que $\mathcal{A}$ soit sous-⟨pré⟩inductif, il faut et il suffit que $\mathcal{A}$ admette un plus petit élément 0 et que toute sous-classe ⟨finie⟩ de $\mathcal{A}$ majorée dans $\mathcal{A}$ admette une intersection.* 1+

Proposition 2. — *Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive, $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{A}$; si $a \cap b$ est défini, alors $a' \cap b'$ est défini, pour tout $a' < a$ et tout $b' < b$.*

Démonstration. — Les éléments a' et $a \cap b$ étant majorés par a, ils ont une intersection $a' \cap (a \cap b) = a' \cap b$; de même

[1] Les mots ou membres de phrases placés entre les signes ⟨ ⟩ peuvent être lus ou supprimés simultanément dans un énoncé ou une démonstration.

les éléments b' et $a \cap b$ ont pour intersection $(a \cap b) \cap b' = a \cap b'$. Les éléments $a' \cap b$ et $a \cap b'$ étant majorés par $a \cap b$, ils ont pour intersection $(a' \cap b) \cap (a \cap b') = a' \cap b'$.

Définition 2. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une classe sous-préinductive*, B *une sous-classe de* $\mathcal{A}$; *si* B *admet un agrégat dans* $c^{>}$, *alors cet agrégat sera appelé* c-agrégat *ou* sous-agrégat de B *et sera noté* $\bigsqcup^{c} B$; *la classe de tous les sous-agrégats de* B *sera appelé* congrégation de B *dans* $\mathcal{A}$ *et désignée par* $\overline{\bigsqcup} B$; *si* B *n'admet pas de sous-agrégat, nous écrirons*: $\overline{\bigsqcup} B = \emptyset$.

Proposition 3. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une classe sous-(pré)inductive et* B *une sous-classe de* $\mathcal{A}$ *majorée par* $c \in \mathcal{A}$ *et admettant un c-agrégat* b; *alors* b *est aussi le* c'*-agrégat de* B, *où* c' *est un majorant de* B *tel que* $c \cap c'$ *soit défini dans* $\mathcal{A}$: $\bigsqcup^{c} B = \bigsqcup^{c'} B$.

En effet, $c' \cap c$ est aussi un majorant de B; comme $c' \cap c$ appartient à $c^{>}$, on a $b < c \cap c'$ et b est un majorant de B dans $c'^{>}$. — Soit c'' un majorant de B tel que $c'' < c'$; comme $c'' \cap c$ est défini et majore B dans $c^{>}$, on trouve $b < c'' \cap c < c''$ et b est aussi l'agrégat de B dans $c'^{>}$.

Corollaire 1 [2]. — *Si* $b = \bigsqcup^{c} B$, *on a* $b = \bigsqcup^{b} B$. *Si* $b_1 = \bigsqcup^{c_1} B$ *et si* $b \cap b_1$ *est défini, alors* $b = b_1$.

Corollaire 2. — *Si* B *admet un agrégat* $\bigcup B$ *dans* $\mathcal{A}$, *alors* $\bigcup B = \bigsqcup^{c} B$ *pour tout majorant* c *de* B.

Une classe sous-inductive $\mathcal{A}$ est une classe ordonnée admettant un plus petit élément et telle que la classe des majorants d'une sous-classe B de $\mathcal{A}$ soit vide ou admette des éléments minimaux, tout majorant c de B étant plus grand qu'un majorant minimal, à savoir $\bigsqcup^{c} B$.

Proposition 4. — *Si* $\mathcal{A}$ *est une classe préinductive et si* B *est une sous-classe de* $\mathcal{A}$, *on a* $\overline{\bigsqcup} B = \{\bigcup B\}$ *si* B *admet un agrégat dans* $\mathcal{A}$, *sinon* $\overline{\bigsqcup} B = \emptyset$.

[2] Dans le corollaire d'une proposition ou d'un théorème, nous supposons vérifiées les hypothèses de la proposition ou du théorème.

En effet, supposons que B admette un c-agrégat; pour tout majorant c' de B, puisque $c \cap c'$ est défini, on a :

$$\bigcup^{c} \mathrm{B} = \bigcup^{c'} \mathrm{B} < c',$$

d'où

$$\bigcup^{c} \mathrm{B} = \cup \mathrm{B}.$$

Définition 3. — *Un groupoïde* $\mathcal{G}$ *est appelé* groupoïde sous-(pré)inductif *s'il est muni d'une relation d'ordre pour laquelle* $\mathcal{G}$ *est une classe sous-(pré)inductive et si l'axiome* (I) *est vérifié.*

Proposition 5. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome* (I); *pour tout* $f \in \mathcal{G}$ *et tout* $e \in \mathcal{G}_0$ *tel que* $e < \alpha(f)$ (*respectivement* $e < \beta(f)$), *il existe un et un seul élément* $g < f$ *pour lequel* $\alpha(g) = e$ (*respectivement* $\beta(g) = e$); g *est appelé* l'élément induit (*respectivement* induit à gauche) par f sur e.

Corollaire. — *Pour qu'un groupoïde* $\mathcal{G}$ *muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome* (I) *soit sous-(pré)inductif, il faut et il suffit que* $\mathcal{G}_0$ *soit une classe sous-(pré)inductive pour l'ordre induit.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 2-1, I [2]. Démontrons le corollaire : soit F une sous-classe 1 (finie) de $\mathcal{G}$ majorée par $g \in \mathcal{G}$; alors $\alpha(\mathrm{F})$ est majorée par $\alpha(g)$, donc $e = \cap \alpha(\mathrm{F})$ est défini; soit g' l'élément induit par g sur e; pour tout $f \in \mathrm{F}$, on a $g' < f$. Si h est un minorant de F, $\alpha(h)$ minore $\alpha(\mathrm{F})$, d'où $\alpha(h) < e$; par suite h est l'élément induit par g' sur $\alpha(h)$ et $h < g'$. Donc $g' = \cap \mathrm{F}$.

Remarque. — Il y a des exemples importants de groupoïdes $\mathcal{G}$ sous-préinductifs dans lesquels la condition suivante est vérifiée : Soient E une sous-classe de $\mathcal{G}_0$, e' et e'' deux sous-agrégats de E dans $\mathcal{G}_0$; alors il existe un et un seul $f \in \mathcal{G}$ tel que $f \in \overline{\bigcup} \mathrm{E}$, $\alpha(f) = e'$ et $\beta(f) = e''$.

Proposition 6. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif; si* E *est une sous-classe de* $\mathcal{G}_0$, *la congrégation de* E *dans* $\mathcal{G}_0$

est contenue dans la congrégation de E *dans* $\mathcal{G}$*; pour toute sous-classe* A *de* $\mathcal{G}$, *on a les relations:*

$$\alpha\Big(\bigcup^{g} \mathrm{A}\Big) = \bigcup^{\alpha(g)} \alpha(\mathrm{A}); \qquad \beta\Big(\bigcup^{g} \mathrm{A}\Big) = \bigcup^{\beta(g)} \beta(\mathrm{A});$$
$$\Big(\overline{\bigcup} \mathrm{A}\Big)^{-1} = \overline{\bigcup}(\mathrm{A}^{-1}).$$

En effet, soit $b = \bigcup^{g} \mathrm{A} = \bigcup^{b} \mathrm{A}$; montrons que $\bigcup^{\alpha(g)} \alpha(\mathrm{A})$ est défini et égal à $\alpha(b)$. On a $\alpha(b) < \alpha(g)$ et $\alpha(b)$ est un majorant de $\alpha(\mathrm{A})$. Si e est un majorant de $\alpha(\mathrm{A})$ tel que $e < \alpha(b)$, l'élément b' induit par b sur e est un majorant de A, donc $b' = b$ et par suite $e = \alpha(b)$. D'où $\alpha(b) = \bigcup^{\alpha(b)} \alpha(\mathrm{A}) = \bigcup^{\alpha(g)} \alpha(\mathrm{A})$. La suite de la démonstration est analogue à celle de la proposition 3-1, I [2].

Proposition 7. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif,* A *une sous-classe de* $\mathcal{G}$ *majorée par* $f \in \mathcal{G}$; *si* $\bigcup^{\alpha(f)} \alpha(\mathrm{A})$ *ou* $\bigcup^{\beta(f)} \beta(\mathrm{A})$ *est défini, alors* $\bigcup^{f} \mathrm{A}$ *est défini; si* $\bigcap \mathrm{A}$ *est défini, alors* $\bigcap \alpha(\mathrm{A})$ *et* $\bigcap \beta(\mathrm{A})$ *sont définis; si* $\bigcap \alpha(\mathrm{A})$ *ou* $\bigcap \beta(\mathrm{A})$ *est défini,* $\bigcap \mathrm{A}$ *est défini. On a les relations:*

$$\alpha(\bigcap \mathrm{A}) = \bigcap \alpha(\mathrm{A}); \qquad \beta(\bigcap \mathrm{A}) = \bigcap \beta(\mathrm{A}).$$

Démonstration analogue à celle de la proposition 4-1, I [2].

1+

Proposition 8. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif; la loi de composition dans* $\mathcal{G}$ *peut être étendue en une loi de composition appelée* pseudomultiplication, *définie pour tous les couples* (f', f) *tels que* $e = \alpha(f') \cap \alpha(f)$ *soit défini, en posant:*

$(f', f) \rightarrow f'f = g'.g$, *où* g *est l'élément induit à gauche sur* e *par* f *et* g' *l'élément induit sur* e *par* f'.

Cette pseudomultiplication vérifie l'axiome d'associativité suivant:

Si (hg) *et* (gf) *sont définis, alors* $h(gf)$ *et* $(hg)f$ *sont définis et égaux.*

Démonstration. — Comme dans le cas préinductif (proposition 6-1, I [2]) on montre ([3]) que $f'f$ est le plus grand élément

2 ([3]) On montre que $f'f$ est défini si, et seulement si, la classe K admet un plus grand élément.

de la classe K des composés $h'.h$, où $h < f$ et $h' < f'$. — Si hg et gf sont définis, $\alpha(h) \cap \beta(g)$ et $\alpha(g) \cap \beta(f)$ sont définis; par suite $\alpha(hg) \cap \beta(f)$ et $\alpha(h) \cap \beta(gf)$ sont aussi définis, ainsi que $(hg)f$ et $h(gf)$. L'égalité de ces deux pseudoproduits se démontre comme au § I [2].

Proposition 9. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; les unités du groupoïde $\mathcal{G}$ sont les seuls éléments idempotents pour la pseudomultiplication; si e et e' sont deux unités telles que $e \cap e'$ soit défini, on a $e \cap e' = ee' = e'e$. La relation d'ordre dans $\mathcal{G}$ est compatible avec la pseudomultiplication et elle peut aussi être définie par une des conditions suivantes: $f' < f$ si, et seulement si, il existe $e \in \mathcal{G}_0$ tel que fe soit défini et égal à f';*

$f' < f$ si, et seulement si, il existe $e' \in \mathcal{G}_0$ tel que $e'f$ soit défini et égal à f'.

Cette proposition se démontre comme la proposition 7-1, I [2] et admet un corollaire analogue; en particulier:

Corollaire. — *Soient $f \in \mathcal{G}$ et $f' \in \mathcal{G}$ tels que $f'f$ soit défini; alors on a les formules:*

$$f'f = (f'\beta(f)).(\alpha(f')f); \quad (f'f)^{-1} = f^{-1}f'^{-1}.$$

Lemme 1. — *Soit $\mathcal{B}$ une classe munie d'une loi de composition partiellement définie, vérifiant l'axiome d'associativité* (A):

(A) *Si bb' et $b'b''$ sont définis, alors $(bb')b''$ et $b(b'b'')$ sont définis et égaux;*

et l'axiome de commutativité (C):

(C) *Si bb' est défini, alors $b'b$ est défini et $bb' = b'b$.*

Si, de plus, tout élément de $\mathcal{B}$ est idempotent et si $\mathcal{B}$ admet un élément 0 tel que $0b = 0$ pour tout $b \in \mathcal{B}$, alors $\mathcal{B}$ est une classe sous-préinductive pour la relation:

$$b' < b \qquad \text{si, et seulement si,} \qquad b' = b'b.$$

Démonstration analogue à celle du lemme 1-1, I [2].

Théorème 1. — *Soit $\mathcal{G}$ une classe munie d'une loi de composition partiellement définie vérifiant l'axiome* (A). *Soit $\mathcal{G}_0$ une sous-classe de $\mathcal{G}$ formée d'idempotents, stable pour la loi de composition et contenant un élément 0 tel que $0e = 0$ pour tout $e \in \mathcal{G}_0$. Supposons vérifiés les axiomes 1, 2, 3 suivants:*

1) *La restriction de la loi de composition à $\mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0$ vérifie* (C).

2) *Pour tout* $f \in \mathcal{G}$, *la classe des éléments* $e \in \mathcal{G}_0$ *tels que* fe *soit défini et égal à* f *admet une intersection* $\alpha(f)$, *telle que* $f\alpha(f)$ *soit défini et égal à* f, *pour la structure d'ordre sur* $\mathcal{G}_0$ *définie dans le lemme. De même, la classe des éléments* $e' \in \mathcal{G}_0$ *tels que* $e'f$ *soit défini et égal à* f *admet une intersection* $\beta(f)$ *telle que* $\beta(f)f = f$.

3) *Pour tout* $f \in \mathcal{G}$, *il existe* $f' \in \mathcal{G}$ *tel que* $f'f$ *et* ff' *soient définis et que l'on ait :* $f'f = \alpha(f)$ *et* $ff' = \beta(f)$.
Alors $\mathcal{G}$ *est un groupoïde sous-préinductif pour la structure d'ordre définie par la relation :*

$f' < f$ *si, et seulement si, il existe* $e \in \mathcal{G}_0$ *tel que* fe *soit défini et égal à* f' ;
$\mathcal{G}_0$ *est la classe de tous les éléments idempotents de* $\mathcal{G}$. *Si, de plus,* $\mathcal{G}_0$ *est une classe sous-inductive pour la relation d'ordre considérée dans le lemme, alors* $\mathcal{G}$ *est sous-inductif.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 1-1,I [2].

PROPOSITION 10. — *Le groupoïde produit de deux groupoïdes sous-(pré)inductifs, muni de la structure d'ordre produit, est un groupoïde sous-(pré)inductif, appelé* groupoïde sous-(pré)-inductif produit *des groupoïdes donnés.*

THÉORÈME 2. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-(pré)inductif et soit* $\hat{\mathcal{G}}$ *le sous-groupoïde de* $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ *formé des couples* (f', f), *où* $f' < f$, *muni de la relation :*
$(f', f) < (g', g)$ *si, et seulement si,* $f = 0$, *ou si* $f = g$ *et* $f' < g'$.
Alors $\hat{\mathcal{G}}$ *est un groupoïde (pré)inductif.*

Démonstration. — $\hat{\mathcal{G}}$ admet pour plus petit élément l'élément $(0, 0)$. Soient $(f', f) \in \hat{\mathcal{G}}$ et $(g', g) \in \hat{\mathcal{G}}$; si $f \neq g$, l'élément $(0, 0)$, qui est le seul minorant de (f', f) et (g', g), est leur intersection. Si $f = g$, l'élément $f' \cap g'$ est défini et on a : $(f', f) \cap (g', f) = (f' \cap g', f)$. Donc $\hat{\mathcal{G}}$ est une classe préinductive. — Le composé $(g', g) \cdot (f', f)$ est défini si, et seulement si, $g' . f'$ et $g . f$ sont définis ; pour que l'on ait $(h', h) < (g' . f', g . f)$, il faut et il suffit que $h = 0$, ou que : $h = g . f$ et $h' < g' . f'$, d'où $h' = g'_1 . f'_1$, avec $g'_1 < g'$ et $f'_1 < f'$. Comme tout élément majoré par une unité est une unité, $\hat{\mathcal{G}}$ vérifie l'axiome (I) et $\hat{\mathcal{G}}$ est un groupoïde préinductif. — Si $\mathcal{G}$ est sous-inductif, soit A une sous-classe de $\hat{\mathcal{G}}$ majorée par $(f', f) \in \hat{\mathcal{G}}$; tout élément de A est de la forme (a, f) et la classe des éléments a tels que $(a, f) \in \mathrm{A}$ admet un f-agrégat a' dans $\mathcal{S}$. Par suite, dans $\hat{\mathcal{S}}$, on aura : $(a', f) = \bigcup \mathrm{A}$, donc $\hat{\mathcal{S}}$ est inductif.

2. GROUPOÏDES SOUS-LOCAUX ET SOUS-PSEUDOGROUPES

Définition 1. — *Une* classe sous-(pré)locale *est une classe sous-(pré)inductive $\mathcal{A}$ dans laquelle l'axiome de distributivité* (D) *suivant est vérifié :*

(D) *Soit* B *une sous-classe de $\mathcal{A}$ admettant un c-agrégat et soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $\left(\overset{c}{\bigcup} \mathrm{B}\right) \cap a$ soit défini ; alors la classe des éléments $b \cap a$, où $b \in \mathrm{B}$, admet $\left(\overset{c}{\bigcup} \mathrm{B}\right) \cap a$ pour c-agrégat :*

$$\left(\overset{c}{\bigcup} \mathrm{B}\right) \cap a = \overset{c}{\bigcup_{b \in \mathrm{B}}} b \cap a.$$

1+

Un groupoïde sous-(pré) local *est un groupoïde sous-(pré)-inductif dont la classe $\mathcal{S}_0$ des unités est une classe sous-(pré)locale.*

Proposition 1 — *Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-prélocale,* B *une sous-classe de $\mathcal{A}$ admettant un c-agrégat et $a \in \mathcal{A}$ tel que $d = \overset{c}{\bigcup_{b \in \mathrm{B}}} (b \cap a)$ et $a \cap d$ soient définis ; alors on a : $d = \left(\overset{c}{\bigcup} \mathrm{B}\right) \cap a$.*

Démonstration. — d est un minorant de $\overset{c}{\bigcup} \mathrm{B}$ et de a, puisque $a \cap d$ est défini ; soit d' un autre minorant de a et de $\overset{c}{\bigcup} \mathrm{B}$; les éléments d' et d sont majorés par a, donc $d \cap d'$ est défini et, d'après l'axiome (D) :

$$d \cap d' = \overset{c}{\bigcup_{b \in \mathrm{B}}} (b \cap a \cap d') = \overset{c}{\bigcup_{b \in \mathrm{B}}} (b \cap d') ;$$

par ailleurs $d' \cap \left(\overset{c}{\bigcup} \mathrm{B}\right)$ est aussi défini et on a :

$$d' = d' \cap \left(\overset{c}{\bigcup} \mathrm{B}\right) = \overset{c}{\bigcup_{b \in \mathrm{B}}} (d' \cap b) = d \cap d',$$

d'où $d' < d$ et $d = \left(\overset{c}{\bigcup} \mathrm{B}\right) \cap a$.

Proposition 2. — *Un groupoïde sous-prélocal* $\mathcal{S}$ *est une classe sous-prélocale.*

La démonstration de la proposition 2-2, I [2] s'applique en prenant pour A une sous-classe de $\mathcal{S}$ admettant un h-agrégat et en supposant $g = f \cap \overset{h}{\bigsqcup} \mathrm{A}$ défini.

Étant donnés un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$, A et A′ deux sous-classes de $\mathcal{S}$, nous désignerons par A′A la classe des pseudoproduits $a'a$, où $a \in \mathrm{A}$, $a' \in \mathrm{A}'$, $a'a$ défini.

Proposition 3. — *Soit* $\mathcal{S}$ *un groupoïde sous-prélocal,* A *et* A′ *deux sous-classes de* $\mathcal{S}$*; on a :*

$$\left(\overline{\bigsqcup} \mathrm{A}'\right)\left(\overline{\bigsqcup} \mathrm{A}\right) \subset \overline{\bigsqcup} \mathrm{A}'\mathrm{A}.$$

Démonstration. — Soient

$$g = \overset{b}{\bigsqcup} \mathrm{A} = \overset{g}{\bigsqcup} \mathrm{A} \quad \text{et} \quad g' = \overset{b'}{\bigsqcup} \mathrm{A}' = \overset{g'}{\bigsqcup} \mathrm{A}'$$

tels que $e = \alpha(g')\beta(g)$ soit défini; alors $g'g$ est défini et, par une démonstration analogue à celle de la proposition 3-2, I, on montre que : $g'g = \overset{g'g}{\bigsqcup} \mathrm{A}'\mathrm{A}$; donc A′A admet $g'g = b'eb$ pour $b'eb$-agrégat.

Définition 2. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une classe sous-préinductive. Une sous-classe* $\mathcal{A}'$ *de* $\mathcal{A}$ *est appelée* sous-classe inductive *(respective-*
1 *ment* partie sous-inductive) (faible) *de* $\mathcal{A}$ *si elle vérifie les axiomes* 1 *et* 2 *(respectivement* 1′ *et* 2) *suivants :*

1) *Soient* $a \in \mathcal{A}'$, $a' \in \mathcal{A}'$ *tels que* $a \cap a'$ *soit défini; alors* $a \cap a' \in \mathcal{A}'$.

1′) *Soient* $a \in \mathcal{A}'$, $a' \in \mathcal{A}'$, $a'' \in \mathcal{A}'$ *avec* $a' < a$, $a'' < a$*; on a :* $a' \cap a'' \in \mathcal{A}'$.

2) $\mathcal{A}'$ *est (faiblement)* $\overline{\bigsqcup}$*-saturée, c'est-à-dire pour toute sous-classe* B de $\mathcal{A}'$ *admettant un b-agrégat (où* $b \in \mathcal{A}'$*), on a :* $\overset{b}{\bigsqcup} \mathrm{B} \in \mathcal{A}'$.

Une sous-classe inductive faible et une partie sous-inductive faible d'une classe sous-(pré)inductive sont des classes sous-(pré)inductives pour l'ordre induit. L'intersection d'une classe de sous-classes inductives (respectivement parties sous-inductives) ⟨faibles⟩ d'une classe $\mathcal{A}$ sous-préinductive est une sous-classe inductive (respectivement partie sous-inductive) ⟨faible⟩ de $\mathcal{A}$.

DÉFINITION 3. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une classe sous-préinductive,* B *une sous-classe de* $\mathcal{A}$*. Si* $\overline{\mathrm{B}}$ *est la classe des b-agrégats des sous-classes de* B ⟨*où* $b \in \mathrm{B}$⟩, B *est appelée* base ⟨faible⟩ de $\overline{\mathrm{B}}$. *L'intersection* $\mathcal{B}$ *des sous-classes inductives (respectivement parties sous-inductives) ⟨faibles⟩ de* $\mathcal{A}$ *qui contiennent* B *est appelée* sous-classe inductive (*respectivement* partie sous-inductive) ⟨faible⟩ de $\mathcal{A}$ engendrée par B.

PROPOSITION 4. — *Soit* B *une sous-classe d'une classe sous-prélocale* $\mathcal{A}$ *contenant avec deux éléments majorés dans* $\mathcal{A}$ *leur intersection; alors* B *est une base ⟨faible⟩ de la partie sous-inductive ⟨faible⟩* $\mathcal{B}$ *qu'elle engendre dans* $\mathcal{A}$.

Comme dans la proposition 5-2, I [2], $\mathcal{B}$ est la classe des c-agrégats des sous-classes de B ⟨où $c \in \mathrm{B}$⟩.

COROLLAIRE. — *Si* B *est une sous-classe d'un groupoïde sous-prélocal* $\mathcal{G}$ *telle que* $\mathrm{B}\alpha(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$, *alors* B *est une base ⟨faible⟩ de* $\mathcal{B}$ *et on a :* $\mathcal{B}\alpha(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$; *de plus,* $\alpha(\mathcal{B})$ *est une sous-classe inductive faible de* $\mathcal{G}_0$.

La première partie se démontre comme le corollaire de la proposition 5-2, I [2]. Soient $e = \alpha(f)$, $f \in \mathcal{B}$, $e' \in \alpha(\mathcal{B})$ tels que ee' soit défini. La relation $fe' \in \mathcal{B}\alpha(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ entraîne

$$\alpha(fe') = ee' \in \alpha(\mathcal{B}).$$

Soit E une sous-classe de $\alpha(\mathcal{B})$ admettant un $\alpha(g)$-agrégat où $g \in \mathcal{B}$; pour tout $e \in \mathrm{E}$, on a $ge \in \mathcal{B}$; par suite :

$$g\Big(\bigsqcup^{\alpha(g)} \mathrm{E}\Big) = \bigsqcup^{g} g\mathrm{E} \in \mathcal{B}$$

et $\displaystyle\bigsqcup^{\alpha(g)} \mathrm{E} = \alpha\Big(\bigsqcup^{g} g\mathrm{E}\Big) \in \alpha(\mathcal{B}).$

DÉFINITION 4. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif; on appelle* sous-groupoïde sous-préinductif *de* $\mathcal{G}$ *un sous-groupoïde* $\mathcal{G}'$ *de* $\mathcal{G}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) *Soient* $e \in \mathcal{G}'_0$, $e' \in \mathcal{G}'_0$, $e'' \in \mathcal{G}'_0$ *avec* $e' < e$, $e'' < e$; *alors* $e' \cap e'' \in \mathcal{G}'_0$.

2) *Soient* $f \in \mathcal{G}'$ *et* $e \in \mathcal{G}'_0$, $e < \alpha(f)$; *alors on a* $fe \in \mathcal{G}'$.

Proposition 5. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif et $\mathcal{G}'$ un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{G}$; alors $\mathcal{G}'$ contient $f' \cap f''$ avec deux éléments f' et f'' majorés par $f \in \mathcal{G}'$.*

En effet, on a $\alpha(f') < \alpha(f)$, $\alpha(f'') < \alpha(f)$, d'où $\alpha(f') \cap \alpha(f'') \in \mathcal{G}'_0$ et $f' \cap f'' = f(\alpha(f')\alpha(f'')) \in \mathcal{G}'$.

Corollaire. — *$\mathcal{G}'$ est un groupoïde sous-préinductif pour l'ordre induit.*

Définition 5. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle* sous-pseudogroupe (faible) de $\mathcal{G}$ *un sous-groupoïde $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ stable pour la pseudomultiplication et (faiblement) $\bigsqcup$-saturée.*

Un sous-pseudogroupe faible d'un groupoïde sous-préinductif est un groupoïde sous-préinductif pour l'ordre induit.

Proposition 6. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; pour qu'un sous-groupoïde $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ soit un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{G}$, il faut et il suffit que $\mathcal{G}'_0$ soit une sous-classe inductive faible de $\mathcal{G}_0$ et que $\mathcal{G}'$ soit un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{G}$.*

En effet, supposons que $f'f$ soit défini, où $f \in \mathcal{G}'$ et $f \in \mathcal{G}'$; alors $e = \alpha(f') \cap \beta(f) \in \mathcal{G}'_0$, $f'e \in \mathcal{G}'$, $ef \in \mathcal{G}'$, d'où $f'f \in \mathcal{G}'$. La fin de la démonstration est analogue à celle de la proposition 9-2, I [2].

Proposition 7. — *Un sous-groupoïde $\mathcal{G}'$ d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$ qui est saturé par induction est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{G}$.*

L'intersection d'une classe de sous-pseudogroupes (faibles) d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$ est un sous-pseudogroupe (faible) de $\mathcal{G}$.

Définition 6. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif, B une sous-classe de $\mathcal{G}$; l'intersection $\mathcal{B}$ des sous-pseudogroupes (faibles) de $\mathcal{G}$ contenant B est appelée* sous-pseudogroupe (faible) de $\mathcal{G}$ engendré par B dans $\mathcal{G}$; *si tout élément de $\mathcal{B}$ est un b-agrégat d'une sous-classe de* B *(où $b \in$ B), alors* B *est dit* base (faible) de $\mathcal{B}$.

PROPOSITION 8. — *Soit* B *une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif* $\mathcal{G}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) *On a* $\alpha(B) \subset B$; $\beta(B) \subset B$; $B^{-1} = B$.

2) *Si* $e \in B \cap \mathcal{G}_0$, $b \in B$ *et si* be *est défini, alors on a* $be \in B$.

3) B *est faiblement* $\overline{\bigcup}$*-saturé.*

Alors le sous-groupoïde $\mathcal{B}$ *engendré par* B *dans* $\mathcal{G}$ *est un sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{G}$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 11-2, I [2].

PROPOSITION 9. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-prélocal et* B *un sous-groupoïde de* $\mathcal{G}$ *stable pour la pseudomultiplication; alors* B *est une base (faible) du sous-pseudogroupe (faible) qu'il engendre dans* $\mathcal{G}$.

Cette proposition se démontre comme la proposition 12-2, I [2] et admet des corollaires analogues.

DÉFINITION 7. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif : on appelle* sous-classe compatible *de* $\mathcal{G}$ *une sous-classe* F *telle que, pour tout* $f \in F$ *et tout* $f' \in F$, $f^{-1}f'$ *et* $f'f^{-1}$ *soient définis et appartiennent à* $\mathcal{G}_0$.

En particulier toute sous-classe majorée d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$ est compatible; pour qu'une classe d'unités de $\mathcal{G}$ soit compatible, il faut et il suffit que l'intersection de deux quelconques de ses éléments soit définie.

PROPOSITION 10. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif,* $f \in \mathcal{G}$ *et* $f' \in \mathcal{G}$. *Pour que l'on ait* $f'f^{-1} \in \mathcal{G}_0$, *il faut et il suffit que* $f \cap f'$ *soit défini et que l'on ait :* $f \cap f' = f\alpha(f') = f'\alpha(f)$. *Dans ce cas on a :* $f'f^{-1} = \beta(f \cap f')$.

En effet, montrons que la condition est nécessaire : $\alpha(f) \cap \alpha(f')$ étant défini, $f\alpha(f')$ et $f'\alpha(f)$ sont définis; de plus on a :

$$f'f^{-1} = (f'\alpha(f)).(\alpha(f')f^{-1}) \in \mathcal{G}_0,$$

d'où $f'\alpha(f) = f\,\alpha(f') = f \cap f'$.

PROPOSITION 11. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif,* F *et* G *deux sous-classes compatibles de* $\mathcal{G}$; *alors* $\varphi(F)$, F^{-1} *et* GF *sont des sous-classes compatibles, où* $\varphi(F)$ *est la classe des éléments induits des éléments de* F.

En effet, l'existence de $(gf)^{-1}(g'f')$, où $gf \in \mathrm{GF}$ et $g'f' \in \mathrm{GF}$, résulte de celle de $g^{-1}g'$. On démontre comme à la proposition 4-2, I [2] : $(g \cap g')\,(f \cap f') = gf\alpha(g'f') = g'f'\alpha(gf)$. Remarquons que la sous-classe inductive engendrée par F n'est pas nécessairement compatible.

DÉFINITION 8. — *Un sous-pseudogroupe (faible) $\mathcal{G}'$ d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$ est dit* propre *si $\mathcal{G}'$ admet une base (faible) B telle que $\alpha(\mathrm{B})$ et $\beta(\mathrm{B})$ soient des sous-classes compatibles.*

*En particulier, si $\mathcal{G}'$ est formé d'unités, on dira que $\mathcal{G}'$ est une sous-*classe *inductive (faible)* propre *de $\mathcal{G}_0$.*

PROPOSITION 12. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; si $\mathcal{G}'$ est un sous-pseudogroupe faible propre de $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{G}'_0$ est une sous-classe compatible de $\mathcal{G}_0$ et le sous-pseudogroupe engendré par $\mathcal{G}'$ dans $\mathcal{G}$ est propre.*

En effet, soit B la base faible de $\mathcal{G}'$ telle que $\alpha(\mathrm{B})$ et $\beta(\mathrm{B})$ soient compatibles; toute unité de $\mathcal{G}'$ étant majorée par un élément de B, $\mathcal{G}'_0$ est compatible. Comme $\mathcal{G}'$ est une base du sous-pseudogroupe qu'il engendre, ce dernier est propre.

Remarque. Un sous-pseudogroupe propre n'est pas toujours un sous-pseudogroupe faible propre.

DÉFINITION 9. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif, Γ un sous-pseudogroupe de $\mathcal{G}$ et A une sous-classe de $\mathcal{G}$. On dit que A est* pseudo-saturé à droite (*respectivement* à gauche) relativement à Γ *si* $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{A}$ (*resp.* $\Gamma\mathrm{A} = \mathrm{A}$). *Si A est pseudo-saturé à droite et à gauche relativement à Γ, alors $\mathrm{A} = \Gamma\mathrm{A} = \mathrm{A}\Gamma$ est dit* pseudo-saturé relativement à Γ. *Si A est pseudo-saturé*
1 *relativement à $\mathcal{G}$, A est appelé* composante inductive faible de $\mathcal{G}$.

Si A est pseudo-saturé à droite relativement à Γ, alors $\alpha(\mathrm{A})$ est contenu dans la classe $\varphi(\Gamma_0)$ des éléments induits des éléments de Γ_0.

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde et soit $\mathcal{G}^+$ le groupoïde inductif obtenu en adjoignant à $\mathcal{G}$ un élément 0 et en considérant sur $\mathcal{G}^+$ la relation triviale :

$f' < f$ si, et seulement si, $f' = f$, ou $f' = 0$.

Pour que A soit un sous-groupoïde saturé [4] de $\mathcal{G}$, il faut

[4] Un sous-groupoïde A de $\mathcal{G}$ est saturé dans $\mathcal{G}$ (1-I [1]) si $\mathrm{A} = \mathrm{A}.\mathcal{G} = \mathcal{G}.\mathrm{A}$.

et il suffit que la classe A^+ obtenue en adjoignant 0 à A soit une composante inductive faible de $\mathcal{G}^+$.

Proposition 13. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif. Pour qu'une sous-classe* A *de $\mathcal{G}$ soit une composante inductive faible de $\mathcal{G}$, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :*

1) A *est un sous-groupoïde saturé de $\mathcal{G}$ et une sous-classe saturée par induction dans $\mathcal{G}$.*

2) *On a :* $\alpha(A) \subset A$ *et* A *est pseudo-saturé à droite relativement à $\mathcal{G}$.*

3) *On a* $\beta(A) \subset A$ *et* A *est pseudo-saturé à gauche relativement à $\mathcal{G}$.*

Démonstration. — Soit A une classe vérifiant la condition 2; pour tout $f \in A$, on a $f^{-1} = \alpha(f)f^{-1} \in A\mathcal{G} = A$ et A^{-1} est contenu dans A. Soit $g \in \mathcal{G}$ tel que gf soit défini; les relations : $gf = (f^{-1}g^{-1})^{-1}$, $f^{-1} \in A$ et $f^{-1}g^{-1} \in A\mathcal{G} = A$ entraînent $gf \in A$, donc $\mathcal{G}A \subset A$ et, puisque $A \subset \mathcal{G}A$ pour toute sous-classe A, on a $\mathcal{G}A = A$; par suite A est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$. On démontre de même que si A vérifie la condition 3, alors A est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$. — Soit A une composante inductive faible de $\mathcal{G}$ et soit $f \in A$. Comme on a : $\alpha(f) = f^{-1}f \in \mathcal{G}A = A$ et $\beta(f) = ff^{-1} \in A\mathcal{G} = A$, les conditions 2 et 3 sont satisfaites et le début de la démonstration prouve que A^{-1} est contenu dans A. Pour tout $h \in \mathcal{G}$ tel que fh soit défini, on a $fh \in A$; il en résulte que A est un sous-groupoïde saturé et saturé par induction dans $\mathcal{G}$. — Soit A un sous-pseudogroupe faible vérifiant la condition 1; alors $\alpha(A) \subset A$; soit $f \in A$ et $g \in \mathcal{G}$ tels que fg soit défini; on a : $fg = (f\beta(g)).(\alpha(f)g)$; puisque A est saturé par induction, $f\beta(g) \in A$; A étant aussi saturé dans $\mathcal{G}$, on a $\alpha(f)g \in \mathcal{G}$, et par suite $fg \in A$, c'est-à-dire $A\mathcal{G} \subset A$ et A vérifie la condition 2. Donc A est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$.

Corollaire 1. — *Pour qu'une sous-classe C_0 de $\mathcal{G}_0$ soit une composante inductive faible de $\mathcal{G}_0$, il faut et il suffit que C_0 soit une sous-classe de $\mathcal{G}_0$ saturée par induction.*

Corollaire 2. — *L'intersection d'une classe de composantes inductives faibles de $\mathcal{G}$ est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$.*

Définition 10. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif. Un sous-pseudogroupe* A′ *de $\mathcal{G}$ qui est engendré par une composante inductive faible* A *de $\mathcal{G}$ est appelé* composante inductive de $\mathcal{G}$.

Proposition 14. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal,* A′ *un sous-pseudogroupe de $\mathcal{G}$; pour que* A′ *soit une composante inductive de $\mathcal{G}$, il faut et il suffit que* A′ *soit une composante inductive faible de $\mathcal{G}$.*

Démonstration. — Soit A′ une composante inductive de $\mathcal{G}$ engendrée par la composante inductive faible A; puisque $\mathcal{G}$ est sous-prélocal, A′ admet A pour base; donc A′ est saturé par induction dans $\mathcal{G}$. Soit $h \in \mathcal{G}$ et $\alpha(h) \in \overline{A'_0}$; il existe une sous-classe E de A_0 telle que $\alpha(h) \in \overset{h}{\bigcup} E$. D'après la proposition 3, on a : $h = \bigcup hE$. Comme A est pseudo-saturé, et que $\alpha(he) = e \in A_0$, on a $he \in A$ pour tout $e \in E$, d'où $h \in A'$. Par suite A′ est saturé dans $\mathcal{G}$ et A′ est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$. La condition est évidemment suffisante.

Corollaire 1. — *Pour qu'une sous-classe C_0 de la classe sous-prélocale $\mathcal{G}_0$ soit une composante inductive de $\mathcal{G}_0$, il faut et il suffit que C_0 soit une sous-classe inductive de $\mathcal{G}_0$ saturée par induction.*

Corollaire 2. — *L'intersection d'une classe de composantes inductives de $\mathcal{G}$ est une composante inductive de $\mathcal{G}$.*

Ce corollaire résulte du corollaire 2 de la proposition 13.

Définition 11. — *Soit* B *une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$; on appelle* composante inductive faible de B dans $\mathcal{G}$ *l'intersection* A *des composantes inductives faibles de $\mathcal{G}$ contenant* B. *Le sous-pseudogroupe* $\overline{A}$ *engendré par* A *est appelé* composante inductive de B dans $\mathcal{G}$.

Proposition 15. — *Soit* B *une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$; la composante inductive faible de* B *dans $\mathcal{G}$ est la composante* (5) A *dans $\mathcal{G}$ de la classe* $\varphi(B)$ *des éléments induits des éléments de* B. *Si $\mathcal{G}$ est sous-prélocal, la composante*

(5) La composante de C dans $\mathcal{G}$, où $C \subset \mathcal{G}$, est le plus petit sous-groupoïde saturé de $\mathcal{G}$ contenant C.

inductive A' *de* B *dans* $\mathcal{S}$ *est le groupoïde saturé de* $\mathcal{S}$ *tel que* A'_0 *soit la sous-classe inductive de* $\mathcal{S}_0$ *admettant* A_0 *pour base.*

Démonstration. — D'après la proposition 13, A est une composante inductive faible de $\mathcal{S}$; comme A contient B, A est la composante inductive faible de B dans $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ est sous-prélocal, le sous-pseudogroupe A' admet A pour base et A'_0 admet A_0 pour base; la proposition résulte donc de la proposition 14.

Corollaire 1. — *La composante inductive faible dans* $\mathcal{S}_0$ *d'une sous-classe* B_0 *de* $\mathcal{S}_0$ *est la classe* $\varphi(B_0)$.

Corollaire 2. — *La composante inductive de* B *dans* $\mathcal{S}$ *est l'intersection des composantes inductives de* $\mathcal{S}$ *contenant* B.

Remarque. — Les composantes inductives (faibles) d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{S}$ ne forment pas une partition de $\mathcal{S}$; en effet, la relation « f appartient à la composante inductive (faible) de g » n'est pas une relation symétrique. On obtient une partition de $\mathcal{S}$ en considérant les *composantes surinductives* de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire les composantes inductives faibles A de $\mathcal{S}$ telle que pour tout $e \in A_0$, la relation $e < e'$ entraîne $e' \in A_0$. Une composante surinductive de $\mathcal{S}$ est ainsi une composante inductive de $\mathcal{S}$ qui contient avec un élément tous ses majorants et tous ses minorants.

3. ATLAS COMPLETS DANS LES GROUPOÏDES SOUS-INDUCTIFS

Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif. Si F et G sont deux sous-classes de $\mathcal{S}$, nous désignerons par F^{-1} la classe des inverses des éléments de F, par G.F la classe des composés $g.f$ et par GF la classe des pseudo-produits gf, où $g \in G$ et $f \in F$.

Proposition 1. — *Soit* F *une sous-classe faiblement* $\overline{\bigcup}$*-saturée de* $\mathcal{S}$ *telle que* $F\alpha(F) = F$ *et* $\beta(F)F = F$. *Alors* F *est une partie sous-inductive faible de* $\mathcal{S}$, *tandis que* $\alpha(F)$ *et* $\beta(F)$ *sont des sous-classes inductives faibles. On a* : $F^{-1}F = F^{-1}.F$; $FF^{-1} = F.F^{-1}$; *les groupoïdes engendrés par* $a(F) = F^{-1}F$ *et* $b(F) = FF^{-1}$ *sont des sous-pseudogroupes faibles de* $\mathcal{S}$.

Démonstration. Soient $f \in \mathrm{F}$ et $f' \in \mathrm{F}$. Si f et f' sont majorés par $f'' \in \mathrm{F}$, on a $f \cap f' = f\alpha(f') \in \mathrm{F}$, donc F est une partie sous-inductive faible; si $\alpha(f) \cap \alpha(f')$ est défini, on a :

$$\alpha(f) \cap \alpha(f') = \alpha(f\alpha(f')) \in \alpha(\mathrm{F}).$$

Soit E une sous-classe de $\alpha(\mathrm{F})$ admettant un $\alpha(f)$-agrégat $\bar{e}$; la classe $f\mathrm{E}$ est une sous-classe de F majorée par f et admettant $f\bar{e}$ pour f-agrégat en vertu de la proposition 7-1; par suite $f\bar{e} \in \mathrm{F}$ et $\bar{e} = \alpha(f\bar{e}) \in \alpha(\mathrm{F})$. Ainsi $\alpha(\mathrm{F})$ est une sous-classe inductive faible. Si $f^{-1}f'$ est défini, il est égal à

$$(\beta(f')f)^{-1}.(\beta(f)f') \in \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F};$$

on en déduit $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{F} = \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$. Montrons que $a(\mathrm{F})$ vérifie les conditions de la proposition 8-2. En effet, comme

$$\alpha(f^{-1}.f') = \alpha(f') = f'^{-1}.f' \in \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F},$$

on a $\alpha(a(\mathrm{F})) = \alpha(\mathrm{F}) \subset a(\mathrm{F})$; de même $\beta(a(\mathrm{F})) = \alpha(\mathrm{F}) \subset a(\mathrm{F})$; de plus $(a(\mathrm{F}))^{-1} = (\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F})^{-1} = \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F} = a(\mathrm{F})$. Si $e \in \alpha(\mathrm{F})$ et si $g = (f'^{-1}.f)e$ est défini, alors $g = f'^{-1}(fe) \in \mathrm{F}^{-1}\mathrm{F}$. Soit K une sous-classe de $a(\mathrm{F})$ admettant un $f^{-1}f'$-agrégat k; puisque $\alpha(\mathrm{K})$ est une sous-classe de $\alpha(\mathrm{F})$ majorée par $e = \alpha(f^{-1}f') \in \alpha(\mathrm{F})$, on a :

$$e' = \bigsqcup^{e} \alpha(\mathrm{K}) \in \alpha(\mathrm{F}) \qquad \text{et} \qquad k = (f^{-1}f')e' \in a(\mathrm{F}).$$

Par conséquent il résulte de la proposition 8-2 que le sous-groupoïde engendré par $a(\mathrm{F})$ est un sous-pseudogroupe faible. La démonstration est analogue pour $b(\mathrm{F})$.

DÉFINITION 1. — *On appelle* atlas (faible) complet de $\mathcal{S}$ *une sous-classe* F *de* $\mathcal{S}$ *qui est (faiblement)* $\bigsqcup$*-saturée et telle que l'on ait :*

$$\mathrm{F}\,a(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}, \qquad \text{où} \qquad a(\mathrm{F}) = \mathrm{F}^{-1}\mathrm{F}.$$

Un atlas (faible) complet F *qui admet pour base (faible) une sous-classe* F′ *telle que* $\alpha(\mathrm{F}')$ *et* $\beta(\mathrm{F}')$ *soient des classes compatibles est dit* propre.

Cette définition entraîne $\mathrm{F}a(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$.

Si F est un atlas faible complet propre, alors $\alpha(\mathrm{F})$ et $\beta(\mathrm{F})$ sont des classes compatibles. Un atlas complet propre n'est pas forcément propre en tant qu'atlas faible complet.

Si C est une classe d'atlas (faibles) complets, la classe intersection des $F \in C$ est un atlas (faible) complet. Par suite toute sous-classe B de $\mathcal{G}$ est contenue dans un plus petit atlas (faible) complet de $\mathcal{G}$, appelé *atlas (faible) complet engendré par* B dans $\mathcal{G}$.

Soient I une classe d'indices et $\mathcal{G} \times (I \times I)$ le groupoïde produit de $\mathcal{G}$ avec le groupoïde des couples $(I \times I)$; on identifie avec 0 tous les éléments $(0,(j, i))$, où $(j, i) \in I \times I$. Muni de la relation d'ordre: $(f', (j', i')) < (f, (j, i))$ si, et seulement si, $f' < f$ et $(j', i') = (j, i)$, $\mathcal{G} \times (I \times I)$ est un groupoïde sous-préinductif. Soient Γ un sous-pseudogroupe de $\mathcal{G} \times (I \times I)$ et F_{ji} la classe des éléments f tels que $(f, (j, i)) \in \Gamma$.

Proposition 2. — *Avec les notations précédentes,* F_{ji} *est un atlas complet,* F_{ii} *est un sous-pseudogroupe; on a* $(F_{ji})^{-1} = F_{ij}$; $F'_{ki} = F_{kj}.F_{ji} = F_{kj}F_{ji}$ *est un atlas faible complet saturé par induction dans* F_{ki} *et* $a(F_{ji})$ *est une composante inductive faible de* F_{ii}; *de plus* F'_{ki} *est pseudo-saturé à droite relativement à* F_{kk} *et à gauche relativement à* F_{ii}.

Démonstration. — On a évidemment $(F_{ji})^{-1} = F_{ij}$. Un élément de Γ majoré par $(f, (j, i))$ étant de la forme $(f', (j, i))$, où $f' < f$ et $f' \in F_{ji}$, F_{ji} est une partie sous-inductive. Puisque Γ est un sous-pseudogroupe, on a $F_{kj}F_{ji} \subset F_{ki}$. Il en résulte que F_{ii} est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{G}$. La relation

$$F_{ij}(F_{ji}F_{ij}) \subset F_{ij}F_{jj} \subset F_{ij}$$

entraîne que F_{ij} est un atlas complet. On a $F_{kj}F_{ji} = F_{kj}.F_{ji}$, car:

$$F_{kj}F_{ji} \subset (F_{kj}\beta(F_{ji})).(\alpha(F_{kj})F_{ji}) \subset (F_{kj}F_{jj}).(F_{jj}F_{ji}) \subset F_{kj}.F_{ji}.$$

Comme: $(F_{ij}F_{ji})F_{ii} = (F_{ij}.F_{ji})F_{ii} \subset F_{ij}(F_{ji}F_{ii}) \subset F_{ij}F_{ji} \subset F_{ii}$, $F_{ij}F_{ji}$ est une composante inductive faible de F_{ii}; en particulier $\alpha(F_{ji})$ est saturé par induction dans $\alpha(F_{ii})$. Soit $g < f'f$, où $f \in F_{ji}$, $f' \in F_{kj}$ et $g \in F_{ki}$; les relations: $\alpha(g) < \alpha(f)$ et $\alpha(g) \in \alpha(F_{ii})$ entraînant:

$$g = (f'f)\alpha(g) = f'(f\alpha(g)) \in F_{kj}(F_{ji}F_{ii}) \subset F_{kj}F_{ji} = F'_{ki},$$

F'_{ki} est saturé par induction dans F_{ki}; de plus F'_{ki} est un atlas faible complet en vertu de:

$$F'_{ki}F_{ii} = (F_{kj}.F_{ji})F_{ii} \subset F_{kj}(F_{ji}F_{ii}) \subset F'_{ki} \qquad \text{et} \qquad F_{kk}F'_{ki} \subset F'_{ki}.$$

Proposition 3. — *Soit* F *un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$. *Alors* F *est une partie sous-inductive faible de* $\mathcal{G}$; *on a*

$$F = F\alpha(F) = \beta(F)F$$

et $a(F) = F^{-1}.F$; $a(F)$ *et* $b(F) = FF^{-1} = F.F^{-1}$ *sont des sous-pseudogroupes faibles de* $\mathcal{G}$ *tels que* $\alpha(a(F)) = \alpha(F)$ *et* $\alpha(b(F)) = \beta(F)$; *de plus* $b(F)F = F$.

Démonstration. — On a $F\alpha(F) \subset Fa(F) = F$, car $\alpha(F) \subset a(F)$, et :

$$\beta(F)F \subset (F.F^{-1})F \subset F(F^{-1}F) = Fa(F) = F.$$

D'après la proposition 1, F est une partie sous-inductive faible, $a(F) = F^{-1}.F$ et $b(F) = F.F^{-1}$. Les relations :

$$(a(F))^{-1} = (F^{-1}.F)^{-1} = F.F^{-1} = a(F)$$

et

$$(a(F)).(a(F)) = (F^{-1}.F).a(F) = F^{-1}.F = a(F)$$

montrent que $a(F)$ est un sous-groupoïde, donc un sous-pseudogroupe faible, d'après la proposition 1; de même $b(F)$ est un sous-pseudogroupe faible. Comme :

$$F = \beta(F)F \subset b(F)F$$

et

$$b(F)F = (F.F^{-1})F \subset Fa(F) = F,$$

on obtient $F = b(F)F$.

Corollaire 1. — *Si* F *est un atlas faible complet,* F^{-1} *est un atlas faible complet tel que* $a(F^{-1}) = b(F)$ *et* $b(F^{-1}) = a(F)$.

En effet, F^{-1} est une partie sous-inductive faible et on a :

$$a(F^{-1}) = (F^{-1})^{-1}F^{-1} = b(F); \qquad b(F^{-1}) = F^{-1}(F^{-1})^{-1} = a(F)$$

et

$$F^{-1}a(F^{-1}) = (b(F)F)^{-1} = F^{-1}.$$

Corollaire 2. — *Soit* $I = \{1, 2\}$. *Si* F *est un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$, *la classe réunion de* $(F, (2, 1))$, $(F^{-1}, (1, 2))$, $(a(F), (1, 1))$ et $(b(F), (2, 2))$ *est le sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{G} \times (I \times I)$ *engendré par* $(F,(2, 1))$.

Proposition 4. — *Soient* B *une sous-classe de* $\mathcal{G}$ *et* Γ *un sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{G}$ *contenant* $\alpha(B)$. *Si on a*

$(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma) \subset \Gamma$ *et si* A *est la composante inductive faible de* 1
$(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma)$ *dans* Γ, *alors* BA *est un atlas faible complet tel que* $a(BA) = A$.

Démonstration. — On a :

$$B^{-1}B \subset (B\alpha(B))^{-1}(B\alpha(B)) \subset (B\Gamma)^{-1}(B\Gamma) \subset A$$

et

$$a(BA) = (BA)^{-1}(BA) \subset (B\Gamma)^{-1}(B\Gamma) \subset A.$$

Si $(bf)f'$ est défini, $b \in B$, $f \in A$ et $f' \in A$, on a, en vertu de l'associativité partielle du pseudoproduit :

$$(bf)f' = (b(\alpha(b)f))f' = b((\alpha(b)f)f'),$$

puisque $\alpha(bf) \cap \beta(f')$ est défini ; il en résulte :

$$(BA)A \subset B((\alpha(B)A)A) \subset B((AA)A) = BA,$$

car $\alpha(B) \subset B^{-1}B \subset A$ et $AA = A$. Donc $(BA)a(BA) \subset (BA)A \subset BA$. Soit C une sous-classe de BA admettant un f-agrégat c, où $f \in BA$. Comme $\alpha(C)$ est majoré par $\alpha(f) \in A$ et $\alpha(C) \subset \alpha(BA) \subset A$, et comme A est un sous-pseudogroupe faible, on obtient :

$$\alpha(c) = \bigcup^{\alpha(f)} \alpha(C) \in A,$$

d'où

$$c = f\alpha(c) \in (BA)A \subset BA.$$

Ceci montre que BA est un atlas faible complet de $\mathcal{G}$. — Toute unité de $(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma)$ étant majorée par un élément de $\alpha(B\Gamma)$, A est le groupoïde engendré par la classe A′ des $f' \in \Gamma$ tels qu'il existe $b \in B$ et $g \in \Gamma$ avec $\beta(f') < \alpha(bg)$; par conséquent, pour tout $f' \in A'$, on a :

$$f' = (bg)^{-1}(bg)f' = (bg\beta(f'))^{-1}((bg)f').$$

Puisque

$$bg\beta(f') \in B(\Gamma A) \subset BA \quad \text{et} \quad (bg)f' = b((\alpha(b)g)f') \in B(\Gamma A) \subset BA,$$

on en déduit $f' \in (BA)^{-1}(BA) = a(BA)$ et par suite A est contenu dans le groupoïde $a(BA)$. Donc $A = a(BA)$.

Corollaire 1. — *Soit* B *une sous-classe de* $\mathcal{G}$ *telle que* $\beta(B)$ *soit une classe compatible. Si* Γ *est un sous-pseudogroupe faible (resp. faible propre) de* $\mathcal{G}$ *contenant* $B^{-1}B$ *et si* A *est la compo-*

sante inductive faible de Γ *engendrée par* $B^{-1}B$, *alors* BA *est un atlas faible complet (resp. complet propre) tel que* $a(BA) = A$.

En effet, on a $\alpha(B) \subset B^{-1}B \subset \Gamma$ et, puisque $\beta(B)$ est compatible :

$$(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma) = \Gamma((B^{-1}B)\Gamma) \subset \Gamma(\Gamma\Gamma) \subset \Gamma;$$

de plus la composante inductive faible A de $B^{-1}B$ dans Γ contient $\Gamma(B^{-1}B)\Gamma = (\Gamma B)^{-1}(B\Gamma)$, donc est identique à la composante inductive faible A de $(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma)$ dans Γ. Par suite le corollaire 1 est conséquence de la proposition 4.

Corollaire 2. — *Soit* B *une sous-classe de* $\mathcal{S}$ *telle que* $\beta(B)$ *soit une classe compatible. Si* Γ *est le sous-pseudogroupe faible engendré par* $B^{-1}B$ *dans* $\mathcal{S}$, *alors* $B\Gamma$ *est l'atlas faible complet engendré par* B *dans* $\mathcal{S}$ *et on a :* $a(B\Gamma) = \Gamma$.

Ce corollaire résulte du corollaire 1.

Corollaire 3. — *Soit* B *une sous-classe de* $\mathcal{S}$ *telle que* $B^{-1}.B$ *soit un sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{S}$ *et que l'on ait :*

$$\beta(B)B \subset B \qquad \textit{et} \qquad B(B^{-1}.B) \subset B.$$

Alors B *est un atlas faible complet de* $\mathcal{S}$.

En effet, la condition $\beta(B)B \subset B$ entraîne $B^{-1}B = B^{-1}.B$; par suite on a $B(B^{-1}B) \subset B$ et $(B(B^{-1}B))^{-1}(B(B^{-1}B)) \subset B^{-1}B$. Le corollaire se déduit donc de la proposition 4.

Proposition 5. — *Soient* E *et* E′ *deux sous-classes inductives faibles de* $\mathcal{S}_0$. *La classe* F *des* $f \in \mathcal{S}$ *tels que* $\alpha(f) \in E$, $\beta(f) \in E'$, $\beta(fE) \subset E'$ *et* $\alpha(E'f) \subset E$ *est un atlas faible complet dit maximal;* $a(F)$ *et* $b(F)$ *sont des atlas faibles complets maximaux; on a* $F = FE = E'F$.

Démonstration. — Soient $e' \in E'$, $f \in F$ et $e'f \in E'F$. On a :

$$\alpha(e'f) \in E \qquad \text{et} \qquad \beta(e'f) = e'\beta(f) \in E'.$$

Les relations : $e'' \in E'$ et $f'' = e''(e'f) \in E'(E'F)$ entraînent :

$$\beta(f'') = e''\beta(e'f) \in E',$$

donc $f'' = \beta(f'')f \in E'F$ et $\alpha(f'') \in E$.

Si $f' = (e'f)e$ est défini, où $e \in E$, on a $\alpha(f') = \alpha(e'f)e \in E$, d'où $f' = f\alpha(f') \in FE$ et $\beta(f') \in E'$. Par suite $e'f \in F$, c'est-à-dire $E'F \subset F$; on montre de même $FE \subset F$. Comme on a aussi

$F \subset FE$ et $F \subset E'F$, il en résulte $F = FE = E'F$. En utilisant les conditions :

$$\beta(F)F \subset E'F = F \qquad \text{et} \qquad F\alpha(F) \subset FE = F,$$

on obtient $G = F(F^{-1}F) = F.(F^{-1}.F)$,

$$\alpha(G) \subset \alpha(F) \subset E;\ \beta(G) \subset \beta(F) \subset E';$$
$$GE \subset F(F^{-1}(FE)) = G \qquad \text{et} \qquad E'G \subset G.$$

On en déduit $G \subset F$. Enfin, si $\bigcup^{f} A$ est défini, où $A \subset F$ et $f \in F$, on a

$$\bigcup^{f} A = f\left(\bigcup^{\alpha(f)} \alpha(A)\right) \in FE \subset F,$$

car E est une sous-classe inductive faible. Donc F est faiblement $\overline{\bigcup}$-saturée et F est un atlas faible complet.

Corollaire 1. — *Soient* F *un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$ *et* F′ *une sous-classe de* F *saturée par induction dans* F *et pleine dans* F (*c'est-à-dire telle que* $\beta(F').F.\alpha(F') = F'$). *Alors* F′ *est un atlas complet de* $\mathcal{G}$.

Démonstration. — La classe F_1 des $f \in \mathcal{G}$ tels que $\alpha(f) \in \alpha(F')$, $\beta(f) \in \beta(F')$, $\alpha(\beta(F')f) \subset \alpha(F')$ et $\beta(f\alpha(F')) \subset \beta(F')$ est un atlas faible complet d'après la proposition 5; comme la classe intersection de deux atlas faibles complets est un atlas faible complet, la classe F'_1 des $f \in F$ tels que $f \in F_1$ est aussi un atlas faible complet. On a évidemment $F'_1 \subset F'$; inversement si $f' \in F'$, les classes $\beta(F')f'$ et $f'\alpha(F')$ étant majorées par f', elles sont contenues dans F'; il en résulte $F' \subset F'_1$, d'où $F' = F'_1$.

Corollaire 2. — *Soit* F *un atlas complet propre de* $\mathcal{G}$; *il existe un atlas faible complet propre* F_1, *saturé par induction dans* F, *formant une base de* F.

En effet, soit B une base de F telle que $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient des classes compatibles; soient E et E′ les sous-classes de $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ formées des éléments induits des éléments de $\alpha(B)$ et $\beta(B)$; la classe $F_1 = E'.F.E$ étant saturée par induction dans F, c'est un atlas faible complet d'après le corollaire 1; de plus F_1 est propre et F_1, contenant B, est aussi une base de F.

Proposition 6. — *Soit* F *un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$; *si* $\beta(F)$ *est contenu dans* F, *alors* F *est contenu dans* $a(F)$; *si on a* $F \subset a(F)$, *alors* $b(F) \subset F$ *et* $b(F)$ *est un sous-groupoïde saturé par induction de* $a(F)$, *dont* $a(F)$ *est un élargissement* (déf. 3-2, III [1] et [4]).

Démonstration. — Si $\beta(F) \subset F$, on a $F = \beta(F)F \subset F^{-1}F = a(F)$. Supposons $F \subset a(F)$; alors $b(F) = FF^{-1} \subset Fa(F) = F$; les conditions $f \in a(F)$ et $\beta(f) \in \beta(F)$ entraînent $f = \beta(f)f \in Fa(F) = F$; par suite $F = \beta(F).a(F)$. De plus: $b(F) \subset \beta(F).a(F).\beta(F)$ et

$$\beta(F).a(F).\beta(F) \subset F.a(F).\beta(F) = F.\beta(F) \subset F.F^{-1} = b(F),$$

d'où $b(F) = \beta(F).a(F).\beta(F)$ et $b(F)$ est un sous-groupoïde plein de $a(F)$. Pour tout $e \in a(F)$ et tout $g \in b(F)$ avec $e < \alpha(g)$, on a $ge \in F^{-1}(Fa(F)) = b(F)$; donc $b(F)$ est saturé par induction dans $a(F)$. Comme la composante de $b(F)$ dans $a(F)$ contient F, elle contient $\beta(F)$ ainsi que $a(F)$. Par conséquent $a(F)$ est un élargissement de $b(F)$.

Corollaire 1. — *Soient* I *une classe d'indices contenant* 1 *et* 2 *et* F *un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$; *soit* $\mathcal{F}$ *le sous-pseudogroupe faible du groupoïde sous-préinductif* $\mathcal{G} \times (I \times I)$ *engendré par la classe des triplets* $(f, (2, 1))$ *tels que* $f \in F$. *Alors* $(a(F), (1, 1))$ *et* $(b(F), (2, 2))$ *sont des sous-pseudogroupes faibles de* $\mathcal{F}$ *saturés par induction et dont chacun admet* $\mathcal{F}$ *pour élargissement.*

Démonstration. — $\mathcal{F}$ est la classe réunion des classes $(F, (2, 1))$, $(F^{-1}, (1, 2))$, $(a(F), (1, 1))$ et $(b(F), (2, 2))$. La sous-classe G de $\mathcal{F}$ formée des triplets $(g, (2, i))$, où $i = 1, 2$, est un atlas faible complet de $\mathcal{G} \times (I \times I)$, puisque

$$(g'', (2, j))((g', (j, 2))(g, (2, i))) = (g''(g'g), (2, i)) \in G.$$

Comme $\beta((g, (2, i))) = (\beta(g), (2, 2)) \in G$, la proposition 6 entraîne que $a(G)$ contient G; donc $a(G) = \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est un élargissement de $b(G) = (b(F), (2, 2))$.

Corollaire 2. — *Soit* E′ *une sous-classe de* $\mathcal{G}_0$ *saturée par induction;* $F = E'\mathcal{G}$ *est un atlas faible complet tel que* $a(F)$ *soit la composante inductive faible de* E′ *dans* $\mathcal{G}$.

En effet, on a $\beta(F\mathcal{G}) \subset \beta(F) \subset E'$, car E′ est saturé par induction; par suite F est un atlas faible complet en vertu de la proposition 5, et $a(F)$ est la composante inductive faible de $E' = \beta(F)$, d'après la proposition 6.

Proposition 7. — *La classe $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ des atlas faibles complets de $\mathcal{S}$ est un groupoïde pour la loi de composition définie par :*

$$(G, F) \to G.F \quad \textit{si, et seulement si,} \quad a(G) = b(F).$$

$\mathcal{H}(\mathcal{S})$ admet pour classe d'unités la classe des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{S}$.

Démonstration. — Soient $F \in \mathcal{H}(\mathcal{S})$ et $G \in \mathcal{H}(\mathcal{S})$. Montrons que, si $a(G) = b(F)$, $G.F$ est un atlas faible complet tel que $a(G.F) = a(F)$ et $b(G.F) = b(G)$. En effet, les relations : $GF \subset (G\beta(F)).(\alpha(G)F) \subset G.F$ entraînent $GF = G.F$ et

$$\beta(G.F)\,(GF) \subset \beta(G)\,(GF) \subset GF.$$

Comme

$$\begin{aligned} a(G.F) &= (G.F)^{-1}.(G.F) \\ &= F^{-1}.G^{-1}.G.F = F^{-1}.b(F).F = a(F), \end{aligned}$$

on a $(G.F)a(G.F) = G.F$ et il résulte du corollaire 3 de la proposition 4 que GF est un atlas faible complet tel que $a(G.F) = a(F)$. De plus, on a :

$$\begin{aligned} b(G.F) = (G.F).(G.F)^{-1} &= G.F.F^{-1}.G^{-1} \\ &= G.a(G).G^{-1} = b(G). \end{aligned}$$

— Dans $\mathcal{H}(\mathcal{S})$, F admet les pseudogroupes faibles $a(F)$ et $b(F)$ pour unités à droite et à gauche. D'après l'associativité de la loi de composition dans $\mathcal{S}$, on a

$$H.G.F = H.(G.F) = (H.G).F,$$

si $H.(G.F)$ est défini dans $\mathcal{H}(\mathcal{S})$. Donc $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ est une catégorie. Enfin, d'après le corollaire de la proposition 3, F^{-1} est un atlas faible complet, qui est l'inverse de F dans $\mathcal{H}(\mathcal{S})$.

Corollaire. — *La sous-classe de $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ formée des atlas faibles complets propres de $\mathcal{S}$ est le sous-groupoïde plein $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ de $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ dont la classe des unités est la classe des sous-pseudogroupes faibles propres.*

Étant donné un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{G}$, nous désignerons par $\overline{\mathrm{F}}$ la partie sous-inductive engendrée dans $\mathcal{G}$ par la sous-classe F de $\mathcal{G}$. Soient G et F des sous-classes de $\mathcal{G}$. Si $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$, on a $\overline{\mathrm{G}} \subset \overline{\mathrm{F}}$. Si F et G sont des bases de $\overline{\mathrm{F}}$ et $\overline{\mathrm{G}}$ resp. on a : $\overline{\mathrm{G}}\,\overline{\mathrm{F}} \subset \overline{\mathrm{GF}}$, en vertu de la prop. 3-2.

Proposition 8. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal. Si* F *est un atlas faible complet de $\mathcal{G}$, la partie sous-inductive* $\overline{\mathrm{F}}$ *engendrée par* F *dans $\mathcal{G}$ est un atlas complet admettant* F *pour base et tel que* $\overline{a(\overline{\mathrm{F}})} = \overline{a(\mathrm{F})}$.

Démonstration. — Puisque $\mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$, il résulte du corollaire de la proposition 4-2 que F est une base de $\overline{\mathrm{F}}$. Soient K, K′ et L des sous-classes de F admettant des sous-agrégats dans $\mathcal{G}$; on a, d'après la prop. 3-2 :

$$g = \left(\bigcup^{l} \mathrm{L}\right)\left(\left(\bigcup^{k} \mathrm{K}\right)^{-1}\left(\bigcup^{k'} \mathrm{K}'\right)\right) = \bigcup^{g} \mathrm{L}(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{K}');$$

les relations : $\mathrm{K}^{-1}\mathrm{K}' \subset \mathrm{F}^{-1}\,\mathrm{F} = a(\mathrm{F})$ et $\mathrm{L}(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{K}') \subset \mathrm{F}a(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$ entraînent $g \in \overline{\mathrm{F}}$. Par suite $\overline{\mathrm{F}}a(\overline{\mathrm{F}}) \subset \overline{\mathrm{F}}$ et $\overline{\mathrm{F}}$ est un atlas complet.

Corollaire 1. — *Soient* Γ *un sous-pseudogroupe de* $\mathcal{G}$ *et* B *une sous-classe de $\mathcal{G}$ telle que* $\alpha(\mathrm{B}) \subset \Gamma$ *et* $(\mathrm{B}\Gamma)^{-1}(\mathrm{B}\Gamma) \subset \Gamma$; *soient* A *la composante inductive faible, et* $\overline{\mathrm{A}}$ *la composante inductive, de* $(\mathrm{B}\Gamma)^{-1}(\mathrm{B}\Gamma)$ *dans* Γ; *alors la partie sous-inductive* $\overline{\mathrm{BA}}$ *engendrée par* BA *est un atlas complet de $\mathcal{G}$ admettant* $\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}}$ *pour base et tel que* $\overline{\mathrm{A}}$ *soit le sous-pseudogroupe engendré par* $a(\overline{\mathrm{BA}})$ *dans $\mathcal{G}$.*

En effet, d'après la proposition 4, BA est un atlas faible complet de $\mathcal{G}$ tel que $a(\mathrm{BA}) = \mathrm{A}$; par suite $\overline{\mathrm{BA}}$ est un atlas complet admettant $\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}}$ pour base; comme $a(\mathrm{BA})$ est une base de $\overline{a(\mathrm{BA})}$, c'est aussi une base de $\overline{a(\overline{\mathrm{BA}})}$, donc

$$\overline{a(\mathrm{BA})} = \overline{a(\overline{\mathrm{BA}})} = \overline{\mathrm{A}}.$$

Corollaire 2. — *Soit* B *une sous-classe de $\mathcal{G}$ telle que* $\overline{\mathrm{B}^{-1}.\mathrm{B}}$ *soit un sous-pseudogroupe de $\mathcal{G}$, que* $\beta(\mathrm{B})\mathrm{B} \subset \mathrm{B}$ *et que* $\mathrm{B}(\mathrm{B}^{-1}.\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$. *Alors* $\overline{\mathrm{B}}$ *est un atlas complet pour lequel*

$$\overline{a(\overline{\mathrm{B}})} = \overline{\mathrm{B}^{-1}.\mathrm{B}}.$$

Démonstration. — Comme $\beta(B)B \subset B$, *on a* $B^{-1}B = B^{-1}.B$, d'où $B(B^{-1}B) = B$. Des relations : $\alpha(B) \subset B^{-1}.B \subset \overline{B^{-1}.B}$,

$$B^{-1}B \subset (B(\overline{B^{-1}.B}))^{-1}(B(\overline{B^{-1}.B})) = H$$

et $$H \subset (\overline{B(B^{-1}B)})^{-1}(\overline{B(B^{-1}B)}) = \overline{B}^{-1}\overline{B} \subset \overline{B^{-1}B} = \overline{B^{-1}.B},$$

on déduit que $\overline{B^{-1}.B}$ est la composante inductive de H dans $\overline{B^{-1}B}$ et, en vertu du corollaire 1 de la proposition 8, $\overline{B(B^{-1}B)} = \overline{B}$ est un atlas complet tel que $a(\overline{B}) = \overline{B^{-1}.B}$.

Corollaire 3. — *Si* E *et* E′ *sont deux sous-classes inductives de* $\mathcal{G}_0$, *la classe* F *des* $f \in \mathcal{G}$ *tels que* $\alpha(f) \in E$, $\beta(f) \in E'$, $\beta(fE) \subset E'$ *et* $\alpha(E'f) \subset E$ *est un atlas complet de* $\mathcal{G}$.

En effet, d'après la proposition 5, F est un atlas faible complet; montrons que F est $\overline{\bigcup}$-saturée, d'où il résultera en vertu de la proposition 8 que F est un atlas complet. En effet pour une sous-classe A de F admettant un f-agrégat f, on a $\alpha(f) \in E$ et $\beta(f) \in E'$; d'après la prop. 3-2 : $\left(\overline{\bigcup} A\right) E \subset \overline{\bigcup}(AE)$, d'où $\beta(fE) \in E'$; de même $\alpha(E'f) \in E$ et $f \in F$.

Proposition 9. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-prélocal*, F *un atlas complet de* $\mathcal{G}$, $\overline{a}(F)$ *et* $\overline{b}(F)$ *les sous-pseudogroupes engendrés resp. par* $a(F)$ *et* $b(F)$. *Alors on a* $F\overline{a}(F) = F = \overline{b}(F)F$. *De plus la classe des atlas complets de* $\mathcal{G}$ *est un groupoïde* $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ *pour la loi de composition :*

$$(G, F) \to G \circ F = \overline{GF} \qquad \textit{si, et seulement si,} \qquad \overline{a}(G) = \overline{b}(F).$$

Démonstration. — On a $F = F\alpha(F) \subset F\overline{a}(F)$. D'après la proposition 9-2, $\overline{a}(F)$ admet $a(F)$ pour base. Soit $H \subset a(F)$ et $h = \overset{h}{\bigcup} H \in \overline{a}(F)$. Si fh est défini, où $f \in F$, on a, d'après la proposition 3-2, $fh \in \overline{\bigcup} fH$; comme F est $\overline{\bigcup}$-saturé et $fH \subset Fa(F) = F$, on en déduit $fh \in F$, donc $F\overline{a}(F) = F$. De même $\overline{b}(F)F = F$. — Soit $G \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$ avec $\overline{a}(G) = \overline{b}(F)$; montrons que $G \circ F$ est un atlas complet tel que $\overline{a}(G \circ F) = \overline{a}(F)$ et $\overline{b}(G \circ F) = \overline{b}(G)$. En effet, les relations :

$$GF \subset (G\beta(F)).(\alpha(G)F)) \subset (G\overline{b}(F)).(\overline{a}(G)F)$$
$$= (G\overline{a}(G)).(\overline{b}(F)F) \subset G.F$$

entraînent $GF = G.F$. Il en résulte :

$$\beta(G.F)\,(G.F) \subset \beta(G)\,(G.F) \subset (\beta(G)G)F = GF = G.F$$

et

$$(G.F)^{-1}(G.F) = F^{-1}.G^{-1}.G.F \subset F^{-1}.\overline{b}(F).F = F^{-1}.F = a(F),$$

d'où

$$(G.F)\,((G.F)^{-1}.(G.F)) \subset (G.F)a(F) \subset G(Fa(F)) = GF$$

et

$$\overline{(GF)^{-1}.(GF)} \subset \overline{a}(F).$$

D'autre part, supposons $f \in F$, $f' \in F$ et $f^{-1}.f'$ défini. Comme $e = \beta(f) \in \overline{a}(G)$, il existe une sous-classe E' de $a(G)$ telle que $e \in \overline{\bigcup} E'$; on en déduit :

$$f^{-1}.f' \in \overline{\bigcup} f^{-1}(E'\,f') \subset \overline{F^{-1}(a(G).F)}$$
$$= \overline{F^{-1}(G^{-1}.\,G.F)} \subset \overline{(GF)^{-1}(GF)}.$$

Par suite $\overline{a}(F) = \overline{(GF)^{-1}(GF)}$. Du corollaire 2 de la proposition 8 il résulte que $\overline{G.F} = G \odot F$ est un atlas complet tel que $\overline{a}(G \odot F) = \overline{a}(F)$. De plus on trouve :

$$\overline{b}(G \odot F) = \overline{(G.F).(G.F)^{-1}} = \overline{G.(b(F).G^{-1})}$$
$$= \overline{G.(\overline{b}(F).G^{-1})} = \overline{b}(G).$$

— Dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$, F admet resp. $\overline{a}(F)$ et $\overline{b}(F)$ pour unités à droite et à gauche. Soit $H \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$; si $H \odot (G \odot F)$ et $(H \odot G) \odot F$ sont définis, ces atlas complets admettent chacun $H.G.F$ pour base; par conséquent ils sont égaux et la loi de composition $\odot$ est associative. Enfin F^{-1} est inverse de F dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$.

Corollaire. — *La classe $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ des atlas complets propres de $\mathcal{G}$ est le sous-groupoïde plein de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ admettant pour classe de ses unités la classe des sous-pseudogroupes propres de $\mathcal{G}$.*

Proposition 10. — *Soit* F *un atlas complet d'un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{G}$; si* $\beta(F) \subset F$, *on a* $F \subset \overline{a}(F)$. *Si* $F \subset \overline{a}(F)$, *alors* $\overline{b}(F) \subset F$ *et* $\overline{b}(F)$ *est un sous-groupoïde plein saturé par induction de* $\overline{a}(F)$, *qui admet* $\overline{a}(F)$ *pour composante inductive dans* $\overline{a}(F)$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 6.

4. GROUPOÏDES SOUS-PRÉINDUCTIFS DES ATLAS COMPLETS

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif. Soient F, G et H des sous-classes de $\mathcal{G}$. Si la classe E réunion de $\alpha(H)$ et de $\beta(G)$ est compatible, on a, en vertu de l'associativité partielle du pseudoproduit :

$$H(GF) \subset (HG)F;$$

si la classe E′ réunion de $\alpha(G)$ et $\beta(F)$ est compatible, on a de même :

$$(HG)F \subset H(GF);$$

si E et E′ sont compatibles, on a donc :

$$(HG)F = H(GF),$$

et dans ce cas on peut supprimer les parenthèses et écrire :

$$HGF = H(GF).$$

La partie sous-inductive faible engendrée par F sera notée $\underline{F}$.

Théorème 1. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal. Le groupoïde $\mathcal{H}'(\mathcal{G})$ des atlas faibles complets propres de $\mathcal{G}$* (proposition 7-3) *est un groupoïde sous-préinductif lorsqu'il est muni de la relation :*

$$F' < F \quad \textit{si, et seulement si,} \quad F' = F\alpha(F') = \beta(F')F.$$

Démonstration. — Soient $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$, $F' \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$ et $F'' \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$. On a :

$$F\alpha(F) = F = \beta(F)F, \qquad \text{d'où} \qquad F < F;$$

si $F' < F$ et $F'' < F'$, on trouve : $\alpha(F'') = \alpha(F')\alpha(F'')$ et

$$F'' = F'\alpha(F'') = F\alpha(F')\alpha(F'') = F\alpha(F'');$$

de même $F'' = \beta(F'')F$, c'est-à-dire $F'' < F$. Les conditions $F' < F$ et $F < F'$ entraînent :

$$F' = F\alpha(F') = F'\alpha(F)\alpha(F') = F'\alpha(F')\alpha(F) = F'\alpha(F) = F.$$

Donc la relation $<$ est une relation d'ordre.

Soit Γ un sous-pseudogroupe faible propre de $\mathcal{G}$. Montrons que si $F < \Gamma$, F est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{G}$. Comme $F = \Gamma\alpha(F) = \beta(F)\Gamma$, les relations :

$$\alpha(F) = \alpha(\Gamma)\alpha(F) \subset \Gamma\alpha(F) = F \quad \text{et} \quad \beta(F) = \beta(F)\beta(\Gamma) \subset F$$

entraînent, d'après la proposition 6-3, $a(F) \subset F \subset b(F)$ et $b(F) \subset F \subset a(F)$ resp., d'où $a(F) = b(F) = F$. Donc $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})_0$. Supposons $F' < F$; puisque $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont compatibles, on trouve :

$$\begin{aligned} a(F') = F'^{-1}F' = (F^{-1}\beta(F'))F' &= F^{-1}(F\alpha(F')) \\ &= a(F)\alpha(F') = \alpha(F')a(F), \end{aligned}$$

et par suite $a(F') < a(F)$; de même $b(F') < b(F)$. On en déduit de plus : $Fa(F') = F(a(F)\alpha(F')) = F\alpha(F') = F'$; $b(F')F = F'$: $b(F')Fa(F') = F'$.

— Supposons $H < a(F)$ et montrons que l'on a : $FH \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$ et $FH < F$. En effet, comme :

$$(FH)^{-1}(FH) = H^{-1}F^{-1}FH = H^{-1}(a(F)H) = H^{-1}H = H,$$

$$\begin{aligned} \beta(FH)FH \subset ((FH).(FH)^{-1})(FH) & \\ \subset FH((FH)^{-1}(FH)) &\subset FHH = FH \end{aligned}$$

et

$$(FH)((FH)^{-1}.(FH)) = (FH)H = FH,$$

FH est un atlas faible complet, d'après le corollaire 3 de la proposition 4-3, tel que $a(FH) = H$. On a $\alpha(FH) = \alpha(H)$; tout élément de $\alpha(FH)$ étant majoré par un élément de $\alpha(F)$, la classe $\alpha(FH)$ est compatible. Par conséquent $FH \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$. De plus on a les relations :

$$FH = F(a(F)\alpha(H)) = F\alpha(H) = F\alpha(FH)$$

et

$$\begin{aligned} \beta(FH)F \subset b(FH)F = ((F\alpha(H)).(F\alpha(H))^{-1})F & \\ = F\alpha(H)F^{-1}F = F\alpha(H)a(F) &= FH; \end{aligned}$$

l'égalité $f\alpha(h) = \beta(f\alpha(h))f$, où $f \in F$ et $h \in H$, entraînant $F\alpha(H) \subset \beta(FH)F$, on obtient : $F\alpha(FH) = FH = \beta(FH)F$, d'où $FH < F$.

— Soit $G \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$ tel que $a(G) = b(F)$. On a : $G.F \subset GF$ et

$$GF \subset (G\beta(F)).(\alpha(G)F) = (G\alpha(G)).(\beta(F)F) = G.F,$$

d'où $GF = G.F$. Supposons de plus $G' \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$, $F' \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$, $a(G') = b(F')$, $F' < F$ et $G' < G$; on a :

$$G'.F' = (G\alpha(G'))F' = G(\beta(F')F') = GF' = (G.F)\alpha(F')$$

et
$$G'.F' = G'(\beta(F')F) = \beta(G')\,(G.F),$$

c'est-à-dire $G'.F' < G.F$. Inversement soit $K < G.F$; d'après le début de la démonstration, on trouve : $a(K) < a(F)$,

$$F' = Fa(K) \in \mathcal{H}'(\mathcal{G}), \qquad F' < F, \qquad a(F') = a(K),$$
$$b(F') < b(F) = a(G);$$
$$G' = Gb(F') \in \mathcal{H}'(\mathcal{G}), \qquad G' < G, \qquad a(G') = b(F');$$
$$G'.F' < G.F.$$

De plus :

$$G'.F' = (Ga(G')).(Fa(K)) = GFa(K) = (G.F)a(K) = K.$$

Ceci prouve que l'axiome (I) est vérifié dans $\mathcal{H}'(\mathcal{G})$. 1

— Soient H' et H'' deux éléments de $\mathcal{H}'(\mathcal{G})_0$ majorés par $\Gamma \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})_0$. Comme $\alpha(H') = \alpha(\Gamma)\alpha(H')$ et $\alpha(H'') = \alpha(\Gamma)\alpha(H'')$, la classe $\alpha(H')\alpha(H'') = \alpha(\Gamma)\alpha(H')\alpha(H'')$ est compatible. Posons :

$$H = \Gamma\alpha(H')\alpha(H'');$$

on obtient :

$$H^{-1} = \alpha(H'')\alpha(H')\Gamma = \alpha(H'')H' = \alpha(H'')\Gamma\alpha(H') = H''\alpha(H') = H$$

et

$$HH \subset \alpha(H'')\alpha(H')\Gamma H = \alpha(H'')\alpha(H')H$$
$$= \alpha(H'')\alpha(H')\alpha(H'')\alpha(H')\Gamma = H.$$

$\mathcal{G}$ étant sous-prélocal, $\underline{H}$ est un sous-pseudogroupe faible. Comme $\alpha(H'\alpha(\underline{H})) = \alpha(H')\alpha(\underline{H}) = \alpha(\underline{H})$ est faiblement $\bigsqcup$-saturé, $H'\alpha(\underline{H})$ est faiblement $\bigsqcup$-saturé. Les relations :

$$H'\alpha(H) = \Gamma\alpha(H')\alpha(H'') = H = \alpha(H)H'$$

et
$$\underline{H'\alpha(H)} = \underline{H} = H'\alpha(\underline{H})$$

entraînent $\underline{H} < H'$ de même $\underline{H} < H''$. Si K est un minorant de H' et de H'' dans $\mathcal{H}'(\mathcal{G})$, on a $K < \underline{H}$, car

$$K = H'\alpha(K) = H'\alpha(H''\alpha(K)) = H'\alpha(H'')\alpha(K) = H\alpha(K) \subset \underline{H}\alpha(K)$$

et

$$\underline{H}\alpha(K) \subset \underline{H\alpha(K)} = \underline{K} = K;$$

par conséquent $\underline{H} = H' \cap H''$ et $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-préinductif.

Corollaire. — *La classe $\mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$ des sous-classes inductives faibles compatibles de $\mathcal{S}$* (définition 7-2) *est le sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$ dont la classe des unités est la classe des sous-classes inductives faibles compatibles de $\mathcal{S}_0$.*

Démonstration. — Soit $F \in \mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$; on a $a(F) = \alpha(F)$ et $b(F) = \beta(F)$: les conditions $f \in F$ et $f' \in F$ entraînent

$$f\alpha(f') = f \cap f' \in F,$$

d'après la proposition 10-2, d'où $Fa(F) = F\alpha(F) = F$ et $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{S})$. Réciproquement si $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{S})$, $a(F) = \alpha(F)$ et $b(F) = \beta(F)$, alors on a $f^{-1}f' \in \mathcal{S}_0$, $f'f^{-1} \in \mathcal{S}_0$ pour tout $f \in F$ et tout $f' \in F$, donc $F \in \mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$.

Théorème 2. — *Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-préinductif; le groupoïde $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ des atlas faibles complets de $\mathcal{S}$* (proposition 7-3) *est un groupoïde sous-inductif lorsqu'il est muni de la relation:*

$F' \ll F$ *si, et seulement si,* $F' \subset F$ *et* $F' = F\alpha(F') = \beta(F')F$.

Démonstration. — Soient $F \in \mathcal{H}(\mathcal{S})$, $F' \in \mathcal{H}(\mathcal{S})$ et $F'' \in \mathcal{H}(\mathcal{S})$. On a: $F \ll F$. Si $F' \ll F$ et $F \ll F'$, alors $F' \subset F \subset F'$, d'où $F' = F$. Si $F' \ll F$ et $F'' \ll F'$, on a: $F'' \subset F' \subset F$; les relations:

$$F'' = F''\alpha(F'') \subset F\alpha(F'')$$

et $\quad F\alpha(F'') \subset (F\alpha(F''))\alpha(F'') \subset (F\alpha(F'))\alpha(F'') = F'\alpha(F'') = F''$

entraînent $F'' = F\alpha(F'')$; de même $F'' = \beta(F'')F$; donc $F'' \ll F$ et la relation $\ll$ est une relation d'ordre.

— Soit Γ un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$. Montrons que si $F \ll \Gamma$, F est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$. Comme:

$$\alpha(F) = \alpha(\Gamma)\alpha(F) \subset \Gamma\alpha(F) = F \qquad \text{et} \qquad \beta(F) \subset F,$$

il résulte de la proposition 6-3 que: $F = a(F) = b(F) \in \mathcal{H}(\mathcal{S})_0$. Supposons $F' \ll F$; alors $F' = F.\alpha(F') = \beta(F').F$, car:

$$F.\alpha(F') \subset F\alpha(F') = F'$$

et, pour tout $f' \in F'$, on a : $f' = f'.\alpha(f') \in F.\alpha(F')$. Évidemment :

$$a(F') \subset a(F) \qquad \text{et} \qquad a(F') \subset a(F)\alpha(F');$$

par ailleurs :

$$a(F)\alpha(F') = (F^{-1}.F)\alpha(F') \subset F^{-1}F' \subset (F^{-1}\beta(F'))F' = F'^{-1}F' = a(F'$$

et par suite : $a(F') = a(F)\alpha(F')$ et $a(F') \leqslant a(F)$; de même $b(F') \leqslant b(F)$. De plus :

$$Fa(F') = (F\alpha(F')).(\alpha(F)a(F')) = F'a(F') = F' = b(F')F,$$
$$F.a(F') = F.F^{-1}.\beta(F').F' = b(F).\beta(F').F' = b(F').F' = F'$$

et, de même, $F' = b(F').F$.

— Supposons $H \leqslant a(F)$ et montrons que $F.H$ est un atlas faible complet tel que $F.H \leqslant F$. En effet, on a :

$$F.H \subset F.a(F) = F;$$

puisque :

$$FH \subset (F\beta(H)).(\alpha(F)H) \subset F.H,$$

on a

$$F.H = FH \text{ et } \beta(F.H)(F.H) \subset \beta(F)(F.H) \subset (\beta(F)F)H = FH;$$

comme

$$(F.H)^{-1}.(F.H) = H.F^{-1}.F.H = H.a(F).H = H$$

et

$$(F.H)((FH)^{-1}.(FH)) = (F.H)H \subset F(HH) = FH = F.H,$$

les conditions du corollaire 3 de la proposition 4-3 sont vérifiées et FH est un atlas faible complet tel que $a(FH) = H$. Les relations :

$$F\alpha(H) \subset FH = F.H = F.(a(F)\alpha(H)) \subset F\alpha(H) = F\alpha(FH),$$
$$FH = F\alpha(H) \subset \beta(FH)F$$

et

$$\beta(F.H)F \subset b(F.H)F = ((F.H).(F.H)^{-1})F \subset (F.H.F^{-1})F \subset F(Ha(F)) = FH$$

montrent que $F.H = F\alpha(FH) = \beta(FH)F$, donc $F.H \leqslant F$.

— Soit $G \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$ tel que $a(G) = b(F)$; de la relation :

$$G.F \subset GF \subset (G\beta(F)).(\alpha(G)F) = G.F,$$

on déduit $G.F = GF$. Supposons $G' \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$, $a(G') = b(F')$, $F' \leqslant F$ et $G' \leqslant G$; on obtient : $G'.F' \subset (G.F)\alpha(F')$ et

$$(G.F)\alpha(F') \subset G(F\alpha(F')) = GF' = G(\alpha(G').F') \subset G'.F',$$

c'est-à-dire $G'.F' = (G.F)\alpha(F')$; de même $G'.F' = \beta(G')\,(G.F)$ d'où $G'.F' \leqslant G.F$. Inversement soit $K \leqslant G.F$; posons;

$$F' = F.a(K) \leqslant F \qquad \text{et} \qquad G' = G.b(F') \leqslant G;$$

on a :

$$G'.F' = G.b(F').F' = G.F.a(K) = K.$$

Ceci prouve que l'axiome (I) est vérifié dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$.
La relation : $H' \leqslant H$, où H et H' sont des sous-pseudogroupes faibles, équivaut à :

H' est une composante inductive faible de H.

1 Par suite toute sous-classe A de $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ majorée par H admet pour intersection dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ la classe intersection (corollaire 2, proposition 13-2) des sous-pseudogroupes faibles $H' \in A$, et $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ est un groupoïde sous-inductif d'après le corollaire de la proposition 5-1.

Corollaire 1. — *$\mathcal{H}'(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{H}(\mathcal{G})$; muni de la relation d'ordre induite par $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, le groupoïde $\mathcal{H}'(\mathcal{G})$ est un groupoïde sous-inductif, que nous noterons $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{G})$.*

Corollaire 2. — *$\mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{H}(\mathcal{G})$; muni de la relation d'ordre induite par $\leqslant$,*
2 *le groupoïde $\mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$ est sous-inductif; nous le noterons $\dot{\mathfrak{I}}_f(\mathcal{G})$; $\mathcal{G}$ s'identifie à un sous-groupoïde sous-préinductif de $\dot{\mathfrak{I}}_f(\mathcal{G})$, en identifiant $f \in \mathcal{G}$ à la classe $f^{>}$ des éléments induits par f.*

En effet, $\mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$ est évidemment saturé par induction dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$; l'application : $f \to f^{>}$ identifie $\mathcal{G}$ à un sous-groupoïde de $\mathfrak{I}_f(\mathcal{H})$, encore noté $\mathcal{G}$, qui est stable pour la pseudomultiplication puisque :

$$(gf)^{>} = (g^{>})\,(f^{>}), \qquad \text{si} \qquad f \in \mathcal{G} \qquad \text{et} \qquad g \in \mathcal{G}.$$

Définition 1. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle* sous-classe faiblement complète, *ou* complexe, *de $\mathcal{G}$ une sous-classe de $\mathcal{G}$ saturée par induction dans $\mathcal{G}$ et compatible.*

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal. La classe des complexes de $\mathcal{G}$ est un sous-groupoïde $\overline{\mathcal{G}}'$ saturé de $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$ sur lequel les relations $<$ et $\ll$ induisent la même relation d'ordre, définie par :*

$$F' < F \quad \textit{si, et seulement si,} \quad F' \subset F.$$

$\overline{\mathcal{G}}'$ est la composante inductive de $\mathcal{G}$ dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$ et admet $\mathcal{G}$ pour base. De plus $\overline{\mathcal{G}}'$ est un groupoïde local. 1

Démonstration. — Pour tout $f \in \mathcal{G}$, soit $f^{>}$ le complexe des éléments induits par f. Soient $F \in \overline{\mathcal{G}}'$ et $F' \in \mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$; la relation $F' < F$ entraîne : $F' = F\alpha(F') \subset F$, d'où $F' \ll F$; comme $f'e = (f'e)\alpha(f') \in F\alpha(F') = F'$, où $f' \in F'$ et $e < \alpha(f')$, F' est un complexe; ainsi $\overline{\mathcal{G}}'$ est saturé par induction dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$.

— Soit $F' \in \overline{\mathcal{G}}'$ et $F' \subset F$; on a $F' \subset F\alpha(F')$; si $f \in F$ et si $f' \in F'$, la relation $f\alpha(f') = f \cap f'$ entraîne $f\alpha(f') \in F'$, puisque F' est saturé par induction, d'où $F' \ll F$. Par suite les relations $<$ et $\ll$ induisent sur $\overline{\mathcal{G}}'$ la même relation, à savoir : $F' \subset F$; de plus $\overline{\mathcal{G}}'$ est un groupoïde inductif, dans lequel l'intersection d'une classe A de complexes est la classe 2
intersection des $G \in A$.

— Soit $F \in \mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$ et $\alpha(F) \in \overline{\mathcal{G}}'$; puisque :

$$fe = f(\alpha(f)e) \in F\alpha(F) = F,$$

où $f \in F$ et $e < \alpha(f)$, F est un complexe. Donc $\overline{\mathcal{G}}'$ est un sous-groupoïde saturé de $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$.

— Pour tout $F \in \overline{\mathcal{G}}'$ et tout $f \in F$, le complexe $f^{>}$ est contenu dans F et F est un majorant de la classe $F^{>}$ des $f^{>} \in \overline{\mathcal{G}}'$, où $f \in F$; soit K un autre majorant de $F^{>}$ dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$; des relations : $f^{>} = K\alpha(f)^{>}$, il résulte $F = K\alpha(F) \ll K$, et F est l'agrégat de la classe $F^{>}$. Donc $\mathcal{G}$ est une base de $\overline{\mathcal{G}}'$.

— Soit A une sous-classe de $\overline{\mathcal{G}}'_0$ admettant un sous-agrégat E' dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$; tout complexe $E \in A$ est contenu dans la classe des éléments induits des éléments de E'; par suite la classe E'' réunion des classes $E \in A$ est compatible et c'est un complexe, qui est l'agrégat de A dans $\overline{\mathcal{G}}'$. Des relations $E = E'E \subset E'E''$, on déduit $E'' \subset E'E''$; par ailleurs $E'E'' \subset E''$, puisque E'' est saturé par induction; donc $E'' = E'E''$ et $E'' < E'$; par conséquent $E' = E''$. Comme $\overline{\mathcal{G}}'$ est saturé dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$, ceci entraîne que $\overline{\mathcal{G}}'$ est la composante inductive de $\mathcal{G}$ dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$. Enfin si $B \in \overline{\mathcal{G}}'_0$, on a :

$$\bigcup A \cap B = \bigcup_{E \in A} (E \cap B)$$

et l'axiome (D) est vérifié dans $\overline{\mathcal{G}}'$.

Remarque. — Soient f et g deux éléments de $\mathcal{G}$ admettant h pour sous-agrégat dans $\mathcal{G}$; alors f et g sont compatibles; dans $\overline{\mathcal{G}}'$ les complexes $f^>$ et $g^>$ ont pour agrégat la classe réunion de $f^>$ et $g^>$; cette classe est différente de la classe $h^>$.

THÉORÈME 4. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal: le groupoïde $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ des atlas complets propres de $\mathcal{G}$* (proposition 9-3) *est un groupoïde sous-préinductif lorsqu'il est muni de la relation :*

$$F' < F \quad \textit{si, et seulement si,} \quad F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F}.$$

Démonstration. — Pour tout $F \in \mathcal{A}'(\mathcal{G})$, nous désignerons par F_1 une base de F saturée par induction dans F et telle que $\alpha(F_1)$ et $\beta(F_1)$ soient des classes compatibles; si $F' < F$, on choisira pour F'_1 la classe des éléments induits des éléments de F_1 sur $\alpha(F')$, c'est-à-dire $F_1\alpha(F')$.

— On a : $F = \overline{F\alpha(F)} = \overline{\beta(F)F}$; si $F' < F$ et $F < F'$, on trouve :

$$F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{F'_1\alpha(F_1)\alpha(F'_1)} = \overline{F'_1\,\alpha(F'_1)\alpha(F_1)} = \overline{F'\alpha(F)} = F;$$

si $F' < F$ et $F'' < F'$, les relations :

$$\begin{aligned}\overline{F\alpha(F'')} = \overline{F\alpha(F'\alpha(F''))} &= \overline{F(\alpha(F')\alpha(F''))}\\ &= \overline{F_1\alpha(F'_1)\alpha(F''_1)} = \overline{F'\alpha(F'')} = F''\end{aligned}$$

et, de même : $\overline{\beta(F'')F} = F''$, entraînent $F'' < F$. Ainsi la relation $<$ est une relation d'ordre.

— Supposons $F < \Gamma$, où Γ est un sous-pseudogroupe propre de $\mathcal{G}$; comme

$$F = \overline{\Gamma\alpha(F)} \qquad \text{et} \qquad \alpha(F) \subset \overline{\alpha(\Gamma)\alpha(F)} \subset \overline{\Gamma\alpha(F)} = F,$$

il résulte de la proposition 10-3 que l'on a : $\overline{b}(F) \subset F \subset \overline{a}(F)$;

de même $\beta(F) \subset F$ et $\overline{a}(F) \subset F \subset \overline{b}(F)$; d'où $F = \overline{a}(F)$ est un sous-pseudogroupe propre.

— Supposons $F' < F$; puisque :

$$\overline{a}(F') = \overline{F'^{-1}.F'} = \overline{F_1^{-1}\beta(F'_1)F'_1} = \overline{F_1^{-1}F'_1}$$
$$= \overline{F_1^{-1}F_1\alpha(F'_1)} = \overline{a(F)\alpha(F')} = \overline{\overline{a}(F)\alpha(\overline{a}(F'))}.$$

on trouve $\overline{a}(F') < \overline{a}(F)$; de même $\overline{b}(F') < \overline{b}(F)$.

— Supposons $H < \overline{a}(F)$ et montrons que $\overline{FH}$ est un atlas complet tel que $\overline{FH} < F$ et $\overline{a}(\overline{FH}) = H$. En effet, on a :

$$\alpha(FH) \subset \overline{\alpha(F)\alpha(H)} \subset \overline{\alpha(F_1)\ (a(F_1)\alpha(H_1))}$$
$$= \overline{\alpha(F_1)a(F_1)\alpha(H_1)} = \overline{a(F_1)\alpha(H_1)} = H$$

et

$$\overline{((FH)H)^{-1}((FH)H)} = \overline{H_1H_1F_1^{-1}F_1H_1H_1}$$
$$= \overline{H_1a(F_1)H_1} = \overline{\alpha(H_1)a(F_1)\alpha(H_1)} = H,$$

de sorte que, d'après le corollaire 1 de la proposition 8-3,

$$\overline{(FH)H} = \overline{F_1H_1H_1} = \overline{FH}$$

est un atlas complet pour lequel $\overline{a}(\overline{FH}) = H$. De plus, comme

$$\overline{FH} = \overline{F_1a(F_1)\alpha(H_1)} = \overline{F\alpha(H)} = \overline{F\alpha(FH)};$$
$$\overline{FH} = \overline{F\alpha(H)} \subset \overline{\beta(FH)F}$$

et

$$\overline{\beta(FH)F} \subset \overline{F_1H_1F_1^{-1}F_1} = \overline{F_1H_1a(F_1)} = \overline{F_1H_1} = \overline{FH},$$

on obtient : $\overline{FH} < F$.

— Supposons $G \circ F$ et $G' \circ F'$ définis dans $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$, $G' < G$ et $F' < F$. Nous avons déjà démontré (proposition 9-3) que $G.F = GF$. Comme la classe E, intersection de $\alpha(G_1)$ et de $\beta(F_1)$ où F_1 et G_1 sont des bases propres saturées par induction de F et G, est une base de $\alpha(G)$, les classes EF_1 et G_1E sont aussi des bases de F et G; c'est de telles bases que nous nous servirons dans la suite de la démonstration. Les relations :

$$G' \circ F' = \overline{(G\alpha(G')).(\beta(F')F)} = \overline{G_1\alpha(G'_1)\beta(F'_1)F_1}$$
$$= \overline{G_1F'} = \overline{G_1F_1\alpha(F'_1)} = \overline{(G\circ F)\alpha(F')}$$

et, pour la même raison, $G' \circ F' = \overline{\beta(G')(G \circ F)}$ entraînent $G' \circ F' < G \circ F$. Inversement, soit $K < G \circ F$; d'après ce qui précède, on a : $\overline{a}(K) < \overline{a}(F)$,

$$F' = \overline{Fa(K)} = \overline{F\alpha(K)} < F; \qquad G' = \overline{Gb(F')} < G;$$
$$\overline{b}(F') = \overline{a}(G')$$

et $G' \circ F' < G \circ F$; par ailleurs :

$$G' \circ F' = \overline{(Gb(F'_1))F'_1} = \overline{GF'} = \overline{G_1F_1\alpha(K_1)} = \overline{(G \circ F)\alpha(K)} = K.$$

Donc l'axiome (I) est vérifié dans $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$.

— Supposons $H' < \Gamma$ et $H'' < \Gamma$, où Γ est un sous-pseudogroupe propre de $\mathcal{G}$. Posons : $H = \overline{\Gamma_1\alpha(H'_1)\alpha(H''_1)}$, où Γ_1, H'_1 et H''_1 sont des bases telles que la classe réunion de $\alpha(\Gamma_1)$, $\alpha(H'_1)$ et $\alpha(H''_1)$ soit compatible. On trouve :

$$H^{-1} = \overline{\alpha(H''_1)\alpha(H'_1)\Gamma_1} = \overline{\alpha(H'')H'} = \overline{\alpha(H''_1)\Gamma_1\alpha(H'_1)}$$
$$= \overline{H''\alpha(H')} = \overline{\Gamma_1\alpha(H''_1)\alpha(H'_1)} = H$$

et

$$HH = \overline{\alpha(H''_1)H'_1H_1} = \overline{\alpha(H''_1)\,(\alpha(H'_1)\Gamma_1)H_1} = \overline{\alpha(H''_1)\alpha(H'_1)H_1} = H.$$

Par suite H est un sous-pseudogroupe. Des conditions :

$$\overline{H'\alpha(H)} = \overline{\Gamma_1\alpha(H'_1)\alpha(H_1)} = \overline{\Gamma_1\alpha(H'_1)\alpha(H'_1)\alpha(H''_1)\alpha(\Gamma_1)}$$
$$= \overline{\Gamma_1\alpha(H'_1)\alpha(H''_1)} = H$$

et, de même, $\overline{H''\alpha(H)} = H$, on déduit $H < H'$ et $H < H''$. Si K est un autre minorant de H' et de H'', on a :

$$K = \overline{H'\alpha(K)} = \overline{H'_1\alpha(H''_1)\alpha(K_1)} = \overline{H\alpha(K)},$$

où K_1 désigne une base de K telle que la classe réunion de $\alpha(K_1)$ et de $\alpha(\Gamma_1)$ soit compatible, d'où $K < H$. Par conséquent $H = H' \cap H''$ dans $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ et $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ est un groupoïde sous-préinductif.

Corollaire. — *La sous-classe $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ formée des sous-classes inductives de $\mathcal{G}$ admettant une base compatible est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$.*

En effet, on a $F \in \mathfrak{J}(\mathcal{G})$ si, et seulement si, F est un atlas complet propre tel que $\overline{a}(F)$ et $\overline{b}(F)$ soient resp. les sous-classes inductives de $\mathcal{S}$ engendrées par $\alpha(F)$ et $\beta(F)$. Par suite la classe des unités de $\mathfrak{I}(\mathcal{S})$ est la classe des sous-classes inductives de $\mathcal{S}$ admettant pour base une sous-classe compatible de $\mathcal{S}_0$; elle est saturée par induction dans $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$, puisque $F' < E$, où $E \in \mathfrak{I}(\mathcal{S})_0$, entraîne que F' admet la classe $E\alpha(F'_1) \subset \mathcal{S}_0$ pour base.

THÉORÈME 5. — *Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal; le groupoïde $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ des atlas complets de $\mathcal{S}$* (proposition 9-3) *est un groupoïde sous-inductif lorsqu'il est muni de la relation :*

$$F' \leqslant F \quad \textit{si, et seulement si,} \quad F' \subset F$$

et

$$F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F}.$$

Démonstration. — Montrons que la relation $F' \leqslant F$ est équivalente à

$$F' \subset F \quad \text{et} \quad F' = F\alpha(F') = \beta(F')F,$$

c'est-à-dire $F' \leqslant F$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{S})$ (théorème 3). En effet, soient $F \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ et $F' \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$. Si $F' \leqslant F$, on a $F' \subset F\alpha(F') \subset F'$, d'où $F' = F\alpha(F')$; de même $F' = \beta(F')F$. Inversement, si $F' \subset F$ et $F' = F\alpha(F') = \beta(F')F$, on a :

$$F' = \overline{F'} = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F}.$$

Il en résulte que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre, que, si $F' \leqslant F$, on a aussi :

$$F' = F.\alpha(F') = \beta(F').F$$

et qu'un élément F de $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ est majoré par un pseudogroupe Γ si, et seulement si, F est une composante inductive de Γ. Par suite toute sous-classe majorée A de $\mathcal{A}(\mathcal{S})_0$ admet pour 1
intersection dans $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ la classe intersection des $H \in A$. Si $F' \leqslant F$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, on a $a(F') \leqslant a(F)$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{S})$, donc $\bar{a}(F') \subset \bar{a}(F)$ et $\bar{a}(F') = \overline{a(F)\alpha(F')}$, d'où

$$\bar{a}(F') = \overline{\bar{a}(F)\alpha(\bar{a}(F'))} \leqslant \bar{a}(F).$$

De même $\bar{b}(F') \leqslant \bar{b}(F)$.

— Soit $H \leqslant \bar{a}(F)$; puisque H est saturé par induction dans $\bar{a}(F)$, on a :

$$H\alpha(F) \subset H, \qquad \text{d'où} \qquad FH \subset (F\alpha(H)).(\alpha(F)H) \subset F.H;$$

on en déduit :

$$\mathrm{FH} = \mathrm{F.H}; \qquad \beta(\mathrm{FH})\,(\mathrm{F.H}) \subset \beta(\mathrm{F})\,(\mathrm{F.H}) \subset \mathrm{FH} = \mathrm{F.H};$$
$$(\mathrm{F.H})^{-1}.(\mathrm{F.H}) = \mathrm{H.F^{-1}.F.H} = \mathrm{H}.a(\mathrm{F}).\mathrm{H} \subset \mathrm{H},$$

d'où :

$$\overline{(\mathrm{FH})^{-1}(\mathrm{FH})} = \mathrm{H} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{FH})\,((\mathrm{FH}^{-1}).(\mathrm{FH}))$$
$$\subset (\mathrm{F.H})\,\mathrm{H} \subset \mathrm{F(HH)} = \mathrm{FH}.$$

Ainsi les conditions du corollaire 2 de la proposition 8-3 sont vérifiées et $\overline{\mathrm{F.H}}$ est atlas complet tel que $\overline{a}(\overline{\mathrm{FH}}) = \mathrm{H}$; de plus on trouve :

$$\overline{\mathrm{F}\alpha(\mathrm{H})} \subset \overline{\mathrm{FH}} = \overline{\mathrm{F}.(\overline{a}(\mathrm{F}).\alpha(\mathrm{H}))} \subset \overline{\mathrm{F}\alpha(\mathrm{H})} = \overline{\mathrm{F}\alpha(\mathrm{FH})};$$
$$\overline{\mathrm{FH}} = \overline{\mathrm{F}\alpha(\mathrm{H})} \subset \overline{\beta(\mathrm{FH})\mathrm{F}}$$

et

$$\overline{\beta(\mathrm{FH})\mathrm{F}} \subset \overline{((\mathrm{F.H}).(\mathrm{F.H})^{-1})\mathrm{F}} = \overline{(\mathrm{F.H.F^{-1}})\mathrm{F}} \subset \overline{\mathrm{F}.(\mathrm{H}a(\mathrm{F}))} = \overline{\mathrm{F.H}},$$

donc

$$\overline{\mathrm{FH}} = \overline{\beta(\mathrm{FH})\mathrm{F}} = \overline{\mathrm{F}\alpha(\mathrm{FH})} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{FH}} \leqslant \mathrm{F} \text{ dans } \mathcal{A}(\mathcal{G}).$$

— Soit $\mathrm{G} \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$, $\overline{a}(\mathrm{G}) = \overline{b}(\mathrm{F})$; l'atlas complet $\mathrm{G} \odot \mathrm{F}$ admet

$$\mathrm{GF} = (\mathrm{G}\beta(\mathrm{F})).(\alpha(\mathrm{G})\mathrm{F}) = \mathrm{G.F}$$

pour base; soient $\mathrm{G'} \leqslant \mathrm{G}$, $\mathrm{F'} \leqslant \mathrm{F}$ et $\overline{a}(\mathrm{G'}) = \overline{b}(\mathrm{F'})$; on obtient :

$$\overline{\mathrm{G'.F'}} \subset \overline{(\mathrm{G.F})\alpha(\mathrm{G'.F'})} \subset \overline{(\mathrm{G.F})\alpha(\mathrm{F'})}$$

et

$$\overline{(\mathrm{G.F})\alpha(\mathrm{F'})} \subset \overline{\mathrm{G}(\mathrm{F}\alpha(\mathrm{F'}))} = \overline{\mathrm{GF'}} \subset \overline{(\mathrm{G}\beta(\mathrm{F'}))\mathrm{F'}}$$
$$= \overline{(\mathrm{G}\alpha(\mathrm{G'}))\mathrm{F'}} = \overline{\mathrm{G'F'}},$$

c'est-à-dire $\mathrm{G'} \odot \mathrm{F'} = \overline{(\mathrm{G} \odot \mathrm{F})\alpha(\mathrm{F'})}$; de même

$$\mathrm{G'} \odot \mathrm{F'} = \overline{\beta(\mathrm{G'})\ (\mathrm{G} \odot \mathrm{F})}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{G'} \odot \mathrm{F'} \leqslant \mathrm{G} \odot \mathrm{F}.$$

Inversement si $\mathrm{K} \leqslant \mathrm{G} \odot \mathrm{F}$ on a, à l'aide d'un raisonnement analogue à celui utilisé dans le théorème 3,

$$\mathrm{F'} = \overline{\mathrm{F}a(\mathrm{K})} = \overline{\mathrm{F}.\alpha(\mathrm{K})} \leqslant \mathrm{F};$$
$$\mathrm{G'} = \overline{\mathrm{G}b(\mathrm{F'})} \leqslant \mathrm{G} \text{ et } \mathrm{G'} \odot \mathrm{F'} \leqslant \mathrm{G} \odot \mathrm{F}.$$

Enfin :

$$G' \odot F' = \overline{(G.\beta(F')).(F.\alpha(K))} = \overline{(G \odot F).\alpha(K)} = K.$$

Par conséquent $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif.

Corollaire 1. — *$\mathcal{A}(\mathcal{S})$ admet $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ comme sous-groupoïde saturé par induction; muni de la relation $\leqslant$, $\mathcal{A}'(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif que nous désignerons par $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{S})$.*

Théorème 6. — $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ (corollaire du théorème 4) *muni de la relation $\leqslant$ est un groupoïde inductif, que nous noterons $\dot{\mathcal{J}}(\mathcal{S})$.*

Démonstration. — $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ est saturé par induction dans $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, donc est un groupoïde sous-inductif. Il suffit de montrer qu'il est préinductif, car il en résultera qu'il est inductif. Soient $F' \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$ et $F \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$. Supposons $F' \subset F$ saturé par induction dans F; on a $F' \subset F\alpha(F')$; soit F_1 une base de F formée par une sous-classe compatible saturée par induction dans F; la classe F'_1 intersection de F' et de F_1 est une base de F'; si $f' \in F'_1$ et $f \in F_1$, on a :

$$f\alpha(f') = f \cap f' = \beta(f')f < f',$$

d'où $f\alpha(f') \in F'$ et $\overline{F\alpha(F')} = \overline{F_1\alpha(F'_1)} \subset F'$; par suite $F' = \overline{F\alpha(F')}$;
de même $F' = \overline{\beta(F')F}$ et $F' \leqslant F$. — Supposons $F'' \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$ et 1
montrons que F' et F'' admettent pour intersection dans $\dot{\mathcal{J}}(\mathcal{S})$ la classe G des g tels que $g \in F'$, $g \in F''$ et $g\alpha(F') = g\alpha(F'')$. Soient $f' \in F'$, $g \in G$ et $f' < g$; la relation

$$f' = g(\alpha(f')) \in g\alpha(F'') \subset F''$$

entraîne :

$$f'\alpha(F') \subset g(\alpha(f')\alpha(F')) \subset g\alpha(F') = g\alpha(F'') \subset F'',$$

d'où :

$$f'\alpha(F') \subset f'\alpha(f'\alpha(F')) \subset f'\alpha(F'') \subset f'\alpha(F')$$

et $f' \in G$. Soit B une sous-classe de G admettant un sous-agrégat b; comme $b\alpha(f') \in \overline{\bigsqcup}(B\alpha(f')) \subset F''$, on a :

$$b\alpha(f') = b\alpha(b\alpha(f')) \in b\alpha(F''),$$

donc $b \in G$. Soient F'_1 et F''_1 des bases compatibles de F' et F'', saturées par induction resp. dans F' et dans F''. Si $g \in G$, il existe $A' \subset F'_1$ et $A'' \subset F''_1$ telles que $g = \bigcup^{g} A' = \bigcup^{g} A''$; on en déduit $g = \bigcup^{g} A$, où A est la classe des $f' \cap f''$, où $f' \in A'$ et $f'' \in A''$. Ainsi G admet pour base la classe G_1 des éléments $f' \cap f''$, où $f' \in F'_1$ et $f'' \in F''_1$, qui est compatible en vertu de la proposition 11-2; donc $G \in \mathfrak{J}(\mathcal{G})$ et, G étant saturé par induction dans F' et F'', on a $G \ll F'$ et $G \ll F''$. Si K est un minorant de F' et F'', on a, puisque $K = F'\alpha(K) = F'.\alpha(K) \subset F''$:

$$K\alpha(F') = (F'.\alpha(K))\alpha(F') \subset F'\alpha(K) = K \subset F'';$$

il en résulte, si $k \in K$, $f' \in F'$ et si $k\alpha(f')$ est défini :

$$k\alpha(f') = k\alpha(k\alpha(f')) \in k\alpha(F'');$$

de même $k\alpha(F'') \subset k\alpha(F')$, et par suite $K \subset G$ et $K \subset G\alpha(K)$; de plus :

$$G\alpha(K) \subset F'\alpha(K) = K, \qquad \text{d'où} \qquad K = G\alpha(K).$$

On en déduit que $K \ll G$ et que G est l'intersection de F' et de F'' dans le groupoïde inductif $\dot{\mathfrak{J}}(\mathcal{G})$.

Définition 2. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une classe sous-préinductive: on appelle* paratopologie de $\mathcal{A}$ *ou sur* $a \in \mathcal{A}$ *une sous-classe inductive faible de* $\mathcal{A}$ *admettant* a *pour plus grand élément.*

Théorème 7. — *Soit* $\mathfrak{T}(\mathcal{G})$ *la classe des paratopologies sur un groupoïde sous-prélocal* $\mathcal{G}$; *alors* $\mathfrak{T}(\mathcal{G})$ *est un sous-groupoïde sous-préinductif saturé de* $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$ *et de* $\dot{\mathfrak{J}}_f(\mathcal{G})$. *Si* $\mathcal{G}$ *est sous-local,* $\mathfrak{T}(\mathcal{G})$ *est un groupoïde sous-inductif pour la relation* $\leqslant$, *et* $\mathcal{G}$
1 *en est un sous-pseudogroupe faible saturé par induction.*

Démonstration. — Soit T une paratopologie sur $t \in \mathcal{G}$; alors $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ sont des paratopologies sur $\alpha(t)$ et sur $\beta(t)$ et T s'identifie au triplet $(\beta(T), t, \alpha(T))$. Montrons que $\mathfrak{T}(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde saturé de $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$; soit $F \in \mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$ tel que $\alpha(F)$ soit une paratopologie sur e; il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) = e$. Si $f'' \in F$, on a $\alpha(f'') < e$, d'où $f'' = f''\alpha(f) = f'' \cap f < f$, et F est une paratopologie $(\beta(F), f, \alpha(F))$ sur f. Soient T' et T'' deux paratopologies sur t' et t'' resp. majorées par T dans

$\mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$; alors $T' \cap T''$ est une paratopologie sur $t' \cap t''$, puisque $T' \cap T'' = \underline{T\alpha(T')\alpha(T'')}$ d'après le théorème 1, et que $T\alpha(T')\alpha(T'')$ contient :

$$t\alpha(t')\alpha(t'') = t'\alpha(t'') = t' \cap t''.$$

Pour toute paratopologie E sur e telle que $E < \alpha(T)$ (resp. $E \ll \alpha(T)$), TE est une paratopologie sur te. Ainsi $\mathfrak{T}(\mathcal{S})$ est un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$ (resp. de $\dot{\mathfrak{J}}_f(\mathcal{S})$).

— Supposons $\mathcal{S}$ sous-local; soit A une classe de paratopo- 1
logies T' sur t' majorée par T dans $\dot{\mathfrak{J}}_f(\mathcal{S})$; la classe des éléments t' admet un t-agrégat $t'' \in T$; soit T'' la classe des éléments $f \in T$ tels que $f < t''$; T'' est une paratopologie sur t'' ; comme :

$$T' \subset T''\alpha(T') \subset T\alpha(T') = T', \qquad \text{et de même} \qquad T' = \beta(T')T'',$$

T'' majore $T' \in A$. Soit $M \ll T$ une paratopologie sur m, majorant A ; on a $T' \ll M$, d'où $t' < m < t$ et $t'' < m$. Par suite :

$$T'' = t''\alpha(T'') = m\alpha(T'') \subset M\alpha(T'') ;$$

inversement, si $f \in T''$, on a $m\alpha(f) = f\alpha(m) = f \in T''$, de sorte que $M\alpha(T'') = T''$; de même $T'' = \beta(T'')M$, c'est-à-dire $T'' \ll M$. Ainsi T'' est le T-agrégat de A dans $\mathfrak{T}(\mathcal{S})$ et $\mathfrak{T}(\mathcal{S})$ est un groupoïde sous-inductif.

— $\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-groupoïde de $\mathfrak{T}(\mathcal{S})$, en identifiant $f \in \mathcal{S}$ avec le complexe $f^{>}$. Si $T \ll f$, T est saturé par induction dans $f^{>}$, donc $T = t^{>}$ et $T \in \mathcal{S}$. Par suite $\mathcal{S}$ est saturé par induction dans $\mathfrak{T}(\mathcal{S})$.

Remarque. — La congrégation d'une sous-classe de $\mathfrak{T}(\mathcal{S})$ dans $\mathfrak{T}(\mathcal{S})$ n'est généralement pas la même que sa congrégation dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$.

5. COMPLÉTION DES GROUPOÏDES PRÉLOCAUX

Nous allons considérer plus particulièrement dans ce § le cas où $\mathcal{S}$ est un groupoïde prélocal. Alors $\mathfrak{A}'(\mathcal{S}) = \mathfrak{A}(\mathcal{S})$ et le sous-groupoïde $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ de $\mathfrak{A}(\mathcal{S})$ (corollaire du théorème 4-4) est la classe de toutes les sous-classes inductives compatibles de $\mathcal{S}$.

THÉORÈME 1. — *Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde prélocal, $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ est un groupoïde inductif* (pour la relation $<$).

Démonstration. — D'après le corollaire du théorème 4-4, $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{A}b(\mathcal{G})$, donc un groupoïde sous-inductif pour l'ordre induit. Nous allons montrer que c'est aussi un groupoïde préinductif, d'où résultera qu'il est inductif. Pour que l'on ait : $F' < F$ dans $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$, il faut et il suffit que $F' = \overline{F\alpha(F')}$; en effet cette condition est nécessaire; si elle est vérifiée, F' est contenu dans la sous-classe inductive saturée par induction engendrée par F; par suite deux éléments $f \in F$ et $f' \in F'$ sont compatibles, c'est-à-dire :

$$f\alpha(f') = f \cap f' = \beta(f')f \in \beta(F')F.$$

d'où $\overline{\beta(F')F} = F'$ et $F' < F$. Soient F et G deux éléments de $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$, H la classe des $f \cap g$, où $f \in F$ et $g \in G$; montrons que $\overline{H}$ est l'intersection de F et G dans $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$. Comme H est contenu dans la classe saturée par induction déduite de F, c'est une classe compatible, et H est base d'une sous-classe inductive $\overline{H}$; pour tout $h \in H$, on a :

$$h = f \cap g = f\alpha(h) \in F\alpha(H).$$

Inversement, si $f' \in F$ et $h \in H$, on trouve : $h = f \cap g$ et

$$f'\alpha(h) = f'\alpha(f \cap g) = (f' \cap f) \cap g \in H.$$

Donc $\overline{H} = \overline{F\alpha(H)}$ et $\overline{H} < F$; de même $\overline{H} < G$. Soit K un minorant de F et G dans $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$; alors K admet pour base la classe des éléments :

$$k_1 = f\alpha(k) \cap g\alpha(k'), \qquad \text{où} \qquad k \in K \qquad \text{et} \qquad k' \in K;$$

puisque $k_1 = (f \cap g)\alpha(k_1)$, on a $K \subset \overline{H\alpha(K)}$; par ailleurs :

$$(f \cap g)\alpha(k) \;=\; f\alpha(k) \cap g\alpha(k) \in K,$$

d'où $\overline{\overline{H}\alpha(K)} \subset K$. On en déduit $K = \overline{\overline{H}\alpha(K)}$ et $K < \overline{H}$. Ceci prouve que $\overline{H}$ est l'intersection de F et G dans $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ et que $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ est un groupoïde inductif.

COROLLAIRE. — *$\mathcal{G}$ s'identifie à un sous-groupoïde de $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ stable pour la pseudomultiplication. Si $\mathcal{G}$ est local, $\mathcal{G}$ s'identifie à un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$, saturé par induction.*

Démonstration. — L'application : $f \to f^>$, où $f \in \mathcal{G}$, identifie $\mathcal{G}$ à une sous-classe de $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$, que nous noterons encore $\mathcal{G}$. Des relations :

$$\alpha(f^>) = (\alpha(f))^>, \quad \beta(f^>) = (\beta(f))^>, \quad \overline{(g^>)\,(f^>)} = (gf)^>,$$

on déduit que $\mathcal{G}$ est un sous-groupoïde de $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$, stable pour la pseudomultiplication. — Supposons $\mathcal{G}$ local; si $F \in \mathfrak{I}(\mathcal{G})$ et $F < f^>$, comme on a $F = (f^>)\alpha(F)$, F est saturé par induction dans $\mathcal{G}$ et F est majoré par f dans $\mathcal{G}$. Donc F admet un agrégat dans $\mathcal{G}$ et $F = (\bigcup F)^>$. Ainsi $\mathcal{G}$ est saturé par induction dans $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$.

Remarque. — Une démonstration analogue à celle du théorème 1 montre que, si $\mathcal{G}$ est un groupoïde prélocal, alors $\mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$ (corollaire 2, théorème 2-4) est un groupoïde inductif.

Définition 1. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde préinductif : on appelle* sous-classe complète *de $\mathcal{G}$ une sous-classe inductive de $\mathcal{G}$ qui est compatible et saturée par induction.*

Si F est une sous-classe compatible de $\mathcal{G}$, alors l'intersection des sous-classes complètes qui contiennent F est appelée *sous-classe complète* engendrée par F dans $\mathcal{G}$.

Proposition 1. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde prélocal; la sous-classe complète engendrée par une sous-classe compatible* F *de $\mathcal{G}$ est la sous-classe inductive* F′ *engendrée dans $\mathcal{G}$ par la classe* F_1 *des éléments induits des éléments de* F, *et* F′ *admet* F_1 *pour base.*

En effet, d'après le corollaire 2 de la proposition 12-2, [2] la sous-classe inductive F′ engendrée par F_1 est saturée par induction. D'après les propositions 13-2, [2] et 11-2, F_1 et F′ sont compatibles, donc F′ est la sous-classe complète engendrée par F.

Corollaire. — *Si* F *est saturée par induction, la sous-classe complète engendrée par* F *dans $\mathcal{G}$ est identique à la sous-classe inductive engendrée par* F *dans $\mathcal{G}$.*

Proposition 2. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde prélocal; la sous-classe $\overline{\mathcal{G}}$ du groupoïde inductif $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$ (théorème 1) formée par les sous-classes complètes de $\mathcal{G}$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$ saturé par induction et admettant $\mathcal{G}$*

pour base. De plus $\overline{\mathcal{S}}$ est un groupoïde local pour l'ordre induit par $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$.

Démonstration. — Si F et G sont des sous-classes complètes de $\mathcal{S}$, les sous-classes $\overline{\alpha}(F)$, $\overline{\beta}(F)$, F^{-1} et $\overline{GF}$ sont saturées par induction, donc appartiennent à $\overline{\mathcal{S}}$, et $\overline{\mathcal{S}}$ est un sous-groupoïde de $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ stable pour la pseudomultiplication et contenant $\mathcal{S}$. Soit H un élément de $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ qui est majoré par un élément F de $\overline{\mathcal{S}}$; puisque $H = \overline{F\alpha(H)}$, la classe H admet pour base la classe des éléments $f\alpha(h)$, où $f \in F$ et $h \in H$; cette base étant saturée par induction, H est aussi saturé par induction d'après le corollaire 3 de la proposition 12-2, I [2], donc $H \in \overline{\mathcal{S}}$ et $\overline{\mathcal{S}}$ est saturé par induction dans $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$. Il en résulte que $\overline{\mathcal{S}}$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$. Soient $F \in \overline{\mathcal{S}}$ et $G \in \overline{\mathcal{S}}$; si $F = \overline{G\alpha(F)}$, F admet pour base la classe des éléments $g\alpha(f)$, où $g \in G$ et $f \in F$; comme G est saturé par induction, $g\alpha(f) \in G$ et F est une sous-classe de G. Inversement si F est une sous-classe de G, on a $F \subset G\alpha(F)$; pour tout $g \in G$ et $f \in F$ la relation : $g\alpha(f) = g \cap f \in F$ entraîne $\overline{G\alpha(F)} \subset F$. Donc la relation d'ordre dans $\overline{\mathcal{S}}$ est équivalente à la relation :

$$F < G \quad \text{si, et seulement si,} \quad F \text{ est une sous-classe de } G.$$

— L'agrégat d'une sous-classe A de $\overline{\mathcal{S}}$ majorée est la sous-classe inductive engendrée par la classe des f tels que $f \in F$ et $F \in A$. Par conséquent tout élément G de $\overline{\mathcal{S}}$ est l'agrégat dans $\overline{\mathcal{S}}$ de la sous-classe de $\mathcal{S}$ formée des $g \in G$ et $\mathcal{S}$ est une base de $\overline{\mathcal{S}}$. Enfin, si B est une sous-classe de $\overline{\mathcal{S}}_0$ et $E \in \overline{\mathcal{S}}_0$, les classes $(\cup B)E$ et $\bigcup_{E' \in B}(E'E)$ admettent pour base la classe des éléments $e'e$, où $e' \in E'$ et $e \in E$, d'où $(\cup B)E = \bigcup_{E' \in B}(E'E)$; par suite l'axiome (D) est vérifié.

Corollaire. — *$\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ est une extension inessentielle $(\sigma; \mathfrak{J}(\mathcal{S}))$ de $\overline{\mathcal{S}}$, où σ est un foncteur de $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ vers $\overline{\mathcal{S}}$ compatible avec la pseudomultiplication et l'intersection; $\overline{\mathcal{S}}$ est un groupoïde quotient de $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$* (définitions 5-1, III [1] et 10-2, I [1]).

En effet, soit σ l'application qui associe à $F \in \mathfrak{J}(\mathcal{S})$ la sous-classe complète $\overline{F}$ engendrée par F dans $\mathcal{S}$. Si $G \in \mathfrak{J}(\mathcal{S})$, les classes $\sigma(GF)$ et $\sigma(G)\sigma(F)$ admettent pour base la classe des éléments $e'gfe$, où $e \in \mathcal{S}_0$, $e' \in \mathcal{S}_0$, $g \in G$ et $f \in F$; donc $\sigma(GF) = \sigma(G)\sigma(F)$. La classe $\sigma(G \cap F)$ admet pour base la classe des éléments $(g \cap f)e$ et la classe $\sigma(G) \cap \sigma(F)$ admet pour base la classe des éléments

$$(ge \cap fe') = (g \cap f)ee', \qquad \text{d'où} \qquad \sigma(G \cap F) = \sigma(G) \cap \sigma(F).$$

L'injection canonique i de $\overline{\mathcal{S}}$ dans $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ est un foncteur section relativement à σ (définition 2-2, I [1]) et $\overline{\mathcal{S}}$ est un groupoïde quotient de $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ d'après la proposition 10-1, I [1].

Définition 2. — *Un groupoïde inductif $\mathcal{S}$ est dit* (relativement) complet *si toute sous-classe complète* F *de $\mathcal{S}$ (telle que* $\bigcup \alpha(F)$ *et* $\bigcup \beta(F)$ *existent) admet un agrégat dans $\mathcal{S}$.*

Un sous-pseudogroupe d'un groupoïde inductif (relativement) complet est un groupoïde (relativement) complet pour la structure d'ordre induite, mais un sous-pseudogroupe faible peut ne pas être (relativement) complet.

Remarques. — 1) Soit $\mathcal{S}'$ un sous-pseudogroupe faible du pseudogroupe $\mathcal{S}$ tel que $\mathcal{S}'$ contienne l'agrégat de toute sous-classe F de $\mathcal{S}'$ majorée dans $\mathcal{S}$ et telle que $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ soient majorés dans $\mathcal{S}'_0$. Cette condition peut être vérifiée sans que $\mathcal{S}'$ soit un sous-pseudogroupe de $\mathcal{S}$.

2) Soit $\mathcal{S}'$ un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ tel que toute classe compatible F de $\mathcal{S}'$ pour laquelle $\alpha(F)$ est majoré dans $\mathcal{S}'_0$ admette un agrégat dans $\mathcal{S}$; ceci peut arriver sans que $\mathcal{S}$ ni $\mathcal{S}'$ ne soient relativement complets.

Théorème 2 (*de complétion*). — *Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal. Le groupoïde local $\overline{\mathcal{S}}$ (proposition 2) est complet et caractérisé à une équivalence près par la condition* (C) *suivante* [6] :

(C) *Si Σ est un groupoïde local complet dont $\mathcal{S}$ est une base, l'injection canonique de $\mathcal{S}$ dans Σ étant compatible avec l'agrégation, il existe un foncteur π de $\overline{\mathcal{S}}$ sur Σ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est l'identité et qui est compatible avec l'agrégation.*

Démonstration. — Soit B une sous-classe compatible de $\overline{\mathcal{S}}$; la classe des $f \in \mathcal{S}$ tels que $f \in F$, $F \in B$ est compatible dans $\mathcal{S}$

[6] Pour une caractérisation plus canonique de $\overline{\mathcal{S}}$, voir [3]. 1

et la sous-classe complète qu'elle engendre dans $\mathcal{S}$ est l'agrégat de B dans $\overline{\mathcal{S}}$; donc $\overline{\mathcal{S}}$ est complet. Montrons que $\overline{\mathcal{S}}$ est caractérisé par la condition (C). En effet, soit $F \in \overline{\mathcal{S}}$; la sous-classe complète F de $\mathcal{S}$ est une sous-classe compatible dans Σ, car : Soient f et g deux éléments de F; désignons par $f \cap g$ et $f \bigcap\limits_{\Sigma} g$ leurs intersections dans $\mathcal{S}$ et Σ respectivement. On a

$$f \cap g < f \bigcap_{\Sigma} g.$$

Puisque $\mathcal{S}$ est une base de Σ, il existe une sous-classe H de de $\mathcal{S}$ telle que $f \bigcap\limits_{\Sigma} g = \bigcup\limits^{\Sigma} H$; pour tout $h \in H$, on a $h < f$ et $h < g$, d'où $h < f \cap g$ et $\bigcup\limits^{\Sigma} H < f \cap g$; il en résulte $f \cap g = f \bigcap\limits_{\Sigma} g$. Donc la classe F admet un agrégat dans Σ; soit π l'application qui associe à $F \in \overline{\mathcal{S}}$ l'agrégat $\bigcup\limits^{\Sigma} F$ de la sous-classe F dans Σ. Soit A une sous-classe de $\overline{\mathcal{S}}$ majorée; alors $\cup A$ est la classe complète A′ engendrée dans $\mathcal{S}$ par la classe A″ des éléments f tels que $f \in F$ et $F \in A$. On a :

$$\pi(\cup A) = \bigcup^{\Sigma} A' = \bigcup^{\Sigma} A''.$$

Puisque $\pi(F) = \bigcup\limits^{\Sigma} F$, on trouve :

$$\bigcup_{F \in A}^{\Sigma} \pi(F) = \bigcup_{F \in A}^{\Sigma} \Big(\bigcup^{\Sigma} F\Big) = \bigcup^{\Sigma} A''.$$

1 Donc π est compatible avec l'agrégation. — Soit $\overline{\mathcal{S}}'$ un groupoïde local vérifiant la condition (C); il existe aussi un foncteur π' de $\overline{\mathcal{S}}'$ sur $\overline{\mathcal{S}}$ compatible avec l'agrégation et se réduisant à l'identité sur $\mathcal{S}$. Soit $f' \in \overline{\mathcal{S}}'$; on a : $f' = \bigcup\limits^{\overline{\mathcal{S}}'} F$, où F est une sous-classe de $\mathcal{S}$. Par hypothèse :

$$\pi'(f') = \cup \pi'(F) = \cup F \quad \text{et} \quad \pi(\pi'(f')) = \pi(\cup F) = \bigcup^{\overline{\mathcal{S}}'} F = f';$$

de même $\pi'\pi =$ identité; donc $\pi' = \pi^{-1}$ et π est une équivalence de $\overline{\mathcal{S}}$ sur $\overline{\mathcal{S}}'$.

COROLLAIRE. — *Il existe un foncteur section φ relativement à π et Σ est un groupoïde quotient de $\overline{\mathcal{S}}$.*

Démonstration. — Soit $f' \in \Sigma$ et soit F' la sous-classe de $\mathcal{S}$ formée des éléments f tels que $f < f'$ dans Σ. On a $f' = \overset{\Sigma}{\bigcup} F'$. La sous-classe F' est une sous-classe inductive de $\mathcal{S}$ saturée par induction; puisque F' est majorée dans Σ, elle est compatible dans Σ. A fortiori elle est aussi compatible dans $\mathcal{S}$. Donc F' est une sous-classe complète de $\mathcal{S}$. Soit φ l'application qui associe $F' \in \overline{\mathcal{S}}$ à $f' \in \Sigma$. Soient $f' \in \Sigma$, $g' \in \Sigma$ et $g'.f'$ défini; posons $G' = \varphi(g')$. $G' \circ F'$ est défini et $G' \circ F' \subset \varphi(g'f')$; un élément de $\mathcal{S}$ majoré dans Σ par $g'.f'$ est de la forme $g.f$; par conséquent $\overline{G'.F'} = \varphi(g'.f')$ et φ est un foncteur de Σ vers $\overline{\mathcal{S}}$. De plus pour tout $f' \in \Sigma$, on a : $\pi(\varphi(f')) = \pi(F') = \overset{\Sigma}{\bigcup} F' = f'$, ce qui montre que φ est un foncteur section relativement à π et, d'après la proposition 10-1, I [1], que Σ est un groupoïde quotient de $\overline{\mathcal{S}}$. Remarquons que φ est compatible avec l'ordre dans Σ et $\overline{\mathcal{S}}$ mais non avec l'agrégation.

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal et soit $\check{\mathcal{S}}$ le sous-pseudogroupe faible de $\overline{\mathcal{S}}$ engendré par $\mathcal{S}$ dans le pseudogroupe $\overline{\mathcal{S}}$ du théorème 2; alors $\check{\mathcal{S}}$ est un groupoïde local caractérisé à une équivalence près par la condition ($\check{C}$) suivante:*

($\check{C}$) *Si $\check{\Sigma}$ est un groupoïde local contenant $\mathcal{S}$ et tel que le sous-pseudogroupe faible engendré par $\mathcal{S}$ dans $\check{\Sigma}$ soit $\check{\Sigma}$, l'injection canonique de $\mathcal{S}$ dans $\check{\Sigma}$ étant compatible avec l'agrégation, alors il existe un foncteur $\check{\pi}$ de $\check{\mathcal{S}}$ sur $\check{\Sigma}$ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est l'identité et tel que, pour toute sous-classe B de $\check{\mathcal{S}}$ admettant un agrégat dans $\check{\mathcal{S}}$, on ait: $\check{\pi}(\bigcup B) = \bigcup \check{\pi}(B)$.* 1

Démonstration. — $\check{\mathcal{S}}$ est le sous-groupoïde de $\overline{\mathcal{S}}$ formé des sous-classes complètes de $\mathcal{S}$ majorées dans $\mathcal{S}$. Soit $\check{\Sigma}$ un groupoïde local vérifiant ($\check{C}$) et soit Σ le groupoïde obtenu par complétion de $\check{\Sigma}$; d'après le théorème 2, Σ contient $\check{\Sigma}$ comme sous-pseudogroupe faible et il existe un foncteur π de $\overline{\mathcal{S}}$ sur Σ. Soit $\check{\pi}$ la restriction de π à $\check{\mathcal{S}}$; si $F \in \check{\mathcal{S}}$, alors $\pi(F)$

est l'agrégat dans Σ de la sous-classe F de $\mathcal{G}$ majorée par $f \in \mathcal{G}$, donc appartient au sous-pseudogroupe faible $\check{\Sigma}$ de Σ et $\check{\pi}(\check{\mathcal{G}}) \subset \check{\Sigma}$. La fin de la démonstration du théorème 2 et celle de son corollaire s'appliquent en remplaçant π par $\check{\pi}$, Σ par $\check{\Sigma}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ par $\check{\mathcal{G}}$. Par suite :

Corollaire 1. — *Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde local, alors $\check{\mathcal{G}}$ s'identifie à $\mathcal{G}$.*

Corollaire 2. — *Il existe un foncteur $\check{\varphi}$ section relativement à $\check{\pi}$ et $\check{\Sigma}$ est un groupoïde quotient de $\check{\mathcal{G}}$.*

Théorème 4. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde local et soit $\hat{\mathcal{G}}$ le sous-groupoïde plein de $\overline{\mathcal{G}}$ ayant $\mathcal{G}_0$ comme classe des unités; alors $\hat{\mathcal{G}}$ est un groupoïde local relativement complet caractérisé à une équivalence près par la condition $(\hat{C})$ suivante:*

$(\hat{C})$ Si $\hat{\Sigma}$ est un groupoïde local relativement complet contenant $\mathcal{G}$ comme base et tel que $\hat{\Sigma}_0$ soit identique à $\mathcal{G}_0$, alors il existe un foncteur $\hat{\pi}$ de $\hat{\mathcal{G}}$ sur $\hat{\Sigma}$ dont la restriction à $\mathcal{G}$ est l'identité et qui est compatible avec l'agrégation.

Démonstration. — $\hat{\mathcal{G}}$ étant saturé par induction est un sous-pseudogroupe faible de $\overline{\mathcal{G}}$. Si $\hat{A}$ est une sous-classe compatible de $\hat{\mathcal{G}}$ dont les classes d'unités à droite et à gauche sont majorées dans $\hat{\mathcal{G}}_0 = \mathcal{G}_0$, alors la sous-classe complète $\overline{A}$ engendrée par la classe A des éléments f de $\mathcal{G}$ tels que $f \in F$ et $F \in \hat{A}$ est telle que $\alpha(\overline{A})$ et $\beta(\overline{A})$ soient des sous-classes majorées dans $\mathcal{G}_0$; donc $\overline{\alpha}(\overline{A}) \in \mathcal{G}_0$, $\overline{\beta}(\overline{A}) \in \mathcal{G}_0$, $\overline{A}$ appartient à $\hat{\mathcal{G}}$ et l'agrégat de $\hat{A}$ dans $\hat{\mathcal{G}}$ est $\overline{A}$. Ainsi $\hat{\mathcal{G}}$ est un groupoïde local relativement complet. Si $\hat{\Sigma}$ est un groupoïde relativement complet contenant $\mathcal{G}$ comme base et tel que $\hat{\Sigma}_0$ soit égal à $\mathcal{G}_0$, on peut compléter $\hat{\Sigma}$ en un groupoïde local complet Σ et $\hat{\pi}$ est la restriction à $\hat{\mathcal{G}}$ du foncteur π de $\overline{\mathcal{G}}$ sur Σ; on a $\hat{\pi}(\hat{\mathcal{G}}) = \hat{\Sigma}$. La démonstration se termine comme celle du théorème 2.

1 Corollaire 1. — *Si $\mathcal{G}$ est complet, on a $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$.*

Corollaire 2. — *Il existe un foncteur $\hat{\varphi}$ section relativement*
2+ *à $\hat{\pi}$ et $\hat{\Sigma}$ est un groupoïde quotient de $\hat{\mathcal{G}}$.*

PROPOSITION 3. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde local et soit $\tilde{\mathcal{G}}$ la composante de $\mathcal{G}$ dans $\overline{\mathcal{G}}$; alors $\tilde{\mathcal{G}}$ est un élargissement de $\mathcal{G}$ et un sous-pseudogroupe faible de $\overline{\mathcal{G}}$ saturé par induction; de plus toute sous-classe compatible* F *de $\mathcal{G}$ telle que* α(F) *ou* β(F) *admette un agrégat dans $\mathcal{G}$ admet un agrégat dans $\tilde{\mathcal{G}}$.*

Démonstration. — $\tilde{\mathcal{G}}$ est le sous-groupoïde de $\overline{\mathcal{G}}$ engendré par la classe des éléments F de $\overline{\mathcal{G}}$ tels que $\overline{\alpha}(F)$ appartienne à $\mathcal{G}_0$. Alors $\tilde{\mathcal{G}}_0$ est formé des sous-classes complètes E′ de $\mathcal{G}_0$ telles qu'il existe $F' \in \overline{\mathcal{G}}$ avec $\overline{\alpha}(F') \in \mathcal{G}_0$ et $\overline{\beta}(F') = E'$. Pour tout $E \in \overline{\mathcal{G}}_0$, on a $\overline{\beta}(\overline{EF'}) = \overline{E\beta(F')} = \overline{EE'}$ et $\overline{\alpha}(\overline{EF'}) < \overline{\alpha}(F')$, d'où $\overline{\alpha}(\overline{EF'}) \in \mathcal{G}_0$, $\overline{EF'} \in \tilde{\mathcal{G}}$ et $\overline{EE'} \in \tilde{\mathcal{G}}_0$. Ainsi $\tilde{\mathcal{G}}_0$ est saturé par induction. Puisque $\tilde{\mathcal{G}}$ est plein dans $\overline{\mathcal{G}}$, il est saturé par induction dans $\overline{\mathcal{G}}$. Donc $\tilde{\mathcal{G}}$ est un sous-pseudogroupe faible de $\overline{\mathcal{G}}$ contenant $\mathcal{G}$ comme sous-pseudogroupe faible. Toute sous-classe compatible F de $\mathcal{G}$ telle que α(F) ou β(F) admette un agrégat dans $\mathcal{G}_0$ admet $\overline{F} \in \tilde{\mathcal{G}}$ comme agrégat, où $\overline{F}$ est la sous-classe complète de $\mathcal{G}$ engendrée par F.

DÉFINITION 3. — *Une sous-classe complète* F *d'un groupoïde local $\mathcal{G}$ est dite* réductible *s'il existe deux sous-classes complètes* F_1 *et* F_2 *strictement contenues dans* F *et dont l'agrégat dans $\overline{\mathcal{G}}$ est* F. *Une classe qui n'est pas réductible est dite* irréductible.

Pour qu'une sous-classe F de $\mathcal{G}$ soit irréductible, il faut et il suffit que, quelles que soient les deux sous-classes complètes F_1 et F_2 strictement contenues dans F, la sous-classe complète engendrée par la classe réunion de F_1 et F_2 soit strictement contenue dans F.

PROPOSITION 4. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde local. La classe des sous-classes complètes irréductibles de $\mathcal{G}$ forme un sous-groupoïde $\mathring{\mathcal{G}}$ plein saturé de $\overline{\mathcal{G}}$.*

Démonstration. — Soit F une sous-classe irréductible de $\mathcal{G}$ et soient E_1 et E_2 deux sous-classes complètes strictement contenues dans $\overline{\alpha}$(F). Soit $F_1 = FE_1$ la sous-classe de F ayant pour éléments les f tels que $\alpha(f) \in E_1$; cette sous-classe est une sous-classe complète de F; en effet, F_1 est saturé par induction; d'autre part, si F′ est une sous-classe de F_1 admettant un agrégat, on a $\alpha(\bigcup F') = \bigcup \alpha(F') \in E_1$, d'où $\bigcup F' \in F_1$. De même la sous-classe $F_2 = FE_2$ est une sous-classe complète. Supposons que l'on ait $E_1 \cup E_2 = \overline{\alpha}(F)$. Alors pour tout $f \in F$ on a $\alpha(f) = (\bigcup E'_1) \cup (\bigcup E'_2)$, où E'_1 et E'_2 sont des sous-classes de E_1 et E_2 respectivement. C'est-à-dire $\alpha(f) = e_1 \cup e_2$, où $e_i = \bigcup E'_i \in E_i$, $i = 1, 2$. Donc $f = fe_1 \cup fe_2$ et par suite $F = F_1 \cup F_2$ dans $\overline{\mathcal{S}}$, ce qui est contraire à l'irréductibilité de F. Ainsi $\overline{\alpha}(F)$ et $\overline{\beta}(F)$ sont irréductibles. Inversement si F est réductible, il existe deux sous-classes complètes F_1 et F_2 strictement contenues dans F et telles que, dans $\overline{\mathcal{S}}$, on ait $F_1 \cup F_2 = F$; comme $\overline{\alpha}(F_1) \cup \overline{\alpha}(F_2) = \overline{\alpha}(F)$ et comme $\overline{\alpha}(F_1)$ et $\overline{\alpha}(F_2)$ sont strictement contenues dans $\overline{\alpha}(F)$, la classe $\overline{\alpha}(F)$ est **réductible**. Donc $\mathring{\mathcal{S}}$ est un sous-groupoïde plein saturé dans $\overline{\mathcal{S}}$.

Remarques. — 1) Pour que $f \in \mathcal{S}$ appartienne à $\mathring{\mathcal{S}}$, il faut et il suffit que la sous-classe $f^{>}$ soit irréductible; puisque toute sous-classe complète contenue dans $f^{>}$ appartient à $\mathcal{S}$, $f^{>}$ est réductible si, et seulement si, f est l'agrégat d'un ensemble
1 fini d'éléments de $\mathcal{S}$.

2) En général $\mathring{\mathcal{S}}$ n'est pas un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$, car la sous-classe complète engendrée par une réunion de sous-classes irréductibles contenues dans une classe irréductible n'est pas toujours irréductible.

3) La considération des classes irréductibles conduit à une théorie de la complétion des groupoïdes inductifs analogue à la théorie des « bouts » dans les espaces topologiques.

6. GROUPOÏDE DES FILTRES

Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive.

Définition 1. — *On appelle* base de filtre sur $\mathcal{A}$ *une sous-classe non vide* B *de* $\mathcal{A}$ *telle que, pour tout* $b \in B$ *et tout* $b' \in B$, *il existe* $b'' \in B$ *satisfaisant à :* $b'' < b$ *et* $b'' < b'$.

On appelle filtre sur $\mathcal{A}$ *une sous-classe* F *de* $\mathcal{A}$ *qui est une base de filtre et qui, pour tout* $f \in F$, *contient tout majorant de* f *dans* $\mathcal{A}$.

Si un filtre sur $\mathcal{A}$ contient le 0 de $\mathcal{A}$, il contient tout élément de $\mathcal{A}$; ce filtre sera appelé *filtre trivial de* $\mathcal{A}$.

Soit F un filtre sur $\mathcal{A}$; soient $f \in F$ et $f' \in F$ deux éléments tels que $f \cap f'$ soit défini; comme il existe $f'' \in F$ tel que $f'' < f$ et $f'' < f'$, on a $f'' < f \cap f' \in F$; par suite la classe obtenue en adjoignant à F le 0 de $\mathcal{A}$, que nous désignerons par F^+, est une sous-classe inductive de $\mathcal{A}$.

Définition 2. — *On appelle* quasi-(base de) filtre sur $\mathcal{A}$ *une sous-classe de* $\mathcal{A}$ *contenant* 0 *et dont la classe des éléments différents de* 0 *est vide ou est un(e base de) filtre sur* $\mathcal{A}$.

Proposition 1. — *Soit* B *une (quasi-)base de filtre sur* $\mathcal{A}$; *la classe* F *ayant pour éléments (*0 *et) les majorants des éléments de* B *(différents de* 0*) est un (quasi-)filtre appelé (quasi-)* filtre engendré par B dans $\mathcal{A}$, *ou* (quasi-)filtre de (quasi-) base B.

Proposition 2. — *Soit* B *une quasi-base de filtre sur* $\mathcal{A}$ *qui est une base d'une partie sous-inductive* $\overline{B}$. *Alors* $\overline{B}$ *est une quasi-base du quasi-filtre* F *engendré par* B *dans* $\mathcal{A}$.

Remarque. — En général, une quasi-base de filtre n'est pas une base du quasi-filtre correspondant, considéré comme une sous-classe inductive de $\mathcal{A}$. Si F est un quasi-filtre, alors F est une sous-classe inductive dont toute base est une quasi-base de filtre.

Proposition 3. — *Soient* B_i, *où* $i = 1, 2$, *deux quasi-bases de filtres sur* $\mathcal{A}$; *pour que les quasi-filtres engendrés par* B_i *soient identiques, il faut et il suffit que, pour tout* $b_i \in B_i$, *il existe* $b_j \in B_j$ *tel que* $b_j < b_i$, $j = 1, 2$, $j \neq i$.

Théorème 1. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif; la sous-classe* $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ *de* $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ (théorème 2-4) *formée des atlas faibles complets qui sont des quasi-bases de filtres sur* $\mathcal{G}$ *est un sous-groupoïde saturé par induction de* $\mathcal{H}(\mathcal{G})$.

Démonstration. — Soit $F \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$, $F \neq 0$; soient $f \in F$, $f' \in F$, $f_1 \in F$ et $f'_1 \in F$ tels que $f^{-1}f'$ et $f_1^{-1}f'_1$ soient définis. Il existe $f'' \in F$, $f'' \neq 0$ tel que $f'' < f$; $f'' < f'$; $f'' < f_1$ et $f'' < f'_1$; par suite :

$$\alpha(f'') = f''^{-1}.f'' < f^{-1}f' \qquad \text{et} \qquad \alpha(f'') < f_1^{-1}f'_1;$$

ainsi $a(\mathrm{F})$ est une quasi-base de filtre. — Supposons $\mathrm{G} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$, $a(\mathrm{G}) = b(\mathrm{F})$, et montrons que $\mathrm{G}.\mathrm{F}$ est une quasi-base de filtre; soient $g \in \mathrm{G}$ et $g' \in \mathrm{G}$ tels que $g.f$ et $g'.f'$ soient définis; il existe $g'' \in \mathrm{G}$ tel que $g'' \neq 0$, $g'' < g$ et $g'' < g'$; comme $a(\mathrm{G})$ est une quasi-base de filtre, il existe $e \in a(\mathrm{G})$ tel que $e \neq 0$, $e < \alpha(g'')$ et $e < \beta(f'')$; donc :

$$(g''e).(ef'') \in (\mathrm{G}a(\mathrm{G})).(a(\mathrm{G})\mathrm{F}) = \mathrm{G}.\mathrm{F},$$

et $(g''e).(ef'')$ est un minorant de $g.f$ et de $g'.f'$; ainsi $\mathrm{G}.\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$. Il en résulte que $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, car $\mathrm{F}^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$. — Soient $\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ et $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$. Si $\mathrm{F}' = 0$, on a $\mathrm{F}' \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$. Supposons $\mathrm{F}' \neq 0$; soient $f' \in \mathrm{F}'$ et $f'_1 \in \mathrm{F}'$; comme F' est saturé par induction dans F, il existe $f \in \mathrm{F}'$ tel que $f \neq 0$, $f < f'$ et $f < f'_1$; de la relation :

1 $$f = f\alpha(f') \in \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}') = \mathrm{F}',$$

on déduit que F' est une quasi-base de filtre. Par conséquent $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ est saturé par induction dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$.

Théorème 2. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal. La sous-classe $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$* (théorème 5-4) *formée des atlas complets qui sont des quasi-bases de filtres sur $\mathcal{G}$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$.*

Démonstration. — Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$. D'après le théorème 1, $a(\mathrm{F})$ est une quasi-base de filtre, donc $\overline{a}(\mathrm{F})$ est aussi une quasi-base de filtre, en vertu de la proposition 2. Si $\mathrm{G} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ et $\overline{a}(\mathrm{G}) = \overline{b}(\mathrm{F})$, comme $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ admet pour base $\mathrm{G}.\mathrm{F}$, une démonstration analogue à celle du théorème 1 montre que $\mathrm{G} \circ \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$; par suite $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$. De plus $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ est saturé par induction dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$, car $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ entraîne $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, d'après le théorème 5-4, d'où $\mathrm{F}' \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ à l'aide du théorème 1.

Proposition 4. — *Un quasi-filtre sur un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$ est un atlas complet de $\mathcal{G}$.*

En effet, soit F un quasi-filtre; alors F est $\overline{\bigcup}$-saturé; si f, f' et f'' sont trois éléments de F tels que $f''(f^{-1}f')$ soit défini, il existe un $f_1 \in \mathrm{F}$, $f_1 \neq 0$, $f_1 < f$, $f_1 < f'$ et $f_1 < f''$. Puisque :

$$f_1 = f_1(f_1^{-1}f_1) < f''(f^{-1}f'),$$

on a $f''(f^{-1}f') \in$ F, d'où Fa(F) = F et F est un atlas complet de $\mathcal{G}$.

Proposition 5. — *Soit* F *un filtre sur le groupoïde sous-préinductif* $\mathcal{G}$; α(F) *et* β(F) *sont des bases de filtres* α^*(F) *et* β^*(F). *Si* G *est un filtre sur* $\mathcal{G}$ *tel que* $\alpha^*(G) = \beta^*(F)$, *la classe* GF = G.F *est base d'un filtre* G*F *pour lequel on a:*

$$\alpha^*(G * F) = \alpha^*(F) \qquad \textit{et} \qquad \beta^*(G * F) = \beta^*(G).$$

Démonstration. — Soit F un filtre non trivial sur $\mathcal{G}$ (sinon α^*(F) et β^*(F) sont identiques au filtre trivial) et F^+ le quasi-filtre correspondant. D'après la démonstration du théorème 1, $a(F^+)$ est une quasi-base de filtre, engendrant un quasi-filtre dont $\alpha(F^+)$ est aussi une quasi-base de filtre. Donc α(F) est une base de filtre et le filtre α^*(F) engendré par α(F) admet aussi $\overline{F^{-1}F}$ pour base. De plus, pour tout $h \in \alpha^*(F)$ et tout $f \in F$, il existe $e \in \alpha^*(F)$ tel que $e < \alpha(f)$ et $e < h$; la relation $fe < fh$ entraîne $fh \in F$, d'où $F\alpha^*(F) = F$. — Supposons $\alpha^*(G) = \beta^*(F)$; soient $f \in F$, $f' \in F$, $g \in G$ et $g' \in G$ tels que $g'f'$ et gf soient définis; il existe $f'' \in F$ tel que $f'' \neq 0$, $f'' < f$, $f'' < f'$, et $g'' \in G$ tel que $g'' \neq 0$, $g'' < g$ et $g'' < g'$; puisque α(G) est une base de filtre, il existe $e' \in \alpha^*(G)$ vérifiant les conditions : $e' < \alpha(g'')$ et $e' < \beta(f'')$, et, si G n'est pas le filtre trivial, $e' \neq 0$. Des relations :

$$(g''e').(e'f'') < gf; \qquad (g''e').(e'f'') < g'f'$$

et

$$(g''e').(e'f'') \in (G\alpha^*(G)).(\beta^*(F)F) = G.F,$$

on déduit que GF est une base d'un filtre G * F; de plus on a : $gf = g_1 . f_1$, $g''e' < g_1$ et $e'f'' < f_1$, d'où $g_1 \in G$, $f_1 \in F$ et GF = G.F. Enfin $\alpha^*(G * F)$ admettant α(G.F) et α(F) pour bases, il est identique à α^*(F).

Théorème 3. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif. La classe* $\mathfrak{F}(\mathcal{G})$ *des filtres sur* $\mathcal{G}$ *est un groupoïde sous-inductif pour la loi de composition définie par:*
(G, F) $\to$ G * F *si, et seulement si,* $\alpha^*(G) = \beta^*(F)$ (prop. 5) *et la relation d'ordre*:

$$F' < F \qquad \textit{si, et seulement si,} \qquad F \subset F'.$$

Démonstration. — *Soit* $F \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$. Alors F admet $\alpha^*(F)$ $\beta^*(F)$ pour seules unités à droite et à gauche resp. Si $H*(G*F)$ est défini dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, il est engendré par la base de filtre $H.(G.F)$ d'après la proposition 5; comme $H.(G.F) = (H.G).F$, le filtre $(H*G)*F$, qui admet $(H.G).F$ pour base, est identique à $H*(G*F)$. Ainsi la loi de composition $*$ est associative. La classe F^{-1} est un filtre et on a : $F^{-1}*F = \alpha^*(F)$ et $F*F^{-1} = \beta^*(F)$. Donc $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est un groupoïde. Soit H un filtre admettant une base E formée d'unités. Le filtre $\alpha^*(H)$ admet $\alpha(H)$, et par suite E, pour base, d'où $\alpha^*(H) = H$. Ceci prouve que la classe des unités de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est la classe des filtres admettant une base formée d'unités.

— Soit $H \in \mathcal{F}(\mathcal{G})_0$; soit E une base de H formée d'unités et soit $F' < H$; pour tout $f' \in F'$ et tout $e \in E$, il existe $e' \in F'$ tel que $e' < e$ et $e' < f'$; on en déduit $e' \in \alpha(F')$ et $\alpha^*(F') = F' \in \mathcal{F}(\mathcal{G})_0$. Supposons $H < \alpha^*(F)$; si $f \in F$, $f_1 \in F$, $e \in E$ et $e_1 \in E$, il existe $e' \in E$ tel que $e' < e$, $e' < e_1$, et $f_2 \in F$ tel que $f_2 < f$, $f_2 < f_1$; si H n'est pas trivial, il existe $e'' \in E$ tel que $e'' \neq 0$, $e'' < e'$ et $e'' < \alpha(f_2)$; si fe et f_1e_1 sont définis, les relations :

$$f_2e'' < f_1e_1; \qquad f_2e'' < fe \qquad \text{et} \qquad f_2e'' \in FE$$

entraînent que FE est base d'un filtre $(FE)^* < F$. On a $\alpha(FE) \subset \alpha(F)E \subset H$. Inversement soit $h \in H$ et $f \in F$; il existe $e \in E$ tel que $e < h$, $e < \alpha(f)$ et on trouve $fe \in FE$ et $\alpha(fe) < h$, d'où $h \in \alpha^*(FE)^*$ et $H \subset \alpha^*(FE)^*$. Ainsi $\alpha^*(FE)^* = H$.

— Supposons $G*F$ et $G'*F'$ définis, $G' < G$ et $F' < F$; comme $G*F$ admet $G.F \subset G'.F'$ pour base, $G*F$ est contenu dans $G'*F'$. Inversement si $K < G*F$, posons :

$$F' = (F\alpha(K))^* < F \qquad \text{et} \qquad G' = (G\beta(F'))^* < G;$$

d'après ce qui précède, on a $G'*F' < G*F$ et $\alpha^*(G'*F') = \alpha^*(K)$; montrons que $G'*F'$ admet $(G.F)\alpha(K)$ pour base; en effet soit $h \in G'*F'$; pour tout $g.f \in G.F$, il existe $h' \in G'*F'$ tel que $h' < g.f$ et $h' < h$; comme $\alpha(K)$ est une base de $\alpha^*(K)$, il existe $e \in \alpha(K)$ avec $e < \alpha(h')$ et on a :

$$h'e < h, \qquad h'e \in G'*F' \qquad \text{et} \qquad h'e = (g.f)e \in (G.F)\alpha(K).$$

Ainsi $(G.F)\alpha(K) \subset K$ est une base de $G'*F'$. Par ailleurs $G.F \subset K$ et, pour tout $k \in K$, il existe $k' \in K$, $k' < k$ et $k' < g.f$;

il en résulte : $k' = (g.f)\alpha(k') \in (\mathrm{G.F})\alpha(\mathrm{K})$ et $(\mathrm{G.F})\alpha(\mathrm{K})$ est aussi une base de K. Donc $\mathrm{K}=\mathrm{G}'*\mathrm{F}'$ et $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ vérifie l'axiome (I).

— Soit A une classe de filtres F_i, où $i \in \mathrm{I}$, majorée par $\mathrm{F} \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$; soit M la classe des éléments $\bigcap_{i\in \mathrm{I}_0} f_i$, où $f_i \in \mathrm{F}_i$ et où I_0 est une sous-classe finie de I; soient $\bigcap_{i\in \mathrm{I}_0} f_i \in \mathrm{M}$ et $\bigcap_{i\in \mathrm{I}'_0} f'_i \in \mathrm{M}$. Pour tout $f \in \mathrm{F}$ et tout i appartenant à la classe réunion I''_0 de I_0 et de I'_0, il existe $f''_i \in \mathrm{F}_i$ tel que $f''_i < f_i$, $f''_i < f'_i$ et $f''_i < f$; par suite $\bigcap_{i\in \mathrm{I}''_0} f''_i$ est défini et on a $\bigcap_{i\in \mathrm{I}''_0} f''_i \in \mathrm{M}$; donc M est une base de filtre. Soit $\mathrm{M}^\star$ le filtre engendré par M; ce filtre contient F_i pour tout $i \in \mathrm{I}$ et, si N est un filtre contenant tout F_i, N contient aussi M, puisque N est saturé par intersection finie. Donc $\mathrm{M}^\star$ est l'intersection de A dans $\mathcal{F}(\mathcal{S})$. Remarquons que $\mathrm{M}^\star$ peut évidemment être le filtre trivial de $\mathcal{S}$, lequel est l'élément 0 de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$.

Corollaire. — *$\mathcal{S}$ s'identifie à un sous-groupoïde plein saturé $\overset{+}{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, saturé par intersection finie, en identifiant $f \in \mathcal{S}$ au filtre $f^<$ des majorants de f dans $\mathcal{S}$. Si $\mathcal{S}$ est sous-inductif, $\overset{+}{\mathcal{S}}$ est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$.*

Démonstration. — Soient $\mathrm{F} \in \mathcal{F}(\mathcal{S})$ et $\alpha^\star(\mathrm{F}) = e^<$, où $e \in \mathcal{S}_0$; puisque $\alpha(\mathrm{F})$ est une base de $\alpha^\star(\mathrm{F})$, il existe $f \in \mathrm{F}$ avec $\alpha(f) = e$; pour tout $g \in \mathrm{F}$, il existe $f' \in \mathrm{F}$ tel que $f' < g$, $f' < f$ et $e < \alpha(f')$; par suite $\alpha(f') = e$, $f' = f < g$ et $\mathrm{F} = f^<$. Ainsi $\overset{+}{\mathcal{S}}$ est un sous-groupoïde saturé de $\mathcal{F}(\mathcal{S})$. — Pour que l'on ait $g^< < f^<$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{S})$, il faut et il suffit que l'on ait $g < f$ dans $\mathcal{S}$; donc $\mathcal{S}$ est isomorphe à $\overset{+}{\mathcal{S}}$ et peut lui être identifié.
Si $f^< \in \overset{+}{\mathcal{S}}$ et $g^< \in \overset{+}{\mathcal{S}}$, on a : $g^< \cap f^< = (g \cap f)^<$. — Si $\mathcal{S}$ est sous-induc- 1
tif, soit A une sous-classe de $\overset{+}{\mathcal{S}}$ admettant un sous-agrégat F dans $\mathcal{F}(\mathcal{S})$; tout élément f de F appartient à $h^< \in \mathrm{A}$; donc la classe A′ des h tels que $h^< \in \mathrm{A}$ est majorée par $f \in \mathrm{F}$ et admet un f-agrégat $g(f)$ dans $\mathcal{S}$. Pour tout $f_1 \in \mathrm{F}$, il existe $f'' \in \mathrm{F}$ tel que $f'' < f$ et $f'' < f_1$; par suite on a $g(f) = g(f'') = g(f_1)$, d'où $g(f) = g < f$ pour tout $f \in \mathrm{F}$, et $g^< < \mathrm{F}$. Par ailleurs, comme $h < g$, pour tout $h \in \mathrm{A}'$, le filtre $g^<$ est un majorant de A et il existe un $g^<$-agrégat F′ de A d'après le théorème 3.

La relation $g^< < \mathrm{F}$ entraîne $\mathrm{F}' = \mathrm{F} = g^<$. Par conséquent $\overset{+}{\mathcal{G}}$ est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$.

Remarque. — En général $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ n'est pas un groupoïde inductif.

Si F et G sont deux filtres tels que $\mathrm{G} * \mathrm{F}$ soit défini, $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ n'est pas toujours défini. Inversement si $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ est défini, $\mathrm{G} * \mathrm{F}$ est défini, mais peut être différent de $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$.

THÉORÈME 4. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ relativement au foncteur ψ qui associe à 0 le filtre trivial et à $\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$, $\mathrm{F} \neq 0$, le filtre $\psi(\mathrm{F})$ tel que $\psi(\mathrm{F})^+$ admette F pour quasi-base; de plus $\mathrm{F}' \ll \mathrm{F}$ entraîne $\psi(\mathrm{F}) < \psi(\mathrm{F}')$ si $\mathrm{F}' \neq 0$, et $\psi(0) = 0$.*

Démonstration. — Si $\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ et si la classe des éléments de F différents de 0 est une base du filtre F', nous dirons pour simplifier que F est une base de F'. Soient $\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ et $\mathrm{G} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ tels que $\mathrm{G}.\mathrm{F}$ soit défini; le filtre $\psi(\mathrm{G}.\mathrm{F})$ admet GF pour base; il en est de même pour le filtre $\psi(\mathrm{G}) * \psi(\mathrm{F})$, de sorte que $\psi(\mathrm{G}.\mathrm{F}) = \psi(\mathrm{G}) * \psi(\mathrm{F})$. Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})_0$; soit $h \in \mathrm{H}$; comme H est un groupoïde, il existe $h' \in \mathrm{H}$ tel que $h' < h$ et $h' < \alpha(h)$, d'où $h' = \alpha(h')$ et $\alpha(\mathrm{H})$ est une base de $\psi(\mathrm{H})$. Par suite $\psi(\mathrm{H})$ est une unité de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ et ψ est un foncteur.

— Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$, $\mathrm{F} \neq 0$. Montrons que l'on a $a(\mathrm{F}^+) \ll \alpha^*(\mathrm{F})^+$; pour tout $h \in \alpha^*(\mathrm{F})$, il existe $e \in \alpha(\mathrm{F})$ tel que $e < h$; on a aussi $e < h^{-1}$, d'où $h^{-1} \in \alpha^*(\mathrm{F})$; il en résulte que $\alpha^*(\mathrm{F})^+$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{G}$. On a $a(\mathrm{F}^+) \subset \alpha^*(\mathrm{F})^+$ et $a(\mathrm{F}^+) \subset \alpha^*(\mathrm{F})^+\alpha(\mathrm{F})$; par ailleurs, soient $f \in \mathrm{F}$ et $h \in \alpha^*(\mathrm{F})$; si fh^{-1} est défini, les relations : $fh^{-1} \in \mathrm{F}\alpha^*(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ et

$$h\alpha(f) = h(f^{-1}.f) = (fh^{-1})^{-1}f \in \mathrm{F}^{-1}\mathrm{F} = a(\mathrm{F})$$

entraînent : $\alpha^*(\mathrm{F})\alpha(\mathrm{F}) \subset a(\mathrm{F})$; on en déduit :

$$a(\mathrm{F}^+) = \alpha^*(\mathrm{F})^+\alpha(\mathrm{F}^+) \quad \text{et} \quad a(\mathrm{F}^+) \ll \alpha^*(\mathrm{F})^+ \quad \text{dans} \quad \mathcal{K}(\mathcal{G}).$$

De même $b(\mathrm{F}^+) \ll \beta^*(\mathrm{F})^+$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{G})$.

— Soient F' et G' deux filtres tels que $\alpha^*(\mathrm{G}') = \beta^*(\mathrm{F}') \neq 0$; d'après ce qui précède, $a(\mathrm{G}'^+)$ et $b(\mathrm{F}'^+)$ sont majorés par $\alpha^*(\mathrm{G}')^+$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{G})$. Soit K l'intersection de $a(\mathrm{G}'^+)$ et $b(\mathrm{F}'^+)$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{G})$, qui existe d'après le théorème 5-4; soit $g \in \mathrm{G}'$; puisque K est contenu dans $a(\mathrm{G}'^+)$ et que $a(\mathrm{G}')$ et $\alpha(\mathrm{G}')$ sont des bases de $\alpha^*(G')$, pour tout $k \in K$ il existe $g' \in G'$ tel que $\alpha(g') < k$ et $\alpha(g') < \alpha(g)$. Puisque K est saturé par induction dans $a(G'^+)$, on a $\alpha(g') \in K$. Donc K est une base de $\alpha^*(G')$ et, de même, de $\beta^*(F')$. Posons $F'' = KF'^+$ et $G'' = G'^+K$; d'après le théorème 5-4, on a

$$F'' \leqslant F'^+,\ G'' \leqslant G'^+ \text{ et } b(F'') = a(G'') = K;$$

en vertu du théorème 1, F'' et G'' sont des quasi-bases de filtres; le filtre $\psi(G'')$ admettant $G'K$ pour base, il est identique à G'; de même $\psi(F'') = F'$ et :

$$\psi(G''.F'') = G' * F'.$$

Ceci prouve ([3], [4]) que $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{K}(\mathcal{G})$.

Théorème 5. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal; $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ relativement à la restriction de ψ à $\mathcal{B}(\mathcal{G})$* (théorèmes 4 et 3).

Une démonstration analogue à celle du théorème 4 montre que la restriction ψ' de ψ à $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ est un foncteur de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ sur $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ et que, si $F \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, on a $\bar{a}(F) \leqslant \alpha^*(F)^+$ et $\bar{b}(F) \leqslant \beta^*(F)^+$. Supposons $G' * F'$ défini; soit K l'intersection de $\bar{a}(G')$ et de $\bar{b}(F')$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{G})$; on montre comme dans la démonstration du théorème 4 que K est une base du filtre $\alpha^*(G')$; de plus $F'' = \overline{KF'}$ et $G'' = \overline{G'K}$ appartiennent à $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ et on a :

$$\psi(G'' \circ F'') = G' * F'.$$

Dans la fin de ce paragraphe, nous supposons que $\mathcal{G}$ est un groupoïde préinductif.

Théorème 6. — *Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde préinductif, $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est un groupoïde inductif.* 1

En effet, si $F_i \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ pour tout $i \in I$ et $F_i < F$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, soit F' la classe intersection des F_i, qui est non vide. Si $f' \in F'$ et $f'' \in F'$, on a $f' \cap f'' \in F_i$ pour tout $i \in I$, d'où $f' \cap f'' \in F'$. Ainsi F est un filtre, qui est l'agrégat de la classe $(F_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$.

Proposition 6. — *La classe $A^>$ des minorants d'une classe A de $\mathcal{G}$ est une sous-classe complète, la classe $A^<$ de ses majorants est un filtre si elle n'est pas vide.*

Remarque. — Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde sous-préinductif, la classe des minorants d'un filtre n'est généralement pas une sous-classe complète de $\mathcal{G}$, puisqu'elle n'est pas $\bigcup$-saturée et la classe des majorants d'un complexe peut ne pas être un filtre.

Théorème 7. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde prélocal; la classe $\bigcup$-saturée $\mathcal{G}'$ engendrée par $\overset{+}{\mathcal{G}}$* (corollaire théorème 3) *dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est le groupoïde plein saturé de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ formé des filtres* F *tels que* $F = (F^{>})^{<}$. *De plus $\mathcal{G}'$ est un groupoïde inductif quotient de $\check{\mathcal{G}}$* (théorème 3-5).

Démonstration. — Comme $\overset{+}{\mathcal{G}}$ est un sous-groupoïde saturé de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, stable pour la pseudomultiplication, $\mathcal{G}'$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ plein et saturé et admettant $\overset{+}{\mathcal{G}}$ pour base; soit B une sous-classe de $\overset{+}{\mathcal{G}}$ admettant un agrégat F dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. Pour tout $b \in B$, on a $F \subset b^{<}$, c'est-à-dire $b \in F^{>}$; soit $h \in (F^{>})^{<}$: alors $b < h$ et $b^{<} < h^{<}$, d'où $F = \cup B < h^{<}$, $h \in F$ et $(F^{>})^{<} \subset F$. Comme on a évidemment $F \subset (F^{>})^{<}$, il en résulte $F = (F^{>})^{<}$. Inversement, supposons $F \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ et $F = (F^{>})^{<}$; tout élément de l'agrégat H de la classe des fitres $g^{<}$, où $g \in F^{>}$, appartient à $g^{<}$, donc à $(F^{>})^{<} = F$, et $H \subset F$; comme tout élément $f \in F$ majore g, on doit avoir $g^{<} < f^{<}$, ou encore $H < f^{<}$ et $F \subset H$. On en déduit $F = H$ et $F \in \mathcal{G}'$. Tout $F \in \mathcal{G}'$ est majoré par $f^{<} \in \overset{+}{\mathcal{G}}$, où $f \in F$, donc $\overset{+}{\mathcal{G}}$ est une base faible
1 de $\mathcal{G}'$. La démonstration du théorème 3-5 prouve que $\mathcal{G}'$ est un groupoïde quotient de $\check{\mathcal{G}}$ relativement au foncteur $\check{\pi}$ qui associe à $C \in \check{\mathcal{G}}$ le filtre $C^{<}$, qui est l'agrégat dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ de la classe des $c^{<}$, où $c \in C$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Structures et catégories d'homomorphismes, chap. I, *Sém. Soc. Can. Université de Montréal*, 1961.

[2] Groupoïdes inductifs et structures locales, chap. 2, *Sém. Soc. Can. Un. Montréal*, 1961; également multigraphié à Paris.

[3] Structures quotient, I et II (act. multigraphié), à l'impression dans *Comm. Helv.*

[4] Espèces de structures locales, élargissement de catégories, *Sém. Topologie et Géom. diff.* (Ehresmann), vol. III, 1961, Paris.

[5] Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier*, 1960, X, pp. 307-332.

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Vol. XI, 4

/110/

ÉLARGISSEMENT COMPLET D'UN FONCTEUR LOCAL

par Charles EHRESMANN

Le but de cet article est d'esquisser la démonstration d'un théorème généralisant aux foncteurs locaux le théorème d'élargissement complet d'une espèce de structures locale [4] . Alors que ce dernier permet par exemple de construire les variétés différentiables à partir du groupoïde des difféomorphismes entre ouverts d'espaces localement convexes, la construction faite ici est une axiomatisation de la construction de la catégorie des applications différentiables entre variétés différentiables à partir de la catégorie des applications différentiables entre ouverts d'espaces localement convexes.

La démonstration est divisée en trois parties. On construit d'abord la complétion d'une application locale f, ce qui revient à «recoller» entre eux des éléments «compatibles» de la source de f. On montre ensuite que, si f est sous-jacente à un foncteur local, sa complétion est sous-jacente à un foncteur local complet. Enfin, partant d'un foncteur local fidèle p de K vers C, on montre que son élargissement algébrique [2] (dont la source a pour objets les structures obtenues par «transport» à l'aide d'un inversible de C d'un objet de K) définit un foncteur local. La complétion de ce dernier est l'élargissement complet de p.

Le texte qui suit représente une partie du cours donné en 1968 et 1969 en introduction à la théorie des variétés différentiables. On admet connues la terminologie et les notations de [0] et, pour les catégories ordonnées, celles du paragraphe 2 de [1] .

1. Complétion d'une application locale.

Etant donné un ensemble ordonné $(E, \propto)$ et une partie B de E admettant une borne supérieure (resp. borne inférieure) b dans $(E, \propto)$, on appelle b *agrégat de* B et on le note $\vee B$ (resp. b *intersection de* B et on le note $\wedge B$).

On appelle *classe locale* un ensemble ordonné $(E, \propto)$ tel que:

1° $(E, \propto)$ est une classe inductive (i. e. [1] toute partie non vide de E admet une intersection).

2° *(Axiome de distributivité)* Soient $x \in E$ et A une partie majorée dans $(E, \propto)$; on a $x \wedge (\vee A) = \vee\{x \wedge a \mid a \in A\}$, si x et $\vee A$ sont majorés. Il s'ensuit que cette égalité est aussi vraie si x et $\vee A$ ne sont pas majorés.

1 Si $(E, \propto)$ est une classe locale, une *sous-classe locale de* $(E, \propto)$ est un sous-ensemble ordonné $(E', \propto)$ de $(E, \propto)$ tel que:

1° $\vee A \in E'$ si A est une partie de E' majorée par un élément de E'.

2° $x \wedge x' \in E'$ si $x \in E'$ et $x' \in E'$ sont majorés par $x'' \in E'$.

On voit que $(E', \propto)$ est alors une classe locale.

2 On appelle *application locale* une application inductive [1]

$$f = ((E', \propto), \underline{f}, (E, \propto)) ,$$

où $(E, \propto)$ et $(E', \propto)$ sont des classes locales.

HYPOTHÈSE. On suppose que $f = ((E', \propto), \underline{f}, (E, \propto))$ est une application locale.

DÉFINITION. *Deux éléments* x *et* x' *de* E *sont dits* f*-compatibles si* $f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x')$. *Une partie* B *de* E *est dite* f*-compatible si ses éléments sont deux à deux* f*-compatibles.*

Par exemple une partie majorée dans $(E, \propto)$ est f-compatible.

PROPOSITION. *Si* x *et* x' *sont deux éléments* f*-compatibles et si* y *et* y' *sont respectivement majorés par* x *et par* x', *alors* y *et* y' *sont aussi* f*-compatibles.*

Δ. On a $y \wedge x' = y \wedge (x \wedge x')$, où y et $x \wedge x'$ sont majorés par x, d'où

$$f(y \wedge x') = f(y) \wedge f(x \wedge x') = f(y) \wedge f(x) \wedge f(x') = f(y) \wedge f(x').$$

Ainsi y et x' sont f-compatibles; de même y et y' sont f-compatibles. ∇

PROPOSITION. *Si* A *et* A' *sont des parties majorées dans* $(E, \propto)$ *et si* x *et* x' *sont* f*-compatibles pour tout* $x \in A$ *et tout* $x' \in A'$, *alors les agrégats* a *de* A *et* a' *de* A' *sont* f*-compatibles.*

Δ. La relation $a \wedge a' = \vee \{ x \wedge x' \mid x \in A,\ x' \in A' \}$ entraîne:

$$f(a \wedge a') = \vee \{ f(x) \wedge f(x') \mid x \in A,\ x' \in A' \}$$
$$= (\vee f(A)) \wedge (\vee f(A')) = f(a) \wedge f(a'). \qquad \nabla$$

DÉFINITION. *On appelle partie f-saturée une partie B de E qui est f-compatible, saturée par induction et par agrégation dans $(E, \propto)$. Si de plus $f(B)$ admet un agrégat dans $(E', \propto)$, on dit que B est f-complète.*

L'intersection d'une famille de parties f-saturées (resp. f-complètes) est f-saturée (resp. f-complète).

PROPOSITION. *Soit B une partie f-compatible. Il existe une plus petite partie f-saturée $\bar{B}$ contenant B. Si $f(B)$ admet un agrégat dans $(E', \propto)$, $\bar{B}$ est f-complète, et $\vee f(B) = \vee f(\bar{B})$. Si $\vee B$ existe, $\vee B = \vee \bar{B}$.*

Δ. Soit B' l'ensemble des éléments de E qui sont majorés par un élément de B. Alors B' est f-compatible (proposition ci-dessus). L'ensemble $\bar{B}$ des éléments $\vee A$, où A est une partie de B' majorée dans $(E, \propto)$, est aussi f-compatible. $\bar{B}$ est saturé par induction, car $z \propto \vee A$ entraîne

$$z = \vee \{ x \wedge z \mid x \in A \} \in \bar{B}, \quad \text{si} \quad A \subset B'.$$

De plus $\bar{B}$ est saturé par agrégation, d'après l'égalité:

$$\vee_{i \in I} (\vee A_i) = \vee \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right).$$

Ainsi $\bar{B}$ est f-saturé. Enfin $\bar{B}$ est évidemment contenu dans toute partie f-saturée contenant B. ∇

DÉFINITION. *La partie $\bar{B}$ associée à B dans la proposition précédente est appelée partie f-saturée engendrée par B. On dit que f est complète si toute partie f-complète admet un agrégat dans $(E, \propto)$.*

Si f est complète, toute partie f-compatible B telle que $f(B)$ ait un agrégat dans $(E', \propto)$ admet un agrégat dans $(E, \propto)$, car la partie f-saturée $\bar{B}$ engendrée par B admet un agrégat, lequel est aussi un agrégat de B dans $(E, \propto)$.

THÉORÈME. *Soit F l'ensemble des parties f-complètes. $(F, \subset)$ est une classe locale pour la relation d'inclusion; l'application $g : B \to \vee f(B)$, si $B \in F$, définit une application locale complète de $(F, \subset)$ vers $(E', \propto)$;*

l'application j associant à $x \in E$ l'ensemble de ses minorants dans $(E, \propto)$ définit un isomorphisme de $(E, \propto)$ sur une sous-classe locale de $(F, \subset)$, et l'on a $\underline{f} = gj$.

Δ. 1° Toute intersection de parties f-complètes étant f-complète,
1 F définit une sous-classe inductive du treillis des parties de E, de sorte que $(F, \subset)$ est inductive. Comme une famille $(B_i)_{i \in I}$ d'éléments de F admet son intersection ensembliste pour intersection dans $(F, \subset)$, tandis que son agrégat est la partie f-saturée $\bar{B}$ engendrée par sa réunion ensembliste B si $f(B)$ est majoré, on voit que $(F, \subset)$ est une classe locale.

2° Si x est un élément de E, on a

$$j(x) \in F \quad \text{et} \quad g(j(x)) = \vee f(j(x)) = f(x).$$

Soit B un élément de F contenu dans $j(x)$; comme B est majoré par x, il admet un agrégat b et, B étant saturé par agrégation, $b \in B$. Il s'ensuit $B = j(b) \in j(E)$, et $j(E)$ est saturé par induction dans $(F, \subset)$. Comme $x \propto y$ ssi $j(x) \subset j(y)$, la bijection j définit un isomorphisme de $(E, \propto)$ sur la sous-classe locale $(j(E), \subset)$ de $(F, \subset)$.

3° Si $(B_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de F majorée dans $(F, \subset)$ et si B est sa réunion ensembliste, on a

$$g(\bigvee_{i \in I} B_i) = \vee f(\bar{B}) = \vee f(B) = \vee(\bigcup_{i \in I} f(B_i)) = \bigvee_{i \in I}(\vee f(B_i)) = \bigvee_{i \in I} g(B_i).$$

4° Soient B et B' deux éléments de F tels que la réunion de B et B' soit une partie f-compatible. Alors

$$\begin{aligned} g(B) \wedge g(B') &= (\vee f(B)) \wedge (\vee f(B')) \\ &= \vee\{ f(x) \wedge f(x') \mid x \in B,\ x' \in B' \} \\ &= \vee\{ f(x \wedge x') \mid x \in B,\ x' \in B' \} \\ &= \vee f(B \cap B') = g(B \cap B'), \end{aligned}$$

car $B \cap B'$ est formé des éléments $x \wedge x'$, où $x \in B$ et $x' \in B'$. Cette formule est valable en particulier lorsque B et B' sont contenus dans un même élément de F.

5° Montrons que B et B' sont g-compatibles ssi leur réunion ensembliste A est une partie f-compatible. La condition est suffisante d'après la partie 4. Inversement supposons que B et B' soient g-compatibles et soient x et x' des éléments de A. Si x et x' appartiennent à B

(resp. à B'), ils sont f-compatibles par hypothèse. Si $x \in B$ et $x' \in B'$, alors $j(x)$ et $j(x')$ sont g-compatibles, puisqu'ils sont majorés par B et B' dans $(F, \subset)$. On en déduit

$$\begin{aligned} f(x) \wedge f(x') &= g(j(x)) \wedge g(j(x')) = g(j(x) \cap j(x')) \\ &= g(j(x \wedge x')) = f(x \wedge x'), \end{aligned}$$

c'est-à-dire x et x' sont f-compatibles.

6° Soit M une partie g-compatible telle que $\vee g(M)$ existe. L'ensemble D réunion de M est f-compatible, en vertu de la partie 5. Par suite M admet $\bar{D}$ pour agrégat dans $(F, \subset)$. Ceci prouve que g définit une application locale complète de $(F, \subset)$ vers (E', α). ∇ 1+

2. Complétion d'un foncteur local.

DÉFINITION. On appelle *catégorie locale* une catégorie inductive [1] $(C^{\cdot}, \alpha)$ telle que (C, α) soit une classe locale. On appelle *foncteur local* (resp. *local strict*) un triplet $\bar{q} = ((C^{\cdot}, \alpha), \underline{q}, (G^{\cdot}, \alpha))$, où $(C^{\cdot}, \alpha)$ et $(G^{\cdot}, \alpha)$ sont des catégories locales, où $(C^{\cdot}, \underline{q}, G^{\cdot})$ est un foncteur et où $q = ((C, \alpha), \underline{q}, (G, \alpha))$ est une application locale (resp. locale stricte). 2

On montre facilement les résultats suivants, que nous n'utiliserons pas: Si $(C^{\cdot}, \alpha)$ est une catégorie inductive et si $(C_o^{\cdot}, \alpha)$ est une classe locale, $(C^{\cdot}, \alpha)$ est une catégorie locale. Un foncteur ordonné

$$\bar{q} = ((C^{\cdot}, \alpha), \underline{q}, (G^{\cdot}, \alpha))$$

entre catégories locales est local (resp. local strict) ssi sa restriction

$$q_o = ((C_o^{\cdot}, \alpha), \underline{q_o}, (G_o^{\cdot}, \alpha))$$

aux classes ordonnées des unités est une application locale (resp. locale stricte).

Les foncteurs locaux entre catégories locales $(C^{\cdot}, \alpha)$ telles que C appartienne à un univers $\mathfrak{U}$ forment une catégorie admettant un foncteur d'oubli vers la catégorie des applications associée à $\mathfrak{U}$. Les sous-structures de la catégorie locale $(C^{\cdot}, \alpha)$ sont appelées ses *sous-catégories locales*. Ce sont les couples $(K^{\cdot}, \alpha)$ tels que $K^{\cdot}$ soit une sous-catégorie de $C^{\cdot}$ et que (K, α) soit une sous-classe locale de (C, α).

HYPOTHÈSE. On suppose que $\bar{q} = ((C^{\cdot}, \alpha), \underline{q}, (G^{\cdot}, \alpha))$ est un foncteur local et soit q l'application locale sous-jacente. On désigne par a et b les applications locales de $(G,\propto)$ vers $(G_0^{\cdot},\propto)$ définies par les applications source et but de $G^{\cdot}$, par q_0 la restriction de q aux unités.

DEFINITION. *Une partie B de G est dite compatible dans $(G^{\cdot},\propto)$ si B est a-compatible et b-compatible; $\bar{q}$ est dit complet (resp. relativement*
1 *complet) si toute partie q-complète (resp. q-complète B telle que $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient majorés) admet un agrégat dans $(G,\propto)$.*

PROPOSITION. *Soit B une partie de G et considérons les conditions:*

1° B est q-compatible et $q(B)$ est compatible dans $(C^{\cdot},\propto)$.

2° B est compatible dans $(G^{\cdot},\propto)$, et $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ sont q-compatibles.

La condition 2 entraîne 1. Si de plus q est une application locale stricte, la condition 2 est aussi conséquence de 1.

Δ. Soient y et y' deux éléments de B.

1° Supposons la condition 2 vérifiée et soient $z = q(y \wedge y')$, $z' = q(y) \wedge q(y')$. On a $z \propto z'$ et les relations:

$$\alpha(z) \propto \alpha(z') \propto \alpha(q(y)) \wedge \alpha(q(y')) = q(\alpha(y) \wedge \alpha(y')) = q(\alpha(y \wedge y')) = \alpha(z)$$

prouvent que $\alpha(z) = \alpha(z') = \alpha(q(y)) \wedge \alpha(q(y'))$. De même

$$\beta(z) = \beta(z') = \beta(q(y)) \wedge \beta(q(y')), \quad \text{d'où } z = z',$$

car $(C^{\cdot},\propto)$ est une catégorie ordonnée. Donc y et y' sont q-compatibles, et $q(y)$ et $q(y')$ sont compatibles dans $(C^{\cdot},\propto)$.

2° Supposons la condition 1 satisfaite. Posons $e = \alpha(y \wedge y')$ et $e' = \alpha(y) \wedge \alpha(y')$. Alors e est majoré par e' et l'on trouve:

$$q(e) \propto q(e') = q(\alpha(y) \wedge \alpha(y')) \propto q(\alpha(y)) \wedge q(\alpha(y')) =$$
$$= \alpha(q(y) \wedge q(y')) = \alpha(q(y \wedge y')) = q(e);$$

par suite $q(e) = q(e') = q(\alpha(y)) \wedge q(\alpha(y'))$ et, si q est stricte, $e = e'$. Il s'ensuit que B est a-compatible et que $\alpha(B)$ est q-compatible. De même B est b-compatible et $\beta(B)$ est q-compatible. ∇

COROLLAIRE. *Si q est un foncteur local strict et si B est une partie q-complète, B est compatible dans $(G^{\cdot},\propto)$ et $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ sont q-compatibles.*

Δ. $q(B)$ étant majoré, il est compatible dans $(C^{\cdot}, \propto)$. ∇

DÉFINITION. *On appelle catégorie ordonnée fortement régulière une catégorie ordonnée régulière* [1] $(G^{\cdot}, \propto)$ *vérifiant la condition:* 1

(P) Si f *est un élément de* G *et* E *une partie de* $G_0^{\cdot}$ *telle que* $\alpha(f) = \vee E$ *(resp. que* $\beta(f) = \vee E$*), on a* $f = \vee(fE)$ *(resp.* $f = \vee(Ef)$*).*

(On désigne par fE *l'ensemble des pseudoproduits* fe'*, où* $e' \in E$*).*

Comme exemples de catégories ordonnées fortement régulières, citons les groupoïdes inductifs [3], c'est-à-dire les catégories inductives $(G^{\cdot}, \propto)$ telles que $G^{\cdot}$ soit un groupoïde et que, si $x \in G$ et si e est une unité majorée par $\alpha(x)$, alors il existe un et un seul élément x' plus petit que x et ayant e pour source. Dans ce cas, x' est dit *élément induit par* x *sur* e. On montre qu'un groupoïde inductif est ordonné (i.e. que $y \propto x$ entraîne $y^{-1} \propto x^{-1}$) et que $e' \in G_0^{\cdot}$ si $e' \propto e$, où e est une unité.

Soit $(H, \subset)$ la classe locale formée des classes q-complètes, et soit Q l'application $B \to \vee q(B)$ de H dans C qui définit (paragraphe 1) une application locale de $(H, \subset)$ vers $(C, \propto)$. Soit j l'application de G sur une partie de H associant à x l'ensemble de ses minorants dans $(G, \propto)$. Comme dans le paragraphe 1, nous notons $\overline{B}$ la partie q-saturée engendrée par une partie q-compatible B.

THÉORÈME (de complétion d'un foncteur local). *Supposons que* $\overline{q}$ *soit un foncteur local strict et* $(G^{\cdot}, \propto)$ *une catégorie ordonnée fortement régulière. Alors, avec les notations précédentes,* $(H^{\odot}, \subset)$ *est une catégorie locale régulière, la loi de composition étant définie par:*

$$(B', B) \to B' \odot B = \overline{B'.B} \quad ssi \quad \overline{\alpha(B')} = \overline{\beta(B)}.$$

Q *définit un foncteur local complet* $\overline{Q}$ *de* $(H^{\odot}, \subset)$ *vers* $(C^{\cdot}, \propto)$ *et* j *définit un isomorphisme de* $(G^{\cdot}, \propto)$ *sur une sous-catégorie locale de* $(H^{\odot}, \subset)$.

Δ. 1° Si B et B' appartiennent à H, alors $B'.B$ est q-compatible. En effet, soient $x'.x$ et $y'.y$ des éléments de $B'.B$, où x et y appartiennent à B, x' et y' à B'. Comme

$$\alpha(y' \wedge x') = \alpha(y') \wedge \alpha(x') = \beta(y) \wedge \beta(x) = \beta(y \wedge x),$$

le composé $z' = (y' \wedge x').(y \wedge x)$ est défini, et $z' \propto z = y'.y \wedge x'.x$. De

$$\alpha(z')\propto\alpha(z)\propto\alpha(y)\wedge\alpha(x)=\alpha(y\wedge x)=\alpha(z'),$$

on déduit $\alpha(z')=\alpha(z)$; de même $\beta(z')=\beta(z)$, d'où $z=z'$. De plus

$$q(z)=q(y'\wedge x').\,q(y\wedge x)=(q(y')\wedge q(x')).(q(y)\wedge q(x))=$$
$$=(q(y').\,q(y))\wedge(q(x').\,q(x))=q(y'.\,y)\wedge q(x'.\,x).$$

Il en résulte que $B'.B$ engendre une partie q-saturée $\overline{B'.B}$; celle-ci est q-complète, $q(\overline{B'.B})$ étant majoré par le pseudoproduit $(\vee q(B'))(\vee q(B))$. Remarquons que, $(G^{\cdot},\propto)$ étant régulière, $B'.B$ est saturé par induction.

2° Soit B un élément de H. La partie $\alpha(B)$ étant q-compatible d'après le corollaire précédent, elle engendre une partie q-complète $\overline{\alpha(B)}$ et $\overline{\alpha(B)}$ est contenu dans $X=\overline{\alpha(\overline{\alpha(B)})}$. La partie $\alpha(B)$ est saturée par induction dans $(G_0^{\cdot},\propto)$ (mais non dans $(G,\propto)$), puisque les relations $x\in B$, $e\in G^{\cdot}$ et $e\propto\alpha(x)$ entraînent $e=\alpha(xe)$, où $xe\in B$. Si D est contenu dans $\overline{\alpha(B)}$ et majoré, on trouve

$$\alpha(\vee D)=\vee\alpha(D)\in\overline{\alpha(B)},$$

de sorte que $\alpha(\overline{\alpha(B)})$, et a fortiori X, sont contenus dans $\overline{\alpha(B)}$, c'est-à-dire $X=\overline{\alpha(B)}$. Ainsi l'application $B\to\overline{\alpha(B)}$ est une rétraction. D'une façon analogue, $B\to\overline{\beta(B)}$ est une rétraction. On voit que $B=\bar{A}$ a pour conséquence $\overline{\alpha(B)}=\overline{\alpha(\bar{A})}=\overline{\alpha(A)}$.

3° Notons $B'\odot B$ l'élément $\overline{B'.B}$ de H lorsque B et B' sont des éléments de H tels que $\overline{\alpha(B')}=\overline{\beta(B)}$. Supposons qu'il en soit ainsi, et posons $C=B'\odot B$. Etant donné que $\alpha(B'.B)$ est contenu dans $\alpha(B)$, on trouve

$$\overline{\alpha(C)}=\overline{\alpha(\overline{B'.B})}=\overline{\alpha(B'.B)}\subset\overline{\alpha(B)}.$$

Pour tout élément x de B, on a $\beta(x)=\bigvee_{i\in I}\alpha(y_i)$, où $y_i\in B'$. En vertu de la condition (P), $x=\bigvee_{i\in I}\alpha(y_i)x$. Il s'ensuit $\alpha(x)=\bigvee_{i\in I}\alpha(y_ix)$, où $y_ix\in B'B=B'.B$. Donc $\alpha(B)$ est contenu dans $\overline{\alpha(C)}$ et $\overline{\alpha(B)}=\overline{\alpha(C)}$. On obtient de même $\overline{\beta(B)}=\overline{\beta(C)}$.

3° Si le composé $D=B''\odot(B'\odot B)$ est défini, la condition (P) entraîne $D=\overline{B''.B'.B}$, car

$$z.\bigvee_{i\in I}(y_i.\,x_i)=\bigvee_{i\in I}z_i.\,y_i.\,x_i,\quad \text{où}\quad z_i=z\beta(y_i)\in B'',$$

si $y_i\in B'$, $z\in B''$ et $x_i\in B$. L'associativité en résulte, $\overline{B''.B'.B}$ étant aussi égal à $(B''\odot B')\odot B$. Donc $H^{\odot}$ est une catégorie. Elle admet pour classe d'objets l'ensemble des classes q_o-complètes, car l'application $\overline{\alpha(B)} \to \alpha(\overline{\alpha(B)})$ est une bijection. De plus $j(y)\odot j(x)$ est défini ssi $\alpha(y)=\beta(x)$, et dans ce cas il est égal à $j(y.x)$.

4° Soient B et B' des éléments de H tels que $B'\subset B$, $\overline{\alpha(B)} = \overline{\alpha(B')}$ et $\overline{\beta(B)} = \overline{\beta(B')}$. Si $y\in B$, on a $\alpha(y) = \bigvee_{i\in I}\alpha(y_i)$, $\beta(y) = \bigvee_{j\in J}\beta(y'_j)$, où $y_i\in B'$, $y'_j\in B'$; d'où $y = \bigvee_{i\in I}(y\wedge y_i)\vee\bigvee_{j\in J}(y\wedge y'_j)$, et $B=B'$.

5° Soient B et B' des éléments de H contenus dans $B''\in H$. Alors $B\cap B' = \{\, y\wedge y' \mid y\in B,\ y'\in B'\,\}$. Si $x = \bigvee_{i\in I}x_i = \bigvee_{j\in J}x'_j$, avec $x_i\propto\alpha(y_i)$, $x'_j\propto\alpha(y'_j)$, $y_i\in B$, $y'_j\in B'$, on a $x = \bigvee_{m\in(I\times J)}z_m$, où

$$z_{(i,j)} = x_i\wedge x'_j \propto \alpha(y_i)\wedge\alpha(y'_j) = \alpha(y_i\wedge y'_j)\in\alpha(B\cap B'),$$

de sorte que $\overline{\alpha(B\cap B')} = \overline{\alpha(B)}\cap\overline{\alpha(B')}$. Même résultat pour β.

6° Si B_i est contenu dans B pour tout $i\in I$ et si A est la réunion de $(B_i)_{i\in I}$, de l'égalité $\overline{A} = \bigvee_{i\in I}B_i$, on déduit

$$\overline{\alpha(\bigvee_{i\in I}B_i)} = \overline{\alpha(\overline{A})} = \overline{\bigcup_{i\in I}\overline{\alpha(B_i)}} = \bigvee_{i\in I}\overline{\alpha(B_i)}.$$

Par suite $(H^{\odot},\subset)$ est une catégorie locale. 1

7° Soient B un élément de H et E une unité de $H^{\odot}$ contenue dans $\overline{\alpha(B)}$. Si B' est l'ensemble des éléments y de B tels que $\alpha(y)\in E$, on a $\overline{B'} = B'$ et $\overline{\alpha(B')} = E$, de sorte que le pseudoproduit BE est identique à B' et admet E pour unité à droite. De même $E'B$ admet E' pour unité à gauche, si $E'\in H^{\odot}_o$ et $E'\subset\overline{\beta(B)}$.

8° Supposons B'' contenu dans $B'\odot B$, où $B''\in H$. Notons D (resp. D') l'ensemble des $y\in B$ (resp. $y'\in B'$) tels qu'il existe $y'\in B'$ (resp. $y\in B$) avec $y'.y\in B''$; on montre que $B'' = \overline{D'}\odot\overline{D}$. Ainsi $(H^{\odot},\subset)$ est une catégorie locale régulière , et $\overline{Q} = ((C^{\cdot},\propto), \underline{Q}, (H^{\odot},\subset))$ est un foncteur local. ∇

DÉFINITION. *Avec les notations du théorème, on appelle* $(H^{\odot},\subset)$ *la* $\overline{q}$-*complétion de* $(G^{\cdot},\propto)$ *et* $\overline{Q}$ *le foncteur local complété de* $\overline{q}$.

REMARQUE. On peut montrer que le foncteur local complété de $\overline{q}$ résoud le problème du prolongement «universel» de $\overline{q}$ en un foncteur local complet 2+
de même but. En fait la complétion d'une application locale est un cas particulier de prolongement universel d'un foncteur p en un foncteur P de même but, de sorte que, si F est un foncteur (vers la source de P) sec-

tion partielle de P et si $P.F$ admet une limite inductive, alors F admet une limite inductive dans P. Si de plus p est sous-jacent à un foncteur double, on peut demander que le prolongement obtenu soit aussi sous-ja-
1 cent à un foncteur double de même but. Le théorème de complétion d'un foncteur local donne une solution de ce problème dans le cas où le foncteur double est associé à un foncteur local. (On sait [3] qu'à une catégorie ordonnée est canoniquement associée une catégorie double.) Le problème général pourrait être abordé à l'aide de méthodes analogues à celles qui sont employées dans [5].

DÉFINITION. *On dit que le foncteur local* $\bar{q}$ *est suprarégulier si*

$$q(xe) = q(x)q(e) \quad \text{et} \quad q(e'x) = q(e')q(x)$$

lorsque $e \propto \alpha(x)$ *et* $e' \propto \beta(x)$.

PROPOSITION. *Si l'on suppose de plus dans le théorème que* $\bar{q}$ *est suprarégulier et fidèle, alors* $\bar{Q}$ *est fidèle.*

Δ. 1° Montrons que, si x et x' sont deux éléments de G tels que $\alpha(x)$ et $\alpha(x')$ soient q-compatibles ainsi que $\beta(x)$ et $\beta(x')$, et que $q(x)$ et $q(x')$ soient majorés par un z, alors x et x' sont q-compatibles. En effet, posons

$$e = \alpha(x) \wedge \alpha(x') \quad \text{et} \quad e' = \beta(x) \wedge \beta(x').$$

Le pseudoproduit $z' = q(e')zq(e)$ est l'intersection de $q(x)$ et $q(x')$ et il admet $q(e)$ pour source et $q(e')$ pour but; par suite z' est aussi égal à $q(e')q(x)q(e)$. Il s'ensuit que $q(xe) = q(x)q(e)$ majore z', de sorte que, q étant une application ordonnée stricte, e' est majoré par $\beta(xe)$. On en déduit

$$q(e'xe) = q(e')q(xe) = q(e')q(x)q(e) = z',$$
$$\beta(e'xe) = e' \quad \text{et} \quad \alpha(e'xe) = e.$$

De même $e'x'e$ appartient à $e'.G.e$ et $q(e'x'e) = z'$. Ceci entraîne $e'xe = e'x'e$, car $\bar{q}$ est fidèle. Donc

$$e'xe = x \wedge x' \in e'.G.e \quad \text{et} \quad q(x \wedge x') = q(x) \wedge q(x').$$

2° Soient B et B' deux éléments de H de source E, de but E' et tels que $\bar{Q}(B) = \bar{Q}(B')$. Si x est un élément de B et x' un élément de B', d'aprés la partie 1, x et x' sont q-compatibles. Il en résulte que la réunion A de B et B' est q-compatible; la partie q-saturée $\overline{A}$ qu'elle engendre est un élément de H majorant B et B', de source E et de but E'. Donc, $(H^{\odot}, \subset)$ étant une catégorie ordonnée, $B = \overline{A} = B'$. Ainsi $\overline{Q}$ est fidèle. ∇

COROLLAIRE. *Si les conditions de la proposition sont vérifiées, l'application* $\delta : B \to (\overline{\beta(B)}, Q(B), \overline{\alpha(B)})$, *où* $B \in H$, *est une bijection de* H *sur l'ensemble* H' *des triplets* (E', z, E), *où* E *et* E' *sont des unités de* $H^{\odot}$ *et* $z \in \overline{Q}(E').C.\overline{Q}(E)$, *tels que, si* A *est l'ensemble des* x *appartenant à* $E'.G.E$ *vérifiant* $q(x) \propto z$, *alors* $\overline{\alpha(A)} = E$ *et* $\overline{\beta(A)} = E'$.

Δ. Si B appartient à H, $\delta(B)$ appartient évidemment à H'. Soit $h = (E', z, E) \in H'$; la partie 1 de la démonstration précédente prouve que A est q-compatible; par suite $\overline{A} \in H$ et $h = \delta(\overline{A})$. ∇

3. Élargissement complet.

HYPOTHÈSE. Soient $p = (C^{\cdot}, \underline{p}, K^{\cdot})$ un foncteur fidèle, $K^{\cdot}_{\gamma}$ le groupoïde des inversibles de $K^{\cdot}$ et p_{γ} le foncteur de $K^{\cdot}_{\gamma}$ vers $C^{\cdot}_{\gamma}$ restriction de p.

On notera $T^{\cdot}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets

$$(x', x, y), \quad \text{où} \quad y \in K, \quad x' \in C^{\cdot}_{\gamma}.\beta(p(y)), \quad x \in C^{\cdot}_{\gamma}.\alpha(p(y)),$$

la loi de composition étant définie par:

$$(\hat{x}', \hat{x}, \hat{y}).(x', x, y) = (\hat{x}', x, \hat{y}.y) \text{ si, et seulement si,}$$
$$\alpha(\hat{y}) = \beta(y) \quad \text{et} \quad x' = \hat{x}.$$

Soit r la relation sur T définie par:

$$(x', x, y) \sim (x'.p(z'), x.p(z), z'^{-1}.y.z), \text{ si}$$
$$z \in \alpha(y).K^{\cdot}_{\gamma} \quad \text{et} \quad z' \in \beta(y).K^{\cdot}_{\gamma}.$$

PROPOSITION. *1° r est une relation d'équivalence bicompatible sur $T^{\cdot}$, et il existe une catégorie $L^{\cdot}$ quotient strict de $T^{\cdot}$ par r.*

2° L'application $y \to (p(\beta(y)), p(\alpha(y)), y) \bmod r$ *définit un foncteur k de $K^{\cdot}$ sur une sous-catégorie $K'^{\cdot}$ de $L^{\cdot}$.*

3° $K'^{\cdot}$ est une catégorie quotient de $K^{\cdot}$ par le sous-groupoïde de $K^{\cdot}$ noyau de p_{γ}. En particulier k est un isomorphisme ssi p_{γ} est bien fidèle. 1

4° L'application $(x', x, y) \bmod r \to x'.p(y).x^{-1}$ définit un foncteur fidèle P de $L^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ et P_γ est bien fidèle.

2 Cette proposition est démontrée dans [2] (chapitre V), où l'on indique quel problème universel résoud P.

$L^{\cdot}_o$ s'identifie à la classe quotient de l'ensemble des couples (x, s) tels que $s \in K^{\cdot}_o$ et $x \in C^{\cdot}_\gamma . p(s)$ par la relation d'équivalence:

$$(x, s) \sim (x.p(y), s') \text{ s'il existe } y \in s.K^{\cdot}_\gamma.s'.$$

DÉFINITION. *Avec les notations de la proposition, on appelle P l'élargissement de p.*

Soit $\overline{p} = ((C^{\cdot}, \alpha), \underline{p}, (K^{\cdot}, \alpha))$ un foncteur local. Notons $\overline{p}_\gamma$ le foncteur ordonné $((C^{\cdot}_\gamma, \alpha), \underline{p}\,\iota, (K^{\cdot}_\gamma, \alpha))$ restriction de $\overline{p}$. On obtient une catégorie ordonnée $(T^{\cdot}, \alpha)$ en munissant T de la relation d'ordre:

$$(\hat{x}', \hat{x}, \hat{y})\, \alpha\, (x', x, y) \quad \text{ssi} \quad \hat{x}\, \alpha\, x, \quad \hat{x}'\, \alpha\, x', \quad \hat{y}\, \alpha\, y.$$

THÉORÈME (d'élargissement local). *Avec les notations précédentes, on suppose que $\overline{p}$ est un foncteur local strict, que $(K^{\cdot}, \alpha)$ est fortement régulière, que $(C^{\cdot}_\gamma, \alpha)$ et $(K^{\cdot}_\gamma, \alpha)$ sont des groupoïdes inductifs et que $\overline{p}_\gamma$ est relativement complet. Alors il existe une catégorie locale $(L^{\cdot}, \alpha)$ fortement régulière, où α est la relation sur L quotient par r de la relation d'ordre α sur T, et P définit un foncteur local strict*

$$\overline{P} = ((C^{\cdot}, \alpha), \underline{P}, (L^{\cdot}, \alpha)).$$

Δ. 1° Soient $t = (x', x, y) \in T$ et $u = t \bmod r$. Si $u' \in L$, on a $u'\, \alpha\, u$ ssi il existe $t' \in T$ tel que $t'\, \alpha\, t$ et $u' = t' \bmod r$. En effet l'existence d'un tel t' entraîne évidemment $u'\, \alpha\, u$. Inversement soit $u'\, \alpha\, u$. Il existe des représentants $\hat{t} = (\hat{x}', \hat{x}, \hat{y})$ de u et $\hat{t}' = (\hat{x}''', \hat{x}'', \hat{y}')$ de u' tels que $\hat{t}'\, \alpha\, \hat{t}$. Par définition, il existe des inversibles z et z' tels que

$$\hat{y} = z'^{-1}.y.z, \quad x'.p(z') = \hat{x}' \quad \text{et} \quad x.p(z) = \hat{x}.$$

Comme $(H^{\cdot}_\gamma, \alpha)$ est un groupoïde inductif, il existe un unique élément $\hat{z}'$ induit par z' sur $\beta(\hat{y})$ et un élément $\hat{z}$ induit par z sur $\alpha(\hat{y})$. Si l'on pose

$$y' = \hat{z}'.\hat{y}'.\hat{z}^{-1}, \quad x''' = \hat{x}'''.p(\hat{z}')^{-1}, \quad x'' = \hat{x}''.p(\hat{z})^{-1},$$

le triplet (x''', x'', y') est un représentant $t' \in u'$ tel que $t'\, \alpha\, t$. L'application associant t' à u' est une bijection sur l'ensemble des minorants de t dans $(T, \propto)$ de l'ensemble des minorants de u dans $(L, \propto)$.

2° On en déduit aisément qu'il existe un ensemble ordonné $(L, \propto)$ quotient de $(T, \propto)$ par r. Montrons qu'une famille $\xi = (u_i)_{i \in I}$ d'éléments majorés de L admet un agrégat dans $(L, \propto)$. Soient

$$u = (x', x, y) \operatorname{mod} r \quad \text{et} \quad \hat{u} = (\hat{x}', \hat{x}, \hat{y}) \operatorname{mod} r$$

deux majorants de ξ. D'après la partie 1, pour tout i il existe des représentants $t_i = (x'_i, x_i, y_i)$ et $\hat{t}_i = (\hat{x}'_i, \hat{x}_i, \hat{y}_i)$ de u_i tels que

$$t_i \propto (x', x, y) \quad \text{et} \quad \hat{t}_i \propto (\hat{x}', \hat{x}, \hat{y}).$$

Il existe des agrégats $\bar{t} = (\bar{x}', \bar{x}, \bar{y})$ de $(t_i)_{i \in I}$ et $\bar{t}' = (\bar{x}''', \bar{x}'', \bar{y}')$ de $(\hat{t}_i)_{i \in I}$; il existe aussi des inversibles z_i et z'_i vérifiant

$$\hat{y}_i = z_i'^{-1} . y_i . z_i, \quad x'_i . p(z'_i) = \hat{x}'_i \quad \text{et} \quad x_i . p(z_i) = \hat{x}_i .$$

Les familles $(\alpha(z_i))_{i \in I}$ et $(\beta(z_i))_{i \in I}$ admettent $\alpha(\bar{y}')$ et $\alpha(\bar{y})$ respectivement pour agrégats. Comme $p(z_i) = x_i^{-1} . \hat{x}_i$ est majoré par $x^{-1} \hat{x}$, la famille $(p(z_i))_{i \in I}$ admet un agrégat. Le foncteur local $\bar{p}_\gamma$ étant relativement complet, il en résulte que $(z_i)_{i \in I}$ admet un agrégat z dans $(K^{\cdot}_\gamma, \propto)$; de même $(z'_i)_{i \in I}$ a un agrégat z' dans $(K^{\cdot}_\gamma, \propto)$; le composé $\bar{y} . z$ est défini; les inversibles $\bar{x} . p(z)$ et $\bar{x}''$ de $C^{\cdot}$ sont égaux, car ils sont majorés par $\hat{x}$ et ont même source; d'une manière analogue $\bar{x}' . p(z') = \bar{x}'''$. Enfin $z' . \bar{y}' = \bar{y} . z$, ces deux éléments étant l'agrégat de la famille $(y_i . z_i)_{i \in I}$ dans $(K, \propto)$. Il s'ensuit $\bar{t} \sim \bar{t}' \operatorname{mod} r$, de sorte que $\bar{u} = \bar{t} \operatorname{mod} r$ est l'agrégat de $(u_i)_{i \in I}$ dans $(L, \propto)$. Ainsi $(L, \propto)$ est une classe inductive. La démonstration du théorème s'achève alors sans difficultés. ∇

REMARQUE. Les démonstrations qui sont seulement esquissées ici seront données en détail dans [6].

Le théorème précédent montre que $\bar{P}$ remplit les conditions du théorème de complétion d'un foncteur local. On peut donc poser:

DÉFINITION. *Avec les hypothèses du théorème la $\bar{P}$-complétion de $(L^{\cdot}, \propto)$ est appelée élargissement p-complet de $(K^{\cdot}, \propto)$ au-dessus de $(C^{\cdot}, \propto)$.*

EXEMPLES. 1° Si $p = p_\gamma$ et si p est un foncteur d'hypermorphismes, on retrouve le théorème d'élargissement complet d'une espèce de structures 1 locales [4].

2° Prenons pour p le foncteur d'oubli vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications de la catégorie Δ^r des applications r fois différentiables
1 au sens de [7] entre ouverts d'espaces vectoriels topologiques localement convexes (resp. des applications r fois Fréchet-différentiables entre ouverts d'espaces de Banach). Si l'on munit $\mathfrak{M}$ et Δ^r des relations d'ordre «restrictions», p est sous-jacent à un foncteur local $\bar{p}$ vérifiant les conditions du théorème d'élargissement local. Donc (Δ^r, α) admet un élargissement p-complet $(\mathfrak{D}^r, \alpha)$ au-dessus de $(\mathfrak{M}, \alpha)$. Celui-ci est la catégorie des applications r fois différentiables entre variétés r fois différentiables modelées sur un espace localement convexe (resp. sur un espace de Banach). La construction de cet élargissement complet est équivalente à la construction usuelle: Si B est une partie $\bar{p}$-complète unité de $\mathfrak{D}^r$, l'ensemble des couples (x, s) tels que $(x, x, s) \bmod r \in B$ forme un atlas complet V compatible avec le pseudogroupe des difféomorphismes appartenant à Δ^r, et la donnée de cet atlas détermine entièrement B. Comme $\bar{p}$ est fidèle et suprarégulier, P est fidèle (dernière proposition paragraphe 2), de sorte qu'une application différentiable s'identifie à un triplet (V', h, V), où V et V' sont des atlas complets et où h est une application entre les ensembles sous-jacents à V et à V' «compatible» avec V et V', i.e. telle que $x'^{-1} h x$ définisse une application r fois différentiable d'un ouvert de s vers s', pour tout $(x, s) \in V$ et $(x', s') \in V'$.
2+

Bibliographie.

0. C. EHRESMANN, *Algèbre $1^{ère}$ partie*, C. D. U., Paris (1968).

1. C. EHRESMANN, Catégories structurées généralisées, *Cahiers de Top. et Géo. diff.* X, 1, Dunod (1968).

2. C. EHRESMANN, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris (1965).

3. C. EHRESMANN, Catégories structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 80, Paris (1963), 349-426.

4. C. EHRESMANN, Espèces de structures sous-inductives, *Cahiers Top. et Géo. diff.* VII, Paris (1965).

5. C. EHRESMANN, *Prolongements universels d'un foncteur par adjonction de limites*, Dissertationes Math. 64, Varsovie (1969).

6. M.-C. LEBLOND, Catégories de foncteurs ordonnés (à paraître dans *Esquisses Mathématiques*).

7. A. BASTIANI, Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, *Jour. d'Analyse Math. Jérusalem* XIII (1964), 1-114.

Département de Mathématiques
Tours 45 - 55
Faculté des Sciences
9 Quai Saint-Bernard
75 - PARIS (5^e).

COMMENTS ON PART II-I

by Andrée CHARLES EHRESMANN

INTRODUCTION

The general comments of Part II-1 indicate:

- some necessary corrections, precisions, omitted proofs /53/ ;
- motivating problems of differential geometry (studied in Part I), and the evolution from the concrete course /125/ to the abstract setting of /85/, triggered by the categorical formulation of /47/ ;
- connections with other literature and further developments, specially the recent expansion of the theory of locales and of their sheaves (Comments 140.1, 321.1), that proves Charles's foresight when he promoted the «topologies without points»;
- the universality of most constructions (227.1, 306.2, 325.2) and the relations with internal structures (164.2, 262.1).

The following Synopsis gives a motivated summary of the main results with a modem presentation, to use as a guide for reading the articles and comments.

In Part II-1, the terminology is more standard and informal than later on. Here are some peculiar notations, generally taken back in the corresponding comments :

1. The domain and codomain of a morphism f in a category are called its *source* and its *target*, denoted by $\alpha(f)$ and $\beta(f)$.

2. If a subcategory C of a category $\hat{C}$ acts on a set S_0, then S_0 is called a *species of structures over* $\hat{C}$ and, in /55, 85, 126/, it is denoted by the triple $(\hat{C}, p, S)$, where $p: S \to C$ is the associated discrete fibration. For subpreinductive species of structures, it becomes $<\hat{C}, p, S>$.

3. An ordered set always means a partially ordered set (or *poset*); *Ord* is the category of posets with maps preserving the order. Let A be a poset and B a subset.

. A least upper bound of B is called its *aggregate* and written $\cup B$ (except in /110/). A greatest lower bound of B is called its *intersection* and written $\cap B$. In the comments we either agree with Charles, or use the commoner terms *join* and *meet*, and the symbols $\vee B$ and $\wedge B$.

. For each $a \in A$, its downward section $\{a' \in A \mid a' < a\}$ is denoted by $a^{>}$. The subset B is said *bounded* (instead of upper bounded) if it is included in some $a^{>}$; then, if c is a join of B in the poset $a^{>}$, this c is called an *a-aggregate*, or a *sub-aggregate, of B in A*, in symbol $\mathring{\cup} B$.

4. Let A and A' be posets. A map $f: A \to A'$ is :

. a *strict ordered map* if the restriction of f to $a^{>}$ is 1-1 into $f(a)^{>}$ for each $a \in A$; it is an *etale map* if this restriction is 1-1 and onto,

. a *subinductive map* if f preserves meets of bounded finite subsets,

. an *inductive map* if f preserves meets of bounded finite subsets and all sub-aggregates. (These terms are modified in Part III.)

The comments adopt a standard terminology, e. g. Mac Lane's [64], on categories. They are written in English, except for the words in French or German to be replaced in the original papers. I hope this may widen the audience of Charles's work, in spite of the deficiencies of my English.

CONVENTIONS. The symbol Y.X preceding a comment means that it is the X-th comment on page Y. The number X is to be found in the outer margin of page Y, beside the line or just after the paragraph which the comment is about. Sometimes X is followed by the symbol:

¶ warning of real flaws or omissions,

+ indicating some substantial addendum.

For instance **73.2+** points out the second comment on page 73, which is not just a brief remark.

Numbers between / / refer to the «*Liste des Publications*» at the beginning of the volume, numbers between [ ] to the final Bibliography.

Words between $\hat{(}\ \hat{)}$ may be simultaneously read or omitted in a sentence.

R. ... i.o. is an abbreviation for Read ... instead of.

O. refers to other parts of these «Oeuvres».

GENERAL COMMENTS

ON /125/ : STRUCTURES LOCALES ET REVÊTEMENTS.

In 1952, Charles gave a 4 months course on «Espaces fibrés et structures infinitésimales» at the University of Rio de Janeiro in which he developed the theory of fibre bundles, of jets and of prolongations of manifolds. Only the present extract (which consists of the main part of Chapter I) was written down and multigraphed in Rio; in the sixties, it was recomposed on Varityper for insertion in «Esquisse d'un folklore de Géométrie Différentielle», a collection of Charles's articles on Differential Geometry.

The text belongs to a former period than the other papers reprinted in this Part II of the «Œuvres»; it is included here for two reasons:

- It already states the main ideas of the important paper /47/, but under a less elaborate form which enlightens the progress from geometric problems to local structures and to category theory.
- In Part I it would be redundant with /39/, since the first 7 sections of both papers are the same, except for some details added here; the last two sections of this course on etale spaces and coverings are now classical, while the last section of /39/ gives some applications to Differential Geometry.

5.1 + *Categorical constructions of structures:*

The definition of mathematical structures over sets given here (and in Bourbaki [12]) is precised in /47/ (Section II, page 133); it led to the theory of structures defined via type functors /52/ (O, IV-1):

- the type of a structure consists in giving a type functor, i.e., an endofunctor of the category *Set* of sets deduced from the power-set functor by iteration, products or colimits indexed by an ordinal (cf. /52/); the restriction of a type functor to the groupoid of bijections is called a *γ-type functor.*
- a mathematical species of structures is the data of a subfunctor of

5.1 ... a γ-type functor determined by constructible axioms; such axioms are defined by typified formulas, or equivalently by structural natural transformations (cf. Blanc [10] and O, IV-1, Comment 116-1). The construction may be done in any topos (i.o. *Set*), and more generally in any algebraic universe in the sense of Guitart [41].

However an explicit construction of structures is not always useful, whence the theory of species of structures over a groupoid or a category begun in /47/ and developed subsequently /126/, ...

Conversely, some problems require more stringent conditions, and Charles defined sketched (or «general algebraic») structures later on (cf. /106/ and O, IV-1, Comments 19.1, 32.1).

Notice that Charles did not know Eilenberg-Mac Lane's definition of a category when he prepared this course; he only read their paper [28] during his stay in Rio.

5.2. This sentence is made precise in /47, 52/: the correspondence: $E \mapsto M$ extends into a type functor T from a subgroupoid of *Set* to *Set*, and the axioms must be chosen so that the correspondence $E \mapsto \mathbb{W}$ extends into a subfunctor of T (Comment 5.1).

6.1. It is precised in the notion of a superstructure over a given species of structures.

6.2 + *Covariant maps between species of structures:*

This paragraph led to the theory of covariant maps between species of structures (which generalizes the canonical or equivariant maps between sets with an action of a group), and its applications: equivalences, substructures, underlying structures, superstructures /47, 126/. Indeed, if the species $\mathbb{W}$ on E is defined by the functor T from the group $Aut E$ of permutations of E to *Set*, and the species $\mathbb{W}'$ by $T': Aut E \to Set$, then a canonical map is the data of a natural transformation ϕ from T to T', i.e. it defines a covariant map from $\mathbb{W}$ to $\mathbb{W}'$. The two species are equivalent iff ϕ is a natural equivalence.

7.1. It is not necessary to omit $\emptyset$ (in /39/, $\emptyset$ is added).

7.2+ *Local structures:*

In his Notice /136/ (O, I), Charles explains why he introduced local structures:

«... d'une part, on a les structures essentiellement algébriques définies sur un ensemble par un groupe de transformations (suivant l'idée développée, par exemple, par Félix Klein dans son Programme d'Erlangen); d'autre part, on a les structures topologiques, qui forment l'objet de la Topologie. Mais la notion de groupe de transformations est un cas particulier de la notion de pseudogroupe de transformations, dont les transformations ne sont définies que sur certains sous-ensembles de l'espace considéré. Ces sous-ensembles sont les ensembles ouverts d'une structure topologique, de sorte qu'on admet déjà une structure topologique sous-jacente. On est conduit ensuite à une notion générale de structure locale /39/ étroitement liée à celle de pseudogroupe.» «... C'est l'exposé d'Elie Cartan sur les espaces localement euclidiens («Leçons sur la théorie des espaces de Riemann») et le livre de Veblen-Whitehead sur «The foundations of differential geometry» qui m'ont conduit à étudier les espaces localement homogènes de Lie et à chercher une définition générale des structures de caractère local.»

Reflections on local structures and constructions of them via atlases led Charles to his theory of local groupoids and order-completion theorems, developed in /47/ and the subsequent papers of this Volume. A species of local structures as defined here corresponds, with the terminology of /47/, to a *complete* species of local structures over a local groupoid consisting of homeomorphisms between topological spaces. Indeed, the induction law gives an order on the class of the structures (transitivity), each structure has an underlying topology (axiom 2) and the homeomorphisms transport the structures and their order (axiom 1); the glueing axiom 4 means that each compatible family of structures (or «descent data») on subspaces of a space E admits a join (called its aggregate), so that the species is complete.

7.3. Coproducts of topological spaces and their quotients are also dealt with in Section 7.

8.1. Pseudogroups of transformations are already used in /20/ from which we quote: «nous reprenons ici, en les précisant, les notions introduites pour la première fois par Veblen-Whitehead dans «The foundations of differential geometry», Cambridge Tracts, 1932».

They are generalized into inductive groupoids and categories in /47/. Actually, a pseudogroup of transformations is a subgroupoid of the groupoid of partial homeomorphisms of a topological space E which is closed under joins (or aggregates) and downward closed for the order:

$f' < f$ iff f' is a restriction of f to open subsets of its source and target.

8.2. Groupoids were introduced in 1926 by Brandt [13] who requires that the groupoid be connected; they are sometimes called Ehresmann's groupoids, with a reference to the often cited paper /47/.

A simpler definition is: a groupoid is a category in which each morphism is an isomorphism.

9.1. *Proof:* If $ee = e$ and if ex is defined, there exists the composite $eex = ex$, whence $ex = x$ by axiom 2; so idempotents are identities. On the other hand, $e'_x e'_x = x^{-1} x e'_x$ exists and the equality $x e'_x e'_x = x e'_x$ implies e'_x is idempotent (by 2).

If $e'_x = e_y$, axiom 1 implies that $(x e'_x) y = xy$ is defined. Conversely, if there exists xy, the composites $e'_x y = x^{-1} xy$ and $e'_x e'_x y$ are defined and equal. It follows (2) that $e'_x y = y = e_y y$, and $e'_x = e_y$.

9.2. A local automorphism of E is a partial homeomorphism, i.e. a homeomorphism between open subspaces of E. Beware that local homeomorphism is often used with the meaning of etale space.

9.3. ϕ_{21} is the pseudoproduct $f_2^{-1} f_1 : f_1^{-1}(U) \to f_2^{-1}(U)$ with U the intersection of the targets of f_2 and f_1.

9.4. *Proof:* If $\mathfrak{A} = \{f_i \mid i \in I\}$ is an atlas from E to E' and $\mathfrak{B} = \{g_j \mid j \in J\}$ an atlas from E' to E'', the pseudoproducts $g_j f_i$, $i \in I$, $j \in J$, make up an atlas from E to E'' (since the restriction of a partial homeomorphism is a partial homeomorphism).

10.1. If S_i is the structure on U_i, the structure S_i' on U_i' transported by f_i admits as its distinguished subspaces the images by f_i of the distinguished subspaces for S_i.

This construction, suggested by the definition of manifolds, fibre bundles, ..., is axiomatized later on /47/.

11.1. The construction of $\bar{\mathfrak{A}}$ has led to the more general setting of /47, 110/. The proof uses the fact that Γ is a pseudogroup of transformations and that the pseudoproduct is associative and preserves joins. More precisely (cf. /68/, Corollaries Proposition 8-3):

$\bar{\mathfrak{A}}$ is complete: if f_λ is compatible with $\mathfrak{A}$, then f_λ is the aggregate of the charts $f_{\lambda_i}(f_i^{-1} f_\lambda)$, $f_i \in \mathfrak{A}$, where f_{λ_i} is the restriction of f_i to the target of $\phi_{i\lambda} = f_i^{-1} f_\lambda \in \Gamma$; so $f_\lambda \in \bar{\mathfrak{A}}$.

$\bar{\mathfrak{A}}$ is compatible with Γ: the pseudoproduct

$$(\bigcup_j g_j'\phi_j')^{-1}(\bigcup_i g_i\phi_i) = \bigcup_{ij} \phi_j'^{-1}\, g_j'^{-1}\, g_i\, \phi_i$$

lies in Γ, because $g_j'^{-1} g_i$ is the restriction of a $\phi_{ji} \in \Gamma$ and Γ is closed under pseudoproducts and aggregates.

11.2. It should be noticed that ff_i denotes a pseudoproduct while up to now, only products in which the source of f is equal to the target of f_i were used.

12.1. The construction of $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$ led to the groupoid of atlases of a local groupoid in /68/. Here is a particular case of the theorem on transitivity of complete enlargements /85/.

13.1. In /39/, it is said that S is subordinated to S' (i.o. lies on S').

The problem of existence of subordinated structures originated in the problem of restriction of the structural group for a (locally trivial) fibre bundle. The isomorphism problem (called equivalence problem in /39/) comes from E. Cartan's equivalence problem for infinitesimal structures.

14.1 + *Universal characterizations of* E_0' :

The space E_0' is obtained by glueing together the domains of the charts of the atlas $\mathfrak{A}$. It is already constructed in / 15, 20 / in the case of fibre bundles (i.e., Γ is the pseudogroup described in / 47 /, Section IV-3). Here are two other descriptions of this space.

1° E_0' as a special colimit: Let Γ^l be the category of local isomorphisms of Γ (cf. / 47 /); it is identified with a subcategory of the category *Spn Top* of spans of *Top* if the triple (U', g, U), where $g \in \Gamma$ and $\alpha(g)$ open in $U \in \Gamma_0$, $\beta(g)$ open in $U' \in \Gamma_0$, is identified with the span

$$\begin{tikzcd} & \beta(g) \arrow[dl, hook'] & \alpha(g) \arrow[l, "g"'] \arrow[dr, hook] & \\ U' & & & U \end{tikzcd}$$

The atlas $\mathfrak{A}$ defines a functor A from the groupoid of pairs of $\mathfrak{A}$ to Γ^l such that

$$A(f_i) = \alpha(f_i) = U_i, \quad A(f_j, f_i) = (U_j, \phi_{ji}, U_i),$$

where $\phi_{ji} = f_j'^{-1} f_i$ is the change of charts. The class of cocones in *Spn Top* with basis

$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}) \xrightarrow{A} \Gamma^l \hookrightarrow Spn\,Top$$

and edges in *Top* admits an initial element; its vertex is E_0' and the edge $l_i : U_i \to E_0'$ is the map $x \mapsto (i, x) \bmod \rho$. Informally, E_0' is the colimit of A in the category of spans generated by Γ^l and *Top*.

2° E_0' as the fibration associated to a Γ-structure (cf. Haefliger [42], whose terminology is used): Let Γ_* be the topological groupoid of local jets of Γ, equipped with its etale topology (cf. / 53 /). Let G be the sheaf of groupoids of local jets from the topological space E' to Γ_* : its sections over U' are the continuous maps $U' \to \Gamma_*$. An atlas $\mathfrak{A}$ on E', compatible with Γ and whose underlying topology is the topology of E', defines a 1-cocycle $\gamma = (g_{ji})$ of G as follows: γ is associated to the covering (U_i') of E' consisting of the targets U_i' of the charts f_i of $\mathfrak{A}$ and

14.1 ... $$g_{ii} = (U'_i \xrightarrow{f_i^{-1}} U_i \hookrightarrow \Gamma*),$$
$$g_{ij}: U'_i \cap U'_j \to \Gamma* : y \mapsto j^{\lambda}_{f_i^{-1} y} \, (f_j^{-1} f_i).$$

The class of 1-cohomology of this 1-cocycle defines a Γ-structure on E', and E'_0 is the fibration deduced by γ from E.

Notice that the fibration deduced from *any* Γ-structure may be described by a colimit-construction as above.

15.1. It is the usual definition of an etale space (also called a *local homeomorphism*, terminology which may be confusing here). Etale spaces are already defined in a preliminary Bourbaki's draft dated April 1941. They are thoroughly studied in H. Cartan's Seminar [15] where it is proved etale spaces are equivalent to sheaves (defined by Leray [62]). Gray has given an interesting history of these notions [39].

18.1. A lifting of A in E' is a section of p over A.

19.1. The hypothesis E' is Hausdorff may be weakened (cf. page 23).

19.2. The representations form the category $Et(E)$ of etale spaces over E, which is the full subcategory of the category Top/E whose objects are the etale spaces over E.

20.1 + *Limits and colimits of etale spaces:*

E' is the quotient of the topological space sum of $(E'_i)_{i \in I}$, by the equivalence which identifies all the base points a'_i. It is the coproduct of $(E'_i, a'_i)_{i \in I}$ in the category $Et*(E)$ of pointed etale spaces over E ; the morphisms of $Et*(E)$ are the representations which preserve the base points.

More generally, *the category $Et(E)$ of etale spaces over E is complete and cocomplete*, since it is equivalent to the category $Sh(E)$ of sheaves over E, and this category is reflective in the complete and cocomplete category $Set^{Open\,E}$ of presheaves over E (*Associated Sheaf Theorem*). It follows that $Et*(E)$ is complete and cocomplete: the limit in $Et*(E)$ is the limit in $Et(E)$ pointed at the family of base points; the colimit is deduced from the colimit in $Et(E)$ by identifying the images of the base points.

20.2. This proposition may be called the *Lifting Homotopy Theorem for etale spaces*. It generalizes the more precise theorem for covering spaces and fibre bundles Charles gave in /18/ (in which V is $A \times I$ itself). The lifting homotopy Theorem for fibre bundles paved the way to the theory of Serre and Hurewicz fibrations.

21.1. This section was intended as an introduction to the subsequent chapters on fibre bundles, but it is unachieved; in particular it lacks the lifting homotopy Theorem for covering spaces.

In the fourties and the fifties, Charles gave several courses on covering spaces and fibre bundles; he always regreted to have not published them, which explains his fundamental contribution to this domain is somewhat forgotten (cf. O, I).

The theory of covering spaces is developed in many books, e.g. Chevalley [17], Godbillon [36].

23.1. A covering space is the particular case of a fibre bundle with base B, fibre F and structural group G, where F is discrete and G consists of all the permutations of F. A general fibre bundle $E(B, F, G, H)$ where G is a topological group of homeomorphisms of the topological space F, is defined similarly, by requiring in the definition of Γ that $S: U \to G: x \mapsto s_x$ be continuous (cf. /20, 28/).

23.2. The hypothesis F finite or B locally connected is only used to prove the condition is sufficient.

24.1+ *Principal fibre bundles:*

The definition of the principal fibre bundle $H(B, G, G_t, H')$ associated to a fibre bundle $E(B, F, G, H)$ given in /20, 28/ is formally the same as that given here for the principal covering, except that G_t is the topological group of translations of the topological group G and the maps $x \mapsto s_x^{ij}$ must be continuous.

Later on, Charles replaced the consideration of H by the *groupoid HH^{-1} of isomorphisms from fibre to fibre*; and in /50/ he proved the equivalence between the notions of:

- a principal fibre bundle H and a *locally trivial groupoid* G_H,

24.1 ... - a fibre bundle associated to H and a topological action of G_H. These results motivated his study of category actions and, later on, of internal structures (cf. O, III).

ON / 55 / : ÉLARGISSEMENTS DE CATÉGORIES.

Sections 1 to 8 take back the main definitions and results of the papers / 126, 68, 85 /, to which we refer for comments. The Appendix where categories of fractions are introduced has been developed in / 122, 123 / in a more general setting.

25.1. Section 1 sums up / 126 /, Chapter 1, Part I.

25.2 + «Espèces de structures locales» is a French translation of / 47 / (written in German) which is not reproduced in these «Œuvres». It was published in the same volume as this paper, with the following note added on its first page: «La théorie esquissée ici a été développée dans mes cours depuis 1957 comme base de la théorie des espaces fibrés et feuilletés et de la géométrie différentielle. Un exposé détaillé, dont une partie est publiée provisoirement, va paraître prochainement». The alluded detailed work would have contained:

- / 126 /, which was already printed in Montréal;
- / 68, 85 /, which were written in 1961 as a sequel of / 126 / though printed several years later;
- a theory of atlases and completions for local categories, partially developed in / 53, 75, 76, 110 /.

But Charles modified his plans because of his recent interest in internal categories (cf. O, III), so he separately published the existing parts, and only gathered their results without proofs here.

28.1. The proofs of Section 2 are given in / 126 /, Chapter 1, Part II.

28.2¶ Replace by

$$p_0^{-1}(e) \cap p_0^{-1}(e') = \emptyset \quad \text{ssi } e \neq e', \qquad \bigcup_{e \in \mathcal{C}_0} p_0^{-1}(e) = \mathcal{S}_0 .$$

30.1. Φ and Φ' must be defined as functors toward *Set* since a natural transformation is defined between functors with the same codomain.

30.2. Add : et les foncteurs ϕ et ϕ' qui s'en déduisent .

30.3. The preceding paper represents the French translation of /47/.

32.1. Sections 3 and 4 are taken from /126/, Chapter 1, Part III.

38.1. Section 5 contains the results of /126/, Chapter 2 which are not included in /53/.

42.1. Section 6 is extracted from a preliminary draft (multigraphed in Paris in 1962) of Chapter 2, Parts II and III of the course /126/ ; but it was not ready in time to be included in /126/. The final version, which is published in /68/ and summed up in Section 7 here, is written down in the frame of subpreinductive groupoids, i.o. preinductive groupoids. Indeed, results and proofs are valid without modifications in this more general case; the only exception is the completion theorems (page 44) which require prelocal groupoids.

44.1. The end of this section comes from /68/, Sections 5 and 6.

47.1. Cf. /68/ for the proofs.

47.2. In /68/ the congregation of B is denoted by $\bar{\cup} B$ i.o. $\underline{\cup} B$.

56.1. Section 8 is developed in /85/.

59.1. Add : et les foncteurs χ et χ' .

67.1. R. $<\mathcal{S}, \theta\bar{p}, (\bar{\mathcal{S}}', p)>$ i.o. $<\mathcal{S}, p, \mathcal{S}'>$ (cf. /85/, Th. 8, page 110).

68.1. R. bijection sur une sous-classe inductive faible de $\mathcal{S}_0$ i.o. injection.

69.1. Categories of atlases for inductive categories are described in /75, 76/. A complete enlargement theorem for local functors between local categories is proved in /110/ ; as here, it uses a 2-step construction (enlargement + completion) and not a direct definition of structures in terms of atlases as in /47/.

70.1. This Appendix is developed with slightly different hypotheses in /122/, Chapter V, Section E-1, and in /123/, Chapter II, Section 5. It originated from a comparison between the construction of enlargements of categories (page 37) and of embeddings of a semigroup into a group. It led to important developments :

- the theory of categories of fractions, so thoroughly studied later on (cf. Comment 73.2);

70.1 ... - the definition of double categories, motivated by the double categories of squares and of quintets /52,64/,

- the more general extension theorems for functors, which are given in /122/, Chapter V, and internalized in subsequent papers (O, III-2).

70.2. A right (resp. left) regular morphism is an epimorphism (resp. monomorphism). A perfect category is also called *balanced*.

70.3. The notation $\sqsupset(\mathcal{F}, \mathcal{C}')$ is misleading: it should mention $\mathcal{C}$ which is essential i.o. $\mathcal{C}'$.

71.1. The two propositions define the double category of commutative squares (or quartets) of the category $\mathcal{C}$, when $\mathcal{F} = \mathcal{C}$.

71.2. The relation with the enlargements defined page 36 is indicated on page 72.

71.3. *Proof:* 1° $f \in \mathcal{F}$ admits a left inverse g which closes the trio $(\alpha(f), f, \alpha(f))$ into a square;

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, equal] & \cdot \arrow[d, equal] \\ \cdot \arrow[u, "g"] & \cdot \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

if f is an epimorphism, g is its inverse.

2° Let $h' \in \mathcal{C}'$ be regular; there exists a square

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "f'"'] \\ \cdot \arrow[u, "h'"] & \cdot \arrow[l, "f"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

with $h \in \mathcal{C}$ and f, f' isomorphisms (by 1); then $h = f'^{-1} h' f$ is a regular morphism with source in $\mathcal{C}$, hence is an isomorphism; it follows that h' is also an isomorphism.

72.1. Condition (P) (for «parfait») was suggested by the Ore condition which ensures a semigroup may be embedded in its group of fractions [70]. In /122/ (Chapter V, Definition 6), it is only given in the case $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ and $\mathcal{F}$ consists of all the regular morphisms of $\mathcal{C}$.

72.2. *Proof:* It follows from the first condition that the elements of $\mathcal{F}$ are isomorphisms (Comment 71.3); the second condition means $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ is included in $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$; whence Condition (P) with the squares

72.2...

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "f'"'] \\ \cdot \arrow[u, "f"] \arrow[r, equal] & \cdot \arrow[u, "f'^{-1}f"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "f' \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}"'] \\ \cdot \arrow[u, "h"] \arrow[r, equal] & \cdot \arrow[u, "f'^{-1}h \in \mathcal{C}"'] \end{tikzcd}$$

for $f, f' \in \mathcal{F}$ and $h \in \mathcal{C}$.

72.3. $\sqsupset(\mathcal{F}, \mathcal{C}')$ is always an enlargement of $\mathcal{C}$, since its isomorphisms are the trios (f', f, h) where h is an isomorphism of $\mathcal{C}$. The proof of both propositions is straightforward.

72.4. For the (easy) proof, cf. /122/, Proposition 2-V. This proposition implies that $\mathcal{C}$ is a *final subcategory* of $\mathcal{C}'$ and that $\mathcal{C}'$ is an $\mathcal{F}$-expansion of $\mathcal{C}$ (in the sense of /122/, Definition 1-V). More generally, $\mathcal{C}$ is a final subcategory of $\mathcal{C}'$ iff $\mathcal{C}'$ is a quasi-expansion of $\mathcal{C}$ by $\mathcal{C}'\mathcal{C}_0$ (cf. O, III - 2, Comment 479.2).

73.1 ¶ Replace condition 2 by :

2) Soit $\mathcal{C}''$ un élargissement de $\mathcal{C}$ relatif à une classe $\mathcal{F}''$ telle que $(\mathcal{C}, \mathcal{C}'', \mathcal{F}'')$ vérifie (P), et soit G un néofoncteur du sous-graphe multiplicatif $\mathcal{F}'' \cup \mathcal{C} \cup \beta(\mathcal{F}'')$ de $\mathcal{C}''$ vers le sous-graphe multiplicatif $\mathcal{F} \cup \mathcal{C} \cup \beta(\mathcal{F})$ de $\mathcal{C}'$ prolongeant l'identité de $\mathcal{C}$. Alors G s'étend en un unique foncteur $\hat{G}: \mathcal{C}'' \to \overline{\mathcal{C}}$; si G est surjectif, $\overline{\mathcal{C}}$ est une catégorie quotient de $\mathcal{C}''$.

$\hat{G}$ sends k'' to $(G(f''_1), G(f''), h) \bmod \rho$, where

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "f''_1"'] \\ \cdot \arrow[u, "k''"] \arrow[ur, phantom, "="] & \cdot \arrow[l, "f''"] \arrow[u, "h \in \mathcal{C}"'] \end{tikzcd}$$

73.2+ *Categories of fractions :*

With the terminology of /122/, Condition 2 of the enlargement theorem means that $(\mathcal{C}, \overline{\mathcal{C}}, \overline{\mathcal{F}})$ is a cofree expansion associated to $(\mathcal{C}', \mathcal{C}, \mathcal{F})$. The category $\overline{\mathcal{C}}$ does not only enjoy this couniversal property ; it also is characterized by the following universal property (/66/ 3-1):

Let $p: \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \beta(\mathcal{F}) \to \mathcal{K}$ be a neofunctor from the multiplicative sub graph of $\mathcal{C}'$ generated by $\mathcal{C} \cup \mathcal{F}$ into a category $\mathcal{K}$; if p sends the elements of $\mathcal{F}$ to isomorphisms, there exists a unique functor $\hat{p}$ such

73.2... *that* $p = (\mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \beta(\mathcal{F}) \hookrightarrow \overline{\mathcal{C}} \xrightarrow{\hat{p}} \mathcal{K})$.

Indeed, $\hat{p}$ sends $(f', f, h) \bmod \rho$ to $p(f')p(h)p(f)^{-1}$.

If $\mathcal{C}$ is a category and $\mathcal{F}$ any subclass of morphisms of $\mathcal{C}$, recall that $\mathcal{C}/\mathcal{F}$ is a *category of fractions of* $\mathcal{C}$ *by* $\mathcal{F}$ if there exists a functor $q: \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{F}$ which is universal among the functors $\mathcal{C} \to \mathcal{K}$ sending the elements of $\mathcal{F}$ to isomorphisms. Taking $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ in the preceding proposition, we get:

COROLLARY. *If* $\mathcal{F}$ *is a subcategory of* $\mathcal{C}$ *containing the identities and satisfying Condition (P) (such a category is called /91, 122/ a* proper subcategory), *and if* $\mathcal{F}$ *consists of regular morphisms of* $\mathcal{C}$, *then the category* $\overline{\mathcal{C}}$ *associated to* $(\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathcal{F})$ *is a category of fractions of* $\mathcal{C}$ *by* $\mathcal{F}$; *moreover* q *is an insertion* $\mathcal{C} \hookrightarrow \overline{\mathcal{C}}$ *and* $\overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\mathcal{F}^{-1}$.

We have $(f', f, h) \bmod \rho = (f'h)f^{-1}$ in $\overline{\mathcal{C}}$; this morphism may be identified with the *fraction* $f'h/f$ defined as follows: the class of all spans (k, f) of $\mathcal{C}$ with $f \in \mathcal{F}$ is equipped with an equivalence

$(k, f) \sim (k', f')$ iff there exist $g, g' \in \mathcal{F}$ such that $fg = f'g'$ and $kg = k'g'$;

the equivalence class of (k, f) is called a fraction, denoted k/f.

The corollary is easily generalized as follows (cf. /122/ Corollary Theorem 4-V and /123/ Section 5-II): Let $\mathcal{F}$ be a proper subcategory of $\mathcal{C}$ satisfying the condition:

(R_d) If $fh = fh'$ for some $f \in \mathcal{F}$, then $hg = h'g$ for some $g \in \mathcal{F}$.

Then there exists a quotient category $\hat{\mathcal{C}}$ of $\mathcal{C}$ by the equivalence r:

$h \sim h'$ iff there exists $f \in \mathcal{F}$ such that $hf = h'f$;

the image $\hat{\mathcal{F}}$ of $\mathcal{F}$ by $\hat{r}: \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ is a proper subcategory of $\hat{\mathcal{C}}$, whose morphisms are regular in $\hat{\mathcal{C}}$. The category of fractions $\hat{\mathcal{C}}/\hat{\mathcal{F}}$ deduced from the corollary is also a category of fractions of $\mathcal{C}$ by $\mathcal{F}$, and $\hat{\mathcal{C}}/\hat{\mathcal{F}} = \hat{r}(\mathcal{C})\hat{r}(\mathcal{F})^{-1}$; its morphisms may still be defined as fractions k/f, where $k \in \mathcal{C}$ and $f \in \mathcal{F}$.

Categories of fractions play an important part in many problems, specially in Algebraic Topology where the homotopy category has trig-

73.2... gered their study. However it seems this (not well-known) Appendix is the first paper in which an explicit construction is given. Independently, Hoehnke [43] proved the above corollary with the supplementary «triangle condition»: $g \in \mathcal{F}$ if $gf \in \mathcal{F}$ for some f in $\mathcal{F}$.

Later on, Gabriel-Zisman [34] gave a slightly more general theorem and they fixed the terminology: *A* subcategory $\mathcal{F}$ of $\mathcal{C}$ *admits a right calculus of fractions* if it satisfies the second condition (P) of this text and the condition (R_d) above; in this case, there exists a category of fractions of $\mathcal{C}$ by $\mathcal{F}$ whose elements are the fractions k/f with $k \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{F}$. (The difference with the above result is that $\mathcal{F}$ need not satisfy the first condition (P); however the subcategory $\mathcal{F}'$ of $\mathcal{C}$ generated by the g such that $fg \in \mathcal{F}$ for some f in $\mathcal{F}$ is then a proper subcategory satisfying (R_d), and $\mathcal{C}/\mathcal{F} = \mathcal{C}/\mathcal{F}'$.) The assumption that $\mathcal{F}$ admit a right calculus of fractions is «almost necessary» for $\mathcal{C}/\mathcal{F}$ to consist of fractions. More precisely:

PROPOSITION. *The canonical functor* $q: \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{F}$ *into a category of fractions of* $\mathcal{C}$ *by a subcategory* $\mathcal{F}$ *satisfies the two conditions:*

1° $\mathcal{C}/\mathcal{F} = q(\mathcal{C})\,q(\mathcal{F})^{-1}$,

2° $q(h) = q(h')$ *iff there exists* $g \in \mathcal{F}$ *such that* $hg = h'g$,

iff $\mathcal{F}$ *admits a right calculus of fractions.*

Gabriel-Zisman develop the theory of such categories of fractions with an emphasis on the exactitude properties of $q: \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{F}$.

For any class $\mathcal{F}$ of morphisms of $\mathcal{C}$, there exists a category of fractions $\mathcal{C}/\mathcal{F}$ which is a quotient of the category of zig-zags

$$\begin{tikzcd}
 & \cdot \arrow[dr, "f_n"] & & \cdot \arrow[dr, "f_1"] & \\
\cdot \arrow[ur, "h_n"] & & \cdots \arrow[ur] & & \cdot
\end{tikzcd}$$

where $f_i \in \mathcal{F}$ for $1 \leq i \leq n$ (cf. /123/, 5-II). In [6] Bauer-Dugundji give an explicit construction of this quotient. For $\mathcal{C} = \mathcal{F}$, the category $\mathcal{C}/\mathcal{C}$ is the reflection of $\mathcal{C}$ into groupoids.

Enriched categories of fractions, in particular additive categories

73.2... of fractions have been studied and used frequently. Internal categories of fractions in a concrete category are constructed in /96/ ; the case of double or ordered categories of fractions is developed by S. Legrand [61].

A related problem is the following one: Let L be a subcategory of *Cat* ; if $\mathcal{C}$ is an object of L and $\mathcal{F}$ a class of morphisms of $\mathcal{C}$, a functor $q: \mathcal{C} \to \hat{\mathcal{C}}$ defines $\hat{\mathcal{C}}$ as an *L-category of fractions of* $\mathcal{C}$ if q is universal among the functors *in* L which send all of $\mathcal{F}$ to isomorphisms; if $\mathcal{F}$ is the class of all morphisms of $\mathcal{C}$ made isomorphic by q, it is called an *L-congruence*. Bénabou (unpublished lectures) has characterized L-congruences, e.g. for L the category of (finitely) complete categories and limit-preserving functors, or the category of regular categories.

73.3+ *Perfect categories:*

For the proof, cf. /122/, Corollary 1, Theorem 5-V.

$\bar{\mathcal{C}}$ is an improvement («perfectionnement») of $\mathcal{C}$ iff $\mathcal{R} \subset \bar{\mathcal{C}}_{\gamma}$ and $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}\mathcal{R}^{-1}$; then $\bar{\mathcal{C}}$ is balanced (= perfect). By the theorem, $\mathcal{C}$ has an improvement $\mathcal{P}$ iff $\mathcal{R}$ is a proper subcategory of $\mathcal{C}$ (that is, iff $\mathcal{R}$ admits a right calculus of fractions), or equivalently (cf. Proposition in Comment 73.2) iff the category $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ is an improvement of $\mathcal{C}$; in this case, $\mathcal{P}$ is isomorphic to $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ (cf. /66/, Corollary, Proposition 17-I).

If $\mathcal{C} = \mathcal{R}$, it admits an improvement $\mathcal{P}$ iff each cospan may be inserted in a square (Ore condition); that is equivalent to the fact that $\mathcal{C}$ be identified to a subcategory of its reflection $\mathcal{G}$ into groupoids, and that $\mathcal{G} = \mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}$. In particular, this gives back Ore embedding of a regular semigroup in a group; this Ore result was the model on which the Enlargement Theorem of this Appendix was tailored.

ON /85/ : ESPÈCES DE STRUCTURES SOUS-INDUCTIVES.

75.1. Such general completion theorems have not been given. The only published generalizations are:

- Completion theorems for subprelocal categories (via rockets, and super-rockets) in /76/,

- Complete enlargement theorems for local functors between local categories in /110/.

75.2. This very helpful «Guide» is isolated from this paper and numbered /86/ in these «Œuvres».

76.1. Inductive and subinductive maps are respectively called subinductive and subpreinductive maps in subsequent papers, where an inductive map means a subinductive map between inductive classes /86/.

78.1+ *Quotient ordered groupoids:*

If $\tilde{S}$ is a quotient $\widehat{\text{(sub)}}$inductive groupoid of S, then it is a quotient structure of S (in the sense of /66/) with respect to the forgetful functor to *Set* from the category of subpreinductive groupoids and $\widehat{\text{(sub)}}$inductive functors. Theorem 1 gives a strict enough condition for the existence of such a quotient (it is used in the Enlargement Theorem 4, page 91). A finer result is given in /66/ (Corollary, Theorem 3-II) where quotient structures are constructed with respect to several concrete functors from categories of ordered categories. More generally existence theorems for quasi-quotient special ordered categories (e.g. for quasi-quotient subpreinductive groupoids) are deduced in /100/ from existence of quasi-quotient internal categories (and from the definition of a subpreinductive groupoid as an internal category, Comment 262.1). Quotient ordered categories are also constructed by S. Legrand [61] and by Joubert [50].

78.2. Condition 2 follows from Condition 1; in fact, if $g' < f'$ and $q(g') = q(f')$, the unicity of g' in condition 1 implies $f' = g'$.

79.1. The distributivity axiom is equivalent (Comment 265.1) to: if $\tilde{d}$ is a subaggregate of a subclass $\tilde{B}$ of $\tilde{S}$ and if $\tilde{a} < \tilde{d}$, then $\tilde{a}$ is the $\tilde{d}$-aggregate of $\tilde{D} = \{ \tilde{a} \cap \tilde{b} \mid \tilde{b} \in \tilde{B} \}$; now representatives d, a, b of $\tilde{d}$, $\tilde{a}$ and $\tilde{b}$ may be chosen so that $a < d$ and $b < d$. Then a is lesser than $\overset{d}{\cup} \{ b \mid \tilde{b} \in \tilde{B} \} = d$ and, since S is local,

$$a = \overset{d}{\cup} \{ b \cap a \mid \tilde{b} \in \tilde{B} \} \text{ ; hence } \tilde{a} = \overset{\tilde{d}}{\cup} \tilde{D}.$$

79.2. Sub$\widehat{\text{pre}}$inductive species of structures generalize the species of local structures introduced in /47/ and, in the case S is a subgroupoid of *Top*, in /36, 125/.

Notice that here the word subpreinductive is made agree with species, and not with structures as in the earlier papers /47, 55/. It is more natural when a subpreinductive species is thought of as a (special) structured (= concrete internal) species of structures /59, 89/, in the category of subpreinductive classes.

79.3. It follows from this proposition that a sub$\widehat{\text{pre}}$inductive species of structures $<S, p, S'>$ in which $p(S')$ is replete in S is an internal discrete fibration in the category of sub$\widehat{\text{pre}}$inductive classes and inductive maps such that p be strict and S be a sub$\widehat{\text{pre}}$inductive groupoid (looked at as an internal category, Comment 262.1).

80.1 + *Etale maps and presheaves:*

Suppose S consists of identities, so that $S = S_0$ is just a subpreinductive class. *The etale maps over S are in 1-1 correspondence with the presheaves over* (the category defining the order of) S. Indeed, the etale map $p: S' \to S$ defines the presheaf F such that

$F(u) = \bar{p}^1(u)$ and $F(u', u)$ for $u' < u$ maps $s \in \bar{p}^1(u)$ on the unique $s' < s$ such that $p(s') = u'$.

Conversely, to the presheaf G is associated the etale map p' from $\coprod_{u \in S_0} G(u)$ to S such that $p'(u, s) = u$ and

$$(u', s') < (u, s) \text{ iff } u' < u \text{ and } s' = G(u', u)(s).$$

The presheaf F is a sheaf iff $p: S' \to S$ is moreover complete (Definition 3 page 104), and the completion of an etale map (Theorem 7..3) corresponds to the associated sheaf (cf. Comment 321.1). So the term etale is taken with an extended meaning (classically etale spaces correspond only to sheaves over a topological space, not presheaves).

81.1. The corollary is trivial; the conditions imply $S' = S$.

83.1. R. foncteurs χ et χ' i.o. applications χ_0 and χ'_0.

The actions of $\alpha(\psi') = \beta(\psi)$ on $\alpha(\chi'_0)$ and $\beta(\chi)$ must be the same.

84.1. $N(S', S)$ is the category of natural transformations from S to S' (as defined in / 109 /), when S and S' are looked at as internal categories in the category of subpreinductive classes (Comment 262.1). The proof shows that the composition of S' is an inductive map, which is one of the conditions for S' to be such an internal category.

86.1. $\kappa^*(S', p)$ is the pullback of (p, κ) in the category of subpreinductive groupoids and $\widehat{\text{(sub)}}$inductive functors (Theorem 1 and Corollary 1). Corollary 3 proves that subpreinductive species of structures and etale functors are preserved by pullback. Corollary 4 is a particular case, which lies on the fact that $[\beta, \alpha] : S \to S_0 \times S_0$ is an inductive functor to the subpreinductive groupoid of pairs. All these results may be deduced from general theorems on internal categories / 109, 113 /.

87.1. R. local i.o. sous-local .

87.2. If S is only subprelocal and if h' is another element of S', greater than f'', then the $\kappa(f')$-aggregate and the $\kappa(h')$-aggregate of f'' might be different, in which case $\kappa'(f'')$ is not defined.

89.1. The hypothesis $\beta(F) \subset F$ of Proposition 6.3 is satisfied, because

$$\beta(F) \subset F F^{-1} \subset F\bar{S} = F\bar{\alpha}(F) = F.$$

92.1. The last equality is proved as follows: $(g_i^{-1}.g_i', s_i') < (k, \bigcup_{i \in I} s_i')$ for each $i \in I$ implies

$$\bigcup_{i \in I} s_i = \bigcup_{i \in I} (g_i^{-1}.g_i') s_i' < \beta(k, \bigcup_{i \in I} s_i'),$$

whence the equality, because both members are sent to $\beta(k)$ by the strict map p.

The corollary is also valid if the condition $p(S')$ is closed under aggregates is replaced by p *is relatively complete* (that is, if C is a subclass of S' such that there exist $\cup\alpha(C)$, $\cup\beta(C)$ and $\cup p(C)$ then there exists $\cup C$). This remark is needed later on.

92.2+ *Reflection in internal discrete fibrations :*

Let us take the category of subpreinductive species of structures over S and of $\widehat{\text{(sub)}}$inductive covariant maps, and its full subcategory of $\widehat{\text{(sub)}}$inductive discrete fibrations $< S, p_1, S_1' >$ (i.e. $p_1(S_1')$ is re-

92.2 ... plete in S ; cf. Comment 79.3).

PROPOSITION. $<S, \bar{p}, \bar{S}'>$ *is the reflection of* $<S, p, S'>$ *into this full subcategory.*

Δ. Let $<S, q, G>$ be a $(\hat{\text{sub}})\hat{\text{inductive}}$ discrete fibration, $<Id_S, v_0>$ a $(\hat{\text{sub}})\hat{\text{inductive}}$ covariant map from $<S, p, S'>$ to $<S, q, G>$, and let $v: S' \to G$ be the corresponding $(\hat{\text{sub}})\hat{\text{inductive}}$ functor. From the universality of the maximal enlargement (Comment 227.1), v extends uniquely into the functor $\hat{v}: \bar{S}' \to G$ which sends the coset of (f', f, h) to $v(f')v(h)v(f)^{-1}$. This functor is $(\hat{\text{sub}})\hat{\text{inductive}}$ because v is so, and the composition of G preserves aggregates and finite intersections of bounded families. ∇

The following precision is needed in Theorem 7.3; it comes from Corollary, Theorem 1.1 and from Comment 92.1 :

COROLLARY. *If* $<S, p, S'>$ *is sublocal,* $<S, \bar{p}, \bar{S}'>$ *is sublocal. If* $<S, p, S'>$ *is local and relatively complete, then* $<S, \bar{p}, \bar{S}'>$ *is local.*

104.1. This definition generalizes the notion of complete inductive species of structures given in /47/, and of which sheaves are a particular case (Comment 80.1).

105.1. $\bar{C}$ is compatible with p because it consists of aggregates $\cup B$ of subclasses of C. Since S' is local, we get

$$(\cup B)\cap(\cup B') = \cup\{ b\cap b' \mid b \in B,\ b' \in B' \} ;$$

it follows

$$\begin{aligned} p((\cup B)\cap(\cup B')) &= \cup\{ p(b\cap b') \mid b \in B,\ b' \in B' \} \\ &= \cup\{ p(b)\cap p(b') \mid b \in B,\ b' \in B' \} \\ &= p(\cup B)\cap p(\cup B'), \end{aligned}$$

because $p(B)$ and $p(B')$ are bounded by $\cup p(C)$.

108.1. R. que l'inclusion de S' dans Σ' préserve les agrégats et que i.o. que S'.

109.1. C is complete is proved as in /68/, Theorem 2.5.

109.2. Here it is supposed that $S' \hookrightarrow \Sigma'$ preserves aggregates.

109.3 + *Universal completions of local species of structures:*

Let S be a local groupoid. Proposition 9 and Theorem 7 give reflections in categories of local functors (cf. also Comments 321.1, 325.2).

1. Universality of the species of complexes: Take the category whose objects are the subinductive functors $p: S' \to S$ and morphisms from p to $p_1: S'_1 \to S$ are functors $v: S' \to S'_1$ such that $p_1 v = p$ and v preserves all finite intersections. From Proposition 9 we deduce:

PROPOSITION A. *If $p: S' \to S$ is a subinductive functor and S' is a preinductive groupoid, then p admits $\kappa: \tilde{C}(S', p) \to S$ as a reflection into the subcategory of complete inductive functors $G \to S$, G a local groupoid and morphisms preserving aggregates and finite intersections.*

Δ. The insertion $S' \hookrightarrow \tilde{C}(S', p)$ preserves intersections (but not aggregates). Let $q: G \to S$ be an inductive functor from a local groupoid G that is complete with respect to q, and let $v: S' \to G$ be a functor preserving finite intersections and such that $qv = p$. Then v extends into the morphism $\hat{v}: \kappa \to q$ which sends the complex C to $\cup v(C)$. Indeed, $v(C)$ is a compatible family of G because C is compatible and v preserves finite intersections; as $qv(C)$ admits $\cup p(C)$ as an aggregate and q is complete, $\cup v(C)$ exists. Now $\hat{v}: \tilde{C}(S', p) \to G$ is a functor preserving aggregates, and it is the unique such one which extends v, since $C = \cup\{f \mid f \in C\}$. The intersection of complexes C and C' is their set-intersection, which consists of the $f \cap f'$ with: $f \in C$, $f' \in C'$; whence $\hat{v}$ preserves it, since

$$\begin{aligned}\hat{v}(C \cap C') &= \cup\{v(f \cap f') \mid f \in C, f' \in C'\}\\ &= \cup\{v(f) \cap v(f') \mid f \in C,\ f' \in C'\} = \hat{v}(C) \cap \hat{v}(C').\end{aligned}$$

The problem with the completion by complexes is that aggregates are not preserved and p strict does not imply κ strict. Whence, the consideration of complete classes.

2. Universality of the completion. Take the category A^l_S of local species of structures over S, the morphisms being the inductive covariant maps $\langle Id_S, v_0\rangle$ (such that the extended functor $\hat{v}$ preserve finite intersections).

109.3... PROPOSITION B. *A local species of structures $<S, p, S'>$ admits its completion $<S, \theta\bar{p}, (\bar{S}', p)>$ as a reflection into the full subcategory of A^l_S with objects the local complete species of structures.*

Δ. The insertion $S' \hookrightarrow (\bar{S}', p)$ preserves aggregates and finite intersections. Let $<Id_S, v_0> : <S, p, S'> \to <S, q, G>$ be a morphism to a complete local species. As q is strict, the extended functor v preserves the intersections preserved by p. So it is proved as above that the unique extension of v is the functor $\hat{v} : (\bar{S}', p) \to G : C \mapsto \cup v(C)$, preserving aggregates (and finite intersections if so does v). ∇

To compare with the associated sheaf theorem, cf. Comment 321.1.

PROPOSITION C *(Relative completion Theorem). A local species of structures $<S, p, S'>$ admits a reflection $<S, p_r, S_r>$ into the full subcategory of A^l_S with objects the relatively complete local species of structures (Comment 92.1). S_r is the subgroupoid of $(\bar{S}', p)$ consisting of those C such that $\cup\alpha(C)$ and $\cup\beta(C)$ exist in S'.* Same proof.

110.1 + *On the complete enlargement:*

From the universal characterizations of Comments 92.2, 109.3 comes

PROPOSITION. *The complete enlargement of $<S, p, S'>$ is its reflection into the full subcategory of A^l_S with objects the complete local discrete fibrations over S.*

Notice that the complete enlargement is constructed in three steps: completion, inductive enlargement, completion. The first step is necessary because the Completion Theorem 7 is only valid for local species of structures, while the inductive enlargement of a non relatively complete local species of structures is just sublocal (Theorem 4.2); it may be replaced by a relative completion (Proposition C, Comment 109.3), since the enlargement of a relatively complete local species of structures is local (Comment 92.2).

The above proposition gives a universal characterization of the complete enlargement. It is proved using the transitivity of free objects and successively: Proposition C of Comment 109.3, Proposition, Corollary of Comment 92.2, Proposition B of Comment 109.3.

110.1 ... The last assertion of Theorem 8 leads to a one-step construction of the complete enlargement, in which the structures are directly defined as atlases. This (more concrete) procedure is used in /47/, in which the Complete Enlargement Theorem is given for the first time.

A complete enlargement theorem for local functors between local categories is proved in /110/, to which we refer for comments.

113.1. The proof is correct for $i = 1$. If $(j, i) = (1, 2)$, the same result is obtained by replacing α by β. Hence q_1' preserves subaggregates of objects, whence also of all subclasses of $\bar{\mathfrak{F}}$.

114.1. More briefly: F' being complete, we have

$$G = \overline{\beta(F')G} \subset \overline{\beta(F')G} = F' \subset G,$$

and therefore $F' = G$.

115.1 ¶ Such an h exists if k and k' are in $\bar{S}'$, not if they are only in $\tilde{S}'$. However in this case $\tilde{q}_1(k) = \tilde{q}_1(k')$ also implies $\tilde{q}(k) = \tilde{q}(k')$; indeed, there exist $e_i \in S_0'$ such that $\alpha(k) = \cup e_i = \alpha(k')$; ke_i and $k'e_i$ are in $\bar{S}'$ and they satisfy

$$\tilde{q}_1(ke_i) = \tilde{q}_1(k)\tilde{q}_1(e_i) = \tilde{q}_1(k'e_i),$$

whence $\beta(ke_i) = \beta(k'e_i)$ because $\tilde{q}$ is 1-1 on S_0'. The former case then gives $\tilde{q}(ke_i) = \tilde{q}(k'e_i)$ for each i, and therefore

$$\tilde{q}(k) = \cup\tilde{q}(ke_i) = \cup\tilde{q}(k'e_i) = \tilde{q}(k').$$

116.1. Since S' is a pseudogroup, $S' \hookrightarrow S''$ is complete, and the first step in the construction of the complete enlargement (Comment 110.1) is unuseful; hence $\tilde{S}'$ is the completion of the algebraic enlargement of S' over S.

116.2 + *Associated fibre bundles:*

The notion of an associated atlas and of the class of associated structures was suggested by the construction of associated fibre bundles (cf. /20, 50/).

Indeed, let $E(B, A, \Sigma, H)$ be a fibre bundle, with basis B, fibre A, structural group Σ. It is defined by an atlas F compatible with the pseudogroup S consisting of the continuous maps $h: U \times A \to U \times A$,

116.2... of the form

$$(x, y) \mapsto (x, s_x y), \text{ where } x \mapsto s_x \text{ is continuous } U \to \Sigma$$

(cf. Comment 23.1). The associated principal bundle $H(B, \Sigma, \Sigma, H')$ is defined by an atlas G compatible with the pseudogroup S' that has for charts the maps

$$h': U \times \Sigma \to U \times \Sigma : (x, s) \mapsto (x, s s_x).$$

The map $h \mapsto h'$ defines an inductive functor $q: S \to S'$. The atlas G is associated to F according to Definition 6, because q gives rise to the following map $\overline{q}: F \to G$: if $f: U \times A \to E$ is a chart of F, the partial map $f(x, -) : A \to E$ is an element of H for each $x \in U$; whence the chart of G:

$$\overline{q}(f): U \times \Sigma \to H : (x, s) \mapsto f(x, -)s.$$

More generally, we deduce by transitivity that *if F' is an atlas defining a fibre bundle associated to E, then F' is an atlas associated to F*, and conversely.

ON /86/ : GUIDE DES CATÉGORIES ORDONNÉES.

This paper is an Appendix to /85/. Since its publication in 1965, Charles has obtained other results on ordered categories, scattered in several articles; they are pointed out in the following addendum, written for this volume.

119.1. A saturated homomorphism functor is a concrete transportable functor (in a more modern terminology).

123.1. The complete enlargement of a local functor between local categories is constructed in /110/.

123.2. Quasi-quotient ordered categories are defined and constructed in /100/ (O, III-1) and /102/ (O, IV-1).

123.3. These general problems have not been studied afterwards.

ADDENDUM À /86/ (Résultats obtenus par C. Ehresmann après 1965):

1° Une classe $\hat{\lambda}\hat{\lambda}'$-(sous)inductive est une classe ordonnée, telle que toute partie non vide de cardinal $\leq \lambda'$ ait une intersection et que toute partie majorée de cardinal $\leq \lambda$ ait un $\widehat{\text{(sous)}}$agrégat ; d'où la catégorie des classes $\lambda\lambda'$-$\widehat{\text{(sous)}}$inductives dont les morphismes préservent ces intersections et $\widehat{\text{(sous)}}$agrégats ; les catégories $\lambda\lambda'$-*$\widehat{\text{(sous)}}$inductives* sont les catégories ordonnées qui sont de plus internes à cette catégorie / 102/.

Des théorèmes d'existence de *catégories sous-préinductives,* ou $\lambda\lambda'$-*$\widehat{\text{(sous)}}$inductives, quasi-quotients* et de *plongement d'une catégorie ordonnée dans une catégorie sous-préinductive ou* $\lambda\lambda'$-*$\widehat{\text{(sous)}}$inductive ayant des limites et colimites de certains types* sont donnés dans / 100, 102/.

2° *L'élargissement complet d'un foncteur local* est construit en deux étapes dans / 110/, ce qui généralise des résultats de / 47,85/. (Un exposé détaillé en est donné dans la thèse de Leblond [59].)

3° *Applications:* La catégorie ordonnée et quasi-topologique des sections locales d'une catégorie topologique est construite dans / 92/, ainsi que son quotient, la *catégorie des jets locaux.* D'où une théorie des prolongements des catégories topologiques et des catégories différentiables (voir / 92, 101, 103, 105, 116/).

ON / 47/ : GATTUNGEN VON LOKALEN STRUKTUREN.

This article is very important, since it contains most of the ideas which are developed in subsequent papers, on actions of categories and extensions of functors (/ 126/ and O, III-2), on ordered categories, local functors and their completions (/ 53,68,85/ and O, II-2).

A french translation (which will not be reproduced here) is published in *Cahiers Top. et Géom. Diff.* III (1961), before the paper / 55/.

125.1. Charles uses the term category here for the first time. Before, he frequently dealt with groupoids (e.g. in / 28/); though he proved (in / 32,40/) that the class of all jets between manifolds satisfy the axioms of category, he did not employ the word itself. In fact he only read Eilenberg-Mac Lane paper on categories in 1952.

125.2. Charles always intended to write a long paper (or perhaps a book) on his view of Differential Geometry. Unhappily he never achieved it, and he only sketched the main ideas in / 50, 78, 103, 116/. Notice that the recent development of synthetic differential geometry (Lawvere [58] Dubuc [25], Kock [56], Reyes [76], ...) makes his ideas very actual.

125.3. During the fifties, Charles extensively travelled and he was proud enough of his lectures through the world.

126.1. The underlying set-theory is Bernays-Gödel-Von Neumann [8]. In later articles, the distinction between sets and classes is replaced by the use of universes (cf. O, III-1, Comments 24.1, 155.1, 211.2). The optimistic conclusion reflects Charles' often expressed philosophy on foundations in Mathematics: If they are endangered, there is always a way to restore them.

126.2. Sections I and II are developed and generalized in / 126 /, Chapter I that contains complete proofs, and in / 122 /, Chapters I and II.

Categories are looked at as a generalization of groups and groupoids, hence are described by the data of the composition, source and target, rather than by the objects and the Homs. This point of view explains Charles introduced very early internal categories and their actions, of which he had several examples in differential geometry (cf. O, III-1, Comment 25.1).

127.1. Generalized functors are used in the sequel:

- to give another characterization of species of structures (cf. also /122/, Proposition 9-II),
- to define the order of an inductive category or groupoid.

They are by-passed in later works.

An application is given in [11], where Bosch & Sagastume use generalized functors and generalized natural transformations to provide an axiomatic treatment of manifolds (Comment 330.2).

127.2. The letter $\mathfrak{E}$ abbreviates «ensemble». Later on, Charles rather named a category by its morphisms i.o. its objects, and the category of sets and maps became $\mathfrak{M}$ (cf. O, III-1, Comment 24.1).

128.1. R. dann ist $\bar{p}^1(e) \neq \emptyset$ und i.o. dann ist .

Otherwise the acting category would only be the full subcategory of C on which the fibres are non-void.

129.1. Axiom 1 is a consequence of Axioms 2 and 3. If C is a groupoid, Axioms 2 and 3 follow from Axiom 1 (cf. / 122 /, Theorem 2-II).

129.2. To sum up, Section I states the equivalence of the notions:

- actions of a category C on a set,
- functors $C \to Set$ with non-void disjoint values (resp. with non-void values, in Section II),
- *discrete fibrations onto* C,
- generalized functors, if C is a groupoid.

In Section II and in / 126 /, the equivalence is extended to the corresponding notions of morphisms (Comment 206.1).

130.1. The subgroupoid C' of C *is distinguished* if $C^{-1} C' C \subset C'$. Here, C' is a sum of groups, and the quotient groupoid C/C' is formed by the classes fC', where $f \in C$. More generally, the quasi-quotient of a category C by a subcategory C' is defined in / 100, 91 / (O, III), as the quasi-quotient of C by the equivalence generated by:

$f \sim \alpha(f)$ for each $f \in C'$.

This result is the only one, up to page 133, which requires C to be a groupoid, and not any category. In / 126 /, the study is carried on for categories.

131.1. This trivial example is used page 133.

132.1. Up to 1963, Charles used the term équivalence i.o. isomorphisme.

132.2. The functor ϕ must be the lifting of a functor between the acting categories C and C', so that the following square commutes:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{S}' \arrow[d, "proj"'] & \mathfrak{S} \arrow[l, "\phi"'] \arrow[d, "proj"] \\
C' & C \arrow[l, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

A correct definition is given in / 37, 126 /.

132.3+ *Some motivations:*

The bifold terminology: action of category, species of structures, stems from two different origins: the theory of fibre bundles and Differential Geometry, the theory of mathematical structures.

132.3... Groupoid actions and covariant maps were first defined in the case of the groupoid of isomorphisms from fibre to fibre, of a fibre bundle E, acting on E; in /37/, Charles introduced «ces notions que nous mettrons à la base de la théorie des covariants différentiels d'une structure infinitésimale»; in /38/ he gives the example of differential covariants and invariants. General actions of groupoids are introduced in /44/, where they are called *generalized fibre bundles*; topological and differentiable actions are also defined there, with an application to prolongations of manifolds.

On the other hand, special species of structures over a subgroupoid of the category of sets are described in /36, 39, 125/ (and precised on page 133), to axiomatize Bourbaki's theory of structures and to develop local structures.

It is only in the present article that the two theories are united.

Covariant maps also generalize *equivariant maps between C-sets,* where C is a group.

132.4. The two theorems of this paragraph say that, if p is a discrete fibration, then $p\bar{p}$ is a discrete fibration iff $\bar{p}$ is one.

133.1 + *Enlargements and Kan extensions:*

Charles defined enlargements as a first step toward his complete enlargement Theorem for local structures (Section 5-III) which generalizes the construction of structures via atlases (e.g. manifolds).

Let $\Phi: C \to Set$ and $\bar{\Phi}: \bar{C} \to Set$ be the functors associated to the actions of C on $\mathfrak{S}_0$ and of $\bar{C}$ on $\bar{\mathfrak{S}}_0$. For each object e of C, we have

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(e) &= \{(f, S)\mathfrak{S} \mid f: p(S) \to e,\ S \in \mathfrak{S}_0\} \\ &= colim\,((C \hookrightarrow \bar{C}) \downarrow e \xrightarrow[base]{} C \xrightarrow[\Phi]{} Set).\end{aligned}$$

Hence $\bar{\Phi}$ *is the Kan extension of* Φ *along the insertion* $C \hookrightarrow \bar{C}$. The colimit definition may be given if C and $\bar{C}$ are categories, i.o. groupoids, but then $\mathfrak{S}_0$ may not be a subspecies of $\bar{\mathfrak{S}}_0$.

So the enlargement is a special case of Kan extension, for *Set-*

133.1 ... valued functors. Notice than Kan's paper on extensions [52] was published the same year as this paper.

The enlargement has another universal property, when it is looked at «upside-down»: let $p: \mathfrak{S} \to C$ and $\bar{p}: \bar{\mathfrak{S}} \to \bar{C}$ be the discrete fibrations associated to $\mathfrak{S}_0$ and $\bar{\mathfrak{S}}_0$.

PROPOSITION *(cf. Comment 227.1). Take the category* $Cat/\bar{C}$ *of functors over* $\bar{C}$*; then* $\bar{p}: \bar{\mathfrak{S}} \to \bar{C}$ *is the reflection of* $(\mathfrak{S} \xrightarrow{p} C \hookrightarrow \bar{C})$ *into the full subcategory of discrete fibrations over* $\bar{C}$.

Δ. Let $p': \mathfrak{S}' \to \bar{C}$ be a discrete fibration and $q: \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'$ a functor such that $p'q = p$. Then q extends into $\bar{q}: \bar{\mathfrak{S}} \to \mathfrak{S}'$ sending $(g, (f, S)\mathfrak{S})$ to the unique $h \in \mathfrak{S}'$ satisfying $p'(h) = gf$, $\alpha(h) = q(S)$. ∇

Looked at in this way, the enlargement process led to general theorems on extensions and expansions of functors given in /77/ and /122/ Chapter V, and adapted for internal functors in a concrete category in /89,90,95,96/ (cf. O, III-2 and its Synopsis).

On the other hand, Kan extensions may be translated in the enriched world (Dubuc [24], Kelly [55]). They are also generalized to extend (enriched) partial actions into (enriched) actions in /87/.

133.2. R. Gattung i.o. Kategorie.

133.3. This section makes more precise the definition of structures given in /125/; it opened the way to the construction of type functors in /52/ and in /122/, Appendix II (Comment 5.1).

134.1. For an infinite ordinal $\iota \neq \omega$, the definition of $\mathfrak{P}^{\omega}$ (as a colimit) is more complicated; cf /52/ (O, IV-1).

135.1. It means $\hat{p}$ is faithful.

Categories of homomorphisms were suggested by the «concrete» examples: homomorphisms between algebraic structures, continuous maps,... A category of homomorphisms over $\hat{C}$ with C the groupoid of isomorphisms of C is exactly what is now called a *concrete transportable category.*

135.2. The construction of $\bar{\bar{\mathfrak{H}}}$ is explicitly carried on in /126/ Chapter 1.

136.1. Axioms 1 and 2 are automatically satisfied, because Φ is a generalized functor (cf. /126/, Chapter 1, Propositions 4-I and 5-I).

136.2. $\Phi(g) \cap \Phi(g')$ cannot be void, since it contains the least element 0, that is the aggregate of $\emptyset$. In fact,

$$\Phi(g) \cap \Phi(g') = \{0\} \quad \text{iff} \quad g \cap g' = 0.$$

137.1 + *Inductive groupoids and pseudogroups:*

Inductive categories of isomorphisms are called *inductive groupoids* in later papers. They are groupoids $\mathfrak{G}$ equipped with an inductive order (i.e., every non-void subset has a meet) such that the map

$$\Phi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G} : f \mapsto \{f' \in \mathfrak{G} \mid f' < f\}$$

be a generalized functor.

An inductive groupoid with its extended composition (or *pseudoproduct*) is called a *pseudogroup*. A characterization of pseudogroups thanks to the algebraic properties of the pseudoproduct is given in /53/. Transformations pseudogroups (already used in /20, 125/) are special pseudogroups, or inductive groupoids, whose elements are partial homeomorphisms of a topological space.

The theory of inductive groupoids and of their generalizations: preinductive groupoids, sub(pre)inductive groupoids, is developed in: /126/ and /68/. Interpretations as internal categories in categories of posets are provided for in /63/; cf. Comment 262.1. Examples issued from the theory of foliations are studied in /54, 75/.

Following Charles's lead, inductive groupoids have been dealt with by several authors. Rinow [77] gets relative completion theorems (cf. Comment 306.2). A series of papers by B. Schultz [81-86] is devoted to the study of the inductive groupoids $\Gamma(G)$ where G is an algebraic structure (a group, a ring, a field) and $\Gamma(G)$ consists of its partial isomorphisms. In particular: two embeddings of an inductive groupoid into the groupoid $\Gamma(A)$ associated to an abelian group are constructed; conditions are given for an isomorphism from $\Gamma(G)$ to $\Gamma(G')$ to

137.1 ... come from an isomorphism from G to G' (such an isomorphism is called an *inductive isomorphism from G to G'*). Hoehnke & Strecker [45] are also concerned with such inductive isomorphisms between groups, while Michler & Schreckenberger consider the problem of finding when $\Gamma(G)$ is relatively complete, for a general algebraic structure G [66].

Motivated by problems on foliations, Joubert [50] refines theorems on quotients of inductive groupoids and ordered categories (given in /66/) and uses them to construct extensions of ordered functors by the method of /72/. He also studies those functorially ordered groupoids which contain a final subgroup G and embeds them in the category of atlases of G.

137.2. $f'f$ denotes the pseudoproduct (it is not required $\alpha(f') = \beta(f)$).

137.3. The right identity of $\phi' = (S', f', S)$ is $(S, \alpha(f'), S)$.

138.1. Ω_0 is the class of pointed local classes.

138.2. Local species of structures represent an axiomatization, in the frame of categories, of local structures over topological spaces defined in /36, 125/.

The results of this section are developed and generalized in /53, 85/ to which we refer for comments. Cf. also Dedecker [21-23].

138.3. If $C \neq \bar{C}$, conditions a, b, c do not imply that C is an inductive groupoid, so that the notion is slightly more general than in /85/.

139.1. A compatible family here is a family (g_i) of $\mathfrak{S}$ compatible for p in the sense of /85/ such that $(p(g_i))$ is bounded in C. It may also be called a «descent data».

140.1 + *Local classes, paratopologies and locales :*

Charles introduced local classes, local groupoids and paratopologies to account for the algebraic structure which makes possible the construction of local structures via atlases compatible with a transformations pseudogroups, e. g. manifolds, fibre bundles, ... His insight which revealed so fruitful was that «points» are not necessary in this problem, but only the order relation on open subsets, whence the local

140.1 ... groupoids and the paratopologies to replace transformations pseudo-groups and topologies ; the terminology stems from that.

Developing his ideas, Bénabou [7] and D. & S. Papert [73] study paratopologies on local lattices (i.e. local classes with a greatest element). In particular, Bénabou constructs free local lattices, coproducts in the category of local lattices with morphisms preserving joins and finite meets (cf. Comment 153.1), and embeddings from posets to local lattices and from local lattices to boolean algebras. Afterwards, Coppey [18] and Tanré [87] concern themselves with the notion of locally connected paratopology and paratopological foliations.

Now local lattices are Brouwerian complete lattices (in the sense of Birkhoff [9]) and they have been considered long ago. For instance, Wallman [88], Samuel [79] define filters on them, in connection with compactifications. Nöbeling [69] develops a «Topology without points» along the lines of general topology.

In the early seventies, the interest in local lattices was renewed. Isbell, in his paper [47] where he coins the modern term «locale» to denote a local class with a maximum emphasizes the advantage of locales in many topological problems; e.g. the product of paracompact locales is a paracompact locale. The development of topos theory led categoricians to use Heyting algebras, which are the logical equivalent of locales. Barr's Theorem [5] and its refinements (Barr & Joyal) assert that any Grothendieck topos is a quotient of a topos of sheaves over a locale; so locales and their sheaves, introduced by Charles fifteen years earlier, are an essential ingredient of topos theory.

Locales are specially useful for making Analysis in a topos. It explains the great number of papers on locales which have been published in the last years (Banaschewski & Mulvey [4], Johnstone [49], Mulvey & Pelletier [68], Wraith [89],...). We refer to Johnstone [49] for a bibliography on locales.

Notice that local classes which are not locales (i.e. which do not have a greatest element) are also important: the class of morphisms of a local groupoid $\mathfrak{G}$ is not a locale, unless $\mathfrak{G}$ is discrete.

140.2. $\mathfrak{G}$ is defined in Example 2, page 138.

140.3. More precisely, the class of paratopologies on elements of $\mathfrak{G}_0$ is a subpreinductive class (/68/ Theorem 7.4) for the order:

$T' < T$ iff T' is the paratopology on $E' < E$ induced by the paratopology T on E.

But it is not an inductive class even for topologies. It becomes a local class for the order:

$T' < T$ iff T' is the paratopology induced by T on an open subspace of T,

and the local category $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$ is equipped with this last order /53/.

141.1. h preserves joins and h^* is its right adjoint. But h may not preserve finite meets, so that it is not a morphism of locales.

141.2. These notions are developed in /53, 126, 68/.

142.1. R. $\Psi(h) = I(h) \cap \mathfrak{G}$,

Inductive categories are studied in /53/ ; cf. also Comment 164.2.

143.1 + *Completely regular categories as sites:*

An inductive category $\mathfrak{H}$ satisfying Axioms 1 and 3 is called a *completely regular category* /67, 75/. Notice that Axiom 2 is a consequence of Axiom 1; indeed, by Axiom 1, there is a unique

$$S'_{s'} : s' \to S' \quad \text{with} \quad S'_{s'} < S'$$

and $h = S'_{s'} h' : s \to S'$ is greater than h'; moreover, if $g : s \to S'$ satisfies $h' < g$, then $h = S'_{s'} h' < S' g = g$, whence $h = g$.

A completely regular category is a fortiori regular /53/ : The pseudoproduct hs, where $s < \alpha(h) = S$ is equal to $hS_s : s \to \beta(h)$; if $s' < S' = \beta(h)$, the pseudoproduct $s'h$ is the aggregate $h_{s'}$ of the set

$$A = \{ g < h \mid \beta(g) < s' \},$$

and $\beta(h_{s'}) = s'$; indeed, $\beta(\cup A) = \hat{s}'$ is lesser than s' ; as the composite $s'_{\hat{s}'}(\cup A)$ is greater than $\cup A$ and belongs to A, we deduce:

$$\cup A = s'_{\hat{s}'}(\cup A) = h_{s'}, \quad \text{hence} \quad \beta(\cup A) = s'.$$

It is easy to see that the square

143.1...

$$\begin{tikzcd} s' \arrow[d, "S'_{s'}"'] & s \arrow[l, "s'h"'] \arrow[d, "S_s"] \\ S' & S \arrow[l, "h"] \end{tikzcd}$$

is a pullback. It follows that we define a Grothendieck topology on $\mathfrak{H}$, taking as coverings of S the families $(S_{s_i})_i$ where

$$s_i < S \quad \text{and} \quad \cup s_i = S.$$

But sites do not always come from a completely regular category.

Sites and inductive categories were both introduced as a generalization of a topological space, in view of defining sheaves or glueing of elementary structures; so the Associated Sheaf Theorem for sites and the completion theorem for local functors play the same role.

143.2. The order for the first species is given by:

$h' < h$ iff $h' = ha(h')$,

and for the second by

$h' < h$ iff $h' = \beta(h')h$.

The complete regularity of $\mathfrak{H}$ is necessary to prove these orders give inductive species of structures.

143.3. This notion is studied in /53/ and it is the basis on which is developed the theory of substructures in /63,67/ (though after substructures were defined without an order /66/).

143.4 + *Partial morphisms:*

In this section, $\mathfrak{H}$ is supposed to be completely regular; otherwise the composite would not be defined in $\mathfrak{H}^l$.

$\mathfrak{H}^l$ is identified to the category of partial morphisms of $\mathfrak{H}$, whose morphisms are the spans (h, S_s) with $s = \alpha(h)$ and where the composition is defined by pullback:

$$\begin{tikzcd} & & \alpha(s'h) \arrow[dr] & & \\ & s' \arrow[ur, dash, "s'h"] \arrow[dl, "h'"'] \arrow[dr] & \text{PB} & s \arrow[dr, "S_s"] & \\ {} & & S' \arrow[ur, "h"'] & & S \end{tikzcd}$$

For $\mathfrak{H} = Set$, it reduces to the category of partial maps Par. To give

143.4... an axiomatic treatment of *Par*, Hoehnke introduced *dht-categories* [44], that is symmetric monoidal categories equipped with a «diagonal» and terminal morphisms; their study is developed by Schreckenberger in [80].

The category $\mathfrak{H}^l$ is not an ordered category. However to any inductive category $\mathfrak{H}$, there is associated the inductive category of its *partial homomorphisms* (called local homomorphisms, cf. /63/, Proposition 6-II); its morphisms are the triples

$$(S', h, S) \text{ such that } \alpha(h) < S \text{ and } \beta(h) < S' ;$$

the composition is:

$$(\hat{S}', h', \hat{S})(S', h, S) = (\hat{S}', h'h, S) \text{ iff } \alpha(h') = \beta(h),\ \hat{S} = S'$$

and the order is:

$$(\hat{S}', h', \hat{S}) < (S', h, S) \text{ iff } \hat{S} < S,\ \hat{S}' < S',\ h' < h .$$

144.1. The product $\phi'\phi$ is computed in the category (not the groupoid) $\mathfrak{S}^l$. The distributivity axiom is used to prove $A'A$ is an atlas *onto* S''. Indeed, let

$$A = \{(S', f_i, S) \mid i \in I\} \text{ and } A' = \{(S'', f_j', S') \mid j \in J\}.$$

For each j, f_j' is the aggregate of $f_j'\beta(f_i)$, because

$$\alpha(f_j') = \alpha(f_j') \cap \underset{i}{\cup} \beta(f_i) \underset{(D)}{=} \underset{i}{\cup} \alpha(f_j')\beta(f_i) = \alpha(\underset{i}{\cup} f_j'\beta(f_i)) ;$$

it follows

$$S'' = \underset{j}{\cup} \beta(f_j') = \underset{i,j}{\cup} \beta(f_j'\beta(f_i)) = \underset{i,j}{\cup} \beta(f_j' f_i) = \cup \beta(A'A).$$

The notion of atlas is precised later on; it led to the (sub)inductive groupoids of atlases of an inductive groupoid /68/, Section 4.

144.2. R. $ge \in C$ für alle $e \in p(\mathfrak{S}_0)$ i.o. $g \in C$.

144.3. This theorem is proved and generalized in /85/ (Theorem 2.3).

145.1. The species of etale structures is called the *completion of* $\mathfrak{S}$ over C in /85/, Theorem 7.3; for a universal property cf. Comment 109.3.

145.2. The aggregate only exists if the f_i are bounded.

145.3. This *Complete Enlargement Theorem* was suggested by the construction of the complete local species of structures associated to a transformations pseudogroup in / 125 / . It is generalized in / 85 / Theorem 9.3 and / 110 /, to which we refer for details and comments.

146.1. Add Wenn ausserdem $\mathfrak{S}$ voll ist in $\mathfrak{S}'$.

146.2. $\tilde{\mathfrak{S}}_0$ is the completion of $\mathfrak{S}_0$ over C_0 (/ 85 /, Theorem 7.3). If $\mathfrak{S}_0$ is etale, it defines a presheaf on the local class C_0 and $\tilde{\mathfrak{S}}_0$ is the associated sheaf (Comments 80.1 and 321.1).

147.1. This construction is more general than above, because Γ is only equipped with an amnestic (but not transportable) local functor to C. The complete enlargement theorem of / 110 / also covers this case.

148.1. C^r is the *groupoid of r-diffeomorphisms* between manifolds. To get the category of r (differentiable maps between) manifolds, it is necessary to complete the *category of* r-differentiable maps between open subsets of R^n, as it is done in / 110 /.

148.2 + *Complete enlargement of local categories:*

The enlargement $\mathfrak{H}'$ of $\mathfrak{H}$, with the inductive order transported from $\mathfrak{H}$, is a local species of structures over $\mathfrak{S}' \times \mathfrak{S}'$, which is not complete. Its completion becomes a local category of homomorphisms, called the *complete enlargement of* $\mathfrak{H}$, constructed explicitly in / 110 /.

It may be interesting to compare with Cartan & Eilenberg's results [16] obtained quite independently at the same time. They define a *local category* as an inductive category of homomorphisms in the sense of this paper, which is completely regular (Comment 143.1), and such that the paratopology underlying each object be a topology and that each compatible family of morphisms with the same target and whose sources are bounded admit an aggregate (we translate in Charles's terminology). They construct the complete enlargement of an inductive category of homomorphisms $\mathfrak{H}$ over $\tilde{C}$ (for its groupoid of isomorphisms $\mathfrak{S}$), when $\mathfrak{H}$ and $\tilde{C}$ are local categories in their sense, in three steps:

1° Enlargement of $\mathfrak{H}$, as here;

2° Completion of $\mathfrak{H}_0$, using the associated sheaf theorem on topological spaces (which is possible because the paratopologies underlying the objects of $\mathfrak{H}$ are topologies): for each object E of $\tilde{C}$, the objects of $\mathfrak{H}$ over $e < E$ define a presheaf on the topology under E,

148.2... and the objects of $\tilde{\mathfrak{H}}$ are the sections of its associated sheaf.

3° The morphisms of $\tilde{\mathfrak{H}}$ are obtained by glueing together compatible families of $\mathfrak{H}$ (the complete regularity is used at this stage).

So their method is almost the same as above, except that it requires the classical Associated sheaf Theorem for presheaves on a topological space. But Charles's complete enlargement Theorem is more general; it points out the interest of considering presheaves on a local class (e. g. on a paratopology or a locale, and not only on a topology), for which it generalizes the Associated Sheaf Theorem (cf. Comment 321.1). The fruitfulness and actuality of this generalization is emphasized by the recent applications of locales in topos theory (cf. Comment 140.1).

Notice that four important papers on category theory have been written at about the same time independently: Kan's paper on extensions [52] (cf. Comment 133.1), Cartan & Eilenberg [16], Grothendieck [40] which led to the development of abelian categories, and / 47 /.

150.1. Local products were essentially introduced as a step toward the definition of foliations and fibre bundles.

151.1 + *Foliations:*

Foliated manifolds were introduced in / 19 / to axiomatize the global theory of differential equations (Painlevé [72], Poincaré [74]). Their theory is developed in Reeb's Thesis [75]. Foliated manifolds are the foliations of the first kind where $\mathfrak{B} = \mathfrak{F} = C^r$. An extended literature has been devoted to them these last years (cf. Comments of O, I).

Foliations of the second species are studied in Haefliger's Thesis [42]. More general foliations are defined / 45, 54 / by the data of two topologies T and T' on E, which, for each point x of E, induce the same topology on a neighborhood of x in T'. A general theory of foliations, axed on their holonomy groupoids and their stability properties, is given in / 54 / (O, II-2); that paper makes an extensive use of ordered groupoids.

152.1 + *Fibre bundles :*

Topological (resp. r-differentiable) locally trivial fibre bundles / 14, 15 / are obtained for

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{F} = Top \quad (\text{resp.} \ = C^r).$$

Fibre bundles with a structural topological group may also be obtained via the Complete Enlargement Theorem, by restricting $\tilde{\Gamma}$ (cf. / 20 /, and the comments of O, I). This example was one of the motivations for introducing and constructing local structures in / 36, 125 / .

A more general kind of fibration is defined by Cartan & Eilenberg as an application of their completion theorem [16] (Comment 148.2). If $\mathfrak{B}$ is a local category in their sense and $\mathfrak{F}$ a category, their fibre bundles are obtained by glueing together data (B, ϕ), where B is an object of $\mathfrak{B}$ and ϕ a map from the topology underlying B to $\mathfrak{F}_0$. Such fibre bundles may have non-isomorphic fibres.

Fibre bundles with specified structures (e. g., infinite dimensional manifolds) on the fibres and on the base are defined in [27], thanks to the Complete Enlargement Theorem.

153.1 + *Coproduct of local classes and local categories:*

If $\bar{C}$ and $\bar{C}'$ reduce to locales with greatest elements 1 and $1'$, then $\bar{C} \otimes \bar{C}'$ is their coproduct in the category of locales, with morphisms preserving aggregates and finite intersections (for 0 to be preserved, it is necessary to suppose each $U \in \bar{C} \otimes \bar{C}'$ contains $e \times 0'$ and $0 \times e'$ for $e \in \bar{C}$, $e' \in \bar{C}'$); the coprojections are :

$$\bar{C} \to \bar{C} \otimes \bar{C}' : x \mapsto x \otimes 1, \quad \bar{C}' \to \bar{C} \otimes \bar{C}' : x' \mapsto 1 \otimes x',$$

where $e \otimes e'$ denotes the element of $\bar{C} \otimes \bar{C}'$ generated by $e \times e'$.

More generally, Bénabou [7] has constructed the coproduct of any family of locales by a similar method ; cf. also the transfinite construction of finite coproducts of locales or complete inductive classes given by Coppey [18].

If $\bar{C}$ and $\bar{C}'$ are local classes, but not locales, $\bar{C} \otimes \bar{C}'$ is not their coproduct in the category of local classes with morphisms preserving

153.1... aggregates and finite intersections; but to obtain this coproduct, it suffices to «add» $\bar{C}$ and $\bar{C}'$. More precisely, the coproduct C of a family of local classes C_i, $i \in I$, in this category is constructed as follows: For each i, let $\bar{C}_i$ be the locale obtained by adding a greatest element 1_i to C_i, and let $\underset{i \in I}{\otimes} \bar{C}_i$ be the coproduct locale $\bar{C}$; C is $\bar{C}$ less its greatest element; in C any element is an aggregate of finite intersections $z_j = x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{j_n}$, with x_{j_i} in the image of C_{j_i}.

If C_i is a local category for each $i \in I$, the coproduct C of the underlying local classes is a category, for the composition such that C_i be a subcategory for each i,

$$(y_{i_1} \wedge \ldots \wedge y_{i_n}) . (x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}) = (y_{i_1} . x_{i_1}) \wedge \ldots \wedge (y_{i_n} . x_{i_n})$$

if $y_{i_j}, x_{i_j} \in C_{i_j}$ and $\alpha(y_{i_j}) = \beta(x_{i_j})$ for each $j < n$,

$$\bigvee_{j \in J} z'_j . \bigvee_{j \in J} z_j = \bigvee_{j \in J} z'_j . z_j \quad \text{iff} \quad \alpha(z'_j) = \beta(z_j) \text{ for each } j \in J .$$

It is an ordered category which satisfies the axioms of a local category except that a morphism lesser than a composite may not be a composite of lesser factors. In fact, C is the coproduct of the C_i in the category of inductive categories in the sense of / 63 /, with functors preserving aggregates and all finite intersections.

It may be shown that the category of local groupoids, with functors preserving aggregates and finite intersections, admits coproducts. The proof lies on the fact that products of local groupoids exist and that, if $\mathfrak{G}$ is a local groupoid and $\mathfrak{A}$ a subgroupoid, then the local subgroupoid generated by $\mathfrak{A}$ consists of aggregates of finite intersections of elements of $\mathfrak{A}$. So the assumptions of the general existence theorem for coproducts of / 100 / are satisfied.

ON / 53 / : CATÉGORIES INDUCTIVES ET PSEUDOGROUPES.

This article is a natural sequel of / 47 /. Sections 1,2,4 are developed and generalized in / 126, 68, 75, 85 /.

155.1. Only sketches of this work have been published / 78, 101, 116 /. Pseudogroups associated to foliations are studied in / 54, 75 /.

155.2. Inductive groupoids are introduced in /47/, as a generalization of transformations pseudogroups /125/. Their study is developed in /126/, Chapter II, to which we refer for the missing proofs, and, in a more general frame, in /68/. Cf Comment 137.1.

156.1. Delete this sentence: $\mathfrak{G}$ has always a least element, which is the aggregate of the class $\emptyset$ (Axiom 4).

156.2 ¶ R. $A \neq \emptyset$ i.o. A .

If the intersection of $\mathfrak{G}$ exists, it is a greatest element 1 of $\mathfrak{G}_0$, and $\mathfrak{G}$ is discrete (because $\mathfrak{G}_0$ is downward closed in $\mathfrak{G}$).

156.3 ¶ R. partie non vide i.o. partie .

157.1. The mid-equality comes from the relation $\alpha(e) = e$, for each e in $\mathfrak{G}_0$. This relation follows from $ee = e$, which implies $\alpha(e) < e$, and from $e\alpha(e) = e$, which gives $e < \alpha(e)$.

Simpler proofs are given in /126/.

158.1. R. un élément de $\mathfrak{G}_0$ i.o. une unité (twice).

158.2 ¶ Replace by: ... toute partie majorée de $\mathfrak{G}_0$ a une borne supérieure dans $\mathfrak{G}$.

This join (called an aggregate) in $\mathfrak{G}$ is also the aggregate in $\mathfrak{G}_0$, since $\mathfrak{G}_0$ is downward closed and $f < g$ implies $\alpha(f) < \alpha(g)$. So, $\mathfrak{G}_0$ is an inductive class. Cf. /126/, where the axioms are correct.

158.3. The wording of Axiom 4 did not imply that the aggregate in $\mathfrak{G}_0$ be the aggregate in $\mathfrak{G}$, whence the correction of Comment 158.2.

158.4. This theorem is generalized to preinductive groupoids in /126/, Chapter II, Theorem 1.1.

159.1. The proof is not complete: it must be shown that $\alpha(eg^{-1}) = \beta(ge)$ since a left inverse for the pseudoproduct might not be an inverse. Cf. /126/, Chapter II, Lemma 6 for the proof.

160.1. *Proof:* Let $u = \bigvee_{l \in L} \beta(l)$ in $\mathfrak{G}_0$. We have $f'\alpha(l) = l = f\alpha(l)$. From $l < f'$ and $\alpha(l) < e$, we deduce $l < f'e$ whence

$$\beta(l) < \beta(f'e) \quad \text{and} \quad u < \beta(f'e) .$$

It follows $uf' < f'e$. Similarly, $f'e < uf'$. So $uf' = f'e = f'$ and

$$\beta(f') = u\,\beta(f') = u .$$

160.2. This assertion follows from the fact that an aggregate in $\mathfrak{S}_0$ is also one in $\mathfrak{S}$ (by Axiom 4, as stated in Comment 158.2).

161.1. For the proof, cf. /126/, Chapter II, Proposition 12.2.

164.1 ¶ R. partie non vide i.o. partie .

164.2 + *Inductive categories:*

Inductive categories are introduced in /47/, for playing the same part vz local groupoids as categories of continuous maps vz transformations pseudogroups.

Inductive categories are internal categories; more precisely, let $\mathfrak{J}$ be the category of inductive classes with morphisms preserving all aggregates and intersections of finite bounded families. An inductive category $\mathfrak{C}$ (with $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}_0$) is exactly an internal category in $\mathfrak{J}$ satisfying the two supplementary conditions:

(i) The order induced on each Hom set is trivial.

(ii) If $k < gf$, there exist $g' < g$, $f' < f$ with $k = g'f'$.

In /63/, where internal categories in a concrete category (called *structured categories*) are defined for the first time, Axiom (ii) is dropped from the definition of an inductive category; and these inductive categories are used to define the notion of substructure, which led to the p-injections, or initial structures, in /66/ (cf. O, III-1).

Internal categories in larger subcategories of *Ord*, such as *ordered categories* (= internal categories in *Ord*, satisfying (i)), subpreinductive categories, preinductive categories,... are studied in /63, 66,67,75,76,100,102/. The main problems (cf. also /86/) relate to :
- definition and existence of the pseudoproduct, whose associativity is equivalent to Axiom (ii) (/63/, Proposition 25-II). Regular categories are those internal categories in *Ord*, which satisfy Axioms (i), (ii) and

(iii) For each $h: E \to E'$ in $\mathfrak{C}$ and for objects $e < E$, $e' < E'$, there exist pseudoproducts $he: e \to \hat{e}'$ and $e'h: \hat{e} \to e'$.

Completely regular categories (Comment 143.1) are regular categories in which $he: e \to E'$.

164.2... - the construction of reflections into inductive categories and into complete inductive categories; whence the categories of atlases /75/ and the completion theorems given in /68, 76, 110/.

- the «etalement» or construction of local jets between germs, done for inductive categories here in Section 5, as a first step toward a theory of prolongations of ordered categories, akin to the prolongations of differentiable categories /78/ and topological categories /92/.

- the existence of quotients or quasi-quotients /66, 100/ and the universal adjonction of limits and colimits /102/.

164.3. The relations $\alpha(\epsilon') < \epsilon$ and $\beta(\epsilon') < \epsilon$ directly come from the fact that α and β preserve the order and ϵ' is lesser than e and e' (it is not necessary to take A).

165.1 + *Pseudoproduct:*

The pseudoproduct $h'h$ is defined for any pair (h', h). Indeed let

$$A = \{(k', k) \mid k' < h',\ k < h,\ \alpha(k') = \beta(k)\}.$$

This class admits an aggregate (g', g) in the product inductive class $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$. It is easily seen that $\alpha(g') = \beta(g)$, and the composite $g'g$ is the pseudoproduct $h'h$.

The associativity of the pseudoproduct follows from Axiom 6, which implies that $h''h'h$ is the aggregate of all the (strict) composites

$$k''k'k \text{ such that } k'' < h'',\ k' < h',\ k < h.$$

This definition of the pseudoproduct is valid for more general ordered categories, and the pseudoproduct is associative iff Axiom (ii) in Comment 164.2 is satisfied (cf. /63/, Proposition 25-II, /67, 75/).

165.2. There is no need of a transfinite construction (Comment 165.1).

165.3. Then $\mathfrak{C}$ is complete as an inductive species of structures over $\mathfrak{C}_0 \times \mathfrak{C}_0$. For completion theorems, cf. /47, 68/.

166.1. The first assertion is valid even if $\mathfrak{C}$ is not regular (cf. Comment 165.1).

166.2. The order is:

$T' < T$ iff T' is an open subspace of T,

$$f' < f \text{ iff } \alpha(f') < \alpha(f),\ \beta(f') < \beta(f) \text{ and } f' \text{ is a restriction of } f.$$

167.1. R. partie non vide i.o. partie .

168.1. Simpler proof: $l' < h$ and $\beta(l') < \beta(l) < \epsilon$ imply $l' < \epsilon h$, whence ϵh is in F because l' is.

169.1. R. famille non vide i.o. famille .

169.2. *Proof:* If $h \in H$ and $f'f \in F'F$, we have $h' = h \cap f'f \in H$; then

$$e = \beta(f\alpha(h')) \cap \alpha(\beta(h')f) \in E'$$

and

$$(\beta(h')f'e)(ef\alpha(h')) = \beta(h')f'f\alpha(h') = h' < h.$$

So $H \subset (\beta(H)F'E')(E'F\alpha(H))$. Conversely, $E'F\alpha(H) \subset F\alpha(H)$, since

$$\beta(f_1\alpha(h_1))f_2\alpha(h_2) > (f_1 \cap f_2)\alpha(h_1 \cap h_2) \in F\alpha(H),$$

where $f_i \in F$, $h_i \in H$; it follows

$$(\beta(H)F'E')(E'F\alpha(H)) \subset \beta(H)F'F\alpha(H) \subset H,$$

because $\beta(h_3')f_3'f_3\alpha(h_3)$ is greater than $h_3' \cap f_3'f_3 \cap h_3 \in H$.

170.1. This section is developed in /85/, in which the complete enlargement Theorem of /47/ is generalized; we refer to it for comments.

171.1. $p(\mathfrak{S})$ may not be closed under pseudoproducts, because $p(\mathfrak{S}_0)$ may not be closed under intersections.

172.1. Axioms 1, 2, 3 mean that $\pi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ is a strict inductive functor, Axiom 4 that it is faithful. Such inductive categories of homomorphisms are generalized in /63,67,110/. However, the results of this section are not taken back in another paper.

172.2. The regularity is not necessary; it is only used as in Section 2 to assert the existence of pseudoproducts which always exist (Comment 165.1).

172.3 ¶ Replace by: π définit $\mathfrak{C}$ comme catégorie inductive au-dessus de $\pi(\mathfrak{C})$. Indeed, π may not be 1-1.

172.4. R. famille compatible i.o. famille .

172.5. R. normale à droite (resp. à gauche) i.o. normale .

For instance, if $\mathfrak{C} = Set$, it is only left normal, and $\mathfrak{T}(Set) = Top$ is only left normal.

173.1. The definition of $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ is different according to $\mathfrak{C}$ right normal or left normal.

173.2. If $(T_i', h_i, T_i) < (T', h, T)$ for each $i \in I$, the aggregate is $(\hat{T}', \hat{h}, \hat{T})$ where $\hat{h} = \bigcup_i h_i$,

$$\hat{T} = \{ e \in T \mid e < \alpha(\hat{h}) \}, \quad \hat{T}' = \{ e' \in T' \mid e' < \beta(\hat{h}) \}.$$

Indeed,

$$\alpha(\hat{h}) = \bigcup_i \alpha(h_i) \in \hat{T}, \quad \beta(\hat{h}) = \bigcup_i \beta(h_i) \in \hat{T}'$$

and $\hat{h}\, e = \hat{h} \cap h\, e$, whence

$$\beta(\hat{h}\, e) = \beta(\hat{h}) \cap \beta(h\, e) \in \hat{T}' \text{ for each } e \in \hat{T}.$$

(The proof is similar on the left.) If I is finite, then

$$\bigcap_i (T_i', h_i, T_i) = (\bigcap_i T_i', \bigcap_i h_i, \bigcap_i T_i).$$

173.3. Add (resp. $T = f^{1} T' = \{ \alpha(e'f) \mid e' \in T' \}$).

(T', f, T) belongs to $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$ because $\mathfrak{C}$ is right (resp. left) normal.

The inductive groupoid $\mathfrak{T}(\mathfrak{G})$ is already defined in /47/, by analogy with the case $\mathfrak{G}$ is a transformations pseudogroup. It is constructed in a more general frame in /68/.

173.4. *Proof:* Let $(t_i)_{i \in I}$ be a compatible family of $\mathfrak{T}(\mathfrak{C})$, which is also compatible with respect to $\mathfrak{C}$ and such that there exists $h = \bigcup_i \pi(t_i)$; write $t_i = (T_i', h_i, T_i)$. As $T_i \cap T_j$ is a paratopology on $\pi(T_i) \cap \pi(T_j)$ we get

$$T_i \cap T_j = \{ e_i \cap e_j \mid e_i \in T_i, \quad e_j \in T_j \} \subset T_i.$$

Then $T = \{ \bigcup_{i \in I} e_i \mid e_i \in T_i \}$ is a paratopology, because $e_i \cap e_j \in T_i$, for each $j \in I$, implies

$$(\bigcup_{i \in I} e_i) \cap (\bigcup_{i \in I} \hat{e}_i) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in I} (e_i \cap \hat{e}_j) \in T$$

(the distributivity is used here). It follows that the aggregate of the t_i is (T', h, T), where $T' = \{ \bigcup_{i \in I} e_i' \mid e_i' \in T_i' \}$.

174.1. The second condition comes from the first one. Indeed, if $h < s$, and $\pi(h)$ is an object, then $\alpha(h) = \beta(h) = h$, since π is strict on $\pi(\mathfrak{C}_0)$ and π is faithful.

174.2. $\pi(\mathfrak{C})$ may not be closed under intersections of objects.

175.1. Cf. Comments 80.1 and 321.1.

175.2. R. $e_1 < e$, $e'_1 < e'$ i.o. $e_1 = e$, $e'_1 = e'$.

The proposition is valid for both orders, but the context makes clear the wanted order does not require that e and e' be fixed.

175.3. If $\mathfrak{C}$ is not etale, $(e', \pi(h), e)$ may not be in $\Theta(\mathfrak{C}', \mathfrak{C}'_0)$.

175.4. R. h et l d'une part, h_1 et l_1 d'autre part i.o. h et l.

176.1 + *The category of local jets:*

The notion of local jet generalizes the local jets between germs of topological spaces or of manifolds used as a tool for introducing the infinitesimal jets (next section and /39/). The construction of $\mathfrak{J}'$ as a quotient category was one of the motivations for studying quotient categories by equivalences which identify some objects, while most authors only deal with non-identifying objects equivalences (cf. Comment 191.1).

Here is a *proof that* $\mathfrak{J}'$ *is a category*:

1° The equivalence ρ is compatible with the source and target. Indeed, if $(e', h, e) \sim (e', g, e)$, then

$$e < \pi\,\alpha(h \cap g) < \pi(\alpha(h) \cap \alpha(g)),$$

so that $(e, \alpha(h), e) \sim (e, \alpha(g), e)$. Similarly for the target.

2° The equivalence is compatible with the composition: suppose

$$(e', h, e) \sim (e', g, e) \quad \text{and} \quad (e'', h', e') \sim (e'', g', e')$$

with $h'.h$ and $g'.g$ defined; write $s = \alpha(h' \cap g') \cap \beta(h \cap g)$. Then

$(h' \cap g')(h \cap g) = (h' \cap g')s \,.\, s(h \cap g)$ and $s(h \cap g) = s h\, \alpha(h \cap g)$, whence

$$\pi\alpha((h' \cap g')(h \cap g)) = \pi(\alpha(sh) \cap \alpha(h \cap g)) = \pi\alpha(sh) \cap \pi\alpha(h \cap g).$$

Now $e' < \pi(s)$ implies $e < \pi\alpha(sh)$ and $(e', h, e) \sim (e', g, e)$ gives $e < \pi\alpha(h \cap g)$. So

176.1... $e < \pi\alpha(sh) \cap \pi\alpha(h \cap g) = \pi\alpha((h' \cap g')(h \cap g)) < \pi\alpha(h'h \cap g'g)$.

Similarly $e'' < \pi\beta(h'h \cap g'g)$. That proves

$$(e'', h'.h, e) \sim (e'', g'.g, e).$$

3° There exists a neocategory quotient of $\Theta(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'_0)$ by ρ. It remains to prove it is a category. If (e'', h', e') and (e', g, e) are such that $(e', \alpha(h'), e') \sim (e', \beta(g), e')$ and if $s' = \alpha(h') \cap \beta(g)$, then we have

$$(e'', h's', e') \sim (e'', h', e'), \quad (e', s'g, e) \sim (e', g, e)$$

with $(h's').(s'g)$ defined. If moreover $(e, f, \hat{e})$ is such that

$$(e, \beta(f), e) \sim (e, \alpha(g), e)$$

and if $\hat{s} = \beta(f) \cap \alpha(s'g)$, we get

$$(e, \hat{s}f, \hat{e}) \sim (e, f, \hat{e}), \quad (e', s'g\hat{s}, e) \sim (e', g, e),$$
$$(e'', h'\beta(s'g\hat{s}), e') \sim (e'', h', e),$$

and the composite

$$(e'', h'\beta(s'g\hat{s}), e').(e', s'g\hat{s}, e).(e, \hat{s}f, \hat{e})$$

is defined. The associativity follows from this fact.

176.2. *Proof:* The order is well-defined, because $(e', h, e) \sim (e', g, e)$ implies $(e'_1, h, e_1) \sim (e'_1, g, e_1)$ for each $e_1 < e$, $e'_1 < e'$, and it is the quotient order. A bounded family ${}_{e'_i}j_{e_i} h_i$, $i \in I$, admits as its aggregate ${}_{\bigcup_i e'_i}j_{\bigcup_i e_i}(\bigcup_i h_i)$. The pseudoproduct ${}_{e'}j_e h \; {}_{e_1}j_{e_1} s$, where $e_1 < e$ and ${}_{e_1}j_{e_1}\alpha(h) = {}_{e_1}j_{e_1} s$, is equal to ${}_{e''}j_{e_1}(hs)$, where $e'' = e' \cap \pi\beta(hs)$. If ${}_{e''_1}j_{e_1} k < {}_{e''}j_{e'} h' . {}_{e'}j_e h$, then ${}_{e''_1}j_{e_1} k$ is equal to ${}_{e''_1}j_{e'_1} h' . {}_{e'_1}j_{e_1} h$, where $e'_1 = e' \cap \beta(\pi(h)e_1) \cap \alpha(e''_1 \pi(h'))$.

177.1 ¶ The functor $\mathfrak{J} \to \mathfrak{C}'$ is etale, but generally not faithful. It is a *reflection of* $\pi: \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$, looked at as an object of the category of supraregular inductive functors over $\mathfrak{C}'$, *into the full subcategory whose objects are etale* (cf. Synopsis, Section D.5).

177.2. The term paratopology is used here in a wider sense than before.

Indeed, $[\mathfrak{C}]$ is cofinal in $\mathfrak{J}(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}')$ i.o. having a maximum (which would be a maximum of $\mathfrak{C}$); so it is a local class, but not a locale.

177.3. The term metatopology is used to mean a topology on a class which is not a set. In later papers, sets and classes are replaced by sets of a universe $\mathfrak{U}$ and sets of a larger universe to which belongs $\mathfrak{U}$. Then $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ corresponds to a larger enough universe, so that the metatopology becomes a «large» topology.

178.1. A topological category means an internal category in *Top* (which notion Charles defined in /50/).

178.2. The jet ${}_{E'}j^\lambda_E f$ is entirely determined by the data of E, E' and the atomic jets $j^\lambda_x f$ for each $x \in E$.

178.3. Local jets of continuous maps are already defined in /39/. In /40/, the topological category of local jets $\mathfrak{J}^\lambda$ (with the etale topology) is completely described, except that it is not called a category. Its subgroupoids are explicitly studied. These results motivated the general notion of jet introduced here.

178.4. R. $\alpha(f) = s$ est i.o. est .

Let $\tilde{\mathfrak{S}}$ be the category of sets associated to a universe $\mathfrak{U}$ and let $\hat{\mathfrak{U}}$ be a universe to which $\mathfrak{U}$ and $\mathfrak{C}_0$ belong. Then $\mathfrak{C}_0$ is also a species of structures over the category SET of sets associated to $\hat{\mathfrak{U}}$, and $\mathfrak{J}^\lambda(\mathfrak{C})$ becomes a structure of the complete enlargement of $\mathfrak{C}_0$ over SET (as it is constructed in /47,85/).

179.1 + *Infinitesimal jets* and their composition are introduced in /32,33/ to give a precise meaning to the symbols of differential calculus, like dx (cf. O, I). Subgroupoids of $\mathfrak{J}^r$ are also defined in these papers. Though the category $\mathfrak{J}^r$ is implicitly described in /32,40/, its explicit definition is published here for the first time. But Charles much earlier exposed it in his courses, in which he developed his conception of Differential Geometry as the study of the categories of jets and of their actions. His ideas are sketched in several brief notes /78,101, 103,116/. The recent development of Synthetic differential geometry up-dates his ideas in this domain.

ON /126/: CATÉGORIES DIFFÉRENTIABLES ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE, Chapitres I et II.

This article represents the first chapter and Section I of the second chapter of a course given by Charles during our stay in Montréal in August 1961. Chapter I was later extended in the book /122/ ; Chapter II is generalized in /68/ (originally written as a Section II of this chapter). The results of both chapters are collected in /55/ ; they develop ideas introduced in /47/.

The following chapters of this course have not been published; they studied differentiable categories of jets between manifolds and their actions and prolongations, along the lines drawn in /78/.

The text was multigraphed in Montréal in 1961; it has been composed on Varityper for inclusion in this volume.

184.1. Set-theoretical foundations are not stressed here. Charles's ideas on this question evolved during the writing of this course. In the examples (Section 3-I) he distinguishes sets and classes, as in his earlier papers /47,53/. However several propositions (e.g., Propositions 2-2-I, 3-3-II) consider structures on a given class of sets, which, later on, became a universe to perform constructions without trouble (as it is explained in O, III-1, Comments 24.1, 155.1, 211.2).

185.1. The equivalence is defined by:

$e \sim e'$ iff there exists a zig-zag from e to e' :

186.1. The style is less formal than in later papers: a subcategory «is» a subclass, a functor «is» a map, ...

186.2. The term «équivalence» always means «isomorphisme» in this paper (as well as in Charles's papers up to 1963).

190.1. The category of naturalized functors is studied in /52/ and in /122/, Appendix II, specially for defining type functors and for constructing structures (cf. Comment 5.1).

Naturalized functors are called pointed endofunctors by Kelly [54] who gives strong existence criteria for free algebras on them.

191.1 + *Quotient categories:*

The need for defining quotient categories by equivalences identifying some objects arose from several examples: the category of jets (/53/ Section 5), the enlargement of a category as a quotient of a comma-category (Theorem 2-III), the category of fractions of a category as a quotient of a category of triads (/55/, Appendix). The criteria given here were suggested by these examples; they are refined in /66/ and in /91/. Cf. O, III-1, Comment 170.1.

But such quotient categories (named strict quotients later on) do not always exist. A deeper study proved that the quotient of a category C by an equivalence ρ compatible with the source, target and composition is a neocategory (or multiplicative graph) C/ρ; the reflection $\bar{C}$ of C/ρ into categories is a *quasi-quotient category of* C by ρ, in the sense of /100/, i.e. it solves the universal problem of finding a category $\bar{C}$ through which each functor from C compatible with ρ factorizes. $\bar{C}$ is a *quotient category of* C by ρ (in the sense of /66/) iff $C/\rho \to \bar{C}$ is a 1-1 onto map.

194.1. $\hat{\mathcal{E}}$ equipped with this second composition is the category of partial maps of the (topos) $\bar{\mathcal{E}} = Set$. It is the subcategory of the category of spans of Set (with its composition given by pullback) consisting of the spans

$$\begin{tikzcd} & a(f) \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "insertion"] & \\ E' & & E \end{tikzcd}$$

196.1. The corresponding part, intended to constitute Section V of this Chapter I, has not been published. It should have developed the results of /52/ on the category of type functors, which is the smallest category of naturalized functors on Set containing $(\mathcal{P}, \gamma)$ and closed under products and colimits indexed by ordinals (cf. Comment 5.1). A first draft began with the description of the double category of quintets (= squares of the 2-category of categories), which was one of the motivations for introducing double categories, and then internal categories / 58, 59, 63/ ; after revision it became / 64/.

196.2. $\mathfrak{A}(\mathcal{S}_0)$ is the full subcategory of *Set* whose objects are the subsets of $\mathcal{S}_0$.

196.3. This Section II develops / 47/, Sections I and II, to the comments of which we refer, in particular for motivations.

198.1. Add et $\mathcal{S}_0 = \bigcup_{e\in\mathcal{C}_0} \bar{p}_0^{1}(e)$.

Otherwise, Axiom 4 is not satisfied.

198.2 ¶ R. Φ, si $\mathcal{C}$ est un groupoïde i.o. Φ .

If $\mathcal{C}$ is any category, $\Phi(\mathcal{C})$ is still a quotient category of $\mathcal{C}$, but not by the kernel N of Φ ; for instance, N may consist of identities while Φ is not 1-1.

199.1. The composition of $\hat{\mathcal{C}}$ is supposed to be deduced from that of $\mathcal{C}$, i.e., $\bar{f}z = \psi(\bar{f})z$ iff it is defined.

200.1. Species of structures are defined in / 47/ for groupoids; the results immediately extend to categories. It is a notion which is slightly laxer than a *discrete fibration* which corresponds to the case of the species of structures over $\mathcal{C}$ whose acting category $\mathcal{C}'$ contains each $f \in \mathcal{C}$ with $\alpha(f) \in \mathcal{C}'$ (such species of structures are called *strong*; cf. O, III-1, Comment 23.2).

203.1. An intransitivity class is often called an *orbit.*

206.1 + *Covariant maps, squares of functors and quintets :*

Section V has not been published (Comment 196.1).

Proposition 1, 2, 3 say the following categories are equivalent:

- The category of actions of categories (or species of structures onto), with covariant maps (ϕ_0, ψ) as morphisms ;
- The category of discrete fibrations onto, with squares of functors

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}' \arrow[d, "p'"'] & \mathcal{S} \arrow[l, "\phi"'] \arrow[d, "p"] \\
\mathcal{C}' & \mathcal{C} \arrow[l, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

206.1 ... as morphisms from p to p';

- The full subcategory of the category of diagrams in *Set*, whose objects are the functors $\Phi : \mathcal{C} \to Set$ taking non-void and disjoint values; the morphisms $\Phi \to \Phi'$ are the quintets

$$\begin{tikzcd} & Set & \\ \mathcal{C}' \arrow[ur, "\Phi'"] & \arrow[u, phantom, "\Leftarrow\tau"] & \mathcal{C} \arrow[ul, "\Phi"'] \arrow[ll, "\psi"] \end{tikzcd}$$

the composition being the horizontal composition of quintets /64/.

More generally, the category of strong species of structures (Comment 200.1), the category of discrete fibrations, and the category of diagrams in *Set* are equivalent. Taking for ψ the identity of $\mathcal{C}$ these equivalences restrict to equivalences (already given in /47/) between the category of strong species of structures over $\mathcal{C}$, the category of discrete fibrations over $\mathcal{C}$, and the category of functors $Set^{\mathcal{C}}$.

In other literature, species of structures have been first considered under the aspect of set-valued functors. But in this way the notion does not internalize. So in the seventies, when attention focused on internal structures, it was often replaced by discrete fibrations (cf. O, III-1, Comment 25.1). In particular, internal discrete fibrations play a big part in Topos theory, as Diaconescu's Theorem exemplifies.

Recently, Joyal [51] has developed a kind of algebra on species of structures over the groupoid of finite sets, akin to the Grassmann algebra, species of structures being thought of as «formal series».

208.1. *A foliation on* E is a pair (T, T') of topologies on E such that each point x of E has a neighborhood in T' on which T and T' induce the same topology; moreover T' is locally connected.

These foliations, which generalize foliated manifolds (/47/ and Comment 151.1) are studied in /54/ written at the time of this course.

208.2. Axiom 2 means that p is faithful. Homomorphisms categories are already defined in /47/.

209.1. Both actions are restrictions of the action of $\mathcal{H}^{op} \times \mathcal{H}$ on $\mathcal{H}$ whose corresponding set-valued functor is Hom on $\mathcal{H}$.

210.1. Theorem 1 expresses that the induced category $\kappa^*(\mathcal{H}, p)$ is just an instance of pullback, namely:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K} \arrow[d, "p"'] & \kappa^*(\mathcal{H}, p) \arrow[l, "\eta"'] \arrow[d, "\bar{p}"] \\ \mathcal{C} & \bar{\mathcal{C}} \arrow[l, "\kappa"] \end{tikzcd}$$

is a pullback in the category of categories (but pullbacks were not well known in 1961). Corollaries 3 and 4 state that discrete fibrations and concrete transportable categories are preserved by pullback (or by change of base) along any functor.

213.1. In other words, horizontal and vertical composites of squares which are pullbacks are pullbacks.

215.1 + *Induced categories and species of structures:*

They were issued from fibre bundle theory. In /50/ Charles proved that a fibre bundle $E(B, F, G, H)$, with base B, fibre F, structural group G and associated principal fibre bundle H may be looked at as a (topological) species of structures $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$ over the (locally trivial) groupoid $\mathcal{C} = HH^{-1}$ of isomorphisms from fibre to fibre, with $p_0 : \mathcal{S}_0 = E \to B$ the projection on the base. Now if $q : B' \to B$ is a (continuous) map, the induced fibre bundle $q^*(E)$ (in a classical sense) corresponds to the (topological) species of structures induced from $\mathcal{S}$ over the groupoid $q^*(\mathcal{C})$.

The induced category has the following universal property (cf. /66/ Theorem 9-I): Let $|\ | : Cat \to Set$ be the non-faithful «objects» functor. *If* $\mathcal{C}$ *is a category and* $q : \mathcal{B} \to \mathcal{C}_0$ *a map, the canonical functor* $\eta : q^*(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ *is a* $|\ |$*-injection*, that is an initial lift of the singleton source $(q, \mathcal{C})$; and conversely all the $|\ |$-injections are of this form, up to isomorphism. The factorization indicated in Proposition 2 is a particular case of the universal property satisfied by an $|\ |$-injection.

Internal induced categories and species of structures are obtained in /66, 89/.

217.1 + *Change of base along a discrete fibration:*

The corollary is not precise enough (since the composite $\eta'\pi$ does not determine η'). It is a consequence of the following result:

If $\mathcal{S}$ is any category, we denote by $Diag\,\mathcal{S}$ the category of diagrams in $\mathcal{S}$, whose morphisms are the quintets

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}' \arrow[dr, "\eta'"'] & & \mathcal{K} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\eta"] \arrow[ll, phantom, shift right=4, "\Leftarrow\tau"] \\ & \mathcal{S} & \end{tikzcd}$$

(that is, π, η, η' are functors and $\tau : \eta \Rightarrow \eta'\pi$ is a natural transformation) with the horizontal composition of quintets /64/ :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}'' \arrow[dr, "\eta''"'] & & \mathcal{K}' \arrow[ll, "\pi'"'] \arrow[dl, "\eta'"] \arrow[ll, phantom, shift right=4, "\Leftarrow\tau'"] & & \mathcal{K} \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\eta"] \arrow[ll, phantom, shift right=4, "\Leftarrow\tau"] \\ & \mathcal{S} & & \mathcal{S} & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathcal{K}'' \arrow[dr, "\eta''"'] & & \mathcal{K} \arrow[ll, "\pi'\pi"'] \arrow[dl, "\eta"] \arrow[ll, phantom, shift right=4, "\Leftarrow\tau''"] \\ & \mathcal{S} & \end{tikzcd}$$

where $\tau'' = \tau'\pi.\tau$ (this category was to be defined in missing V).

PROPOSITION. *Let $p: \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ be a discrete fibration. Then pullback along p extends into a functor $p^*: Diag\,\mathcal{C} \to Diag\,\mathcal{S}$:*

$$\begin{tikzcd} \bar{\mathcal{C}}' \arrow[dr, "\kappa'"'] & & \bar{\mathcal{C}} \arrow[ll, "\lambda"'] \arrow[dl, "\kappa"] \arrow[ll, phantom, shift right=4, "\Leftarrow\theta"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd} \kappa'^*(\mathcal{S}, p) \arrow[dr, "\eta'"'] & & \kappa^*(\mathcal{S}, p) \arrow[ll, "\pi"'] \arrow[dl, "\eta"] \arrow[ll, phantom, shift right=4, "\Leftarrow\tau"] \\ & \mathcal{S} & \end{tikzcd}$$

where

$$\pi((\kappa(\bar{k}), \epsilon), \bar{k}) = ((\kappa'\lambda(\bar{k}), \theta(\bar{e})\epsilon), \lambda(\bar{k})),$$
$$\text{if } \bar{k}: \bar{e} \to \bar{e}' \text{ in } \bar{\mathcal{C}}, \text{ and } \tau(\epsilon, \bar{e}) = (\theta(\bar{e}), \epsilon).$$

The functor alluded to in Corollary 1 is the restriction of p^* to the subcategory $\mathcal{C}^{\bar{\mathcal{C}}}$ of $Diag\,\mathcal{C}$. In Corollary 1, p is onto; this condition is weakened in Corollary 2 (though still stronger than p any discrete fibration).

218.1. $(\kappa, \bar{\mathcal{C}})$ is an inessential extension of $\mathcal{C}$ iff $\kappa : \bar{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ is a retraction.

220.1. This example has suggested the definition of inessential extensions of categories as a generalization of groups ones. However, it is not clear how to deduce it from Proposition 8. The proof makes use of the retraction $\kappa' : \bar{\mathcal{C}}' \to \mathcal{G}'$ (constructed after, in Proposition 4-2-II) which sends $k: e \to e'$ to $f_{e'}^{-1} k f_e$, where $f_e : u \to e$ is a choosen isomorphism for each $e \in \mathcal{C}'_0$; then $\bar{\Phi}(k) = (\psi(f_e^{-1} k f_e), e', e)$, and the kernel of $\bar{\Phi}$ is the union of the groups $f_e N f_e^{-1}$.

220.2. This section has been developed in /122/ Chapter V, in a more complicated setting. It stemmed from the brief paragraph in /47/ on enlargements of a homomorphisms category, looked at as a species of structures.

224.1. The text is not clear: the (evident) proposition does not use $\mathcal{C}'$; the proof says that, if $\mathcal{C}$ is a retract of $\bar{\mathcal{C}}$, so is the full subgroupoid $\mathcal{C}'$ generated by $\mathcal{C}$.

225.1. The notation $f'^{-1} h f$ means the composite $(f', S')^{-1} h(f, S)$, with

$$(f, S) \in \Sigma', \quad (f', S') \in \Sigma', \quad h: fS \to f'S' \text{ in } \mathcal{H}.$$

It reminds of the action of $p'(\Sigma') \times p'(\Sigma')$ on $\mathcal{H}$.

227.1 + *Universal enlargement of a concrete category:*

Theorem 2, as well as the more general Theorem 4, constructs a maximal enlargement of a homomorphisms category, developing the idea sketched in /47/ Page 135. It led to the theorems of universal extensions of functors given in /72,77,79/ and /122/, Chapter V, and internalized in /89,90,95,96/ (cf. O, III-2 and its comments). The enlargement of Theorem 2 is characterized as follows:

First notice that the construction of $\bar{\mathcal{H}}$ is still valid if the condition that $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ be a species of structures is relaxed into:

(*) Σ is a subgroupoid of $\mathcal{H}$ such that the restriction of p to Σ be amnestic; which means that two morphisms of the groupoid Σ with the same source and same image by p are equal.

Now let $\bar{\mathcal{C}}$ be a category. We denote by $\mathcal{H}om/\bar{\mathcal{C}}$ the category whose objects are the $(\bar{\mathcal{C}}, p, \mathcal{H}, \Sigma)$ such that $\mathcal{H}$ is a category, Σ a subgroupoid of $\mathcal{H}$ and $p: \mathcal{H} \to \bar{\mathcal{C}}$ a faithful functor whose restriction to Σ is amnestic; a morphism

$$v: (\bar{\mathcal{C}}, p, \mathcal{H}, \Sigma) \to (\bar{\mathcal{C}}, p', \mathcal{H}', \Sigma')$$

is defined by a functor $v: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ which sends Σ to Σ' and which satisfies $p'v = p$.

$\mathcal{H}om/\bar{\mathcal{C}}$ admits the full subcategory of *maximal homomorphisms*

227.1... *categories over* $\bar{\mathcal{C}}$, whose objects are the $(\bar{\mathcal{C}}, p_1, \mathcal{H}_1, \Sigma_1)$ such that $(\bar{\Gamma}, p_1, \Sigma_1)$ be a discrete fibration, where $\bar{\Gamma}$ is the groupoid of isomorphisms of $\bar{\mathcal{C}}$.

MAXIMAL ENLARGEMENT THEOREM. *The category of maximal homomorphisms categories is reflective in* $\mathcal{H}om/\bar{\mathcal{C}}$.

Δ. The reflection of $(\bar{\mathcal{C}}, p, \mathcal{H}, \Sigma)$ is the homomorphisms category $(\bar{\mathcal{C}}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Sigma})$ constructed as in Theorem 2. The reflector η is defined by the functor:

$$\mathcal{H} \to \bar{\mathcal{H}} : h \mapsto (h, p(e'), p(e)) \bmod \rho \quad \text{if } h: e \to e'.$$

If $(\bar{\mathcal{C}}, p', \mathcal{H}', \Sigma')$ is a maximal homomorphisms category and $v: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ a morphism, then v factorizes through η into $\bar{v}: \bar{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}'$ which sends $(h, f', f) \bmod \rho$ to $g' v(h) g^{-1}$, where g and g' are the unique morphisms of Σ' with sources $v(e)$ and $v(e')$ and images f and f' (they exist because $p': \Sigma' \to \bar{\Gamma}$ is a discrete fibration). ∇

COROLLARY. *The category of concrete transportable categories over* $\bar{\mathcal{C}}$ *is reflective in the category of concrete categories over* $\bar{\mathcal{C}}$.

Δ. A concrete category over $\bar{\mathcal{C}}$ is a faithful amnestic functor $p: \mathcal{H} \to \bar{\mathcal{C}}$; it is identified to the object $(\bar{\mathcal{C}}, p, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ of $\mathcal{H}om/\bar{\mathcal{C}}$, where $\mathcal{H}_\gamma$ is the groupoid of isomorphisms of $\mathcal{H}$. It is transportable iff this object is maximal. Whence the corollary, since $\bar{\mathcal{H}}_\gamma = \bar{\Sigma}$ when $\mathcal{H}_\gamma = \Sigma$. ∇

If $\bar{\mathcal{C}}$ and $\mathcal{H}$ are groupoids, we get:

COROLLARY 2. *The category of discrete fibrations over the groupoid* $\bar{\Gamma}$ *is reflective in the category of amnestic functors over* $\bar{\Gamma}$.

(Cf. Comment 133.1 for this last corollary.)

230.1. The theorem follows by Corollary 2 of Theorem 2 and Corollary 3 of Theorem 3, because the canonical extension of a species of structures is a species of structures.

232.1. The results of this section, suggested by /47/ and partially given in /53/, are generalized in /68/ ; we refer to the comments on these three papers.

233.1 ¶ An inductive class is not a complete meet-lattice, unless it has a greatest element.

236.1. Proposition 5 states the initial definition of an inductive groupoid as given in /47/. For other definitions, cf. Comment 262.1.

239.1. A simpler proof consists in proving (I) implies each f induces a unique element fe on $e < \alpha(f)$; then a subset A bounded by f admits $f(\cup \alpha(A))$ as its aggregate.

240.1. Theorem 1 is already proved in /53/ for inductive groupoids, but the proof is slightly different.

242.1. The end of the proof that $\mathcal{S}$ is a groupoid may be simplified: From Lemma 2, $f^{-1} = f'\beta(f)$ implies

$$\alpha(f^{-1}) = \alpha(f')\beta(f) = \beta(f),$$

so that the composite $f^{-1}.f$ is defined, and f^{-1} is a left inverse of f in the category $\mathcal{S}$. Therefore $\mathcal{S}$ is a groupoid.

248.1. A weak inductive subclass is a p-substructure of $\mathcal{A}$, where p is the forgetful functor to *Set* from the category of preinductive classes, with morphisms preserving aggregates and finite intersections. A weak subinductive part is a p'-substructure of $\mathcal{A}$, when p' is the forgetful functor to *Set* from the category of preinductive classes, with morphisms preserving aggregates and intersections of finite *bounded* families.

251.1. Section III became /68/.

255.1. The weak inductive component A of B consists of the f in $\mathcal{S}$ such that there exists

$$e \in \alpha(B) \cup \beta(B) \text{ with } \alpha(f) < e \text{ or } \beta(f) < e ;$$

it is also the component of the downward closed subclass of $\mathcal{S}$ generated by $\alpha(B) \cup \beta(B)$, or still the weak inductive component of $\alpha(B) \cup \beta(B)$. The inductive component of B is the same as the weak component of the class E consisting of the aggregates of subclasses of $\alpha(B) \cup \beta(B)$.

ON /68/ : GROUPOÏDES SOUS-INDUCTIFS.

257.1. Chapter 2 refers to /126/. Part IV is published in /85/.

258.1. The style is less informal than in /126/. The initial draft was written in 1961, but revised two years later, after the theory of structured categories (= internal categories in a concrete category, O, III-1) had shown the necessity of more strict notations.

For instance, the composition of a category is denoted by «.», to distinguish it from the pseudoproduct in an ordered category.

258.2 ¶ R. classe non vide i.o. classe .

This error, which comes from /53/, was corrected in /126/.

259.1 + *Why subinductive classes?*

R. classe non vide i.o. classe .

The definition of a subinductive class was motivated by the following examples:

- the class of usual algebraic structures of a certain type (groups, rings,...), with the order: is a substructure of;
- the class of categories (resp. of groupoids), with the order: is a subcategory of ; it plays a part in /63/ ;
- the class of (weakly) complete atlases of an inductive groupoid (as defined in Section 4);
- the class of (topological) vector spaces with the order: is a linear subspace of; it is described in [26], where subinductive categories are introduced.

A subpreinductive class $\mathfrak{A}$ gives rise to a presheaf over itself, with values in the category of meet-lattices and morphisms preserving aggregates and intersections of non-void subsets; the stalk at a is the initial section defined by a, and to $a' < a$ is associated the corresponding inclusion, which is a morphism by Proposition 3. $\mathfrak{A}$ is a subinductive class iff this presheaf takes its values in the full subcategory of complete lattices.

261.1. R. classe non vide i.o. classe .

262.1 + *Sub(pre)inductive groupoids as internal groupoids:*

We denote by *Ord* the category of ordered sets.

For an internal groupoid S *in* *Ord*, *the three following axioms are equivalent, where* $<$ *denotes the order on the object of morphisms,*

262.1 ... and $\mathcal{S}$ the underlying groupoid:

(I) The map $f \mapsto f^{>} = \{ f' < f \}$ is a generalized functor from $\mathcal{S}$ to $\mathcal{S}$.

(I') The source $\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}_0$ is an etale /85/ ordered map, that is, if $f \in \mathcal{S}$, $e \in \mathcal{S}_0$ and $e < \alpha(f)$ there exists one and only one $f' < f$ such that $\alpha(f') = e$; this f' is denoted by fe.

(I") The composition $\kappa : \mathcal{S} * \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ is an etale map, that is if $k < g.f$ there exists one and only one pair (g', f') such that:

$$g' < g, \quad f' < f, \quad \alpha(g') = \beta(f) \quad \text{and} \quad k = g'.f'.$$

Δ. Proposition 2-1 of / 126 / Chapter 2 proves (I) implies (I'). If (I') is satisfied and $k < g.f$, then k admits the unique factorization

$$k = g'.f' \quad \text{with} \quad f' = f\alpha(k) < f \text{ and } g' = k.f'^{-1} < g.$$

Last, if (I") is satisfied, so is (I) because $f < e$ where e is an object implies the two factorizations $f.\alpha(f)$ and $\beta(f).f$ of $f < e.e$ are identical, whence $\alpha(f) = f \in \mathcal{S}_0$. ∇

An internal groupoid in *Ord* satisfying these axioms is called a *functorially ordered groupoid* (/63/, Section 6-II). An example of an internal groupoid in *Ord* which is not functorially ordered is the groupoid of holonomy of a locally simple foliation /75/.

From /126/, Chapter 2, Propositions 3.1 and 4.1 (resp. from Propositions 6 and 7 here) it follows that *a $\hat{(}$pre$\hat{)}$inductive groupoid* (resp. sub$\hat{(}$pre$\hat{)}$inductive groupoid) $\mathcal{S}$ *may be characterized as an internal groupoid in any of the following subcategories of Ord, which satisfies* (I') (or (I), or (I")):

(i) the full subcategory whose objects are $\hat{(}$pre$\hat{)}$inductive (resp. sub$\hat{(}$pre$\hat{)}$inductive) classes;

(ii) the category of $\hat{(}$pre$\hat{)}$inductive (resp. sub$\hat{(}$pre$\hat{)}$inductive) classes with morphisms preserving sub-aggregates;

(iii) the category of $\hat{(}$pre$\hat{)}$inductive (resp. sub$\hat{(}$pre$\hat{)}$inductive) classes with morphisms preserving sub-aggregates and intersections of bounded finite families.

Other characterizations of sub$\hat{(}$pre$\hat{)}$inductive groupoids are given

262.1 ... by Corollary, Proposition 5 and Theorem 1, via the pseudoproduct.

The groupoids of isomorphisms between algebraic structures of a certain type, between categories or groupoids, between topological vector spaces, ... are subinductive groupoids (Comment 259.1). However subinductive groupoids have been scarcely used (except here and in /85/) while inductive groupoids have been studied by many authors (cf. Comment 137.1).

262.2. This definition of pseudoproduct is valid in more general ordered categories; cf. Comment 165.1.

265.1 + Axiom (D) is the *infinite distributivity law.* It may be expressed with reference only to intersections of bounded elements (which behave well in a subpreinductive class); it is used in several proofs here and in /85/ under this weaker form (D'):

PROPOSITION. *Axiom (D) is equivalent to:*

(D') If c is a sub-aggregate of a subclass B of the subpreinductive class $\mathfrak{A}$, then for each $a' < c$, we have $a' = \overset{c}{\underset{b \in B}{\cup}} a' \cap b$.

Δ. (D) implies (D'). Conversely, if $a \in \mathfrak{A}$ and if there exists $a \cap c$, Axiom (D') gives:

$$a \cap c = (a \cap c) \cap c = \overset{c}{\underset{b \in B}{\cup}} (a \cap c) \cap b = \overset{c}{\underset{b \in B}{\cup}} (a \cap b),$$

so that (D) is also satisfied. ∇

266.1. Weak inductive subclasses and subinductive parts have the same characterization by substructures as the one given in Comment 248.1 in the case of preinductive classes.

268.1. A subpreinductive subgroupoid $\mathcal{S}'$ is a q-substructure of $\mathcal{S}$, when q is the forgetful functor to *Set* from the category of subpreinductive groupoids, the morphisms being the functors preserving intersections of bounded finite families. A weak subpseudogroup is a q'-substructure of $\mathcal{S}$, where q' is the functor to *Set* from the category of subpreinductive groupoids, with functors preserving now subaggregates and *all* finite intersections. A subpseudogroup is a weak subpseudogroup closed under sub-aggregates.

270.1. The terminology contradicts the classical meaning of a component, which requires a minimality property. These components are used to define the inductive component of a subclass (Definition 11), which is directly defined in /55/.

277.1. The condition $(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma) \subset \Gamma$ is equivalent to $B^{-1}B \subset \Gamma$ if $\beta(B)$ is compatible, hence e. g. if $\mathcal{S}$ is a prelocal groupoid.

284.1 + *Concrete atlases:*

The notion of atlas generalizes the «concrete» atlases used to define local structures in /125, 47/. In particular, Corollary 1 of Proposition 8 comes from the construction given in /125/ of the complete atlas from E to E' compatible with a transformations pseudogroup Γ on E, generated by an atlas B; this special case is obtained if $\mathcal{S}$ is the groupoid Top_γ of homeomorphisms and if $E' = \cup\,\beta(B)$. Similarly the composition of complete atlases (Proposition 9) is suggested by the composition of concrete atlases in /125/. In /47/ complete atlases on local groupoids are used to prove the complete enlargement Theorem for local species of structures, generalized in /85/.

Categories of atlases in a category or in an ordered category are studied in /75/, as a tool for completing ordered categories /75, 76/. Still more abstractly, morphisms of the free completion of a category may be considered as atlases «between functors» (cf. O, IV-1 Comment 199.1).

287.1. The proof (as well as the proofs of Theorem 2-4, 4-4, 5-4, 4-6) is simplified by verifying, i. o. Axiom (I), the equivalent Axiom (I') (cf. Comment 262.1). Indeed, Axiom (I') asserts the existence and unicity of the element induced by F on $H < a(F)$; the existence of FH is anyway proved in the second paragraph, page 286; it is unique, since $G < F$ and $a(G) = H$ imply

$$G = F\,a(G) = F\,a(H) = FH.$$

Then lines 5-13 of page 287 may be deleted.

290.1. R. $A \neq \emptyset$ i.o. A.

290.2. In fact, $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}(\mathcal{S})$ is an inductive groupoid. The proof is similar to that of Theorem 6.4.

291.1. For a universal property of $\bar{\mathcal{S}}'$, cf. Comment 306.2.

291.2. R. A non vide i.o. A.

295.1. R. A non vide i.o. A.

297.1. The order $F' \ll F$ is equivalent to:

$F' \subset F$ and F' is downward closed in F.

Indeed, the preceding proof gives one direction. For the other, suppose $F' \ll F$, whence $F' \subset F$; if $f' \in F'$ and $f \in F$, $f < f'$, we have

$$f = f'\alpha(f) = f'\alpha(f')\alpha(f) = f'\alpha(f)\alpha(f') \in F\alpha(F') = F',$$

so that F' is downward closed in F.

298.1. If $\mathcal{S}$ is an inductive groupoid, $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ with $\ll$ is an inductive groupoid. This comes from the construction of the inductive category of paratopologies of an inductive category /53, 47/. Cf. also Comment 140.

299.1. R. A non vide i.o. A.

303.1. Cf. also Comment 306.2.

304.1. π is a functor, because

$$\pi(G \circ F) = \overset{\Sigma}{\cup}(G.F) = \overset{\Sigma}{\cup}G.\overset{\Sigma}{\cup}F = \pi(G)\pi(F)$$

whenever $\bar{\alpha}(G) = \bar{\beta}(F)$. The fact that $\mathcal{S} \hookrightarrow \Sigma$ preserves aggregates is necessary to have the equality $\overset{\Sigma}{\cup}A' = \overset{\Sigma}{\cup}A''$ where A' is the complete subclass generated by A''.

The proof does not require Axiom (D) in Σ; hence, in condition (C), Σ local may be replaced by Σ *inductive*.

305.1. A universal characterization of $\check{\mathcal{S}}$ is given in Comment 306.2.

The theorem is still valid if, in Condition (C), $\check{\Sigma}$ local is replaced by $\check{\Sigma}$ *inductive*. But the proof is different, since the completion $\bar{\Sigma}$ is only defined when $\check{\Sigma}$ is local. The proof of Theorem 2.5 (which uses Axiom (D) in $\mathcal{S}$ but not in Σ) is easily adapted to this case.

306.1. $\hat{\mathcal{S}}$ is isomorphic to $\mathcal{S}$ iff $\mathcal{S}$ is relatively complete.

306.2 + *Universal completions of prelocal groupoids:*

Let $\mathcal{S}$ be a prelocal groupoid. The local groupoids $\bar{\mathcal{S}}$ of complete

306.2... classes (Theorem 2.5), $\mathring{\mathcal{S}}$ of complete classes with bounded sources and targets (Theorem 3.5), $\check{\mathcal{S}}$ of bounded complete classes (Theorem 4.5) and $\bar{\mathcal{S}}'$ of complexes (Theorem 3.4) have the following universal characterization. Let $\mathcal{G}^{\ell}$ denote the category of local groupoids, with functors preserving aggregates and finite intersections; let $\mathcal{G}^{\ell}_{c}$, $\mathcal{G}^{\ell}_{rc}$ be its full subcategories of complete local groupoids, and of relatively complete local groupoids.

PROPOSITION A. *$\mathcal{G}^{\ell}$, $\mathcal{G}^{\ell}_{c}$ and $\mathcal{G}^{\ell}_{rc}$ are reflective subcategories of the category of prelocal groupoids with functors preserving aggregates and finite intersections; a reflection $\mathcal{S}_1$ of $\mathcal{S}$ is respectively its localization $\ddot{\mathcal{S}}$, its completion $\bar{\mathcal{S}}$ and its relative completion $\check{\mathcal{S}}$.*

This proposition is proved in /66/ (Theorems 3-I, 4-I, 5-I); a local functor $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$, where $\mathcal{C}$ is respectively a local groupoid, a complete local groupoid, a relatively complete local groupoid, factorizes into:

$$\phi = (\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}_1 \xrightarrow{\Phi} \mathcal{C}), \quad \text{where} \quad \Phi(C) = \cup\phi(C).$$

In fact the proof is similar to that given in Comment 109.3.

PROPOSITION B. *$\mathcal{G}^{\ell}$, $\mathcal{G}^{\ell}_{c}$ and $\mathcal{G}^{\ell}_{rc}$ are reflective subcategories of the category of prelocal groupoids, with functors preserving finite intersections (but not aggregates).*

Δ. 1° The reflection of $\mathcal{S}$ into $\mathcal{G}^{\ell}_{c}$ is the local groupoid $\bar{\mathcal{S}}'$ of complexes of $\mathcal{S}$. Indeed, the insertion $\mathcal{S} \hookrightarrow \bar{\mathcal{S}}'$ preserves finite intersections (and even all intersections), but not aggregates (which is the difference with the insertion in the completion $\bar{\mathcal{S}}$). Moreover:

a) $\bar{\mathcal{S}}'$ is complete: let Γ be a complete subclass of $\bar{\mathcal{S}}'$; if C and C' are elements of Γ, and if $c \in C$, $c' \in C'$ then c and c' looked at as complexes are lesser than C and C', hence they are compatible in $\bar{\mathcal{S}}'$. As the insertion $\mathcal{S} \hookrightarrow \bar{\mathcal{S}}'$ preserves finite intersections and $\mathcal{S}$ is prelocal, it follows that c and c' are also compatible in $\mathcal{S}$. Whence the subclass $\cup\{C \mid C \in \Gamma\}$ is a complex of $\mathcal{S}$, which is the aggregate of Γ in $\bar{\mathcal{S}}'$.

b) Let $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ be a functor preserving finite intersections, to a

306.2... complete local groupoid; then ϕ factorizes into:

$$\phi = (\mathcal{S} \hookrightarrow \bar{\mathcal{S}}' \xrightarrow{\bar{\phi}} \mathcal{C}), \quad \text{where } \bar{\phi}(C) = \cup \phi(C),$$

because ϕ sends the compatible class C on a compatible class in the complete local groupoid $\mathcal{C}$. It is proved as in Proposition A, as well as the assertions below.

2° The reflection of $\mathcal{S}$ into $\mathcal{G}^{\ell}_{rc}$ is the subgroupoid $\hat{\mathcal{S}}'$ of $\bar{\mathcal{S}}'$ consisting of the complexes C such that $\alpha(C)$ and $\beta(C)$ are bounded in $\mathcal{S}$. Its reflection into $\mathcal{G}^{\ell}$ is the subgroupoid of $\bar{\mathcal{S}}'$ consisting of the bounded complexes. Notice that the corresponding insertions do not preserve aggregates. ∇

Charles obtained other completion theorems:

- in /75/, for the regular ordered holonomy groupoid of a foliation;
- in /85/, for prelocal species of structures;
- in /76/, subprelocal categories are embedded in sublocal ones.

Several authors have dealt with completions:

a) In [77], Rinow studies relatively complete groupoids (he calls them fully complete). Taking a functorially ordered groupoid $\mathcal{S}$ (Comment 262.1), he constructs the groupoid $\hat{\mathcal{S}}'$ of its complexes with bounded sources and targets. Then, if $\mathcal{S}$ is prelocal, he finds back its relative completion $\hat{\mathcal{S}}$ as a quotient of $\hat{\mathcal{S}}'$. He also constructs the local groupoid $\bar{\mathcal{S}}$ reflection of $\mathcal{S}$, as well as the groupoid $\bar{\bar{\mathcal{S}}}$ defined in Proposition 3, page 307. In [78], he generalizes these results to some ordered categories.

b) If $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$, so it reduces to a prelocal class (= infinite distributive meet-lattice), the insertion $\mathcal{S} \hookrightarrow \bar{\mathcal{S}}$ (resp. $\mathcal{S} \hookrightarrow \bar{\mathcal{S}}'$) is the universal embedding of $\mathcal{S}$ into a locale with preservation of aggregates and finite intersections (resp. of finite intersections). The insertion $\mathcal{S} \hookrightarrow \hat{\mathcal{S}} = \check{\mathcal{S}}$ (resp. $\mathcal{S} \hookrightarrow \hat{\mathcal{S}}'$) is a universal embedding into a local class, with the same preservations.

More generally, for any meet-lattice A, Johnstone [49] gives the following universal construction; adapting Grothendieck's sites, say

306.2... that (A, C) is a *site* if C is a *coverage of* A, that is a map C assigning to each $a \in A$ a set $C(a)$ of subsets of $a^{>}$ (called covers of a) such that

$$\{ m \cap b \mid m \in M \} \in C(b) \text{ if } b < a \text{ and } M \in C(a).$$

Let $C\text{-}Idl(A)$ be the set of subsets I of A which are downward closed and contain a if $M \in C(a)$ and $M \subset I$, ordered by inclusion. Then: *$C\text{-}Idl(A)$ is the locale freely generated by (C, A)* (cf. [49]).

This means that it is a free object with respect to the functor p from the category of locales and maps preserving aggregates and finite intersections (called the category of frames in [49]), to the category of sites with maps preserving finite intersections and covers; p sends L to (L, C_L), where

$$C_L(l) = \{ M \subset L \mid \cup M = l \} \text{ for each } l \in L.$$

For A infinite distributive (i.e. A is a prelocal class), its completions $\bar{A}'$ and $\bar{A}$ defined above are respectively the locales freely generated by $(A, \{\ \})$ and by (A, C_A).

As an application of his construction, Johnstone obtains coproducts of locales (cf. also Benabou [7], Coppey [18] and Comment 153.1).

c) If P is any poset, its *Mac Neille* (or Dedekind) *completion* [65] is the complete lattice $M(P)$ consisting of the *cuts in* P, that are the complete subclasses C of P for which

$$C = (C^{<})^{>} = \{ p \in P \mid p < a \ \ \forall a > C \}$$

(cf. Theorem 7.6). The embedding $P \to M(P)$ preserves aggregates and intersections, and $M(P)$ is the largest $\cup$-dense and $\cap$-dense extension of P (Banaschewski & Bruns [3]). But $M(P)$ may not be distributive if P is (Funamaya [32], Crawley [20]). If P is a prelocal class, $M(P)$ is a quotient of its completion $\bar{P}$, with the canonical inductive map $P \to M(P)$ sending B to $(B^{<})^{>}$.

308.1. Add: strictement plus petits que f.

It follows that the irreducible elements of $\mathcal{S}$ are the prime elements of its dual meet-lattice. In particular, if $\mathcal{S}_0$ has a greatest element (i.e., is a locale), its irreducible elements are the points of the co-free space associated to the dual locale of $\mathcal{S}_0$ (cf. Johnstone [49]).

310.1. This line may be deleted (it proves F' is downward closed in F).

313.1. If $K = g^< \cap f^<$ exists in the subinductive groupoid $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ then $f \cap g$ exists in $\mathcal{S}$. Indeed, there exists $k \in K$ such that $k < g$, $k < f$; for each h lesser than g and f, the filter $h^<$ is lesser than $g^<$ and $f^<$; it follows $h^< < K$, whence $k = h$. This proves $k = g \cap f$.

315.1. The inductive category of filters of a regular inductive category is constructed in /53/, Section 3. For an inductive groupoid $\mathcal{S}$, it reduces to the inductive groupoid $\mathcal{F}(\mathcal{S})$.

316.1. Theorem 3.5 may be applied with $\check{\Sigma} = \mathcal{S}'$, even if $\mathcal{S}'$ is not local, as Comment 305.1 points out.

ON /110/ : ÉLARGISSEMENT COMPLET D'UN FONCTEUR LOCAL.

This paper is centered on the Complete Enlargement Theorem for a local functor (sketched in a particular case in / 47 /); the construction is more direct than the analogue for local discrete fibrations in /85/. It has been written as part of a course on manifolds (Paris, 1968); it is self-contained except for some definitions taken from / 104/ Section 1 (which was also part of this course); we recall them in the following comments.

318.1. The terminology differs from /68, 85/ where a local subclass is called a subinductive subclass.

318.2. f is inductive iff it preserves aggregates and bounded finite intersections.

320.1. Here an inductive subclass only means an inductive class for the inclusion order ; in fact, F is closed under intersections, not under aggregates.

321.1 + *Completion of a local map and associated sheaf:*

The local map $g:(F, \subset) \to (E', <)$ is called the *completion of* $f:(E, <) \to (E', <)$. The construction of g transposes without modification when $(E', <)$ is only prelocal i.o. local, and g has the following universal property:

321.1... Given the local class $E' = (E', <)$, take the category $PLoc_{E'}$ whose objects are the local maps $f: E \to E'$ from a prelocal class $E = (E, <)$ (so that f preserves intersections of finite bounded families and all aggregates), the morphisms from f to $f_1 : E_1 \to E'$ being defined by the maps $u: E \to E_1$ preserving aggregates and all finite intersections (not only the bounded ones) such that $f = f_1 u$. Let $Loc_{E'}$ be the full subcategory of local maps with domain a local class, and $Loc^c_{E'}$ the full subcategory of complete local maps.

PROPOSITION. *The categories $Loc_{E'}$ of local maps and $Loc^c_{E'}$ of complete local maps are reflective subcategories of $PLoc_{E'}$.*

Δ. The reflection of $f: E \to E'$ into $Loc^c_{E'}$ is its completion $g: F \to E'$. The universality is proved as for the completion of a local species of structures (Comment 109.3). The reflection of f into $Loc_{E'}$ is the restriction $f_l : E_l \to E'$ of g to those f-complete classes B which are bounded in E. ∇

Now look at E' as a category with morphisms $e' \to e''$ iff $e'' < e'$ and equip E' with the class μ of its product-cones $\gamma: \vee e'_i \Rightarrow (e'_i)_i$. To $f: E \to E'$ considered as a functor, there is associated:

1. Its *universal* μ-completion $f_u : E_u \to E'$ (O, IV-1, Comment 94.1): the elements of E_u are all the subsets A of E which are downward closed, closed under aggregates and such that there exists $\vee f(A) = f_u(A)$; the order is the inclusion. The *completion g of f is the restriction of f_u to the f-compatible A.*

2. Its *Mac Neille μ-completion* $f_{MN}: E_{MN} \to E'$ (O, IV-1, Comment 76.1): the elements of E_{MN} are the subsets C of E such that there exists $\vee f(C) = f_{MN}(C)$ and which contain any a satisfying

$$f(a) < \vee f(C) \quad \text{and} \quad a < C^{<} = \{ x \in E \mid C < x \};$$

the order is the inclusion. f_{MN} is a restriction of f_u.

If f *is strict*, its localization f_l and its completion g are strict /85/. In this case, f_l *is a restriction of* f_{MN}. (Indeed, let B be a bounded f-complete class; if $a < B^{<}$ and $f(a) < \vee f(B)$, then

321.1 ... $$f(a) = \bigvee_{b \in B}(f(a) \wedge f(b)) = \bigvee_{b \in B} f(a \wedge b),$$
which implies $a = \bigvee_{b \in B}(a \wedge b) \in B$.)

Let f *be etale*, that is, it corresponds to a presheaf P on E' (Comment 80.1). Then its localization f_l and its completion g are etale, and the sheaf corresponding to g is the sheaf associated to P. It may be identified to the sheaf of sections of the universal μ-completion f_u of f. For E' a locale such a construction of the associated sheaf is given by Joyal and Carboni & Melloni [14]. The category PSh E' of presheaves over E' is equivalent to the category of etale local maps on E', and the category Sh E' of sheaves to the category of etale complete local maps. Hence the proposition admits the

COROLLARY *(Associated Sheaf Theorem). If* E' *is a local class, the category* Sh E' *of sheaves is reflective into* $P\,Sh$ E'.

The associated sheaf Theorem has been initially proved for sheaves on a topological space (Cartan [15], Godement [37]), then for sheaves on a site (Artin [2], Grothendieck, Giraud [35]), and more generally for sheaves in elementary toposes (Lawvere [57], Freyd [30], Johnstone [48]). It is also true for sheaves with values in an algebraic enough category (Gray [38], B. Mitchell [67]). We refer to the history of sheaves compiled by Gray [39] for more details. Another generalization is the completion theorem for local functors in the sequel.

A sheaf may also be considered as a presheaf satisfying some exactness conditions; whence more general «associated sheaf theorems» which assert that a category of functors H^S admits as a reflective subcategory the category of functors $S \to H$ sending some given cones to limit-cones, i.e. the category of models of a sketch on S (/ 106, 115/, Bénabou, Gabriel-Ulmer [33], Freyd-Kelly [31] and, in the enriched case, Foltz [29], Kelly [55]; for this kind of theorems, cf. O, IV-1, Comment 305.1).

321.2. Here a local category is an internal category in the category of local classes (and local maps), such that the order induced on each

Hom set be trivial. It is not required a morphism lesser than a composite be a composite, as it is in /53/. Cf. Comment 164.2.

322.1. Complete and relatively complete local functors $p: G \to G'$ between local groupoids are defined in /85/ (and, in a special case, in /47/). In particular, if p comes from a local species of structures, it is relatively complete if $p(G)$ is closed under aggregates or if p is a discrete fibration (cf. /85/).

323.1. For the definition of a regular ordered category, cf. Comment 164.2. A regular inductive category here is the same as in /53/.

325.1. The distributivity comes from the equalities:

$$B \cap (\bigvee_i B_i) = B \cap (\overline{\bigcup_i B_i}), \quad \bigvee_i (B \cap B_i) = \overline{\bigcup_i (B \cap B_i)},$$

and the fact that those sets consist of the elements:

$$b \wedge \bigvee_i b_i = \bigvee_i (b \wedge b_i), \quad \text{where} \quad b \in B, \ b_i \in B_i.$$

325.2 + *Universal (relative) completion of a local functor:*

Let Loc_C be the category whose objects are the local functors $\bar{q}: G \to C$, where C is the local category $(C^{\bullet}, <)$, the morphisms from $\bar{q}$ to $\bar{q}': G' \to C$ being defined by a local functor $\bar{u}: G \to G'$ which preserves all finite intersections and satisfies $\bar{q}'\bar{u} = \bar{q}$.

PROPOSITION. *If $\bar{q}: G \to C$ is a strict local functor and if G is strongly regular, then:*

1. the completion $\bar{Q}$ of $\bar{q}$ is its reflection into the full subcategory of Loc_C with objects the complete local functors;

2. the restriction $\bar{Q}_r$ of $\bar{Q}$ to the complete classes B such that $\alpha(B)$ and $\beta(B)$ be bounded is the reflection of $\bar{q}$ into the full subcategory of Loc_C whose objects are the relatively complete local functors. ($\bar{Q}_r$ is called the *relative completion of $\bar{q}$.)*

The proof is the same as in Comment 109.3, which corresponds to the special case: G and C are inductive groupoids and $\bar{q}$ is an hypermorphisms functor, i.e. it corresponds to a local species of structures; then $\bar{Q}$ and $\bar{Q}_r$ correspond to the completion and the relative completion of this local species of structures (/85/, Theorem 7.3). ∇

326.1. The existence of such an extension (via the Adjoint Functor Theorem of / 100/) is carried on by Leblond: for double functors in her Thesis [59]; more generally for internal categories in a concrete complete category with small enough generated substructures in [60].

327.1. p_γ is well-faithful iff p is amnestic.

328.1. The maximal enlargement P of p is also constructed in / 126 / Chapter 1, Theorem 2-III, and a universal characterization given in Comment 227.1.

329.1. The complete enlargement of $\bar{p}$ solves the problem of extending the strict local functor $\bar{p}$ into a complete strict local functor which is transportable. It may be constructed with one more step if $\bar{p}_\gamma$ is not relatively complete: then it suffices to replace $\bar{p}$ by its relative completion (Comment 325.2). Whence the special case of local species of structures, studied in / 85 /, Theorem 9.3. In this Theorem 9.3, objects of the complete enlargement are identified with some atlases. The same identification is valid in the general case. In fact, the primtive construction of the complete enlargement (for a local category of homomorphisms / 47 /) was carried through atlases, following the motivating examples (manifolds, fibre bundles,...).

330.1. More precisely, the objects of Δ^r are pairs (U, E) where U is an open subspace of the locally convex space E, the morphisms from (U, E) to (U', E') are the r-differentiable maps from U to U', the order is defined on objects by:

$(E', U') < (E, U)$ iff $E' = E$ and $U' \subset U$.

330.2 + *Generalized manifolds:*

The definition of local structures and the construction of the complete enlargement were motivated by a desire to axiomatize the glueing process leading to manifolds (Comment 7.2). Later several authors proposed solutions based on more concrete definitions of the order:

1. Manifolds associated to a *category with subobjects*, that is, a category K with a subcategory U of monomomorphisms, closed under pullback along any morphism. Holmann & Pumplün [46] define atlases,

330.2... manifolds in K as equivalence classes of diagrams in K indexed by meet-lattices. Notice that the category of manifolds so becomes a quotient of the free $\mathcal{J}$-cocompletion of the category K, where $\mathcal{J}$ consists of the small meet-lattices (by a construction of the free cocompletion given in O, IV-1, Comment 199.1).

Lohre [63] gives a more global description in the case of a suitable functor $V: K' \to K$ between two categories with subobjects: an atlas on an object E of K is described as a functor $F: I \to K'$ from a meet-lattice and a universal colimit-cone $\gamma: VF \Rightarrow E$ which «covers» E; a manifold is a class of «compatible atlases». C^r-manifolds are obtained when V is the functor $\Delta^r \to Top$ and «subobjects» are open sub spaces.

2. Manifolds associated to a *Grothendieck topology:* Bosch & Sagastume [11] define an abstract atlas on an object E of a category K as the data of a generalized functor between Grothendieck topologies with E as its generalized colimit; the category of abstract manifolds is a quotient of the category of abstract atlases. A similar idea is developed by Ouzilou [71]. Kawahara [53] defines the manifold extension of an embedding j of a category B into a site (K, Cov) (though he does not use the term); an atlas on an object E of K is a functor $m: X \to B$ such that X is a sub-order of Cov and $E = colim\, jm$. The C^r-manifolds are obtained when j is the embedding $\Delta^r \to Top$.

3. Manifolds as *coalgebras:* Appelgate & Tierney [1] consider a category with models $I: M \to A$, where A is cocomplete, and the associated cotriple $C = (rs, \eta, \delta)$. They define an atlas F on an object A of A as a subfunctor of the singular functor sA whose realization rF is isomorphic to A; these atlases are compared to the C-coalgebras. If Γ is a transformations pseudogroup and $I: \Gamma \hookrightarrow Top$, the atlases compatible with Γ (in the sense of / 125 /) correspond to the «regular atlases» defined in [1], and therefore to some C-coalgebras. However the morphisms between Γ-structures are more general than coalgebra morphisms. Their study is developed in Coppey [19].

SYNOPSIS

The papers collected in this Part II-1 originated in an attempt to «analyze the fundamental structures which may be considered as the objects of differential geometry». These structures, called *local structures*, encompass topological, differentiable, analytic, foliated manifolds, fibre bundles, locally homogeneous, euclidean,... spaces, etale spaces. To a species of local structures S_0 is associated the species of the *locally isomorphic* structures, which are defined by atlases compatible with the pseudogroup S of isomorphisms of S_0.

The older course /125/ is concerned with the concrete case where S is a transformations pseudogroup. A close investigation of the situation in the framework of category theory leads in /47/ to exhibit the main notions: species of structures, inductive groupoids and categories, local species of structures, and to prove the Complete Enlargement Theorem which axiomatizes the construction of locally isomorphic to S_0 structures. This study is carried on and generalized in /53/, /110/ and /126,68,85/ (summed up in /55/, the Appendix of which introduces categories of fractions). Finally the guide /86/ (with its Addendum page 357) points out the numerous results on ordered categories scattered in Charles's papers (Parts II, III, IV-1).

Here we single out the main results and their concrete motivations, with a modern terminology and an emphasis on the universality of the constructions (as in the comments to which refer the numbers between brackets).

1. SPECIES OF STRUCTURES. ENLARGEMENT OF CONCRETE CATEGORIES.

A. Species of structures /47, 126/ were intended to provide a categorical foundation to Bourbaki's theory of structures (5.1) and to generalize fibre bundles thought of as (continuous) actions of the (locally trivial) groupoid of isomorphisms from fibre to fibre (132.3).

An important property of a species S_0 of mathematical structures over sets, such as groups, rings, topologies..., is its *transportability*: if s is a structure on the set E and $f: E \to E'$ a bijection, there exists one unique structure fs on E' such that f defines an isomorphism $s \to fs$. In other terms, let S be the groupoid of isomorphisms between S_0-structures, and $p: S \to Set_\gamma$ its forgetful functor to the groupoid of all bijections between (small) sets; then p is a *discrete fibration*, that is the restriction of p to the class of objects under s in S is 1-1 onto the class of objects under $p(s)$, for each $s \in S_0$. This discrete fibration is also determined by the action $k: (f, s) \mapsto fs$ of the groupoid $p(S)$ on S_0; or still by the functor $Set_\gamma \to Set$ sending E to $\overset{-1}{p}(E)$ and $f: E \to E'$ to the map $k(f, -)$.

This analysis suggested the three equivalent definitions of a *species of structures S_0 over a category C* (or onto the subcategory C' of C) given in /47, 126/ :

- an *action of* a subcategory C' of C on the set S_0,
- a functor $p: S \to C$ whose restriction $S \to p(S)$ is a discrete fibration onto $p(S) = C'$ (and S_0 is the class of objects of S),
- a functor $C' \to Set$ taking non-void values.

Equivalent means that the corresponding categories are equivalent, the suitable morphisms being covariant (or equivariant) maps (6.2, 206.1), commutative squares of functors, and morphisms of diagrams in *Set* (206.1). These categories are studied in /47, 126/, as well as the notions of *subspecies of structures, superstructures* and *induced species* (215.1, 217.1).

Discrete fibrations $p: S \to C$ correspond to those species of structures over C such that the acting category C' contain each $f \in C$ with its source $\alpha(f)$ in C'. Let C be a groupoid; such a species is then said *transportable*; the *Enlargement Problem* for species of structures consists in extending a species of structures over C into a transportable one. A universal solution is constructed in /47/; in /126/ it is deduced from the following more general set-up.

B. Homomorphisms categories and enlargements /47, 126/. A species of mathematical structures over sets comes equipped with its homomorphisms (homomorphisms of groups, of rings, continuous maps,...). The corresponding notion for abstract species is called a *homomorphisms category* /47/ : it is the data of a faithful functor $p: H \to C$ and of a subcategory S of H containing the class H_0 of objects of H and such that the functor $S \hookrightarrow H \xrightarrow{p} C$ define $S_0 = H_0$ as a species of structures over C. It is a *maximal homomorphisms category* if S is included in the groupoid H_γ of isomorphisms of H and if the restriction $S \to C_\gamma$ of p is a discrete fibration. The Enlargement Problem consists in embedding a homomorphisms category over C into a maximal one. Its solution (given below in a slightly more general case) led Charles to define *induced categories*, or pullbacks in *Cat* /126/, and to study quotient categories /126/ (191.1).

Let C be a category and denote by Hom/C the category whose objects are pairs $(p : H \to C, S)$ where p is a faithful functor, S a subgroupoid of H containing H_0 and the restriction of p to S is *amnestic* (i.e., an isomorphism mapped on an identity is an identity) ; the morphisms are functors over C which respect the distinguished subgroupoids. Then the *Enlargement Theorem* means (227.1) that *the full subcategory of Hom/C with objects the maximal homomorphisms categories is reflective in Hom/C.* The reflection $(\hat{p} : \hat{H} \to C, S)$ of $(p : H \to C, S)$ is constructed as follows /126/ : Take the full subcategory of the comma-category $p{\downarrow}C$ with objects (f, s), $f \in C_\gamma$; a morphism is written as a triple (f', f, h) where

$$h \in H \quad \text{and} \quad \begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "f' \in C_\gamma"'] \\ \cdot & \cdot \arrow[l, "f \in C_\gamma"] \arrow[u, "p(h)"'] \end{tikzcd} .$$

It admits a quotient category $\hat{H}$ by the equivalence :

$(f', f, h) \sim (f'.p(g'), f.p(g), h')$ if there exists a square

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "g' \in S"'] \\ \cdot \arrow[u, "h"] & \cdot \arrow[l, "g \in S"] \arrow[u, "h'"'] \arrow[ul, phantom, "="] \end{tikzcd} \quad \text{in } H.$$

The functor $\hat{p}$ sends the coset of (f', f, h) onto $f'.p(h).f^{-1}$.

In particular, if $p : H \to C$ is a *concrete* (i.e., faithful and amnestic) functor, it is identified to the object (p, H_y) of Hom/C, and its reflection gives the reflection $\hat{p}: \hat{H} \to C$ of p into *transportable concrete functors.*

Still more specially, if C is a groupoid and $p: S \to C$ a functor defining S_0 as a species of structures over C, the reflection of $p: S \to C$ is the discrete fibration $\hat{p}: \hat{S} \to C$ which gives the *species of structures* $\hat{S}_0$ *enlargement of* S_0 *over* C; the structures of $\hat{S}_0$ are the orbits

$$(f, s)S, \quad \text{where } f \in C,\ s \in S_0,\ p(s) = \alpha(f) \text{ and}$$
$$(f, s)g = (f.p(g), s') \text{ if } g: s' \to s \text{ in } S.$$

The functor $C \to Set$ corresponding to $\hat{S}_0$ is then the *Kan extension* along the insertion $p(S) \hookrightarrow C$ of the functor $p(S) \to Set$ corresponding to S_0 (133.1).

In the Appendix of /55/, a formally similar construction describes «enlargements of categories», which generalize *categories of fractions* (73.2); such categories of fractions by a subclass admitting a calculus of fractions are defined here for the first time (with a different terminology). An attempt to unify both constructions led to the general expansion theorems for functors in /77, 122/, and their internalization (O, Part III-2).

2. LOCAL MAPS. COMPLETION. ASSOCIATED SHEAF.

The enlargement of a species of structures is one of the tools used to construct locally isomorphic structures («algebraic part»). Another tool is the completion of a local map which describes the «glueing together» process, and generalizes the Associated Sheaf Theorem.

First recall that an *inductive class* is a poset in which non-void subsets have a meet; a *local class* is an inductive class satisfying the *infinite distributivity law*

(D) $a \wedge \bigvee B = \bigvee_{b \in B} a \wedge b$ for each bounded subset B.

A *locale* is a local class with a maximum (that is, a complete distributive lattice).

A. The classical Associated Sheaf Theorem. Let M be a topological space. The set of its open subsets is a locale T for the inclusion order.

A *presheaf over* M is a functor $P: \mathrm{T} \to Set$, where T is the category of pairs $(U', U): U \to U'$ where $U' \subset U$, $U, U' \in T$. Take the corresponding discrete fibration $q: S \to \mathrm{T}$; then $S_0 = \coprod_{U \in T} P(U)$ (we suppose $P(\emptyset) = \{0\}$), and S is the category defining the order on S_0:

$$(U', z') < (U, z) \text{ iff } U' \subset U \text{ and } z' = P(U', U)(z).$$

For this order, S_0 is a local class; but it is not a locale, since it may not have a maximum. The restriction $q_0: S_0 \to T$ of q to objects is an *etale map*, in the sense:

The restriction of q_0 to the section $s^{>}$ of S_0 is 1-1 onto the section $q_0(s)^{>}$ of T, for each s in S_0;

a fortiori it preserves joins and meets of bounded subsets. Conversely, to an etale map $q'_0: S'_0 \to T$ corresponds a presheaf P' on M such that: $P'(U) = q_0'^{-1}(U)$. (80.1)

The presheaf P is a *sheaf* iff the etale map q_0 is *complete*, that is if it satisfies the condition:

Say that a subset B of S_0 is q_0*-compatible* if

$$q_0(b) \wedge q_0(b') = q_0(b \wedge b') \quad \text{for each} \quad b, b' \in B$$

and if there exists $\vee q_0(B)$ in T; then each q_0-compatible class has a join in S_0.

Informally, each family of structures of S_0 which pairwise agree on their supports intersection (or «descent data») may be glued together (since any subset of the locale T has a join).

Looked at «upside-down», the *Associated Sheaf Theorem* asserts: the category of complete etale maps over T is reflective in the category of etale maps over T. In /47/, Charles obtains this assertion as a special case of his Completion Theorem for local maps, where the locale T is replaced by any local class, and the etale maps by local maps; in fact, this is only the «discrete case» (exposed below as it is in /110/) of his completion Theorem which deals with local functors (Sections 3, 5). His insight was that the points of the topological space are unuseful in the the glueing together process, so that topologies may be replaced by paratopologies (or «topologies without points»).

B. Completion of local maps /47, 110/. An *inductive map* is a map $p: L \to E$ between posets which preserves meets of finite bounded subsets, and all joins; it is a *local map* if moreover E and L are local classes. Let E be a local class, and denote by Loc_E the category of local maps over E; its objects are the local maps $p: L \to E$ and the morphisms $p \to p'$, where $p': L' \to E$, are defined by the maps $u: L \to L'$ over E (that is, $p'u = p$), which preserve all joins and finite meets. The *Completion Theorem* /47, 110/ states that the full subcategory of Loc_E whose objects are the complete local maps (defined in A) is a reflective subcategory of Loc_E. The reflection of $p: L \to E$, called its *completion*, is the local map $p_c: L_c \to E$ defined as follows: a *p-complete class* is a p-compatible subset B of L, which is downward closed and closed under joins in L; then L_c consists of the p-complete classes, the order is the inclusion, and p_c sends B to $\vee p(B)$. The reflector $p \to p_c$ is defined by the «insertion» $L \to L_c$ which identifies s to its section $s^>$ in L. This completion is smaller than the Mac Neille join-completion and the universal join-completion of p looked at as a functor (321.1).

C. Associated sheaf and associated presheaf /53/. E is still a local class. As in the special case of A, the category of etale maps over E is equivalent to the category $P\,Sh\,E$ of presheaves over E, and the category of complete etale maps over E to the category $Sh\,E$ of sheaves over E (80.1).

The *Associated Presheaf Theorem* asserts that $P\,Sh\,E$, identified to the full subcategory of Loc_E whose objects are the etale maps over E, *is a reflective subcategory of* Loc_E. The reflection $p_e: J(p) \to E$ of the local map $p: L \to E$ is constructed in /53/ (in a more general frame): Take the local class of *pointed p-structures*, which is the sublocal class of $E \times L$ consisting of the pairs

$$(e, s) \in E \times L \quad \text{such that} \quad e < p(s);$$

it admits $J(p)$ as its quotient local class for the equivalence:

$$(e, s) \sim (e', s') \quad \text{iff} \quad e = e' < p(s \wedge s');$$

the coset of (e, s) is denoted $j_e S$, and called a *germ of p-structure*, or a *local jet*; the etale map p_e sends $j_e s$ to e. The reflector $j_p : p \to p_e$ is defined by the map $L \to J(p)$ which sends s to $j_{p(s)} s$; it is 1-1 iff p is *strict*, in the sense:

the restriction of p to each section $s^>$ of L is 1-1.

From the Completion and Associated Presheaf Theorems, we get the *Associated Sheaf Theorem over a local class: $Sh E$*, identified to the full subcategory of Loc_E whose objects are the complete etale maps over E, *is a reflective subcategory of Loc_E*. The reflection of $p: L \to E$ is the completion p_{ec} of the associated presheaf p_e (which is etale because p_e is etale). This result is important, e.g. if E is a locale, since Barr's Theorem reduces the study of Grothendieck toposes to toposes of sheaves over a locale.

D. Underlying paratopologies /47, 53/. Let $p: L \to E$ be a local map. If E is the local class Set_0 of «small» sets, with the inclusion order, for each $s \in L$ the image $p(s^>)$ of the section $s^>$ of L is a topology on the set $p(s)$, called the *underlying topology to* s. In the general case, $p(s^>)$ is only a *paratopology on* $p(s)$, that is a subset of E with $p(s)$ as its maximum, and closed under joins and finite meets; a fortiori, it is a locale. Many topological results don't use the «points» of the spaces, so are valid for paratopologies, as Charles foresaw 25 years ago, and topos theorists have recently proved exact (140.1).

The *local class $T(E)$ of paratopologies of the local class E* has for elements the paratopologies on the elements of E, and the order is:

$$T' < T \text{ iff } T' \subset T \text{ and } T' = \{ t \in T \mid t < \vee T' \}$$

(T' is an *open subspace of* T).

It is equipped with the complete local map $\theta_E : T(E) \to E$ which sends T to its maximum; θ_E has a section sending e to the «discrete paratopology» $e^>$.

Each local map $p: L \to E$ factorizes into:

$$p = (L \xrightarrow{\bar{p}} T(E) \xrightarrow{\theta_E} E) \text{ where } \bar{p}(s) = p(s^>).$$

The local map $\bar{p}$ is etale iff p is strict; in this case, $\bar{p}$ is the unique etale factor of p through $T(E)$.

3. LOCAL SPECIES OF STRUCTURES. COMPLETE ENLARGEMENT.

The complete enlargement of a local species of structures abstracts the construction (given in /125/) of the structures associated to a transformations pseudogroup Γ, which are defined by atlases with changes of charts in Γ. We first explain on this special case how it may be described by an enlargement followed by a completion, once the «good» notions are exhibited.

A. Local species of structures /47/. A *transformations pseudogroup* is a groupoid Γ of homeomorphisms between open subspaces of a topological space which, equipped with the order

$\gamma' < \gamma$ iff γ' is a restriction of γ to open subspaces of its source and target

satisfies the following conditions:

(G_1) The poset $(\Gamma, <)$ is a local class.

(G_2) The source, target and composition maps of Γ preserve the order; or, in a modern terminology, Γ is an internal category in the category of posets.

(G_3) If $\gamma: U \to U'$ in Γ and $U_1 < U'$, there exists one unique $\gamma_1 < \gamma$ with source U_1; it is said *induced by* γ *on* U_1, and denoted γU_1.

(G_4) (*Glueing Axiom*) Γ is *complete*, in the sense: there exists a join for each subset B of Γ such that

$$\alpha(b \wedge b') = \alpha(b) \wedge \alpha(b') \quad \text{and} \quad \beta(b \wedge b') = \beta(b) \wedge \beta(b')$$

if $b, b' \in B$. (Such a B is called Γ*-compatible.*)

The forgetful functor $p: \Gamma \to Set_\gamma$ to the groupoid of all bijections between (small) sets has the following properties, where Set_γ is equipped with the order: «is a restriction of».

(E_1) p defines the class Γ_0 of objects of Γ as a species of structures over (Section 1).

(E_2) p is a strict local map (Section 2) for the given orders on its source and target.

(E_3) This local map is complete (Section 2).

A groupoid equipped with an order satisfying G_1, G_2, G_3 is called a *local groupoid*, and a *complete local groupoid* if G_4 is also satisfied. If Γ and G are local groupoids and $p: \Gamma \to G$ is a functor satisfying E_1, E_2, then Γ_0 is called a *local species of structures over* G ; if moreover p is a discrete fibration, then p is a *strict local discrete fibration.* The word *complete* is added if E_3 also is valid. Notice that

$$(g', U') < (g, U) \text{ in } \Gamma \quad \text{iff} \quad g' < g \text{ in } G \text{ and } U' < U \text{ in } \Gamma_0.$$

B. Structures locally isomorphic to Γ_0 /125/. Let Γ be a transformations pseudogroup. The problem is to extend $p: \Gamma \to Set_\gamma$ into a complete strict local discrete fibration. It is solved in two steps:

a) Γ_0 is not transportable; let $\hat{p}: \hat{\Gamma} \to Set_\gamma$ be the discrete fibration enlargement of p (Section 1). An object of $\hat{\Gamma}_0$ is a class $(f, U)\Gamma$ of *charts* (f, U), where $U \in \Gamma_0$ and $f: p(U) \to X$ is a bijection. The order on $\hat{\Gamma}_0$ is:

$$s' < s = (f, U)\Gamma \quad \text{iff} \quad s' = (f', U')\Gamma \text{ for some } U' < U,\ f' < f.$$

This order extends in an order on $\hat{\Gamma}$, so that $\hat{p}$ becomes a strict local discrete fibration, called the *local enlargement of* p.

b) The local discrete fibration $\hat{p}: \hat{\Gamma} \to Set_\gamma$ is not complete. Consider the completion $\hat{p}_c: \hat{\Gamma}_c \to Set_\gamma$ of $\hat{p}$ looked at as a local map (Section 2). The composition of $\hat{\Gamma}$ extends into a composition on $\hat{\Gamma}_c$:

$$(B', B) \mapsto \overline{B'.B} \quad \text{iff} \quad \overline{\alpha(B')} = \overline{\beta(B)}, \quad \text{where } \overline{B'.B} \text{ is the closure under joins of } B'.B = \{\, b'.b \mid b \in B,\ b' \in B',\ \alpha(b') = \beta(b) \,\},$$

so that $\hat{\Gamma}_c$ becomes a local groupoid and $\hat{p}_c$ a complete strict local discrete fibration, called the *complete enlargement of* p.

c) An object of $\hat{\Gamma}_c$ is a $\hat{p}$-complete family of objects $(f_i, U_i)\Gamma$. It may be identified to a class F of charts (f_i, U_i) with changes of charts in Γ and closed under composition on the right by Γ, joins and induced elements. Classically such a class F is a *complete atlas compatible with* Γ, so that the species of structures $(\hat{\Gamma}_c)_0$ consists of the structures *locally isomorphic to* Γ_0, as defined in /125, 47/.

For instance, if Γ is the groupoid of diffeomorphisms between open subspaces of R^n, $\hat{\Gamma}_c$ is the groupoid of diffeomorphisms between differential manifolds of dimension n. Etale maps and coverings /125/, local products, fibrations and foliations /47/ are obtained for suitable Γ.

C. Complete enlargement of a local species of structures /85/. The above construction may be performed for any local species of structures. More precisely, let G be a local groupoid. Denote $Loc\,Sp_G$ the category of local species of structures over G ; its objects are the functors $p : S \to G$ defining S_0 as a local species of structures over G ; the morphisms are the local functors over G.

a) *Completion* (109.3). *The full subcategory of* $Loc\,Sp_G$ whose objects are the *complete local species of structures over* G *is reflective in* $Loc\,Sp_G$: the reflection of $p : S \to G$ is obtained by taking the completion $p_c : S_c \to G$ of p as a local map, and equipping S_c with the same composition as in B. The restriction $p_{rc} : S_{rc} \to G$ of p to the p-complete classes B such that $\alpha(B)$ and $\beta(B)$ be bounded defines $(S_{rc})_0$ as a local species of structures which is *relatively complete,* that is:

a p_{rc}-compatible subset A has a join iff $\alpha(A)$ and $\beta(B)$ have joins. p_{rc}, called the *relative completion of* p, is the *reflection of* p *in the full subcategory of* $Loc\,Sp_G$ *formed by the relatively complete local species.*

b) *Local enlargement* (92.2). Let $p : S \to G$ be a functor defining S_0 as a local species of structures over G, and $\hat{p} : \hat{S} \to G$ the discrete fibration enlargement of p (Section 1). As in B, the order on S gives an order on $\hat{S}$, so that $\hat{p}$ has the properties of a strict local discrete fibration except that $\hat{S}$ may only be a *sublocal class* i.o. a local class (that is, each *bounded* non-void subset has a meet). However, if p is relatively complete, $\hat{p}$ is a strict local discrete fibration, which is *the reflection of* p *into the full subcategory of* $Loc\,Sp_G$ *whose objects are the strict local discrete fibrations over* G. It is called the *local enlargement of* p.

c) *Complete enlargement. The full subcategory of* $Loc\,Sp_G$ *whose objects are the complete strict local discrete fibrations over* G *is reflective.* The reflection of p, called its *complete enlargement* P, is constructed in three steps: take the relative completion $\hat{p}_{rc}$ of p, the local enlargement $\hat{p}_{rc}$ of p_{rc}, and finally the completion $P: \Sigma \to G$ of $\hat{p}_{rc}$. A structure of Σ_0 may be identified to a complete atlas F as in B, and this is how Σ_0 was first described (110.1) in /47/.

4. SUBINDUCTIVE GROUPOIDS AND SPECIES OF STRUCTURES.

The description of a structure of the complete enlargement Σ_0 of a local species of structures S_0 as a complete atlas F suggested the definition of atlases in a local groupoid, so that F be a complete atlas of the local enlargement of S_0. This problem led to a deeper study of local groupoids and, more generally, $\widehat{\text{(pre)}}$inductive and sub$\widehat{\text{(pre)}}$inductive groupoids.

A. $\widehat{\text{(Pre)}}$inductive groupoids and the pseudoproduct /47, 53, 126/. A meet-lattice is called a *preinductive class* here. A *$\widehat{\text{(pre)}}$inductive groupoid S* is defined as a local groupoid (Section A.3), except that it is a $\widehat{\text{(pre)}}$-inductive class for its order, i.o. a local class. If it satisfies the distributivity axiom (D), it is a *$\widehat{\text{(pre)}}$local groupoid.* Equivalently (262.1), a $\widehat{\text{(pre)}}$inductive groupoid is an internal groupoid in the category of $\widehat{\text{(pre)}}$inductive classes and inductive maps, which satisfies (G_2) (existence of induced elements).

Let S be a preinductive groupoid; the composition of S is extended in an associative operation, called the *pseudoproduct*; if $f, g \in S$, their pseudoproduct gf is the composite $g'.f'$, where g' is the morphism induced by g on $s = \alpha(g) \wedge \beta(f)$, and f' is the unique $f' < f$ with target s (In Set_γ, the pseudoproduct gf is the bijection $x \mapsto g(f(x))$ whenever $g(f(x))$ is defined). A $\widehat{\text{(pre)}}$inductive groupoid may be characterized by the properties of the pseudoproduct /126, 53/. A subgroupoid of S closed under pseudoproducts and joins is called a *subpseudogroup of S*.

B. Completion of a prelocal groupoid /68/. A transformations pseudogroup is a local groupoid which is complete (Axiom G_4). But there are local groupoids S which are not complete (such as Set_γ, otherwise the join of the class of objects would be the «set of all sets»). They may even not be *relatively complete*, in the sense than an S-compatible subset B have a join iff $\alpha(B)$ and $\beta(B)$ have joins.

The *Completion Theorem for prelocal groupoids* asserts that the category of prelocal groupoids and functors preserving joins and finite meets admits as a reflective subcategory the full subcategory of complete local groupoids. The reflection of S is the groupoid $\bar{S}$ consisting of the *S-complete classes*, that are the S-compatible subsets of S closed under joins and downward closed; its order is the inclusion. The subgroupoid of $\bar{S}$ consisting of the bounded S-complete classes *is the reflection of S in the full subcategory of local groupoids*, while the subgroupoid of $\bar{S}$ formed by the S-complete classes B such that $\alpha(B)$ and $\beta(B)$ have joins *is the reflection of S in the full subcategory of relatively complete local groupoids* (306.2).

C. Groupoids of atlases /68/. Let S be a preinductive groupoid. A *complete atlas of S* is a subset F of S closed under joins and such that $F(F^{-1}F) = F$ (where BA denotes the set of pseudoproducts ba, $b \in B$, $a \in A$, and F^{-1} the set of inverses f^{-1}, $f \in F$).

If S is a prelocal groupoid, the complete atlases form a groupoid for the composition:

$$(F', F) \mapsto \overline{F'F} \quad \text{iff} \quad \overline{F'^{-1}F'} = \overline{FF^{-1}} \;;$$

the objects are the subpseudogroups of S. This groupoid becomes a *sub-preinductive groupoid* $A(S)$ (cf. D below) for the order:

$$F' < F \quad \text{iff} \quad F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F},$$

and a *subinductive groupoid* for the order

$$F' \ll F \quad \text{iff} \quad F' < F \text{ and } F' \subset F.$$

In /68/, the completion $\bar{S}$ is obtained as a subgroupoid of $A(S)$, on which both orders $\ll$ and $<$ reduce to the inclusion.

D. Subpreinductive groupoids /68/ and subpreinductive species of structures /85/. In Sections C.3 and C.4 we have instances of subinductive groupoids which are not inductive groupoids; other examples (259.1) are afforded by the groupoids of isomorphisms between algebraic structures (groups, vector spaces, categories...). It motivated a generalization of the preceding results to *sub*$\hat{(}$*pre*$\hat{)}$*inductive groupoids* in /68/. These are defined as local groupoids, except that the order makes them a sub$\hat{(}$pre$\hat{)}$-inductive class; it means that meets only exist for *bounded* non-void $\hat{(}$fin-ite$\hat{)}$ subsets. If S is a subpreinductive groupoid, the pseudoproduct gf is still defined as above, but only for pairs (g, f) such that $\alpha(g) \wedge \beta(f)$ exists. The definition of complete atlases carries on, as well as the construction of the groupoid of *complete atlases* if S is sub$\hat{(}$pre$\hat{)}$local (but the completion theorem requires S to be prelocal). It is given in /68/, where other subpreinductive groupoids of atlases are also described.

A similar study is done in /85/ for sub$\hat{(}$pre$\hat{)}$ inductive species of structures (i.o. local ones). The main results concern the *inductive enlargements of subpreinductive species of structures,* and extensions of sub-inductive functors to groupoids of complete atlases. The complete enlargement Theorem for local species is obtained as a by-product.

5. INDUCTIVE CATEGORIES. COMPLETE ENLARGEMENT OF A LOCAL FUNCTOR.

The complete enlargement of a local species led to the groupoid of diffeomorphisms between manifolds (Section 3); to get the category of differentiable maps, a similar process must be applied to the inductive category of differentiable maps between open subspaces of numerical spaces. A prerequisite is the study of inductive categories.

A. Inductive categories; pseudoproduct; filters /47, 53/. In a modern terminology, an *inductive category* C is an internal category in the category of inductive classes (and inductive maps), such that the order induced on each Hom set be trivial (164.2); it is also required that a morphism lesser than a composite be a composite of lesser factors (this condition P is dropped later). It is a *local category* if C is a local class. For instance, *Set* with the restriction order is a local category; any local groupoid is a local category.

The composition of an inductive category C is extended in an every where defined operation, still called the *pseudoproduct:*

$$(g, f) \mapsto gf = \mathrm{V}\{\, g'.f' \mid g' < g,\ f' < f,\ \alpha(g') = \beta(f')\,\},$$

which is associative because of P (165.1).

The inductive category is:

- *regular* /53/ if $\alpha(fe) = e$ and $\beta(e'f) = e'$ whenever e and e' are objects such that $e < \alpha(f)$, $e' < \beta(f)$;

- *completely regular* /47/ if $Ee : e \to E$ for each objects e, E with $e < E$; a completely regular category has (143.1) a canonical Grothendieck topology whose coverings of E are the families Ee_i, with e_i objects and $E = \mathrm{V}_i e_i$; this explains inductive categories and sites play a somewhat similar part;

- *strongly regular* /110/ if it is regular and if $\alpha(f) = \mathrm{V}_i e_i$ implies

$$f = \mathrm{V}_i f e_i .$$

If C is a regular inductive category, the class of its *filters* (that is the upward closed and closed under finite meets subsets) becomes a regular inductive category $F(C)$ for the order «$\supset$» /53/; if C is an inductive groupoid, so is $F(C)$ /68/.

B. Complete enlargement of local functors /110/. Let C be a local category and denote by Loc_C the category whose objects are the strict local functors $p : H \to C$ with H a strongly regular local category, and the morphisms are the local functors over C.

a) *Completion. The full subcategory of* Loc_C *whose objects are complete is reflective* (325.2). The reflection $p_c : H_c \to C$ of $p : H \to C$ is constructed as in the special case of Section 3, on the completion of the local map p. If p is faithful and *supraregular* (that is, p preserves the pseudoproducts fe and $e'f$ where $e < \alpha(f)$, $e' < \beta(f)$), then p_c is faithful /110/. The restriction p_{rc} of p_c to the p-complete classes B with $\alpha(B)$ and $\beta(B)$ bounded is still the *reflection of* p *into the full subcategory of* Loc_C *whose objects are relatively complete* (defined as in Section 3).

b) *Local enlargement.* Let $p : H \to C$ be an object of Loc_C which is moreover concrete (= faithful and amnestic) and whose restriction $p_\gamma : H_\gamma \to C_\gamma$ to the groupoids of isomorphisms is a relatively complete local functor between inductive groupoids. Then the concrete transportable functor $\hat{p}:\hat{H} \to C$ enlargement of p (Section 1) becomes an object of Loc_C for the quotient order of the order:

$$(g', g, k) < (f', f, h) \quad \text{if} \quad g' < f', \ g < f, \ k < h.$$

It is called the *local enlargement of* p, and it is the *reflection of* p *into the full subcategory of* Loc_C *whose objects are concrete transportable.*

The completion $\hat{p}_c : \hat{H}_c \to C$ of $\hat{p}$ is called the *complete enlargement of* p. For instance, if p is the concrete functor to Set from the local category of differentiable maps between open subspaces of Banach spaces, then $\hat{H}_c$ is the category of differentiable maps between Banach manifolds.

C. Inductive categories of paratopologies /47, 53/. A local map to E has a «canonical» factorization through the local class $T(E)$ of paratopologies of E (Section D.2). A similar result holds for supraregular inductive functors $p: H \to C$. The construction is suggested /47, 53/ by the case where $C = Set$; then each object s of H has the underlying topology $p(s_0^>)$ image of $s_0^> = \{ s' \in H_0 \mid s' < s \}$, and a morphism $h: s \to \sigma$ determines a continuous map $p(h): p(s_0^>) \to p(\sigma_0^>)$, because

$$p(\overset{-1}{h})(p(\sigma')) = a(p(\sigma')\ p(h)) = p\,a(\sigma' h) \in p(s_0^>)$$

for each $\sigma' < \sigma$.

Now let C be any regular inductive category. *The inductive category* $T(C)$ *of paratopologies of* C has for class of its objects the class $T(C_0)$ of paratopologies of the inductive class C_0 of objects; its morphisms $T \to T'$ are defined by the morphisms $h: \vee T \to \vee T'$ of H such that $a(t'h) \in T$ for each $t' \in T'$; the order is

$$(k: \hat{T} \to \hat{T}') < (h: T \to T') \quad \text{if} \quad k < h, \text{ and } \hat{T} < T, \ \hat{T}' < T' \text{ in } T(C_0).$$

It is equipped with the supraregular strict inductive faithful functor θ_C to C which sends $h: T \to T'$ to h. If C is local, θ_C *is complete*; if C is an inductive groupoid, $T(C)$ is also one /68/.

If $p: H \to C$ is a supraregular inductive functor, it factorizes into

$$p = (H \xrightarrow{\bar{p}} T(C) \xrightarrow{\theta_C} C)$$

where $\bar{p}$ sends $h: s \to s'$ to $p(h): p(s_0^>) \to p(s'^>_0)$; the inductive functor $\bar{p}$ *is etale iff* p *is strict*; and in this case $\bar{p}$ is the unique etale factor of p through θ_C.

D. Categories of local jets /53/. Two continuous maps $f: T \to T'$, $g: \hat{T} \to \hat{T}'$ have the same *local jet* $j_x^\lambda f$ *at* x if x has a common open neighborhood in T and $\hat{T}$ on which f and g agree; the local jets of continuous maps form the topological category J^λ *of local jets*, with the «etale topology» (176.1). The construction of J^λ is generalized in several ways in /53/, when the functor $Top \to Set$ is replaced by an inductive functor.

We'll only point out the following «universal» construction: Let C be a regular inductive category, and consider the category of supraregular inductive functors over C, whose objects are the supraregular inductive functors $p: H \to C$ with H a regular inductive category. This category *admits as a reflective subcategory the full subcategory whose objects are etale*. The reflection of $p: H \to C$ is the etale functor $p_e: J(p) \to C$ on the etale map reflection of p (associated presheaf, cf. Section C.2); the *inductive category* $J(p)$ *of local jets* is a quotient category of the subcategory of $C \times H$ formed by the pointed p-structures:

$$(g, h) \in C \times H \quad \text{with} \quad g < p(h);$$

the coset $j_e h$ of (g, h) for the equivalence

$$(g, h) \sim (g', h') \quad \text{iff} \quad g = g' < p(h \wedge h')$$

is denoted by ${}_{e'}j_e h$, where $e = \alpha(g)$, $e' = \beta(g)$ (since $g = e'p(h)e$).

If $C = Set$, the category $J(p)$ has a subcategory $J^\lambda(p)$ consisting of the *atomic local jets* ${}_{\{p(h)(x)\}}j_{\{x\}}h$ (written $j_x^\lambda h$); for the etale topology, $J^\lambda(p)$ becomes a *topological category*, which is etale (here in the topological sense /125/) over the topological category J^λ. For instance, if p is the concrete functor from the local category of r-differentiable maps, $J^\lambda(p)$ is the category of local jets of r-differentiable maps; it admits the *category* J^k *of infinitesimal k-jets* as a quotient. In fact, J^k is an r-k differentiable category; and Charles described Differential Geometry as the study of J^r and of the actions of its subcategories (179.1).

BIBLIOGRAPHY

ABBREVIATIONS. *AMS* = American Mathematical Society.
CTGD = Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle.

1. H. APPELGATE & M. TIERNEY, Model induced adjoint functors, *CTGD* XI-1 (1969), 1-22.
2. M. ARTIN, *Grothendieck topologies*, Lecture Notes Harvard Univ., 1962.
3. B. BANASCHEWSKI & G. BRUNS, Categorical characterization of the Mac Neille completion, *Arch. Math.* XVIII (1967), 369-378.
4. B. BANASCHEWSKI & C. J. MULVEY, Stone-Čech compactification of locales, *Houston J. of Math.* (to appear).
5. M. BARR, Toposes without points, *J. Pure & Appl. Algebra* 5 (1974), 265-280.
6. F. W. BAUER & J. DUGUNDJI, Categorical homotopy and fibrations, *Trans. AMS* 140 (1969), 239-256.
7. J. BENABOU, Treillis locaux et paratopologies, *CTGD* I (1958).
8. P. BERNAYS & A. A. FRAENKEL, *Axiomatic set theory*, North Holland 1958.
9. G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, AMS Publications 25, 1948.
10. G. BLANC, Foncteurs types et structures, *Esquisses Math.* 14, Amiens (1972).
11. J. BOSCH & M. SAGASTUME, Catégories de variétés abstraites, *CTGD* XIX-4 (1978), 369-385 (et *Compte-rendus Ac. Sc. Paris* 270, 1970, 1565).
12. N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles*, A.S.I. Hermann.
13. H. BRANDT, Über eine Verallgemeinerung der Gruppenbegriffes, *Math. Ann.* 96 (1926), 360-366.
14. A. CARBONI & G. C. MELONI, Costruzione algebrica dello spazio étale, *Boll. Un. Mat. Ital.* (4) 12 (1975), 192-197.
15. H. CARTAN, *Séminaire Cartan*, Ec. Norm. Sup. 1950/51.
16. H. CARTAN & S. EILENBERG, Foundations of fibre bundles, *Symp. Intern. de Top. Algebrica Mexico*, UNESCO (1958), 16-23.
17. C. CHEVALLEY, *Theory of Lie groups*, Princeton Univ. Press, 1946.
18. L. COPPEY, Paratopologies et feuilletages, *CTGD* X-3 (1968), 271-300.
19. L. COPPEY, Catégories avec modèles, *Esquisses Math.* 12, Amiens (1971).
20. P. CRAWLEY, Regular embeddings which preserve lattice structure, *Proc. AMS* 13 (1962), 748-752.
21. P. DEDECKER, Quelques aspects de la théorie des structures locales, *Bull. Soc. Math. Belgique* V (1952), 26-43.
22. P. DEDECKER, Jets locaux, faisceaux, germes de sous-espaces, *Idem*, VI (1953), 97-125.
23. P. DEDECKER, Introduction aux structures locales, *Coll. Géom. Diff. Glob. Bruxelles*, CBRM (1958), 103-136.
24. E. J. DUBUC, Kan extensions in enriched categories, *Lecture Notes in Math.* 145, Springer (1970).

25. E. J. DUBUC, Sur les modéles de la géométrie différentielle synthétique, *CT GD* XX-3 (1979), 231-280.

26. A. EHRESMANN (-BASTIANI), Différentiabilité dans les espaces localement convexes, Distructures, *Thèse Univ. Paris* (1962).

27. A. EHRESMANN (-BASTIANI), Applications différentiables et variétés de dimension infinie, *J. Analyse Math. Jérusalem* XIII (1964), 1-114.

28. S. EILENBERG & S. MACLANE, General theory of natural equivalences, *Trans. AMS* 58 (1945), 231-294.

29. F. FOLTZ, Sur la catégorie des foncteurs dominés, *CTGD* XI-2 (1970), 101.

30. P. FREYD, Aspects of topoi, *Bull. Austr. Math. Soc.* 7 (1972), 1-76.

31. P. FREYD & G.M. KELLY, Categories of continuous functors I, *J. Pure & Appl. Algebra* 2 (1970), 169-191.

32. N. FUNAMAYA, Imbedding partly ordered sets into infinitely distributive complete lattices, *Tôhoku Math. J.* II, Ser. 8 (1956), 54-62.

33. P. GABRIEL & F. ULMER, Lokal präsentierbare Kategorien, *Lecture Notes in Math.* 221, Springer (1971).

34. P. GABRIEL & M. ZISMAN, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer, 1967.

35. J. GIRAUD, Analysis Situs, *Sém. Bourbaki*, Exp. 236 (1963).

36. C. GODBILLON, *Elements de Topologie Algébrique*, Hermann, 1970.

37. R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.

38. J. W. GRAY, Sheaves with values in a category, *Topology* 3 (1965), 1-18.

39. J. W. GRAY, Fragments of the history of sheaf theory, *Lecture Notes in Math.* 753, Springer (1979), 1-79.

40. A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tohôku Math. J.* 9 (1957), 119-221.

41. R. GUITART, Qu'est-ce que la logique dans une catégorie? *CTGD* XXIII-2 (1982).

42. A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, *Comm. Math. Helv.* 32-4 (1958).

43. H. J. HOENHKE, Einige Bemerkungen über Einbettbarkeit von Kategorien in Gruppoide, *Math. Nachr.* 25 (1963), 179-190.

44. H.-J. HOENHKE, On partial algebras, Preprint, Berlin 1976.

45. H.-J. HOENHKE & G. STRECKER, Über induktive Isomorphie von Gruppen, *Math. Nachr.* 45 (1970), 354-361.

46. M. HOLMANN & D. PUMPLÜN, Topologische Kategorien, *Math. Ann.* 178, (1968), 219-242.

47. J. ISBELL, Atomless parts of spaces, *Math. Scand.* 31 (1972), 5-32.

48. P. T. JOHNSTONE, *Topos Theory*, Academic Press, 1977.

49. P. T. JOHNSTONE, *Stone spaces*, Cambridge University Press, 1982.

50. G. JOUBERT, Contribution à l'étude des catégories ordonnées, Applications aux structures feuilletées, *CTGD* VIII (1966).

51. A. JOYAL, Une théorie combinatoire des séries formelles, Preprint Univ. of Sydney, 1981.

52. D.M. KAN, Adjoint functors, *Trans. AMS* 294 (1958), 294-329.

53. Y. KAWAHARA, Manifolds in categories, *Mem. Fac. Sc. Kyushu Univ.* A, 26-2 (1972).

54. G.M. KELLY, A unified treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves, and so on, *Bull. Austral. Math. Soc.* 22-1 (1980), 1-160.

55. G.M. KELLY, *The basic concepts of enriched category theory*, Sydney, 1981.

56. A. KOCK, Formal manifolds and synthetic theory of jet bundles, *CTGD* XXI-3 (1980), 227-246.

57. F.W. LAWVERE, Quantifiers and sheaves, *Actes du Congr. Intern. des Math. Nice* (1970), 329-334.

58. F.W. LAWVERE, *Teoria delle categorie sopra un topos di base*, Lecture Notes Univ. Perugia, 1973.

59. M.-C. LEBLOND, Complétion de foncteurs ordonnés et de foncteurs doubles, *Esquisses Math.* 15, Amiens (1972).

60. M.-C. LEBLOND, Complétion d'un foncteur structuré, *CTGD* XIII-4 (1972), 377-392.

61. S. LEGRAND, Quelques problèmes universels relatifs aux catégories multiples, *Thèse Univ. Paris* 1969.

62. J. LERAY, L'anneau d'homologie d'une représentation, *Compte-rendus Acad. Sc. Paris* 221 (1946), 1366-1368.

63. E. LOHRE, Generalized manifolds, *CTGD* XXI-1 (1980), 87-107.

64. S. MAC LANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.

65. MAC NEILLE, Partially ordered sets, *Trans. AMS* 42 (1937), 416-460.

66. L. MICHLER & J. SCHRECKENBERGER, Über die Vollständigkeit induktiver Gruppoide, *Studien z. Algebra und ihre Anwendungen* (1978).

67. B. MITCHELL, *Theory of categories*, Academic Press, 1965.

68. C.J. MULVEY & J. WICK PELLETIER, The dual locale of a semi-normed space, *CTGD* XXIII-1 (1982).

69. G. NÖBELING, *Grundlagen der analytischen Topologie*, Springer, 1954.

70. O. ORE, Linear equations in non-commutative fields, *Ann. of Math.* (2) 132 (1931), 463-477.

71. R. OUZILOU, Théorie des fibrés et grassmanniennes des espaces de Banach *Publ. Dépt. Math. Univ. Lyon* 6-1 (1969), 87-132.

72. P. PAINLEVE, *Œuvres*, C.N.R.S., 1972.

73. D. & S. PAPERT, Sur le treillis des ouverts et les paratopologies, *CTGD* I (1958).

74. H. POINCARE, *Œuvres*, C.N.R.S.

75. G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, ASI 1183, Hermann, Paris, 1952.

76. G. REYES, Ed., *Géométrie Différentielle Synthétique*, 1 et 2, Rapports recher-

che, Univ. Montréal, 1980.

77. W. RINOW, Über die Vervollständigung induktiver Gruppoide, *Math. Nachr.* 25 (1963), 199-222.
78. W. RINOW, Vervollständigung geordneter Kategorien, *Idem* (1966).
79. P. SAMUEL, Ultrafilters and compactification of uniform spaces, *Trans. AMS* 64 (1948), 100-132.
80. J. SCHRECKENBERGER, Über die Einbettung von dht-symmetrischen Kategorien in die Kategorie der partiellen Abbildung zwischen Mengen, Preprint, Ak. d. Wissenschaften DDR, Berlin, 1980.
81. B. SCHULTZ (-FICHTNER), Über die Vervollständigung von zu Gruppen gehorigen induktiven Gruppoide, *Math. Nachr.* 46 (1970), 263-273.
82. B. SCHULTZ (-FICHTNER), Über die zu Gruppen gehörigen induktiven Gruppoide, *Math. Nachr.*: I, 44 (1970), 313-339; II, 48 (1971), 275-278.
83. B. SCHULTZ, Über die induktiven Gruppoide der partiellen Automorphismen von endlichen Körpern, *Idem* 86 (1978), 45-50.
84. B. SCHULTZ, Über die zu endlichen zyklischen Ringen gehöringen induktiven Gruppoide, *Wiss. Z.* Techn. Hosch. Karl Marx Stadt XX (1978), 925-934.
85. B. SCHULTZ, Über die zu endlichen Körpern gehörigen induktiven Gruppoide, *Idem* (1978).
86. B. SCHULTZ, Über die induktiven Isomorphie von endlichen Gruppen, *Idem*: I, XXI-5 (1979), 541-547; II, XXII-5 (1980), 423-431.
87. D. TANRE, Connexité locale, *CTGD* XV-2 (1974), 181-212.
88. H. WALLMAN, Lattices and topological spaces, *Ann. of Math.* (2) 39 (1938), 112-126.
89. G. WRAITH, Localic groups, *CTGD* XXII-1 (1981), 61-66.

INDEX DU VOLUME II-1

Les références renvoient indifféremment au mot français et/ou anglais.

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME II-I

Le second nombre renvoie à la page correspondante des « Comments ».