Charles Ehresmann
œuvres complètes
et commentées

CATÉGORIES INTERNES
ET FIBRATIONS

PARTIE III - 2 commentée par Andrée CHARLES EHRESMANN
AMIENS 1980

Ce livre constitue le

SUPPLEMENT N° 2 au VOLUME XXI (1980) des

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

publication périodique, créée par Charles EHRESMANN en 1958, actuellement dirigée et éditée par:

Mme A.C. EHRESMANN
U.E.R. de Mathématiques, 33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS CEDEX. FRANCE.

IMPRIMERIE EVRARD. AMIENS.
Dépôt Légal: 4e Trimestre 1980

PRÉLUDE

Au commencement tout était morne et informe.
Le Géomètre dit : Que la lumière soit !
Et les structures là par espèces perçoit ;
Du chaos émergent attraits, contours et normes.

Dès lors il structure les objets et les flèches,
Puis structure les structures, tâche sans fin.
L'application, outil premier pour Dedekind,
Se mue en morphisme, d'apparence une flèche.

Catégories en expansion dans l'Univers,
Leurs trios s'accordent, les quatuors résonnent,
Comme les quintettes, niant deux fois Zénon,

Se composent en long, et en large, un sens clair
Aux métamorphoses bien naturelles donnent.
Tout cela, dit le Sphinx (*), pour amuser Ζεῦν.

(*) Goethe, Faust II, Nuit classique de Walpurgis.

Extrait de «Catégories et Structures», Dunod, Paris, 1965.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier, pour leurs encouragements et leur appui pendant la réalisation de cette Partie III-2:

En premier lieu, les Docteurs F. de la SIMONE et plus encore J.-P. VANBREMEERSCH, dont la compréhension et le ferme soutien durant tous ces mois m'ont donné la force de mener à bien ce travail; le Docteur J.-F. de FREMONT, avec qui j'ai eu de si francs et stimulants échanges d'idées;

Tous ceux qui ont aidé à la réussite du «Troisième Colloque sur les Catégories, dédié à CHARLES EHRESMANN» (Amiens Juillet 1980) en particulier l'UNIVERSITE de PICARDIE, et les nombreux participants qui m'ont fait d'utiles critiques et suggestions;

Enfin, les personnes et organismes qui ont favorisé le lancement de la Souscription dont l'apport financier est indispensable pour la publication de ces «Oeuvres complètes et commentées», et l'Imprimerie EVRARD qui réalise efficacement leur impression.

A. C. E., Décembre 1980

Les articles originaux faisant l'objet de cette Partie III-2 sont reproduits ci-après (par procédé photographique). Les textes dont le format initial a dû être réduit (pages 431 à 530) précèdent les autres, ce qui explique que l'ordre chronologique ne soit pas entièrement respecté. Deux articles qui avaient seulement été multigraphiés (l'un à l'Université du Kansas à Lawrence /93/, l'autre à l'Université de Paris VII /113/) ont été spécialement composés sur machine Varityper.

Les numéros rajoutés dans la marge extérieure renvoient aux commentaires situés à la fin du livre.

C. R. Acad. Sc., t. 256, p. 2080-2083. Séance du 4 mars 1963. Groupe 1

/ 59 /

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Catégories structurées d'opérateurs.*
Note (*) de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. René Garnier.

Espèce de structures au-dessus d'une catégorie double; cas particulier d'une espèce de structures au-dessus d'une espèce de morphismes. Définition générale d'une catégorie structurée d'opérateurs.

Cette Note fait suite à deux Notes (1) antérieures dont nous reprenons la terminologie et les notations.

1. Espèce de structures au-dessus d'une catégorie double.

Définition. — Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ une catégorie double. On dira que Σ_0 est *une espèce de structures au-dessus de la catégorie double* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *relativement à* p_0, ou que $((\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), p_0, \Sigma_0)$ *est une espèce de structures,* si p_0 est une application de la classe Σ_0 dans $\mathcal{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

1° $(\mathcal{C}^{\cdot}_0, p_0, \Sigma_0)$ est une espèce de structures (2);

2° $(\mathcal{C}^{\perp}_0, p_0, \Sigma_0)$ est une espèce de structures;

3° Soient $f \in \mathcal{C}$ et $\sigma \in \Sigma_0$ tels que $p_0(\sigma) = \alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f))$; on a

$$\beta^{\perp}(f)\,(\alpha^{\cdot}(f)\,\sigma) = \beta^{\cdot}(f)\,(\alpha^{\perp}(f)\,\sigma). \qquad 1$$

On posera

$$f\sigma = \beta^{\perp}(f)\,(\alpha^{\cdot}(f)\,\sigma).$$

Soit $((\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), p_0, \Sigma_0)$ une espèce de structures; nous désignerons par $\mathcal{S}$ la classe des couples $(f, \sigma) \in \mathcal{C} \times \Sigma_0$ tels que

$$p_0(\sigma) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f));$$

cette classe sera munie des lois de compositions . et $\perp$:

$$(f', \sigma') . (f, \sigma) = (f' . f, \sigma)$$

si, et seulement si,

$$\alpha^{\cdot}(f') = \beta^{\cdot}(f) \quad \text{et} \quad \sigma' = \alpha^{\perp}(f)\,\sigma;$$
$$(f', \sigma') \perp (f, \sigma) = (f' \perp f, \sigma) \qquad 2$$

si, et seulement si,

$$\alpha^{\perp}(f') = \beta^{\perp}(f) \quad \text{et} \quad \sigma' = \alpha^{\cdot}(f)\,\sigma.$$

Soit p l'application $(f, \sigma) \to f$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{C}$.

Proposition. — $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ *est une catégorie double et p un foncteur double de* $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ *vers* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$; $\mathcal{S}^{\cdot}_0$ (*resp.* $\mathcal{S}^{\perp}_0$) *s'identifie à la catégorie des hypermorphismes correspondant à* $(\mathcal{C}^{\cdot}_0, p_0, \Sigma_0)$ [*resp. à* $(\mathcal{C}^{\perp}_0, p_0, \Sigma_0)$]. $(\mathcal{C}^{\cdot}, p, \mathcal{S}^{\cdot}_0)$ *et* $(\mathcal{C}^{\perp}, p, \mathcal{S}^{\perp}_0)$ *sont des espèces de structures, les catégories d'hypermorphismes correspondantes s'identifiant respectivement à* $\mathcal{S}^{\cdot}$ *et à* $\mathcal{S}^{\perp}$.

L'application : $\sigma \to (p(\sigma), \sigma)$ identifie Σ_0 à la classe $(\mathcal{S}^{\perp}_0)_0 = (\mathcal{S}^{\cdot}_0)_0$.

Nous appellerons encore $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ *la catégorie double des hypermorphismes correspondant à* $((\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), p_0, \Sigma_0)$.

Soient $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ et $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ deux catégories doubles. Considérons les conditions suivantes :

A. $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ est équivalente à la catégorie double des hypermorphismes correspondant à une espèce de structures $((\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), p_0, (\mathcal{S}^{\cdot}_0)_0)$.

B. p est un foncteur double de $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ sur une sous-catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mathcal{C}^{\perp}_1)$ de $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ vérifiant les axiomes :

1° Pout tout $f \in \mathcal{C}_1$ et tout $z^{\perp} \in \mathcal{S}^{\perp}_0$ tels que $p(z^{\perp}) = \alpha^{\perp}(f)$, il existe un et un seul $g \in \mathcal{S}$ tel que

$$p(g) = f \quad \text{et} \quad \alpha^{\perp}(g) = z^{\perp};$$

2° Pour tout $f \in \mathcal{C}_1$ et tout $z^{\cdot} \in \mathcal{S}^{\cdot}_0$ tels que $p(z^{\cdot}) = \alpha^{\cdot}(f)$, il existe un et un seul $g \in \mathcal{S}$ tel que

$$p(g) = f \quad \text{et} \quad \alpha^{\cdot}(g) = z^{\cdot}.$$

C. p est une application de $\mathcal{S}$ sur une sous-catégorie double $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$ telle que :

1° p est un foncteur généralisé ([3]) de $\mathcal{C}^{\cdot}_1$ vers $\mathcal{S}^{\cdot}$ ainsi que de $\mathcal{C}^{\perp}_1$ vers $\mathcal{S}^{\perp}$;

2° Les conditions $g \in \mathcal{S}$, $g' \in \mathcal{S}$, $p(g) = p(g')$ et $\alpha^{\perp}(g) = \alpha^{\perp}(g')$ [resp. $\alpha^{\cdot}(g) = \alpha^{\cdot}(g')$] entraînent $g = g'$.

1 Théorème. — *Les conditions* A, B *et* C *sont équivalentes.*

Définition. — Si la condition B est vérifiée, on dira que $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ *est une catégorie double au-dessus de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *relativement à* p, ce qu'on notera par $((\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), p, (\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp}))$.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $(\mathcal{C}, \mathrm{F})$ une espèce de morphismes ([1]). Soient $(\mathcal{C}, \pi, \mathcal{H}^{\cdot}_0)$ l'espèce de structures déterminée par $(\mathcal{C}, \mathrm{F})$ et $(\mathcal{H}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\perp})$ la classe des hypermorphismes correspondante, munie de sa structure de catégorie double ([1]). Soient $((\mathcal{H}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\perp}), p_0, \Sigma_0)$ une espèce de structures au-dessus de $(\mathcal{H}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\perp})$ et $((\mathcal{H}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\perp}), p, (\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp}))$ la catégorie double au-dessus de $(\mathcal{H}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\perp})$ correspondante.

Définition. — Si $p(\mathcal{S})$ est la catégorie des hypermorphismes correspondant à une sous-espèce ([3]) de structures de $(\mathcal{C}, \pi, \mathcal{H}^{\cdot}_0)$, on dira que $((\mathcal{H}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\perp}), p_0, \Sigma_0)$ est *une espèce de structures au-dessus de l'espèce de morphismes* $(\mathcal{C}, \mathrm{F})$.

Soit $((\mathcal{H}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\perp}), p_0, \Sigma_0)$ une espèce de structures au-dessus de l'espèce de morphismes $(\mathcal{C}, \mathrm{F})$. Pout tout $e \in \pi p_0(\Sigma_0)$, $\overset{-1}{p}(\mathrm{F}(e))$ est une sous-
2 catégorie $\mathrm{F}'(e)$ de $\mathcal{S}^{\perp}$; désignons par p_e la restriction de p à $(\mathrm{F}'(e))_0$; alors $(\mathrm{F}(e), p_e, (\mathrm{F}'(e))_0)$ est une espèce de structures $\eta(e)$. Pout tout $f \in \pi p(\mathcal{S})$, l'application $\mathrm{F}'(f)$

$$z \rightarrow (f, p(z))\, z, \qquad \text{où} \qquad z \in \mathrm{F}'(\alpha(f)),$$

est un foncteur de $\mathrm{F}'(\alpha(f))$ vers $\mathrm{F}'(\beta(f))$; soit $\mathrm{F}'_0(f)$ la restriction de $\mathrm{F}'(f)$ à $(\mathrm{F}'(e))_0$. Le couple $(\mathrm{F}(f), \mathrm{F}'_0(f))$ est une application covariante $\overline{\mathrm{F}}(f)$ de $\eta(\alpha(f))$ vers $\eta(\beta(f))$. Soient F' et $\overline{\mathrm{F}}$ les applications : $f \rightarrow \mathrm{F}'(f)$ et $f \rightarrow \overline{\mathrm{F}}(f)$ respectivement, où $f \in \pi p(\mathcal{S})$.

Proposition. — $(\mathcal{C}, \mathrm{F}')$ *est une espèce de morphismes.* $(\mathcal{C}, \overline{\mathrm{F}})$ *est une espèce de structures dominée par* $(\mathcal{K}, \alpha^{\times})$, *où* $\mathcal{K}$ *est une catégorie d'appli-*

cations covariantes (Φ, φ) *entre espèces de structures* [1] *et* $\alpha^{\times}(\Phi, \varphi) = \Phi$. *Inversement, toute espèce de structures dominée par* $(\mathcal{K}, \alpha^{\times})$ *est l'espèce de structures* $(\mathcal{C}, \overline{\mathrm{F}})$ *associée à une espèce de structures au-dessus d'une espèce de morphismes.* 1

2. Catégories structurées d'opérateurs. — Soient $\mathcal{M}$ une catégorie d'applications de classes dans classes et $(\mathcal{M}, p, \mathcal{K}, \Gamma)$ une catégorie d'homomorphismes [3]. Nous supposerons que Γ est le groupoïde de tous les éléments inversibles de $\mathcal{K}$ et que, pour tout couple (s, s') d'unités de $\mathcal{K}$, il existe dans $\mathcal{K}$ un produit $s \times s'$ tel que

$$p(s \times s') = p(s) \times p(s').$$

Définition. — Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie structurée [1] *dans* $\mathcal{K}$ *et soit* $\sigma \in \mathcal{K}_0$. Nous dirons que $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une *catégorie $\mathcal{K}$-structurée d'opérateurs sur* σ si les conditions suivantes sont remplies :

1° $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie d'opérateurs sur $p(\sigma)$; nous désignerons par π la projection de $p(\sigma)$ sur $\mathcal{C}_0$, par K' la classe des couples composables (f, z), où $f \in \mathcal{C}$ et $z \in p(\sigma)$, par $\varkappa'$ l'application : $(f, z) \to fz$ de K' dans $p(\sigma)$;

2° On a $(s, \pi, \sigma) \in \mathcal{K}$;

3° Il existe $s'' \in \mathcal{K}_0$ tel que

$$p(s'') = K' \quad \text{et} \quad (s \times \sigma, i_{K'}, s'') \in \mathcal{K};$$

4° La relation $(s \times \sigma, i_{K'}, s'') \in \mathcal{K}$ entraîne

$$(s, \varkappa', s'') \in \mathcal{K}.$$ 2

On dira aussi que $[(\mathcal{C}^{\cdot}, s), \pi, \sigma]$ est une *$\mathcal{K}$-espèce de structures.*

Exemple. — Une catégorie $\tilde{\mathcal{E}}$-structurée d'opérateurs, où $\tilde{\mathcal{E}}$ est la catégorie des topologies, est une catégorie topologique d'opérateurs au sens de [4]. 3

Définition. — Nous dirons qu'une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{M}, p, \mathcal{K}, \Gamma)$ est *résolvante à droite* si la condition suivante est vérifiée : 4

(R) Soient $k \in \mathcal{K}$ et $k' \in \mathcal{K}$ tels que

$$\alpha(k) = \alpha(k') = s \quad \text{et} \quad \beta(k) = \beta(k');$$

soit A la classe des éléments $x \in p(s)$ tels que

$$p(k)(x) = p(k')(x).$$

Alors il existe $S \in \mathcal{K}_0$ tel que

$$p(S) = A, \quad (\alpha(k), i_A, S) \in \mathcal{K}$$

et que, pour tout $(s, g, S') \in \mathcal{K}$ pour lequel $g(p(S')) \subset A$, on ait

$$(S, g, S') \in \mathcal{K}.$$

Exemple. — La catégorie des topologies et la catégorie des foncteurs sont résolvantes à droite.

Théorème. — *Soit* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{K}, \Gamma)$ *une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite. Soient* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *une catégorie $\mathcal{K}$-structurée d'opérateurs sur* σ *et* $\Sigma^{\cdot}$ *la catégorie des hypermorphismes correspondant à* $[\mathcal{C}^{\cdot}, \pi, p(\sigma)]$. *Alors il existe* $s'' \in \mathcal{K}_0$ *tel que* $(\Sigma^{\cdot}, s'')$ *soit une catégorie $\mathcal{K}$-structurée.* 5

DÉFINITION. — Si $\mathcal{K}$ est une catégorie de foncteurs, une $\mathcal{K}$-espèce de structures sera appelée une *$\mathcal{F}$-espèce de structures.*

Pour que $[(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), \pi, \Sigma^{\perp}]$ soit une $\mathcal{F}$-espèce de structures, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1° $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double et $\Sigma^{\perp}$ une catégorie;

2° $[\mathcal{C}^{\cdot}, \pi, \Sigma]$ est une espèce de structures;

3° π est un foncteur de $\Sigma^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$;

4° Les relations

$$f \in \mathcal{C}, \quad f' \in \mathcal{C}, \quad z \in \Sigma, \quad z' \in \Sigma,$$
$$\alpha^{\perp}(f') = \beta^{\perp}(f), \quad \alpha^{\perp}(z') = \beta^{\perp}(z),$$
$$\pi(z) = \alpha^{\cdot}(f) \quad \text{et} \quad \pi(z') = \alpha^{\cdot}(f')$$

entraînent

$$(f' \perp f)(z' \perp z) = f' z' \perp f z;$$

5° Les relations

$$e^{\perp} \in \mathcal{C}_0^{\perp}, \quad \sigma \in \Sigma_0^{\perp} \quad \text{et} \quad \pi(\sigma) = \alpha^{\cdot}(e^{\perp})$$

entraînent $e^{\perp}\sigma \in \Sigma_0^{\perp}$.

Du théorème précédent résulte :

COROLLAIRE. — *La catégorie structurée des hypermorphismes associée à une $\mathcal{F}$-espèce de structures $[(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), \pi, \Sigma^{\perp}]$ est une catégorie double $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$.*

THÉORÈME. — *Pour que $((\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), p, (\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp}))$ soit une catégorie double au-dessus de $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ telle que $p(\mathcal{S}) = \mathcal{C}$, il faut et il suffit que $[(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\cdot}), p, \mathcal{S}_0^{\perp}]$ et $[(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), p, \mathcal{S}_0^{\cdot}]$ soient des $\mathcal{F}$-espèces de structures et que les catégories doubles d'hypermorphismes correspondantes s'identifient à $(\mathcal{S}^{\perp}, \mathcal{S}^{\cdot})$ et*
1 *à $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ respectivement.*

Une catégorie $\mathcal{C}$ sera considérée comme une catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{0})$, où o désigne la loi de composition définie par :

$$(f', f) \to f \quad \text{si, et seulement si,} \quad f' = f.$$

Soit $[(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{0}), \pi, \Sigma^{\perp}]$ une $\mathcal{F}$-espèce de structures; pour tout $e \in \mathcal{C}_0$, $\overset{-1}{\pi}(e)$ est une sous-catégorie $F(e)$ de $\Sigma^{\perp}$; pour tout $f \in \mathcal{C}$, soit $F(f)$ l'application

$$z \to fz, \quad \text{où} \quad z \in F(\alpha(f)).$$

PROPOSITION. — *$(\mathcal{C}, F)$ est une espèce de morphismes; inversement, toute espèce de morphismes $(\mathcal{C}, F)$ telle que $\alpha(F) = \mathcal{C}$ détermine la $\mathcal{F}$-espèce de structures $[(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{0}), \pi, \Sigma^{\perp}]$, où $\Sigma^{\perp}$ est la catégorie somme des catégories*
2 *$F(e)$, $e \in \mathcal{C}_0$.*

(*) Séance du 18 février 1963.

(1) *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 1198 et 1891.

(2) Rappelons (3) que, q désignant une application de la classe Σ_0 dans la classe Γ_0 des unités d'une catégorie Γ, on dit que (Γ, q, Σ_0) est une espèce de structures si une sous-
3 catégorie Γ' de Γ opère sur Σ_0, le composé fz, où $f \in \Gamma'$ et $z \in \Sigma_0$, étant défini si, et seulement si, $\alpha(f) = q(z)$. La classe des couples composables (f, z) est la catégorie des hypermorphismes correspondant à (Γ, q, Σ_0). Si $\Gamma' = \Gamma$, on écrit $[\Gamma, q, \Sigma_0]$.

(3) *Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle* (Ehresmann), Paris, III, 1961.

(4) *Colloque de Géométrie différentielle globale*, Bruxelles, C. B. R. M., 1959, p. 137.

163.545. — Imp. GAUTHIER-VILLARS & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

/60/

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Sous-structures et applications $\mathcal{H}$-covariantes.*

Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Ordres doubles. Sous-structures dans une catégorie au-dessus d'une catégorie inductive; applications : sous-catégories $\mathcal{H}$-structurées et sous-$\mathcal{H}$-espèces de structures. Cette Note fait suite à trois Notes antérieures [1] dont nous reprenons la terminologie et les notations.

1. ORDRES DOUBLES.

DÉFINITION. — Une espèce de structures dominée [1] par la catégorie des homomorphismes entre classes ordonnées sera appelée *espèce de structures ordonnée.* 1

Soit Ω_0 la classe des catégories $\mathcal{S}$ telles que $\mathcal{S}$ définisse un ordre sur la classe $\mathcal{S}_0$ de ses unités (c'est-à-dire deux morphismes de $\mathcal{S}$ ayant le même ensemble d'unités sont identiques). Une espèce de structures ordonnée s'identifie à une espèce de morphismes $(\mathcal{C}, \mathrm{F})$ telle que $\mathrm{F}(e) \in \Omega_0$ pour tout $e \in \alpha(\mathrm{F})_0$.

DÉFINITION. — Une espèce de structures ordonnée $(\mathcal{C}, \mathrm{F})$ telle que $\mathcal{C} \in \Omega_0$ sera appelée *espèce de structures biordonnée.*

DÉFINITION. — Soit $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ une catégorie double [1] telle que $\mathcal{S}^{\cdot} \in \Omega_0$ et $\mathcal{S}^{\perp} \in \Omega_0$; alors on dira que $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ définit un *ordre double* sur la classe $(\mathcal{S}^{\perp}_0)_0$ des sommets de $\mathcal{S}$.

PROPOSITION. — *Pour qu'une catégorie double $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ définisse un ordre double sur $(\mathcal{S}^{\perp}_0)_0$, il suffit que deux éléments de $\mathcal{S}$ ayant le même ensemble de sommets soient identiques.*

Les sommets de $f \in \mathcal{S}$ sont les éléments

$$\alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)), \quad \alpha^{\cdot}(\beta^{\perp}(f)), \quad \beta^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) \quad \text{et} \quad \beta^{\cdot}(\beta^{\perp}(f)).$$

La notion d'ensemble deux fois ordonné de Cantor [2] est un cas particulier de la notion d'ordre double. On peut de même généraliser la notion d'ensemble n fois ordonné de Cantor à partir de la notion de catégorie n-uple définie par récurrence de la manière suivante :

DÉFINITION. — On appellera *catégorie n-uple* une catégorie structurée par une catégorie $(n-1)$-uple. 2

2. SOUS-STRUCTURES. — Soit $(\mathcal{C}, \pi, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes [3] telle que $\mathcal{S}$ contienne le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$. Supposons que $\mathcal{C}$ soit une catégorie inductive [4], la relation d'ordre étant notée $<$. 3

DÉFINITION. — Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{H}_0$; on dira que $s \in \mathcal{H}_0$ est une *sous-structure* de S si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° On a $(\mathrm{S}, \pi(\mathrm{S})\,\pi(s), s) \in \mathcal{H}$, où $\pi(\mathrm{S})\,\pi(s)$ désigne le pseudo-produit dans $\mathcal{H}$;

2° Pour tout $(S, g, S') \in \mathcal{H}$ tel que

$$\alpha(\pi(s)g) = \alpha(g) \quad \text{et} \quad \beta(\pi(s)g) = \pi(s),$$

on a

$$(s, \pi(s)g, S') \in \mathcal{H}.$$

De 1° résulte : $\pi(s) < \pi(S)$.

Proposition. — *Si s et s' sont deux sous-structures de* S *dans $\mathcal{H}$ telles que $\pi(s) = \pi(s')$, on a : $s = s'$.*

Soit $\propto$ la relation définie dans $\mathcal{H}$ par :

$s \propto S$, où $s \in \mathcal{H}_0$ et $S \in \mathcal{H}_0$, si et seulement si, s est une sous-structure de S;

$g \propto g'$, où $g \in \mathcal{H}$ et $g' \in \mathcal{H}$, si et seulement si, on a

$$\alpha(g) \propto \alpha(g'), \quad \beta(g) \propto \beta(g') \quad \text{et} \quad \pi(g) < \pi(g').$$

Proposition. — *$\propto$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{H}$ telle que :*

1° $g \propto g'$, $g_1 \propto g'$, $\alpha(g) = \alpha(g_1)$ et $\beta(g) = \beta(g_1)$ entraînent $g_1 = g$;

2° $g \propto g'$, $g_1 \propto g'_1$, $\alpha(g_1) = \beta(g)$ et $\alpha(g'_1) = \beta(g')$ entraînent $g_1 g \propto g'_1 g'$.

Exemples. — 1° Dans la catégorie $\tilde{\mathfrak{T}}$ des topologies, une sous-structure s de S est la topologie induite par S sur l'ensemble sous-jacent à s.

2° Dans la catégorie des foncteurs, une sous-structure d'une catégorie $G^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $G^{\cdot}$.

3° Considérons la catégorie d'homomorphismes $(\tilde{\mathfrak{T}}, \mathrm{Id}_{\tilde{\mathfrak{T}}}, \tilde{\mathfrak{T}}, \tilde{\mathfrak{T}})$; dans $\tilde{\mathfrak{T}}$

1 les relations : $g < g'$ et $g \propto g'$ sont les mêmes.

3. Catégories et groupoïdes $\mathcal{K}$-structurés. — $\mathfrak{M}$ désignera une classe de classes contenant avec une classe toutes ses sous-classes, avec deux classes, leur produit. Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie inductive de toutes les applications de $A \in \mathfrak{M}_0$ dans $B \in \mathfrak{M}_0$. Soit $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{K}, \Gamma)$ une catégorie d'homomorphismes telle que Γ soit le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{K}$.

Définition. — On appellera *groupoïde $\mathcal{K}$-structuré* un couple $(G^{\cdot}, s)$, où $G^{\cdot}$ est une structure de groupoïde sur la classe $p(s) = G$, vérifiant les conditions suivantes :

1° $(G^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\mathcal{K}$-structurée ([1]);

2° Soit j l'application : $f \to f^{-1}$ de G dans G; alors on a

$$(s, j, s) \in \Gamma.$$

Exemples. — 1° Un groupoïde $\tilde{\mathfrak{T}}$-structuré est un groupoïde topologique ([2]).

2° Soit $\mathcal{I}_0$ la classe de toutes les classes inductives (resp. sous-inductives) ([3]) et $\mathcal{I}$ la catégorie de toutes les applications inductives (resp. sous-inductives). Un groupoïde inductif [resp. sous-inductif ([3])] est un groupoïde $\mathcal{I}$-structuré (d'un type particulier). Une espèce de structures inductives (resp. sous-inductives) sur un groupoïde inductif (resp.

2 sous-inductif) est une $\mathcal{I}$-espèce de structures ([1]).

Nous supposerons désormais que pour tout couple $(s_1, s_2) \in \mathcal{K}_0 \times \mathcal{K}_0$ il existe un produit $s_1 \times s_2$ dans $\mathcal{K}$ tel que

$$p(s_1 \times s_2) = p(s_1) \times p(s_2).$$

la projection canonique de $s_1 \times s_2$ sur s_i étant

$$(s_i, pr_i, s_1 \times s_2) \in \mathcal{K}, \qquad \text{où} \quad i = 1, 2$$

et

$$pr_i(x_1, x_2) = x_i \qquad \text{pour tout } (x_1, x_2) \in p(s_1) \times p(s_2).$$

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie de tous les foncteurs $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\cdot})$, où $\mathcal{C}^{\cdot}$ désigne une structure de catégorie sur la classe $\mathcal{C} \in \mathcal{M}_0$. Soit $\overline{\mathcal{K}}_0$ la classe des catégories $\mathcal{K}$-structurées; désignons par $\overline{\mathcal{K}}$ la catégorie des triplets $((\mathcal{C}_1^{\cdot}, s_1), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\cdot}, s))$, où

$$(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{K}}_0, \qquad (\mathcal{C}_1^{\cdot}, s_1) \in \overline{\mathcal{K}}_0$$
$$(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\cdot}) \in \mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad (s_1, \mathrm{F}, s) \in \mathcal{K}.$$

Soit Γ la sous-classe de $\overline{\mathcal{K}}$ formée des triplets tels que $(s_1, \mathrm{F}, s) \in \Gamma$. Soit $\overline{\mathcal{G}}$ (resp. Γ') la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{K}}$ (resp. $\overline{\Gamma}$) dont les unités sont les groupoïdes $\mathcal{K}$-structurés. Soit $\overline{p}$ l'application

$$((\mathcal{C}_1^{\cdot}, s_1), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)) \to (\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\cdot}).$$

Proposition. — *Si $p(\Gamma)$ est saturé* [2] *dans $\mathcal{M}$ ou si $(\mathcal{M}, p, \mathcal{K}, \Gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite* [1], *$(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{K}}, \overline{\Gamma})$ est une catégorie d'homomorphismes dont $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{G}}, \Gamma')$ est une sous-catégorie d'homomorphismes.* 1

4. Sous-catégories structurées. — Dans la suite nous supposerons que $(\mathcal{M}, p, \mathcal{K}, \Gamma)$ est résolvante à droite et que $\mathcal{F}$ est muni de sa structure de catégorie inductive. 2

Théorème. — *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie (resp. un groupoïde) $\mathcal{K}$-structuré. Les conditions suivantes sont équivalentes :* 3¶

1° *$\mathcal{C}_1^{\cdot}$ est une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde) de $\mathcal{C}^{\cdot}$ et s_1 une sous-structure de s dans $\mathcal{K}$ telle que $p(s_1) = \mathcal{C}_1$;*

2° *$(\mathcal{C}_1^{\cdot}, s_1)$ est une sous-structure de $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ dans $\overline{\mathcal{K}}$ (resp. dans $\overline{\mathcal{G}}$).*

Corollaire. — *$(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{K}}, \overline{\Gamma})$ et $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{G}}, \Gamma')$ sont résolvantes à droite.*

Définition. — Une sous-structure de $(\mathcal{C}, s)$ dans $\overline{\mathcal{K}}$ (resp. dans $\overline{\mathcal{G}}$) sera appelée *sous-catégorie* (resp. *sous-groupoïde*) *$\mathcal{K}$-structuré* de $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$.

Définition. — Soient $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, s_1)$ une sous-catégorie $\mathcal{K}$-structurée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ et $[(\mathcal{C}_1^{\cdot}, s_1), \pi, \sigma]$ une $\mathcal{K}$-espèce de structures; alors on dira que σ est une *$\mathcal{K}$-espèce de structures au-dessus de $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ relativement à π*, ou aussi que *$((\mathcal{C}^{\cdot}, s), \pi, \sigma)$ est une $\mathcal{K}$-espèce de structures.*

5. Applications $\mathcal{K}$-covariantes.

Définition. — Soient

$$\eta = ((\mathcal{C}^{\cdot}, s), \pi, \sigma) \qquad \text{et} \qquad \eta_1 = ((\mathcal{C}_1^{\cdot}, s_1), \pi, \sigma_1)$$

deux $\mathcal{K}$-espèces de structures. On appellera *application $\mathcal{K}$-covariante* de η vers η_1 un couple (Φ, φ) vérifiant les conditions :

1° $\Phi \in \overline{\mathcal{K}}$, $\alpha(\Phi) = (\mathcal{C}^{\bullet}, s)$, $\beta(\Phi) = (\mathcal{C}_1^{\bullet}, s_1)$;

2° $\varphi \in \mathcal{K}$, $\alpha(\varphi) = \sigma$, $\beta(\varphi) = \sigma_1$;

3° $(\overline{p}(\Phi), p(\varphi))$ est une application covariante ([5]) de $(\mathcal{C}^{\bullet}, \pi, p(\sigma))$ vers $(\mathcal{C}_1^{\bullet}, \pi_1, p(\sigma_1))$.

Soit $\gamma_{\!\!\!\!\!\;\!\!\!\,} = ((\mathcal{C}^{\bullet}, s), \pi, \sigma)$ une $\mathcal{K}$-espèce de structures; nous désignerons par $(\mathrm{K}'^{\bullet}, \overline{\sigma})$ la catégorie $\mathcal{K}$-structurée des hypermorphismes correspondante ([1]). On a

$$\mathrm{H} = ((\mathcal{C}^{\bullet}, s), \overline{\pi}, (\mathrm{K}'^{\bullet}, \overline{\sigma})) \in \overline{\mathcal{K}},$$

où

$$\overline{\pi}(f, z) = f \qquad \text{pour tout } (f, z) \in \mathrm{K}'.$$

Théorème. — *Soit* (Φ, φ) *une application $\mathcal{K}$-covariante de* $((\mathcal{C}^{\bullet}, s), \pi, \sigma)$ *vers* $((\mathcal{C}_1^{\bullet}, s_1), \pi_1, \sigma_1)$; *il existe* $(\mathrm{H}_1, \Phi, \overline{\varphi}, \mathrm{H}) \in \square\overline{\mathcal{K}}$ *tel que*

$$p(\overline{\varphi})(f, z) = (\overline{p}(\Phi)(f), p(\varphi)(z)) \qquad \textit{pour tout } (f, z) \in \mathrm{K}'.$$

Inversement, tout quatuor $(\mathrm{H}_1, \Phi, \overline{\varphi}, \mathrm{H}) \in \square\overline{\mathcal{K}}$ *tel que* $\overline{p}(\mathrm{H})$ *et* $\overline{p}(\mathrm{H}_1)$ *soient des foncteurs définissant des espèces de structures détermine une application $\mathcal{K}$-covariante* (Φ, φ).

Nous désignerons par $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ la classe des applications $\mathcal{K}$-covariantes.

Proposition. — $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ *est une catégorie pour la loi de composition :*

$$(\Phi', \varphi') \times (\Phi, \varphi) = (\Phi'\Phi, \varphi'\varphi)$$

si, et seulement si,

1 $$\alpha(\Phi') = \beta(\Phi) \qquad \textit{et} \qquad \alpha(\varphi') = \beta(\varphi).$$

2 *L'application* $(\Phi, \varphi) \to (\mathrm{H}_1, \Phi, \overline{\varphi}, \mathrm{H})$ *est une équivalence de* $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ *sur une sous-catégorie de la catégorie longitudinale* $\square\overline{\mathcal{K}}$.

En particulier, $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ est une catégorie d'applications covariantes entre espèces de structures. Soit $\mathrm{A}(\mathcal{K})$ le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ et $\tilde{p}$ l'application

$$(\Phi, \varphi) \to (\overline{p}(\Phi), p(\varphi)), \qquad \text{où} \quad (\Phi, \varphi) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}).$$

Corollaire. — $(\mathcal{A}(\mathcal{M}), \tilde{p}, \mathcal{A}(\mathcal{K}), \mathrm{A}(\mathcal{K}))$ *est une catégorie d'homomorphismes.*

3 Définition. — Une sous-structure de γ dans $\mathcal{A}(\mathcal{K})$ sera appelée *sous-$\mathcal{K}$-espèce de structures de* γ.

4¶ Théorème. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° $[(\mathcal{C}_1^{\bullet}, s_1), \pi_1, \sigma_1]$ *est une sous-$\mathcal{K}$-espèce de structures de* $[(\mathcal{C}^{\bullet}, s), \pi, \sigma]$;

2° $[\mathcal{C}_1^{\bullet}, \pi_1, p(\sigma_1)]$ *est une sous-espèce de structures de* $[\mathcal{C}^{\bullet}, \pi, p(\sigma)]$ *et* s_1 (*resp.* σ_1) *est une sous-structure de s* (*resp.* σ) *dans* $\mathcal{K}$.

(*) Séance du 25 février 1963.

([1]) *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 1198, 1891 et 2080.

([2]) Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1932, p. 420.

([3]) *Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle* (Ehresmann), III, Paris, 1961.

([4]) *Ann. Inst. Fourier*, 10, 1960, p. 307.

([5]) *Colloque de Géométrie différentielle globale*, Bruxelles, C. B. R. M., 1959, p. 137.

163.546. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 258 p. 2461-2464 (2 mars 1964). Groupe 1.

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Produit croisé de catégories.*

Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Les notions de produit croisé et d'homomorphisme croisé sont généralisées au cas d'une catégorie munie d'une catégorie d'opérateurs. Application à la cohomologie d'ordre 1 d'une catégorie, à valeurs dans une catégorie. Catégorie de cohomologie centrale d'ordre 1.

Nous reprenons les notations de [1].

1. PRODUIT CROISÉ.

Définition. — On dit que $\Sigma^{\cdot}$ est une *catégorie munie d'une catégorie d'opérateurs* $C^{\cdot}$, la loi de composition étant $\varkappa$, si $C^{\cdot}$ est une catégorie d'opérateurs [1] sur la classe Σ relativement à $\varkappa$ et si les conditions suivantes sont vérifiées, où $f \in C$, $z \in \Sigma$, le composé $\varkappa(f, z)$, s'il est défini, étant noté fz :

1° $\Sigma^{\cdot}$ est une catégorie.

2° Si $z'.z$ est défini dans $\Sigma^{\cdot}$ et si $f(z'.z)$ est défini, alors fz' et fz sont définis et l'on a $f(z'.z) = (fz').(fz)$.

3° Si $s \in \Sigma^{\cdot}_0$ et si fs est défini, alors $fs \in \Sigma^{\cdot}_0$.

Si $z \in \Sigma$, l'unité e de $C^{\cdot}$ telle que ez soit défini est désignée par $\pi_0(z)$.

Cette définition entraîne que, pour tout $e \in C^{\cdot}_0$, $\pi_0^{-1}(e)$ est une sous-catégorie $F(e)$ de $\Sigma^{\cdot}$ et que, pour tout $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, le triplet $(F(e'), \tilde{f}, F(e))$ est un foncteur $F(f)$, où $\tilde{f}$ est l'application : $z \to fz$; c'est-à-dire $(C^{\cdot}, F)$ est une espèce de morphismes [1]. Inversement, si $(C^{\cdot}, F)$ est une espèce de morphismes telle que $\alpha(F) = C^{\cdot}$, la catégorie somme des catégories $F(e)$, où $e \in C^{\cdot}_0$, est une catégorie munie de la catégorie d'opérateurs $C^{\cdot}$.

Soit $\Sigma^{\cdot}$ une catégorie munie d'une catégorie d'opérateurs $C^{\cdot}$, la loi de composition étant $\varkappa$. Alors $[C^{\cdot}, \pi_0, \Sigma]$ est une espèce de structures admettant $[C^{\cdot}, \pi'_0, \Sigma^{\cdot}_0]$ pour sous-espèce de structures [2], où π'_0 est une restriction de π_0. Soit $(C^{\cdot}, \pi, S^{\cdot})$ la catégorie des hypermorphismes associée à $[C^{\cdot}, \pi'_0, \Sigma^{\cdot}_0]$ [les éléments de S sont donc [2] les couples $(f, s) \in C \times \Sigma^{\cdot}_0$ tels que $\alpha(f) = \pi'_0(s)$].

Soit $\tilde{\Sigma}$ la classe des triplets (z, f, s) tels que

$$(f, s) \in S, \qquad z \in \Sigma \qquad \text{et} \qquad fs = \alpha(z).$$

Soit $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ la classe multiplicative obtenue en munissant $\tilde{\Sigma}$ de la loi de composition définie par

$$((z', f', s').(z, f, s)) \to (z'.f'z, f'.f, s)$$ 1

si, et seulement si, $s' = \beta(z)$.

THÉORÈME. — *$\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ est une catégorie; $\Sigma^{\cdot}$ et $S^{\cdot}$ s'identifient à des sous-catégories de $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$. De plus, $C^{\cdot}$ est une catégorie quotient [1] de $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$, le foncteur projection étant défini par $\tilde{\pi} : (z, f, s) \to f$.*

Les unités de $\tilde{\Sigma}^\bullet$ sont identifiées aux unités de $\Sigma^\bullet$.

1 **Théorème.** — *Si* $C^\bullet$ *est un groupoïde,* $\tilde{\Sigma}^\bullet$ *est une catégorie équivalente à la catégorie* $\tilde{\Sigma}^\bullet_1$ *dont les éléments sont les couples* (z, f) *tels que*

$$f \in C, \qquad z \in \Sigma \qquad \text{et} \qquad \beta(f)z \text{ est défini},$$

munie de la loi de composition

$$((z', f'), (z, f)) \to (z'.f'z, f'.f) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha(z') = \beta(f'z).$$

Exemple. — Si $C^\bullet$ et $\Sigma^\bullet$ sont des groupes, alors $\tilde{\Sigma}^\bullet_1$ est le produit croisé $C^\bullet \times_\chi \Sigma^\bullet$ [*voir* ([3])].

Définition. — $\tilde{\Sigma}^\bullet$ sera appelé le *produit croisé* de $C^\bullet$ et de $\Sigma^\bullet$ et sera

2+ désigné par le symbole $C^\bullet \times_\chi \Sigma^\bullet$.

2. Homomorphismes croisés.

Proposition. — *Pour que* $(\tilde{\Sigma}^\bullet, \Phi, C^\bullet)$ *soit un foncteur section de* $(C^\bullet, \tilde{\pi}, \tilde{\Sigma}^\bullet)$ *il faut et il suffit que, pour tout* $f \in C$, *on ait*

$$\Phi(f) = (\varphi(f), f, \varphi(\alpha(f))),$$

où φ *est une application de* C *dans* Σ *vérifiant les conditions*

3 $$\text{(H)} \quad \pi\varphi(f) = \beta(f), \qquad \varphi(C^\bullet_0) \subset \Sigma^\bullet_0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(f'.f) = \varphi(f').f'\varphi(f) \qquad \text{si} \quad \alpha(f') = \beta(f).$$

Définition. — On appelle *homomorphisme croisé* un triplet $(\Sigma^\bullet, \varphi, C^\bullet)$ tel que φ soit une application de C dans Σ vérifiant la condition (H). On appelle *foncteur croisé associé à* l'homomorphisme croisé $(\Sigma^\bullet, \varphi, C^\bullet)$ le foncteur $(\tilde{\Sigma}^\bullet, \Phi, C^\bullet)$ correspondant.

Exemple. — Si $C^\bullet$ et $\Sigma^\bullet$ sont des groupes, on retrouve la notion habituelle d'homomorphisme croisé [*voir* ([3])].

Proposition. — *Pour que le foncteur croisé* $(\tilde{\Sigma}^\bullet, \Phi, C^\bullet)$ *associé à* $(\Sigma^\bullet, \varphi, C^\bullet)$ *soit un foncteur section de* $(C^\bullet, \pi, S^\bullet)$, *il faut et il suffit qu'on ait* $\varphi(C) \subset \Sigma^\bullet_0$.

Soit $(S^\bullet, \Phi, C^\bullet)$ un foncteur section de $(C^\bullet, \pi, S^\bullet)$. Soit τ une application de C dans le groupoïde $\Sigma^\bullet_\gamma$ des éléments inversibles de $\Sigma^\bullet$ telle que, pour tout $e \in C^\bullet_0$, on ait

$$\alpha(\tau(e)) = \Phi(e).$$

4 Remarquons que la seule donnée de φ définit Φ, puisque

$$\Phi(f) = (f, \alpha(\tau(e))) \qquad \text{pour tout } f \in C, \qquad \text{où} \quad e = \alpha(f).$$

Soit φ_τ l'application

$$f \to \tau(e').f\tau(e)^{-1}, \qquad \text{où} \quad f \in C, \qquad e = \alpha(f) \qquad \text{et} \qquad e' = \beta(f).$$

Proposition. — $(\Sigma^\bullet, \varphi_\tau, C^\bullet)$ *est un homomorphisme croisé; soit* Φ_τ *le foncteur croisé associé. Alors* (Φ_τ, τ, Φ) *est une équivalence naturelle,* Φ *étant considéré*

5 *comme un foncteur de* $C^\bullet$ *vers* $\tilde{\Sigma}^\bullet$.

Exemple. — Si $C^{\cdot}$ et $\Sigma^{\cdot}$ sont des groupes, la donnée d'une application τ vérifiant les conditions précédentes est équivalente à la donnée d'un élément a de Σ; par suite, φ_{τ} est un homomorphisme croisé principal.

Définition. — Un homomorphisme croisé de la forme $(\Sigma^{\cdot}, \varphi_{\tau}, C^{\cdot})$ sera appelé *homomorphisme croisé principal.*

Théorème. — *L'application*

$$(\Sigma^{\cdot}, \varphi_{\tau}, C^{\cdot}) \to (\Phi_{\tau}, \tau, \Phi)$$

est une bijection de la classe des homomorphismes croisés principaux sur la classe des équivalences naturelles (Φ', τ, Φ) *telles que* $\tau(C^{\cdot}_0) \subset \Sigma^{\cdot}_{\gamma}$. 1

3. Classes de cohomologie d'ordre I.

Proposition. — *Soient* $\bar{\varphi}$ *et* $\bar{\varphi}'$ *deux homomorphismes croisés,* Φ *et* Φ' *les foncteurs croisés correspondants. Soit* τ *une application de* $C^{\cdot}_0$ *dans* $\Sigma^{\cdot}_{\gamma}$. *Pour que* (Φ', τ, Φ) *soit une équivalence naturelle, il faut et il suffit qu'on ait*

$$(\mathrm{H}') \quad \tau(e').\varphi(f) = \varphi'(f).f\tau(e) \qquad \textit{pour tout } f \in C, \qquad \textit{où} \quad e = \alpha(f) \quad \textit{et} \quad e' = \beta(f).$$ 2

Définition. — On appelle *équivalence croisée* un triplet $(\bar{\varphi}', \tau, \bar{\varphi})$, où $\bar{\varphi}$ et $\bar{\varphi}'$ sont deux homomorphismes croisés et τ une application de $C^{\cdot}_0$ dans $\Sigma^{\cdot}_{\gamma}$ vérifiant la condition (H').

Soit $Z^1(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ la classe des homomorphismes croisés $(\Sigma^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot})$ et soit $B^1(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ la sous-classe formée des homomorphismes croisés principaux. Soit ρ la relation d'équivalence sur $Z^1(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ définie par :

$\bar{\varphi} \sim \bar{\varphi}'$ si, et seulement si, il existe une équivalence croisée $(\bar{\varphi}', \tau, \bar{\varphi})$. 3

Définition. — Une classe d'équivalence de $Z^1(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ module ρ sera appelée *classe de cohomologie d'ordre* I. La classe des classes de cohomologie d'ordre I sera désignée par $H^1(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$. 4+

$B^1(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ est une sous-classe saturée relativement à ρ; mais elle peut contenir plusieurs classes de cohomologie d'ordre I, si $F(e)$ n'est pas un groupoïde transitif pour tout $e \in C^{\cdot}_0$.

4. Homomorphismes croisés centraux. — Pour tout $s \in \Sigma^{\cdot}_0$, nous désignerons par $s.\Sigma.s$ la classe des $z \in \Sigma$ tels que $\alpha(z) = \beta(z) = s$, par G_s le sous-demi-groupe de $\Sigma^{\cdot}$ formé des $z \in s.\Sigma.s$ tels que, pour tout $z' \in s.\Sigma.s$, on ait $z'.z = z.z'$.

Définition. — On appelle *section centrale* de $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ une sous-catégorie H de $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ vérifiant les conditions suivantes : 5

1° La restriction de $\tilde{\pi}$ à $H \cap S$ est une bijection sur C;

2° Pour tout $s \in H^{\cdot}_0$, on a $H \cap s.\Sigma.s = G_s$.

Une section centrale $H^{\cdot}$ de $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ étant la sous-catégorie de $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ engendrée par les sous-classes $H \cap S$ et G_s, où $s \in H^{\cdot}_0$, elle est entièrement déterminée par la seule donnée de $H^{\cdot}_0$.

Définition. — On appelle *homomorphisme croisé central* un homomorphisme croisé $(\Sigma^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot})$ tel que, si $f \in C$ et $e = \beta(f)$, on ait $\varphi(f) \in G_s$, où $s = \varphi(e)$. Soit $Z^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$ la sous-classe de $Z^1(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$ formée des homomorphismes croisés centraux et soit

$$B^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot) = Z^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot) \cap B^1(\Sigma^\cdot, C^\cdot).$$

1' THÉORÈME. — *Il existe une injection canonique* γ *de* $Z^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$ *dans la classe des foncteurs* $(H^\cdot, \tilde{\Phi}, H^\cdot)$ *vérifiant les conditions :*

1° $H^\cdot$ *est une section centrale de* $\tilde{\Sigma}^\cdot$.

2° $\tilde{\pi}.\tilde{\Phi}$ *est la restriction de* $\tilde{\pi}$ *à* H.

3° *La restriction de* $\tilde{\Phi}$ *à* $H \cap \Sigma$ *est l'application identique.*

2¶ *Il existe une bijection canonique de* $B^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$ *sur la classe réunion des centres des sections centrales de* $\tilde{\Sigma}^\cdot$ (le centre d'une catégorie est la classe des automorphismes naturels du foncteur Identité).

Si $\bar{\varphi} \in Z^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$, alors $\bar{\varphi}(C^\cdot_0)$ est la classe des unités d'une section centrale $H^\cdot$ de $\tilde{\Sigma}^\cdot$ et l'application $\tilde{\Phi}$:

$$(z, f, s) \rightarrow (z.\varphi(f), f, s), \qquad \text{où} \quad (z, f, s) \in H,$$

définit un foncteur $\gamma(\bar{\varphi})$ de $H^\cdot$ vers $H^\cdot$.

THÉORÈME. — $Z^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$ *est une catégorie, dont* $B^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$ *est une sous-catégorie, pour la loi de composition définie par*

$$(\bar{\varphi}', \bar{\varphi}) \rightarrow \bar{\varphi}'.\bar{\varphi}, \qquad \textit{où} \quad \bar{\varphi}'.\bar{\varphi}(f) = \bar{\varphi}'(f).\varphi(f)$$

3 *si, et seulement si,* $\alpha(\bar{\varphi}'(f)) = \beta(\bar{\varphi}(f))$ *pour tout* $f \in C$.

Les unités de $Z^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$ sont les homomorphismes croisés principaux $\bar{\varphi}$ tels que $\bar{\varphi}(C) \subset \Sigma^\cdot_0$.

Remarque. — Si $\bar{\varphi}$ et $\bar{\varphi}'$ sont deux homomorphismes croisés quelconques, en général $\bar{\varphi}'.\bar{\varphi}$, même s'il est défini, n'est pas un homomorphisme croisé. La sous-classe de $Z^1(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$ formée des $\bar{\varphi}$ tels que $\alpha(\bar{\varphi}(f)) = \beta(\bar{\varphi}(f))$ pour tout $f \in C$ est toutefois un graphe multiplicatif pour la loi de composition : $(\bar{\varphi}', \bar{\varphi}) \rightarrow \bar{\varphi}'.\bar{\varphi}$, si, et seulement si, $\bar{\varphi}'.\bar{\varphi} \in Z^1(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$.

THÉORÈME. — $Z^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$ *admet une catégorie quotient* [1] $H^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$

4 *par la relation d'équivalence* ρ_c *déduite de* ρ; *les unités de cette catégorie sont les classes* $\bar{\varphi}$ mod ρ_c *telles que* $\bar{\varphi} \in B^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$.

Définition. — $H^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$ sera appelé *catégorie de cohomologie centrale d'ordre* 1.

Exemple. — Si $C^\cdot$ est un groupe et $\Sigma^\cdot$ un groupe abélien,

$$H^1_c(\Sigma^\cdot, C^\cdot) = H^1(\Sigma^\cdot, C^\cdot)$$

5 est le groupe de cohomologie d'ordre 1 [*voir* [3]].

(*) Séance du 24 février 1964.
[1] *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 1198, 1891 et 5031.
[2] CH. EHRESMANN, *Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle*, Paris, III, 1961.
[3] S. MAC LANE, *Homology*, Springer-Verlag, 1963.

(*Institut Henri Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie, Paris*, 5e.)

166002. — Imp. GAUTHIER-VILLARS & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e). Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 259 p. 1372-1375 (17 août 1964). Groupe 1.

/72/

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Expansion d'homomorphismes en foncteurs.* Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Paul Montel.

Théorème d'expansion « universelle » d'un homomorphisme entre graphes multiplicatifs en un foncteur, permettant de rendre inversibles les éléments de deux classes données. Application au perfectionnement d'une catégorie.

Nous utilisons les notations de [1] et [2]. En particulier, si $K^\cdot$ est une catégorie, $R(K^\cdot)$ désigne la sous-catégorie des éléments réguliers. 1

1. COUPLES $\overline{p}$-DISTINGUÉS.

DÉFINITION. — Soit $\overline{p} = (K^\cdot, p, H^\cdot)$ un homomorphisme entre graphes 2
multiplicatifs [2] tel que $H^\cdot$ soit une catégorie. On dira que $(F, \overline{F})$ est un *couple $\overline{p}$-distingué* si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° $\overline{F}^\cdot$ est une sous-catégorie de $R(H^\cdot)$ et $\overline{F}^\cdot_0 = H^\cdot_0$;

2° F est une sous-classe de K telle que $\alpha(F) = p(H^\cdot_0)$ et $p(\overline{F}) \subset F$;

3° Si $f \in F$, $f' \in F \cap p(H)$ et $\alpha(f) = \beta(f')$, on a $(f, f') \in K^\cdot \star K^\cdot$ et $f.f' \in F$;

4° Si $f \in F$, $g_i \in p(H)$ et $f.g_1 = f.g_2$, alors $g_1 = g_2$.

Soit $(F, \overline{F})$ un couple $\overline{p}$-distingué. Nous désignons par $\sqsupset(F, \overline{p})$ la catégorie ayant pour éléments les triplets (f_2, f_1, h) tels que

$$f_i \in F, \quad h \in H, \quad \alpha(f_1) = p\,\alpha(h) \quad \text{et} \quad \alpha(f_2) = p\,\beta(h),$$

la loi de composition étant définie par

$$(f'_2, f'_1, h').(f_2, f_1, h) = (f'_2, f_1, h'.h)$$

si, et seulement si, $f_2 = f'_1$.

En particulier, si $\overline{p} = (K^\cdot, \iota, H^\cdot)$, où ι est l'injection canonique de H dans K, nous poserons

$$\sqsupset(F, H^\cdot) = \sqsupset(F, (K^\cdot, \iota, H^\cdot)).$$

Soit $\boxed{\;|\;}(H^\cdot; \overline{F}, H)$ la sous-catégorie de la catégorie longitudinale des quatuors [1] de $H^\cdot$ formée des quatuors (h', g_2, g_1, h) tels que $g_i \in \overline{F}$.

PROPOSITION. — $\boxed{\;|\;}(H^\cdot; \overline{F}, H)$ *opère sur* $\sqsupset(F, \overline{p})$ *relativement à la loi de composition*

$$(f_2, f_1, h)\,(h_2, g_2, g_1, h_1) = (f_2.p(g_2), f_1.p(g_1), h_1)$$

si, et seulement si, $h = h_2$. 3

2. F-EXPANSIONS RÉGULIÈRES.

DÉFINITION. — On dit qu'une catégorie $H^\cdot$ est une F-*expansion semi-régulière* (resp. *régulière*) de la sous-catégorie $C^\cdot$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° On a $F \subset R(H^\cdot)$ (resp. $\subset H^\cdot_\gamma$), $\alpha(F) = C^\cdot_0 \subset F$ et $F.(F \cap C) \subset F$;

2° Pour tout $h \in H$, il existe $(h, f', f, k) \in \square(H^{\cdot}; F, H)$ tel que $k \in C$;
3° Si $f_i \in F$ et $\beta(f_2) = \beta(f_1)$, il existe $f'_i \in F \cap C$ tels que $f_1 . f'_1 = f_2 . f'_2$;
4° Si $f \in F \cap C$, $h \in C$ et $\beta(f) = \beta(h)$, il existe $(h, f, f', h') \in \square(C^{\cdot}; F \cap C, C)$.

1 Proposition. — *Si* $(F, \overline{F})$ *est un couple* $\overline{p}$*-distingué, où* $\overline{p} = (K^{\cdot}, p, H^{\cdot})$, *il existe une équivalence* τ *d'une sous-catégorie* $\overline{H}^{\cdot}$ *de* $\sqsupset(F, \overline{p})$ *sur* $H^{\cdot}$ *et une sous-classe* $\overline{F}'$ *de* $\sqsupset(F, \overline{p})$ *telles que* $\sqsupset(F, \overline{p})$ *soit une* $\overline{F}'$*-expansion régulière*
2 *de* $\overline{H}^{\cdot}$.

τ est défini par l'application

$$(p\beta(h), p\alpha(h), h) \to h$$

et $\overline{F}'$ est la classe des triplets $(f, \alpha(f), s)$ tels que $f \in F$ et $s \in H^{\cdot}_0$.

Théorème. — *Si* $H^{\cdot}$ *est une* F*-expansion semi-régulière de* $C^{\cdot}$, *alors* $(F, F \cap C)$ *est un couple* $(H^{\cdot}, \iota, C^{\cdot})$*-distingué. L'application*

$$(f_2, f_1, h) \to k \qquad si \quad (k, f_2, f_1, h) \in \square H^{\cdot}$$

définit un foncteur qui fait de $H^{\cdot}$ *une catégorie quotient strict* (²) *d'une sous-*
3 *catégorie* $L^{\cdot}$ *de* $\sqsupset(F, C^{\cdot})$. *De plus,* $H^{\cdot}$ *est équivalente à la catégorie quotient strict de* $L^{\cdot}$ *par la relation d'équivalence :* $t_2 \sim t_1$ *si, et seulement si, il existe* $Q_i \in \square(C^{\cdot}; F \cap C, C)$ *tels que* $t_2 Q_2 = t_1 Q_1$.

3. Couples $\overline{p}$-distingués réguliers.

Définition. — On dira qu'un couple $(F, \overline{F})$ est *p-distingué régulier* s'il vérifie les conditions suivantes :

1° $\overline{p} = (K^{\cdot}, p, H^{\cdot})$ est un homomorphisme entre graphes multiplicatifs, $H^{\cdot}$ est une catégorie et $(F, \overline{F})$ est un couple $\overline{p}$-distingué;

2° La restriction de p à $\overline{F}.s$ est une injection, pour tout $s \in H^{\cdot}_0$;

3° Si $f \in \overline{F}$, $h \in H$ (resp. $\in \overline{F}$) et $\beta(f) = \beta(h)$, il existe

$$(h, f, f', h') \in \square(H^{\cdot}; \overline{F}, H) \quad (\text{resp.} \in \square \overline{F}^{\cdot});$$

4 4° Si $(f.g_2, g_1) \in K^{\cdot} \star K^{\cdot}$, $f \in F$ et $g_i \in p(F)$, on a

$$(f.g_2).g_1 = f.(g_2.g_1).$$

Théorème. — *Si* $(F, \overline{F})$ *est un couple* $\overline{p}$*-distingué régulier, il existe une catégorie* $\hat{C}^{\cdot}$ *quotient strict de* $\sqsupset(F, \overline{p})$ *qui est une* $\hat{F}$*-expansion régulière*
5 *d'une sous-catégorie* $\overline{C}^{\cdot}$ *admettant une équivalence* $\overline{\gamma}$ *sur* $\alpha(\overline{p}) = H^{\cdot}$. *De plus,* $\hat{F} \cap \overline{C} = \overline{\gamma}^{-1}(\tilde{F})$, *où* $\tilde{F}$ *est la classe des* $h \in H$ *tels qu'il existe* $f \in F$ *et* $g_i \in \overline{F}$, *avec* $h.g_1 = g_2$ *et* $f.p(g_1) = p(g_2)$.

$\hat{C}^{\cdot}$ est la catégorie quotient de $\sqsupset(F, \overline{p})$ par la relation d'équivalence ρ :

$$t_1 \sim t_2 \quad \text{s'il existe } Q_i \in \square(H^{\cdot}; \overline{F}, H) \quad \text{tels que } t_1 Q_1 = t_2 Q_2.$$

$\hat{F}$ est la classe des classes $(f, \alpha(f), s) \bmod \rho$, où $f \in F$ et $s \in H^{\cdot}_0$, et C est la classe des classes $(p\beta(h), p\alpha(h), h) \bmod \rho$.

4. Théorème d'expansion. — Soit $\mathcal{M}$ une catégorie pleine d'applications, $\mathcal{H}'$ (resp. $\mathcal{F}$) la catégorie des homomorphismes entre graphes multiplicatifs (resp. des foncteurs) correspondante ([2]).

Soit $\mathcal{D}_0$ la classe des triplets $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}}, \overline{p})$ vérifiant les conditions suivantes :

1° $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}})$ est un couple $\overline{p}$-distingué régulier; 1

2° La sous-classe stable dans $\mathrm{K}^{\cdot}$ engendrée par $p(\mathrm{H})$ est une catégorie $\mathrm{H}^{\cdot}_1$. Si F_1 désigne la sous-catégorie de $\mathrm{H}^{\cdot}_1$ engendrée par $p(\overline{\mathrm{F}})$, alors $(\mathrm{F}, \mathrm{F}_1)$ est un couple $(\mathrm{K}^{\cdot}, \iota, \mathrm{H}^{\cdot}_1)$-distingué régulier;

3° Les relations $(k_i, f) \in \mathrm{K}^{\cdot} \star \mathrm{K}^{\cdot}$, $f \in p(\overline{\mathrm{F}})$, $k_i \in \mathrm{F} \cup p(\mathrm{H})$ et $k_1.f = k_2.f$ entraînent $k_1 = k_2$.

Soit $\mathcal{D}$ la catégorie formée des triplets $(\check{p}_2, \check{p}_1, \mathrm{U})$ tels que

$$\check{p}_i = (\mathrm{F}_i, \overline{\mathrm{F}}_i, \overline{p}_i) \in \mathcal{D}_0, \qquad \mathrm{U} = (\overline{p}_2, \Phi', \Phi, \overline{p}_1) \in \square\mathcal{H}',$$
$$\Phi'(\mathrm{F}_1) \subset \mathrm{F}_2 \qquad \text{et} \qquad \Phi(\overline{\mathrm{F}}_1) \subset \overline{\mathrm{F}}_2,$$

la loi de composition étant définie par

$$(\check{p}'_2, \check{p}'_1, \mathrm{U}').(\check{p}_2, \check{p}_1, \mathrm{U}) = (\check{p}'_2, \check{p}_1, \mathrm{U}' \boxbar \mathrm{U})$$

si, et seulement si, $\check{p}'_1 = \check{p}_2$.

Soit $\mathcal{D}'_0$ la classe des quadruplets $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}}, \mathrm{C}, \overline{q})$ vérifiant les conditions :

1° $\overline{q} = (\mathrm{K}^{\cdot}, q, \hat{\mathrm{C}}^{\cdot}) \in \mathcal{F}$ et $q(\overline{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{F}$;

2° $\hat{\mathrm{C}}^{\cdot}$ est une $\overline{\mathrm{F}}$-expansion semi-régulière de $\mathrm{C}^{\cdot}$;

3° $\mathrm{K}^{\cdot}$ est une F-expansion semi-régulière de la sous-catégorie $\mathrm{H}^{\cdot}_1$ de $\mathrm{K}^{\cdot}$ engendrée par $q(\mathrm{C})$.

Soit $\mathcal{D}'$ la catégorie ayant pour éléments les triplets $(\check{q}_2, \check{q}_1, \mathrm{U})$ tels que

$$\check{q}_i = (\mathrm{F}_i, \overline{\mathrm{F}}_i, \mathrm{C}_i, \overline{q}_i) \in \mathcal{D}'_0, \qquad \mathrm{U} = (\overline{q}_2, \Phi', \Phi, \overline{q}_1) \in \square\mathcal{F},$$
$$\Phi(\overline{\mathrm{F}}_1) \subset \overline{\mathrm{F}}_2, \qquad \Phi'(\mathrm{F}_1) \subset \mathrm{F}_2 \qquad \text{et} \qquad \Phi(\mathrm{C}_1) \subset \mathrm{C}_2,$$

la loi de composition étant définie par

$$(\check{q}'_2, \check{q}'_1, \mathrm{U}').(\check{q}_2, \check{q}_1, \mathrm{U}) = (\check{q}'_2, \check{q}_1, \mathrm{U}' \boxbar \mathrm{U})$$

si, et seulement si, $\check{q}'_1 = \check{q}_2$.

Soit $\mathcal{D}''$ la classe des quadruplets $(\check{p}, \Psi^{\cdot\prime}, \Psi^{\cdot}, \check{q}_i)$ vérifiant les conditions suivantes :

1° $\check{p} = (\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}}, \overline{p}) \in \mathcal{D}_0$, $\check{q}_i = (\mathrm{F}_i, \overline{\mathrm{F}}_i, \mathrm{C}_i, \overline{q}_i) \in \mathcal{D}'_0$ et $\overline{q}_i = (\mathrm{K}^{\cdot}_i, q_i, \hat{\mathrm{C}}^{\cdot}_i)$; 2

2° $(\overline{p}, \Psi^{\cdot\prime}, \Psi^{\cdot}, \overline{q}'_i) \in \square\mathcal{H}'$, où $\overline{q}'_i$ est l'homomorphisme de $\mathrm{C}^{\cdot}_i$ vers le sous-graphe multiplicatif $\mathrm{G}_i = \mathrm{H}_i \cup \mathrm{F}_i \cup \beta(\mathrm{F}_i)$ de $\mathrm{K}^{\cdot}_i$, restriction de $\overline{q}$;

3° $\Psi^{\cdot\prime}(\mathrm{F}_i) \subset \mathrm{F}$. Si $f \in \overline{\mathrm{F}}_i \cap \mathrm{C}_i$, il existe $g_j \in \overline{\mathrm{F}}$ tels que $\Psi^{\cdot}(f).g_1 = g_2$.

Soit $\hat{\mathcal{D}}$ la catégorie ayant $\mathcal{D} \cup \mathcal{D}' \cup \mathcal{D}''$ pour classe sous-jacente, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ pour sous-catégories pleines et telle que

$$(\check{p}_2, \check{p}_1, \mathrm{U}).(\check{p}, \Psi^{\cdot\prime}, \Psi^{\cdot}, \check{q}) = (\check{p}_2, \Phi'.\Psi^{\cdot\prime}, \Phi.\Psi^{\cdot}, \check{q})$$

si, et seulement si, $\dot{p}_1 = \dot{p}$, où $\mathrm{U} = (\bar{p}_2, \Phi', \Phi, \bar{p}_1)$,

$$(\dot{p}, \Psi'', \Psi^{\cdot}, \check{q}) \cdot (\check{q}_2, \check{q}_1, \mathrm{U}') = (\dot{p}, \Psi''.\Phi'_1, \Psi^{\cdot}.\Phi_1, \check{q}_1)$$

si, et seulement si, $\check{q} = \check{q}_2$, où $\mathrm{U}' = (\bar{q}_2, \Phi', \Phi, \bar{q}_1)$, où Φ_1 est la restriction de Φ à $\mathrm{C}^{\cdot}_1$ et où $\Phi'_1 = (\mathrm{G}^{\cdot}_2, \Phi' \iota, \mathrm{G}^{\cdot}_1)$.

1 Théorème. — *Tout élément de $\hat{\mathcal{D}}$ admet une $\mathcal{D}'$-éjection* (²). *Pour que $(\dot{p}, \Psi'', \Psi^{\cdot}, \check{p}')$ soit un $\mathcal{D}'$-éjecteur, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions suivantes, où $\dot{p} = (\mathrm{F}, \bar{\mathrm{F}}, \bar{p})$ et $\check{p}' = (\mathrm{F}', \bar{\mathrm{F}}', \mathrm{C}', \bar{p}')$:*

1° *On a $\Psi^{\cdot} \in \mathcal{F}_\gamma$, $\Psi^{\cdot -1}(\bar{\mathrm{F}}) \subset \bar{\mathrm{F}}' \subset \alpha(\bar{p}')_\gamma$ et $\mathrm{F}' \subset \beta(\bar{p}')_\gamma$;*

2° *Ψ'' définit une bijection de F' sur F et, pour tout $s' \in \mathrm{C}'^{\cdot}_0$, la restriction de $\bar{p}'$ à $\bar{\mathrm{F}}'.s'$ est une bijection sur $\mathrm{F}'.\bar{p}'(s')$.*

On construit un foncteur $(\hat{\mathcal{D}}, \mathcal{D}')$-éjection naturalisé (³) (Δ, ∂) tel que, si $\dot{p} = (\mathrm{F}, \bar{\mathrm{F}}, \bar{p}) \in \mathcal{D}_0$ et $\bar{p} = (\mathrm{K}^{\cdot}, p, \mathrm{H}^{\cdot})$, on ait

$$\partial(\dot{p}) = (\dot{p}, \Psi''_1, \bar{\gamma}.\Delta(\dot{p})), \qquad \text{où} \quad \Delta(\dot{p}) = (\hat{\mathrm{F}}_1, \hat{\mathrm{F}}, \mathrm{C}, \hat{p}),$$

et où $\bar{\gamma}$, $\hat{\mathrm{F}}$ et $\alpha(\hat{p})$ [resp. γ_1, $\hat{\mathrm{F}}_1$ et $\beta(\hat{p})$] sont les éléments associés (th. § 3) à $\dot{p}$ [resp. à $(\mathrm{F}, \mathrm{F}_1, (\mathrm{K}^{\cdot}, \iota, \mathrm{H}^{\cdot}_1))$], $\bar{\gamma}_1$ étant une restriction de Ψ''_1.

Définition. — Un $\mathcal{D}'$-éjecteur sera appelé *expanseur régulier*. Une $\mathcal{D}'$-éjection de $m \in \mathcal{D}_0$ sera appelée *expansion régulière de m*.

5. Application aux perfectionnements. — Rappelons qu'une catégorie $\hat{\mathrm{C}}^{\cdot}$ est un perfectionnement (¹) de $\mathrm{C}^{\cdot}$ si $\mathrm{C}^{\cdot}$ est un $\mathrm{R}(\mathrm{C}^{\cdot})$-expanseur régulier de $\mathrm{C}^{\cdot}$.

Soit $\mathfrak{P}'(\mathcal{F})_0$ la classe des couples $(\mathrm{C}^{\cdot}, \hat{\mathrm{C}}^{\cdot})$ tels que $\hat{\mathrm{C}}^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ soit un perfectionnement de $\mathrm{C}^{\cdot}$. Soit $\mathfrak{P}(\mathcal{F})_0$ la classe des catégories $\mathrm{H}^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ vérifiant la condition (P) (⁴). L'application

$$\mathrm{H}^{\cdot} \to (\mathrm{R}(\mathrm{H}^{\cdot}), \mathrm{R}(\mathrm{H}^{\cdot}), \mathrm{H}^{\cdot}) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{C}^{\cdot}, \hat{\mathrm{C}}^{\cdot}) \to (\mathrm{R}(\mathrm{C}^{\cdot}), \mathrm{R}(\mathrm{C}^{\cdot}), \mathrm{C}^{\cdot}, \hat{\mathrm{C}}^{\cdot})$$

identifie $\hat{\mathfrak{P}}(\mathcal{F})_0 = \mathfrak{P}(\mathcal{F})_0 \cup \mathfrak{P}'(\mathcal{F})_0$ à une sous-classe de $\hat{\mathcal{D}}_0$. Soit $\hat{\mathfrak{P}}(\mathcal{F})$ [resp. $\mathfrak{P}'(\mathcal{F})$] la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{D}}$ ayant $\hat{\mathfrak{P}}(\mathcal{F})_0$ [resp. $\mathfrak{P}'(\mathcal{F})_0$] pour classe de ses unités.

Théorème. — *Toute catégorie* $\mathrm{H}^{\cdot}$ *vérifiant* (P) *admet une* $\mathfrak{P}'(\mathcal{F})$*-éjection*
2 $(\mathrm{H}^{\cdot}, \hat{\mathrm{H}}^{\cdot})$.

Ce théorème donne une signification canonique au théorème de perfectionnement de (¹) [retrouvé d'une manière un peu différente dans (⁴)].
3 Le perfectionnement de $\mathrm{H}^{\cdot}$ s'interprète aussi (²) comme une $\mathcal{F}^p$-projection.

(*) Séance du 3 août 1964.

(¹) *Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle* (Ehresmann), III, 1961 (Paris).

(²) *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 5080; *Comm. Math. Helv.*, 38, 1964, p. 219-283.

(³) *Catégories et structures*, Cours multigraphié, 1964 (Paris).

(⁴) Hoehnke, *Math. Nachrichten*, 25, nº 3, 1963, p. 179-190.

167213. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 259 p. 1683-1686 (7 septembre 1964). **Groupe 1.**

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Cohomologie sur une catégorie.*

Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. René Garnier.

Catégorie de cohomologie d'ordre n associée à un complexe d'espèces de morphismes, à valeurs dans une espèce de structures dominée par des foncteurs doubles. Résolution canonique d'une catégorie en espèces de structures dominées par des Z-modules et cohomologie correspondante.

Cette Note fait suite à [1] et reprend les mêmes notations. Si $H^{\cdot}$ est une catégorie et $G^{\cdot}$ une sous-catégorie de $H^{\cdot}$, nous désignons par $\square(H^{\cdot}; H, G)$ la classe des quatuors [2] (g', h', h, g) de $H^{\cdot}$ tels que $g \in G$ et $g' \in G$.

Proposition. — *Soit* $H^{\cdot}$ *une catégorie et* $G^{\cdot}$ *un sous-groupoïde de* $H^{\cdot}$ *tel que les conditions* $(h, g) \in H^{\cdot} \star H^{\cdot}$, $g \in G$ *et* $\alpha(g) = \beta(g)$ *entraînent qu'il existe* $(g', h, h, g) \in \square(H^{\cdot}; H, G)$. *Alors il existe une catégorie* $H^{\cdot}/G$ *quotient de* $H^{\cdot}$ *par la relation d'équivalence* [2]

$$f \sim f' \quad \textit{si, et seulement si, il existe } (g', f', f, g) \in \square(H^{\cdot}; H, G \cup H^{\cdot}_0).$$ 1

1. Cohomologie d'un complexe d'espèces de morphismes. — Soit $\mathcal{M}$ une catégorie pleine d'applications, $\mathcal{F}$ la catégorie pleine de foncteurs correspondante et $p_{\mathcal{F}}$ le foncteur canonique de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{M}$. Par espèce de morphismes, nous entendrons une espèce de structures $(C^{\cdot}, F)$ dominée dans $(p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ et telle que $C^{\cdot} = \alpha(F)$. Soit $\overline{\mathcal{F}}$ la catégorie des foncteurs doubles [2] et $\bar{p}_{\mathcal{F}}$ sa projection canonique vers $\mathcal{M}$. Soit Z l'anneau des entiers.

Définition. — On appelle *complexe d'espèces de morphismes* une suite 2
$(K) = (F_n, \partial_n)_{n \in Z}$ vérifiant les conditions suivantes :

1° $(C^{\cdot}, F_n)$ est une espèce de morphismes; soit $S^{\cdot}_n$ la catégorie $\sum_{e \in C^{\cdot}_0} F_n(e)$;

2° ∂_n est un foncteur de $S^{\cdot}_n$ vers $S^{\cdot}_{n-1}$ tel que $(C^{\cdot}, \partial_n)$ définisse une application covariante [2] de $(C^{\cdot}, F_n)$ vers $(C^{\cdot}, F_{n-1})$;

3° On a

$$\partial_n . \partial_{n+1}(S_{n+1}) \subset (S_{n-1})^{\cdot}_0.$$

Soit (K) un complexe d'espèces de morphismes. Soit $(C^{\cdot}, \overline{G})$ une espèce, 3
de structures dominée dans $(\bar{p}_{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}})$; soit $G = p_{\mathcal{F}} . \overline{G}$ et, pour tout $e \in C^{\cdot}_0$ 4
$\overline{G}(e) = (G(e)^{\cdot}, G(e)^{\perp})$. Alors $(\Lambda^{\cdot}, \Lambda^{\perp})$ est une catégorie double, où

$$\Lambda^{\cdot} = \sum_{e \in C^{\cdot}_0} G(e) \qquad \text{et} \qquad \Lambda^{\perp} \quad \sum_{e \in C^{\cdot}_0} G(e)^{\perp}.$$

Définition. — On appelle *n-cochaîne de* (K) *vers* $\overline{G}$ un foncteur φ de $S^{\cdot}_n$ vers $\Lambda^{\cdot}$ tel que $(C^{\cdot}, \varphi)$ définisse une application covariante de $(C^{\cdot}, F_n)$ vers $(C^{\cdot}, G_1)$, où $G_1(f) = (G(e')^{\cdot}, G(f), G(e)^{\cdot})$, pour tout $f \in C$.

Nous désignerons par $C^{n\perp}$ la sous-catégorie de la catégorie (²) de foncteurs $\mathcal{F}(\Lambda^{\bullet}, S^{\bullet}_n)^{\perp}$ formée des n-cochaînes de (K) vers $\bar{G}$.

Proposition. — *L'application* $\varphi \to \delta^n \varphi$, *où* $\varphi \in C^n$ *et où*

$$\delta^n \varphi(z) = \varphi(\partial_{n+1} z) \quad \textit{pour tout } z \in S_{n+1},$$

définit un foncteur δ^n *de* $C^{n\perp}$ *vers* $C^{n+1\perp}$ *et l'on a*

1
$$\delta^n \delta^{n-1}(C^{n-1}) \subset C_0^{n+1} = \mathcal{F}(\Lambda_0^{\bullet}, S_n^{\bullet}) \cap C^{n+1}.$$

Soit $Z^{n\perp}$ la sous-catégorie de $C^{n\perp}$ noyau de δ^n (formée des $\varphi \in C^n$ tels que $\delta^n \varphi \in C_0^{n+1}$). Soit B^n le sous-groupoïde de $Z^{n\perp}$ engendré par la classe $\delta^{n-1}(C^{n-1}) \cap Z^{n\perp}$.

Théorème. — *Sur* Z^n *la relation* ρ

$$\varphi \sim \psi \quad \textit{si, et seulement si, il existe } (\psi', \varphi', \varphi, \psi) \in \square(Z^{n\perp}; Z^n, B^n)$$

est une relation d'équivalence. Soit $H^n(\bar{G}, K) = Z^n/\rho$. *Si* $\Lambda^{\perp}$ *est un groupoïde,*

2 *il existe un groupoïde* $Z^{n\perp}/B^n = H^n(\bar{G}, K)^{\perp}$.

Définition. — Un élément de Z^n sera appelé *n-cocycle de* (K) *vers* $\bar{G}$; un élément de B^n un *n-cobord de* (K) *vers* $\bar{G}$; le foncteur δ^n sera appelé *foncteur n-cobord;* $H^n(\bar{G}, K)$ [resp. $H^n(\bar{G}, K)^{\perp}$ si $\Lambda^{\perp}$ est un groupoïde] sera appelé *l'ensemble* (resp. *le groupoïde*) *de cohomologie d'ordre n de* K *vers* $\bar{G}$.

Soit $(C^{\bullet}, G)$ une espèce de morphismes. Pour tout $e \in C^{\bullet}_0$, soit $G(e)_c$

3 le groupoïde somme des centres des groupes $s.G(e)_{\gamma}.s$, où $s \in G(e)_0$. Alors $\bar{G}(e) = (G(e)_c, G(e)_{\cdot})$ est un groupoïde double.

Définition. — On appelle *groupoïde de cohomologie centrale d'ordre n de* (K) *vers* G le groupoïde $H^n(\bar{G}, K)$ et l'on pose

$$H_c^n(G, K) = H^n(\bar{G}, K).$$

2. Espèces de structures dominées dans $(p_{\mathfrak{Z}}, \mathfrak{Z})$. — Soit $\mathfrak{Z}$ la

4 catégorie pleine des homomorphismes entre Z-modules libres associée à $\mathfrak{M}$ et soit $p_{\mathfrak{Z}}$ sa projection canonique vers $\mathfrak{M}$. Pour tout entier $n \geq 0$, soit $(C^{\bullet}, F_n)$ une espèce de structures dominée (²) dans $(p_{\mathfrak{Z}}, \mathfrak{Z})$ telle que $\alpha(F_n) = C^{\bullet}$. Soit $(C^{\bullet}, F_{-1})$ l'espèce de structures dominée dans $(p_{\mathfrak{Z}}, \mathfrak{Z})$ telle que

$$F_{-1}(e) = \{e\} \times Z \quad \text{si} \quad e \in C^{\bullet}_0;$$
$$F_{-1}(f) = (F_{-1}(e'), \tilde{f}, F_{-1}(e)), \quad \text{où} \quad \tilde{f}(e, z) = (e', z) \quad \text{si } f \in C.$$

Définition. — On dira que $(L) = (F_{-1}, F_n, \partial_n)_{n \geq 0}$ est une *résolution libre de* Z *sur* $C^{\bullet}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° $(C^{\bullet}, \partial_n)$ définit une application covariante de $(C^{\bullet}, F_n)$ vers $(C^{\bullet}, F_{n-1})$;

2° $L(e) = (F_{-1}(e), F_n(e), \partial_n/e)_{n \geq 0}$ est une résolution libre de $\{e\} \times Z$ pour tout $e \in C^{\bullet}_0$, où ∂_n/e désigne une restriction de ∂_n.

Soit (L) une résolution libre de Z sur $C^{\bullet}$. On obtient un complexe $\nu(L)$ d'espèces de morphismes en remplaçant $F_n(e)$ par le groupe sous-jacent à la structure de Z-module de $F_n(e)$.

Définition. — Si $(\mathrm{C}^{\cdot}, \mathrm{G})$ est une espèce de structures dominée dans $(\overline{p}_{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}})$ (resp. espèce de morphismes), on appelle $\mathrm{H}^{n}(\mathrm{G}, \nu(\mathrm{L}))$ [resp. $\mathrm{H}^{n}_{c}(\mathrm{G}, \nu(\mathrm{L}))^{\perp}$] *l'ensemble de cohomologie* (resp. le *groupoïde de cohomologie centrale*) *d'ordre n de* (L) *vers* G.

Soit $\mathrm{C}^{\cdot}$ une catégorie, M une classe et b une application de M dans $\mathrm{C}^{\cdot}_{0}$. Soit $\mathrm{Z}(\mathrm{M})$ le Z-module libre engendré par tous les couples $(f, m) \in \mathrm{C} \times \mathrm{M}$ tels que $\alpha(f) = b(m)$. Si $e \in \mathrm{C}^{\cdot}_{0}$, soit $\overline{\mathrm{M}}(e)$ le sous-module de $\mathrm{Z}(\mathrm{M})$ ayant pour éléments les $z = \sum_{i \leq n} k_i(f_i, m_i) \in \mathrm{Z}(\mathrm{M})$ tels que $\beta(f_i) = e$ pour tout $i \leq n$. Posons $\overline{b}(z) = e$. Soit S la classe $\bigcup_{e \in \mathrm{C}^{\cdot}_{0}} \overline{\mathrm{M}}(e)$. La catégorie $\mathrm{C}^{\cdot}$ opère sur S relativement à la loi de composition

$$(f, z) \to \sum_{i \leq n} k_i(f.f_i, m_i) \quad \text{si} \quad \overline{b}(z) = \alpha(f).$$

On identifiera l'élément $(b(m), m) \in \mathrm{S}$ avec m, pour tout $m \in \mathrm{M}$. La surjection $z \to fz$ si $z \in \overline{\mathrm{M}}(\alpha(f))$ définit un homomorphisme $\overline{\mathrm{M}}(f)$ du Z-module $\overline{\mathrm{M}}(\alpha(f))$ dans $\overline{\mathrm{M}}(\beta(f))$ et $(\mathrm{C}^{\cdot}, \overline{\mathrm{M}})$ est une espèce de structures dominée dans $(p_{\mathfrak{Z}}, \mathfrak{Z})$.

Définition. — On appellera $(\mathrm{C}^{\cdot}, \overline{\mathrm{M}})$ *l'espèce de structures libre engendrée par* $(\mathrm{C}^{\cdot}, \mathrm{M}, b)$. 1

3. Résolution canonique d'une catégorie. — Soit $\mathrm{C}^{\cdot}$ une catégorie.

Définition. — Si n est un entier ≥ 1, on appelle *n-simplexe de* $\mathrm{C}^{\cdot}$ une suite $[f_n, \ldots, f_1, \alpha(f_1)]$, où $f_i \in \mathrm{C}$ et $\alpha(f_{i+1}) = \beta(f_i)$ pour tout $i < n$.

Soit σ_n la classe des n-simplexes de $\mathrm{C}^{\cdot}$ et soit b_n l'application $[f_n, \ldots, f_1, \alpha(f_1)] \to \beta(f_n)$ de σ_n dans $\mathrm{C}^{\cdot}_{0}$. Soient $\sigma_0 = \mathrm{C}^{\cdot}_{0}$ et b_0 l'application identique de $\mathrm{C}^{\cdot}_{0}$. Soit $(\mathrm{C}^{\cdot}, \mathrm{K}_n)$ l'espèce de structures libre engendrée par $(\mathrm{C}^{\cdot}, \sigma_n, b_n)$, pour tout entier $n \geq 0$, et soit $(\mathrm{C}^{\cdot}, \mathrm{K}_{-1})$ l'espèce de structures dominée dans $(p_{\mathfrak{Z}}, \mathfrak{Z})$ telle que $\mathrm{K}_{-1}(e) = \{e\} \times \mathrm{Z}$.

Théorème. — *Il existe une résolution libre* $\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{C}^{\cdot}) = (\mathrm{K}_{-1}, \mathrm{K}_n, \overline{\partial}_n)_{n \geq 0}$ *de* Z *sur* $\mathrm{C}^{\cdot}$ *telle que* $(\mathrm{C}^{\cdot}, \overline{\partial}_n)$ *soit l'application covariante déterminée par l'application*

$$[f_n, \ldots, f_1, \alpha(f_1)] \to \Big\{ f_n[f_{n-1}, \ldots, f_1, \alpha(f_1)] + \sum_{i<n} (-1)^{n-i}[f_n, \ldots, f_{i+1}.f_i, \ldots, f_1, \alpha(f_1)] + (-1)^n[f_n, \ldots, f_2, \alpha(f_2)] \Big\}$$

si $n > 1$, par l'application $[f, \alpha(f)] \to f\alpha(f) - \beta(f)$ si $n = 1$ et par l'application $e \to (e, 1)$ si $n = 0$.

La démonstration utilise le fait que l'application :

$$(e, 1) \to 1, \qquad fe \to [f, e] \qquad \text{et} \qquad f[f_n, \ldots, f_1, \alpha(f_1)] \to [f.f_n, \ldots, f_1, \alpha(f_1)]$$ 2

définit une homotopie contractante ([3]) de $\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{C}^{\cdot})(e)$, pour tout $e \in \mathrm{C}^{\cdot}_{0}$.

Pour tout $e \in C^{\cdot}_0$, soit $K''_n(e)$ le sous-module de $\overline{K}_n(e)$ engendré par les n-simplexes dégénérés, c'est-à-dire tels que l'un des f_i soit une unité de $C^{\cdot}$. Soit $K_n(e)$ le module quotient de $\overline{K}_n(e)$ par $K''_n(e)$.

Théorème. — *Il existe une résolution libre* $L(C^{\cdot}) = (K_{-1}, K_n, \partial_n)_{n \geq 0}$ *de* Z *sur* $C^{\cdot}$ *quotient de la résolution libre* $\overline{L}(C^{\cdot})$ (c'est-à-dire ∂_n est un homomorphisme quotient de $\overline{\partial}_n$ pour tout $n > 0$).

Définition. — On appellera $\overline{L}(C^{\cdot})$ [resp. $L(C^{\cdot})$] la *résolution* (resp. la résolution *normalisée*) *canonique de* $C^{\cdot}$.

4. Homologie et cohomologie simpliciale d'une catégorie $C^{\cdot}$.

Proposition. — *Soit* C_n *le* Z*-module libre engendré par* σ_n. *Alors* $(C_n, d_n)_{n \geq 0}$ *est un module différentiel gradué, où*

$$d_n[f_n, \ldots, f_1, \alpha(f_1)] = \Big\{ [f_{n-1}, \ldots, f_1, \alpha(f_1)] + \sum_{i<n} (-1)^{n-i}[f_n, \ldots, f_{i+1} \cdot f_i, \ldots, f_1, \alpha(f_1)] + (-1)^n [f_n, \ldots, f_2, \alpha(f_2)] \Big\}$$

si $n > 1$ *et* $d_1[f, \alpha(f)] = \beta(f) - \alpha(f)$.

1+ Définition. — On appelle *homologie simpliciale de* $C^{\cdot}$ l'homologie du module différentiel gradué $(C_n, d_n)_{n \geq 0}$.

Soit $\mathfrak{A}$ la catégorie des applications contravariantes entre espèces de morphismes.

2¶ Théorème. — *Il existe un foncteur* H^n_c *de* $\mathfrak{A}$ *vers* $\mathcal{F}$ *tel que* $H^n_c(C^{\cdot}, G)$ *soit le groupoïde* $H^n_c(G, \nu(L(C^{\cdot})))^{\perp}$ *pour tout* $(C^{\cdot}, G) \in \mathfrak{A}_0$.

Définition. — H^n_c sera appelé le *foncteur de cohomologie centrale d'ordre n*
3+ *de* $\mathfrak{A}$ *vers* $\mathcal{F}$ et $H^n_c(C^{\cdot}, G)$ le *groupoïde de cohomologie centrale d'ordre n de* $C^{\cdot}$ *vers* G.

Exemples. — $H^1_c(C^{\cdot}, G)$ est le groupoïde des éléments inversibles de
4 la catégorie de cohomologie centrale d'ordre 1 considérée dans [1]. Si $C^{\cdot}$ est un groupe et $G(e)$ un groupe abélien, $H^n_c(C^{\cdot}, G)$ s'identifie au groupe de cohomologie usuel [3].

Remarque. — On obtient des notions d'homologie et de cohomologie
5 cubiques pour $C^{\cdot}$ en remplaçant dans ce qui précède les n-simplexes par les éléments de la catégorie $C^{\boxed{n}}$ considérée dans [4].

6+ Nous montrerons dans une autre Note comment H^2_c est H^3_c interviennent dans le problème d'extension des catégories et nous définirons un foncteur de cohomologie (non centrale) d'ordre n.

[1] *Comptes rendus*, 258, 1964, p. 2461.
[2] *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 1198, 1891 et 5031 et *Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle*, Paris, V, 1963.
[3] S. Mac Lane, *Homology*, Springer, 1963.
[4] *Ann. Éc. Norm. sup.*, 80, 1963, p. 349-426.

167292. — Imp. Gauthier-Villars & C^ie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6^e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 259 p. 2050-2053 (28 septembre 1964). Groupe 1

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Sur une notion générale de cohomologie.* Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. René Garnier.

Suite exacte courte relative à un foncteur. Cohomologie pour une catégorie munie d'un idéal et dominée par une catégorie munie d'un idéal. Foncteurs de cohomologie relatifs à la catégorie des applications covariantes entre espèces de morphismes.

Cette Note fait suite à (1) dont nous reprenons les notations. Si $H^\cdot$ est une catégorie, nous désignons par $H^\star$ sa catégorie duale.

1. COMPLEXES DANS UNE CATÉGORIE MUNIE D'UN IDÉAL.

DÉFINITION. — Soit $H^\cdot$ une catégorie; on appelle *idéal de* $H^\cdot$ une sous-classe J de H telle que $J.H \subset J$ et $H.J \subset J$.

Exemple. — $\mathfrak{F}$ admet pour idéal la classe $J_{\mathfrak{F}}$ des foncteurs $\Phi = (C^\cdot, \underline{\Phi}, S^\cdot)$ tels que $\Phi(S) \subset C^\cdot_0$.

Soit Z l'anneau des entiers. Soit Δ la sous-catégorie libre du groupoïde $(Z\times Z)^{\perp}$ des couples d'entiers formée des $(j, i) \in Z\times Z$ tels que $j \leqq i$; on identifie (i, i) avec i. Soit $H^\cdot$ une catégorie et J un idéal de $H^\cdot$.

DÉFINITION. — On appelle *complexe de* $(H^\cdot, J)$ un foncteur K de Δ vers $H^\cdot$ tel que $K(j-1, j).K(j, j+1) \in J$ pour tout $j \in Z$.

Soit K un complexe de $(H^\cdot, J)$ et $E \in H^\cdot_0$; on définit un foncteur $K^\cdot_E$ de $\Delta^\star$ vers $\mathfrak{M}$ en posant $K^\cdot_E(j, i) = \mathrm{Hom}_{H^\cdot}(E, K(j, i))$. On a

$$K^\cdot_E(n, n+1)\, K^\cdot_E(n-1, n)\, (K^\cdot_E(n-1)) \subset J.$$

DÉFINITION. — Un élément de $K^\cdot_E(n)$ est appelé *n-cochaîne de* K *vers* E; une n-cochaîne g de K vers E telle que $K^\cdot_E(n, n+1)\,(g) \in J$ est appelée un *n-cocycle de* K *vers* E et un élément de $K^\cdot_E(n-1, n)\,(K^\cdot_E(n-1))$, un *n-cobord de* K *vers* E.

Soit $\mathcal{K}(H^\cdot, J)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de Δ vers $H^\cdot$ ayant pour unités les complexes de $(H^\cdot, J)$. Soit $\mathfrak{C}(H^\cdot, J) = H^\cdot \times \mathcal{K}(H^\cdot, J)^\star$.

PROPOSITION. — *Pour tout* $n \in Z$, *il existe des foncteurs* C^n, Z^n *et* B^n *de* $\mathfrak{C}(H^\cdot, J)$ *vers* $\mathfrak{M}$ *tels que* $C^n(E, K)$, $Z^n(E, K)$ *et* $B^n(E, K)$, *où* $E \in H^\cdot_0$ *et où* K *est un complexe de* $(H^\cdot, J)$, *soient respectivement les classes des n-cochaînes, des n-cocycles et des n-cobords de* K *vers* E.

Si $t = (h, (K', \tau, K)) \in \mathfrak{C}(H^\cdot, J)$; on a

$$C^n(t) = \mathrm{Hom}_{H^\cdot}(h, \tau(n))$$

et $Z^n(t)$ et $B^n(t)$ sont des restrictions de $C^n(t)$.

2. SUITES EXACTES DANS LES CATÉGORIES D'HOMOMORPHISMES. — Soit $(\mathcal{C}^\cdot, p, \mathcal{H}^\cdot)$ un foncteur; soient $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ deux sous-catégories de $\mathcal{C}^\cdot$ formées respectivement de monomorphismes et d'épimorphismes. Soit $\mathcal{J}$ un idéal de $\mathcal{H}^\cdot$ et $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}^\cdot$.

Définition. — On appelle $(\mathcal{C}'', \mathcal{C}', p, \mathcal{J})$-*suite exacte courte* (²) un couple $(k, h) \in \mathcal{H}^{\cdot} \star \mathcal{H}^{\cdot}$ tel que $k.h \in \mathcal{J}$, que h soit une $(\mathcal{C}', p)$-injection, que k soit une $(\mathcal{C}'', p)$-surjection (³) et que, pour toute $(\mathcal{C}'', p)$-surjection k' telle que $k'.h \in \mathcal{J}$, il existe $g \in \mathcal{H}$ tel que $k' = g.k$.

Soit $\Pi = (\mathcal{M}, p, \mathcal{H}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\cdot}_{\gamma})$ une catégorie d'homomorphismes. Soient $\mathcal{M}^i$ et $\mathcal{M}^s$ les sous-catégories de $\mathcal{M}$ formées des injections et des surjections respectivement. Si $(\bar{\rho}, j)$ est une $(\mathcal{M}^s, \mathcal{M}^i, p, \mathcal{J})$-suite exacte courte [on dira simplement une $(p, \mathcal{J})$-suite exacte courte] telle que

$$p(j) = (p(\mathrm{S}), \iota, p(s)), \qquad \text{où} \quad s = \alpha(j) \quad \text{et} \quad \mathrm{S} = \beta(j),$$

et que $p(\bar{\rho})$ soit l'application $\tilde{\rho} : z \to z \bmod \rho$, où ρ est une relation d'équivalence sur $p(\mathrm{S})$, on appellera $\beta(\bar{\rho})$ la $\mathcal{J}$-*structure quotient de* S *par* s, notée S/s.

Définition. — On dira que Π est *à* $(\mathcal{H}', \mathcal{J})$-*suites exactes courtes* si, pour toute $(\mathcal{M}^i, p)$-injection j telle que $\alpha(j) \in \mathcal{H}'^{\cdot}_0$ il existe une $(p, \mathcal{J})$-suite exacte courte de la forme (k, j).

Théorème. — $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\gamma})$ *est à* $(\mathcal{F}_g, \mathrm{J}_{\mathcal{F}})$-*suites exactes courtes,*
1 *où* $\mathcal{F}_g$ *est la sous-catégorie pleine de* $\mathcal{F}$ *ayant pour unités les groupoïdes.*

On montre que, si $\mathrm{H}^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ et si $\mathrm{C}^{\cdot}$ est un sous-groupoïde de $\mathrm{H}^{\cdot}$, il existe une catégorie $\mathrm{H}^{\cdot}/\mathrm{C}^{\cdot}$ quotient strict de $\mathrm{H}^{\cdot}$ par la relation d'équivalence ρ bicompatible (³) sur $\mathrm{H}^{\cdot}$ engendrée par la relation d'équivalence

$$h \sim h' \quad \text{si, et seulement si, il existe } (k', h', h, k) \in \square(\mathrm{H}^{\cdot}; \mathrm{H}.\, \mathrm{C} \cup \mathrm{H}^{\cdot}_0),$$

et que $((\mathrm{H}^{\cdot}/\mathrm{C}^{\cdot}, \tilde{\rho}, \mathrm{H}^{\cdot}), (\mathrm{H}^{\cdot}, \iota, \mathrm{C}^{\cdot}))$ est une $(p_{\mathcal{F}}, \mathrm{J}_{\mathcal{F}})$-suite exacte courte.

Définition. — Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{H}^{\cdot}_0$ et soit $\mathrm{M} \subset p(\mathrm{S})$. Soit $\mathrm{S}(\mathcal{H}')$ la classe des p-sous-structures s' de S telles que $s' \in \mathcal{H}'$; on dira que M *engendre une* p-*sous-structure* $\bar{s}'$ *de* S *dans* $\mathcal{H}'$ si la classe des $s' \in \mathrm{S}(\mathcal{H}')$ tels que

$$\mathrm{M} \cap (\cup p(\mathrm{S}(\mathcal{H}'))) \subset p(s')$$

admet $\bar{s}'$ pour plus petit élément relativement à la relation d'ordre :

$$s_1 \propto s \quad \text{si, et seulement si, } s_1 \text{ est une } p\text{-sous-structure de } s.$$

2. Foncteurs de cohomologie. — Soient $\mathrm{H}^{\cdot}$ une catégorie, $\mathrm{H}''^{\cdot}$ une sous-catégorie de $\mathrm{H}^{\cdot}$ et J un idéal de $\mathrm{H}^{\cdot}$. Soit $\Pi = (\mathcal{M}, p, \mathcal{H}^{\cdot}, \mathcal{H}^{\cdot}_{\gamma})$ une catégorie d'homomorphismes; soit $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}^{\cdot}$ et $\mathcal{J}$ un idéal de $\mathcal{H}^{\cdot}$. Soit D un foncteur de $\mathrm{H}''^{\cdot} \times \mathrm{H}^{\star}$ vers $\mathcal{H}^{\cdot}$ tel que $p.\mathrm{D}$ soit une restriction du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}^{\cdot}}$. Soit $\mathfrak{C}'(\mathrm{H}^{\cdot}, \mathrm{J})$ la sous-catégorie de $\mathfrak{C}(\mathrm{H}^{\cdot}, \mathrm{J})$ formée des $(h, (\mathrm{K}', \tau, \mathrm{K}))$ tels que $h \in \mathrm{H}'$. Soit $\overline{\mathrm{C}}^n$ le foncteur de $\mathfrak{C}'(\mathrm{H}^{\cdot}, \mathrm{J})$ vers $\mathcal{H}$ tel que

$$\overline{\mathrm{C}}^n(h, (\mathrm{K}', \tau, \mathrm{K})) = \mathrm{D}(h, \tau(n)).$$

Définition. — On dira que $(\mathcal{H}', \mathcal{J}, \mathrm{D}, \mathrm{J})$ *admet* $\overline{\overline{\mathrm{H}}}^n$ *pour foncteur de cohomologie d'ordre* n si les conditions suivantes sont vérifiées, où $(\mathrm{E}, \mathrm{K}) \in \mathfrak{C}'(\mathrm{H}^{\cdot}, \mathrm{J})_0$:

1° Il existe un foncteur $\overline{Z}^n$ de $\mathfrak{C}'(H^\cdot, J)$ vers $\mathcal{H}^\cdot$ tel que $p.\overline{Z}^n$ soit une restriction de Z^n et que $\overline{Z}^n(E, K)$ soit une p-sous-structure dans $\mathcal{H}$ de $\overline{C}^n(E, K)$.

2° $B^n(E, K)$ engendre une p-sous-structure $\overline{B}^n(E, K)$ de $\overline{Z}^n(E, K)$ dans $\mathcal{H}'$.

3° Il existe un foncteur $\overline{H}^n$ de $\mathfrak{C}'(H^\cdot, J)$ vers $\mathcal{H}^\cdot$ tel que $\overline{H}^n(E, K)$ soit une $\mathcal{J}$-structure quotient de $\overline{Z}^n(E, K)$ par $\overline{B}^n(E, K)$.

Supposons que $(\mathcal{H}', \mathcal{J}, D, J)$ admette un foncteur de cohomologie $\overline{H}^n$ et soit $S^\cdot \in \mathcal{F}_0$.

Définition. — On dira que $\overline{H}^n_{S^\cdot}$ est un *foncteur de cohomologie d'ordre n de* $S^\cdot$ *vers* $(\mathcal{H}', \mathcal{J}, D, J)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° Il existe un foncteur L de $S^\cdot$ vers $\mathcal{K}(H^\cdot, J)$, appelé *foncteur résolution*.

2° $\overline{H}^n_{S^\cdot}$ est le foncteur de $H'^\cdot \times S^\cdot$ vers $\mathcal{H}^\cdot$ tel que

$$\overline{H}^n_{S^\cdot}(h', k) = \overline{H}^n(h', L(k)).$$

3. Applications. — Soit $\mathfrak{A}_0$ la classe des foncteurs F de $\alpha(F)$ vers $\mathcal{F}$ tels que $(\alpha(F), F)$ soit une espèce de morphismes. Soit $\mathfrak{A}$ la classe des (F', Φ, φ, F) tels que $F \in \mathfrak{A}_0$, $F' \in \mathfrak{A}_0$ et que (Φ, φ) définisse une application covariante de $(\alpha(F), F)$ vers $(\alpha(F'), F')$, munie de la loi de composition :

$$(F'', \Phi', \varphi', F').(F', \Phi, \varphi, F) = (F'', \Phi'.\Phi, \varphi'\varphi, F).$$

$\mathfrak{A}$ est une catégorie admettant pour idéal $J_{\mathfrak{A}}$ la classe des (F', Φ, φ, F) tels que

$$(S(F'), \varphi, S(F)) \in J_{\mathcal{F}}, \qquad \text{où} \quad S(F) = \sum_{e \in C_0^\cdot} F(e) \quad \text{et} \quad C^\cdot = \alpha(F).$$

Soit $(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})_0$ la classe des espèces de structures $(C^\cdot, \overline{G})$ dominées dans [1] $(\overline{p}_{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}})$ et telles que $C^\cdot = \alpha(\overline{G})$. Soit $\mathfrak{A}_{\overline{\mathcal{F}}}$ la catégorie des applications 1
covariantes entre espèces de structures dominées dans $(\overline{p}_{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}})$ appartenant à $(\mathfrak{A}_{\mathcal{F}})_0$. Si $(C^\cdot, \overline{G}) \in (\mathfrak{A}_{\overline{\mathcal{F}}})_0$ et si, pour tout $f \in C$, on a

$$\overline{G}(f) = ((\overline{G}_1(e'), \overline{G}_2(e')), \overline{p}_{\mathcal{F}}\overline{G}(f), (\overline{G}_1(e), \overline{G}_2(e))),$$

posons

$$\overline{G}_i(f) = (\overline{G}_i(e'), \overline{p}_{\mathcal{F}}\overline{G}(f), \overline{G}_i(e)).$$

L'application

$$((C'^\cdot, \overline{G}'), (\Phi, \varphi), (C^\cdot, \overline{G})) \to (\overline{G}'_i, \Phi, \varphi, \overline{G}_i)$$

est un foncteur $p_i^{\mathcal{F}}$ de $\mathfrak{A}_{\overline{\mathcal{F}}}$ vers $\mathfrak{A}$. Soit $\mathfrak{A}'$ une sous-catégorie de $\mathfrak{A}$ et q un foncteur de $\mathfrak{A}'$ vers $\mathfrak{A}_{\overline{\mathcal{F}}}$ tel que $p_1^{\mathcal{F}} q(\mu) = \mu$ pour tout $\mu \in \mathfrak{A}'$.

Proposition. — *Si* $F \in \mathfrak{A}_0$, $G \in \mathfrak{A}'_0$, $\overline{G} = q(G)$ et $\Lambda^\perp = S(\overline{G}_2)$, $(G.\mathfrak{A}.F)^\perp$ *est une catégorie pour la loi de composition :*

$$(G, \Phi', \varphi', F) \perp (G, \Phi, \varphi, F) = (G, \Phi, \varphi' \perp \varphi, F)$$

si, et seulement si, $\Phi' = \Phi$ *et* $\alpha^\perp \varphi' = \beta^\perp \varphi$, *où*

$$\varphi' \perp \varphi(z) = \varphi'(z) \perp \varphi(z).$$

L'application

$$(\mu', \mu) \to \big((G'.\mathcal{A}.F')^{\perp}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mu', \mu), (G.\mathcal{A}.F)^{\perp}\big),$$

où

$$F = \beta(\mu), \qquad F' = \alpha(\mu), \qquad G = \alpha(\mu') \qquad \textit{et} \qquad G' = \beta(\mu'),$$

définit un foncteur D *de* $\mathcal{A}' \times \mathcal{A}^{\star}$ *vers* $\mathcal{F}$.

Théorème. — $(\mathcal{F}_g, J_{\mathcal{F}}, D, J_{\mathcal{A}})$ *admet un foncteur de cohomologie* $\overline{H}^n(q)$ *d'ordre n et il existe un foncteur de cohomologie* $\overline{H}^n_{\mathcal{F}}$ *de* $\mathcal{F}$ *vers* $(\mathcal{F}_g, J_{\mathcal{F}}, D, J_{\mathcal{A}})$, *construit à partir du foncteur* L *tel que* $L(C^{\cdot})$ *soit la résolution canonique* (¹) *de* $C^{\cdot}$.

Définition. — On appelle $\overline{H}^n(q)$ le *foncteur de cohomologie d'ordre n relatif à* $(\mathcal{A}, q)$ et $\overline{H}^n(q)(G, K)$ la *catégorie de cohomologie d'ordre n de* K *vers* $q(G)$.

4. Foncteurs de cohomologie centrale. — Soit $G \in \mathcal{A}_0$, $C^{\cdot} = \alpha(G)$
1 et $\underline{G} = p_{\mathcal{F}}.G$. Soit $G(e)_d$ [resp. $G(e)_c$], où $e \in C^{\cdot}_0$, la sous-classe de $G(e)$ formée des z tels que $\alpha(z) = \beta(z) = s$ et que les conditions

$$f \in C, \qquad e = \alpha(f), \qquad e' = \beta(f), \qquad z \in G(e) \qquad \text{et} \qquad z' \in fs.G(e').fs$$
$$[\text{resp.} \quad z \in G(e)_{\gamma} \quad \text{et} \quad z' \in fs.G(e')_{\gamma}.fs]$$

entraînent $z'.fz = fz.z'$.

Proposition. — $G_d(e) = (G(e)^{\cdot}_d, G(e)^{\cdot}_d)$ [*resp.* $G_c(e) = (G(e)^{\cdot}_c, G(e)^{\cdot}_c)$] *est une catégorie double* (*resp. un groupoïde double*). *De plus*, $(C^{\cdot}, G_d)$ *et* $(C^{\cdot}, G_c)$ *sont des espèces de structures dominées dans* $(\overline{p}_{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}})$, *où, pour tout* $f \in C$, *on a*

2 $$G_d(f) = \big(G_d(e'), \underline{G}(f)\iota, G_d(e)\big) \qquad \textit{et} \qquad G_c(f) = \big(G_c(e), \underline{G}(f)\iota, G_c(e)\big).$$

Définition. — On appellera $(C^{\cdot}, G_c)$ le *centre de* G et $(C^{\cdot}, G_d)$ le *demi-centre de* G.

Soit $\mathcal{A}'_d$ (resp. $\mathcal{A}'_c$) la sous-catégorie de $\mathcal{A}$ formée des (F', Φ, φ, F) tels que, pour tout $e \in \alpha(F)_0$, on ait

$$\varphi(F_d(e)) \subset F'_d(\Phi(e)) \quad [\text{resp. } \varphi(F_c(e)) \subset F'_c(\Phi(e))].$$

L'application

$$(G', \Phi, \varphi, G) \to (G'_d, (\Phi, \varphi_d), G_d) \quad [\text{resp.} \to (G'_c, (\Phi, \varphi_c), G_c)],$$

où φ_d et φ_c sont des restrictions de φ, définit un foncteur q_d de $\mathcal{A}'_d$ (resp. q_c de $\mathcal{A}'_c$) vers $\mathcal{A}_{\overline{\mathcal{F}}}$.

Définition. — Le foncteur $\overline{H}^n(q_d)$ [resp. $\overline{H}^n(q_c)$] sera appelé *foncteur de cohomologie demi-centrale* (resp. *centrale*) *d'ordre n relatif à* $\mathcal{A}$.

(*) Séance du 21 septembre 1964.

(¹) *Comptes rendus*, 259, 1964, p. 1683.

(²) Les suites exactes courtes permettent de définir des suites exactes quelconques; *voir* article à paraître dans *Colloque de Bruxelles*, 1964, qui montre comment les résultats de (¹) rentrent dans le cadre de cette Note.

(³) *Catégories et structures*, cours polycopié, Paris, 1964, et *Comm. Math. Helv.*, 38, 1963, p. 219-283.

167345. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

/79/

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Expansion générale des foncteurs.*
Note (*) de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Henri Villat.

Étant donné un foncteur p de $\mathrm{H}^{\cdot}$ vers $\mathrm{K}^{\cdot}$ et un « couple p-admissible » $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}})$, où $\mathrm{F} \subset \mathrm{K}$, $\overline{\mathrm{F}} \subset \mathrm{H}$, on prolonge d'une façon universelle p en un foncteur $\check{p}$ d'une catégorie $\check{\mathrm{H}}^{\cdot}$, qui est une $\check{\mathrm{F}}$-expansion de $\mathrm{H}^{\cdot}$, vers $\mathrm{K}^{\cdot}$, de sorte que $\check{\mathrm{F}}$ soit formé de $\check{p}$-surjections et que $\check{p}(\check{\mathrm{F}}) = \mathrm{F}$ et $\overline{\mathrm{F}} \subset \check{\mathrm{F}}$.

Cette Note fait suite à (1), dont nous reprenons les notations.

Si $\mathrm{H}^{\cdot}$ est une catégorie et F une sous-classe de H, nous désignons par $\mathrm{R}_g(\mathrm{H}^{\cdot}, \mathrm{F})$ la classe des $h \in \mathrm{H}$ tels que les conditions

$$h.f = h.f', \quad \text{où} \quad f \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad f' \in \mathrm{F},$$

entraînent $f = f'$; par $\mathrm{R}_d(\mathrm{F}, \mathrm{H}^{\cdot})$ la classe des $h \in \mathrm{H}$ tels qu'on ait $f = f'$, si $f.h = f'.h$, $f \in \mathrm{F}$ et $f' \in \mathrm{F}$.

1. Expansion associée a un couple $\overline{p}$-admissible.

Définition 1. — Soit $\mathrm{H}^{\cdot}$ une catégorie. On dira que $\mathrm{H}^{\cdot}$ est une F-*expansion* de $\mathrm{C}^{\cdot}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $\mathrm{C}^{\cdot}$ est un sous-graphe multiplicatif (2) de $\mathrm{H}^{\cdot}$;

(2) On a $\mathrm{F} \subset \mathrm{R}_g(\mathrm{H}^{\cdot}, \mathrm{C})$, $\alpha(\mathrm{F}) = \mathrm{C}_0^{\cdot} \subset \mathrm{F}$, $\mathrm{F}.(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \cap \mathrm{C} \subset \mathrm{R}_d(\mathrm{C}, \mathrm{C}^{\cdot})$;

(3) Les conditions (2), (3) et (4) de la définition d'une expansion semi-régulière [voir (1)] sont vérifiées.

En particulier, si $\mathrm{H}^{\cdot}$ est une expansion semi-régulière de $\mathrm{C}^{\cdot}$, alors $\mathrm{H}^{\cdot}$ est aussi une expansion de $\mathrm{C}^{\cdot}$.

Soit $\overline{p} = (\mathrm{K}^{\cdot}, p, \mathrm{H}^{\cdot})$ un foncteur.

Définition 2. — On dira que $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}})$ est un couple $\overline{p}$-*admissible* si les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) $\overline{\mathrm{F}}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\mathrm{H}^{\cdot}$ telle que $\overline{\mathrm{F}}_0^{\cdot} = \mathrm{H}_0^{\cdot}$ et $\mathrm{H}^{\cdot}$ est une $\overline{\mathrm{F}}$-expansion de $\mathrm{H}^{\cdot}$; on a

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{K}, \qquad \alpha(\mathrm{F}) = p(\mathrm{H}_0^{\cdot}) \subset \mathrm{F}; \qquad 1$$

(2) La restriction de $\overline{p}$ à $\overline{\mathrm{F}}^{\cdot}$ est fidèle et

$$(a) \qquad p(\overline{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{F} \cap \mathrm{R}_d(\mathrm{F} \cup p(\mathrm{H}), \mathrm{K}^{\cdot});$$

(3) Si $f \in \mathrm{F}$, $h \in \mathrm{H}$, $h' \in \mathrm{H}$, $\alpha(h) = \alpha(h')$, $\beta(h) = \beta(h')$ et $f.p(h) = f.p(h')$, on a $p(h) = p(h')$.

(4) Soit $\overline{\mathrm{F}}^p$ la classe des $h \in \mathrm{H}$ tels que $p(h) \in \mathrm{F}$ et qu'il existe $g \in \overline{\mathrm{F}}$ pour lequel $h.g \in \overline{\mathrm{F}}$. On a $\mathrm{F}.p(\overline{\mathrm{F}}^p) \subset \mathrm{F}$.

Cette définition modifie un peu celle de couple $\overline{p}$-distingué régulier (1).

Soit $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}})$ un couple $\overline{p}$-admissible. Nous désignerons par $\sqsupset(\mathrm{F}, \overline{p})$ la catégorie construite formellement comme dans (1); la catégorie $\square\square(\mathrm{H}^{\cdot}; \overline{\mathrm{F}}, \mathrm{H})$

1 opère encore sur $\sqsupset(F, \overline{p})$. Soit $\boxminus(F, \overline{p})$ la catégorie ayant pour éléments les quadruplets (k, f', f, h) tels que

$$h \in H \quad \text{et} \quad (k, f', f, p(h)) \in \square(K^{\cdot}; F, K),$$

munie de la loi de composition :

$$(k_1, f'_1, f_1, h_1).(k, f', f, h) = (k_1.k, f'_1, f, h_1.h)$$

si, et seulement si, $\alpha(h_1) = \beta(h)$ et $f_1 = f'$.

La catégorie $\boxbar(H^{\cdot}; \overline{F}, H)$ opère à droite sur $\boxminus(F, \overline{p})$ relativement à la loi de composition :

$$(k, f', f, h')(h, \overline{f}'_1, \overline{f}_1, h_1) = (k, f'.p(\overline{f}'_1), f.p(\overline{f}_1), h_1)$$

si, et seulement si, $h = h'$.

Soit ρ (resp. soit σ) la relation définie sur $\sqsupset(F, \overline{p})$ [resp. sur $\boxminus(F, \overline{p})$] par : $t_1 \sim t_2$ si, et seulement si, il existe $Q_i \in \square(H^{\cdot}; \overline{F}, H)$ tels que

$$i = 1, 2 \quad \text{et} \quad t_1 Q_1 = t_2 Q_2.$$

Soient :

$\hat{F}$ la classe des classes $(f, \alpha(f), s)$ mod ρ, où $f \in F$ et $s \in H^{\cdot}_0$;

$\tilde{F}$ la classe des classes $(f, f, \alpha(f), s)$ mod σ, où $f \in F$ et $s \in H^{\cdot}_0$;

C la classe des classes $(p(\beta(h)), p(\alpha(h)), h)$ mod ρ, où $h \in H$;

$\overline{C}$ la classe des classes $(p(h), p(\beta(h)), p(\alpha(h)), h)$ mod σ, où $h \in H$.

Soit τ le foncteur de $\boxminus(F, \overline{p})$ vers $\sqsupset(F, \overline{p})$ tel que

$$\tau(k, f', f, h) = (f', f, h).$$

Théorème. — *ρ et σ sont des relations d'équivalence. Il existe des catégories $\hat{C}^{\cdot}$ et $\tilde{C}^{\cdot}$ quotient strict de $\sqsupset(F, \overline{p})$ et $\boxminus(F, \overline{p})$ par ρ et par σ respectivement et un foncteur $(\hat{C}^{\cdot}, \omega, \tilde{C}^{\cdot})$ quotient de τ. $\hat{C}^{\cdot}$ est une $\hat{F}$-expansion régulière de $C^{\cdot}$, $\tilde{C}^{\cdot}$ est une $\tilde{F}$-expansion de $\overline{C}^{\cdot}$ et les restrictions $(\hat{F}, \omega\iota, \tilde{F})$ et $(C, \omega\iota, \overline{C})$ de ω sont des bijections.*

Corollaire 1. — *Si $F \subset R_d(K, K^{\cdot})$ (resp. $F \subset K^{\cdot}_{\gamma}$), alors ω définit un isomorphisme de $\tilde{C}^{\cdot}$ sur une sous-catégorie de $\hat{C}^{\cdot}$ (resp. sur $\hat{C}^{\cdot}$).*

Corollaire 2. — *Si la restriction de $\overline{p}$ à $\overline{F}^{\cdot}$ est bien fidèle (c'est-à-dire si la restriction de p à $\overline{F}.s$ est une injection, pour tout $s \in H^{\cdot}_0$), $C^{\cdot}$ et $\overline{C}^{\cdot}$ sont des catégories, $(H^{\cdot}, \gamma, C^{\cdot})$ et $\tilde{\gamma} = (H^{\cdot}, \gamma\omega\iota, \overline{C}^{\cdot})$ sont des isomorphismes, où*

$$\gamma[(p(\beta(h)), p(\alpha(h)), h) \bmod \rho] = h.$$

2

Remarque. — L'affirmation relative à $\hat{C}^{\cdot}$ signifie que le théorème du n° 3 [1] est aussi valable pour un couple $\overline{p}$-admissible. La partie relative à $\tilde{C}^{\cdot}$ montre comment on peut « préciser » ce théorème en faisant intervenir tous les éléments de K et pas seulement les éléments de $F \cup p(H)$.

3 Théorème. — *Soit $\overline{p} = (K^{\cdot}, p, H^{\cdot})$ un foncteur. Si $(F, H^{\cdot}_{\gamma})$ est un couple $\overline{p}$-admissible, $\overline{C}^{\cdot}$ est une catégorie, $\tilde{C}^{\cdot}$ est une catégorie à $\overline{C}$-éjections et l'on a $\tilde{F} = E(\tilde{C}^{\cdot}, \overline{C}) =$ classe des $(\tilde{C}^{\cdot}, \overline{C})$-éjecteurs [2].*

2. Théorèmes d'expansion générale. — Soit $\mathcal{E}_0$ la classe des triplets $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}}, \overline{p})$ tels que $\overline{p} \in \mathcal{F}$, que $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}})$ soit $\overline{p}$-admissible et que la restriction de $\overline{p}$ à $\overline{\mathrm{F}}^{\cdot}$ soit bien fidèle. Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des triplets $(\breve{p}_2, \breve{p}_1, \mathrm{U})$ tels que

$$\breve{p}_i = (\mathrm{F}_i, \overline{\mathrm{F}}_i, p_i) \in \mathcal{E}_0, \qquad \mathrm{U} = (\overline{p}_2, \varphi', \varphi, \overline{p}_1) \in \square\mathcal{F}, \qquad \varphi'(\mathrm{F}_1) \subset \mathrm{F}_2 \quad \text{et} \quad \varphi(\overline{\mathrm{F}}_1) \subset \overline{\mathrm{F}}_2,$$

la loi de composition étant

$$(\breve{p}'_2, \breve{p}'_1, \mathrm{U}') \cdot (\breve{p}_2, \breve{p}_1, \mathrm{U}) = (\breve{p}'_2, \breve{p}_1, \mathrm{U}' \boxdot \mathrm{U})$$

si, et seulement si, $\breve{p}'_1 = \breve{p}_2$.

Soit $\mathcal{E}'_0$ la classe des éléments $\tilde{q} = (\mathrm{F}, \hat{\mathrm{F}}, \mathrm{C}, \hat{q})$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) $\hat{q} = (\mathrm{K}^{\cdot}, q, \hat{\mathrm{C}}^{\cdot}) \in \mathcal{F}$; $\mathrm{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\hat{\mathrm{C}}^{\cdot}$;

(2) $\hat{\mathrm{C}}^{\cdot}$ est une $\hat{\mathrm{F}}$-expansion de $\mathrm{C}^{\cdot}$; si $\overline{\mathrm{F}} = \hat{\mathrm{F}} \cap \mathrm{C}$ et $\overline{p} = (\mathrm{K}^{\cdot}, q^{\natural}, \mathrm{C}^{\cdot})$, le couple $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}})$ vérifie les conditions (1), (3), (4) de la définition 2. On a $\hat{q}(\hat{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{F}$.

Soit $\mathcal{E}'$ la catégorie ayant pour éléments les quadruplets $(\tilde{q}_2, \varphi', \varphi, \tilde{q}_1)$ tels que

$$\tilde{q}_i = (\mathrm{F}_i, \hat{\mathrm{F}}_i, \mathrm{C}_i, \hat{q}_i) \in \mathcal{E}'_0, \qquad (\hat{q}_2, \varphi', \varphi, \hat{q}_1) \in \square\mathcal{F},$$
$$\varphi(\overline{\mathrm{F}}_1) \subset \overline{\mathrm{F}}_2, \qquad \varphi(\mathrm{C}_1) \subset \mathrm{C}_2 \quad \text{et} \quad \varphi'(\mathrm{F}_1) \subset \mathrm{F}_2,$$

la loi de composition étant

$$(\tilde{q}_4, \overline{\varphi}', \overline{\varphi}, \tilde{q}_3) \cdot (\tilde{q}_2, \varphi', \varphi, \tilde{q}_1) = (\tilde{q}_4, \overline{\varphi}' \cdot \varphi', \overline{\varphi} \cdot \varphi, \tilde{q}_1)$$

si, et seulement si, $\tilde{q}_3 = \tilde{q}_2$.

Soit $\mathcal{E}''$ la classe des éléments $(\breve{p}_1, \psi', \psi, \tilde{q})$ vérifiant les conditions :

(1) $\breve{p}_1 = (\mathrm{F}_1, \overline{\mathrm{F}}_1, \overline{p}_1) \in \mathcal{E}_0$ et $\tilde{q} = (\mathrm{F}, \hat{\mathrm{F}}, \mathrm{C}, \hat{q}) \in \mathcal{E}'_0$;

(2) $(\breve{p}_1, \psi', \psi, (\beta(\hat{q}), \hat{q}^{\natural}, \mathrm{C}^{\cdot})) \in \square\mathcal{F}$ [*voir* (2)]; 1

(3) $\psi'(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}_1$ et $\psi(\hat{\mathrm{F}} \cap \mathrm{C}) \subset \overline{\mathrm{F}}_1^{p_1}$.

Soit $\tilde{\mathcal{E}}$ la classe réunion de $\mathcal{E}$, de $\mathcal{E}'$ et de $\mathcal{E}''$. Soit aussi $\tilde{\mathcal{E}}$ la catégorie admettant $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ pour sous-catégories pleines et telle que

$$(\breve{p}_2, \breve{p}, \mathrm{U}) \cdot (\breve{p}, \psi', \psi, \tilde{q}) = (\breve{p}_2, \varphi' \cdot \psi', \varphi \cdot \psi_1, \tilde{q})$$

si

$$\mathrm{U} = (\overline{p}_2, \varphi', \varphi, \overline{p}), \qquad \tilde{q} = (\mathrm{F}, \hat{\mathrm{F}}, \mathrm{C}, \hat{q}) \quad \text{et} \quad \psi_1 = (\alpha(\overline{p}), \psi\iota, \mathrm{C}^{\cdot}),$$

et

$$(\breve{p}, \psi', \psi, \tilde{q}_2) \cdot (\tilde{q}_2, \varphi', \varphi, \tilde{q}_1) = (\breve{p}, \psi' \cdot \varphi', \psi \cdot \overline{\varphi}, \tilde{q}_1)$$

si

$$\tilde{q}_i = (\mathrm{F}_i, \hat{\mathrm{F}}_i, \mathrm{C}_i, \hat{q}_i) \quad \text{et} \quad \overline{\varphi} = (\mathrm{C}^{\cdot}_2, \varphi\iota, \mathrm{C}^{\cdot}_1).$$

Nous identifions la classe des unités de $\tilde{\mathcal{E}}$ à la classe $\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}'_0$.

Théorème. — *$\tilde{\mathcal{E}}$ est une catégorie à $\mathcal{E}'$-éjections et il existe un foncteur* 2
$(\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{E}')$-éjection naturalisé $(\mathrm{E}, \varepsilon)$ *tel que, si*

$$\breve{p} = (\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}}, \overline{p}) \in \mathcal{E}_0 \quad \textit{et} \quad \overline{p} = (\mathrm{K}^{\cdot}, p, \mathrm{H}^{\cdot}),$$

on ait

$$\mathrm{E}(\tilde{p}) = (\mathrm{F}, \check{\mathrm{F}}, \mathrm{H}, \check{p}) \quad \textit{et} \quad \varepsilon(\tilde{p}) = (\check{p}, \mathrm{K}^{\cdot}, \mathrm{H}^{\cdot}, \mathrm{E}(\tilde{p})),$$

les conditions suivantes étant vérifiées :

(1) $\check{p}$ *admet* $\overline{p}$ *pour restriction; on a*

$$\check{\mathrm{F}} \cap \mathrm{H} = \overline{\mathrm{F}}^{p} \quad \textit{et} \quad \check{\mathrm{F}} \subset \check{p}^{-1} = \textit{classe des } \check{p}\textit{-surjections } (^{2});$$

(2) *Pour tout* $s \in \mathrm{H}^{\cdot}_{0}$, *la restriction de* $\check{p}$ *à* $\check{\mathrm{F}}.s$ *est une bijection sur* $\mathrm{F}.p(s)$.

1 En effet, soit $\check{\mathrm{H}}^{\cdot}$ la catégorie image de $\check{\mathrm{C}}^{\cdot}$ (n° 1) par la bijection χ :

2 $$h \to \tilde{\gamma}(h) \quad \text{si } h \in \overline{\mathrm{C}}; \qquad k \to k \quad \text{si } \overline{k} \notin \mathrm{C}, \quad \tilde{k} \in \mathrm{C}.$$

On a $\check{\mathrm{F}} = \chi(\tilde{\mathrm{F}})$ et $\check{p} = (\mathrm{K}^{\cdot}, \check{p}', \check{\mathrm{H}}^{\cdot})$, où

$$\check{p}'(h) = p(h) \quad \text{si } h \in \mathrm{H} \qquad \text{et} \qquad \check{p}'[(k.f', f.h) \bmod \sigma] = k.$$

Définition 3. — Un $(\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{E}')$-éjecteur sera appelé un *expanseur* et une $(\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{E}')$-éjection de $m \in \mathcal{E}$ sera appelée une *expansion* de m.

Théorème. — *Soient* $\overline{p} \in \mathcal{F}$ *et* $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}})$ *un couple vérifiant les conditions* (1), (*a*),

3 (3), (4) *de la définition* 2. *Si les conditions* $f \in \overline{\mathrm{F}}$ *et* $\overline{p}(\overline{f}) \in \mathrm{K}^{\cdot}_{0}$ *entraînent* $\overline{f} \in \overline{\mathrm{F}}^{\cdot}_{0}$, *il existe une* F''*-expansion* $\hat{\mathrm{H}}^{\cdot}$ *de* $\mathrm{H}^{\cdot}$ *et un foncteur* $\hat{p}$ *de* $\hat{\mathrm{H}}^{\cdot}$ *vers* $\mathrm{K}^{\cdot}$ *tels que*

$$\hat{p}(\mathrm{F}'') = \mathrm{F} \quad \textit{et} \quad \overline{\mathrm{F}}^{p} = \mathrm{F}'' \cap \mathrm{H}.$$

En effet, soit $\mathcal{K}$ la classe des sous-catégories maximales $\mathrm{G}^{\cdot}$ de $\mathrm{H}^{\cdot}$ telles que $(\mathrm{K}^{\cdot}, \overline{p}, (\mathrm{G} \cap \overline{\mathrm{F}})^{\cdot})$ soit bien fidèle. Si $\mathrm{G}^{\cdot} \in \mathcal{K}$, soit $\check{\mathrm{G}}^{\cdot}$ la $\check{\mathrm{F}}_{\mathrm{G}}$-expansion de $\mathrm{G}^{\cdot}$ construite ci-dessus. $\hat{\mathrm{H}}^{\cdot}$ est la catégorie quotient strict de la catégorie $\sum_{\mathrm{G}^{\cdot} \in \mathcal{K}} \check{\mathrm{G}}^{\cdot}$ par la relation d'équivalence :

$$(g, \mathrm{G}) \sim (g', \mathrm{G}') \quad \text{si, et seulement si, } g = g', \qquad \text{où} \quad g \in \check{\mathrm{G}} \quad \text{et} \quad g' \in \check{\mathrm{G}}'.$$

Les théorèmes d'extension [ou plus particulièrement d'élargissement (3)] sont des corollaires du théorème d'expansion. La construction d'expansions intervient dans beaucoup de problèmes (feuilletages, complétion des

4 foncteurs ordonnés, etc.). Nous montrerons ailleurs sous quelles conditions l'expansion ou l'expansion régulière de $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}}, \overline{p})$ peut être $\mathcal{H}$-structurée, si $\overline{p}$ est un foncteur $\mathcal{H}$-structuré (4).

(*) Séance du 21 décembre 1964.
(1) *Comptes rendus*, 259, 1964, p. 1372.
(2) *Catégories et structures*, Cours multigraphié, Paris, 1964.
(3) *Catégories et structures* (extraits) (Sém. Topol. et Géom. diff., VI, Paris, 1964); *voir* aussi *Cours multigraphié de Montréal*, 1961.
(4) *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 1198.

(Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e.)

168172. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, p. 2116-2119 (22 février 1965). **Groupe 1.**

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Catégorie quotient d'une catégorie par une sous-catégorie.* Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. René Garnier.

Notions de sous-catégorie propre et de sous-catégorie distinguée. Les éléments d'une sous-catégorie propre peuvent être « universellement » transformés en épimorphismes. Condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une catégorie quotient d'une catégorie par une sous-catégorie $G^{\cdot}$; construction explicite de cette catégorie quotient si $G^{\cdot}$ est propre.

Si $H^{\cdot}$ est une catégorie, nous désignons par $H_0^{\cdot}$ la classe de ses unités, par α et β ses applications source et but, par $R_d(H^{\cdot})$ [resp. $R_g(H^{\cdot})$] la classe de ses épimorphismes (resp. ses monomorphismes), par $R(H^{\cdot})$ la classe intersection $R_d(H^{\cdot}) \cap R_g(H^{\cdot})$, par $\square H^{\cdot}$ la classe de ses quatuors [1]. Si $G^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $H^{\cdot}$, soit $\square(H^{\cdot}; H, G)$ la sous-classe de $\square H^{\cdot}$ formée des

$$(g', h', h, g) \in \square H^{\cdot} \quad \text{tels que } g \in G \text{ et } g' \in G.$$

Si ρ est une relation d'équivalence sur H et s'il existe un graphe multiplicatif quotient de $H^{\cdot}$ par ρ, nous désignons ce quotient par $H^{\cdot}/\rho$.

Soient $\mathcal{M}$ une catégorie pleine d'applications, $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{F}$ les catégories correspondantes des homomorphismes entre graphes multiplicatifs et des foncteurs [1]. Soit $p_{\mathcal{M}'}$ (resp. $p_{\mathcal{F}}$) le foncteur canonique

$$(K^{\cdot}, \Phi, H^{\cdot}) \to (K, \Phi, H)$$

de $\mathcal{M}'$ (resp. $\mathcal{F}$) vers $\mathcal{M}$. Si M' est une partie de M, l'injection canonique de M' dans M est notée (M, ι, M').

Si $C^{\cdot}$ est une catégorie et $C'^{\cdot}$ une sous-catégorie pleine de $C^{\cdot}$, on appelle foncteur $(C', C^{\cdot})$-projection naturalisé un foncteur naturalisé (Π, π) tel que $\pi(e)$ soit un C'-projecteur [1] dans C, pour tout $e \in C_0^{\cdot}$. 1

1. SOUS-CATÉGORIES PROPRES D'UNE CATÉGORIE. — Soit $H^{\cdot}$ une catégorie.

DÉFINITION. — On dira qu'une sous-catégorie $G^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ est *propre* si l'on a $H_0^{\cdot} \subset G$ et si les conditions $h \in H$ (resp. $h \in G$), $g \in G$ et $\beta(h) = \beta(g)$ entraînent qu'il existe $(g, h, h', g') \in \square(H^{\cdot}; H, G)$ (resp. $\in \square G^{\cdot}$).

Tout sous-groupoïde $G^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ tel que $H_0^{\cdot} \subset G$ est propre dans $H^{\cdot}$.

Soit $\overline{\mathcal{V}}_0$ la classe des couples $(H^{\cdot}, C)$ tels que $C^{\cdot}$ soit une sous-catégorie de $H^{\cdot}$ contenant $H_0^{\cdot}$. Soit $\overline{\mathcal{V}}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets $((H_2^{\cdot}, C_2), \varphi, (H_1^{\cdot}, C_1))$ tels que

$$(H_i^{\cdot}, C_i) \in \overline{\mathcal{V}}_0 \quad (i = 1, 2), \qquad (H_2^{\cdot}, \varphi, H_1^{\cdot}) \in \mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad \varphi(C_1) \subset C_2,$$

la loi de composition étant définie par

$$((H_4^{\cdot}, C_4), \varphi', (H_3^{\cdot}, C_3)).((H_2^{\cdot}, C_2), \varphi, (H_1^{\cdot}, C_1)) = ((H_4^{\cdot}, C_4), \varphi'\varphi, (H_1^{\cdot}, C_1))$$

si, et seulement si, $(H_3^{\cdot}, C_3) = (H_2^{\cdot}, C_2)$.

Soit $\mathcal{V}_0$ la classe des $(H^{\cdot}, C)$ tels que $C^{\cdot}$ soit une sous-catégorie propre de $H^{\cdot}$. Soit $\mathcal{V}'_0$ la classe des $(H^{\cdot}, C) \in \mathcal{V}_0$ vérifiant la condition :

Si $f.h = f.h'$, où $f \in C$, $h \in H$ et $h' \in H$, il existe $f' \in C$ tel que $h.f' = h'.f'$. Soit $\mathcal{V}''_0$ la classe des $(H^{\cdot}, C) \in \mathcal{V}_0$ tels que $(H^{\star}, C) \in \mathcal{V}_0$, où $H^{\star}$ est la catégorie duale de $H^{\cdot}$; posons $\tilde{\mathcal{V}}_0 = \mathcal{V}'_0 \cup \mathcal{V}''_0$. Soit $\mathcal{V}^d_0$ (resp. $\mathcal{V}^r_0$) la classe des $(H^{\cdot}, C) \in \mathcal{V}_0$ tels que $C \subset R_d(H^{\cdot})$ [resp. $C \subset R(H^{\cdot})$]. Soient $\mathcal{V}$ (resp. $\tilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{V}^d$, $\mathcal{V}^r$) les sous-catégories pleines de $\overline{\mathcal{V}}$ ayant $\mathcal{V}_0$ (resp. $\tilde{\mathcal{V}}_0$, $\mathcal{V}^d_0$, $\mathcal{V}^r_0$) pour classes d'objets.

1 Théorème. — *Il existe un foncteur* $(\mathcal{V}^d, \mathcal{V})$-*projection naturalisé* (R, r) *et un foncteur* $(\mathcal{V}^r, \tilde{\mathcal{V}})$-*projection naturalisé* $(\tilde{R}, \tilde{r})$.

On montre qu'on a

$$r(H^{\cdot}, C) = ((H^{\cdot}/\sigma, \bar{\sigma}(C)), \bar{\sigma}, (H^{\cdot}, C)),$$

où σ est la relation d'équivalence sur H telle que :

$h \sim h'$ si, et seulement si, il existe $f \in C$ tel que $h.f = h'.f$,

et où $\bar{\sigma}$ est l'application $h \to h \bmod \sigma$. Si $(H^{\cdot}, C) \in \mathcal{V}'_0$, on a $\tilde{r}(H^{\cdot}, C) = r(H^{\cdot}, C)$. Si $(H^{\cdot}, C) \in \mathcal{V}''_0$, alors

$$\tilde{r}(H^{\cdot}, C) = ((H^{\cdot}/\sigma', \bar{\sigma}'(C)), \bar{\sigma}', (H^{\cdot}, C)),$$

où σ' est la relation d'équivalence sur H :

$h \sim h'$ si, et seulement si, il existe $f \in C$ et $f' \in C$ tels que $f'.h.f = f'.h'.f$.

2. Sous-catégories distinguées. — Soient $H^{\cdot}$ une catégorie et $G^{\cdot}$ une sous-catégorie.

Définition. — On dira que $(\hat{\rho}, (H^{\cdot}, \iota, G^{\cdot}))$ est une *suite exacte courte* si $\hat{\rho}$ est une $p_{\mathcal{F}}$-surjection ([1]), $\hat{\rho}(G) \subset \beta(\hat{\rho})_0$ et si, lorsque

$$\Phi = (K^{\cdot}, \underline{\Phi}, H^{\cdot}) \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad \Phi(G) \subset K^{\cdot}_0,$$

il existe $\Phi' \in \mathcal{F}$ vérifiant $\Phi'.\hat{\rho} = \Phi$. Si, de plus, il existe une relation d'équivalence ρ sur H telle que $\hat{\rho}(h) = h \bmod \rho$, on dit que $\beta(\hat{\rho}) = (H/\rho)^{\cdot}$ est la *catégorie quotient de* $H^{\cdot}$ *par* $G^{\cdot}$, notée $H^{\cdot}/G^{\cdot}$.

2 Cette définition modifie un peu celle de ([2]).

Définition. — On appelle *sous-catégorie distinguée de* $H^{\cdot}$ une sous-catégorie $G^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ telle qu'il existe une suite exacte courte $(\hat{\rho}, (H^{\cdot}, \iota, G^{\cdot}))$ et que $G^{\cdot}$ soit le noyau de $\hat{\rho}$ (= classe des $g \in H$ pour lesquels $\hat{\rho}(g) \in \beta(\hat{\rho})_0$). On dira qu'une sous-catégorie $C^{\cdot}$ de $H^{\cdot}$ *engendre une sous-catégorie distinguée de* $H^{\cdot}$ s'il existe une plus petite sous-catégorie distinguée de $H^{\cdot}$ contenant C.

Proposition. — *S'il existe une catégorie quotient de* $H^{\cdot}$ *par* $G^{\cdot}$, *alors*
3 $G^{\cdot}$ *engendre une sous-catégorie distinguée* $\overline{G}^{\cdot}$ *de* $H^{\cdot}$ *et l'on a* $H^{\cdot}/G^{\cdot} = H^{\cdot}/\overline{G}^{\cdot}$.

Identifions $\mathcal{F}$ à la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{V}}$ ayant pour objets les couples $(H^{\cdot}, H^{\cdot}_0)$. Rappelons ([1]) qu'il existe un foncteur $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$-projection naturalisé $(\nu, \tilde{\nu})$ tel que, pour tout $K^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0$, la catégorie $\nu(K^{\cdot})$ soit une catégorie quotient strict de la catégorie des chemins associée au graphe sous-jacent à $K^{\cdot}$.

Soit $(H^{\cdot}, G) \in \overline{\mathcal{V}}_0$; nous désignerons par (H, A, H) la relation :

$(h', h) \in A$ si, et seulement si, il existe $(g', h', h, g) \in \square(H^{\cdot}; H, G)$, et par $\bar{\rho}$ la relation d'équivalence bicompatible sur $H^{\cdot}$ engendrée [1] par (H, A, H).

Théorème. — *Il existe un foncteur* $(\mathcal{F}, \overline{\mathcal{V}})$*-projection naturalisé* (V, φ) *tel que*

$$\varphi(H^{\cdot}, G) = (\nu(H^{\cdot}/\rho), \underline{\tilde{\nu}}(H^{\cdot}/\bar{\rho})\,\tilde{\bar{\rho}}, (H^{\cdot}, G)), \qquad \text{où} \quad \underline{\tilde{\nu}}(H^{\cdot}/\bar{\rho}) = p_{\mathcal{H}^{\cdot}}(\tilde{\nu}(H^{\cdot}/\bar{\rho})).$$

De plus, il existe une catégorie quotient de $H^{\cdot}$ *par* $G^{\cdot}$ *si, et seulement si,* $\nu(H^{\cdot}/\rho)$ *est une surjection.* 1

Remarque. — Pour certains $(H^{\cdot}, G) \in \overline{\mathcal{V}}_0$, il n'existe pas de catégorie quotient de $H^{\cdot}$ par $G^{\cdot}$.

3. Catégorie quotient d'une catégorie par une sous-catégorie propre. — Nous allons montrer comment on peut construire explicitement la catégorie $H^{\cdot}/G^{\cdot}$ dans certains cas.

Théorème. — *Si* $G^{\cdot}$ *est une sous-catégorie propre de* $H^{\cdot}$ *et si* $(H^{\cdot}, G) \in \tilde{\overline{\mathcal{V}}}_0$, *il existe une catégorie quotient de* $H^{\cdot}$ *par* $G^{\cdot}$. 2

On montre d'abord que, dans le cas où $G \subset R_g(H^{\cdot})$, la relation $\bar{\rho}$ (*voir* n° 2) est définie comme suit :

Soit ρ la relation d'équivalence sur H :

$(h_1, h_2) \in \rho$ si, et seulement si, il existe

$$(g'_i, h_i, h, g_i) \in \square(H^{\cdot}; H, G) \qquad (i = 1, 2).$$

Alors on a $h' \sim h \bmod \bar{\rho}$ si, et seulement si, il existe deux familles $(f_i^j)_{i \leq m, j \leq n}$ et $(f'^j_i)_{i \leq m, j \leq n}$ telles que $(f_i^j, f'^j_i) \in \rho$ si $i \leq m$, $j \leq n$, et que, en posant

$$f^j = f_m^j \cdot f_{m-1}^j \cdots f_1^j \qquad \text{et} \qquad f'^j = f'^j_m \cdot f'^j_{m-1} \cdots f'^j_1,$$

on ait

$$h = f^1, \qquad h' = f'^n \qquad \text{et} \qquad f'^j = f^{j+1} \quad \text{si } 1 \leq j < n.$$

De plus, il existe une catégorie quotient strict de $H^{\cdot}$ par $\bar{\rho}$ et l'on a $H^{\cdot}/\bar{\rho} = H^{\cdot}/G^{\cdot}$.

Si $(H^{\cdot}, G) \in \tilde{\mathcal{V}}_0$, alors $(\tilde{H}^{\cdot}, \tilde{G}) = \tilde{R}(H^{\cdot}, G)$ (*voir* n° 1) vérifie les conditions précédentes et l'on a $H^{\cdot}/G^{\cdot} = \tilde{H}^{\cdot}/\tilde{G}^{\cdot}$.

Corollaire. — *Si* $G^{\cdot}$ *est un sous-groupoïde de* $H^{\cdot}$, *il existe une catégorie quotient de* $H^{\cdot}$ *par* $G^{\cdot}$.

Ce corollaire est aussi un corollaire d'un théorème de [2].

Théorème. — *Soit* $(H^{\cdot}, G) \in \mathcal{V}'_0$. *Supposons que les conditions*

$$(g', h', h, g) \in \square(H^{\cdot}; H, G) \qquad \textit{et} \qquad g'' \in \beta(h') . G . \beta(h)$$

entraînent qu'il existe $(g'', h', h, f) \in \square(\mathrm{H}^{\cdot}; \mathrm{H}, \mathrm{G})$. *Alors* $\mathrm{G}^{\cdot}$ *engendre une sous-catégorie distinguée* $\overline{\mathrm{G}}^{\cdot}$ *de* $\mathrm{H}^{\cdot}$ *et* $\overline{\mathrm{G}}$ *est la classe des* $k \in \mathrm{H}$ *pour lesquels*
1 *il existe* $g \in \mathrm{G}$ *et* $g' \in \mathrm{G}$ *vérifiant* $k.g = g'$.

On montre que, si $\mathrm{G} \subset \mathrm{R}_g(\mathrm{H}^{\cdot})$, la relation ρ (*voir* plus haut) est une relation d'équivalence bicompatible sur $\mathrm{H}^{\cdot}$, et, par suite, $\mathrm{H}^{\cdot}/\mathrm{G}^{\cdot} = \mathrm{H}^{\cdot}/\rho$. Le cas général se ramène à ce cas, par l'intermédiaire de la projection $\tilde{\mathrm{R}}(\mathrm{H}^{\cdot}, \mathrm{C})$.

2 Corollaire. — *Soit* $\mathrm{G}^{\cdot}$ *un sous-groupoïde de* $\mathrm{H}^{\cdot}$ *contenant* $\mathrm{H}^{\cdot}_0$ *et vérifiant la condition* :

(o) *Si* $h \in \mathrm{H}$ *et* $g \in \beta(h).\mathrm{G}.\beta(h)$, *il existe* $g' \in \mathrm{G}$ *tel que* $g.h = h.g'$. *Alors* $\mathrm{G}^{\cdot}$ *est un sous-groupoïde distingué de* $\mathrm{H}^{\cdot}$.

3 Corollaite 2. — *Soient* $\mathrm{H}^{\cdot}$ *un groupoïde et* $\mathrm{G}^{\cdot}$ *un sous-groupoïde de* $\mathrm{H}^{\cdot}$ *contenant* $\mathrm{H}^{\cdot}_0$. $\mathrm{G}^{\cdot}$ *est distingué dans* $\mathrm{H}^{\cdot}$ *si, et seulement si, on a* $h^{-1}.\mathrm{G}.h \subset \mathrm{G}$ *pour tout* $h \in \mathrm{H}$.

En particulier, si $\mathrm{H}^{\cdot}$ est un groupe et $\mathrm{G}^{\cdot}$ un sous-groupe de $\mathrm{H}^{\cdot}$, la sous-catégorie distinguée $\overline{\mathrm{G}}^{\cdot}$ de $\mathrm{H}^{\cdot}$ engendrée par $\mathrm{G}^{\cdot}$ est le sous-groupe distingué engendré par $\mathrm{G}^{\cdot}$ (au sens usuel) et l'on a $\mathrm{H}^{\cdot}/\mathrm{G}^{\cdot} = \mathrm{H}^{\cdot}/\overline{\mathrm{G}}^{\cdot}$.

4. Application. — Soit $\overline{p} = (\mathrm{K}^{\cdot}, p, \mathrm{H}^{\cdot})$ un foncteur. Soient F une sous-classe de K et $\overline{\mathrm{F}}^{\cdot}$ une sous-catégorie propre de $\mathrm{H}^{\cdot}$ telles que

$$\overline{\mathrm{F}} \subset \mathrm{R}_g(\mathrm{H}^{\cdot}), \quad p(\overline{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{F}, \quad \mathrm{F}.p(\overline{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{F} \quad \text{et} \quad \alpha(\mathrm{F}) = p(\mathrm{H}^{\cdot}_0).$$

Soient $\sqsupset(\mathrm{F}, \overline{p})$ et $\boxminus(\mathrm{F}, \overline{p})$ les catégories définies formellement comme dans ([3]). Soit $\mathrm{G}^{\cdot}$ la sous-catégorie de $\sqsupset(\mathrm{F}, \overline{p})$ formée des $(f, f.p(\overline{f}), \overline{f})$, où $\overline{f} \in \overline{\mathrm{F}}$, et soit $\mathrm{G}'^{\cdot}$ la sous-catégorie de $\boxminus(\mathrm{F}, \overline{p})$ formée des $(\beta(f), t)$ tels que $t \in \mathrm{G}$.

Théorème. — *Il existe une catégorie* $\hat{\mathrm{C}}^{\cdot}$ *quotient de* $\sqsupset(\mathrm{F}, \overline{p})$ *par* $\mathrm{G}^{\cdot}$ *et*
4+ *une catégorie* $\tilde{\mathrm{C}}^{\cdot}$ *quotient de* $\boxminus(\mathrm{F}, \overline{p})$ *par* $\mathrm{G}'^{\cdot}$.

Si $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}})$ est un couple $\overline{p}$-admissible, les catégories $\tilde{\mathrm{C}}^{\cdot}$ et $\hat{\mathrm{C}}^{\cdot}$ sont identiques aux catégories de même nom construites dans ([3]).

(*) Séance du 15 février 1965.
([1]) *Comm. Math. Helv.*, 1963, p. 219-283.
([2]) *Comptes rendus*, 259, 1964, p. 2050.
([3]) *Comptes rendus*, 260, 1965, p. 30.

(*Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e.*)

168591. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, p. 4583-4586 (29 novembre 1965). Groupe 1.

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Groupoïdes structurés quasi-quotient et quasi-cohomologie.* Note (*) de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. René Garnier.

Symétrisé d'un graphe structuré. Théorème d'existence d'un groupoïde structuré ou d'un demi-groupe structuré quasi-quotient d'un graphe multiplicatif structuré. Construction de ce groupoïde comme structure quasi-quotient de la quasi-catégorie libre structurée associée à un symétrisé du graphe structuré sous-jacent. Définition et théorème d'existence d'un foncteur de quasi-cohomologie.

Cette Note fait suite à [(1) et (2)]. Nous désignons par $\mathcal{M}$ et $\hat{\mathcal{M}}$ des catégories pleines d'applications telles que $\mathcal{M}_0$ et $\hat{\mathcal{M}}_0$ soient des univers et que $\mathcal{M} \subset \hat{\mathcal{M}}$, par P un foncteur d'homomorphismes $(\hat{\mathcal{M}}, \underline{P}, \hat{H}^\cdot)$ résolvant à droite et $\hat{\pi}$-compatible, où $\hat{\pi}$ est l'application $\hat{\mathcal{M}}_0$-produit. Soit

$$p = (\mathcal{M}, \underline{P}\iota, H^\cdot), \qquad \text{où} \quad H = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathcal{M}) \subset \hat{\mathcal{M}}_0.$$

1. Symétrisé d'un graphe p-structuré. — Si $[C] = (C, \beta, \alpha)$ est un graphe (orienté), nous notons $[C]^\star$ le graphe dual (C, α, β) de $[C]$ et $[C]_0$ la classe des sommets de $[C]$. Soit $\mathcal{G}(p)_0$ la classe des graphes p-structurés (3) et $\mathcal{G}(p)$ la catégorie des homomorphismes entre graphes p-structurés, dont les éléments sont identifiés aux triplets $([C'], h, [C])$ tels que

$$h \in H, \qquad ([C], \alpha(h)) \in \mathcal{G}(p)_0, \qquad ([C'], \beta(h)) \in \mathcal{G}(p)_0$$

et que $([C'], \underline{p(h)}, [C])$ soit un homomorphisme entre graphes. Si $([C], s) \in \mathcal{G}(p)_0$, on désigne par s_0 la p-sous-structure de s telle que $p(s_0) = [C]_0$.

Définition. — Soit $e = ([C], s) \in \mathcal{G}(p)_0$. On dira que $\bar{e}$ est un *p-symétrisé* de e s'il existe un graphe $[C']$ tel que $C \cap C' = [C]_0$, un

$$\bar{g} = ([C']^\star, g, [C]) \in \mathcal{G}(p)_\gamma$$

tel que $p(g)(x) = x$ si $x \in [C]_0$, et si $\bar{e}$ est une somme fibrée dans $\mathcal{G}(p)$ de

$$\big(([C], s \xleftarrow[p]{} s_0, [C]_0), ([C'], g.s \xleftarrow[p]{} s_0, [C]_0)\big).$$

En particulier, si $[C] = (C, \beta, \alpha)$ est un graphe, on appelle *symétrisé* de $[C]$ un graphe $[G]$ tel que $([G], G)$ soit un $(\mathcal{M}, \iota, \mathcal{M})$-symétrisé de $([C], C)$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe un graphe $[C']$ tel que $C \cap C' = [C]_0 = [C']_0$ et un isomorphisme g de $[C]$ sur $[C']^\star$, et qu'on ait $[G] = (C \cup C', \hat{\beta}, \hat{\alpha})$, où

$$(\hat{\beta}(f), \hat{\alpha}(f)) = (\beta(f), \alpha(f)) \qquad \text{et} \qquad (\hat{\beta}(g(f)), \hat{\alpha}(g(f))) = (\alpha(f), \beta(f))$$

pour tout $f \in C$. Dans ce cas, on écrit $g(f) = f^{-1}$.

Si $([\bar{C}], \bar{s})$ est un p-symétrisé de $([C], s) \in \mathcal{G}(p)_0$ et si $[G]$ est un symétrisé de $[C]$, il existe un homomorphisme canonique φ de $[G]$ dans $[\bar{C}]$.

Théorème. — *Si p est un foncteur d'homomorphismes saturé et* $H^\cdot$ *une catégorie à sommes fibrées finies* [*resp. si* P *est un foncteur d'homomorphismes* *saturé* $\ulcorner$*-engendrant* (1) *pour* $\mathcal{M}$, *si* $H \in \hat{\mathcal{M}}_0$ *et si* $H^{\cdot}$ *est une catégorie à sommes finies*], *tout graphe p-structuré admet un p-symétrisé.*

Corollaire. — *Soient* P *un foncteur d'homomorphismes saturé,* $e = ([C], s) \in \mathcal{G}(p)_0$ *et* [G] *un symétrisé de* [C]. *Si* $H \in \hat{\mathcal{M}}_0$ *et si* P *est à sommes finies et* $\ulcorner$*-étalant* (1) (*resp. si p est à sommes fibrées finies*), *il existe un p-symétrisé* $([\bar{C}], \bar{s})$ *de e tel que* $[\bar{C}]$ *soit un graphe quotient de* [G] (*resp.*
1 *que* $[\bar{C}] = [G]$).

Exemples. — Soient $e = ([C], s) \in \mathcal{G}(p)_0$ et [G] un symétrisé de [C].
2 Si $p = p_\Omega$ (resp. $= p_{\mathcal{E}}$ ou $p_{\mathcal{H}'}$) (1), alors e admet un p-symétrisé dont le graphe sous-jacent est un quotient de [G] (resp. est [G]). Si $p = p_{\mathcal{F}}$, il existe un p-symétrisé $([\bar{C}], \bar{C}^{\perp})$ de e tel que $\bar{C}^{\perp}$ soit la $(\mathcal{F}, \mathcal{H}')$-projection $N(G^{\perp})$ de $G^{\perp}$, si $([G], G^{\perp})$ est un $p_{\mathcal{H}'}$-symétrisé de e.

2. Groupoïdes structurés quasi-quotient d'un graphe multiplicatif p-structuré. — Nous reprenons les notations du n° 4 de (1). Soit $\mathcal{F}_g(p)$ [resp. $\mathfrak{H}(p)$] la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(p)$ ayant pour unités les groupoïdes $H^{\cdot}$-structurés (4) (resp. les catégories $H^{\cdot}$-structurées ayant un seul élément idempotent). Posons

$$\mathcal{U} = \mathcal{F}_g \text{ ou } \mathfrak{H} \qquad \text{et} \qquad \hat{p}_{\mathcal{U}} = (\mathcal{M}, \hat{p}_{\mathcal{F}}\iota, \mathcal{U}(p)).$$

Définissons de même $\mathcal{U}(P)$ et $\hat{P}_{\mathcal{U}}$, et soit $H \in \hat{\mathcal{M}}_0$.

Définition. — On dit que P est $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$-*résolvant* si $\hat{P}_{\mathcal{U}}$ est $\ulcorner$-engendrant pour (1) $(\mathcal{M}, X_{\mathcal{U}}, \mathcal{U}(p))$, où $X_{\mathcal{U}}$ est la classe des $\hat{P}_{\mathcal{U}}$-monomorphismes

$$\bar{j} = (\hat{C}^{\cdot}, j, C^{\cdot}) \qquad \text{tels que} \quad j \in P_{\Gamma}^{\ulcorner}.$$

3 Proposition. — *Si* P *est* $\ulcorner$*-étalant* [*resp. si* P *est* $\ulcorner$*-engendrant pour* $\mathcal{M}$ *et vérifie la condition* D (1)], *alors* P *est* $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$*-résolvant.*

4 Théorème. — *Soit* P *un foncteur* $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$*-résolvant. Si* $e' \in \mathcal{K}'(p)_0$ *et si r est une relation sur* $\hat{p}_{\mathcal{K}'}(e')$, *il existe une* $(\mathcal{U}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$*-structure quasi-quotient de e' par r. En particulier,* $\mathcal{K}'(p)$ *et* $\mathcal{F}(p)$ *sont des catégories à* $\mathcal{U}(p)$*-projections.*

5 Corollaire 1. — *Si* $p = p_\Omega$, p_{ps}, $p_{\mathcal{H}'}$, *ou* $p_{\mathcal{F}}$, *si* $e' \in \mathcal{K}'(p)_0$ *et si r est une relation sur* $\hat{p}_{\mathcal{K}'}(e')$, *il existe une* $(\mathcal{U}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$*-structure quasi-quotient de e' par r.*

Corollaire 2. — *Soit* $\hat{\hat{\mathcal{F}}}_g$ *la sous-catégorie pleine de la catégorie* $\hat{\hat{\mathcal{F}}}$ *des foncteurs doubles ayant pour unités les groupoïdes doubles* (4). $\hat{\hat{\mathcal{F}}}$ *est une*
6 *catégorie à* $\hat{\hat{\mathcal{F}}}_g$*-projections.*

3. Construction d'un groupoïde structuré quasi-quotient. — Soit $C^{\cdot}$ un graphe multiplicatif et soit [G] un symétrisé de $[C^{\cdot}]$. Désignons par $\hat{L}([G])$ la quasi-catégorie libre associée (2) à [G], par $\hat{r}_g(C^{\cdot})$ la relation $(\hat{L}[G], B, \hat{L}[G])$ telle que B soit formé des couples

$$((f^{-1}, f), \alpha(f)), \qquad ((f, f^{-1}), \beta(f)) \quad \text{et} \quad ((g, f), g.f),$$

où $f \in C$ et $(g, f) \in C^{\cdot} \star C^{\cdot}$.

Supposons $e' = (\mathrm{C}^{\cdot}, s) \in \mathcal{K}'(p)_0$ et soit $e = ([\overline{\mathrm{C}}], s)$ un p-symétrisé de $([\mathrm{C}^{\cdot}], s)$. Si φ est l'homomorphisme canonique de $[\mathrm{G}]$ vers $[\overline{\mathrm{C}}]$ et $\hat{\mathrm{L}}(\varphi)$ le quasi-foncteur de $\hat{\mathrm{L}}([\mathrm{G}])$ vers $\hat{\mathrm{L}}([\overline{\mathrm{C}}])$ prolongeant φ, nous posons

$$\hat{r}^{\mathcal{F}}(\mathrm{C}^{\cdot}) = \hat{\mathrm{L}}(\varphi)\,(\hat{r}_g(\mathrm{C}^{\cdot})) \qquad \text{et} \qquad r^{\mathcal{F}} = \hat{\mathrm{L}}(\varphi)(r).$$

lorsque r est une relation d'équivalence sur C. Reprenons les notations du n° 4 ([2]).

Théorème. — *S'il existe une $(\mathcal{F}'(p), \mathcal{K}(p), \mathcal{L}(p))$-projection* 1

$$\hat{\mathrm{L}}(\bar{e}) = (\hat{\mathrm{L}}([\overline{\mathrm{C}}]), \hat{s})$$

de e, pour qu'il existe une $(\mathcal{F}_g(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$-structure quasi-quotient $\hat{e}$ de e' par r, il faut et il suffit que $\hat{\mathrm{L}}(\bar{e})$ admette $\hat{e}$ pour $(\mathcal{F}_g(p), \hat{p}_{\mathcal{K}})$-structure quasi-quotient par $r^{\mathcal{F}} \cup \hat{r}^{\mathcal{F}}(\mathrm{C}^{\cdot})$.

Soit $\mathrm{M(C)}^{\cdot}$ le monoïde libre associé à C et soit $r_s(\mathrm{C}^{\cdot})$ la relation 2
$(\mathrm{M(C)}, \mathrm{D}, \mathrm{M(C)})$, où $\mathrm{D} = \mathrm{D}' \cup \mathrm{C}^{\cdot}_0 \times \mathrm{C}^{\cdot}_0$ et où D' est la classe des couples $((g, f), g.f)$ tels que $(g, f) \in \mathrm{C}^{\cdot} \star \mathrm{C}^{\cdot}$. Soit p_m le foncteur projection vers $\mathcal{M}$
de la catégorie des homomorphismes entre monoïdes et soit $\hat{p}_m$ le foncteur 2
projection vers $\mathcal{M}$ de la catégorie $\mathcal{N}_m(p)$ produit fibré $p_m \vee p$.

Théorème. — *Si S est une p-somme de $(s^n)_{n \in \mathrm{N}}$, alors* 3

$$\mathrm{M}(s) = (\mathrm{M(C)}^{\cdot}, \mathrm{S}) \in \mathcal{N}_m(p)_0 :$$

il existe une $(\mathfrak{H}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$-structure quasi-quotient $\tilde{e}$ de e' par r si, et seulement si, e est une $(\mathfrak{H}(p), \hat{p}_m)$ structure quasi-quotient de $\mathrm{M}(s)$ par $r \cup r_s(\mathrm{C}^{\cdot})$.

Théorème. — *Si p est un foncteur d'homomorphismes saturé, $\ulcorner$-étalant et à sommes dénombrables (resp. si $p = p_{\mathcal{N}'}$), et si r est compatible avec α et β et telle que $x_1 \sim x_2 \bmod r$ entraîne $x_1 = x_2$, où $x_i \in \mathrm{C}^{\cdot}_0$, alors e' admet pour $(\mathfrak{U}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$-structure quasi-quotient par r :*

une $(\mathcal{F}_g(p), \hat{p}_{\mathcal{K}})$-structure quotient faible de $\hat{\mathrm{L}}(\bar{e})$ par $r^{\mathcal{F}} \cup \hat{r}^{\mathcal{F}}(\mathrm{C}^{\cdot})$, si $\mathfrak{U} = \mathcal{F}_g$;
une $(\mathfrak{H}(p), \hat{p}_m)$-structure quotient faible de $\mathrm{M}(s)$ par $r \cup r_s(\mathrm{C}^{\cdot})$, si $\mathfrak{U} = \mathfrak{H}$. 4

Corollaire. — *Si $p = p_{\mathfrak{F}}$, alors e' admet une $(\mathfrak{U}(p), \mathcal{K}'(p))$-projection $(\mathrm{M}^{\cdot}, \mathrm{T})$ telle que $\mathrm{M}^{\cdot}$ soit une $(\mathfrak{U}, \mathcal{N}')$-projection de $\mathrm{C}^{\cdot}$, si $\mathfrak{U} = \mathcal{F}_g$ ou $\mathfrak{H}$.*

4. Quasi-cohomologie.

Définition. — On dira que J est un *p-idéal* si J est un idéal de $\mathrm{H}^{\cdot}$ vérifiant la condition suivante, où $p^{\ulcorner}_i$ désigne la classe des $(\mathcal{M}^{\cdot}, p)$-injections :

Pour tout $h \in p^{\ulcorner}_i$, il existe une relation $r(h)$ sur $p(\beta(h))$ telle que, si $k \in \mathrm{H}.\beta(h)$, on ait

$k.h \in \mathrm{J}$ si, et seulement si, $p(k)$ est compatible avec $r(h)$.

Exemples. — L'idéal $\mathrm{J}_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$ est un $p_{\mathcal{F}}$-idéal. L'idéal J_p considéré dans le n° 5 ([2]) est un $\hat{p}_{\mathcal{F}}$-idéal.

Soient $\mathrm{K}^{\cdot}$ une catégorie, K'' une sous-catégorie et I un idéal de $\mathrm{K}^{\cdot}$, et D un foncteur de $\mathrm{K}'' \times \mathrm{K}^{\star}$ vers $\mathrm{H}^{\cdot}$ tel que $p.\mathrm{D}$ soit une restriction de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^{\cdot}}$.

1 Théorème. — *Supposons* $H \in \hat{\mathcal{M}}_0$ *et soit* J *un p-idéal. Si* P *est un foncteur d'homomorphismes saturé* $\ulcorner$*-étalant,* (H, J, D, I) *admet un foncteur de cohomologie* (5) *d'ordre n.*

Soit $\mathcal{K}(K^\cdot, I)$ la catégorie des transformations naturelles entre complexes (5) de $(K^\cdot, I)$ et soit

$$\mathfrak{C}'(K^\cdot, I) = K^\cdot \times \mathcal{K}(K^\cdot, I)^\cdot.$$

2 Désignons par $X^\cdot$ une sous-catégorie de $P_\ulcorner$, par J un p-idéal.

Définition. — On dira que (X, J, D, I) admet un *foncteur de quasi-cohomologie* $\overline{H}^n$ *d'ordre n* s'il existe des foncteurs $\overline{Z}^n$, $\overline{B}^n$ et $\overline{H}^n$ de $\mathfrak{C}'(K^\cdot, I)$ vers $H^\cdot$ tels que, pour tout $(E, \varphi) \in \mathfrak{C}'(K^\cdot, I)_0$:

1° $\overline{Z}^n(E, \varphi)$ et $\overline{B}^n(E, \varphi)$ sont les (X, p)-sous-structures de $D(E, \varphi(n))$ engendrées par la classe des n-cocycles et la classe des n-cobords (5) de E vers φ respectivement;

2° $\overline{H}^n(E, \varphi)$ est une p-structure quasi-quotient de $\overline{Z}^n(E, \varphi)$ par la relation $r(h)$ associée au p-monomorphisme h de source $\overline{B}^n(E, \varphi)$, de but $\overline{Z}^n(E, \varphi)$.

Un foncteur de quasi-cohomologie est déterminé d'une façon unique, lorsqu'il existe. Si (X, J, D, I) [resp. si $(p_\ulcorner^\ulcorner, J, D, I)$] admet un foncteur de quasi-cohomologie quels que soient (D, I) et le p-idéal J, on dit que p est X-*propre* (resp. est *propre*) *pour la quasi-cohomologie.*

Proposition. — *Pour que* (H, J, D, I) *admette un foncteur de cohomologie* $\overline{H}^n$ *d'ordre n, il faut et il suffit que* $\overline{H}^n$ *soit un foncteur de quasi-cohomologie, que* $p.\overline{Z}^n(E, \varphi)$ *soit la classe des n-cocycles de* E *vers* φ *et que* $p(k)$ *soit une surjection, si k est la p-quasi-surjection définissant* $\overline{H}^n(E, \varphi)$ *comme p-structure quasi-quotient de* $\overline{Z}^n(E, \varphi)$ *par* $r(h)$, *pour tout* $(E, \varphi) \in \mathfrak{C}'(K^\cdot, I)_0$.

3 Théorème. — *Supposons que* $H \in \hat{\mathcal{M}}_0$ *et que* P *soit un foncteur d'homomorphismes saturé. Si* P *est* $\ulcorner$*-engendrant pour* $\mathcal{M}$, *alors p est propre pour la quasi-cohomologie. Soit* $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_g$ *ou* $\mathfrak{H}$ *et* $X'_{\mathcal{U}} = X_{\mathcal{U}} \cap p_\ulcorner^\ulcorner$; *si* P *est* $(\mathcal{M}, \mathcal{U})$*-résolvant,* $\hat{p}_{\mathcal{U}}$ *est* $X_{\mathcal{U}}$*-propre pour la quasi-cohomologie.*

Corollaire. — *Soit* $p = p_{\mathcal{F}}, p_{\mathcal{K}}$ *ou* $p_{p^\cdot}$; *alors p et* $\hat{p}_{\mathcal{U}}$, *où* $\mathcal{U} = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_g$ *ou* $\mathfrak{H}$, *sont propres pour la quasi-cohomologie.*

(*) Séance du 15 novembre 1965.

(1) *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 1577.

(2) *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 1932.

(3) *Comm. Math. Helv.*, 17, n° 38, 1964, p. 219-283.

(4) *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 80, 1963, p. 349-426.

(5) *Comptes rendus*, 259, 1964, p. 2050 (développé dans *Cohomologie à valeurs dans une catégorie dominée*, Colloque de Bruxelles, 1964, p. 1-60).

(*Institut Henri Poincaré,*
11, *rue Pierre-Curie, Paris,* 5e.)

170651. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 8-11 (3 janvier 1966). Série A

/87/

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Expansion des systèmes de structures dominés.* Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Henri Villat.

Catégorie des u-transformations naturelles, où u est une catégorie ordonnée. Théorème d'existence de u-limites inductives. Systèmes de structures $\hat{p}$-dominés, lorsque $\hat{p}$ est un foncteur ordonné vers une catégorie ordonnée d'applications. Théorème d'expansion d'un système de structures dominé en une espèce de structures dominée.

Nous reprenons les notations de (1). En particulier, $\mathcal{M}$ désigne une catégorie pleine d'applications, $\mathcal{N}'$ et $\mathcal{F}$ les catégories des néofoncteurs et des foncteurs correspondantes, $p_{\mathcal{N}'}$ et $p_{\mathcal{F}}$ leurs projections vers $\mathcal{M}$.

1. u-NÉOFONCTEURS. — Soit $u = (H^{\cdot}, <)$ une catégorie ordonnée assez régulière (2). Si $h \in H$ et $h' \in H$, nous désignons par $h'h$ le pseudo-produit (2) de (h', h), s'il existe dans $(H^{\cdot}, <)$.

DÉFINITION. — On appelle *u-néofoncteur* un triplet $F = ((H^{\cdot}, <), \underline{F}, C^{\cdot})$, 1+
où $C^{\cdot}$ est un graphe multiplicatif et $\underline{F}$ une surjection de C sur une partie de H vérifiant les conditions :

1° $F(C^{\cdot}_0) \subset H^{\cdot}_0$. Si $f \in C$, on a

$$\alpha(\underline{F}(f)) < \underline{F}(\alpha(f)) \quad \text{et} \quad \underline{F}(\beta(f)) = \beta(\underline{F}(f));$$

2° Si $(f', f) \in C^{\cdot} \star C^{\cdot}$, on a

$$\underline{F}(f')\,\underline{F}(f) < \underline{F}(f'.f).$$

PROPOSITION. — *Soit* $F = (u, \underline{F}, C^{\cdot})$ *un u-néofoncteur. Si* $\hat{p} = (u', \underline{p}, u)$ *est un foncteur ordonné assez régulier* (2), $\hat{p}.F = (u', \underline{p}\,\underline{F}, C^{\cdot})$ *est un* *u'-néofoncteur. Si* G *est un néofoncteur de* $\bar{C}^{\cdot}$ *vers* $C^{\cdot}$, $F.G = (u, \underline{F}\,\underline{G}, \bar{C})$ 2
est un u-néofoncteur.

Soit $C^{\cdot}$ un graphe multiplicatif et soit $\mathcal{N}'(u, C^{\cdot})$ la classe des u-néofoncteurs de la forme $(u, \underline{F}, C^{\cdot})$. 3

DÉFINITION. — On appelle *u-transformation naturelle* un triplet (F', τ, F) 4
vérifiant les conditions :

1° $F \in \mathcal{N}'(u, C^{\cdot})$ et $F' \in \mathcal{N}'(u, C^{\cdot})$;

2° τ est une application de $C^{\cdot}_0$ dans H telle que, pour tout $f \in C$, on ait

$$(\underline{F}'(f), k', k, \underline{F}(f)) \in \square H^{\cdot},$$

où $k < \tau(\alpha(f))$ et $k' = \tau(\beta(f))$.

PROPOSITION. — *La classe* $\mathfrak{N}((H^{\cdot}, <), C^{\cdot})$ *des u-transformations naturelles est une catégorie pour la loi de composition :*

$$(\hat{F}', \tau', \hat{F}'_1).(F', \tau, F) = (\hat{F}', \tau'.\tau, F) \quad \textit{si, et seulement si, } \hat{F}'_1 = F'.$$

Exemple. — Lorsque u est la catégorie $H^{\cdot}$ munie de la relation d'ordre triviale $(=)$, un u-néofoncteur est un néofoncteur, une u-transformation naturelle est un triplet définissant une transformation naturelle [1] et $\mathfrak{N}((H^\cdot, =), C^\cdot)^\cdot$ est la catégorie longitudinale des transformations naturelles.

2. *u*-LIMITES INDUCTIVES. Soit $C^\cdot$ un graphe multiplicatif et $u = (H^\cdot, <)$ une catégorie ordonnée assez régulière.

Posons $\hat{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}(u, C^\cdot)^\cdot$. Identifions $\mathcal{N}'(u, C^\cdot)$ avec la classe $\hat{\mathfrak{N}}_0$ des unités de $\hat{\mathfrak{N}}^\cdot$ et identifions $H^\cdot$ à la sous-catégorie de $\hat{\mathfrak{N}}^\cdot$ formée des triplets (F', τ, F) tels que

$$F(f) = s \in H^\cdot_0, \qquad F'(f) = s' \in H^\cdot_0 \qquad \text{et} \qquad \tau(f) = k \in s'.H.s$$

pour tout $f \in C$.

1+ DÉFINITION. — On appelle *u-limite inductive* de $F \in \hat{\mathfrak{N}}_0$ une $(H, \hat{\mathfrak{N}}^\cdot)$-projection de F. Si tout *u*-néofoncteur $(u, \underline{F}, C^\cdot)$ admet une *u*-limite inductive, on dira que *u* est à *$C^\cdot$-limites inductives.*

Exemple. — Une $(H^\cdot, =)$-limite inductive de F est une limite inductive, au sens usuel, de F.

Munissons $\mathcal{M}$ de la relation d'ordre :

$$h' < h \quad \text{si, et seulement si, } h' \text{ est une restriction de } h.$$

Alors $(\mathcal{M}, <)$ est une catégorie inductive [2].

2 THÉORÈME. — *$(\mathcal{M}, <)$ est à $C^\cdot$-limites inductives.*

Si $F = ((\mathcal{M}, <), \underline{F}, C^\cdot)$, alors F admet pour $(\mathcal{M}, <)$-limite inductive la classe E/r quotient de $E = \sum_{e \in C^\cdot_0} \underline{F}(e)$ par la relation d'équivalence r engendrée par la relation (E, A, E), où A est la classe des couples

$$((\alpha(f).z), (\beta(f).\underline{F}(f)(z))) \qquad \text{si} \quad z \in \alpha(\underline{F}(f)).$$

Soit $\hat{p} = (u', \underline{p}, u)$ un foncteur ordonné vérifiant les conditions :

1° $\hat{p}$ est assez régulier et $u = (H^\cdot, <)$ est complètement régulière à droite [4];

2° $u' = (K^\cdot, <)$ et $p = (K^\cdot, \underline{p}, H^\cdot)$ est fidèle.

THÉORÈME. — *Soit* $F = (u, \underline{F}, C^\cdot)$ *un u-néofoncteur tel que* $(\underline{F}(e))_{e \in C^\cdot_0}$
3 [*resp. que* $(\underline{p}\,\underline{F}(e))_{e \in C^\cdot_0}$] *admette une somme dans* $H^\cdot$ (*resp. dans* $K^\cdot$). *Si* $K^\cdot$ *est à sommes fibrées finies, si la catégorie* $\boxminus(R_d(K^\cdot), p)$ [3] *est à* H-*projections et si* $\hat{p}.F$ *admet une u'-limite inductive x, il existe une p-quasi-surjection* [3] *j telle que* $\beta(j)$ *soit une u-limite inductive de* F.

Supposons de plus vérifiées les conditions :

3° $u' = (\mathcal{M}, <)$, où $\mathcal{M}_0$ est un univers, et il existe un foncteur $P = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{P}, \hat{H}^\cdot)$, $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$ et $\hat{\pi}$-compatible [3], où $\hat{\mathcal{M}}$ est une catégorie pleine d'applications et $\hat{\mathcal{M}}_0$ un univers, tel que

$$p = (\mathcal{M}, \underline{P}\iota, H^\cdot) \qquad \text{et} \qquad H = \underline{\overset{-1}{P}}(\mathcal{M}) \in \hat{\mathcal{M}}_0.$$

4° p est résolvant à droite et $p_n^{\ulcorner} \subset P_i^{\ulcorner}$ [notations de [1]].

Théorème. — *Avec les hypothèses précédentes et si* $H^{\cdot}$ *est une catégorie à* $C_0^{\cdot}$*-sommes, tout u-néofoncteur* $F = (u, \underline{F}, C^{\cdot})$ *admet pour u-limite inductive une p-structure quasi-quotient* ([2]) *d'une somme* S *de* $(\underline{F}(e))_{e \in C_0^{\cdot}}$ *par la relation* $k(r)$, *où* k *est l'application canonique de* $E = \sum_{e \in C_0^{\cdot}} p\,\underline{F}(e)$ *dans* $p(S)$ *et où* E/r *est la* $(\mathcal{M}, <)$*-limite inductive de* $\hat{p}.F$. 1

Exemple. — Si u est l'une des catégories ordonnées usuelles $(\mathcal{F}, <)$, $(\mathcal{M}', <)$, $(\Omega, <) =$ catégorie ordonnée des applications ordonnées, $(\mathcal{T}, <) =$ catégorie ordonnée des applications continues, alors u est à 2
$C^{\cdot}$-limites inductives, si $C \in \mathcal{M}_0$, car les conditions 1, 2, 3, 4, 5 sont vérifiées par le foncteur projection canonique de u vers $(\mathcal{M}, <)$.

3. Systèmes de structures dominés.

Théorème. — *Soit* $\mathcal{A}_C'$ *la catégorie des applications covariantes entre systèmes de structures* ([1]) *de la forme* $(\eta', C^{\cdot}, \varphi, \eta)$. *Il existe un isomorphisme* γ *de* $\mathcal{A}_C'$ *sur la sous-catégorie pleine de* $\mathfrak{N}((\mathcal{M}, <), C^{\cdot})$ *ayant pour unités les* F *tels que*

$$\underline{F}(e) \cap \underline{F}(e') = \emptyset \quad si\ e \neq e', \qquad e \in C_0^{\cdot},\quad e' \in C_0^{\cdot}.$$

Soit $\eta = (C^{\cdot}, S, \varkappa')$ un système de structures et π la projection canonique ([1]) de S dans $C_0^{\cdot}$. Pour tout $f \in C$, nous désignons par S_f la classe des $z \in S$ tels que $(f, z) \in C^{\cdot} \star S$, par $\tilde{f}$ l'application

$$z \to fz \quad \text{de } S_f \quad \text{dans } S_{\beta(f)}.$$

L'isomorphisme γ associe à η le $(\mathcal{M}, <)$-néofoncteur $((\mathcal{M}, <), \underline{F}, C^{\cdot})$ tel que

$$\underline{F}(f) = \tilde{f} \quad \text{pour tout } f \in C.$$

Soit $\hat{p} = ((\mathcal{M}, <), \underline{p}, (H^{\cdot}, <))$ un foncteur ordonné tel que $(H^{\cdot}, <)$ soit une catégorie ordonnée régulière ([2]) u; soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$.

Définition. — On appelle *système de structures $\hat{p}$-dominé* un couple 3
(η, F) tel que η soit un système de structures, F un u-néofoncteur et $((\mathcal{M}, <), \underline{p}\,\underline{F}, C^{\cdot}) = \gamma(\eta)$.

Exemple. — Si η est une espèce de structures, un système de structures $((\mathcal{M}, <), \underline{p}, (H^{\cdot}, =))$-dominé (η, F) est une espèce de structures p-dominée au sens de ([1]).

Définition. — Une u-transformation naturelle (F', φ, F) telle que

$$\hat{p}.F \in \gamma(\mathcal{A}_C') \qquad \text{et} \qquad \hat{p}.F' \in \gamma(\mathcal{A}_C')$$

est appelée *application covariante $\hat{p}$-dominée.*

Proposition. — *L'application*

$$(F', \varphi, F) \to (\gamma^{-1}(\hat{p}.F'), C^{\cdot}, \psi, \gamma^{-1}(\hat{p}.F)), \qquad où \quad \psi = \sum_{e \in C_0^{\cdot}} p(\varphi(e)),$$

définit un foncteur de la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}_C'(\hat{p})$ *de* $\mathfrak{N}(u, C^{\cdot})$ *formée des applications covariantes $\hat{p}$-dominées, vers* $\mathcal{A}_C'$. *Ce foncteur est fidèle lorsque p est fidèle.*

4. Théorème d'expansion dominée. — Soit $C^{\cdot}$ une catégorie telle que $C \in \mathcal{M}_0$.

Théorème. — *Soit* $\mathcal{Q}_C$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathcal{Q}'_C$ *ayant pour unités les espèces de structures* $\eta = (C^{\cdot}, S, \varkappa')$. *Alors* $\mathcal{Q}'_C$ *est une catégorie à* $\mathcal{Q}_C$*-projections.*

On obtient une $(\mathcal{Q}_C, \mathcal{Q}'_C)$-projection $\hat{\eta} = (C^{\cdot}, \hat{S}, \hat{\varkappa}')$ de η comme suit : Posons $\gamma(\eta) = F$. Pour tout $e \in C^{\cdot}_0$, notons $C^{\cdot}_e$ la sous-catégorie de $\boxminus C^{\cdot}$ formée des

$$\hat{g} = (e, f', f.g) \in \square C^{\cdot},$$

et soit $\hat{S}_e$ la $(\mathcal{M}, <)$-limite inductive du $(\mathcal{M}, <)$-néofoncteur F_e tel que $F_e(\hat{g})$ soit l'application

$$(f, z) \to (f', gz) \quad \text{de } \{f\} \times S_g \text{ dans } \{f'\} \times S_{\beta(g)}.$$

1+ Alors $\hat{S}$ est la classe réunion des $\hat{S}_e$, lorsque $e \in C^{\cdot}_0$.

Remarque. — Si $C^{\cdot}$ est un groupoïde, ce théorème résulte du théorème 17 du chapitre V([1]).

Supposons que $\hat{p}$ soit un foncteur ordonné vérifiant les conditions 1, 3,
2 4, 5 du n° 2 et que p soit un foncteur d'homomorphismes saturé.

Théorème. — *Soit* $\mathcal{Q}_C(\hat{p})$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathcal{Q}'_C(\hat{p})$ *ayant pour unités les* F *tels que* $\hat{p}.F \in \gamma(\mathcal{Q}_C)$. *Alors* $\mathcal{Q}'_C(\hat{p})$ *est une catégorie à* $\mathcal{Q}_C(\hat{p})$-
3+ *projections.*

La construction d'une projection de F est analogue à la construction précédente, en utilisant les théorèmes du n° 2.

Corollaire. — *Si* $\hat{p}$ *est le foncteur ordonné projection vers* $(\mathcal{M}, <)$ *de l'une des catégories ordonnées* $(\mathcal{H}', <)$, $(\mathcal{F}, <)$, $(\Omega, <)$, $(\mathcal{G}, <)$, *alors* $\mathcal{Q}'_C(\hat{p})$ *est une catégorie à* $\mathcal{Q}_C(\hat{p})$*-projections.*

Définition. — Si (η, F) est un système de structures $\hat{p}$-dominé et si $\hat{F}$ est une $(\mathcal{Q}_C(\hat{p}), \mathcal{Q}'_C(\hat{p}))$-projection de F, on appelle $(\gamma^{-1}(\hat{p}.\hat{F}), \hat{F})$ l'espèce de structures $\hat{p}$-dominée *expansion de* (η, F).

(*) Séance du 20 décembre 1965.

([1]) *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

([2]) *Ann. Inst. Fourier*, 14, n° 1, 1964, p. 205-268.

([3]) *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 1577, 1932 et 4583; ces Notes résument l'article *Structures quasi-quotient* (à l'impression; multigraphié, Paris, 1965, 93 pages).

([4]) *Fund. Math.*, 54, 1964, p. 211-228.

(*Institut Henri Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie, Paris*, 5e).

171004. — Imp. Gauthier-Villars — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 762-765 (21 novembre 1966). Série A

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Quasi-élargissement d'un système de structures structuré*. Note (*) de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. René Garnier.

Définition des systèmes de structures structurés. Catégorie des applications covariantes structurées. Théorèmes de quasi-élargissement structuré.

Nous désignerons par $\mathcal{M}$ la catégorie pleine des applications associée à un univers $\mathcal{M}_0$, par $p_{\mathcal{N}'}$ le foncteur projection vers $\mathcal{M}$ de la catégorie $\mathcal{N}'$ des néofoncteurs [1] associée à $\mathcal{M}$. Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, \mathcal{H})$ un foncteur fidèle; la restriction de p au groupoïde $\mathcal{H}_\gamma$ des éléments inversibles de $\mathcal{H}$ est notée p_γ.

1. Sous-limites projectives. — Soit $F = (\mathcal{H}, \underline{F}, \Gamma^\cdot)$ un foncteur; soit M la limite projective canonique de $p.F$ dans $\mathcal{M}$, et p_i la projection canonique de M vers $p.F(i)$ pour tout $i \in \Gamma_0^\cdot$.

Définition. — On dira que s est une *p-sous-limite projective de* F si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° $s \in \mathcal{H}_0$, $p(s) \subset M$ et, pour tout $i \in \Gamma_0^\cdot$, il existe $\nu_i \in F(i).\mathcal{H}.s$ tel que $p(\nu_i)$ soit une restriction de p_i;

2° Soit $(F, \tau, \bar{e})$ un triplet définissant une transformation naturelle, où $\bar{e}$ est le foncteur de $\Gamma^\cdot$ vers $\mathcal{H}$ constant sur e; soit g l'unique élément de $\mathcal{M}$ tel que

$$p_i.g = p(\tau(i)) \quad \text{pour tout } i \in \Gamma_0^\cdot.$$

Si $g(p(e)) \subset p(s)$, il existe un et un seul $h \in s.\mathcal{H}.e$ tel que

$$\nu_i.h = \tau(i) \quad \text{pour tout } i \in \Gamma_0^\cdot.$$ 1

Proposition. — *Si p_γ est bien fidèle* [1] *et si s et s_1 sont deux p-sous-* 2
limites projectives de F *telles que $p(s) = p(s_1)$, on a $s = s_1$.*

Si F admet une limite projective S dans p, alors s est une p-sous-limite projective de F si, et seulement si, s est une p-sous-structure de S.

Exemple. — Si $\Gamma^\cdot$ est la catégorie obtenue en adjoignant un élément final o à la catégorie triviale $J^\cdot$ et si s est une p-sous-limite projective de F, nous dirons que s est un *p-sous-produit fibré* de $(h_j)_{j \in J}$, en posant $h_j = F(o, j)$.

Les propriétés des limites projectives se généralisent aux p-sous-limites projectives. On définirait facilement des p-sous-limites projectives relativement à un foncteur p de but quelconque.

2. Systèmes de structures structurés. — Nous supposons désormais que p_γ est bien fidèle.

Définition. — On appelle *néocatégorie p-structurée* un couple $(C^\cdot, s)$ vérifiant les conditions suivantes :

1° $C^\cdot = (C, \times)$ est un graphe multiplicatif, $s \in \mathcal{H}_0$ et $p(s) = C$;

2° Il existe une p-sous-structure de s, notée s_0, et des éléments $a \in s_0 . \mathcal{H} . s$ et $b \in s_0 . \mathcal{H} . s$ tels que

$$p(a) = (C^{\cdot}_0, \alpha, C) \quad \text{et} \quad p(b) = (C^{\cdot}_0, \beta, C).$$

3° Il existe un p-sous-produit fibré de (a, b) noté $s \star s$ et un $k \in s . \mathcal{H} . s \star s$ tel que $p(k) = (C, \varkappa, C^{\cdot} \star C^{\cdot})$.

S'il existe un produit $s \times s$ de (s, s) dans p, une néocatégorie p-structurée
1 est un graphe multiplicatif fortement p-structuré au sens de [2].

Nous désignerons par $\mathcal{N}'(p)$ la catégorie des néofoncteurs p-structurés entre néocatégories p-structurées, dont les éléments sont les triplets

$$\hat{F} = ((\hat{C}^{\cdot}, \hat{s}), f, (C^{\cdot}, s))$$

tels que :

1° $(C^{\cdot}, s)$ et $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ sont des néocatégories p-structurées;

2° $f \in \hat{s} . \mathcal{H} . s$ et $F = (\hat{C}^{\cdot}, \underline{p(f)}, C^{\cdot}) \in \mathcal{N}'$.

La surjection $\hat{F} \to f$ [resp. $\hat{F} \to F$, resp. $\hat{F} \to p(f)$] définit un foncteur fidèle $p^{\mathcal{H}}$ (resp. $p^{\mathcal{N}'}$, resp. $\hat{p}$) de $\mathcal{N}'(p)$ vers $\mathcal{H}$ (resp. vers $\mathcal{N}'$, resp. vers $\mathcal{N}$).

2 Définition. — On appelle *p-système* (resp. *p-espèce*) *de structures* un triplet $\eta = ((C^{\cdot}, s), s', \varkappa')$ tel que :

1° $(C^{\cdot}, s)$ est une néocatégorie p-structurée; $s' \in \mathcal{H}_0$;

2° $\underline{\eta} = (C^{\cdot}, E, \varkappa')$ est un système (resp. une espèce) de structures [1], où $E = p(s')$; soit $\underline{q}$ la surjection canonique de E dans $C^{\cdot}_0$ et $C^{\cdot} \star E$ la classe des couples composables;

3° Il existe $q \in s_0 . \mathcal{H} . s'$ tel que $p(q) = (C^{\cdot}_0, \underline{q}, E)$; de plus, (a, q) et (s_0, q) admettent des p-sous-produits fibrés $s \star s'$ et $s_0 \star s'$ tels que

$$p(s \star s') = C^{\cdot} \star E \quad \text{et} \quad p(s_0 \star s') = C^{\cdot}_0 \star E = (C^{\cdot} \star E) \cap (C^{\cdot}_0 \times E);$$

4° Il existe $k' \in s' . \mathcal{H} . s \star s'$ tel que $p(k') = (E, \varkappa', C^{\cdot} \star E)$.

Exemple. — Si η est une p-espèce de structures, si $C^{\cdot}$ est une catégorie et s'il existe des produits $s \times s$ et $s \times s'$ dans p, alors η est une $\mathcal{H}$-espèce de structures [3].

Théorème. — *Soit $\eta = ((C^{\cdot}, s), s', \varkappa')$ un p-système de structures. Alors s' est isomorphe dans $\mathcal{H}$ à $s_0 \star s' = s_0 \vee q$. Si p est à produits finis et résolvant à droite* [1], *il existe*

$$q(\eta) = ((C^{\cdot}, s), \hat{q}, ((C^{\cdot} \star E)^{\cdot}, s \star s')) \in \mathcal{N}'(p)$$

3+ *tel que $p^{\mathcal{N}'}(q(\eta))$ soit le néofoncteur des hypermorphismes associé à $\underline{\eta}$* [1].

3. Applications covariantes p-structurées.

Définition. — On appelle *p-application covariante* un quadruplet $m = (\eta_2, \Phi, \varphi, \eta_1)$ vérifiant les conditions :

1° $\eta_i = ((C^{\cdot}_i, s_i), s'_i, \varkappa'_i)$ est un p-système de structures, pour $i = 1$ et 2;

2° $\underline{m} = (\underline{\eta}_2, \Phi, \varphi, \underline{\eta}_1)$ est une application covariante [1];

3° Il existe $\Phi_m \in s_2 . \mathcal{H} . s_1$ et $\varphi_m \in s'_2 . \mathcal{H} . s'_1$ tels que $p(\Phi_m) = p_{\mathfrak{N}'}(\Phi)$ et $p(\varphi_m) = \varphi$.

Soit $\mathcal{A}'(p)$ la catégorie des p-applications covariantes, dont la loi de composition est

$$((\eta'_2, \Phi', \varphi', \eta'_1), (\eta_2, \Phi, \varphi, \eta_1)) \to (\eta'_2, \Phi'.\Phi, \varphi'.\varphi, \eta_1)$$

si, et seulement si, $\eta'_1 = \eta_2$. Nous identifions la classe de ses unités à la classe des p-systèmes de structures. Soit $p'_{\mathcal{A}}$ le foncteur de $\mathcal{A}'(p)$ vers $\mathfrak{M}$ défini par la surjection $(\eta_2, \Phi, \varphi, \eta_1) \to p_{\mathfrak{N}'}(\Phi) \times \varphi$. Soit $\mathcal{A}(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}'(p)$ ayant pour unités les p-espèces de structures $((C^{\cdot}, s), s', \varkappa')$ telles que $C^{\cdot}$ soit une catégorie. Soit $p_{\mathcal{A}}$ le foncteur restriction de $p'_{\mathcal{A}}$ à $\mathcal{A}(p)$.

Théorème. — *Supposons que p soit un foncteur d'homomorphismes saturé* (1). *Si p est à $\mathcal{J}$-produits, $p'_{\mathcal{A}}$ et $p_{\mathcal{A}}$ sont à $\mathcal{J}$-produits. Si p est à produits finis et résolvant à droite, $p'_{\mathcal{A}}$ et $p_{\mathcal{A}}$ sont résolvants à droite.* 1

4. Plongement d'un système de structures structuré dans une espèce de structures. — Désormais $\widehat{\mathfrak{M}}_0$ désigne un univers tel que $\mathfrak{M}_0 \in \widehat{\mathfrak{M}}_0$, et $P = \left(\widehat{\mathfrak{M}}, \underline{P}, \hat{\mathcal{H}}\right)$ un foncteur d'homomorphismes saturé admettant p pour restriction à $\mathcal{H} = \underline{\overset{-1}{P}}(\mathfrak{M}) \in \widehat{\mathfrak{M}}_0$ Soit $\overline{\mathfrak{M}}$ la saturante (1) de $\mathfrak{M}$ dans $\widehat{\mathfrak{M}}$ et $P_i^{\ulcorner}$ la classe des P-monomorphismes (1). Si $S \in \hat{\mathcal{H}}_0$, si $A \subset P(S)$ et si $A \in \overline{\mathfrak{M}}$, nous notons $S|A$ une P-sous-structure de S telle 2
que $P(S|A) \subset P(S')$ lorsque S' est une P-sous-structure de S et que $A \subset P(S')$. Soit Λ l'ordinal inaccessible associé à $\mathfrak{M}_0$ (i. e. la borne supérieure des ordinaux associés aux cardinaux des éléments de $\mathfrak{M}_0$) et soit $\zeta < \Lambda$ un ordinal sans prédécesseur.

Théorème. — *Si* P *est* ζ-$\ulcorner$-*engendrant* (1), *le foncteur* $P_{\mathcal{A}}$ *de* $\mathcal{A}(P)$ *vers* $\widehat{\mathfrak{M}}$ 3
est $\ulcorner$-*engendrant pour* $(\mathfrak{M}, X, \mathcal{A}(p))$, *où* X *est la classe des* $P_{\mathcal{A}}$-*monomorphismes m tels que* $\Phi_m \in P_i^{\ulcorner}$ *et* $\varphi_m \in P_i^{\ulcorner}$.

En effet, supposons $\eta = ((C^{\cdot}, s), s', \varkappa') \in \mathcal{A}(P)_0$. Soient $M \subset C \times P(s')$ un élément de $\overline{\mathfrak{M}}$, et p_1 et p_2 les projections de $C \times P(s')$ sur C et $P(s')$. Posons

$$E_1 = p_2(M), \qquad C_1 = p_1(M) \cup q(E_1), \qquad s'_1 = s' | E_1, \qquad s_1 = s | C_1.$$

Soit $\lambda < \zeta$ un ordinal et supposons définies, pour tout $\xi < \lambda$, des P-sous-structures s'_ξ de s' et s_ξ de s. Soit

$$C_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} P(s_\xi) \qquad \text{et} \qquad E_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} P(s'_\xi).$$

Désignons par $\hat{C}_\lambda^{\cdot}$ la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ engendrée par C_λ, par M_λ la classe des couples $(f, z) \in C^{\cdot} \star E$ tels que $f \in C_\lambda$, $z \in E_\lambda$ et qu'il existe $z' \in E_\lambda$ avec $fz' \in E_\lambda$. Soit

$$s'_\lambda = s' | \varkappa'(M_\lambda) \qquad \text{et} \qquad s_\lambda = s | \hat{C}_\lambda.$$

On définit ainsi, par récurrence transfinie, s_λ et s'_λ pour tout $\lambda < \zeta$. Il existe des P-sous-structures $\hat{s}$ de s et $\hat{s}'$ de s' telles que

$$\mathrm{P}(\hat{s}) = \bigcup_{\lambda<\zeta} \mathrm{P}(s_\lambda) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\hat{s}') = \bigcup_{\lambda<\zeta} \mathrm{P}(s'_\lambda).$$

1 On montre qu'il existe une $\mathrm{P}_{\mathcal{A}}$-sous-structure $((\mathrm{P}(\hat{s})^{\cdot}, \hat{s}), \hat{s}', \hat{\varkappa}')$ de η, isomorphe à une $(\mathrm{X}, \mathcal{A}(p))$-sous-structure de η engendrée par M.

Définition. — Soit $\eta = ((\mathrm{C}^{\cdot}, s), s', \varkappa')$ une p-espèce de structures.
2 On dira que η est *maximale* (resp. est *saturée*) si l'on a $(f, z) \in \mathrm{C}^{\cdot} \star \mathrm{E}$ lorsque (resp. lorsque f est inversible et) $(\alpha(f), z) \in \mathrm{C}^{\cdot} \star \mathrm{E}$, où $\mathrm{E} = p(s')$.

Soit $\mathcal{A}^{\mu}(p)$ [resp. $\mathcal{A}^{\sigma}(p)$] la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}(p)$ ayant pour unités les p-espèces de structures maximales (resp. saturées). Soient $p^{\mu}_{\mathcal{A}}$ et $p^{\sigma}_{\mathcal{A}}$ les foncteurs restriction de $p_{\mathcal{A}}$ à $\mathcal{A}^{\mu}(p)$ et à $\mathcal{A}^{\sigma}(p)$ respectivement. Soient $\mathrm{P}^{\mu}_{\mathcal{A}}$ et $\mathrm{P}^{\sigma}_{\mathcal{A}}$ les foncteurs définis de même à partir de P.

Théorème. — *Si* P *est* ζ-$\ulcorner$*-engendrant et si* X^{μ} *(resp. si* X^{σ}*) est la classe des* $\mathrm{P}^{\mu}_{\mathcal{A}}$*- (resp. des* $\mathrm{P}^{\sigma}_{\mathcal{A}}$*-) monomorphismes m tels que* $m \in \mathrm{X}$, *alors* $\mathrm{P}^{\mu}_{\mathcal{A}}$ *(resp.* $\mathrm{P}^{\sigma}_{\mathcal{A}}$*)*
3 *est* $\ulcorner$*-engendrant pour* $(\mathcal{M}, \mathrm{X}^{\mu}, \mathcal{A}^{\mu}(p))$ *[resp. pour* $(\mathcal{M}, \mathrm{X}^{\sigma}, \mathcal{A}^{\sigma}(p))$*].*

Théorème. — *Si* P *est à* $\mathcal{M}_0$*-produits et* ζ-$\ulcorner$*-engendrant et si p est résolvant à droite,* $\mathcal{A}'(p)$ *est une catégorie à* $\mathcal{K}$*-projections, où* $\mathcal{K} = \mathcal{A}(p)$, $\mathcal{A}^{\mu}(p)$
4 *ou* $\mathcal{A}^{\sigma}(p)$.

Une $(\mathcal{A}(p), \mathcal{A}'(p))$-projection de $\eta = ((\mathrm{C}^{\cdot}, s), s', \varkappa')$ est appelée *quasi-élargissement minimal de* η; une $(\mathcal{A}^{\mu}(p), \mathcal{A}'(p))$-projection de η, un *quasi-élargissement maximal de* η; une $(\mathcal{A}^{\sigma}(p), \mathcal{A}'(p))$-projection de η, un *quasi-élargissement saturé de* η. Si p est le foncteur identique de $\mathcal{M}$, on a $\eta = \underline{\eta}$; si de plus $\mathrm{C}^{\cdot}$ est un groupoïde, les quasi-élargissements maximal et saturé de η coïncident et s'identifient à l'élargissement maximal (1) de η, le quasi-élargissement minimal s'identifie à l'élargissement minimal (1) de η.

5+

(*) Séance du 14 novembre 1966.
(1) *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
(2) *Comm. Math. Helv.*, 38, 1963, p. 219-283.
(3) *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 2080 et 2283.
(4) *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 655.

(Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e.)

173640. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 863-866 (7 décembre 1966). Série A

/90/

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Premier théorème d'expansion structurée.* Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. René Garnier.

Généralisation au cas des foncteurs p-structurés du théorème d'expansion de (1) : existence et construction d'un plongement « universel » d'un couple de foncteurs p-structurés dans un foncteur avec hypermorphismes p-structuré. Cette Note fait suite à des Notes antérieures (2) dont on reprend la terminologie.

Soit $\mathcal{M}_0$ un univers; soient $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{N}'$ respectivement la catégorie pleine d'applications, la catégorie des foncteurs et la catégorie des néofoncteurs associées à $\mathcal{M}_0$; soit $p_{\mathcal{F}}$ le foncteur projection de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{M}$. Nous nous donnons un foncteur d'homomorphismes (1) $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, \mathcal{H})$. Soient $\mathcal{N}'(p)$ la catégorie des néofoncteurs p-structurés (2), $\tilde{p}$ son foncteur canonique vers $\mathcal{N}'$, et $\mathcal{F}(p)$ sa sous-catégorie pleine formée des foncteurs p-structurés.

1. FONCTEUR D'HYPERMORPHISMES p-STRUCTURÉ.

DÉFINITION. — On appelle *néofoncteur bien fidèle* (resp. *néofoncteur d'hypermorphismes*) *p-structuré* un néofoncteur p-structuré

$$\hat{q} = ((C^{\bullet}, s), q, (\bar{C}^{\bullet}, \bar{s}))$$

vérifiant les conditions suivantes :

1° $(C^{\bullet}, \underline{p(q)}, \bar{C}^{\bullet})$ est un néofoncteur bien fidèle (resp. d'hypermorphismes) (1);

2° $\bar{s}$ est isomorphe dans $\mathcal{H}$ à un p-sous-produit fibré (2) de (a, q_0), où

$$a \in s_0 . \mathcal{H} . s \quad \text{et} \quad p(a) = (C_0^{\bullet}, \alpha, C^{\bullet}),$$
$$q_0 \in s_0 . \mathcal{H} . \bar{s}_0 \quad \text{et} \quad p(q_0) = (C_0^{\bullet}, \underline{p(q)}\,\iota, \bar{C}_0^{\bullet}).$$

Soit $\mathcal{N}'_b(p)$ [resp. $\mathcal{N}'_H(p)$] la sous-classe de $\mathcal{N}'(p)$ formée des néofoncteurs bien fidèles (resp. d'hypermorphismes) p-structurés.

PROPOSITION. — *$\mathcal{N}'_b(p)$ définit une sous-catégorie de $\mathcal{N}'(p)$.*

Désignons par $Q\mathcal{N}'_b(p)$ [resp. par $Q\mathcal{N}'_H(p)$] la sous-catégorie pleine de la catégorie longitudinale $\boxed{}\,\mathcal{N}'(p)$ des quatuors (1) de $\mathcal{N}'(p)$ ayant pour objets les éléments de $\mathcal{N}'_b(p)$ [resp. de $\mathcal{N}'_H(p)$].

THÉORÈME. — *Si p est à produits finis et résolvant à droite, les catégories $Q\mathcal{N}'_b(p)$ et $\mathcal{A}'(p)$ [resp. $Q\mathcal{N}'_H(p)$ et $\mathcal{A}(p)$] sont équivalentes, où $\mathcal{A}'(p)$ [resp. $\mathcal{A}(p)$] est la catégorie des p-applications covariantes (resp. covariantes entre p-espèces de structures)* (2). 1+

2. FONCTEUR AVEC HYPERMORPHISMES p-STRUCTURÉ.

DÉFINITION. — On appelle *foncteur avec hypermorphismes p-structuré* un couple $(\hat{q}, \hat{q}')$ vérifiant les conditions suivantes :

1° $\hat{q} = ((C^{\bullet}, s), q, (\bar{C}^{\bullet}, \bar{s}))$ est un foncteur p-structuré;

2° $\hat{q}' = ((K^{\bullet}, s'), q', (\bar{K}^{\bullet}, \bar{s}'))$ est un foncteur d'hypermorphismes p-structuré tel que q' soit un p-sous-morphisme de q et $\tilde{p}(\hat{q}')$ une restriction de $\tilde{p}(\hat{q})$;

3° Tout $f \in \overline{K}$ est une $\tilde{p}(\hat{q})$-surjection (¹); on a

1¶ $$K = \tilde{p}(\hat{q})(\overline{K}) \quad \text{et} \quad \overline{K}_0^{\cdot} = \overline{C}_0^{\cdot}.$$

Exemple. — Si p est le foncteur identique de $\mathcal{M}$, et si $(\hat{q}, \hat{q}')$ est un foncteur avec hypermorphismes p-structuré tel que $\hat{q}$ soit fidèle, $(\hat{q}, \alpha(\hat{q}'))$
2 est une catégorie d'homomorphismes (¹).

Soit $\mathcal{S}(p)_0$ la classe des couples $(\hat{q}, \hat{q}')$ tels que

1° $\hat{q} = ((C^{\cdot}, s), q, (\overline{C}^{\cdot}, \bar{s})) \in \mathcal{F}(p)$;

2° $\hat{q}' = ((K^{\cdot}, s'), q', (\overline{K}^{\cdot}, \bar{s}')) \in \mathcal{F}(p)$;

3° $\tilde{p}(\hat{q}')$ est une restriction de $\tilde{p}(\hat{q})$ et q' est un p-sous-morphisme de q; on a

3 $$\overline{K}_0^{\cdot} = \overline{C}_0^{\cdot} \quad \text{et} \quad \alpha(K - K_0^{\cdot}) \subset \tilde{p}(\hat{q})(\overline{K}_0^{\cdot}).$$

Soit $\mathcal{S}'(p)_0$ la sous-classe de $\mathcal{S}(p)_0$ formée des foncteurs avec hypermorphismes p-structurés. Soit $\mathcal{S}(p)$ la catégorie ayant pour éléments les quadruplets

$$Q = ((\hat{q}_2, \hat{q}'_2), \hat{F}_2, \hat{F}_1, (\hat{q}_1, \hat{q}'_1))$$

ayant les propriétés :

1° $(\hat{q}_i, \hat{q}'_i) \in \mathcal{S}(p)_0$ et $\hat{F}_i = (u'_2, F_i, u'_1) \in \mathcal{F}(p)$, où $i = 1$ et 2;

2° $(\hat{q}_2, \hat{F}_2, \hat{F}_1, \hat{q}_1) \in \square\mathcal{F}(p)$ et $(q'_2, F'_2, F'_1, q'_1) \in \square\mathcal{H}$, où F'_i est un p-sous-morphisme de F_i pour $i = 1$ et 2.

La loi de composition sur $\mathcal{S}(p)$ est

$$(((\hat{q}_4, \hat{q}'_4), \hat{F}_4, \hat{F}_3, (\hat{q}_3, \hat{q}'_3)), Q) \to ((\hat{q}_4, \hat{q}'_4), \hat{F}_4.\hat{F}_2, \hat{F}_3.\hat{F}_1, (\hat{q}_1, \hat{q}'_1))$$

si, et seulement si, $(\hat{q}_2, \hat{q}'_2) = (\hat{q}_3, \hat{q}'_3)$. Nous identifions $\mathcal{S}(p)_0$ à la classe des unités de $\mathcal{S}(p)$. Soit $\mathcal{S}'(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}(p)$ ayant $\mathcal{S}'(p)_0$ pour classe de ses unités. Soit $y(p)$ le foncteur de $\mathcal{S}(p)$ vers $\mathcal{M}$ tel que

$$y(p)(Q) = p(F_2) \times p(F_1).$$

Soit $y'(p)$ la restriction de $y(p)$ à $\mathcal{S}'(p)$.

Dans la fin de cette Note, nous supposons que $\hat{\mathcal{M}}_0$ est un univers admettant $\mathcal{M}_0$ pour élément, que $\hat{\mathcal{M}}$ est la catégorie pleine d'applications associée à $\hat{\mathcal{M}}_0$ et que $P = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{P}, \hat{\mathcal{H}})$ est un foncteur d'homomorphismes saturé, admettant p pour restriction à la sous-catégorie $\mathcal{H} = \overline{\underline{P}}^{1}(\mathcal{M}) \in \overline{\mathcal{M}}_0$ de $\hat{\mathcal{H}}$, où $\overline{\mathcal{M}}$ est la saturante de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$. L'ordinal inaccessible associé à $\mathcal{M}_0$ (borne supérieure des ordinaux des éléments de $\mathcal{M}_0$) est noté Λ. Soit ζ un ordinal sans prédécesseur tel que $\zeta < \Lambda$.

Théorème. — *Supposons que* P *soit* ζ-$\ulcorner$- *engendrant pour* $\mathcal{M}$(²); *alors* $y'(P)$ *est un foncteur* $\ulcorner$- *engendrant pour* $(\mathcal{M}, X, \mathcal{S}'(p))$, *où* X *est la classe des* $Q \in \mathcal{S}'(P)$ *tels que* F_1 *et* F_2 *soient des* P-*monomorphismes.*

La construction de la $(\mathrm{X}, \mathcal{S}'(p))$-sous-structure de $(\hat{q}, \hat{q}') \in \mathcal{S}'(\mathrm{P})_0$ engendrée par une partie M telle que

$$\mathrm{M} \in \overline{\mathcal{M}}_0 \quad \text{et} \quad \mathrm{M} \subset y(\mathrm{P})\,(\hat{q}, \hat{q}')$$

se fait par récurrence transfinie, par un procédé analogue à celui utilisé 1+
dans [2].

Théorème. — *Supposons que* P *soit à $\hat{\mathcal{M}}_0$-limites projectives et ζ-$\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$. Alors $\mathcal{S}(p)$ est une catégorie à $\mathcal{S}'(p)$-projections. Une $(\mathcal{S}'(p), \mathcal{S}(p))$-projection de $(\hat{q}, \hat{q}') \in \mathcal{S}(p)_0$ est de la forme $(\hat{q}_1, \hat{q}'_1)$, avec*

$$\beta(\hat{q}) = \beta(\hat{q}_1) \quad \textit{et} \quad \beta(\hat{q}') = \beta(\hat{q}'_1).$$ 2+

Définition. — Une $(\mathcal{S}'(p), \mathcal{S}(p))$-projection de $(\hat{q}, \hat{q}') \in \mathcal{S}(p)_0$ sera appelée *expansion p-structurée de* $(\hat{q}, \hat{q}')$.

Cas particulier. — Si $\hat{q} = \hat{q}'$ est le néofoncteur p-structuré $q(\hat{\eta})$ associé [2] 3
à un p-système de structures $\hat{\eta}$, alors $(\hat{q}', \hat{q}')$ admet pour expansion p-structurée $(q(\hat{\eta}'), q(\hat{\eta}'))$, où $q(\hat{\eta}')$ est le néofoncteur d'hypermorphismes 3
p-structuré associé au quasi-élargissement maximal [2] $\hat{\eta}'$ de $\hat{\eta}$.

3. Construction d'une expansion p-structurée. — Nous supposons maintenant que p est à produits finis et que $(\hat{q}, \hat{q}')$, où

$$\hat{q} = ((\mathrm{C}^\cdot, s), q, (\overline{\mathrm{C}}^\cdot, s)) \quad \text{et} \quad \hat{q}' = ((\mathrm{K}^\cdot, s'), q', (\overline{\mathrm{K}}^\cdot, \bar{s}'))$$

est un élément de $\mathcal{S}(p)_0$. Nous posons

$$\bar{q} = \tilde{p}(\hat{q}) \quad \text{et} \quad \mathrm{F} = \mathrm{K}.\bar{q}(\overline{\mathrm{K}}^\cdot_0).$$

Il existe un p-sous-morphisme q'' de q tel que

$$(\hat{q}, \hat{q}'') \in \mathcal{S}(p)_0, \quad \text{où} \quad \hat{q}'' = ((\overline{\mathrm{K}}^\cdot, s'), q'', (\overline{\mathrm{K}}^\cdot_0, \bar{s}_0)).$$ 4

Soit $\mathrm{H}^\cdot$ la catégorie $\boxminus(\mathrm{F}, \bar{q})$ dont les éléments [2] sont les quadruplets (k', f', f, h) vérifiant les conditions

$$f \in \mathrm{F}, \quad f' \in \mathrm{F}, \quad h \in \overline{\mathrm{C}} \quad \text{et} \quad (k', f', f, \bar{q}(h)) \in \square\mathrm{C}^\cdot,$$

la loi de composition étant

$$(k'_1, f'_1, f_1, h_1) \boxminus (k', f', f, h) = (k'_1.k', f'_1, f, h_1.h)$$

si, et seulement si, $f_1 = f'$ et $\alpha(h_1) = \beta(h)$. Soit $\overline{\mathrm{C}}^\cdot_1$ la sous-catégorie de $\mathrm{H}^\cdot$ formée des éléments

$$h = (\bar{q}(h), e', e, h), \quad \text{où} \quad e = \bar{q}(\alpha(h)) \quad \text{et} \quad e' = \bar{q}(\beta(h)).$$

Soit $\overline{\mathrm{K}}^\cdot_1$ la sous-catégorie de $\mathrm{H}^\cdot$ engendrée par la classe des éléments 5¶

$$(f, f, e, \bar{e}) \in \mathrm{H}, \quad \text{où} \quad \bar{e} \in \overline{\mathrm{K}}^\cdot_0 \quad \text{et} \quad e = \bar{q}(\bar{e}).$$

Soit $\bar{q}_1$ le foncteur de $\mathrm{H}^\cdot$ vers $\mathrm{C}^\cdot$ qui associe k' à (k', f', f, h). On a $\bar{q}_1(\overline{\mathrm{K}}_1) = \mathrm{K}$. Soit r la relation d'équivalence sur H engendrée par la classe des couples $(\bar{h}, \bar{f})$ tels que

$$\bar{h} = (\bar{q}(h), e', e, h) \in \overline{\mathrm{C}}_1 \qquad \text{et} \qquad \bar{f} = (\bar{q}(h), \bar{q}(h), e, \alpha(h)) \in \overline{\mathrm{K}}_1.$$

Soit $\mathcal{S}''$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}(p)$ ayant pour unités les $m = (\hat{t}, t')$ pour lesquels

$$\beta(\hat{t}) = (\mathrm{C}^{\bullet}, s) \qquad \text{et} \qquad \beta(\hat{t}') = (\mathrm{K}^{\bullet}, s').$$

Soit $z(p)$ le foncteur de $\mathcal{S}''$ vers $\mathcal{M}$ défini par la surjection

$$\mathrm{Q} = (m_2, \hat{\mathrm{F}}_2, \hat{\mathrm{F}}_1, m_1) \rightarrow p(\mathrm{F}_1).$$

THÉORÈME D'EXPANSION. — *Supposons que* P *soit* ζ-$\ulcorner$-*engendrant pour* $\mathcal{M}$ *et à* $\hat{\mathcal{M}}_0$-*produits et que p soit résolvant à droite. Alors* $(\hat{q}, \hat{q}'')$ *admet une expansion p-structurée* $(\hat{q}_1, \hat{q}'_1)$ *telle que* $\tilde{p}(\hat{q}_1) = \bar{q}_1$ *et* $\alpha(\hat{q}'_1) = (\overline{\mathrm{K}}^{\bullet}_1, \bar{s}'_1)$.
2+ *De plus,* $(\hat{q}, \hat{q}')$ *admet pour expansion p-structurée une* $z(p)$-*structure quasi-*
3+ *quotient* (3) *de* $(\hat{q}_1, \hat{q}'_1)$ *par r.*

Supposons que, avec les notations précédentes, $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{K}})$ soit un couple $\bar{q}$-distingué régulier [chap. V (1)] et que $\hat{q}' \in \mathcal{N}'_b(p)$.

THÉORÈME. — *Soit p un foncteur* $\ulcorner$-*étalant* (3). *Si* $(\mathrm{F}, \mathrm{F}, \overline{\mathrm{C}}, \bar{q}_2)$ *est une expansion* (1) *de* $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{K}}, \bar{q})$, *alors* $(\hat{q}, \hat{q}')$ *admet une expansion p-structurée*
4 $(\hat{q}_2, \hat{q}'_2)$ *telle que, si p est à section minimale,*

5+ $$\tilde{p}(\hat{q}_2) = \bar{q}_2 \qquad \text{et} \qquad \hat{q}'_2 = ((\mathrm{K}^{\bullet}, s'), q_2, ((\overline{\mathrm{K}}^{\bullet}_2, \bar{s}'_2)), \qquad \text{où} \quad \overline{\mathrm{K}}_2 = \overline{\mathrm{F}} \cup \beta(\mathrm{F}).$$

Exemple. — Si p est le foncteur identique de $\mathcal{M}$, on a $\hat{q} = \bar{q}$ et le théorème précédent prouve que les expansions $(\mathcal{M}, \iota, \mathcal{M})$-structurées de $(\hat{q}, \hat{q}')$ correspondent biunivoquement aux expansions de $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{K}}, \bar{q})$, ce qui justifie la terminologie. Dans un prochain article, nous montrerons que le théorème d'expansion de (1) peut aussi être généralisé d'une autre façon, à l'aide de la notion d'expansion d'une catégorie p-structurée.

Remarque. — Si p n'est pas $\ulcorner$-étalant, une expansion p-structurée $(\hat{q}_2, \hat{q}'_2)$ de $(\hat{q}, \hat{q}')$ n'est généralement pas de la forme indiquée dans le théorème précédent. Des conditions suffisantes pour qu'elle soit de cette forme ont été obtenues pour certains foncteurs p : dans (4), lorsque $\mathcal{H}$ est une sous-catégorie de la catégorie Ω des applications entre classes ordonnées et que K est formé d'inversibles; dans (5), lorsque $p = p_{\mathcal{F}}$.

(*) Séance du 28 novembre 1966.

(1) *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

(2) *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 655 et 762.

(3) *Structures quasi-quotient* (à l'impression dans *Math. Ann.*, et multigraphié, Paris, 1965, 93 pages).

(4) JOUBERT, *Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle*, 8, 1966, 116 pages.

(5) S. LEGRAND (à paraître).

(*Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e.*)

173725. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 5-8 (4 janvier 1967). Série A

/95/

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Deuxième théorème d'expansion structurée.* Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Quasi-expansion et quasi-expansion régulière d'une catégorie structurée. Théorème de quasi-expansion d'un foncteur structuré expansif. Ces résultats généralisent les théorèmes d'expansion de [1] et font suite à deux Notes antérieures [2] dont nous reprenons la terminologie et les notations.

$p = (\mathcal{M}, p, \mathcal{H})$ sera un foncteur d'homomorphismes saturé à produits fibrés finis. Soit $\hat{p}$ le foncteur projection vers $\mathcal{M}$ de la catégorie $\mathcal{F}(p)$ des foncteurs p-structurés.

1. QUASI-EXPANSION D'UNE CATÉGORIE STRUCTURÉE. — Considérons les conditions suivantes :

(E_1) $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ est une catégorie p-structurée, $(C^{\cdot}, s)$ une sous-catégorie p-structurée de $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ et s' est une p-sous-structure de $\hat{s}$ telle que $p(s') = F$.

(E_2) On a $F.(F \cap C) \subset F$ et $\alpha(F) = C^{\cdot}_0 \subset F$.

Désignons par $\square(\hat{C}^{\cdot}; F; C)$ la classe des quatuors de $\hat{C}^{\cdot}$ de la forme

$$m = (k, f', f, h), \quad \text{où} \quad f \in F, \quad f' \in F \quad \text{et} \quad h \in C;$$

elle définit une sous-catégorie $\boxminus(\hat{C}^{\cdot}; F; C)$ de la catégorie latérale $\boxminus\hat{C}^{\cdot}$ des quatuors de $\hat{C}^{\cdot}$.

Soit $\boxbar(C^{\cdot}; F)^{\star}$ la catégorie duale de la sous-catégorie de la catégorie longitudinale $\boxbar C^{\cdot}$ des quatuors de $C^{\cdot}$ ayant pour éléments les quatuors

$$n = (h, g', g, h') \quad \text{tels que} \quad g \in F \cap C \quad \text{et} \quad g' \in F \cap C.$$

THÉORÈME. — *Il existe des p-sous-structures $\square(\hat{s}; s'; s)$ et $\square(s; s')$ de $\hat{s} \times \hat{s} \times \hat{s} \times s$, un foncteur p-structuré*

$$\hat{b} = ((\hat{C}^{\cdot}, \hat{s}), b, (\boxminus(\hat{C}^{\cdot}; F; C), \square(\hat{s}; s'; s))),$$

tel que $p(b)(m) = k$, et une p-espèce de structures [2] :

$$((\boxbar(C^{\cdot}; F)^{\star}, \square(s; s')), \square(\hat{s}; s'; s), \varkappa')$$

dont la loi de composition est

$$(n, m) \to m \boxbar n \quad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha^{\boxbar}(m) = \beta^{\boxbar}(n).$$ 1

Soit σ la relation d'équivalence sur $\square(\hat{C}^{\cdot}; F; C)$ engendrée par la classe des couples (m', m) tels qu'il existe $n \in \square(C^{\cdot}; F)$ vérifiant $m' = m \boxbar n$.

Définition. — On dira que $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ est une F-*quasi-expansion de* $(C^{\cdot}, s)$ 2+
si les conditions (E_1) et (E_2) sont satisfaites et si $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ est une $\hat{p}$-structure quasi-quotient de $(\boxminus(\hat{C}^{\cdot}; F; C), \square(\hat{s}; s'; s))$ par σ, la $\hat{p}$-quasi-surjection associée [3] étant $\hat{b}$.

2. Quasi-expansions régulières d'une catégorie structurée. — Supposons vérifiées les conditions (E_1) et (E_2) ainsi que la condition

(E_3) F est formé d'inversibles de $\hat{C}^{\cdot}$.

Soit $\sqsupset(\hat{C}^{\cdot}; F; C)$ la sous-catégorie de la catégorie des trios [1] $\sqsupset \hat{C}^{\cdot}$ de $\hat{C}^{\cdot}$ formée des trios

$$t = (f', f, h) \quad \text{tels que} \quad f' \in F, \quad f \in F \quad \text{et} \quad h \in H.$$

Théorème. — *Il existe une p-sous-structure* $\sqsupset(\hat{s}; s'; s)$ *de* $\hat{s} \times \hat{s} \times s$ *telle que*

$$\hat{x} = ((\hat{C}^{\cdot}, \hat{s}).x, (\sqsupset(\hat{C}^{\cdot}; F; C), \sqsupset(\hat{s}; s'; s))),$$

où $p(x)(t) = f'.h.f^{-1}$, *soit un foncteur p-structuré et que*

$$((\boxminus(C^{\cdot}; F)^{\star}, \square(s; s')), \sqsupset(\hat{s}; s'; s), \varkappa'')$$

soit une p-espèce de structures pour la loi de composition

1 $$\varkappa''(t, n) = (f'.g', f.g, h') \quad \textit{si, et seulement si,} \quad t = (f', f, h) \quad \text{et} \quad n = (h, g', g, h').$$

Soit ρ la relation d'équivalence sur $\sqsupset(\hat{C}^{\cdot}; F; C)$ engendrée par la classe des couples (t', t) pour lesquels il existe n vérifiant $t' = \varkappa''(n, t)$.

2 *Définition.* — On dira que $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ est une F-*quasi-expansion régulière de* $(C^{\cdot}, s)$ si les conditions (E_1), (E_2) et (E_3) sont vérifiées et si $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ est une $\hat{p}$-structure quasi-quotient de $(\sqsupset(\hat{C}^{\cdot}; F; C), \sqsupset(\hat{s}; s'; s))$ par ρ, avec $\hat{x}$ pour $\hat{p}$-quasi-surjection associée.

Cas particulier. — Supposons que p soit le foncteur identique de $\mathfrak{M}$, que $\hat{C}^{\cdot}$ soit une catégorie, $C^{\cdot}$ une sous-catégorie et $F \subset \hat{C}$. Si $\hat{C}^{\cdot}$ est une F-expansion de $C^{\cdot}$ [chap. V [1]], $\hat{C}^{\cdot}$ [identifié à $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{C})$] est aussi une F-quasi-expansion de $C^{\cdot}$. Si $F \cap C \subset C^{\cdot}_{\gamma}$ et si $F \subset R_{g}(\hat{C}^{\cdot}; \hat{C}^{\cdot}_{\gamma})$, alors $\hat{C}^{\cdot}$ est une F-quasi-expansion de $C^{\cdot}$ si, et seulement si, $\hat{C}^{\cdot}$ est une catégorie à C-éjec-
3 tions et si F est la classe des $(\hat{C}^{\cdot}, C)$-éjecteurs. $\hat{C}^{\cdot}$ est une F-quasi-expansion régulière de $C^{\cdot}$ si, et seulement si, $\hat{C}^{\cdot}$ est une F-expansion régulière [1] de $C^{\cdot}$. Ceci justifie la terminologie introduite.

3. Quasi-expansion d'un foncteur structuré expansif :

Définition. — Soit $Y = (M^{\cdot}, \underline{Y}, L^{\cdot})$ un foncteur et $e \in M^{\cdot}_0$. On dira que (s, j) est un Y-*prolongement faible* de e si $s \in L^{\cdot}_0$, $j \in Y(s).M.e$ et si, pour tout $s' \in L^{\cdot}_0$ et tout $f \in e.M.Y(s')$, il existe un et un seul $f' \in s.L.s'$ tel que $Y(f') = j.f$. On dira que $(\hat{s}, \hat{j})$ est un Y-*prolongement* de e si c'est un
4 Y-prolongement faible et si, pour tout Y-prolongement faible (s, j) de e, il existe un et un seul $h \in s.L.\hat{s}$ tel que $j = Y(h).\hat{j}$.

Définition. — On appelle *foncteur p-structuré expansif* un quadruplet $u = (F, \bar{F}, \bar{C}, \hat{q})$ ayant les propriétés suivantes :

1° $\hat{q} = ((C^\cdot, s), q, (\hat{C}^\cdot, \hat{s}))$ est un foncteur p-structuré et il existe une sous-catégorie p-structurée $(\overline{C}^\cdot, \bar{s})$ de $(\hat{C}^\cdot, \hat{s})$;

2° Il existe des p-sous-structures s' de s et $\bar{s}'$ de $\hat{s}$ telles que

$$p(\bar{s}') = \overline{F} \qquad \text{et} \qquad p(s') = F.$$

3° $\alpha(\overline{F}) = \overline{C}^\cdot_0 \subset \overline{F}$, $\overline{F}.(\overline{F} \cap \overline{C}) \subset \overline{F}$, $F.\hat{p}(\hat{q})(\overline{F}) = F$ et $\alpha(F) \subset F$.

Soit $\tilde{\mathcal{E}}(p)_0$ la classe des foncteurs p-structurés expansifs. Soit $\tilde{\mathcal{E}}(p)$ la catégorie dont les éléments sont les quadruplets (u_2, D_2, D_1, u_1) tels que

1° $u_i = (F_i, \overline{F}_i, \overline{C}_i, \hat{q}_i) \in \tilde{\mathcal{E}}(p)_0$ pour $i = 1$ et 2;

2° $(\hat{q}_2, D_2, D_1, \hat{q}_1) \in \square\mathcal{F}(p)$;

3° $\hat{p}(D_1)(\overline{F}_1) \subset \overline{F}_2$, $\hat{p}(D_2)(F_1) \subset F_2$ et $\hat{p}(D_1)(\overline{C}_1) \subset \overline{C}_2$;

la loi de composition étant

$$((u_4, D_4, D_3, u_3), (u_2, D_2, D_1, u_1)) \rightarrow (u_4, D_4 . D_2, D_3 . D_1, u_1)$$

si, et seulement si, $u_2 = u_3$; nous identifions $\tilde{\mathcal{E}}(p)_0$ à la classe des unités de $\tilde{\mathcal{E}}(p)$.

Soit $\mathcal{E}(p)_0$ la sous-classe de $\tilde{\mathcal{E}}(p)_0$ formée des $u \in \tilde{\mathcal{E}}(p)_0$ tels que $\hat{C} = \overline{C}$ et soit $\mathcal{E}'(p)_0$ la sous-classe de $\tilde{\mathcal{E}}(p)$ formée des $u \in \tilde{\mathcal{E}}(p)_0$ tels que $(\hat{C}^\cdot, \hat{s})$ soit une $\overline{F}$-quasi-expansion de $(\overline{C}^\cdot, \bar{s})$ et que $\hat{p}(\hat{q})(\overline{F}) = F$. Soit $\mathcal{E}'(p)$ la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{E}}(p)$ admettant $\mathcal{E}'(p)_0$ pour classe de ses unités. Soit Z le foncteur de $\mathcal{E}'(p)$ vers $\tilde{\mathcal{E}}(p)$ défini par

$$Z(u_2, D_2, D_1, u_1) = (Z(u_2), D_2, D'_1, Z(u_1)),$$

où D'_1 est un $\hat{p}$-sous-morphisme de D_1 et où

$$Z(u_i) = (F_i, \overline{F}_i \cap \overline{C}_i, \overline{C}_i, \hat{q}'_i),$$

en désignant par $\hat{q}'_i$ un $\hat{p}$-sous-morphisme de $\hat{q}_i$ tel que $\hat{p}(\hat{q}'_i)$ soit la restriction de $\hat{p}(\hat{q}_i)$ à $\overline{C}_i$, pour $i = 1$ et 2.

Nous supposons désormais que p est la restriction à $\mathcal{H} = \underline{\overline{P}}(\mathcal{M}) \in \overline{\mathcal{M}}_0$ d'un foncteur d'homomorphismes saturé $P = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{P}, \hat{\mathcal{H}})$ à $\hat{\mathcal{M}}_0$-produits.

Théorème de quasi-expansion. — *Supposons que* P *soit* ζ-$\sqcap$-*engendrant pour* $\mathcal{M}$ (²), *où* $\zeta < \Lambda$, *et soit* $u = (F, \overline{F}, \overline{C}, \hat{q}) \in \mathcal{E}(p)_0$. *Alors* u *admet un* Z-*prolongement* (v, J) *tel que* $J = (Z(v), \beta(\hat{q}), D_1, u)$. *Pour que* u *admette une* Z-*structure colibre* v', *il faut et il suffit que* J *soit inversible*; *dans ce cas*, v' *est isomorphe à* v *dans* $\mathcal{E}'(p)$. 1¶

En effet, soit $\bar{q}$ le foncteur sous-jacent à $\hat{q}$. A u est associé un

$$u_1 = (F, \overline{F}_1, \overline{C}_1, \hat{q}_1) \in \mathcal{E}'(p)_0$$

dans lequel $\alpha(\hat{q}_1) = (\boxminus(F, \bar{q}), \hat{s}_1)$, où $\hat{s}_1$ est une p-sous-structure de $s \times s' \times s' \times \hat{s}$ et où $\boxminus(F, \bar{q})$ est construite comme indiqué dans (²). Il existe une $\hat{p}$-structure quasi-quotient $(\hat{K}^{\cdot}, \hat{\sigma})$ de $\alpha(\hat{q}_1)$ par la relation d'équivalence r engendrée sur $\boxminus(F, \overline{q})$ par la classe des couples

$$((k, f', f, h), (k, f'.q(g'), f.q(g), h'))$$

tels que $(h, g', g, h') \in \square\square(\overline{C}^{\cdot}; \overline{F})$. Par récurrence transfinie, on construit des p-sous-structures σ et σ' de $\hat{\sigma}$, et l'on montre qu'on a

$$\nu = (F, p(\sigma'), p(\sigma), \tilde{q}) \quad \text{où} \quad \alpha(\tilde{q}) = (\hat{K}^{\cdot}, \hat{s}).$$

Définition. — Si (ν, J) est un Z-prolongement de $u \in \mathcal{E}(p)_0$, on dira que ν est une *quasi-expansion du foncteur p-structuré expansif u.*

1¶ COROLLAIRE. — *Soit p un foncteur $\ulcorner$-étalant à section maximale* ([3]). *Supposons que* $u = (F, \overline{F}, \overline{C}, \hat{q}) \in \mathcal{E}(p)_0$, *que* $(F, \overline{F})$ *soit un couple $\overline{q}$-distingué régulier* ([1]) *et que* $(C^{\cdot}, \overline{q}^{\cdot}, \overline{F}^{\cdot})$ *soit bien fidèle. Alors u admet une quasi-expansion* $\nu = (F, \tilde{F}, K, \tilde{q})$ *ayant la propriété* : $(F, \tilde{F}, K, \overline{q}')$ *est une expansion* ([1]) *de* $(F, \overline{F}, \overline{q})$, *où q' est le foncteur sous-jacent à $\tilde{q}$.*

Cas particulier. — Supposons que p soit le foncteur identique de $\mathcal{M}$. Si $(F, \overline{F}, \overline{q})$ admet une expansion ν' et si $F = \overline{F}^{\overline{q}}$ [au sens de ([1])], $u = (F, \overline{F}, \alpha(\overline{q}), q)$ est un foncteur expansif et ν' fournit une solution aux trois problèmes « universels » : de l'expansion (existence d'une Z-structure colibre engendrée par u); de l'expansion $(\mathcal{M}, \iota, \mathcal{M})$-structurée [existence d'une $(\mathcal{S}'(p), \mathcal{S}(p))$-projection ([2])]; de la quasi-expansion (existence d'un Z-prolongement de u). Plus généralement, tout foncteur expansif $u = (F, \overline{F}, \alpha(\overline{q}), \overline{q})$ admet une quasi-expansion ν et, si u engendre une
2¶ Z-structure colibre (ce qui peut arriver même si l'expansion de $(F, \overline{F}, \overline{q})$ n'est pas définie), elle est isomorphe à ν. Mais le foncteur Z n'admet pas d'adjoint à droite. Ainsi le théorème de quasi-expansion est une généralisation directe du théorème d'expansion [théorème 8, chap. V ([1])], alors que le premier théorème d'expansion [plongement dans un foncteur avec hypermorphismes ([2])] généralise le théorème 17 [chap. V ([1])].

(*) Séance du 19 décembre 1966.
([1]) *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
([2]) *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 762 et 863.
([3]) *Comptes rendus*, 261, série A, 1965, p. 1577; développé dans *Structures quasi-quotient*, à l'impression dans *Math. Ann.* et multigraphié, Paris, 1965, 93 pages.

(*Institut Henri Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie, Paris*, 5e.)

174004. — Imp. GAUTHIER-VILLARS. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264, p. 56-59 (9 janvier 1967). **Série A**

/96/

ALGÈBRE DES CATÉGORIES. — *Théorème de quasi-expansion régulière.*
Note (*) de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. René Garnier.

Cette Note fait suite à quatre Notes antérieures dont nous reprenons la terminologie ([1]). Théorème de quasi-expansion régulière généralisant au cas des néofoncteurs structurés le théorème d'expansion régulière de ([2]). Ce théorème permet de résoudre le problème « universel » du perfectionnement d'une catégorie structurée.

Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, \mathcal{H})$ un foncteur d'homomorphismes saturé à $\mathcal{M}_0$-produits fibrés. Nous désignons par $\mathcal{N}'(p)$ la catégorie des néofoncteurs p-structurés ([1]), par $\tilde{p}'$ son foncteur projection vers $\mathcal{N}'$; par $\mathcal{F}(p)$ la catégorie des foncteurs p-structurés et par $\hat{p}$ son foncteur projection vers $\mathcal{M}$. Si $s \in \mathcal{H}_0$ et si s' est une p-sous-structure de s, nous posons $s' = s \mid p(s')$. Soit $\hat{p}_1$ la restriction de $\hat{p}$ à la sous-catégorie pleine $\mathcal{F}_1(p)$ de $\mathcal{F}(p)$ dont les unités sont les $(C^\cdot, s) \in \mathcal{F}(p)_0$ tels que $(C^\cdot_\gamma, s \mid C^\cdot_\gamma)$ soit un groupoïde p-structuré ([3]). Dans cette Note [ainsi que dans (I)] $(K^\cdot, s')$ est appelé sous-catégorie p-structurée de $(C^\cdot, s) \in \mathcal{F}(p)_0$ si $K^\cdot$ est une sous-catégorie de $C^\cdot$ et $s' = s \mid K$; alors $(K^\cdot, s') \in \mathcal{F}(p)_0$.

1. Néofoncteurs structurés expansifs.

Définition. — On appelle *néofoncteur p-structuré expansif* un quadruplet

$$u = (F, \bar{F}, \bar{C}, \hat{q}), \qquad \text{où} \quad \hat{q} = ((C^\cdot, s), q, (\hat{C}^\cdot, \hat{s})) \in \mathcal{N}'(p),$$

vérifiant les conditions obtenues en remplaçant partout foncteur par néofoncteur dans la définition d'un foncteur p-structuré expansif ([1]).

Désignons par $\tilde{\mathcal{R}}(p)_0$ la classe des néofoncteurs p-structurés expansifs. Soit $\tilde{\mathcal{R}}(p)$ la catégorie définie à partir de $\tilde{\mathcal{R}}(p)_0$ de la même façon que $\tilde{\mathcal{E}}(p)$ a été définie à partir de $\tilde{\mathcal{E}}(p)_0$; ses éléments sont donc certains quadruplets (u_2, D_2, D_1, u_1) dans lesquels

$$u_i \in \tilde{\mathcal{R}}(p)_0 \qquad \text{et} \qquad (\hat{q}_2, D_2, D_1, \hat{q}_1) \in \square\, \mathcal{N}'(p).$$

Soit $\mathcal{R}(p)$ la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{R}}(p)$ ayant pour objets les $(F, \bar{F}, \bar{C}, \hat{q}) \in \tilde{\mathcal{R}}(p)_0$ tels que $\alpha(\hat{q}) = (\bar{C}^\cdot, \hat{s}) \in \mathcal{F}_1(p)_0$.

Soit $\mathcal{R}'(p)_0$ la classe des triplets $\nu = ((\tilde{C}^\cdot, \tilde{s}), h, u)$ vérifiant les conditions suivantes :

1° $(\tilde{C}^\cdot, \tilde{s}) \in \mathcal{F}_1(p)_0$, $u = (F, \bar{F}, \bar{C}, \hat{q}) \in \mathcal{R}(p)_0$ et $\hat{q} = ((C^\cdot, s), q, (\bar{C}^\cdot, \tilde{s} \mid \bar{C}))$;

2° $p(h) = (F, \underline{h}, \tilde{F})$ est une surjection et $h \in (s \mid F) . \mathcal{H} . (\tilde{s} \mid \tilde{F})$;

3° $(\tilde{C}^\cdot, \tilde{s})$ est une $\tilde{F}$-quasi-expansion régulière ([1]) de $(\bar{C}^\cdot, \tilde{s} \mid \bar{C})$. On a $\bar{F} = \tilde{F} \cap \bar{C}$.

4° En posant $G = \tilde{F} \cup \beta(\tilde{F}) \cup \bar{C}$, il existe un néofoncteur $\bar{q}_\nu$ de $G^\cdot$ vers $C^\cdot$ admettant $\tilde{p}'(\hat{q})$ et $p(h)$ pour restrictions.

Soit $\mathcal{R}'(p)$ la classe formée des quadruplets

$$\mu = (v_2, d_2, d_1, v_1)$$

ayant les propriétés suivantes :

1° $v_i = ((\tilde{C}^\cdot_i, \tilde{s}_i), h_i, u_i) \in \mathcal{R}'(p)_0$ pour $i = 1$ et 2;
2° $(\bar{q}_{v_2}, d_2, d_1, \bar{q}_{v_1}) \in \square \mathcal{N}'$;
3° Il existe $Y(\mu) = (u_2, D_2, D_1, u_1) \in \mathcal{R}(p)$ tel que $\tilde{p}'(D_1)$ soit une restriction de d_1 et $\tilde{p}'(D_2) = d_2$;

4° Il existe $g_1 \in \alpha(h_2).\mathcal{K}.\alpha(h_1)$ tel que $p(g_1)$ soit une restriction de $p_{\mathcal{N}'}(d_1)$.

$\mathcal{R}'(p)$ est une catégorie pour la loi de composition

$$((v'_2, d'_2, d'_1, v'_1), (v_2, d_2, d_1, v_1)) \to (v'_2, d'_2 . d_2, d'_1 . d_1, v_1)$$

si, et seulement si, $d_2 = d'_1$.

Proposition. — *Si $\mu \in \mathcal{R}'(p)$, il existe un unique*

1 $$D(\mu) \in (\tilde{C}^\cdot_2, \tilde{s}_2).\mathcal{F}(p).(\tilde{C}^\cdot_1, \tilde{s}_1)$$

tel que $\tilde{p}'(D(\mu))$ admette d_1 pour restriction. Les surjections $\mu \to D(\mu)$ et $\mu \to Y(\mu)$ définissent des foncteurs D et Y de $\mathcal{R}'(p)$ vers $\mathcal{F}(p)$ et vers $\mathcal{R}(p)$ respectivement.

2. Quasi-expansions régulières.

Théorème. — *Si $u^0 = (F, \bar{C}^\cdot_0, \bar{C}, \hat{q}) \in \mathcal{R}(p)_0$, alors u^0 admet un Y-pro-*
2¶ *longement* (1) *$v(u^0) = (J_{u^0}, v_{u^0})$ tel que J_{u^0} soit inversible.*

En effet, posons

$$\hat{q} = ((C^\cdot, s), q, (C^\cdot, \bar{s})) \quad \text{et} \quad \bar{q} = \tilde{p}'(\hat{q}).$$

Désignons par $\sqsupset(F, \bar{q})$ la sous-catégorie (2) du graphe multiplicatif $(\sqsupset C^\cdot) \times \bar{C}^\cdot$, où $\sqsupset C^\cdot$ est le graphe multiplicatif des trios (2) de $C^\cdot$, ayant pour éléments les couples (t, k) tels que

$$k \in \bar{C}, \quad t = (f', f, \bar{q}(k)) \in \sqsupset C^\cdot, \quad f \in F, \quad f' \in F.$$

3 Il existe une catégorie p-structurée $\sqsupset(s, \bar{s}) = (\sqsupset(F, \bar{q}), \sigma)$, où σ est isomorphe dans $\mathcal{H}$ à une p-sous-structure de $s \times s \times s \times \bar{s}$. Soit $\bar{F}_1$ la classe des couples (t, e) tels que

$$e \in \bar{C}^\cdot_0, \quad t = (f, \bar{q}(e), \bar{q}(e)), \quad f \in F.\bar{q}(e),$$

et $\bar{C}_1$ la classe des couples $(\hat{q}'_1(k), k)$, où

$$k \in \bar{C} \quad \text{et} \quad \hat{q}'_1(k) = (\bar{q}(\beta(k)), \bar{q}(\alpha(k)), \bar{q}(k)).$$

On montre que $\sqsupset(s, \bar{s})$ est une $\overline{\mathrm{F}}_1$-quasi-expansion régulière de $(\overline{\mathrm{C}}^{\cdot}_1, \sigma | \overline{\mathrm{C}}_1)$ 1¶
et que

$$v_{u^0} = (\sqsupset(s, \bar{s}),\ h^0,\ u_1),$$

où

$$u_1 = (\mathrm{F},\ (\mathrm{C}_1)^{\cdot}_0,\ \bar{\mathrm{C}}_1,\ \hat{q}_1) \qquad \text{et} \qquad p(h^0) = (\mathrm{F},\ \underline{h}^0,\ \bar{\mathrm{F}}_1).$$

Nous supposons dans la fin de cette Note que $\mathrm{P} = (\widehat{\mathcal{M}}, \underline{\mathrm{P}}, \hat{\mathcal{H}})$ est un foncteur d'homomorphismes saturé à $\widehat{\mathcal{M}}_0$-produits fibrés et que p est la restriction de P à $\mathcal{H} = \overset{-1}{\underline{\mathrm{P}}}(\mathcal{M}) \in \overline{\mathcal{M}}_0$. Soit Λ l'ordinal inaccessible associé à l'univers $\mathcal{M}_0$ et soit $\zeta < \Lambda$ un ordinal sans prédécesseur.

Théorème. — *Supposons que* P *soit* ζ-$\ulcorner$-*engendrant* (1) *pour* $\mathcal{M}$. *Si* $(\mathrm{H}^{\cdot}, \mathrm{S}) \in \mathcal{F}_1(p)_0$, *et si* r *est une relation d'équivalence sur* H, *il existe une* $\hat{p}_1$-*structure quasi-quotient de* $(\mathrm{H}^{\cdot}, \mathrm{S})$ *par* r.

On montre d'abord, en utilisant un raisonnement par récurrence trans- 2
finie, que le foncteur $\hat{\mathrm{P}}_1$ de $\hat{\mathcal{F}}_1(\mathrm{P})$ vers $\widehat{\mathcal{M}}$ est $(\mathcal{M}, \mathrm{B}, \mathcal{F}_1(p))$-engendrant, B étant la classe des $\mathrm{N} = (c_2, n, c_1) \in \hat{\mathcal{F}}_1(\mathrm{P})$ tels que n soit un P-monomorphisme. Le théorème résulte du théorème d'existence de structures quasi-quotient (4).

Théorème de quasi-expansion régulière. — *Supposons que* P *soit* ζ-$\ulcorner$-*engendrant pour* $\mathcal{M}$ *et que*

$$u = (\mathrm{F}, \bar{\mathrm{F}}, \bar{\mathrm{C}}, \hat{q}) \in \mathcal{R}(p)_0.$$

On a $u^0 = (\mathrm{F}, \overline{\mathrm{C}}^{\cdot}_0, \overline{\mathrm{C}}, \hat{q}) \in \mathcal{R}(p)$ *et* u *admet un* Y-*prolongement* $v(u) = (v_u, \mathrm{J}_u)$
tel que $\mathrm{D}(v_u)$ *soit une* $\hat{p}_1$-*structure quasi-quotient* $(\hat{\mathrm{K}}^{\cdot}, \hat{\sigma})$ *de* $\mathrm{D}(v_{u^0})$. 3¶

En effet, soit r la relation d'équivalence sur $\sqsupset(\mathrm{F}, \bar{q})$ engendrée par la classe des couples

$$((f', f, k),\ (f' \cdot \bar{q}(g'),\ f \cdot \bar{q}(g),\ k')),$$

où $(k, g', g, k') \in \square(\overline{\mathrm{C}}^{\cdot}; \overline{\mathrm{F}})$. Il existe une $\hat{p}_1$-structure quasi-quotient $(\hat{\mathrm{K}}, \hat{\sigma})$ de $\sqsupset(s, \bar{s})$ par r. Par récurrence transfinie, on construit des p-sous-structures σ' et σ'' de $\hat{\sigma}$ et l'on montre qu'on a

$$v_u = ((\hat{\mathrm{K}}^{\cdot}, \hat{\sigma}),\ h,\ u_2), \qquad \alpha(h) = \sigma'$$

et

$$u_2 = (\mathrm{F}',\ \bar{\mathrm{F}}_2,\ \bar{\mathrm{C}}_2,\ \hat{q}_2), \qquad \text{où} \quad \bar{\mathrm{C}}_2 = p(\sigma'').$$

Corollaire. — *Soient* p *un foncteur* $\ulcorner$-*étalant à section maximale* (4) *et* 4¶
$u = (\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}}, \overline{\mathrm{C}}, \hat{q}) \in \mathcal{R}(p)_0$. *Supposons que* $(\mathrm{F}, \overline{\mathrm{F}})$ *soit un couple* $\bar{q}$-*distingué régulier* (2), *où* $\bar{q} = \tilde{p}'(\hat{q})$, *que* $(\mathrm{C}^{\cdot}, \underline{\bar{q}}^{\iota}, \overline{\mathrm{F}}^{\cdot})$ *soit bien fidèle et que* $(\mathrm{F}, \tilde{\mathrm{F}}, \overline{\mathrm{C}}, \bar{q}', \hat{\mathrm{K}}^{\cdot})$

soit une expansion régulière [chap. V [2]] *de* $(F, \overline{F}, \overline{q})$. *Alors* u *admet un* Y-*prolongement* $(((\hat{K}^{\cdot}, \hat{\sigma}), h, u_2), J_u)$, *où*

$$u_2 = (F, \tilde{F} \cap \overline{C}, \overline{C}, \hat{q}_2) \quad \text{et} \quad \alpha(h) = \hat{\sigma} \mid \tilde{F},$$

$\tilde{p}'(\hat{q}_2)$ *étant une restriction de* $\overline{q}'$.

Définition. — Si (v, J) est un Y-prolongement de $u \in \mathcal{R}(p)_0$, on dira que v est une *quasi-expansion régulière* du néofoncteur p-structuré expansif u.

Théorème. — *Supposons que* P *soit* ζ-$\sqcap$-*engendrant pour* $\mathcal{M}$ *et que*
1¶ $u \in \mathcal{R}(p)_0$. *Pour que* u *engendre une* Y-*structure colibre* v', *il faut et il suffit que* u *admette un* Y-*prolongement* (v, J) *tel que* J *soit inversible; dans ce cas,* v' *est aussi une quasi-expansion régulière de* u.

Cas particulier. — Supposons que p soit le foncteur identique de $\mathcal{M}$ et que $u = (F, \overline{F}, \overline{C}, \overline{q}) \in \mathcal{R}(p)_0$. Si l'expansion régulière de $(F, \overline{F}, \overline{q})$ est définie au sens de [2], elle correspond biunivoquement à une quasi-expansion régulière de $(F, \overline{F}, \overline{q})$. Si $F = \overline{F}^{\overline{q}}$ [notation chap. V [2]], l'expansion régulière de $(F, \overline{F}, \overline{q})$ est donc solution des deux problèmes universels : de l'expansion régulière (existence d'une Z-structure colibre engendrée par u) et de la quasi-expansion (existence d'un Y-prolongement de u). Ce deuxième problème est naturellement plus général.

Application au perfectionnement. — Soit $u = (F, F \cap \overline{C}, \overline{C}, \hat{q}) \in \mathcal{R}(p)_0$ tel
2 que $\hat{p}(\hat{q})$ soit l'injection canonique de $\overline{C}$ dans C. Alors u admet un Y-prolongement (v, J). Nous dirons que $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{s}) = D(v)$ est un $(\beta(\hat{q}), F)$-*quasi perfectionnement de* $\alpha(\hat{q})$ [resp. un F-*perfectionnement de* $(\overline{C}^{\cdot}, \overline{s})$ si $(\overline{C}^{\cdot}, \overline{s}) = \hat{q}$ et si J est inversible]. Si P est le foncteur identique de $\mathcal{M}$, un $(C^{\cdot}, R(C^{\cdot}))$-quasi-perfectionnement $\tilde{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ est un $R(C^{\cdot})$-perfectionnement de $C^{\cdot}$ si, et seulement si, $C^{\cdot}$ vérifie la condition (P) du chapitre V [2]; dans ce cas, $\tilde{C}^{\cdot}$ est un perfectionnement [2] de $C^{\cdot}$.

(*) Séance du 4 janvier 1967.
(1) *Comptes rendus*, 263, série A, 1966, p. 655, 762, 863 et 264, série A, 1967, p. 5.
3 (2) *Catégorie et structures*, Dunod, Paris 1965.
(3) *Ann. Ec. Norm. Sup.*, 80, 1963, p. 349-426.
(4) *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 1577, développé dans *Structures quasi-quotient* à l'impression dans *Math. Ann.*, multigraphié, Paris, 1965, 93 pages.

(*Institut Henri Poincaré,*
11, *rue Pierre-Curie, Paris,* 5e.)

174069. — Imp. Gauthier-Villars. — 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE VOL. VI
Séminaire dirigé par C. EHRESMANN
MARS 1964

/77/

CATEGORIES ET STRUCTURES : Extraits

par Charles EHRESMANN

Le texte suivant est formé d'extraits des chapitres 2 et 3 d'un livre provisoirement polycopié sur les catégories et les structures qui développe un cours donné à 1
l'Institut Henri Poincaré (1963-64). Comme ce livre ne paraîtra pas avant plusieurs mois, nous en indiquons ici, afin de pouvoir ultérieurement nous y référer, un certain nombre de définitions et résultats. Ce travail est un complément aux articles [1], [2] et [3] dont nous reprenons la plupart des notations.

1. Espèces de structures dominées. 2

Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie pleine d'applications et soit $\mathcal{F}$ la catégorie de tous les foncteurs $(\overline{C}^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot})$ tels que $(\overline{C}, \Phi, C) \in \mathfrak{M}$; soit $(\mathfrak{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ le foncteur canonique défini par $p_{\mathcal{F}} : (\overline{C}^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot}) \to (\overline{C}, \Phi, C)$.

Si $C^{\cdot}$ est une catégorie et si une sous-catégorie $C^{\cdot}_1$ de $C^{\cdot}$ est une catégorie d'opérateurs sur une classe S_o relativement à la loi de composition κ', le triplet $(C^{\cdot}, S_o, \kappa')$ définit une espèce de structures (au-dessus de $C^{\cdot}$); si $C^{\cdot}_1 = C^{\cdot}$, nous écrirons aussi $[C^{\cdot}, S_o, \kappa']$ au lieu de $(C^{\cdot}, S_o, \kappa')$. Nous désignerons par $C^{\cdot} * S_o$ la classe des couples $(f, z) \in C \times S_o$ tels que $\kappa'(f, z)$ soit défini et nous poserons $\kappa'(f, z) = fz$. La catégorie des hypermorphismes associée à $(C^{\cdot}, S_o, \kappa')$ sera notée $(C^{\cdot} * S_o)^{\cdot}$. Soit $\tilde{f}$ l'application définie, lorsque $f \in C_1$, par : $z \to fz$, où $(f, z) \in C^{\cdot} * S_o$. Soit $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})_o$ la classe des espèces de structures $\eta = (C^{\cdot}, S_o, \kappa')$ telles que $C^{\cdot} \in \mathcal{F}_o$ et $S_o \in \mathfrak{M}_o$; soit $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ la catégorie des applications covariantes $(\overline{\eta}, (\Phi, \varphi_o), \eta)$ pour lesquelles $\eta \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M})_o$ et $\overline{\eta} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M})_o$; soit p l'application :

$$((\overline{C}^{\cdot}, \overline{S}_o, \overline{\kappa}'), (\Phi, \varphi_o), (C^{\cdot}, S_o, \kappa')) \to (\overline{S}_o, \varphi_o, S_o)$$

de $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ dans $\mathfrak{M}$, qui définit un foncteur $(\mathfrak{M}, p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$.

DEFINITION. *Soit* $\overline{\lambda} = (\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{L}) \in \mathcal{F}$. *On dit que* $(C^{\cdot}, F)$ *est* un couple dominant
1 dans $(\lambda, \mathfrak{L})$ une espèce de structures, *ou que* $((C^{\cdot}, S_o, \kappa'), F)$ *est* une espèce de structures dominée dans $(\lambda, \mathfrak{L})$, *si* $\overline{F} = (\mathfrak{L}, F, C_1^{\cdot})$ *est un foncteur et si* $(C^{\cdot}, \overline{\lambda}.\overline{F})$ *est un couple définissant l'espèce de structures* $(C^{\cdot}, S_o, \kappa')$; *on appelle* $(C^{\cdot}, S_o, \kappa')$ l'espèce de structures sous $(C^{\cdot}, F)$.

Soit $\eta = (C^{\cdot}, S_o, \kappa') \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M})_o$ et soit π' l'application : $z \to e$, où $e \in C_o^{\cdot}$ et $(e, z) \in C^{\cdot} * S_o$.

PROPOSITION. *Si* $(\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{L})$ *est un foncteur fidèle,* (η, F) *est une espèce de structures dominée dans* $(\lambda, \mathfrak{L})$ *si, et seulement si,* F *est une application de* $C_1 \subset C$ *dans* $\mathfrak{L}$ *vérifiant les conditions :*

1) Si $e \in \pi'(S_o)$, *on a* $F(e) \in \mathfrak{L}_o$ *et* $\lambda(F(e)) = \overset{-1}{\pi'}(e)$.

2) Si $f \in C$ *et s'il existe* $z \in S_o$ *tel que* $\kappa'(f, z)$ *soit défini, on a:*

$$F(f) = (F(e'), \tilde{f}, F(e)), \qquad \text{où } e = \alpha(f),\ e' = \beta(f).$$

Une espèce de structures dominée dans $(p\mathcal{F}, \mathcal{F})$ est appelée une *espèce de morphismes* [1].

DEFINITION. *On dira que* $S^{\cdot}$ *est une* catégorie munie d'une catégorie d'opérateurs $C^{\cdot}$, la loi de composition étant κ', *si* $C^{\cdot}$ *est une catégorie d'opérateurs sur* S *relativement à* κ', *et si* $S^{\cdot}$ *vérifie les conditions :*

c_1) *Si* $(z', z) \in S^{\cdot} * S^{\cdot}$ *et si* $(f, z'.z) \in C^{\cdot} * S$, *on a :*

$$(f, z') \in C^{\cdot} * S,\ (f, z) \in C^{\cdot} * S \ \text{ et } \ f(z'.z) = fz'.fz.$$

c_2) *Si* $z_o \in S_o^{\cdot}$ *et si* $(f, z_o) \in C^{\cdot} * S$, *on a* $fz_o \in S_o^{\cdot}$.

Cette définition signifie [1] que $[C^{\cdot}, S, \kappa']$ est l'espèce de structures sous une espèce de morphismes (η, F) et que $S^{\cdot}$ est la catégorie somme des catégories $F(e)$, où $e \in C_o^{\cdot}$.

Un cas important d'espèces de structures dominées est celui des *espèces de structures dominées par des applications covariantes*, c'est-à-dire des espèces de structures dominées dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$.

Pour que (η, F) soit une espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$ il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) $\eta = (C^{\cdot}, S_o, \kappa')$ est une espèce de structures; soit π' l'application $z \to e$ de S_o dans $C_o^{\cdot}$, où $(e, z) \in C^{\cdot} * S_o$ et soit $C_1^{\cdot}$ la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ opérant sur S_o.

2) Il existe un foncteur G de $C_1^{\cdot}$ vers $\mathcal{F}$ et, pour tout $e \in \pi'(S_o)$, $F(e)$ est une espèce de structures $(G(e), \overset{-1}{\pi'}(e), \overline{\kappa'}(e))$.

3) Si $f \in C_1$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, alors $F(f) = (F(e'), (G(f), \varphi_0(f)), F(e))$ est une application covariante, c'est-à-dire $\varphi_0(f)$ est une application de $\overset{-1}{\pi'}(e)$ dans $\overset{-1}{\pi'}(e')$ telle que, si $z \in \overset{-1}{\pi'}(e)$, $(g, z) \in G(e) * \overset{-1}{\pi'}(e)$, on ait :

$$\varphi_0(f)(gz) = G(f)(g)\,\varphi_0(f)(z).$$

Supposons ces conditions réalisées. Pour tout $e \in (C_1)^{\boldsymbol{\cdot}}_0$, désignons par $\hat{F}(e)$ la catégorie $(G(e) * \overset{-1}{\pi'}(e))^{\boldsymbol{\cdot}}$. Pour tout $f \in C_1$, posons :

$$\hat{F}(f) = (\hat{F}(\beta(f)), \hat{f}, \hat{F}(\alpha(f))), \quad \text{où } \hat{f}(g, z) = (G(f)(g), \varphi_0(f)(z)).$$

Soit $\Sigma^{\boldsymbol{\cdot}}$ la catégorie somme des catégories $\hat{F}(e)$.

PROPOSITION. *$\Sigma^{\boldsymbol{\cdot}}$ est une catégorie munie de la catégorie d'opérateurs $C_1^{\boldsymbol{\cdot}}$ relativement à la loi de composition $\hat{\kappa}'$:* 1

$$(f, (g, z)) \to \hat{f}(g, z) \quad \textit{si, et seulement si,} \quad (g, z) \in \hat{F}(\alpha(f)).$$

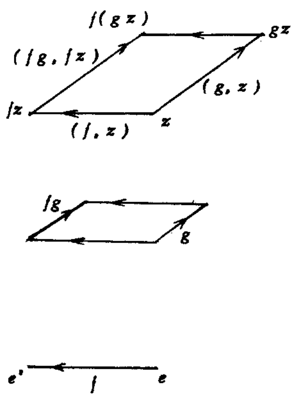
REMARQUE. Les conditions 1, 2 et 3 n'entraînent pas que $(C^{\boldsymbol{\cdot}}, G)$ soit un couple dominant dans $(p\mathcal{J}, \mathfrak{F})$ une espèce de structures. On peut toutefois se ramener à ce cas en remplaçant $G(e)$ par la catégorie équivalente dont les éléments sont les couples (e, g) tels que $g \in G(e)$. 2

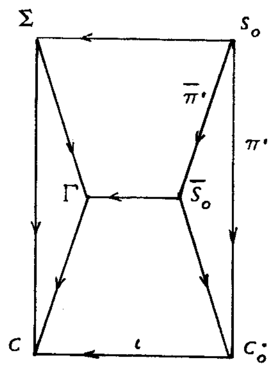
Supposons de plus que $(C^{\boldsymbol{\cdot}}, G)$ soit un couple dominant dans $(p\mathcal{J}, \mathfrak{F})$ une espèce de structures μ, c'est-à-dire que (μ, G) soit une espèce de morphismes. Soit $\Gamma^{\boldsymbol{\cdot}}$ la catégorie des hypermorphismes associée à l'espèce de structures μ. On sait [4a] que $(\Gamma^{\boldsymbol{\cdot}}, \Gamma^{\perp})$ est une catégorie double, la loi de composition $\perp$ étant définie par:

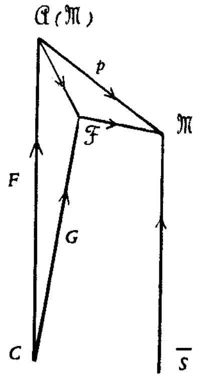
$$(f', g') \perp (f, g) = (f, g' \cdot g)$$

si, et seulement si, $f' = f$ et $(g', g) \in G(e) * G(e)$, où $e = \alpha(f)$.

Soit $(\overline{S}^{\boldsymbol{\cdot}}, S_0, \overline{\kappa}')$ l'espèce de structures somme des espèces de structures $F(e)$, où $e \in \pi'(S_0)$.







Rappelons le théorème suivant (voir [4b], p.2) qui relie la notion d'espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$ à la notion d'espèce de structures au-dessus d'une espèce de morphismes, définie dans [4b] :

THEOREME. *$((\Gamma^{\cdot}, \Gamma^{\perp}), \overline{\pi}', S_o)$ est une espèce de structures au-dessus de l'espèce de morphismes (μ, G), où $\overline{\pi}'(z) = s$ si $\overline{\kappa}'(s, z)$ est défini. L'application :*

$$((C^{\cdot}, S_o, \kappa'), F) \to ((\Gamma^{\cdot}, \Gamma^{\perp}), \overline{\pi}', S_o)$$

est une bijection de la classe des espèces de structures dominées par des applications covariantes sur la classe des espèces de structures au-dessus d'une espèce de morphismes.

1+ CAS PARTICULIER. Soit $C^{\cdot}$ la catégorie des couples (U', U), où U et U' sont des ouverts d'un espace topologique E et $U' \subset U$, munie de la loi de composition entre couples. Si (μ, G) est une espèce de morphismes et si $G(U, U)$ est un groupe (resp un groupoïde) pour tout $(U, U) \in C^{\cdot}_o$, alors G est un préfaisceau de groupes (resp. groupoïdes). Si de plus l'espèce de structures μ est une espèce de structures inductive complète [5], G est un faisceau de groupes (resp. groupoïdes). Supposons que $[C^{\cdot}, S_o, \kappa']$ soit une espèce de structures complètes et que $([C^{\cdot}, S_o, \kappa'], F)$ soit une espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$. Avec les notations des conditions 1, 2 et 3 et si G est un faisceau de groupes, pF est un faisceau d'ensembles muni du faisceau de groupes d'opérateurs G [6].

2+ COUPLE DE CATEGORIES D'OPERATEURS.

Soit $([C^{\cdot}, S_o, \kappa'], F)$ une espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$; reprenons les notations des conditions 1, 2, 3, ci-dessus; supposons que, pour tout $f \in C$, $G(f)$ soit le foncteur identité de la catégorie $\overline{C}^{\perp}$ et que, pour tout $e \in C^{\cdot}_o$, $F(e) = [\overline{C}^{\perp}, \overset{-1}{\overline{\pi}'}(e), \overline{\kappa}'(e)]$. Alors $\overline{C}^{\perp}$ est aussi une catégorie d'opérateurs sur S_o relativement à la loi de composition $\overline{\kappa}'$:

$$(g, z) \to \overline{\kappa}'(e)(g, z) \text{ si, et seulement si, } \quad \pi'(z) = e \text{ et } (g, z) \in \overline{C}^{\perp} * \overset{-1}{\pi'}(e).$$

Soit $\overline{\pi}'$ l'application : $z \to s$ si, et seulement si, $\overline{\kappa}'(s, z)$ est défini, de S_o sur $\overline{C}^{\perp}_o$; cette application est l'application somme des applications $\overline{\pi}'(e)$ correspondantes aux espèces de structures $F(e)$.

La situation précédente est équivalente à la suivante :

Soient $C^{\cdot}$ et $\overline{C}^{\perp}$ deux catégories, S_o une classe vérifiant les conditions suivantes :

A) $C^{\cdot}$ est une catégorie d'opérateurs sur S_o relativement à κ'.

B) $\overline{C}^{\perp}$ est une catégorie d'opérateurs sur S_o relativement à $\overline{\kappa}'$.

C) Soient $z \in S$, $f \in C$ et $\overline{f} \in \overline{C}$. Si fz et $\overline{f}z$ sont définis, les composés $\overline{f}(fz)$ et

$f(\overline{f}z)$ sont définis et on a : $f(\overline{f}z) = \overline{f}(fz)$.

DEFINITION. *Si les conditions A, B et C sont vérifiées, on dira que* $(C^\cdot, \overline{C}^\perp)$ *est un* couple de catégories d'opérateurs sur S_o relativement à $(\kappa', \overline{\kappa}')$.

Les catégories $C^\cdot$ et $\overline{C}^\perp$ jouent des rôles équivalents dans la définition précédente.

Soit $(C^\cdot, \overline{C}^\perp)$ un couple de catégories d'opérateurs sur une classe Σ relativement à $(\kappa', \overline{\kappa}')$. Soit H la classe somme de C, de $\overline{C}$ et de Σ.

PROPOSITION. *$H^\cdot$ est une catégorie admettant $C^\cdot$ et la catégorie duale de $\overline{C}^\perp$ pour sous-catégories pleines, la loi de composition étant définie par*

$$\begin{cases} (f', f) \to f'.f & si \quad (f', f) \in C^\cdot * C^\cdot \\ (\overline{f}', \overline{f}) \to \overline{f}.\overline{f}' & si \quad (\overline{f}, \overline{f}') \in \overline{C}^\perp * \overline{C}^\perp \\ (z, \overline{f}) \to \overline{f}z & si \quad (\overline{f}, z) \in \overline{C}^\perp * \Sigma \\ (f, z) \to fz & si \quad (f, z) \in C^\cdot * \Sigma \end{cases}$$ 1+

EXEMPLE. Soit $[C^\cdot, S_o, \kappa']$ une espèce de structures et soit $\overline{C}^\perp$ la catégorie ayant pour seul élément une unité $a \notin C$. Alors $(C^\cdot, \{a\})$ est un couple de catégories d'opérateurs sur S_o relativement à $(\kappa', \overline{\kappa}')$, où :

$$\overline{\kappa}'(a, z) = z \qquad \text{pour tout } z \in S_o.$$

La classe H est la classe somme de C, de S_o et de a. Dans la catégorie $H^\cdot$ correspondante, tout élément $z \in S_o$ admet a pour unité à droite. 2+

Soit $K^\cdot$ une catégorie; soient $(K^\cdot, p, C^\cdot)$ et $(K^\cdot, \overline{p}, \overline{C}^\perp)$ deux foncteurs. Soit Σ la classe des triplets $(e, k, \overline{e})$ tels que :

$$e \in C_o^\cdot, \quad \overline{e} \in \overline{C}_o^\perp, \quad k \in K, \quad \beta(k) = p(e) \quad \text{et} \quad \alpha(k) = \overline{p}(\overline{e}).$$

$C^\cdot$ opère sur Σ relativement à la loi de composition κ' :

$$(f, (e, k, \overline{e})) \to (\beta(f), p(f).k, \overline{e}) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha(f) = e.$$

La catégorie duale $(\overline{C}^\perp)^*$ de $\overline{C}^\perp$ opère sur Σ relativement à $\overline{\kappa}'$:

$$(\overline{f}, (e, k, \overline{e})) \to (e, k.\overline{p}(\overline{f}), \alpha(\overline{f})) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \overline{e} = \beta(\overline{f}).$$

PROPOSITION. *$(C^\cdot, (\overline{C}^\perp)^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur Σ relativement à $(\kappa', \overline{\kappa}')$; soit $H^\cdot$ la catégorie correspondante; il existe un foncteur $(K^\cdot, \tilde{p}, H^\cdot)$* 3 *admettant p et $\overline{p}$ pour restrictions.*

Nous aurons en particulier à utiliser la construction précédente dans le cas où $\overline{C}^\perp$ est une sous-catégorie de $K^\cdot$ et $\overline{p} = \iota$.

CATEGORIES DOMINÉES.

Soit $C^\cdot$ une catégorie; pour tout couple (e', e) d'unités de $C^\cdot$, nous désignons par $Hom(e', e)$ la classe des $h \in C$ tels que $\alpha(h) = e$ et $\beta(h) = e'$. Soit $\Gamma^\cdot$ la sous-catégorie de la catégorie produit $C^\cdot \times C^*$ formée des couples $(f', f) \in C \times C$ tels que $Hom(\alpha(f'), \beta(f)) \neq \emptyset$. Cette catégorie est une catégorie d'opérateurs sur la classe C relativement à la loi de composition $\kappa'(C^\cdot)$:

$$((f', f), h) \to f'.h.f$$

si, et seulement si, $(h, f) \in C^\cdot {}_* C^\cdot$ et $(f', h) \in C^\cdot {}_* C^\cdot$.

Soit $\eta(C^\cdot) = (\Gamma^\cdot, C, \kappa'(C^\cdot))$ l'espèce de structures ainsi définie. Le couple définissant $\eta(C^\cdot)$ est le couple $(C^\cdot \times C^*, Hom)$, où Hom est le foncteur de $\Gamma^\cdot$ vers $\mathfrak{M}$ tel que $Hom(f', f)$ soit l'application : $h \to f'.h.f$ de $Hom(\alpha(f'), \beta(f))$ dans $Hom(\beta(f'), \alpha(f))$ pour tout $(f', f) \in \Gamma$.

1 DEFINITION. *Si $(\eta(C^\cdot), F)$ est une catégorie dominée dans $(\lambda, \mathfrak{L})$, où $(\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{L}) \in \mathfrak{F}$, on dira que $(C^\cdot, F)$ est une* catégorie dominée dans $(\lambda, \mathfrak{L})$.

EXEMPLE. Une catégorie préadditive [8] est une catégorie dominée dans $(p_{\mathcal{G}}, \mathcal{G})$, où $\mathcal{G}$ est la catégorie des homomorphismes entre groupes abéliens et $p_{\mathcal{G}}$ la restriction de $p_{\mathfrak{F}}$ à $\mathcal{G}$.

CONSTRUCTION D'ESPECES DE STRUCTURES DOMINEES A PARTIR DE (η, F).

1) Soit $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes; soit $(\mathfrak{M}, q\ \bar{q}, \bar{\mathcal{H}})$ le foncteur tel que $\bar{\mathcal{H}}$ soit la catégorie des foncteurs $\mathcal{H}$-structurés et $\bar{q}$ sa projection canonique dans $\mathcal{H}$ (voir [1]). Soit (η, F) l'espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$ considérée au début, (μ, G) l'espèce de morphismes correspondante. Supposons que $(\mu, \tilde{G})$ soit une espèce de structures dominée dans $(\bar{q}, \bar{\mathcal{H}})$ telle que $G = \bar{q}\ \tilde{G}$ et que (η, H) soit une espèce de structures dominée dans $(q, \mathcal{H})$. Supposons de plus que $\tilde{H}(e) = (\tilde{G}(e), \bar{\pi}'_e, H(e))$, où $\bar{\pi}'_e$ est la restriction de $\bar{\pi}'$ à $\overset{-1}{\bar{\pi}'}(e) = p\ F(e) = q\ H(e)$, soit une $\mathcal{H}$-espèce de structures (voir [4c]), pour tout $e \in (C_1)^\cdot_0$ et que, pour tout $f \in C_1$,

$$\tilde{H}(f) = (\tilde{H}(e'), (G(f), \varphi_0(f)), \tilde{H}(e))$$

soit une application $\mathcal{H}$-covariante [4c], où $e = \alpha(f)$, $e' = \beta(f)$. Ceci signifie que $(\eta, \tilde{H})$ est une espèce de structures dominée dans $(p\ p_{\mathcal{H}}, \mathfrak{A}(\mathcal{H}))$ où $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ est la catégorie des applications $\mathcal{H}$-covariantes [4c] et $p_{\mathcal{H}}$ sa projection canonique dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$.

EXEMPLE. Si on prend pour $\mathcal{H}$ la catégorie des applications continues entre espaces topologiques (resp. des applications r fois différentiables entre variétés r fois différentiables), on obtient une situation qui généralise celle des espaces fibrés topologiques (resp. différentiables), et que nous préciserons plus loin.

2) Soit (η, F) l'espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$ déjà considérée. Soit $(\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{L})$ un foncteur. Supposons que, pour tout $e \in (C_1)^{\cdot}_{o}$, $(F(e), N_e)$ soit une espèce de structures dominée dans $(\lambda, \mathfrak{L})$ et que, pour tout $f \in C_1$, $((F(e'), N_{e'}), F(f), (F(e), N_e))$ soit une application covariante $\tilde{F}(f)$ entre espèces de structures dominées dans $(\lambda, \mathfrak{L})$ (voir [3], p. 16). Ceci signifie que $(\eta, \tilde{F})$ est une espèce de structures dominée dans $(p\,\overline{\lambda}, \mathfrak{A}'(\lambda, \mathfrak{L}))$, où $\mathfrak{A}'(\lambda, \mathfrak{L})$ est la catégorie des applications covariantes entre espèces de structures dominées dans $(\lambda, \mathfrak{L})$ et $\overline{\lambda}$ sa projection canonique dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ (voir [3]).

EXEMPLE. On peut prendre pour $(\mathfrak{M}, \lambda, \mathfrak{L})$ le foncteur $(\mathfrak{M}, p\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$; ce cas intervient en théorie de la cohomologie sur les catégories; la notion de faisceau de groupes admettant un faisceau de groupes d'opérateurs [6] en est un cas particulier. D'autres cas particuliers ont été utilisés dans des constructions d'Analyse ou de Géométrie différentielle. 1

2. Surjections et projections. 2

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie. Nous désignerons par $R_g(C^{\cdot})$ (resp. $R_d(C^{\cdot})$) la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ formée des monomorphismes (resp. épimorphismes) de $C^{\cdot}$, par $R(C^{\cdot})$ la sous-catégorie $R_g(C^{\cdot}) \cap R_d(C^{\cdot})$ dont les éléments sont les éléments réguliers de $C^{\cdot}$.

Les conditions $f \in C$, $f' \in R_g(C^{\cdot})$ et $f' = f.g$ entraînent $g \in R_g(C^{\cdot})$.

Soit $(\hat{C}^{\cdot}, p, C^{\cdot})$ un foncteur et soit $\hat{C}'$ une sous-classe de $\hat{C}$. Nous désignerons *) par $C^{\cdot}(\hat{C}', p)_{\llcorner}$ et $C^{\cdot}(\hat{C}', p)_{\lrcorner}$ les classes des $(\hat{C}', p)$-injections et $(\hat{C}', p)$-surjections respectivement, qui sont des catégories [2] si $\hat{C}'^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\hat{C}$. Si $h \in C$ et si h' est un $(\hat{C}', p)$-sous-morphisme (resp. $(\hat{C}', p)$-morphisme quotient) de h, nous poserons *)

$$h' \underset{(\hat{C}', p)}{\leftharpoondown} h \quad (\text{resp. } h' \overset{(\hat{C}', p)}{\rightharpoonup} h).$$

PROPOSITION. *Si* $j \in C^{\cdot}(\hat{C}, p)_{\llcorner}$ *et si* $p(j) \in R_d(\hat{C}^{\cdot})$ *(resp.* $\in \hat{C}^{\cdot}_{\gamma}$*), on a* $j \in R_d(C^{\cdot})$ *(resp.* $\in C^{\cdot}_{\gamma}$*). Si* f *admet un inverse à gauche dans* $C^{\cdot}$ *et si* $p(f) \in R_d(\hat{C}^{\cdot})$, f *est une* $(\hat{C}, p)$*-surjection faible. Si* f *admet un inverse à droite dans* $C^{\cdot}$ *et si* $(\hat{C}^{\cdot}, p, C^{\cdot})$ *est un foncteur fidèle,* $f \in C^{\cdot}(\hat{C}, p)_{\lrcorner}$.

PROPOSITION. *Soient* $f' \in C$ *et* $f \in R_d(C^{\cdot})$. *Si* $f'.f$ *est une* $(\hat{C}, p)$*-surjection (resp. surjection faible), alors* f' *est une* $(\hat{C}, p)$*-surjection (resp. surjection faible).*

COROLLAIRE. *Soient* $j \in C^{\cdot}(\hat{C}, p)_{\lrcorner}$, $j_1 \in C^{\cdot}(\hat{C}, p)_{\lrcorner}$ *et* $(j_1, f, j, h) \in \square C^{\cdot}$. *Si* $h \in R_d(C^{\cdot})$, *on a :* $j_1 \overset{(\hat{C}, p)}{\rightharpoonup} h$.

*) Ces notations diffèrent de celles de [3] où $C^{\cdot}(\hat{C}', p)_{\lrcorner}$ et $C^{\cdot}(\hat{C}', p)_{\llcorner}$ sont représentés par $C^{\cdot s}(\hat{C}', p)$ et $C^{\cdot i}(\hat{C}', p)$ et où les symboles $\rightharpoonup$ et $\leftharpoondown$ sont resp. notés $-\!\!\!\prec$ et $\subset$.

THEOREME. *Soient* $h \in C$ *et* $h' \in C$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) h' *est un* $(\hat{C}, p)$*-morphisme quotient de* h.
2) Il existe des $(\square\hat{C}, \square p)$*-surjections* $(\beta(j), j, j, \alpha(j))$ *et* (h', j_1, j, h).

PROPOSITION. *Soit* $C^{\cdot}_1$ *une sous-catégorie de* $C^{\cdot}$. *Si* $j_1 \in C_1 \cap C^{\cdot}(\hat{C}, p)_{\lrcorner}$, *on a* $j_1 \in C^{\cdot}_1(\hat{C}, p\iota)_{\lrcorner}$ *si, et seulement si, les conditions* $g \in C$ *et* $g . j_1 \in C_1$ *entraînent* $g \in C_1$.

Soit $C^{\cdot}_1$ une sous-catégorie de $C^{\cdot}$ et $\hat{C}'^{\cdot}$ une sous-catégorie de $\hat{C}^{\cdot}$ contenant $p(s)$ pour tout $s \in (C^{\cdot}_1)_0$.

DEFINITION. *On dira que* $C^{\cdot}_1$ vérifie la condition (σ) *(resp.* (σ^*)*)* relativement à $(\hat{C}', p)$ *si les conditions* $j \in C^{\cdot}(\hat{C}', p)_{\lrcorner}$ *(resp.* $j \in C^{\cdot}(\hat{C}', p)_{\ulcorner}$*)*, $\alpha(j) \in C_1$ *et* $\beta(j) \in C_1$ *entraînent* $j \in C^{\cdot}_1(\hat{C}', p\iota)_{\lrcorner}$ *(resp.* $j \in C^{\cdot}_1(\hat{C}', p\iota)_{\ulcorner}$*)*.

Une sous-catégorie pleine de $C^{\cdot}$ vérifie la condition (σ) relativement à $(\hat{C}', p)$.

PROPOSITION. *Pour que* $C^{\cdot}_1$ *vérifie la condition* (σ) *relativement à* $(\hat{C}', p)$ *il faut et il suffit que les conditions :*

$$h' \xrightarrow{(\hat{C}', p)} h, \quad h \in C_1, \quad \alpha(h') \in C_1 \quad et \quad \beta(h') \in C_1$$

entraînent $h' \in C_1$.

PROJECTIONS ET INJECTIONS.

Soit $H^{\cdot}$ une catégorie, $C^{\cdot}$ et $\overline{C}^{\cdot}$ deux sous-catégories pleines de $H^{\cdot}$. Supposons que H soit la somme de C, de $\overline{C}$ et d'une sous-classe Σ de H telle que, pour tout $f \in \Sigma$, on ait $\alpha(f) \in \overline{C}$ et $\beta(f) \in C$. Cette situation se présente par exemple si $H^{\cdot}$ est la catégorie associée (voir paragraphe 1) à un couple $(C^{\cdot}, \overline{C}^{\perp})$ de catégories d'opérateurs sur Σ. Remarquons que la donnée de $H^{\cdot}$ et de C détermine entièrement Σ et $\overline{C}$.

Soit Θ la catégorie ayant 3 éléments distincts z, $\alpha(z) = \overline{e}$ et $\beta(z) = e$. Il existe un foncteur $(\Theta, Z, H^{\cdot})$ tel que $\overset{-1}{Z}(e) = C$, à savoir le foncteur défini par :

$$g \to e \quad \text{si} \quad g \in C, \quad \overline{g} \to \overline{e} \quad \text{si} \quad \overline{g} \in \overline{C} \quad \text{et} \quad f \to z \quad \text{si} \quad f \in \Sigma .$$

DEFINITION. *On dira que* $j \in H$ *est un* $(C, H^{\cdot})$-projecteur *si* j *est une* (Θ, Z)*-surjection telle que* $Z(j) \neq \overline{e}$. *Si* $h' \in C$ *est un* (Θ, Z)*-morphisme quotient de* $h \in H$, *on dira que* h' *est une* $(C, H^{\cdot})$-projection *de* h.

Tout $(C, H^{\cdot})$-projecteur est un épimorphisme puisque z est un épimorphisme de Θ.

PROPOSITION. *Pour que* $j \in H$ *soit un* $(C, H^{\cdot})$*-projecteur, il faut et il suffit que* $j \in C^{\cdot}_{\gamma}$ *ou que les conditions* $g \in \Sigma$ *et* $\alpha(g) = \alpha(j)$ *assurent l'existence d'un et d'un seul* $g' \in C$ *tel que* $g' . j = g$.

Soit $K^{\bullet}$ une catégorie et soit $C^{\bullet}$ une sous-catégorie pleine de $K^{\bullet}$. Soit $\overline{C}^{\bullet}$ la sous-catégorie pleine de $K^{\bullet}$ ayant pour unités les $s \in K_0^{\bullet}$ tels que $s \notin C_0^{\bullet}$. Appliquons la construction du § 1 aux foncteurs $(K^{\bullet}, \iota, C^{\bullet})$ et $(K^{\bullet}, \iota, \overline{C}^{\bullet})$ et identifions la classe Σ des triplets $(s, k, \overline{s})$ tels que $k \in K$, $\overline{s} = \alpha(k) \in \overline{C}$ et $s = \beta(k) \in C$ à la sous-classe de K formée des morphismes k pour lesquels $\alpha(k) \in \overline{C}$ et $\beta(k) \in C$. Soit $H^{\bullet}$ la catégorie construite au § 1 qui s'identifie à la sous-catégorie de $K^{\bullet}$ réunion de C, de $\overline{C}$ et de Σ.

DEFINITION. *On dira que* $j \in K$ *est un* $(C, K^{\bullet})$-projecteur *si* j *est un* $(C, H^{\bullet})$*-projecteur. On dira que* $h' \in C$ *est une* $(C, K^{\bullet})$-projection *de* $h \in K$ *s'il existe un quatuor* $(h', j', j, h) \in \square K^{\bullet}$ *tel que* j *et* j' *soient des* $(C, K^{\bullet})$*-projecteurs; dans ce cas, on posera :* $h' \xleftarrow{(C, K^{\bullet})} h$.

Cette définition, qui est donnée dans [3], coïncide avec la définition précédente lorsque $K = H$. Nous allons énoncer ici des propriétés des $(C, K^{\bullet})$-projecteurs non indiquées dans [3].

PROPOSITION. *Pour que* $j \in K$ *soit un* $(K, K^{\bullet})$*-projecteur, il faut et il suffit que* j *soit inversible dans* $K^{\bullet}$.

REMARQUE. Plus généralement la construction précédente s'applique même si $C^{\bullet}$ n'est pas une sous-catégorie pleine de $K^{\bullet}$; alors un $(C, K^{\bullet})$-projecteur est soit un élément de $C_{\gamma}^{\bullet}$ soit un $j \in K$ tel que $\alpha(j) \notin C$ et que les conditions $g \in K$, $\alpha(g) = \alpha(j) \notin C_0^{\bullet}$ et $\beta(g) \in C_0^{\bullet}$ assurent l'existence et l'unicité de $g' \in C$ vérifiant $g = g'.j$.

PROPOSITION. *Soient* $h \in K$, *et* j *et* j' *deux* $(C, K^{\bullet})$*-projecteurs tels que* $\alpha(h) = \alpha(j)$ *et* $\beta(h) = \alpha(j')$. *Il existe un et un seul* $h' \xleftarrow{(C, K^{\bullet})} h$ *tel que* $(h', j', j, h) \in \square K^{\bullet}$.

PROPOSITION. *Si* j *est un* $(C, K^{\bullet})$*-projecteur, alors* $j.g$ *est un* $(C, K^{\bullet})$*-projecteur, pour tout* $g \in K_{\gamma}^{\bullet}$.

PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) (h', j', j, h) *et* $(\beta(j), j, j, \alpha(j))$ *sont des* $(\square C^{\bullet}, \square\square K^{\bullet})$*-projecteurs.*

2) h' *est une* $(C, K^{\bullet})$*-projection de* h *et* $(h', j', j, h) \in \square K^{\bullet}$, *où* j *et* j' *sont des* $(C, K^{\bullet})$*-projecteurs.*

PROPOSITION. *Si* $h \in K$, $h' \xleftarrow{(C, K^{\bullet})} h$ *et* $h'' \xleftarrow{(C, K^{\bullet})} h$, *il existe un et un seul quatuor* $(h', \gamma', \gamma, h) \in \square C^{\bullet}$ *tel que* $\gamma \in C_{\gamma}^{\bullet}$ *et* $\gamma' \in C_{\gamma}^{\bullet}$.

CATEGORIES A C-PROJECTIONS.

DEFINITION. *On dira que* $K^{\bullet}$ *est une* catégorie à C-projections *(resp. à* C-éjections*) si* $C^{\bullet}$ *est une sous-catégorie pleine de la catégorie* $K^{\bullet}$ *et si, pour tout* $e \in K_0^{\bullet}$, *il existe un* $(C, K^{\bullet})$*-projecteur* j *tel que* $\alpha(j) = e$ *(resp. un* $(K^{\bullet}, C)$*-éjecteur* j *tel que* $\beta(j) = e$*).*

Soit $K^{\cdot}$ une catégorie à C-projections. Soit $U(C, K^{\cdot})$ la sous-catégorie de $\boxminus K^{\cdot}$ formée des quatuors (h', j', j, h) tels que $h' \in C$ et que j et j' soient des $(C, K^{\cdot})$-projecteurs.

PROPOSITION. *$\overline{\psi} = (K^{\cdot}, \psi, U(C, K^{\cdot}))$, où $\psi(h', j', j, h) = h$, est un foncteur définissant $K^{\cdot}$ comme catégorie quotient strict de $U(C, K^{\cdot})$ (voir [2]).*

Soit ρ_{ψ} la relation d'équivalence sur $U(C, K^{\cdot})$ associée à ψ, qui est définie par :

$$(h'', \overline{j}', \overline{j}, h) \sim (h', j', j, h).$$

1 Soit P l'équivalence de $K^{\cdot}$ sur la catégorie quotient strict $U(C, K^{\cdot})/_{\rho_{\psi}}$ de $U(C, K^{\cdot})$ par ρ_{ψ}, définie par :

$$h \to (h', j', j, h) \bmod \rho_{\psi}.$$

THEOREME. *Supposons que $C^{\cdot}$ vérifie la condition :*

(0) Tout trio (g, g, f) de $C^{\cdot}$, où $f \in C^{\cdot}_{\gamma}$, est contenu dans un quatuor de $(C^{\cdot}; C, C^{\cdot}_{\gamma})$.

Pour tout $h \in K$, représentons par $\sigma(h)$ la classe des $(C, K^{\cdot})$-projections de h. Alors $C^{\cdot}$ admet une catégorie quotient strict $\hat{C}^{\cdot}$ par la relation d'équivalence $g \sim g'$ si $\sigma(g) = \sigma(g')$, dont les unités sont les saturantes[1)] des unités de $C^{\cdot}$ dans $C^{\cdot}$; de plus $(\hat{C}^{\cdot}, \sigma, K^{\cdot})$ est une $p\mathcal{F}$-surjection définissant $\hat{C}^{\cdot}$ comme catégorie quotient strict de $K^{\cdot}$.

2 PROPOSITION. *Un foncteur section Π de $\overline{\psi}$ est une équivalence de $K^{\cdot}$ sur une sous-catégorie de $U(C, K^{\cdot})$; tout autre foncteur section Π_1 de $\overline{\psi}$ se déduit de Π par une équivalence naturelle. Soit π l'application de K dans K telle que $(\pi(e))^{\boxminus} = \alpha^{\boxminus}(\Pi(e))$, pour tout $e \in K^{\cdot}_{o}$; alors $(\beta^{\boxbar}\Pi, \pi)$ est un foncteur naturalisé.[2)]*

PROPOSITION. *Soit π une application de $K^{\cdot}_{o}$ dans la classe des $(C, K^{\cdot})$-projecteurs telle que $\alpha(\pi(e)) = e$ pour tout $e \in K^{\cdot}_{o}$. Il existe un foncteur naturalisé $(\overline{\pi}, \pi)$ tel que $\overline{\pi}(h) \xrightarrow{(C, K^{\cdot})} h$ pour tout $h \in K$ et l'application $h \to (\overline{\pi}(h), \pi(\beta(h)), \pi(\alpha(h)), h)$ définit un foncteur section de $\overline{\psi}$.*

DEFINITION. *Une application π de K dans la classe des $(C, K^{\cdot})$-projecteurs telle que $e = \alpha\pi(e)$ pour tout $e \in K^{\cdot}_{o}$ sera appelée $(C, K^{\cdot})$-*projection naturalisée; *le foncteur naturalisé $(\overline{\pi}, \pi)$ correspondant sera appelé* foncteur $(C, K^{\cdot})$-projection naturalisé associé à π.

1) Dans une catégorie $C^{\cdot}$ on appelle saturante d'une sous-classe B de C la catégorie engendrée dans $C^{\cdot}$ par la classe

$$C^{\cdot}_{\gamma} . B \cup B . C^{\cdot}_{\gamma}$$

2) Si $f \in K$, on pose $f^{\boxminus} = (\beta(f), f, f, \alpha(f))$ et $f^{\boxbar} = (f, \beta(f), \alpha(f), f)$.

IMAGE D'UNE PROJECTION PAR UN FONCTEUR.

Soient $K^{\cdot}$ et $\hat{K}^{\cdot}$ deux catégories, $C^{\cdot}$ et $\hat{C}^{\cdot}$ des sous-catégories pleines de $K^{\cdot}$ et $\hat{K}^{\cdot}$ respectivement. Soient $P(C, K^{\cdot})$ et $P(\hat{C}, \hat{K}^{\cdot})$ les classes des $(C, K^{\cdot})$ projecteurs et des $(\hat{C}, \hat{K}^{\cdot})$-projecteurs, $E(K^{\cdot}, C)$ et $E(\hat{K}^{\cdot}, \hat{C})$ les classes des $(K^{\cdot}, C)$-éjecteurs et des $(\hat{K}^{\cdot}, \hat{C})$-éjecteurs.

Soit $\overline{p} = (\hat{K}^{\cdot}, p, K^{\cdot})$ un foncteur tel que $p(C) \subset \hat{C}$; soit p_γ la restriction de p à $C^{\cdot}_\gamma$.

PROPOSITION. *Soient j et j' deux $(C, K^{\cdot})$-projecteurs tels que $\alpha(j) = \alpha(j')$ et $p(j) = p(j')$. Si $(\hat{C}^{\cdot}_\gamma, p_\gamma, C^{\cdot}_\gamma)$ est de plus un foncteur bien fidèle* *) *et si $p(j)$ est un épimorphisme de $\hat{K}^{\cdot}$, on a $j = j'$.*

PROPOSITION. *Si $f \in K$ est une $(\hat{K}, p)$-surjection telle que $\beta(f) \in C$ et $p(f) \in P(\hat{C}, \hat{K}^{\cdot})$ on a $f \in P(C, K^{\cdot})$. Si $\overset{-1}{p}(\hat{C}) = C$ et si les conditions $\hat{k} \in \hat{K}$ et $\alpha(\hat{k}) \in \hat{C}$ entraînent $\beta(\hat{k}) \in \hat{C}$, les relations $j \in P(C, K^{\cdot})$ et $p(j) \in R_d(\hat{K}^{\cdot})$ assurent que j est une $(\hat{K}, p)$-surjection.*

DEFINITION. *On dira que $\overline{p}$ est* un foncteur $(\hat{C}, C)$-compatible avec les projections *(resp.* les éjections*) si $p(P(C, K^{\cdot})) \subset P(\hat{C}, \hat{K}^{\cdot})$ (resp. si $p(E(K^{\cdot}, C)) \subset E(\hat{K}^{\cdot}, \hat{C})$).*

PROPOSITION. *Soit p un foncteur $(\hat{C}, C)$-compatible avec les projections; si h' est une $(C, K^{\cdot})$-projection de $h \in K$, on a $p(h') \underline{(C, K^{\cdot})} p(h)$.*

Supposons que $\hat{K}^{\cdot}$ soit une catégorie à $\hat{C}$-projections (resp. $\hat{C}$-éjections). Soit $\hat{\pi}$ une $(\hat{C}, \hat{K}^{\cdot})$-projection (resp. $(\hat{K}^{\cdot}, \hat{C})$-éjection) naturalisée et $(\hat{\Pi}, \hat{\pi})$ le foncteur naturalisé associé à $\hat{\pi}$.

DEFINITION. *On dira que π est une $(C, K^{\cdot})$-* projection *(resp. $(K^{\cdot}, C)$-* éjection*)* naturalisée appliquée par $\overline{p}$ sur $\hat{\pi}$ *si π est une $(C, K^{\cdot})$-projection (resp. $(K^{\cdot}, C)$-éjection) naturalisée telle que $p\pi = \hat{\pi} p_o$. On dira que $\overline{p}$ est* compatible avec *$(\hat{\pi}, C)$ s'il existe une $(C, K^{\cdot})$-projection (resp. $(K^{\cdot}, C)$-éjection) naturalisée π appliquée par p sur $\hat{\pi}$.*

Si on suppose le foncteur $(\hat{C}^{\cdot}_\gamma, p_\gamma, C^{\cdot}_\gamma)$ bien fidèle, il existe au plus une $(C, K^{\cdot})$-projection (resp. $(K^{\cdot}, C)$-éjection) naturalisée appliquée par $\overline{p}$ sur $\hat{\pi}$.

PROPOSITION. *Si π est une $(C, K^{\cdot})$-projection (resp. $(K^{\cdot}, C)$-éjection) naturalisée appliquée par $\overline{p}$ sur $\hat{\pi}$ et si (Π, π) est le foncteur naturalisé associé à π, on a :*

$$\overline{p}.\Pi = \hat{\Pi}.\overline{p}.$$

PROPOSITION. *Si $\overline{p}$ est compatible avec $(\hat{\pi}, C)$, alors $\overline{p}$ est un foncteur $(\hat{C}, C)$-compatible avec les projections (resp. les éjections).*

*) Un foncteur $(\hat{K}^{\cdot}, q, K^{\cdot})$ est *bien fidèle* si les conditions : $k_i \in K$, $\alpha(k_1) = \alpha(k_2)$ et $q(k_1) = q(k_2)$ entraînent $k_1 = k_2$.

1 **3. Applications des projections : Produits et produits fibrés .**

PRODUIT DANS UNE CATEGORIE.

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie. Soit $\mathcal{J}$ une classe de classes (qui peut être réduite à un seul élément I). Soit $\mathcal{J}(C^{\cdot})$ la catégorie dont les éléments sont les familles $(f_i)_{i\in I}$, où $f_i \in C$ et $I \in \mathcal{J}$, munie de la loi de composition suivante :

$$((f'_j)_{j\in J}, (f_i)_{i\in I}) = (f'_i \cdot f_i)_{i\in I}$$

si, et seulement si, $J = I$ et $(f'_i, f_i) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ pour tout $i \in I$.

En particulier si $\mathcal{J}$ admet I pour seul élément, $\mathcal{J}(C^{\cdot})$ est la catégorie produit $C^{\cdot I}$; dans le cas général, $\mathcal{J}(C^{\cdot})$ est la catégorie somme des catégories $C^{\cdot I}$, où $I \in \mathcal{J}$.

Soit $\Sigma(\mathcal{J})$ la classe des couples $((f_i)_{i\in I}, e)$ tels que $(f_i)_{i\in I} \in \mathcal{J}(C^{\cdot})$ et $\alpha(f_i) = e$ pour tout $i \in I$. C^* opère sur $\Sigma(\mathcal{J})$ relativement à la loi de composition κ'_1 :

$$(g, ((f_i)_{i\in I}, e)) \to ((f_i \cdot g)_{i\in I}, \alpha(g)) \text{ si, et seulement si, } e = \beta(g).$$

$\mathcal{J}(C^{\cdot})$ opère sur $\Sigma(\mathcal{J})$ relativement à la loi de composition κ' :

$$((g_j)_{j\in J}, ((f_i)_{i\in I}, e)) \to ((g_i \cdot f_i)_{i\in I}, e)$$

si, et seulement si, $I = J$ et $(g_i, f_i) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ pour tout $i \in I$.

De plus $(\mathcal{J}(C^{\cdot}), C^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur $\Sigma(\mathcal{J})$ relativement à (κ', κ'_1). Soit $H^{\cdot}(\mathcal{J})$ la catégorie correspondante (§ 1) dont $\mathcal{J}(C^{\cdot})$ et $C^{\cdot}$ sont des sous-catégories pleines.

DEFINITION. *Un $(H^{\cdot}(\mathcal{J}), C)$-éjecteur $((f_i)_{i\in I}, e)$ est appelé* $\mathcal{J}$-produit naturalisé *dans $C^{\cdot}$; une $(H^{\cdot}(\mathcal{J}), C)$-éjection de $(h_i)_{i\in I}$ est appelée* $\mathcal{J}$-produit dans $C^{\cdot}$ *de $(h_i)_{i\in I}$. On dit que $C^{\cdot}$ est* une catégorie à $\mathcal{J}$-produits *si $H^{\cdot}(\mathcal{J})$ est une catégorie à C-éjections; une application (resp. un foncteur) $(H^{\cdot}(\mathcal{J}), C)$-éjection naturalisée est appelé* application *(resp.* foncteur*)* $\mathcal{J}$-produit. *)

Si $\mathcal{J}$ est la classe de tous les ensembles finis, non vides, d'entiers, une catégorie à $\mathcal{J}$-produits sera appelée *catégorie à produits finis.*

PROPOSITION. *Si $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$, $((f_i)_{i\in I}, e)$ est un $\mathcal{J}'$-produit dans $C^{\cdot}$ si, et seulement si, c'est un $\mathcal{J}$-produit dans $C^{\cdot}$ tel que $I \in \mathcal{J}'$.*

Nous supposerons que toutes les classes I d'indices considérées appartiennent
2 à une même classe $\mathfrak{M}_0$ de classes, qui contient avec une classe toute ses sous-classes et qui admet pour élément tout ensemble fini d'entiers; ainsi $\mathcal{J}$ désignera une sous-classe de $\mathfrak{M}_0$. Nous désignerons par $P(C^{\cdot})$ la classe de tous les $\mathfrak{M}_0$-produits. En vertu de la proposition précédente, on peut dire produit au lieu de $\mathcal{J}$-produit, ou de

*) La notion de produit naturalisé dans $C^{\cdot}$ est équivalente à celle de produit dans $C^{\cdot}$ au sens de [7], texte auquel nous renvoyons pour d'autres propriétés du produit.

$\mathfrak{M}_o$ - produit.

PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) h *est un produit de* $(h_i)_{i \in I}$ *dans* $C^{\cdot}$.

2) Il existe $((h_i, f'_i, f_i, h)_{i \in I}, h^{\square\square}) \in P(\square\square C^{\cdot})$ *et* $((f'_i{}^{\boxminus})_{i \in I}, \beta(h)^{\square\square}) \in P(\square\square C^{\cdot})$.

COROLLAIRE. *Si* h' *et* h *sont deux produits de* $(h_i)_{i \in I}$ *dans* $C^{\cdot}$, *il existe* $\gamma \in C^{\cdot}_{\gamma}$ *et* $\gamma' \in C^{\cdot}_{\gamma}$ *tels que* $h' . \gamma = \gamma' . h$.

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie à $\mathfrak{J}$- produits. Soit (Π, π) un foncteur $\mathfrak{J}$- produit naturalisé. On posera :

$$\Pi((h_i)_{i \in I}) = \prod_{i \in I} h_i \qquad \text{ou} \qquad \Pi((h_i)_{i \leq n}) = h_1 \times \ldots \times h_n .$$

Soit $e_i \in C^{\cdot}_o$ pour tout $i \in I$ et $\pi((e_i)_{i \in I}) = ((p_i)_{i \in I}, e)$; on appellera p_i la *projection canonique* de $\prod_{i \in I} e_i$ sur e_i. Si $g_i \in C$, $\alpha(g_i) = e'$ et $\beta(g_i) = e_i$ pour tout $i \in I$, nous représenterons par $[g_i]_{i \in I}$ (ou $[g_1, \ldots, g_n]$ si I est fini) l'unique élément de C tel que :

$$p_i . [g_i]_{i \in I} = g_i \text{ pour tout } i \in I .$$

Soit $(\hat{C}^{\cdot}, p, C^{\cdot}) = \overline{p}$ un foncteur; soit p_{γ} la restriction de p à $C^{\cdot}_{\gamma}$. $\overline{p}$ s'étend en un foncteur $\mathfrak{J}(\overline{p})$ de $H^{\cdot}(\mathfrak{J})$ vers $\hat{H}^{\cdot}(\mathfrak{J})$ en posant :

$$\mathfrak{J}(\overline{p})((h_i)_{i \in I}) = (p(h_i))_{i \in I}, \qquad \text{où } h_i \in C,$$

$$\mathfrak{J}(\overline{p})((f_i)_{i \in I}, e) = ((p(f_i))_{i \in I}, p(e)), \qquad \text{où } f_i \in C \text{ et } e = \alpha(f_i).$$

PROPOSITION. *Si* $(\hat{C}^{\cdot}_{\gamma}, p_{\gamma}, C^{\cdot}_{\gamma})$ ***est de plus un foncteur bien fidèle*** *les conditions* $((f_i)_{i \in I}, e) \in P(C^{\cdot})$, $((f'_i)_{i \in I}, e') \in P(C^{\cdot})$, $\beta(f_i) = \beta(f'_i)$, $p(f_i) = p(f'_i)$ *et* $((p(f_i))_{i \in I}, p(e)) \in P(\hat{C}^{\cdot})$ *entraînent* $e = e'$.

DEFINITION. ***On dira que*** $\overline{p}$ ***est* compatible avec les** $\mathfrak{J}$**- produits *si on a*** $\mathfrak{J}(\overline{p})(P(C^{\cdot})) \subset P(\hat{C}^{\cdot})$. ***Si*** $\hat{\pi}$ ***est une application*** $\mathfrak{J}$***- produit naturalisé dans*** $\hat{C}^{\cdot}$, ***on dira que*** $\overline{p}$ ***est*** $\hat{\pi}$**- compatible *s'il existe une application*** $\mathfrak{J}$***- produit naturalisé*** π ***dans*** $C^{\cdot}$ ***appliquée sur*** $\hat{\pi}$ ***par*** 1
$\mathfrak{J}(\overline{p})$.

PROPOSITION. ***Soit*** $(\hat{\Pi}, \hat{\pi})$ ***un foncteur*** $\mathfrak{J}$***- produit naturalisé dans*** $\hat{C}^{\cdot}$ ***et supposons que*** $\overline{p}$ ***est*** $\hat{\pi}$***- compatible. Il existe un foncteur*** $\mathfrak{J}$***- produit naturalisé*** (Π, π) ***dans*** $C^{\cdot}$ ***tel que:***

$$p\Big(\prod_{i \in I} h_i\Big) = \prod_{i \in I} p(h_i) \qquad si \quad h_i \in C.$$

Si $g_i \in C$ *et* $\alpha(g_i) = e'$ *pour tout* $i \in I$, *on a :* $p([g_i]_{i \in I}) = [p(g_i)]_{i \in I}$.

PROPOSITION. ***Si*** $C^{\cdot}$ ***et*** $\hat{C}^{\cdot}$ ***sont des catégories à produits finis et si*** $\overline{p}$ ***est compatible avec les*** $\{1, 2\}$***- produits, alors*** $\overline{p}$ ***est compatible avec les produits finis.***

THEOREME. ***Soit*** $\hat{\pi}$ ***une application produit fini naturalisé dans*** $C^{\cdot}$ ***et soit*** $\hat{\pi}_2$ ***sa*** *restriction à* $\hat{C}^{\bullet}_{o} \times \hat{C}^{\bullet}_{o}$. *Si* $\bar{p}$ *est* $\hat{\pi}_2$*-compatible et si* $(\hat{C}^{\bullet}_{\gamma}, p_{\gamma}, C^{\bullet}_{\gamma})$ *est une catégorie d'hypermorphismes saturée, alors* $\bar{p}$ *est* $\hat{\pi}$*-compatible.*

Soit $(\hat{C}^{\bullet}, p, C^{\bullet})$ un foncteur fidèle (respectivement soit $(\hat{C}^{\bullet}, p, C^{\bullet}, C^{\bullet}_{\gamma})$ une catégorie d'homomorphismes). Soit $\hat{\pi}$ une application produit fini naturalisé dans
1 $\hat{C}^{\bullet}$. Pour que $\bar{p}$ soit compatible avec les produits finis (resp. soit $\hat{\pi}$-compatible), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées, où $s_i \in C^{\bullet}_{o}$, $i = 1, 2$ et $\hat{\pi}(p(s_1), p(s_2)) = ((\hat{p}_1, \hat{p}_2), \hat{e})$:

1) Il existe $s_1 \times s_2 \in C^{\bullet}_{o}$ tel que $p(s_1 \times s_2) = p(s_1) \times p(s_2)$;

2) Il existe $p_i \in C$ tels que $\alpha(p_i) = s_1 \times s_2$, $\beta(p_i) = s_i$ et $p(p_i) = \hat{p}_i$,

3) Si $g_i \in C$, $\alpha(g_i) = s'$ et $\beta(g_i) = s_i$, il existe $[g_1, g_2] \in C$ tel que :

$$\alpha([g_1, g_2]) = s', \ \beta([g_1, g_2]) = s_1 \times s_2 \text{ et } p([g_1, g_2]) = [p(g_1), p(g_2)].$$

PROPOSITION. *Soient* $C^{\bullet}$ *et* $\hat{C}^{\bullet}$ *des catégories à* $\{I\}$*-produits. Si* $\bar{p}$ *est compatible avec les* $\{I\}$*-produits et si on a* $j_i \in C^{\bullet}(\hat{C}, p)_{-}$ *pour tout* $i \in I$, *tout produit de* $(j_i)_{i \in I}$ *est une* $(\hat{C}, p)$*-injection.*

CATEGORIE D'HOMOMORPHISMES A PRODUITS AU-DESSUS DE $\mathfrak{M}$.

Soit $\mathfrak{M}$ une catégorie pleine d'applications telle que $\mathfrak{M}_o$ contienne avec une classe toutes ses parties, avec 2 classes leur produit. Soit (Π, π) le foncteur produit naturalisé dans $\mathfrak{M}$ tel que :

$$\pi((M_i)_{i \in I}) = ((p_i)_{i \in I}, \prod_{i \in I} M_i), \text{ où } p_i(x_i)_{i \in I} = x_i.$$

DEFINITION. *Soit* $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H})$ *un foncteur et soit* $s_i \in \mathcal{H}_o$ *; on dira que* $(s_i)_{i \in I}$ admet $((\bar{p}_i)_{i \in I}, S)$ pour produit dans $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H})$ *et on posera :* $S = \prod_{i \in I} s_i$, *si* $((\bar{p}_i)_{i \in I}, S)$ *est un produit naturalisé de* $(s_i)_{i \in I}$ *dans* $\mathcal{H}$ *tel que* $p(\bar{p}_i)$ *soit la projection canonique de* $\prod_{i \in I} p(s_i)$ *sur* $p(s_i)$.

Soit $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H}, .)$ une catégorie d'homomorphismes.

2 PROPOSITION. *Si* $s \in \mathcal{H}_o$, *si* $(s)_{i \in I}$ *admet un produit* $((\bar{p}_i)_{i \in I}, S)$ *dans* $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H})$ *et s'il existe* $s_\delta \underset{p}{\ulcorner} S$ *tel que* $p(s_\delta)$ *soit la diagonale* Δ *de* $p(S)$, *il existe* $\bar{\delta} \in \mathcal{H}_\gamma$ *tel que* $\alpha(\bar{\delta}) = s$, $\beta(\bar{\delta}) = s_\delta$ *et :*

$$p(\bar{\delta}) = (\Delta, [p(s)]_{i \in I}, p(s)).$$

DEFINITION. *Soit* $s \in \mathcal{H}_o$ *; si* $(s)_{i \in I}$ *admet un produit* $((\bar{p}_i)_{i \in I}, S)$ *dans* $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H})$ *et s'il existe* $s_\delta \underset{p}{\ulcorner} S$ *tel que* $p(s_\delta)$ *soit la diagonale de* $p(S)$ *on dira que* s_δ *est* une structure diagonale de $(s)_{i \in I}$ *et on appellera l'élément* $\bar{\delta}$ *de* $\mathcal{H}_\gamma$, *dont l'existence est assurée par la proposition ci-dessus,* l'isomorphisme diagonal de $(s)_{i \in I}$.

PROPOSITION. *Supposons* $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H}, .)$ *résolvante à droite (resp. saturée). Si* $(s)_{i \leq n}$ *admet* $((\bar{p}_i)_{i \leq n}, S)$ *pour produit dans* $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H})$*, il existe une structure diagonale* s_δ *de* $(s)_{i \leq n}$.

PROPOSITION. *Soient* $s \in \mathcal{H}_o$ *et* $s' \in \mathcal{H}_o$. *Supposons que* $(s)_{i \in I}$ *et* $(s')_{i \in I}$ *admettent des produits* $((\bar{p}_i)_{i \in I}, S)$ *et* $((\bar{p}'_i)_{i \in I}, S')$ *dans* $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H})$ *et des structures diagonales* s_δ *et* s'_δ *respectivement. On a :* $s \underset{p}{\nearrow} s'$ *si, et seulement si,* $S \underset{\bar{p}}{\nearrow} S'$. *Soit* ρ *une relation d'équivalence sur* $p(s)$. *S'il existe* $j \in \mathcal{H}(\mathfrak{M}, p)$ *tel que* $\alpha(j) = S$, $\beta(j) = S'$ *et* $p(j) = \prod_{i \in I} \tilde{\rho}$, *alors* s' *est la* p*-structure quotient de* s *par* ρ [2].

DEFINITION. *On dira que la catégorie d'homomorphismes* $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H}, .)$ *est* à produits finis *si* $\bar{p} = (\mathfrak{M}, p, \mathcal{H})$ *est un foncteur* π*-compatible; on munit toujours* $\mathcal{H}$ *du foncteur produit naturalisé* $(\bar{\Pi}, \bar{\pi})$ *tel que* $\bar{\pi}$ *soit appliqué sur* π *par* $\mathcal{J}(\bar{p})$.

Cette définition est équivalente à celle donnée dans [1], II.

PRODUITS FIBRES.

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie et $\mathcal{J}$ une classe de classes. Soit $\mathcal{J}(\boxminus C^{\cdot})$ la catégorie des familles de $\boxminus C^{\cdot}$. Soit $Q(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ la sous-classe de $\mathcal{J}(\boxminus C^{\cdot})$ formée des familles $(q_i)_{i \in I}$ telles que $I \in \mathcal{J}$ et $\beta^{\boxminus}(q_i) = \beta^{\boxminus}(q_j)$ pour tout $i, j \in I$. Alors $Q^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{J}(\boxminus C^{\cdot})$ et nous identifierons sa classe des unités à la classe des familles $(f_i)_{i \in I}$ de C telles que $\beta(f_i) = e$ pour tout $i \in I$.

Soit $\tilde{\Sigma}(\mathcal{J})$ la classe des familles $(h_i, f_i)_{i \in I}$ telles que :

$$f_i \in C, \quad h_i \in C \quad \text{et} \quad h_i . f_i = h_j . f_j \text{ pour tout } i, j \in I.$$

$Q^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ opère sur $\tilde{\Sigma}(\mathcal{J})$ relativement à la loi de composition $\tilde{\kappa}'$:

$$((q_i)_{i \in I}, (h_i, f_i)_{i \in I}) \to (h'_i, k_i . f_i)_{i \in I}, \text{ si } q_i = (k', h'_i, h_i, k_i).$$

C^* opère sur $\tilde{\Sigma}(\mathcal{J})$ relativement à la loi de composition $\tilde{\kappa}'_1$:

$$(h, (h_i, f_i)_{i \in I}) \to (h_i, f_i . h)_{i \in I} \text{ si } \alpha(f_i) = \beta(h).$$

De plus $(Q^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J}), C^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur $\tilde{\Sigma}(\mathcal{J})$ relativement à $(\tilde{\kappa}', \tilde{\kappa}'_1)$. Soit $\tilde{H}^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ la catégorie correspondante, dont $Q^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J})$ et $C^{\cdot}$ sont des sous-catégories pleines (§ 1).

DEFINITION. *Un* $(\tilde{H}^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J}), C)$*-éjecteur* $(h_i, f_i)_{i \in I}$ *est appelé* un $\mathcal{J}$-produit fibré naturalisé de $(h_i)_{i \in I}$ dans $C^{\cdot}$. *Une* $(\tilde{H}^{\cdot}(C^{\cdot}, \mathcal{J}), C)$*-éjection de* $(q_i)_{i \in I}$ *est appelée* un $\mathcal{J}$-produit fibré de $(q_i)_{i \in I}$ *dans* $C^{\cdot}$. *Si* $(h_i, f_i)_{i \in I}$ *est un* $\mathcal{J}$*-produit fibré naturalisé dans* C^*, *on dira que* $(h_i, f_i)_{i \in I}$ *est* une $\mathcal{J}$- somme fibrée naturalisée dans $C^{\cdot}$.

PROPOSITION. *Si* $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$, *un* $\mathcal{J}$*-produit fibré naturalisé* $(h_i, f_i)_{i \in I}$ *dans* $C^{\cdot}$ *tel que*

$I \in \mathcal{I}'$ est un $\mathcal{I}'$-produit fibré naturalisé dans $C^\bullet$; en particulier, c'est un $\{I\}$-produit fibré naturalisé dans $C^\bullet$.

Comme plus haut, nous supposerons que toutes les classes $\mathcal{I}$ sont des sous-classes de $\mathfrak{M}_0$. Nous désignerons par $V(C^\bullet)$ la classe des $\mathfrak{M}_0$-produits fibrés naturalisés dans $C^\bullet$ et un élément de $V(C^\bullet)$ sera simplement appelé produit fibré naturalisé.

PROPOSITION. *Pour que $((f_i)_{i\in I}, e)$ soit un produit naturalisé dans $C^\bullet$, il faut et il suffit que $((a, \beta(f_i)), f_i)_{i\in I}$ soit un produit fibré naturalisé dans la catégorie $\overline{C}^\bullet$ obtenue en ajoutant à $C^\bullet$ un $\emptyset$-produit $a \notin C$ (par la construction du § 1).*

PROPOSITION. *On a $(h, f) \in V(C^\bullet)$ si, et seulement si $(h, f) \in C^\bullet {*} C^\bullet$ et $f \in C^\bullet_\gamma$.*

PROPOSITION. *Supposons $q_i = (k', h'_i, h_i, k_i) \in \square C^\bullet$ pour tout $i \in I$ et $k_i \in R_g(C^\bullet)$. Les conditions $(h'_i, k_i . f_i)_{i\in I} \in V(C^\bullet)$ et $h_i . f_i = h_j . f_j$ pour tout $i, j \in I$ entraînent $(h_i, f_i)_{i\in I} \in V(C^\bullet)$; en particulier si $q_i \in (\boxminus C^\bullet)_\gamma$, on a $(h_i, f_i)_{i\in I} \in V(C^\bullet)$ si, et seulement si, $(h'_i, k_i . f_i)_{i\in I} \in V(C^\bullet)$.*

PROPOSITION. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) k est un produit fibré de $(q_i)_{i\in I}$ dans $C^\bullet$.

2) Il existe $(q_i, (k_i, f'_i, f_i, k))_{i\in I} \in V(\boxminus C^\bullet)$ et $(\beta^{\boxminus}(q_i), f'^{\boxminus}_i)_{i\in I} \in V(\boxminus C^\bullet)$.

THEOREME. *La classe $V'(C^\bullet)$ des quatuors (h_2, h_1, f_2, f_1) tels que l'on ait $(h_i, f_i)_{i=1,2} \in V(C^\bullet)$ est une sous-catégorie saturée de $\boxminus C^\bullet$.*

DEFINITION. *On dira que $C^\bullet$ est* une catégorie à $\mathcal{I}$-produits fibrés *si $\tilde{H}^\bullet(C^\bullet, \mathcal{I})$ est une catégorie à C-éjections; une application (resp. un foncteur) $(\tilde{H}^\bullet(C^\bullet, \mathcal{I}), C)$-éjection naturalisée est appelé* application *(resp.* foncteur*)* $\mathcal{I}$-produit fibré naturalisé dans $C^\bullet$.

Si $\mathcal{I}$ est la classe de tous les ensembles finis d'entiers non vides, une catégorie à $\mathcal{I}$-produits fibrés sera appelée *catégorie à produits fibrés finis.*

Soit $C^\bullet$ une catégorie à $\mathcal{I}$-produits fibrés; un foncteur $\mathcal{I}$-produit fibré naturalisé sera généralement désigné par (V, ν) et on posera :

$$V((q_i)_{i\in I}) = \bigvee_{i\in I} q_i \quad \text{ou} \quad V((q_i)_{i\leq n}) = q_1 \vee \ldots \vee q_n .$$

Soit $h_i \in C$ et $\beta(h_i) = \beta(h_j)$ pour tout $i, j \in I$. Si on a :

$$\nu((h_i)_{i\in I}) = (h_i, \nu_i)_{i\in I},$$

on appelle ν_i la projection canonique de $\bigvee_{i\in I} h_i$ dans $\alpha(h_i)$ et on désigne souvent cette projection par $\nu_i(h_j)_{j\in I}$. Si $g_i \in C$ et $h_i . g_i = h_j . g_j$ pour tout $i, j \in I$, l'unique élément g de C tel que $f_i . g = g_i$ sera noté $[h_i \mid g_i]_{i\in I}$.

Soit $(\hat{C}^\bullet, p, C^\bullet) = \overline{p}$ un foncteur; soit p_γ la restriction de p à $C^\bullet_\gamma$. $\overline{p}$ s'étend en un foncteur $\tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})$ de $\tilde{H}^\cdot(C^\cdot, \mathcal{J})$ vers $\tilde{H}^\cdot(\hat{C}^\cdot, \mathcal{J})$ en posant :

$$\tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})((q_i)_{i\in I}) = (\Box p(q_i))_{i\in I}, \qquad \text{si } (q_i)_{i\in I} \in Q^\cdot(C^\cdot, \mathcal{J}),$$
$$\tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})((h_i, f_i)_{i\in I}) = (p(h_i), p(f_i))_{i\in I}, \qquad \text{si } (h_i, f_i)_{i\in I} \in \tilde{\Sigma}(\mathcal{J}).$$

PROPOSITION. *Si* $(\hat{C}^\cdot_\gamma, p_\gamma, C^\cdot_\gamma)$ *est de plus un foncteur bien fidèle, les conditions* $(h_i, f_i)_{i\in I} \in V(C^\cdot)$, $(h_i, f'_i)_{i\in I} \in V(C^\cdot)$, $p(f_i) = p(f'_i)$ *pour tout* $i \in I$ *et* $(p(h_i), p(f_i))_{i\in I} \in V(\hat{C}^\cdot)$ *entraînent* $f_i = f'_i$.

DEFINITION. *On dira que* $\overline{p}$ *est* compatible avec les $\mathcal{J}$-produits fibrés *si on a :* $\tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})(V(C^\cdot)) \subset V(\hat{C}^\cdot)$. *Si* $\hat{\nu}$ *est une application* $\mathcal{J}$*-produit fibré naturalisée dans* $\hat{C}^\cdot$, *on dira que* $\overline{p}$ *est* $\hat{\nu}$-compatible *s'il existe une application* $\mathcal{J}$*-produit fibré naturalisé* ν *dans* $C^\cdot$ *telle que* $\hat{\nu}\tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})_0 = \tilde{\mathcal{J}}(\overline{p})\nu$, *et on dira que* ν *est* appliquée par $\overline{p}$ sur $\hat{\nu}$.

THEOREME. *Soit* $\hat{\nu}$ *une application* $\mathcal{J}$*-produit fibré naturalisé dans* $\hat{C}^\cdot$ *et soit* $\hat{\nu}_2$ *sa restriction à la classe des* $(\hat{h}_1, \hat{h}_2) \in \hat{C} \times \hat{C}$ *tels que* $\beta(\hat{h}_1) = \beta(\hat{h}_2)$. *Si* $\overline{p}$ *est* $\hat{\nu}_2$*-compatible et si* $(\hat{C}^\cdot_\gamma, p_\gamma, C^\cdot_\gamma)$ *est une catégorie d'hypermorphismes saturée,* $\overline{p}$ *est* $\hat{\nu}$*-compatible.*

PROPOSITION. *Soient* $C^\cdot$ *et* $\hat{C}^\cdot$ *des catégories à* $\{I\}$*-produits et supposons* $\overline{p}$ *compatible avec les* $\{I\}$*-produits. Si on a* $q_i = (k', h'_i, h_i, k_i) \in \Box C^\cdot$ *et si* k' *et* k_i *sont des* $(\hat{C}, p)$*-injections pour tout* $i \in I$, *alors tout produit fibré de* $(q_i)_{i\in I}$ *est une* $(\hat{C}, p)$*-injection.*

Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie d'applications déjà considérée. Soient h_i des applications de M_i dans M, où i appartient à une classe finie I. Alors $(h_i)_{i\in I}$ admet pour produit fibré dans $\mathfrak{M}$ la sous-classe $\underset{i\in I}{\mathrm{V}} M_i$ de $\prod_{i\in I} M_i$ ayant pour éléments les $(x_i)_{i\in I}$ tels que :

$$h_i(x_i) = h_j(x_j) \text{ pour tout } i, j \in I,$$

la projection canonique $\nu_i = \nu_i(h_i)_{i\in I}$ étant la restriction de p_i à $\underset{i\in I}{\mathrm{V}} M_i$, où p_i est la projection canonique de $\prod_{i\in I} M_i$ sur M. Nous désignerons toujours par (V, ν) le foncteur produit fibré naturalisé tel que :

$$\nu((h_i)_{i\in I}) = (h_i, \nu_i)_{i\in I}.$$

DEFINITION. *Soit* $(\mathfrak{M}, p, C^\cdot)$ *un foncteur et soit* $h_i \in C$, $\beta(h_i) = \beta(h_j)$ *pour tout* $i, j \in I$. *On dira que* $(h_i, f_i)_{i\in I}$ *est* un produit fibré naturalisé dans $(\mathfrak{M}, p, C^\cdot)$ *si* $(h_i, f_i)_{i\in I} \in V(C^\cdot)$ *et si* $p(f_i) = \nu_i(p(h_i))_{i\in I}$. *On dira qu'une catégorie d'homomorphismes* $(\mathfrak{M}, p, C^\cdot, C^\cdot_\gamma)$ *est* à produits fibrés finis *si* $(\mathfrak{M}, p, C^\cdot)$ *est* ν-compatible.

THEOREME. *Supposons que* $\overline{p} = (\hat{C}^\cdot, p, C^\cdot)$ *soit un foncteur fidèle et soit* $h_i \in C$ *tel que* $\beta(h_i) = \beta(h_j)$ *pour tout* $i, j \in I$. *Supposons qu'il existe un produit naturalisé*

$((p_i)_{i \in I}, S)$ de $(\alpha(h_i))_{i \in I}$ dans $C^{\bullet}$ tel que l'on ait $(p(p_i)_{i \in I}, p(S)) \in P(\hat{C}^{\bullet})$ et qu'il existe $(p(h_i), \hat{v}_i)_{i \in I} \in V(\hat{C}^{\bullet})$. Pour qu'il existe $(h_i, v_i)_{i \in I} \in V(C^{\bullet})$ tel que $p(v_i) = \hat{v}_i$, il faut et il suffit qu'il existe une $(\hat{C}, p)$-injection k telle que $\beta(k) = S$ et $p(p_i) \cdot p(k) = \hat{v}_i$; dans ce cas, on a $(h_i, p_i \cdot k)_{i \in I} \in V(C^{\bullet})$.

COROLLAIRE 1. *Si $(\mathfrak{M}, p, C^{\bullet}, C^{\bullet}_{\gamma})$ est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite et à produits finis, c'est une catégorie d'homomorphismes à produits fibrés finis.*

COROLLAIRE 2. *$(\mathfrak{M}, p_{\mathfrak{N}}, \mathfrak{N}, .)$, $(\mathfrak{M}, p_{\mathfrak{N}'}, \mathfrak{N}', .)$ et $(\mathfrak{M}, p_{\mathfrak{F}}, \mathfrak{F}, .)$ sont des catégories d'homomorphismes à produits fibrés finis.*

PROPOSITION. *Soit $(C^{\bullet}_j)_{j \in I}$ une famille de catégories. Si $(h^j_i, f^j_i)_{i \in I}$ est un produit fibré naturalisé dans $C^{\bullet}_j$, pour tout $j \in I$, on a :*

$$H = ((h^j_i)_{j \in J}, (f^j_i)_{j \in J})_{i \in I} \in V(\prod_{j \in J} C^{\bullet}_j).$$

De plus les projections canoniques $\overline{p}_j = (C^{\bullet}_j, p_j, \prod_{j \in J} C^{\bullet}_j)$ sont compatibles avec les produits fibrés.

COROLLAIRE. *Si $C^{\bullet}_j$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-produits fibrés pour tout $j \in J$, alors $\prod_{j \in J} C^{\bullet}_j$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-produits fibrés.*

COROLLAIRE. *Soit $C^{\bullet}_j$ une catégorie, où $j \in J$. Si on a $((f^j_i)_{i \in I}, e^j) \in P(C^{\bullet}_j)$ pour tout $j \in J$, on a $F = (((f^j_i)_{j \in J})_{i \in I}, (e^j)_{j \in J}) \in P(\prod_{j \in J} \underline{C^{\bullet}_j})$. Si $C^{\bullet}_j$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-produits, $\prod_{j \in J} C^{\bullet}_j$ est une catégorie à $\mathfrak{I}$-produits et $\overline{p}_j$ est un foncteur compatible avec les $\mathfrak{I}$-produits.*

THEOREME. *Soit $(q_j)_{j \in J} \in Q(\mathfrak{F}, \{J\})$, où $q_j = (\Phi', \hat{H}_j, H_j, \overline{\Phi}_j)$ et $\overline{\Phi}_j = (\hat{K}^{\bullet}_j, \Phi_j, K^{\bullet}_j)$. Soit $\overline{\Phi} = \bigvee_{j \in J} q_j$. Soit H^s_j la restriction de H_j à la sous-catégorie $K^s_j = K^{\bullet}_j(K_j, \Phi_j)_{\smile}$. Les conditions :*

$$(f_j)_{j \in J} \in \bigvee_{j \in J} H^s_j \quad \text{et} \quad H_j(f_j) \in R_d(\alpha(\Phi'))$$

entraînent $(f_j)_{j \in J} \in (\bigvee_{j \in J} H_j)(\bigvee_{j \in J} \hat{H}_j, \overline{\Phi})_{\smile}$. De même si H^i_j est la restriction de H_j à $K^{\bullet}_j(\hat{K}_j, \Phi_j)_{\frown}$, les conditions $(f'_j)_{j \in J} \in \bigvee_{j \in J} H^i_j$ et $H_j(f'_j) \in R_g(\alpha(\Phi'))$ entraînent que $(f'_j)_{j \in J}$ est une $(\bigvee_{j \in J} \hat{H}_j, \overline{\Phi})$-injection.

COROLLAIRE. *Soit $\overline{H}_j = (C^{\bullet}, H_j, K^{\bullet}_j)$ un foncteur, pour tout $j \in J$. Soit $(\overline{H}_j, \overline{v}_j)_{j \in J} \in V(\mathfrak{F})$. Si f_j est une $(C\ , H_j)$-surjection (resp. injection) et si $H_j(f_j) = f \in R_d(C^{\bullet})$ (resp. $\in R_g(C^{\bullet})$) pour tout $j \in J$, alors $\overline{f} = (f_j)_{j \in J}$ est une (K_j, v_j)-surjection (resp. injection et $\overline{f}$ est une $(C\ , H_j\ v_j)$-surjection (resp. injection).*

REMARQUE. Avec les notations précédentes, une $(C\ , H_j\ v_j)$ surjection peut ne pas être de la forme $(f_j)_{j \in J}$, où f_j est une $(C\ , H_j)$- surjection pour tout $j \in J$.

THEOREME. *Soit* $\overline{H}_j = (K^{\cdot}, H_j, K_j^{\cdot})$ *un foncteur et soit* $C_j^{\cdot}$ *une sous-catégorie pleine de* $K_j^{\cdot}$ *pour tout* $j \in J$. *Si* f_j *est un* $(C_j, K_j^{\cdot})$*-projecteur et si* $H_j(f_j) = f \in R_d(K^{\cdot})$ *pour tout* $j \in J$, *alors* $\overline{f} = (f_j)_{j \in J}$ *est un* $(\bigvee_{j \in J} H'_j, \bigvee_{j \in J} \overline{H}_j)$*-projecteur. Si* f'_j *est un* $(K_j^{\cdot}, C_j)$*-éjecteur et si* $H_j(f_j) = f \in R_g(K^{\cdot})$ *pour tout* $j \in J$, $(f'_j)_{j \in J}$ *est un* $(\bigvee_{j \in J} \overline{H}_j, \bigvee_{j \in J} H'_j)$*-éjecteur. On désigne par* H'_j *la restriction de* H_j *à* C_j.

COROLLAIRE 1. *Soit* $\overline{H}_j = (C^{\cdot}, H_j, C_j^{\cdot}) \in \mathfrak{F}$, *pour tout* $j \in J$. *Si on a* $((p_i^j)_{i \in I}, e^j) \in P(C_j^{\cdot})$, *si* $H_j(p_i^j) = p_i$ *et si* $p_i . g = p_i . g'$ *pour tout* $i \in I$ *entraîne* $g = g'$, *alors on a :*

$$(((p_i^j)_{j \in J})_{i \in I}, (e^j)_{j \in J}) \in P(\bigvee_{j \in J} \overline{H}_j).$$

COROLLAIRE 2. *Soit* $\overline{H}_j = (C^{\cdot}, H_j, C_j^{\cdot}) \in \mathfrak{F}$, $\overline{C}^{\cdot} = \bigvee_{j \in J} \overline{H}_j$, $\overline{h}_i = (h_i^j)_{j \in J} \in \overline{C}$, $\overline{f}_i = (f_i^j)_{j \in J} \in \overline{C}$ *et* $\sigma_j = (h_i^j, f_i^j)_{i \in I} \in V(C_j^{\cdot})$ *pour tout* $j \in J$. *Si les conditions* $H_j(f_i^j) . g = H_j(f_i^j) . g'$ *pour tout* $i \in I$ *entraînent* $g = g'$, *alors on a* $w = (\overline{h}_i, \overline{f}_i)_{i \in I} \in V(\overline{C})$.

COROLLAIRE 3. *Soient* $\overline{H}_j = (C^{\cdot}, H_j, C_j^{\cdot})$ *des foncteurs* π*-compatibles, où* π *est une application* $\mathfrak{I}$*-produit (resp.* $\mathfrak{I}$*-produit fibré) naturalisé dans* $C^{\cdot}$. *Si on a* $(\overline{H}_j, \overline{v}_j)_{j \in J} \in V(\mathfrak{F})$ *le foncteur* $\overline{H}_j . \overline{v}_j$ *est* π*-compatible.*

THEOREME. *La catégorie* $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ *des applications covariantes entre espèces de structures* $(C^{\cdot}, S_o, \kappa')$ *telles que* $C \in \mathfrak{M}_o$ *et* $S \in \mathfrak{M}_o$, *est une catégorie à* $\mathfrak{I}$*-produits fibrés, si* $\mathfrak{M}$ *est une catégorie à* $\mathfrak{I}$*-produits.*

Soit $\tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})$ la catégorie des homomorphismes entre catégories d'homomorphismes, dont les éléments sont les quadruplets (Π_1, F_1, F, Π) tels que $\Pi = (\hat{C}^{\cdot}, H, C^{\cdot}, S)$ et $\Pi_1 = (\hat{C}_1^{\cdot}, H_1, C_1^{\cdot}, S_1)$ soient des catégories d'homomorphismes et que l'on ait :

$$((\hat{C}_1^{\cdot}, H_1, C_1^{\cdot}), F_1, F, (\hat{C}^{\cdot}, H, C^{\cdot})) \in \square\mathfrak{F},$$

la loi de composition étant définie par :

$$(\Pi_3, F_3, F_2, \Pi_2) . (\Pi_1, F_1, F, \Pi) = (\Pi_3, F_3 . F_1, F_2 . F, \Pi)$$
$$\text{si, et seulement si, } \Pi_2 = \Pi_1.$$

$\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})$ ayant pour objets les Π tels que $C = S$.

THEOREME. *Si* $\mathfrak{M}$ *est une catégorie à* $\mathfrak{I}$*-produits,* $\tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})$ *est une catégorie à* $\mathfrak{I}$*-produits fibrés, de même que la sous-catégorie pleine de* $\tilde{\mathfrak{A}}(\mathfrak{M})$ *ayant pour objets les catégories d'homomorphismes saturées.*

4. Extensions de foncteurs et élargissements.

DEFINITION. *Soit* $\overline{p} = (K^\cdot, p, H^\cdot)$ *un foncteur. On dira qu'une sous-classe* F *de* K
1 *est* $\overline{p}$- admissible *si elle vérifie les conditions suivantes :*

1) $\alpha(F) = p(H_o^\cdot) \subset F$ *et* $F.p(H_\gamma^\cdot) \subset F$.

2) Si $f \in F$, *la condition* $f.g_1 = f.g_2$, *où* $g_i \in p(H)$, *entraîne* $g_1 = g_2$.

La condition 1 entraîne $p(H_\gamma^\cdot) \subset F$.

Soit $\overline{\mathcal{S}}_o$ (resp. $\mathcal{S}_o$) la classe des couples $(F, \overline{p})$, où $\overline{p} = (K^\cdot, p, H^\cdot) \in \mathcal{F}$, tels que F soit $\overline{p}$- admissible et que $(K^\cdot, p_\gamma, H_\gamma^\cdot)$ soit un foncteur fidèle (resp. bien fidèle, c'est-à-dire tel que deux éléments de $H_\gamma^\cdot$ ayant même source et même image par p_γ sont égaux), p_γ étant la restriction de p à $H_\gamma^\cdot$. Soit $\mathcal{S}'_o$ la classe des triplets $(F, C, \overline{q})$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\overline{q} = (K^\cdot, q, H^\cdot) \in \mathcal{F}$ et $(K^\cdot, q_\gamma, H_\gamma^\cdot)$ est un foncteur bien fidèle.

2) $C^\cdot$ est une sous-catégorie pleine de $H^\cdot$, et $H^\cdot$ est une catégorie à C- éjections; on a $q(E(H^\cdot, C)) \subset F$, en désignant par $E(H^\cdot, C)$ la classe des $(H^\cdot, C)$- éjecteurs.

3) F est une classe $(K^\cdot, q\iota, C^\cdot)$- admissible.

THEOREME. *Soit* $(F, \overline{p}) \in \overline{\mathcal{S}}_o$ *et* $\overline{p} = (K^\cdot, p, H^\cdot)$. *Il existe* $X(F, \overline{p}) \in \mathcal{S}'_o$ *et* $\overline{\sigma} \in \mathcal{F}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $X(F, \overline{p}) = (F, \overline{H}, (K^\cdot, \tilde{p}, \tilde{H}^\cdot))$ *et* $\overline{\sigma} = (\tilde{H}^\cdot, \sigma, H^\cdot)$ *est une* $p\mathcal{F}$- *surjection.*

2) Soit $\overline{F} = E(\tilde{H}^\cdot, \overline{H})$ *et* $s \in \tilde{H}_o^\cdot$; *la restriction de* $\tilde{p}$ *à* $\overline{F}.s$ *est une bijection sur* $F.\tilde{p}(s)$.

2 *3) Si* $(F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$, $\overline{\sigma}$ *est une équivalence.*

Soit $\boxminus(F, \overline{p})$ la catégorie des quadruplets (k, f', f, b) tels que :

$$(k, f', f, p(b)) \in \square K^\cdot, \qquad f' \in F,\ f \in F,\ b \in H,$$

la loi de composition étant définie par :

$$(k_1, f'_1, f_1, b_1) \boxminus (k, f', f, b) = (k_1.k, f'_1, f, b_1.b)$$

si, et seulement si, $f_1 = f'$ et $\alpha(b_1) = \beta(b)$.

La catégorie $\square\!\square(H^\cdot; H_\gamma^\cdot, H)$ opère à droite sur $\square(F, \overline{p})$ relativement à la loi de composition :

$$(k, f', f, b)(b, g', g, b_1) = (k, f'.p(g'), f.p(g), b_1).$$

$\tilde{H}^\cdot$ est la catégorie quotient de $\boxminus(F, \overline{p})$ par la relation d'équivalence ρ dont les classes d'équivalence sont les classes d'intransitivité de l'espèce de structures correspondante; $\tilde{p}$ est l'application :

$$(k, f', f, h) \bmod \rho \to k$$

et $\bar{\sigma}$ est le foncteur défini par :

$$h \to (h, \beta(h), \alpha(h), h) \bmod \rho .$$

DEFINITION. *Soit* $(F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_o$; $X(F, \bar{p})$ *sera appelé* l'extension canonique de $(F, \bar{p})$; *le foncteur* $\bar{\sigma}^{-1}$ *sera appelé* l'équivalence canonique associée *de* $\bar{H}^{\cdot}$ *sur* $H^{\cdot}$. 1

Soit $\mathcal{S}$ la catégorie dont les éléments sont de la forme $(\hat{p}_2, \hat{p}_1, U)$ où :

$$\hat{p}_i = (F_i, \bar{p}_i) \in \mathcal{S}_o,\ i = 1, 2,\quad U = (\bar{p}_2, \Phi', \Phi, \bar{p}_1) \in \square\mathcal{F},\ \Phi'(F_1) \subset F_2 ,$$

la loi de composition étant définie par :

$$(\hat{p}'_2, \hat{p}'_1, U').(\hat{p}_2, \hat{p}_1, U) = (\hat{p}'_2, \hat{p}_1, U' \boxminus U)$$

$$\text{si, et seulement si, } \hat{p}'_1 = \hat{p}_2 .$$

La classe des unités de $\mathcal{S}$ est identifiée à la classe $\mathcal{S}_o$.

Soit $\mathcal{S}'$ la catégorie dont les éléments sont de la forme $(\check{q}_2, \dot{q}_1, U)$ où :

$$\check{q}_i = (F_i, C_i, \bar{q}_i) \in \mathcal{S}'_o,\quad U = (\bar{q}_2, \Phi', \Phi, \bar{q}_1) \in \square\mathcal{F}, \Phi'(F_1) \subset F_2$$

et Φ est un foncteur (C_2, C_1)-compatible avec les éjections,

la loi de composition étant définie par :

$$(\check{q}'_2, \check{q}'_1, U').(\check{q}_2, \check{q}_1, U) = (\check{q}'_2, \check{q}_1, U' \boxminus U)$$

$$\text{si, et seulement si, } \check{q}'_1 = \check{q}_2 .$$

La classe des unités de $\mathcal{S}'$ est identifiée à $\mathcal{S}'_o$ et l'élément $(\check{q}_2, \check{q}_1, U)$ sera aussi désigné par le symbole $(\check{q}_2, \Phi', \Phi, \check{q}_1)$.

Soit $\mathcal{S}''$ la classe dont les éléments sont de la forme $(\hat{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_1)$, où :

$$\hat{p} = (F, \bar{p}) \in \mathcal{S}_o,\quad \check{q}_1 = (F_1, C_1, \bar{q}_1) \in \mathcal{S}'_o,\quad \Psi'(F_1) \subset F$$

et $(\bar{p}, \Psi', \Psi, \bar{q}'_1) \in \square\mathcal{F}$, $\bar{q}'_1$ désignant la restriction de $\bar{q}_1$ à $C^{\cdot}_1$.

$\mathcal{S}$ opère sur $\mathcal{S}''$ relativement à la loi de composition κ' :

$$((\hat{p}', \hat{p}, (\bar{p}', \Phi', \Phi, \bar{p})), (\hat{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_1)) \to ((\hat{p}', \Phi'.\Psi', \Phi.\Psi, \check{q}_1)$$

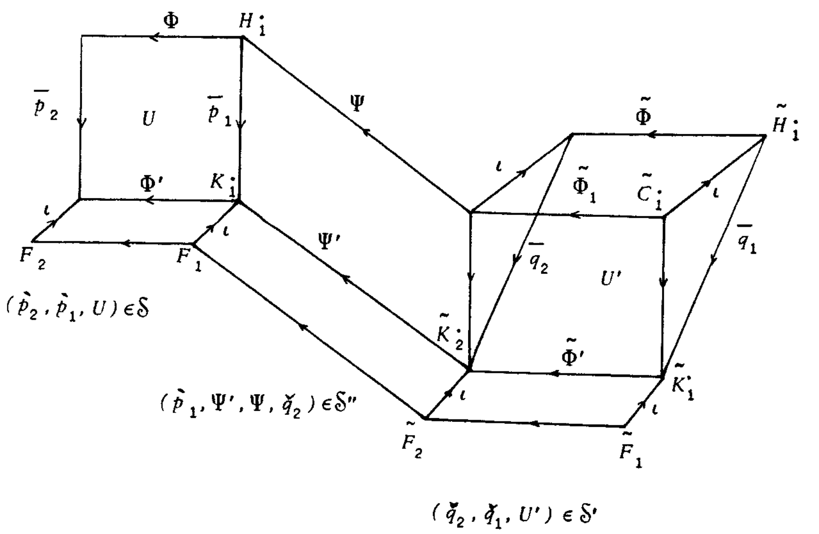
et la catégorie duale $\mathcal{S}'^*$ de $\mathcal{S}'$ opère sur $\mathcal{S}''$ relativement à la loi de composition $\bar{\kappa}'$:

$$((\check{q}_2, \Phi', \Phi, \check{q}_1), (\hat{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_2)) \to (\hat{p}, \Psi'.\Phi', \Psi.\Phi_1, \check{q}_1)$$

où Φ_1 est la restriction de Φ à $C^{\cdot}_1$ et $\check{q}_1 = (F_1, C_1, \bar{q}_1)$.

$(\mathcal{S}, \mathcal{S}'^*)$ est un couple de catégories d'opérateurs sur $\mathcal{S}''$ relativement à $(\kappa', \bar{\kappa}')$. Nous désignerons par $\tilde{\mathcal{S}}$ la catégorie correspondante (voir § 1) dont $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont des sous-catégories pleines; l'élément $(\hat{p}, \Psi', \Psi, \check{q}_1)$ de $\mathcal{S}''$ est un morphisme de $\tilde{\mathcal{S}}$, de source $\check{q}_1$, de but $\hat{p}$.

THEOREME. *$\tilde{\mathcal{S}}$ est une catégorie à $\mathcal{S}'$-éjections et il existe un foncteur $(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}')$-éjection naturalisé (X, ξ) tel que, pour tout $\hat{p} \in \mathcal{S}_0$, on ait $\xi(\hat{p}) = (\hat{p}, K^{\cdot}, \bar{\gamma}, X(\hat{p}))$,*
1 *où $X(\hat{p})$ est l'extension canonique de $\hat{p}$ et $\bar{\gamma}$ l'équivalence canonique associée.*



DEFINITION. *Un $(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}')$-éjecteur sera appelé* extenseur. *Une $(\tilde{\mathcal{S}}, \mathcal{S}')$-éjection de $m \in \mathcal{S}$ sera appelée* extension de m, *ou* extension de U à (F_2, F_1), *si $m = (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U)$ et $\hat{p}_i = (F_i, \bar{p}_i)$.*

Si $m = (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U) \in \mathcal{S}$ et $U = (\bar{p}_2, \Phi', \Phi, \bar{p}_1)$, l'extension canonique $X(m)$ de m est l'élément $(X(\hat{p}_2), \tilde{\Phi}', \tilde{\Phi}, X(\hat{p}_1))$, où $\tilde{\Phi}$ est le foncteur défini par l'application :

$$(k, f', f, h) \bmod \rho_1 \to (\Phi'(k), \Phi'(f'), \Phi'(f), \Phi(h)) \bmod \rho_2 .$$

PROPOSITION. *Pour que $\check{q} = (F, H, (K^{\cdot}, q, K_1^{\cdot})) \in \mathcal{S}'$ soit une extension de $\hat{p} = (F, (K^{\cdot}, q\iota, H^{\cdot}))$ il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1) Pour tout $s \in H_0^{\cdot}$, la restriction de q à $F_1 . s$, où $F_1 = E(K_1^{\cdot}, H)$, est une bijection sur $F . q(s)$.

2) Si $T = (f'_1, f_1, h) \in \sqsupset(F_1, K_1^{\cdot})$ et si $Q = (k, \sqsupset q(T)) \in \square(K^{\cdot}; F, K)$, il
2 *existe un et un seul $k_1 \in K_1$ tel que $q(k_1) = k$ et $(k_1, T) \in \square K_1^{\cdot}$.*

COROLLAIRE 1 *(transitivité verticale). Soit* $\hat{p} = (F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$, $\overline{p} = (K^\cdot, p, H^\cdot)$, $(\hat{p}, K^\cdot, \overline{\gamma}, (F, C, \overline{q}))$ *un extenseur et* $\overline{F} = E(\alpha(\overline{q}), C)$. *Soit* $\overline{p'} = (H^\cdot, p', L^\cdot) \in \mathfrak{F}$ *tel que* $H_o^\cdot = p'(L_o^\cdot)$ *et que* $\overline{p'_\gamma}$ *soit bien fidèle. Si* $(\overline{F}, \overline{L}, \overline{q'})$ *est une extension de* $(\overline{F}, \overline{\mu}.\overline{p'})$, *alors* $(\overline{F}, \overline{L}, \overline{q}.\overline{q'})$ *est une extension de* $(F, \overline{p}.\overline{p'})$ *où* $\overline{\mu} = (\alpha(\overline{q}), \iota, C^\cdot).\overline{\gamma}^{-1}$.

COROLLAIRE 2. *Soient* $m = ((F, \overline{p}), K^\cdot, \overline{\gamma}, (F, C, \overline{q}))$ *et* $m_1 = ((F_1, \overline{q}), K^\cdot, \overline{\gamma}_1, (F_1, C_1, \overline{q}_1))$ *deux extenseurs. Pour que* $(F'', \overline{\gamma}_1^{-1}(C), \overline{q}_1)$ *soit une extension de* $(F'', \overline{p})$, *il faut que* $F \cap F_1 \subset K_\gamma^\cdot$ *et* $F'' = F_1 . F$.

PROPOSITION. *Soit* $(F, L, \overline{q})$ *une extension de* $(F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$. *Si* $\overline{p}$ *est un foncteur fidèle,* $\overline{q}$ *est fidèle. Lorsque* $\overline{p}$ *est bien fidèle,* $\overline{q}$ *est bien fidèle si, et seulement si, les conditions* $f_i \in F$, $h_i \in H$, $\alpha(h_1) = \alpha(h_2)$ *et* $f_1 . \overline{p}(h_1) = f_2 . \overline{p}(h_2)$ *assurent l'existence d'un* $g \in H_\gamma^\cdot$ *tel que* $\alpha(g) = \beta(h_1)$ *et* $f_1 = f_2 . \overline{p}(g)$.

PROPOSITION. *Soit* $(F, C, \overline{q})$ *une extension de* $(F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$, *où* $\overline{p} = (K^\cdot, p, H^\cdot)$, *et supposons que les conditions* $f_i \in F$ *et* $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ *entraînent qu'il existe* $g \in F$ *tel que* $F.g \subset F$ *et* $f_2 = f_1 . g$ *(resp.* $\overline{g} \in H_\gamma^\cdot$ *tel que* $f_2 = f_1 . p(\overline{g})$*). Alors* $\overline{q_\gamma}$ *est une catégorie d'hypermorphismes (resp.* $\overline{q}$ *est une catégorie d'hypermorphismes si* $\overline{p}$ *en est une).*

1

THEOREME. *Soit* $\mathfrak{M}$ *une catégorie d'applications à* $\mathfrak{I}$*-produits;* $\tilde{\mathcal{S}}$ *est une catégorie à* 2
$\mathfrak{I}$*-produits et* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{S}'$ *sont des catégories à* $\mathfrak{I}$*-produits fibrés. Soit* $\tilde{m}_i$ *une extension de* $m_i \in \mathcal{S}$ *pour tout* $i \in I$; *alors* $\prod_{i \in I} \tilde{m}_i$ *est une extension de* $\prod_{i \in I} m_i$ *et, si* $\beta(m_i) = \beta(m_j)$ *pour tout* $i, j \in I$, $\bigvee_{i \in I} \tilde{m}_i$ *est une extension de* $\bigvee_{i \in I} m_i$, *où* $I \in \mathfrak{I}$.

DEFINITION. *Soit* $C^\cdot$ *une sous-catégorie d'une catégorie* $K^\cdot$. *On dira que* $K^\cdot$ *est* un
élargissement de $C^\cdot$ *si* $C^\cdot$ *est pleine dans* $K^\cdot$ *et si* $K_\gamma^\cdot$ *est une catégorie à* $C_\gamma^\cdot$*-* 3
éjections.

Cette définition est équivalente à celle donnée dans [5].

PROPOSITION. *Pour que* $K^\cdot$ *soit un élargissement de* $C^\cdot$, *il faut et il suffit que* $K^\cdot$ *soit une catégorie à* C*-éjections et que tout* $(K^\cdot, C)$*-éjecteur soit inversible dans* $K^\cdot$.

Soit $\hat{\mathcal{S}}$ la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{S}}$ ayant pour objets les $\hat{p} = (F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$ tels que $F \subset \beta(\overline{p})_\gamma$ et les éléments $(F, C, \overline{q}) \in \mathcal{S}'_o$, où $\overline{q} = (K^\cdot, q, H^\cdot)$, tels que $F \subset K_\gamma^\cdot$ et que $H^\cdot$ soit un élargissement de $C^\cdot$. Soit $\hat{\mathcal{S}}' = \mathcal{S}' \cap \hat{\mathcal{S}}$.

THEOREME. $\hat{\mathcal{S}}$ *est une catégorie à* $\hat{\mathcal{S}}'$*-éjections, admettant* $(\hat{X}, \hat{\xi})$ *pour foncteur* $(\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{S}}')$*-éjection naturalisé, où* $\hat{X}$ *et* $\hat{\xi}$ *sont des restrictions de* X *et* ξ.

COROLLAIRE. *Soit* $(F, C, \overline{q})$ *une extension de* $(F, \overline{p}) \in \mathcal{S}_o$ *et* $((F_1, \overline{q}), K^\cdot, \overline{\gamma}_1, (F_1, C_1, \overline{q}_1))$

un extenseur tel que $F \subset F_1$. *Pour que* $(F'', \overline{\gamma}^{-1}(C), \overline{q}_1)$ *soit une extension de* $(F'', \overline{p})$,
1 *il faut et il suffit que* $F \subset K^{\cdot}_{\gamma}$; *on a alors* $F'' = F_1 . F$.

DEFINITION. *Soit* $m = (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U) \in \hat{\mathcal{S}}$, *où* $\hat{p}_i = (F_i, \overline{p}_i)$. *On dira que* $U' = (\overline{q}_2, \Phi', \Phi, \overline{q}_1)$ *est un* élargissement de m *si* $\overline{p}_i$ *est une restriction de* $\overline{q}_i$, $i = 1, 2$ *et si* $(\check{q}_2, \check{q}_1, U')$
2 *est une* $(\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{S}}')$*-éjection de* m.

$\overline{q} \in \mathcal{F}$ est un élargissement de $\hat{p} = (F, \overline{p}) \in \hat{\mathcal{S}}_o$ si, et seulement si, $(\hat{p}, K^{\cdot}, H^{\cdot}, (F, H, \overline{q}))$ est un extenseur. $(\overline{q}_2, \Phi', \Phi, \overline{q}_1) \in \square\mathcal{F}$ est un élargissement de $(\hat{p}_2, \hat{p}_1, U)$ si, et seulement si, $\overline{q}_i$ est un élargissement de $\hat{p}_i$ et si $U = (\overline{p}_2, \Phi', \Phi_1, \overline{p}_1)$, où Φ_1 est une restriction de Φ.

PROPOSITION. *Il existe un foncteur* $(\hat{\mathcal{S}}, \hat{\mathcal{S}}')$*-éjection naturalisé* (X', ξ') *tel que, pour tout* $m \in \hat{\mathcal{S}}_o$, *on ait* $X'(m) = (\check{q}_2, \check{q}_1, U)$, *où* U *est un élargissement de* m.

PROPOSITION. *Soit* $(F, H, \overline{q}) \in \hat{\mathcal{S}}'_o$, $\overline{q} = (K^{\cdot}, q, K^{\cdot}_1)$ *et* $F_1 = E(K^{\cdot}_1, H)$. *Pour que* $\overline{q}$ *soit un élargissement de* $(F, (K^{\cdot}, q\iota, H^{\cdot}))$, *il faut et il suffit que* $\overline{q}$ *définisse une*
3 *bijection de* $F_1 . s$ *sur* $F . q(s)$, *pour tout* $s \in (K^{\cdot}_1)_o$.

Soit $\mathcal{F}'$ (resp. $\mathcal{F}''$) la sous-classe de $\mathcal{F}$ formée des foncteurs $\overline{p}$ tels que $\overline{p}_{\gamma}$ soit bien fidèle (resp. définisse une catégorie d'hypermorphismes). $\mathcal{F}'$ est identifié à la classe des unités de $\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$.

THEOREME. *Dans* $\mathcal{F}'$ *(resp.* $\mathcal{F}''$*) la relation :*

$\overline{p} \prec \overline{q}$ *si, et seulement si, il existe une classe* $\overline{p}$*-admissible* F *telle que* $\overline{q}$ *soit un élargissement de* $(F, \overline{p})$,

est une relation transitive (resp. de préordre). La classe des $\overline{q} \in \mathcal{F}''$ *tels que* $\overline{p} \prec \overline{q}$, *où* $\overline{p} \prec \mathcal{F}'$, *admet un élément minimal et un élément maximal dans* $(\mathcal{F}'', \prec)$.

COROLLAIRE. *Dans* $\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$ *(resp.* $\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}'')$*) la relation :*

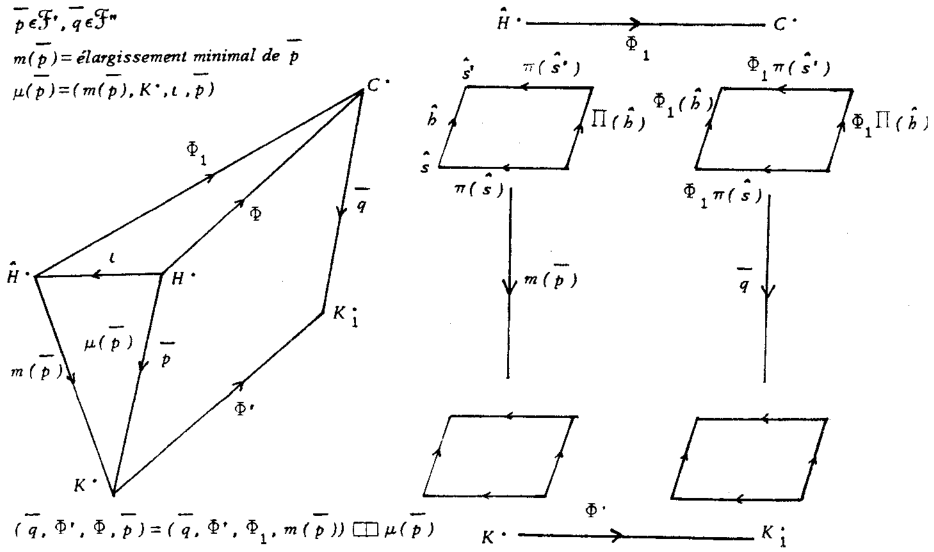
$U \prec \hat{U}$ *si, et seulement si, il existe* $m = (\hat{p}_2, \hat{p}_1, U) \in \hat{\mathcal{S}}$ *tel que* $\hat{U}$ *soit un élargissement de* m,

est une relation transitive (resp. de préordre). Pour tout $U \in \square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$ *la classe des* $\hat{U} \in \square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}'')$ *tels que* $U \prec \hat{U}$ *admet un élément minimal et un élément maximal*
4 *dans* $(\square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}''), \prec)$.

DEFINITION. *Soit* $U \in \square(\mathcal{F}; \mathcal{F}, \mathcal{F}')$; *si* $U \prec \hat{U}$, *on appelle* $\hat{U}$ *un élargissement de* U ; *si* $\hat{U}'$ *est un élément minimal (resp. maximal) pour la relation* $\prec$ *dans la classe des* $\hat{U}$ *tels que* $U \prec \hat{U}$, *on appelle* $\hat{U}'$ un élargissement minimal *(resp.* maximal) de U.

Soit $\mathcal{F}''_s$ la sous-classe de $\mathcal{F}''$ formée des $\overline{p} \in \mathcal{F}''$ tels que $\overline{p}_{\gamma}$ soit une catégorie d'hypermorphismes saturée.

THEOREME. *$\square\square(\mathcal{F};\mathcal{F},\mathcal{F}')$ est une catégorie à $\square(\mathcal{F};\mathcal{F},\mathcal{F}'')$-projections et à $\square(\mathcal{F};\mathcal{F},\mathcal{F}''_s)$-projections, un élargissement minimal de U étant une $(\square(\mathcal{F};\mathcal{F},\mathcal{F}''),\square\square(\mathcal{F};\mathcal{F},\mathcal{F}'))$-projection de U et un élargissement maximal de U étant une $(\square(\mathcal{F};\mathcal{F},\mathcal{F}''_s),\square\square(\mathcal{F};\mathcal{F},\mathcal{F}'))$-projection de U.* 1



DEFINITION. *Soit $\Pi=(K^\cdot,p,H^\cdot,C)$ une catégorie d'homomorphismes. On dira qu'une catégorie d'homomorphismes $\hat{\Pi}=(K^\cdot,\hat{p},\hat{H}^\cdot,\hat{C})$ est* un élargissement *(resp.* élargissement maximal) de Π *si $(K^\cdot,\hat{p},\hat{H}^\cdot)$ et $(K^\cdot,\hat{p}\iota,\hat{C}^\cdot)$ sont des élargissements (resp. maximaux) de $(K^\cdot,p,H^\cdot)$ et $(K^\cdot,p\iota,C^\cdot)$.*

PROPOSITION. *Soient $\Pi=(K^\cdot,p,H^\cdot,C)$ et $\hat{\Pi}=(K^\cdot,\hat{p},\hat{H}^\cdot,\hat{C})$ deux catégories d'homomorphismes, et $H^\cdot_\gamma\subset C$. Alors $\hat{\Pi}$ est un élargissement (resp. élargissement maximal) de Π si, et seulement si, $\hat{H}^\cdot$ est un élargissement de $H^\cdot$ et $\hat{C}^\cdot$ un élargissement de $C^\cdot$ (resp. tel que $\hat{\Pi}$ soit de plus saturée).*

Cette proposition montre que $\hat{\Pi}$ est un élargissement de Π si, et seulement si, $\hat{\Pi}$ est un élargissement de $H^\cdot$ au-dessus de $K^\cdot$, au sens de [5].

PROPOSITION. *Soit $\Pi=(K^\cdot,p,H^\cdot,C)$ une catégorie d'homomorphismes. Si $C=H^\cdot_\gamma$ (resp. si $p(C^\cdot_\gamma)$ est un sous-groupoïde plein de $K^\cdot_\gamma$), alors Π admet un élargissement maximal.* 2

REMARQUE. La condition plus faible indiquée dans le corollaire 2, p. 37 [5] n'est pas suffisante pour que Π admette un élargissement $\hat{\Pi}$.

5. Espaces de structures.

Nous aurons à utiliser la notion suivante :

DEFINITION. *On dira que* $(\mathfrak{M}, p, C^{\cdot}, .)$ *est* une catégorie d'homomorphismes avec atomes *si* $(\mathfrak{M}, p, C^{\cdot}, .)$ *est une catégorie d'homomorphismes saturée, à produits finis, si* $C^{\cdot}$ *admet un* $\emptyset$*-produit* $\bar{a}$ *tel que* $p(\bar{a})$ *soit l'ensemble ayant un seul élément* a *et si, pour tout* $s \in C^{\cdot}_{o}$ *tel que* $a \in p(s)$, *il existe* $h \in C$ *vérifiant* $\alpha(h) = \bar{a}$ *et* $\beta(h) = s$; *on appelle* $\bar{a}$ un atome de $(\mathfrak{M}, p, C^{\cdot}, .)$.

Cette définition entraîne que h est une $(\mathfrak{M}, p)$- injection.

PROPOSITION. *Soit* $(\mathfrak{M}, p, C^{\cdot}, .)$ *une catégorie d'homomorphismes à produits finis. Si* $s_i \in C^{\cdot}_{o}$, *où* $i = 1,2$ *et si* $C^{\cdot}$ *admet un* $\emptyset$*-produit* $\bar{a}$ *tel que* $p(\bar{a}) = \{a\}$, *où* $a \in p(s_1)$, *il existe* $h \in C^{\cdot}_{\gamma}$ *tel que* $\alpha(h) = s_2$ *et* $\beta(h) = \bar{a} \times s_2$.

COROLLAIRE. *Si* $(\mathfrak{M}, p, C^{\cdot}, .)$ *est une catégorie d'homomorphismes avec atomes et si* $s_i \in C^{\cdot}_{o}$, *où* $i = 1, 2$, *il existe* $h \in C^{\cdot}_{\gamma}$ *tel que :*

$$\alpha(h) = s_2, \quad \beta(h) \,{}_{\overline{p}}\, s_1 \times s_2 \quad \text{et} \quad p(\beta(h)) = \{x_1\} \times p(s_2),$$

1 *pour tout* $x_1 \in p(s_1)$.

Soit $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, .)$ une catégorie d'homomorphismes. Soit $\eta = (C^{\cdot}, S, \kappa')$ une espèce de structures et soit π' l'application $z \to e$ de S dans $C^{\cdot}_{o}$ telle que $(e, z) \in C^{\cdot} * S$. Si $((C^{\cdot}, s), \pi', (S, \sigma))$ est une $\mathcal{H}$- espèce de structures [4c] nous désignerons aussi cette $\mathcal{H}$- espèce de structures par le symbole $((C^{\cdot}, s), (S, \sigma), \kappa')$.

2 DEFINITION. *On appelle* $\mathcal{H}$- espace de structures *une* $\mathcal{H}$*- espèce de structures* $\bar{\eta} = ((C^{\cdot}, s), (S, \sigma), \kappa')$ *vérifiant la condition suivante : il existe une espèce de structures* (η, H) *dominée dans* $(q, \mathcal{H})$ *telle que, pour tout* $e \in C^{\cdot}_{o}$, *on ait* $H(e) \,{}_{\overline{q}}\, \sigma$. *On appelle alors* (η, H) l'espèce de structures dominée sous $\bar{\eta}$.

THEOREME. *Si* $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, .)$ *est une catégorie d'homomorphismes avec atomes toute*
3 $\mathcal{H}$*- espèce de structures est un* $\mathcal{H}$*- espace de structures.*

Si $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, .)$ n'est pas une catégorie d'homomorphismes avec atomes, une $\mathcal{H}$- espèce de structures peut ne pas être un $\mathcal{H}$- espace de structures. Ainsi pour qu'une $\mathcal{F}$ - espèce de structures $((C^{\cdot}, C^{\perp}), S^{\perp}, \kappa')$ soit un $\mathcal{F}$- espace de structures, où
4 $C^{\cdot}_{o} = \pi'(S)$, il faut et il suffit que l'on ait $C^{\cdot}_{o} \subset C^{\perp}_{o}$ et que, si $f' \perp f$ est défini dans $C^{\perp}$, on ait $fz = f'z$ pour tout $z \in \overset{-1}{\pi'}(\alpha(f))$. En particulier ces conditions sont vérifiées si $((C^{\cdot}, C^{\perp}), S^{\perp}, \kappa')$ est la $\mathcal{F}$- espèce de structures associée à une espèce de morphismes (c'est-à-dire si $\perp$ est la loi de composition triviale sur C [4c]).

Si $(\bar{\eta}_2, (\Phi, \varphi_o), \bar{\eta}_1)$ est une application $\mathcal{H}$- covariante [4c] et si $\bar{\eta}_2$ et $\bar{\eta}_1$

sont des $\mathcal{H}$-espaces de structures, alors (Φ, φ_o) définit aussi une application covariante entre les espèces de structures dominées sous $\overline{\eta}_1$ et sous $\overline{\eta}_2$ respectivement.

Soit $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{H})$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{A}(\mathcal{H})$ formée des applications $\mathcal{H}$-covariantes entre $\mathcal{H}$-espaces de structures. Nous désignerons par $p_1^{\mathcal{H}}$ et $p_2^{\mathcal{H}}$ les projections :

$$(\overline{\eta}_2, (\Phi, \varphi_o), \overline{\eta}_1) \to ((C_2^{\cdot}, s_2), \Phi, (C_1^{\cdot}, s_1))$$

et $$(\overline{\eta}_2, (\Phi, \varphi_o), \overline{\eta}_1) \to (\sigma_2, \varphi_o, \sigma_1)$$

de $\overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{H})$ vers la catégorie $\overline{\mathcal{H}}$ des foncteurs $\mathcal{H}$-structurés et vers la catégorie $\mathcal{H}$ respectivement. Soit $(\mathcal{H}, \overline{q}, \overline{\mathcal{H}})$ le foncteur canonique de $\overline{\mathcal{H}}$ vers $\mathcal{H}$.

DEFINITION. *On appelle* $\mathcal{H}$-espace de morphismes *un couple* $(\overline{\eta}, G)$, *où* $\overline{\eta}$ *est un* $\mathcal{H}$-*espace de structures* $((C^{\cdot}, s), (S, \sigma), \kappa')$ *et où* $((C^{\cdot}, S, \kappa'), G)$ *est une espèce de morphismes, vérifiant la condition suivante : soit* (η, H) *l'espèce de structures dominée sous* $\overline{\eta}$; *alors* $(G(e), H(e))$ *est une catégorie* $\mathcal{H}$-*structurée, pour tout* $e \in \pi'(S)$.

Soit $(\overline{\eta}, G)$ un $\mathcal{H}$-espace de morphismes. Soit $\overline{G}$ l'application définie de la façon suivante :

$$\overline{G}(e) = (G(e), H(e)) \qquad \text{si } e \in \pi'(S)$$

et $$\overline{G}(f) = (\overline{G}(e'), \tilde{f}, \overline{G}(e)) \qquad \text{si } f \in C_1^{\cdot},\ \alpha(f) = e \text{ et } \beta(f') = e',$$

où $C_1^{\cdot}$ est la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ opérant sur $S^{\cdot}$. Le couple $(C^{\cdot}, \overline{G})$ est un couple dominant dans $(q\overline{q}, \overline{\mathcal{H}})$ une espèce de structures. Supposons $C_1 = C$ et désignons par $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ la catégorie produit croisé $S^{\cdot} \times_{\kappa'} C^{\cdot}$ (voir [4d]).

THEOREME. *Si* $(\mathfrak{M}, q, \mathcal{H}, .)$ *est une catégorie d'homomorphismes à produits finis et résolvante à droite, il existe* $\tilde{\sigma} \in \mathcal{H}_o$ *tel que* $\tilde{\sigma} \overline{\overline{q}}\ \sigma \times s \times \sigma$ *et que* $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, \tilde{\sigma})$ *soit une catégorie* $\mathcal{H}$-*structurée.* 1+

Soit $\eta = (C^{\cdot}, S_o, \kappa')$ une espèce de structures; soit π la projection canonique de $C^{\cdot} * S_o$ vers C et $C_1 = \pi(C^{\cdot} * S_o)$. Soit

$$\overline{\eta} = ((C^{\cdot}, s), (S_o, \sigma), \kappa')$$

un $\mathcal{H}$-espace de structures et (η, H) l'espèce de structures dominée sous $\overline{\eta}$. Soit (η, F) une espèce de structures dominée dans $(p, \mathfrak{A}(\mathfrak{M}))$ (nous reprenons les notations des conditions 1, 2, 3, § 1) et supposons que $(C^{\cdot}, G)$ soit un couple dominant dans $(p\mathcal{F}, \mathcal{F})$ une espèce de structures $\mu = (C^{\cdot}, \overline{S}, \overline{\kappa}')$. Soit $\overline{\alpha}$ l'application source dans la catégorie $\overline{S}^{\cdot}$, somme des catégories $G(e)$, et soit $\overline{\pi}'$ l'application canonique de S_o dans $\overline{S}_o^{\cdot}$.

Soit $(\bar{\mu}, G)$ un $\mathcal{H}$-espace de morphismes, où $\bar{\mu} = ((C^{\cdot}, s), (\bar{S}, \bar{\sigma}), \bar{\kappa}')$ et soit $(\mu, \bar{H})$ l'espèce de structures dominée sous $\bar{\mu}$. Nous supposons de plus que $\bar{\eta}'(e) = ((G(e), \bar{H}(e)), (\overset{-1}{\pi}{}'(e), H(e)), \bar{\kappa}'(e))$ soit un $\mathcal{H}$-espace de structures, pour tout $e \in (C_1^{\cdot})_0^{\cdot}$. Soit $(C^{\cdot}, \hat{F})$ le couple dominant dans $(p\mathcal{F}, \mathcal{F})$ l'espèce de structures $\eta'' = (C^{\cdot}, \Sigma, \hat{\kappa}')$ construite au § 1, telle que :

$$\hat{F}(e) = (G(e) * \overset{-1}{\pi}{}'(e))^{\cdot} \qquad \text{pour tout } e \in (C_1)_0^{\cdot} \ .$$

THEOREME. *Si $(\mathcal{M}, q, \mathcal{H}, .)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits fibrés finis, $(\bar{\eta}'', \hat{F})$ est un $\mathcal{H}$-espace de morphismes, où*

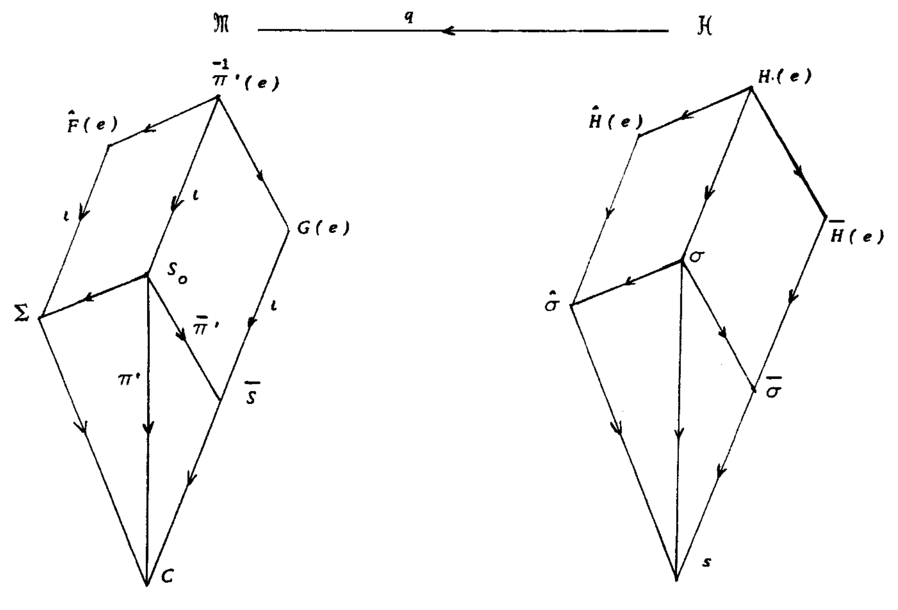
$$\bar{\eta}'' = ((C^{\cdot}, s), (\Sigma, \hat{\sigma}), \hat{\kappa}')$$

et où $\hat{\sigma}$ est le produit fibré dans $(\mathcal{M}, q, \mathcal{H})$ défini par :

$$\hat{\sigma} = (\bar{\sigma}, \bar{\alpha}, \bar{\sigma}) \vee (\bar{\sigma}, \bar{\pi}', \sigma) \ .$$

Soit $(\eta'', \hat{H})$ l'espèce de structures dominée sous $\bar{\eta}''$; alors $\hat{H}(e)$ est la catégorie $\mathcal{H}$-structurée des hypermorphismes [4c] *associée à $\bar{\eta}'(e)$, pour tout $e \in C_{10}^{\cdot}$.*

1+ DEFINITION. *Si les hypothèses précédentes sont vérifiées, on dira que $(\bar{\eta}, \bar{\mu}, F)$ est* un $\mathcal{H}$-espace de structures au-dessus d'un $\mathcal{H}$-espace de morphismes.



Ψ-ESPACES DE STRUCTURES.

Soit $(\mathcal{M}, q, \mathcal{H}, .)$ une catégorie d'homomorphismes et soit $\Psi = (\mathcal{H}, \psi, \mathcal{H}')$ un foncteur fidèle.

DEFINITION. *On dira que* $(\overline{\eta}, H')$ *est un* Ψ-espace de structures *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) $\overline{\eta} = ((C^{\cdot}, s), (S, \sigma), \kappa')$ *est un* $\mathcal{H}$*-espace de structures; soit* (η, H) *l'espèce de structures dominée sous* $\overline{\eta}$.

2) $(C^{\cdot}, H')$ *est un couple dominant dans* $(q\psi, \mathcal{H}')$ *une espèce de structures et on a* $H = \psi H'$.

La notion de Ψ-espace de structures généralise la notion d'espace fibré dont les fibres sont munies de superstructures; le couple $(\overset{-1}{\pi}{}'(e), H(e))$, où $e \in \pi'(S)$, peut être considéré comme la fibre sur e, $H'(e)$ étant la superstructure correspondante.

PROPOSITION. *Pour que* $(\overline{\eta}, H)$ *soit le* $\mathcal{H}$*-espace de structures sous un* $\mathcal{H}$*-espace de morphismes* $(\overline{\eta}, G)$, *il faut et il suffit que* $(\overline{\eta}, \overline{H})$ *soit un* $(\mathcal{H}, \overline{q}, \overline{\mathcal{H}})$*-espace de structures, où* $\overline{\mathcal{H}}$ *est la catégorie des foncteurs* $\mathcal{H}$*-structurés et* $\overline{H}(e) = (G(e), H(e))$ *pour tout* $e \in \pi'(S)$.

CAS PARTICULIER. 1) Supposons que $(\mathcal{M}, q, \mathcal{H}, .)$ soit une catégorie d'homomorphismes à produits finis, que Ψ soit un foncteur compatible avec les produits et que $(\mathcal{M}, q\psi, \mathcal{H}', .)$ soit une catégorie d'homomorphismes avec atomes. Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie $\mathcal{H}$-structurée. Soit $\sigma' \in \mathcal{H}'_o$. Pour tout $e \in C^{\cdot}_o$, soit $H'(e) = \sigma' \times \overline{e}$, où $\overline{e}$ est l'atome tel que $q\psi(\overline{e}) = \{e\}$; soit H' l'application de C dans $\mathcal{H}' : f \to \sigma' \times (\overline{e}', \xi, \overline{e})$, où $\xi(e) = e'$, $e = \alpha(f)$, $e' = \beta(f)$. Soit $\eta = (C^{\cdot}, S, \kappa')$ l'espèce de structures dominée par $(C^{\cdot}, H')$ (qui est l'espèce de structures associée au foncteur constant $f \to q\psi(\sigma')$). Alors

$$\overline{\eta} = ((C^{\cdot}, s), (S, \sigma' \times s_o), \kappa'), \qquad \text{où } s_o \underset{q}{\frown} s,$$

est un $\mathcal{H}$-espace de structures et $(\overline{\eta}, H')$ est un Ψ-espace de structures appelé le Ψ*-espace de structures trivial défini par* $(C^{\cdot}, s, \sigma')$.

2) Soit $\mathcal{V}$ la catégorie des triplets $(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1)$, où $\tilde{E}_i =$ 1
$(E_i^+, (K_i, +, .))$ est un espace vectoriel topologique sur le corps topologique $(K_i, +, .)$, où φ est un isomorphisme topologique du corps $(K_1, +, .)$ sur $(K_2, +, .)$ et où φ' est un homomorphisme continu du groupe topologique E_1^+ dans E_2^+ tel que :

$$\varphi'(kx) = \varphi(k)\varphi'(x) \qquad \text{si } x \in E_1 \text{ et } k \in K_1.$$

La loi de composition sur $\mathcal{V}$ est définie par :

$$(\tilde{E}_3, (\varphi'_1, \varphi_1), \tilde{E}_2).(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) = (\tilde{E}_3, (\varphi'_1\varphi', \varphi_1\varphi), \tilde{E}_1).$$

Soit ν le foncteur de $\mathcal{V}$ vers la catégorie $\tilde{\mathcal{T}}$ des applications continues entre espaces topologiques tel que :

$$\nu(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) = (E_2 \times K_2, \varphi' \times \varphi, E_1 \times K_1).$$

Soit $\mathcal{G}_1$ (resp. $\mathcal{G}_2$) la catégorie des homomorphismes continus entre groupes abéliens (resp. corps) topologiques et soit $\overline{p}_i = (\mathcal{M}, p_i, \mathcal{G}_i)$ le foncteur fidèle canonique, où $i = 1, 2$. Soient $\overline{p}'_i$ les foncteurs de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{G}_i$:

$$\overline{p}'_1(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) = (E_2^+, \varphi', E_1^+)$$
$$\overline{p}'_2(\tilde{E}_2, (\varphi', \varphi), \tilde{E}_1) = ((K_2, +, .), \varphi, (K_1, +, .)).$$

Soit $(\overline{\eta}, H')$ un ν-espace de structures, où

$$\overline{\eta} = ((C^\bullet, s), (S, \sigma), \kappa') \quad \text{et} \quad H'(e) = (E_e^+, (K_e, +, .)) \quad \text{pour tout } e \in C_o^\bullet.$$

Soit $\overline{e}_1$ (resp. $\overline{e}_2$) le groupe (resp. anneau) atomique tel que $p_i(\overline{e}_i) = e$, $i = 1, 2$. Si
1 $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, posons $G_i(f) = \overline{p}'_i H'(f) \times \xi_i$, où ξ_i est l'isomorphisme trivial de $\overline{e}_i$ sur $\overline{e}'_i$. $(C^\bullet, G_i)$ est un couple dominant dans $(p_i, \mathcal{G}_i)$ une espèce de structures $\eta_i = (C^\bullet, S_i, \kappa'_i)$. Soit σ_1 (resp. σ_2) la topologie sur S_1 (resp. S_2) homéomorphe à la topologie induite par σ sur la classe des couples $(z, 0_e)$, où 0_e est le 0 de $(K_e, +, .)$ (resp. $(0'_e, k)$, où $0'_e$ est l'unité de E_e^+). En posant

$$\overline{\eta}_i = ((C^\bullet, s), (S_i, \sigma_i), \kappa'_i),$$

$(\overline{\eta}_i, G_i)$ est un $\overline{p}'_i$-espace de structures. Un ν-espace de structures est appelé un espace fibré vectoriel généralisé; c'est un espace fibré vectoriel ordinaire si $C^\bullet$ est un groupoïde localement trivial et si $(\overline{\eta}_2, G_2)$ est le $\overline{p}'_2$-espace de structures trivial défini par $(C^\bullet, s, (K, +, .))$.

Soit $(\overline{\eta}, \overline{\mu}, F)$ un $\mathcal{H}$-espace de structures au-dessus d'un $\mathcal{H}$-espace de morphismes (nous reprenons les notations antérieures). Supposons que $(\overline{\eta}, H')$ et $(\overline{\mu}, \overline{H}')$ soient des Ψ-espaces de structures et que, pour tout $e \in \pi'(S_o)$ $F'(e) = ((G(e), \overline{H}'(e)), H'(e), \kappa'_e)$ soit un $\mathcal{H}'$-espace de structures. Ceci équivaut à se donner une espèce de structures (η, F') dominée dans $(p_2^{\mathcal{H}'}, \overline{\mathfrak{A}}(\mathcal{H}'))$ telle que :

$$\psi p_2^{\mathcal{H}'} F' = H \quad \text{et} \quad \psi \overline{\psi}\, p_1^{\mathcal{H}'} F' = \overline{H}.$$

PROPOSITION. *$(\hat{\eta}, \hat{H}')$ est un Ψ-espace de structures, où $\hat{H}'(e)$ est, pour tout $e \in \pi'(S_o)$, la catégorie $\mathcal{H}'$-structurée des hypermorphismes* [4c] *associée à $F'(e)$.*

DEFINITION. *Avec les notations précédentes, on dira que $(\overline{\eta}, \overline{\mu}, F')$ est* un Ψ-espace de structures au-dessus d'un $\mathcal{H}$-espace de morphismes.

Bibliographie.

[1] C. EHRESMANN. Catégories structurées, Ann. Ec. Norm. Sup. 1963.

[2] C. EHRESMANN. Structures quotient, Comm. Math. Helv. 1964, p. 209.

[3] C. EHRESMANN. Quintettes et applications covariantes, Sém. Topo. et Géo. diff. (Ehresmann) 1963, V.

[4] C. EHRESMANN. C.R.A.S. 256, 1963 : a) p. 1198 ; b) p. 1891 ; c) p. 2080 et 2280 ; d) 258 , 1964 p. 2461 .

[5] C. EHRESMANN. Elargissements de catégories, Sém. Topo. et Géo. diff. III, 1961 .

[6] J. FRENKEL. Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, Bull. Soc. Math. de France, t. 85 , 1957 , II , p. 135 .

[7] P.J. HILTON. Note on free and direct products in general categories, Bull. Soc. Math. Belgique, XIII, 1961 .

[8] S. MAC LANE. Homology, Springer-Verlag, Berlin. 1963.

CATÉGORIES STRUCTURÉES ET CATÉGORIES DIFFÉRENTIABLES*)

PAR

CHARLES EHRESMANN
(Paris)

On donne une théorie générale concernant le problème d'introduire des structures supplémentaires sur des catégories ou des groupoïdes, ces structures devant être compatibles avec la structure algébrique de la catégorie ou du groupoïde. La théorie met en évidence les faits algébriques communs à des cas en apparence très différents. Elle conduit à l'introduction des catégories topologiques et des catégories r-différentiables.

Depuis longtemps on considère sur certaines structures algébriques
(groupes, anneaux, corps, algèbres, espaces vectoriels) des structures sup-
plémentaires, par exemple des structures topologiques, des variétés diffé-
rentiables, des structures métriques, de structures d'ordre . . . De la 1
même façon, on est amené à introduire des structures supplémentaires sur
des catégories ou des groupoïdes, ces structures devant évidemment être
compatibles avec la structure algébrique de la catégorie ou du groupoïde.
La première idée pour « structurer » une catégorie est de munir cha-
que classe Hom(e', e) d'une structure supplémentaire. D'une façon précise : 2
Soit p un foncteur fidèle d'une catégorie $H^{\cdot}$ vers une catégorie $\mathcal{M}$ d'applications, une unité s de $H^{\cdot}$ étant appelée une p-structure sur $p(s)$. Soit $C^{\cdot}$ une catégorie. On appellera *catégorie* p-*dominée* ([1] chapitre II) un couple $(C^{\cdot}, F)$, où F est un foncteur de $C^{\cdot} \times C^{*}$ vers $H^{\cdot}$ tel que $p \cdot F = \mathrm{Hom}_C$. Ainsi les catégories préadditives sont des catégories p-dominées, p étant le foncteur d'oubli de la catégorie des homomorphismes entre groupes abéliens vers $\mathcal{M}$. On peut préciser cette notion lorsque p est à produits finis (déf. 6—IV [1]) : On appelle *catégorie discrètement p-structurée* un couple $(C^{\cdot}, F_0)$, où F_0 est une application de $C_0^{\cdot} \times C_0^{\cdot}$ dans $H_0^{\cdot}$ (= classe des unités de $H^{\cdot}$) vérifiant la condition : Si e, e' et e'' sont des unités de $C^{\cdot}$, il existe un morphisme $k(e'', e', e)$ de source $F_0(e'', e') \times F_0(e', e)$, de but $F_0(e'', e)$,

*) Cet article est le texte des deux conférences données par l'auteur au Colloque international sur les variétés différentiables de Bucarest (juillet 1967). Les notations sont celles de [1] (voir fin de la bibliographie).

REV. ROUM. MATH. PURES ET APPL., TOME XIII, No 7, p. 967—977, BUCAREST, 1968

tel que

$$p(F_0(e', e)) = \mathrm{Hom}_{C^{\cdot}}(e', e) \text{ et } p(k(e'', e', e))\ (y, x) = y \cdot x.$$

On appellera catégorie *fortement p-dominée* une catégorie p-dominée $(C^{\cdot}, F)$ telle que la restriction F_0 de F à $C_0^{\cdot} \times C_0^{\cdot}$ définisse sur $C^{\cdot}$ une structure de catégorie discrètement p-structurée.

Si $(C^{\cdot}, F_0)$ est discrètement p-structurée et si p est à atomes (déf.
1 8—IV [1]), il existe une catégorie fortement p-dominée $(C^{\cdot}, F)$ prolongeant
F_0. Ceci est par exemple le cas lorsque p est le foncteur d'oubli de la
catégorie des applications continues vers M ; mais non lorsque p est le
foncteur d'oubli p_{F} vers M de la catégorie F des foncteurs. Si $(C^{\cdot}, F_0)$
est discrètement p-structurée et si p est à sommes, on peut munir $C^{\cdot}$ de la
structure $s = \Sigma F_0(e', e)$. La notion de catégorie p-structurée [2] que nous
2 allons rappeler « assouplit » la notion ainsi obtenue en admettant sur $C^{\cdot}$ des
structures s qui n'induisent pas nécessairement sur $C_0^{\cdot}$ une structure « dis-
crète » (i. e. somme d'atomes).

Des exemples importants de catégories structurées sont fournis par les catégories topologiques, différentiables, ordonnées, doubles, etc. L'intérêt de faire une théorie générale réside dans la mise en évidence des faits algébriques communs à des cas en apparence très différents, ce qui conduit à des théorèmes fins, dans lesquels interviennent seulement les hypothèses algébriques nécessaires pour leur validité.

1. DÉFINITION DES CATÉGORIES STRUCTURÉES

Nous désignons par M la catégorie pleine des applications entre ensembles appartenant à un univers M_0. Soit p un foncteur $(\mathsf{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ d'une catégorie $H^{\cdot}$ vers M. Pour simplifier, nous supposons toujours que p est un *foncteur d'homomorphismes saturé*, i. e. ([1], déf. 20—II) :

1° p est un foncteur fidèle ; par suite on peut représenter $h \in H$ par le triplet $(\beta(h), \underline{h}, \alpha(h))$ qui le détermine entièrement, $\underline{h}$ désignant la surjection $x \to p(h)(x)$ de $p(\alpha(h))$ sur une partie de $p(\beta(h))$. En particulier, $p(s)$ sera noté $\underline{s}$ pour toute unité s de $H^{\cdot}$.

2° Si $s \in H_0^{\cdot}$ et si f est une bijection de $\underline{s}$ sur M, il existe un et un seul inversible $h \in H$ tel que $\alpha(h) = s$ et $p(h) = f$.

Rappelons que $s' \in H_0^{\cdot}$ est une *p-sous-structure de s* ([1], déf. 7—III), noté $s' \vdash s$, si

1° $\underline{s}' \subset \underline{s}$ et $(s, \iota, s') \in H$, où $(\underline{s}, \iota, \underline{s}')$ désigne l'injection canonique de $\underline{s}'$ dans $\underline{s}$.

2° Soit $h = (s, \underline{h}, \hat{s}) \in H$ tel que $\underline{h}(\hat{\underline{s}}) \subset \underline{s}'$. Alors $(s', \underline{h}, \hat{s}) \in H$.

DÉFINITION [2]. On appelle *catégorie p-structurée* un couple $(C^{\cdot}, s)$ tel que :

1° $C^{\cdot}$ est une catégorie, $s \in H_0^{\cdot}$ et $p(s) = C$;

2° Il existe $i = (s, \iota, s_0) \in H$ tel que $p(s_0) = C_0^{\cdot}$, $a = (s_0, \alpha, s) \in H$, $b = (s_0, \beta, s) \in H$.

3° Il existe un produit fibré $s \ast s$ de (a, b) dans $H^{\cdot}$ tel que $k = (s, \varkappa, s \ast s) \in H$, où $\varkappa$ est la loi de composition de $C^{\cdot}$.

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, "i"] & s \arrow[l, bend right, "a"'] \arrow[l, bend left, "b"] & s \ast s \arrow[l, "k"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C_0^{\cdot} \arrow[r, "i"] & C \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[l, bend left, "\beta"] & C^{\cdot} \ast C^{\cdot} \arrow[l, "\chi"'] \end{tikzcd}$$

L'axiome 2 entraîne $s_0 \vdash s$. S'il existe un produit $s \times s$ dans $H^{\cdot}$ tel que $p(s \times s) = C \times C$, alors on a $s \ast s \vdash s \times s$. Dans tous les cas, s_0 est le noyau de $(s, \bar{a})$ et de $(s, \bar{b})$, où

$$\bar{a} = (s, \alpha, s) = i.\, a \in H \text{ et } \bar{b} = (s, \beta, s) = i.\, b \in H.$$

Définition. On appelle *foncteur p-structuré* un triplet $\bar{F} = ((\bar{C}^{\cdot}, \bar{s}), \underline{F}, (C^{\cdot}, s))$ tel que

1° $(C^{\cdot}, s)$ et $(\bar{C}^{\cdot}, \bar{s})$ sont des catégories p-structurées;

2° $F = (\bar{C}^{\cdot}, \underline{F}, C^{\cdot})$ est un foncteur et $(\bar{s}, \underline{F}, s) \in H$.

Nous désignons par $\mathsf{F}(p)$ la catégorie des foncteurs p-structurés, dont la loi de composition est

$$((\bar{C}_1^{\cdot}, \bar{s}_1), \underline{F}_1, (C_1^{\cdot}, s_1)).\, ((\bar{C}^{\cdot}, \bar{s}), \underline{F}, (C^{\cdot}, s)) = ((\bar{C}_1^{\cdot}, \bar{s}_1), \underline{F}_1\, \underline{F}, (C^{\cdot}, s))$$

si, et seulement si, $(C_1^{\cdot}, s_1) = (\bar{C}^{\cdot}, \bar{s})$. On définit trois foncteurs canoniques de source $\mathsf{F}(p)$, à savoir

$\hat{p}'$ vers F,

$\hat{p}^H$ vers $H^{\cdot}$,

$\hat{p} = p \cdot \hat{p}^H = p_{\mathsf{F}} \cdot \hat{p}'$ vers M.

$$\begin{tikzcd} & F(p) \arrow[dl, "\hat{p}'"'] \arrow[dr, "\hat{p}^H"] \arrow[dd, "\hat{p}"] & \\ F \arrow[dr, "p_F"'] & & H^{\cdot} \arrow[dl, "p"] \\ & \mathcal{M} & \end{tikzcd}$$

Raffinements de la notion de catégorie structurée

Soient H' et H'' des parties de H et $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée.

1° Si $a \in H'$, $b \in H'$, $k \in H''$, on dit que $(C^{\cdot}, s)$ est *$p((H', H'), H'')$-structurée.*

2° Si $k \in H''$ et s'il existe

$$[b, a] = (s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H, \text{ où } [\beta, \alpha](x) = (\beta(x), \alpha(x)),$$

on dit que $(C^{\cdot}, s)$ est *$p(H', H'')$-structurée.*

3° Si $C^{\cdot}$ est un groupoïde et s'il existe $(s, I, s) \in H$, où $I(x) = x^{-1}$, on appelle $(C^{\cdot}, s)$ un *groupoïde p-structuré*. Dans ce cas, $(s, I, s) \in H_{\gamma}^{\cdot}$.

2. THÉORÈMES GÉNÉRAUX

Nous supposons dans ce paragraphe que le foncteur d'homomorphismes saturé p est à produits finis et à noyaux, c'est-à-dire :

1° Pour toute famille $(s_i)_{i \in I}$ d'unités de $H^{\cdot}$, où I est fini, il existe un produit (qui est alors unique) $\prod_{i \in I} s_i$ dans $H^{\cdot}$ tel que $p(\prod_{i \in I} s_i) = \prod_{i \in I} s_i$.

2° p est résolvant à droite ([1], déf. 8—III), i. e. si h_1 et h_2 sont deux éléments de $s'. H. s$, il existe une p-sous-structure s' de s telle que $\underline{s}'$ soit le noyau de $(p(h_1), p(h_2))$, c'est-à-dire la classe des $x \in \underline{s}$ tels que $\underline{h}_1(x) = \underline{h}_2(x)$.

Avec ces hypothèses, $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie p-structurée si, et seulement si, la catégorie $C^{\cdot}$ et $s \in H_0^{\cdot}$ satisfont les axiomes :

1° Il existe $\overline{a} = (s, \alpha, s) \in H$ et $\overline{b} = (s, \beta, s) \in H$;

2° Soit $s \mathbin{\ast} s$ le produit fibré de $(\overline{a}, \overline{b})$ se projetant sur $C^{\cdot} \mathbin{\ast} C^{\cdot}$ ($s \mathbin{\ast} s$ existe, car p est saturé et admet des produits et des noyaux). Alors $k = (s, \varkappa, s \mathbin{\ast} s) \in H$.

THÉORÈME [2]. 1° *$\hat{p}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé à produits finis et à noyaux, donc à $I^{\cdot}$-limites projectives pour toute catégorie finie $I^{\cdot}$. Si de plus p est à $J^{\cdot}$-limites projectives, il en est de même pour $\hat{p}$.*

2° *Soit $(C^{\cdot}, s) \in \mathsf{F}(p)_0$. Si $C_1^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $C^{\cdot}$ et si $s_1 \vdash s$ et $p(s_1) = C_1$, alors $(C_1^{\cdot}, s_1)$ est une $\hat{p}$-sous-structure de $(C^{\cdot}, s)$ (on dira sous-catégorie p-structurée).*

Supposons que p soit la restriction d'un foncteur d'homomorphismes saturé à produits finis et à noyaux $P = (\hat{\mathsf{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$, où $\hat{\mathsf{M}}$ est la catégorie pleine d'applications associée à un univers $\hat{\mathsf{M}}_0$ tel que $\mathsf{M}_0 \in \hat{\mathsf{M}}_0$ et $\mathsf{M}_0 \subset \hat{\mathsf{M}}_0$ et où $H = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathsf{M})$. Soit $\widetilde{\mathsf{M}}_0$ la classe des $M \in \hat{\mathsf{M}}_0$ admettant une bijection sur un élément de M_0.

On dit [3] que P est $\vdash$ *-engendrant pour* M s'il vérifie la condition : Soient $S \in \hat{H}_0^{\cdot}$ et $M \in \widetilde{\mathsf{M}}_0$ tel que $M \subset P(S)$; soit A la classe des P-sous-structures s' de S telles que $M \subset P(s')$; il existe $\hat{s} \in A$ vérifiant

$$P(\hat{s}) = \bigcap P(A) \text{ et } P(\hat{s}) \in \widetilde{\mathsf{M}}_0.$$

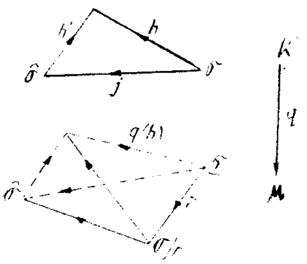
On dit que P est *dénombrablement engendrant pour* M [3] s'il est $\vdash$- engendrant pour M et si, pour tout $S \in \hat{H}_0^{\cdot}$ et toute suite $(s_i)_{i \in N}$ de P-sous-structures de S telles que $P(s_i) \subset P(s_{i+1}) \in \widetilde{\mathsf{M}}_0$, il existe une P-sous-structure $\hat{s}$ de S telle que $P(\hat{s}) = \bigcup_{i \in N} P(s_i)$.

THÉORÈME [3]. *Supposons P dénombrablement engendrant pour* M. *Alors le foncteur $\hat{P}$ de $\mathsf{F}(P)$ vers $\hat{\mathsf{M}}$ est $\vdash$- engendrant pour M, de même que sa restriction à la sous-catégorie pleine $\mathsf{F}_g(P)$ de $\mathsf{F}(P)$ ayant pour unités les groupoïdes P-structurés.*

Ce théorème a de nombreuses applications. En particulier, à l'aide du théorème d'existence de structures libres ([4] th. 1), on en déduit :

THÉORÈME [3]. *Supposons que $H \in \hat{\mathsf{M}}_0$ et que P soit dénombrablement engendrant pour M et à $\hat{\mathsf{M}}_0$-produits. Alors $\mathsf{F}(p)$ est une catégorie à F_0-limites inductives. Soient $(C^{\cdot}, s) \in \mathsf{F}(p)_0$ et r une relation d'équivalence sur C ; il existe une $\hat{p}$-structure quasi-quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par r (appelée catégorie p-structurée quasi-quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par r).*

(Rappelons la définition d'une q-structure quasi-quotient, relativement à un foncteur q de $K^{\cdot}$ vers M : On dit que $\hat{\sigma}$ est une q-structure quasi-quotient [3] de $\sigma \in K_0^{\cdot}$ par la relation d'équivalence r sur $q(\sigma)$ s'il existe $j \in \hat{\sigma}.K.\sigma$ tel que $q(j)$ soit compatible avec r et que, si $h \in K.\sigma$ et si $q(h)$ est compatible avec r, il existe un et un seul $h' \in K$ vérifiant $h'.j = h$. Si de plus $q(j)$ est la surjection canonique $\tilde{r}$ de σ sur σ/r on dit que $\hat{\sigma}$ est une q-structure quotient ([1], déf. 9—III) de σ par r.)



THÉORÈME [3]. *Si les conditions du théorème précédent sont vérifiées, $\mathsf{F}(p)$ est une catégorie à $\mathsf{F}_q(p)$-projections et à $\mathfrak{S}(p)$-projections ([1], déf. 15—III) où $\mathfrak{S}(p)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathsf{F}_g(p)$ ayant pour unités les groupes p-structurés.*

Autrement dit : Toute catégorie p-structurée admet un « plongement universel » en un groupoïde p-structuré et en un groupe p-structuré.

Soient I et J deux parties de F_0. Soit $\mathsf{F}'^{\mathsf{IJ}}(p)_0$ la classe des triplets $\sigma = ((C^{\cdot}, s), \nu, \mu)$, où $(C^{\cdot}, s) \in \mathsf{F}(p)_0$ et où ν et μ sont respectivement une application I-limite projective partielle et une application J-limite inductive partielle sur $C^{\cdot}$ (c'est-à-dire μ associe à certains foncteurs Φ de $I^{\cdot} \in \mathsf{J}$ vers $C^{\cdot}$ une transformation naturelle $\mu(\Phi)$ de Φ vers un foncteur $\hat{e}$ constant sur e, définissant e comme limite inductive de Φ). Soit $\mathsf{F}'^{\mathsf{IJ}}(p)$ la catégorie des triplets (σ_2, F, σ_1), où $F = ((C_2^{\cdot}, s_2), \underline{F}, (C_1^{\cdot}, s_1)) \in \mathsf{F}(p)$ et où $\hat{p}'(F)$ est compatible avec (ξ_2, ξ_1) (c'est-à-dire $\hat{p}'(F)$ $\xi_1(\Phi) = \xi_2(\hat{p}'(F).\Phi))$ pour $\xi = \mu$ et ν. Soit $\mathsf{F}^{\mathsf{IJ}}(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{F}'^{\mathsf{IJ}}(p)$ ayant pour objets les σ tels que μ et ν soient des applications I-limite projective et J-limite inductive totales sur $C^{\cdot}$.

THÉORÈME DE COMPLÉTION STRUCTURÉE [4]. *Supposons P dénombrablement engendrant pour M et à $\hat{\mathsf{M}}_0$-produits. Si $H \in \hat{\mathsf{M}}_0$, $\mathsf{I} \in \widetilde{\mathsf{M}}_0$ et $\mathsf{J} \in$
$\in \widetilde{\mathsf{M}}_0$ la catégorie $\mathsf{F}'^{\mathsf{IJ}}(p)$ est à $\mathsf{F}^{\mathsf{IJ}}(p)$-projections.* 1

Ceci signifie qu'une catégorie p-structurée peut être « universellement plongée » en une catégorie p-structurée à I-limites projectives et à J-limites inductives, avec conservation de certaines limites naturalisées données.

Exemples

1°. Cas où P est $\vdash$-étalant, i. e. [3] si $s \in \hat{H}_0^{\cdot}$ et si $M \subset \underline{s}$, il existe $s' \vdash s$ tel que $\underline{s}' = M$. Si P est à $\hat{\mathsf{M}}_0$-produits, les théorèmes précédents s'appliquent. Il en est ainsi dans le cas des catégories ordonnées, qui sont des catégories ω-structurées (où ω est le foncteur d'oubli vers M de la catégorie des applications ordonnées) et dans le cas des catégories topologiques (catégories θ-structurées, θ désignant le foncteur d'oubli vers M de la catégorie des applications continues entre espaces topologiques).

2° Cas où P est le foncteur d'oubli vers $\hat{\mathsf{M}}$ de la catégorie des homomor-
1 phismes entre structures algébriques d'une certaine espèce [5]. Alors P est dénombrablement engendrant pour M et à $\hat{\mathsf{M}}_0$-produits [5], de sorte que les théorèmes généraux s'appliquent. Tel est le cas pour les catégories doubles (catégories p_{F}-structurées [2]), pour les catégories multiples (définies [2] par récurrence comme les catégories $p_{\mathsf{F}}^{[n-1]}$-structurées, où $p_{\mathsf{F}}^{[n-1]}$ est le foncteur d'oubli vers M de la catégorie des foncteurs $(n-1)$-uples), pour les catégories sous-préinductives [3].

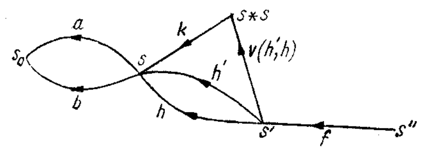
3° Cas où p n'est pas à noyaux. Les hypothèses des théorèmes précédents ne sont pas vérifiées. Mais on peut canoniquement étendre p en un foncteur $\bar{p}$ satisfaisant ces conditions ; la construction d'une extension « minimale » et d'une extension « maximale » sont données dans le mémoire [12]. Les théorèmes généraux sont donc valables pour les catégories $\bar{p}$-structurées. En particulier cette méthode pourra être appliquée au foncteur δ^r vers M de la catégorie C^r des applications r-différentiables, qui est à produits finis, mais non à noyaux ; on étendra ainsi δ^r en un foncteur à noyaux (resp. à noyaux et à M_0-produits) $\bar{\delta}^r$ et on étudiera les catégories
2 $\bar{\delta}^r$-structurées.

3. ESPÈCE DE MORPHISMES ASSOCIÉE À UNE CATÉGORIE STRUCTURÉE

Soit $\sigma = (C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée, où p est un foncteur d'homomorphismes saturé $(\mathsf{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$. Pour tout $s' \in H_0^{\cdot}$, désignons par $K_{s'}^{\bullet}$, la classe multiplicative telle que $K_{s'} = s.H.s'$, la loi de composition étant

$$(h', h) \to h' \bullet h = (s, \varkappa\, [\underline{h}', \underline{h}], s')$$

si, et seulement si, $(s, \alpha, s).\, h' = (s, \beta, s).\, h$. Autrement dit : il existe un



unique $v(h', h) \in (s \divideontimes s).H.s'$ associé au couple (h', h) par le produit fibré
3 de (s, b), et

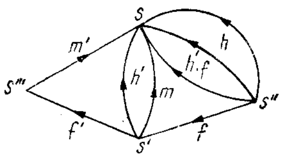
$$h' \bullet h = k \,.\, v(h', h), \quad \text{où} \quad k = (s, \varkappa, s \divideontimes s).$$

THÉORÈME. *$K^{\bullet}_{s'}$ est une catégorie, dont les unités sont les $h \in K_{s'}$ tels que $\underline{h}(\underline{s}') \subset C^{\cdot}_0$. Soit $K^{\bullet}$ la catégorie somme des catégories $K^{\bullet}_{s'}$, où $s' \in H^{\cdot}_0$. Alors $\eta(\sigma) = (H^{*}, K^{\bullet}, \varkappa')$ est une espèce de morphismes, $\varkappa'$ étant la loi de composition*

$$(f,h) \to h.f \quad \text{si} \quad \alpha(h) = \beta(f).$$ 1

Ceci signifie que, pour tout $f \in s'.H.s''$, la surjection $h \to h.f$ définit un foncteur de $K^{\bullet}_{s'}$ vers $K^{\bullet}_{s''}$ ([1], déf. 29—II).

Ainsi à la catégorie p-structurée σ, nous avons associé $\eta(\sigma)$, qui est une structure de $H^{\cdot}$-catégorie sur s (au sens de [10]). Mais la notion de catégorie p-structurée est plus stricte que celle de $H^{\cdot}$-catégorie sur une unité de $H^{\cdot}$ (les rapports entre ces deux notions sont discutés dans [6]).



Soit $R(\sigma)^{\cdot}$ la catégorie produit croisé associée à l'espèce de morphismes $\eta(\sigma)$ ([1], déf. 32—II). Ses éléments sont les triplets (m, f, h), où

$$m \in (K_{s'})^{\bullet}, \; f \in s' \cdot H \cdot s'', \; h \in K_{s''} \text{ et}$$ 2

$$m \cdot f = \beta^{\bullet}(h) = (s, \beta, s) \cdot h,$$

la loi de composition étant

$$(m', f', h').(m, f, h) = (m', f'.f, (h'.f) \bullet h)$$

si, et seulement si, $\alpha^{\bullet}(h') = (s, \alpha, s).h' = m$.

Supposons que $q = (\mathsf{M}, q, H^{\cdot\cdot})$ soit un foncteur d'homomorphismes saturé à produits finis et à noyaux, et que $(H^{\cdot}, D)$ soit une catégorie q-dominée telle que le foncteur $D_{s'}: h \to D(h, s')$ soit compatible avec les produits fibrés finis pour tout $s' \in H^{\cdot}_0$.

THÉORÈME. *$(K^{\bullet}_{s'}, D(s, s'))$ est une catégorie q-structurée.*

Supposons de plus que $(H^{\cdot}, D)$ soit fortement q-dominée. Pour tout couple (s'', s') d'unités de $H^{\cdot}$, désignons par $R(s', s'')$ la classe des $(m, f, h) \in R(\sigma)$ tels que $f \in s'.H.s''$.

THÉORÈME. *Il existe une q-sous-structure $\overline{D}(s', s'')$ de $D(s, s') \times \times D(s', s'') \times D(s, s'')$ telle que $q(\overline{D}(s', s'')) = R(s', s'')$ et, si $s''' \in H^{\cdot}_0$, il existe un élément $\overline{k}(s''', s', s'')$ de $\overline{D}(s''', s'').H'.S$ appliqué par q sur la restriction de la loi de composition de $R(\sigma)^{\cdot}$ à $R(s''', s') \times R(s', s'')$, où S est une q-sous-structure de $\overline{D}(s''', s') \times \overline{D}(s', s'')$.* 3

COROLLAIRE. *Supposons q à atomes. Il existe une catégorie fortement q-dominée $(R(\sigma)^{\cdot}, \hat{D})$, où $\hat{D}(\mu', \mu)$ est une q-sous-structure de $\overline{D}(s', s'')$ pour tout couple d'unités $\mu \in R(s'', s'')$ et $\mu' \in R(s', s')$. De plus $(R_{s'}(\sigma)^{\cdot}, \overline{D}(s', s')$ est une catégorie q-structurée, où $R_{s'}(\sigma)^{\cdot}$ est la sous-catégorie de $R(\sigma)^{\cdot}$ définie par $R(s', s')$.*

4. SECTIONS LOCALES DES CATÉGORIES TOPOLOGIQUES

Soit θ le foncteur canonique vers M de la catégorie T des applications continues. Une catégorie θ-structurée est appelée *catégorie topologique*. C'est donc ([2], [7], [9]) un couple $(C^{\cdot}, T)$, où $C^{\cdot}$ est une catégorie, T une topologie sur C, vérifiant les conditions :

1° $(T, \alpha, T) \in \mathsf{T}$ et $(T, \beta, T) \in \mathsf{T}$.

5 – c. 5392

2° $(T, \varkappa, T \ast T) \in \mathsf{T}$, où $T \ast T$ est la topologie $T \times T / C^{\cdot} \ast C^{\cdot}$ induite par $T \times T$ sur $C^{\cdot} \ast C^{\cdot}$. Si de plus $C^{\cdot}$ est un groupoïde et $(T, I, T) \in \in \mathsf{T}$, où $I(x) = x^{-1}$, alors $(C^{\cdot}, T)$ est un *groupoïde topologique.*

Le foncteur θ est un foncteur d'homomorphismes $\sqsubset$-étalant à M_0-produits et à atomes. Les résultats du § 2 s'appliquent à la catégorie $\mathsf{F}(\theta)$ des foncteurs continus. Le théorème d'existence d'une catégorie topologique quasi-quotient se précise :

THÉORÈME [7]. *Si $(C^{\cdot}, T)$ est une catégorie (resp. un groupoïde) topologique et r une relation d'équivalence sur C, il existe une catégorie (resp. un groupoïde) topologique quasi-quotient de $(C^{\cdot}, T)$ par r de la forme $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{T})$, où $\hat{C}^{\cdot}$ est une catégorie quasi-quotient de $C^{\cdot}$ par r.*

Même si $\hat{C} = C/r$, la topologie $\hat{T}$ peut être différente de T/r.

Soit $\sigma = (C^{\cdot}, T)$ une catégorie topologique. Soit $R(\sigma)^{\cdot}$ la catégorie produit croisé associée à l'espèce de morphismes $\eta(\sigma)$ correspondante (§ 3). Nous allons définir une sous-catégorie de $R(\sigma)^{\cdot}$.

DÉFINITION [7]. On appelle *section locale de* σ un triplet (U', φ, U), où :

1° U et U' sont des ouverts de T_0 ;

2° $(T, \varphi, T/U) \in \mathsf{T}$, $\alpha\, \varphi(x) = x$ et $\beta\varphi(x) \in U'$ pour tout $x \in U$.

Soit $S(\sigma)$ la classe des sections locales de σ.

THÉORÈME. *On définit une catégorie $S(\sigma)^{\bullet}$ isomorphe à une sous-catégorie de $R(\sigma)^{\cdot}$, dont la loi de composition est*

$$(U'', \varphi', U_1') \bullet (U', \varphi, U) = (U'', \varphi'', U) \text{ si } U_1' = U', \text{ où } \varphi'' =$$
$$= \varkappa\, [\varphi'\, \beta\varphi, \varphi] \quad (\textit{c'est-à-dire } \varphi''(x) = \varphi'\, \beta\varphi(x) . \varphi(x)).$$

Il existe une quasi-topologie [11] canonique $\hat{\lambda}$ sur $S(\sigma)$ telle que $(S(\sigma)^{\bullet}, \hat{\lambda})$
1 *soit une catégorie quasi-topologique [7].*

L'isomorphisme est défini par la bijection γ :

$$(U', \varphi, U) \to ((T, \iota, T/U'), (T/U', \beta\, \varphi, T/U), (T, \varphi, T/U)).$$

$S(\sigma)^{\bullet}$ est appelée *catégorie des sections locales* de σ. En général, elle n'est pas munie d'une topologie. En utilisant les résultats du § 3, on peut la munir d'une quasi-topologie $\hat{\lambda}$ (qui est définie directement dans [7]) et $(S(\sigma)^{\bullet}, \hat{\lambda})$ est une catégorie quasi-topologique. En effet, (T, D) est une catégorie fortement θ'-dominée, θ' étant le foncteur d'oubli vers M de la catégorie T' des applications quasi-continues [7] entre espaces quasi-topologiques, la domination D associant à (T, T') la quasi-topologie de la convergence locale [7] sur la classe $T.\mathsf{T}.T'$ (celle-ci généralise la topologie de la convergence compacte, à laquelle elle s'identifie si T' est localement compacte). Soit σ_+ la catégorie topologique $(C_+^{\cdot}, T_+)$, où $C_+^{\cdot}$ est la catégorie somme de $C^{\cdot}$ et d'une unité $a \notin C$, et où T_+ est la topologie la moins fine sur C_+ telle que $T_+/C = T$; soit $T_{0+} = T_+/C_{+0}$. On définit une bijection $\hat{\gamma}$ de $S(\sigma)$ sur une sous-catégorie de $R(\sigma_+)^{\cdot}$ par :

$$(U', \varphi, U) \to ((T_+, \iota_{U'_+}, T_{0+}), (T_{0+}, \beta\varphi_+, T_{0+}), (T_+, \varphi_+, T_{0+})),$$

où $\iota_{U'}$ est l'application identique de U' et où φ_+ est l'application « globale » associée à φ :

$$\varphi_+(x) = \varphi(x) \text{ si } x \in U \text{ et } \varphi_+(x) = a \text{ si } x \notin U.$$

Cette bijection définit un isomorphisme de $S(\sigma)^\bullet$ sur une sous-catégorie de $R_{T_{0+}}(\sigma_+)^\cdot$ (notations § 3). Comme cette dernière catégorie est θ'-structurée, par image réciproque par $\hat{\gamma}$ on obtient une catégorie quasi-topologique $(S(\sigma)^\bullet, \hat{\lambda})$.

Soit $S_p(\sigma)^\cdot$ la catégorie des sections locales pointées de σ. Ses éléments sont les couples $((U', \varphi, U), (x', x))$, où $x \in U$ et $x' = \beta\varphi(x)$, la loi de composition étant celle induite par $S^\bullet \times (C_0^\cdot \times C_0^\cdot)^\perp$, en désignant par $(C_0^\cdot \times$ 1
$\times C_0^\cdot)^\perp$ le groupoïde des couples associé à $C_0^\cdot$. Soit r^λ la relation d'équivalence sur $S_p(\sigma)$ engendrée par

$$((U_1', \varphi_1, U_1), (x', x)) \sim ((U', \varphi, U), (x', x))$$

si $U_1' \subset U'$, $U_1 \subset U$ et $\varphi_1 = \varphi / U_1$.

Théorème [7]. *Il existe une catégorie quasi-topologique* $J^\lambda(\sigma)$ *quotient de* $(S_p(\sigma)^\cdot, \hat{\lambda}')$ *par* r^λ, *où* $\hat{\lambda}'$ *est la quasi-topologie induite par* $\hat{\lambda} \times \times (T_0 \times T_0)$.

Un élément de $J^\lambda(\sigma)$ est appelé *jet local de section*, noté $j_x^\lambda \varphi$. Par itération, on peut définir une suite de catégories quasi-topologiques, appelées *prolongements non holonomes* de σ. Si T_0 est localement compact, ces catégories sont topologiques (voir [7], III).

5. Catégories différentiables

Soit C^r la catégorie des applications r-différentiables entre variétés r-différentiables de dimension finie ou infinie (modelées sur un espace de Banach ou sur un espace vectoriel localement convexe quelconque). Soit 2
δ^r son foncteur d'oubli vers M et soit $S\,\mathsf{C}^r$ sa sous-catégorie formée des submersions.

Définition. Une catégorie δ^r $((S\mathsf{C}^r, S\mathsf{C}^r), \mathsf{C}^r)$-structurée est appelée *catégorie r-différentiable* ([8], [9]).

C'est donc un couple $(C^\cdot, A)$, où $C^\cdot$ est une catégorie, A une structure de variété r-différentiable sur C telle que :

1° Il existe $(A, \iota, A_0) \in \mathsf{C}^r$ avec $a = (A_0, \alpha, A) \in S\mathsf{C}^r$, $b = (A_0, \beta, A) \in S\mathsf{C}^r$ (Il s'ensuit que A_0 est une sous-variété propre fermée de A et (A, ι, A_0) une immersion).

2° Comme a et b sont des subimmersions, il existe un produit fibré 3
$A \ast A$ de (a, b) sur $C^\cdot \ast C^\cdot$. Alors $k = (A, \varkappa, A \ast A) \in \mathsf{C}^r$. (Il s'ensuit que $A \ast A$ est une sous-variété propre de $A \times A$.)

Une catégorie r-différentiable $(C^\cdot, A)$ est dite *régulièrement différentiable* si

3° $[b, a]$ est une subimmersion [8].

Elle est dite *localement triviale* [9] si de plus

4° $[b, a]$ (C) est un ouvert de $A_0 \times A_0$, $C_\gamma^{\cdot}$ est ouvert pour A et $(C_\gamma^{\cdot}, A_\gamma)$ est un groupoïde r-différentiable.

Cette dernière condition entraîne que tout $e \in C_0^{\cdot}$ admet un voisinage ouvert U dans A_0 qui admet un relèvement r-différentiable v dans A_γ relativement à β tel que $\alpha v(U) = \{e\}$.

THÉORÈME [8]. *Si $(C^{\cdot}, A)$ est une catégorie r-différentiable et si A*
1 *est une variété banachique, $C_\gamma^{\cdot}$ est ouvert dans A et $(C_\gamma^{\cdot}, A_\gamma)$ est un groupoïde r-différentiable.*

REMARQUE. La théorie des espèces de structures r-différentiables [8] au-dessus d'un groupoïde différentiable localement trivial est équivalente à la théorie des espaces fibrés localement triviaux (voir [9]).

Soit $\sigma = (C^{\cdot}, A)$ une catégorie r-différentiable, l un entier $\leqslant r$. Nous désignons par $\underline{\sigma}$ la catégorie topologique sous-jacente à σ. Soit $S^r(\sigma)^\bullet$ la sous-catégorie de $S(\underline{\sigma})^\bullet$ formée des sections r-différentiables de σ, i.e. dont les éléments sont les $(U', \varphi, U) \in S(\underline{\sigma})$ tels que $(A, \varphi, A/U) \in \mathsf{C}^r$.

THÉORÈME. *$S^r(\sigma)^\bullet$ est isomorphe à une sous-catégorie de la catégorie produit croisée $R(\sigma)^{\cdot}$ associée à l'espèce de morphismes $\eta(\sigma)$ correspondant à σ.*

Soit $J^{\lambda, r}(\sigma)$ la sous-catégorie de $J^\lambda(\sigma)$ formée des jets locaux de sections différentiables ; c'est donc la catégorie quotient par la relation d'équivalence induite par r^λ de la sous-catégorie $S_p^r(\sigma)^{\cdot}$ de $S_p(\underline{\sigma})^{\cdot}$ formée des sections pointées r-différentiables.

THÉORÈME [8]. *Il existe une catégorie $C^{l\bullet}$ quotient de $J^{\lambda, r}(\sigma)$ par la relation d'équivalence ρ^l :*

$j_x^\lambda \varphi \sim j_x^\lambda \varphi'$ si, et seulement si, φ et φ' ont le même l-jet en x (i.e. dans des cartes locales convenables, φ et φ' ont mêmes différentielles homogènes d'ordre $l' \leqslant l$, en x). De plus $(C^{l\bullet}, A^l)$ est une catégorie $(r-l)$-différentiable, A^l étant la structure de variété $(r-l)$-différentiable canonique sur l'espace des l-jets de A_0 dans A [8].

COROLLAIRE. *On définit la catégorie $(r-l)$-différentiable $(J^{r,l}, A^{r,l})$ des l-jets d'applications r-différentiables à partir de la catégorie différentiable*
2 *«universelle» des r-germes $((\underline{V} \times \underline{V})^{\perp}, V \times V)$, où V = variété „universelle" des germes des variétés $V \in \mathsf{C}_0^r$.*

On appelle $(C^{l\bullet}, A^l)$ le *prolongement holonome d'ordre l* de σ, noté σ^l. Par itération, on définit les prolongements non holonomes d'ordre l et aussi les prolongements semi-holonomes de σ (voir [8]).

Soit $\eta(\sigma) = (\mathsf{C}^{r\cdot}, K^\bullet, \varkappa')$ l'espèce de morphismes associée à $\sigma = (C^{\cdot}, A)$. Soit η_p l'espèce de morphismes pointée $(\mathsf{C}_p^{r\cdot}, K^\bullet{}_p, \varkappa_p')$ suivante : Les éléments de K_p sont les couples $(h, (x, x'))$ tels que $h \in K$, $x' \in \alpha(h)$ et $x = \underline{h}(x')$, la loi de composition dans $K_p^\bullet$ étant

$$((h', (x_1, x')), (h, (x, x'))) \rightarrow (h' \bullet h, (x_1 \cdot x, x'))$$

3 si, et seulement si, $h' \bullet h$ est défini dans $K^\bullet$. La catégorie C_p^r est formée des applications r-différentiables pointées et la loi $\varkappa_p'$ est définie par

$$((f, (x', x'')), (h, (x, x')) \rightarrow (h. f, (x, x''))$$

si, et seulement si, $\beta(f) = \alpha(h)$. Soit $A.J^{r,l}$ la classe des $X \in J^{r,l}$ dont le but est un germe de A.

THÉORÈME. *Il existe une espèce de morphismes* $\underline{\eta}^l(\sigma) = (J^{r,l}, (A.J^{r,l})^\bullet,$
$K'')$ *quotient de* η_p. *De plus* $((A.J^{r,l})^\bullet, A^{r,l}/A.J^{r,l})$ *est une catégorie* $(r-l)$- 1
différentiable et $\underline{\eta}^l(\gamma)$ *est sous-jacente à une espèce de morphismes* $(r-l)$- 2
différentiable [8], *notée* $\eta_l^l(\sigma)$.

La loi de composition de $(A.J^{r,l})^\bullet$ est [8].

$(X', X) \to kv(X', X)$ si $aX' = bX$, où $v(X', X)$ est l'élément associé à (X', X) par le produit fibré $(j^l_{\beta(X')}\, a, j^l_{\beta(X)}\, b)$, où $a = (A, \alpha, A)$, $b = (A, \beta, A)$.

Comme $\eta_l^l(\sigma)$ est $(r-l)$-différentiable, la catégorie produit croisé associée est une catégorie $(r-l)$-différentiable.

THÉORÈME. *Le prolongement* $(C^{l\bullet}, A^l)$ *s'identifie à une sous-catégorie* $(r-l)$-*différentiable de la catégorie* $(r-l)$-*différentiable produit croisé associée à* $\eta_l^l(\sigma)$.

Ces résultats conduisent à une étude « catégorique » des propriétés
infinitésimales de catégories différentiables et par suite de la Géométrie 3
Différentielle.

Reçu le 30 juin 1967

Institut H. Poincaré
Paris

BIBLIOGRAPHIE

1. C. EHRESMANN, *Catégories et structures*. Dunod, Paris, 1965.
2. — *Catégories structurées*. Ann. Ec. Norm. Sup., **80**, 1963, 349–426.
3. — *Structures quasi-quotient*. Math. Annalen, **171**, 1967, 293–363.
4. — *Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints*. Cahiers de Topo. et Géo. diff., **IX**, 1967, 33–180.
5. — *Sur les structures algébriques*. Comptes rendus Acad. Sci. Paris, **264**, série A, 1967, 840–843.
6. — *Introduction to the theory of structured categories*. Univer. of Kansas, Technical Report, **10**, 1966, 95.
7. — *Catégories topologiques* I, II, III. Proc. Nederl. Akad. van Wetensch., Amsterdam, Série A, **69**, 1966, 135–175.
8. — *Prolongements des catégories différentiables*. Cahiers de Topo. et Géo. diff., **VII**, 1965, 8; *Propriétés infinitésimales des catégories différentiables*, id., **IX**, 1967, 1–10.
9. — *Catégories topologiques et catégories différentiables*. Coll. Géo. diff. Globale, Bruxelles, 1958, 137–150.
10. A. GROTHENDIECK, *Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique*. Séminaire Bourbaki, 195, 1959–60, 22 et 212, 1960–61, 19.
11. G. KOWALSKY, *Limesräume und Komplettierung*, Math. Nachr., **12**, 1954, 301–340.
12. C. EHRESMANN, *Prolongements universels d'un foncteur par adjonction de limites projectives* (à paraître, provisoirement multigraphié, Paris, 1967, 45 pages).

Notations [1]. Une catégorie (C, κ) est représentée par $C^\cdot$, où C est la classe sous-jacente et le symbole de la loi de composition $\kappa : (y, x) \to y.x$ de $C^\cdot * C^\cdot$ dans C; ses applications source et but sont notées α et β, la classe de ses unités $C_0^\cdot$, le groupoïde de ses éléments inversibles $C_\gamma^\cdot$, sa duale C^*. Si e et e' sont des unités de $C^\cdot$, la classe $\mathrm{Hom}_{C^\cdot}(e', e)$ des morphismes de source e, de but e', est désignée par $e'.C.e$.

Extrait du COLLOQUE DE TOPOLOGIE
tenu à Bruxelles du 7 au 10 Septembre 1964
Centre Belge de Recherches Mathématiques
1966

/91/

COHOMOLOGIE A VALEURS DANS UNE CATÉGORIE DOMINÉE

PAR

Charles EHRESMANN

INTRODUCTION

La cohomologie est généralement définie à partir d'une catégorie abélienne, c'est-à-dire d'une catégorie préadditive vérifiant certaines conditions. Peut-on remplacer dans ce problème les structures de groupes abéliens par des structures de catégories ? Le problème de la cohomologie non abélienne est un cas particulier de celui-ci. L'étude de ces questions conduit à décomposer le problème :

Soit p un foncteur fidèle d'une catégorie $\mathcal{H}$ vers une catégorie pleine $\mathcal{M}$ d'applications. Soit $H^\bullet$ une catégorie, J et $\mathcal{J}$ des idéaux de $H^\bullet$ et $\mathcal{H}$ respectivement. Soit D un foncteur d'une sous-catégorie $H'^\bullet \times H^*$ de $H^\bullet \times H^*$ (où H^* est la duale de $H^\bullet$) vers $\mathcal{H}$ tel que $p.\,D$ soit une restriction du foncteur $\mathrm{Hom}_{H^\bullet}$.

1) On définit la notion de $(p, \mathcal{J})$-suite exacte courte (en utilisant les p-surjections et les p-injections [1]).

2) On définit la notion de complexe de $(H^\bullet, J)$.

3) A un complexe K de $(H^\bullet, J)$, on cherche à associer une $(p, \mathcal{J})$-suite exacte courte dont le « but » sera une structure de cohomologie de K.

4) Un complexe de $(H^\bullet, J)$ dont la structure de cohomologie est triviale est appelé une suite exacte de $H^\bullet$.

5) A une catégorie donnée, on associe un « foncteur résolution » à valeurs dans la catégorie des complexes de $(H^\bullet, J)$.

Dans le cas classique, $H^\bullet$ est la catégorie sous-jacente à une catégorie abélienne, J est l'idéal formé des 0-morphismes, D est le foncteur de $H^\bullet \times H^*$ vers la catégorie $\mathcal{G}$ des homomorphismes entre groupes abéliens tel que $D(e', e)$ soit le groupe abélien donné sur Hom (e', e); enfin $\mathscr{J}$ est l'idéal de $\mathscr{G}$ formé des applications 0. Les suites exactes de la catégorie abélienne $H^{\bullet}$ sont alors « retrouvées » par la méthode 4.

Nous réservons pour un autre article le problème 5 de la résolution (voir aussi conclusion). Un cas important est celui où $\mathscr{H}$ est la catégorie des foncteurs $\mathscr{F}$; l'étude des suites exactes courtes de foncteurs est faite dans le n° 3, où le problème du quotient d'une catégorie par une sous-catégorie propre est résolu. Les n[os] 5 et 6 montrent comment construire des foncteurs de cohomologie relatifs à la catégorie des applications covariantes ou contravariantes entre espèces de morphismes (cette catégorie jouant le rôle de la catégorie $H^{\bullet}$ et $\mathscr{H}$ étant la catégorie $\mathscr{F}$); le foncteur D est défini par la donnée d'un foncteur à valeurs dans les applications covariantes dominées par des foncteurs doubles [2]. On obtient par exemple le foncteur de cohomologie centrale.

Les résultats de cet article ont été résumés dans deux Notes à l'Académie des Sciences [3]; dans deux autres Notes [4], le cas de la cohomologie d'une catégorie à valeurs dans une espèce de morphismes a été considéré.

Se rattache aux questions traitées ici le problème de l'extension des catégories (problème inverse du passage au quotient) qui, comme nous le montrerons ultérieurement, se ramène à l'étude de certaines catégories de cohomologie d'ordre 2 et 3.

1. Sur la notion de sous-morphisme

Notations :

Soit $H^{\bullet}$ une catégorie. Nous désignons par $H_0^{\bullet}$ la classe de ses unités, par α et β ses applications source et but, par $H^{\bullet} * H^{\bullet}$ la classe des couples composables, par $H_{\gamma}^{\bullet}$ le groupoïde des éléments inversibles et par H^* la catégorie duale. Si $(f_n, \dots, f_1)$ est une suite d'éléments de H tels que $\alpha(f_{i+1}) = \beta(f_i)$ pour tout $i < n$, nous poserons :

$$\prod_{i \leqslant n} f_i = f_n. \dots .f_2 .f_1.$$

Soit $e \in H_0^{\bullet}$; si $e' \in H_0^{\bullet}$, nous désignons par $e.H.e'$ la classe des $h \in H$ tels que $\beta(h) = e$ et $\alpha(h) = e'$.

22

Si $H'^{\bullet}$ est une sous-catégorie de $H^{\bullet}$, nous désignerons par $\square\,(H^{\bullet}; H, H')$ la sous-classe M de $\square H^{\bullet}$ (voir [1]) formée des quatuors (k', k, h, h') de $H^{\bullet}$ tels que $k' \in H'$ et $h' \in H'$. La classe M définit une sous-catégorie double (voir [2]) de la catégorie double $(\boxdot\, H^{\bullet}, \boxminus\, H^{\bullet})$. Les applications source et but dans $M^{\boxminus}$ (resp. dans $M^{\boxdot}$) seront notées $\alpha^{\boxminus}$ et $\beta^{\boxminus}$ (resp. $\alpha^{\boxdot}$ et $\beta^{\boxdot}$). Si $h \in H$, nous posons :

$$h^{\boxminus} = (\beta\,(h), h, h, \alpha\,(h)) \quad \text{et} \quad h^{\boxdot} = (h, \beta\,(h), \alpha\,(h), h).$$

Soit $R_g(H^{\bullet})$ (resp. soit $R_d\,(H^{\bullet})$) la classe des monomorphismes (resp. des épimorphismes) de $H^{\bullet}$. Sur H la relation :

$$f' \underset{H^{\bullet}}{<} f \text{ si, et seulement si, il existe } g \in H \text{ tel que } f' = f\,.\,g$$

est une relation de préordre. Soit A une sous-classe de H. Si A admet une borne supérieure (resp. borne inférieure) dans la classe préordonnée $(H, \underset{H^{\bullet}}{<})$, on appelle une telle borne *une $H^{\bullet}$-borne supérieure* (resp. *une $H^{\bullet}$-borne inférieure*) *de A*; nous désignons par $\cup_{H^{\bullet}} A$ la classe de toutes les bornes supérieures de A, par $\cap_{H^{\bullet}} A$ la classe de toutes les $H^{\bullet}$-bornes inférieures de A. On a :

$$(\cup_{H^{\bullet}} A)\,.\,H_{\gamma}^{\bullet} = \cup_{H^{\bullet}} A; \; (\cap_{H^{\bullet}} A)\,.\,H_{\gamma}^{\bullet} = \cap_{H^{\bullet}} A.$$

Si $b \in \cup_{H^{\bullet}} A$ et $b' \in \cup_{H^{\bullet}} A$ sont des monomorphismes de $H^{\bullet}$, il existe un et un seul $g \in H_{\gamma}^{\bullet}$ tel que $b\,.\,g = b'$. Si $b \in \cup_{H^{\bullet}} A$ et $b \in A$, on appelle b un *$H^{\bullet}$-maximum* de A; l'ensemble des $H^{\bullet}$-maxima de A est noté $\max\limits_{H^{\bullet}} A$ (ou seulement $\max A$). Si $b \in \cap_{H^{\bullet}} A$ et $b \in A$, on appelle b un *$H^{\bullet}$-minimum de A*; la classe des $H^{\bullet}$-minima de A est notée $\min\limits_{H^{\bullet}} A$ (ou $\min A$). On a $b \in \max A$ si, et seulement si, $b \in A$ et $A \subset b\,.\,H$; on a $b \in \min A$ si, et seulement si, $b \in A$ et si $b \in a\,.\,H$, pour tout $a \in A$.

Remarque : Soit $(h_i)_{i \in I}$ une famille de H admettant une $H^{\bullet}$-borne inférieure h. Si $H^{\bullet}$ est formé de monomorphismes, il existe un produit fibré naturalisé $(h_i, g_i)_{i \in I}$ dans $H^{\bullet}$ tel que $h_i\,.\,g_i = h$. Si h_i est un monomorphisme pour tout $i \in I$, il existe un produit fibré naturalisé

$$((h_i, g_i)_{i \in I}, (h, \alpha(h))) \quad \text{dans } H^{\bullet}.$$

Par dualité on définit aussi sur H la relation de préordre $\underset{H^{\bullet}}{<}$.

La relation de préordre sur H engendrée par $\underset{H^{\bullet}}{<}$ et par la relation de préordre duale de $\underset{H^{\bullet}}{<}$ est la relation :

$$f < f' \text{ si, et seulement si, il existe } (h', f', f, h) \in \square\, H^{\bullet}.$$

Nous désignerons par $\mathcal{M}$ une catégorie pleine d'applications, dont la classe des unités est identifiée à une classe $\mathcal{M}_0$ de classes. On supposera que $\mathcal{M}_0$ contient avec une classe toutes ses sous-classes, avec deux classes leur classe produit. Soit $\mathcal{M}^i$ (resp. $\mathcal{M}^s$) la sous-catégorie de $\mathcal{M}$ formée des injections (resp. des surjections) et soit $\mathcal{M}^\iota$ (resp. $\mathcal{M}^\varrho$) la sous-classe de $\mathcal{M}$ formée des injections canoniques (M, ι, M') d'une sous-classe M' de M dans M (resp. des applications $\tilde{\varrho} : s \to s \bmod \varrho$, où ϱ est une relation d'équivalence sur $\alpha(\tilde{\varrho})$).

Soit $H^\bullet$ une catégorie telle que $e' . H . e \in \mathcal{M}_0$, pour tout $(e', e) \in H_0^\bullet \times H_0^\bullet$. Nous désignerons par $\mathrm{Hom}_{H^\bullet}$ (ou simplement Hom) le foncteur de $H^\bullet \times H^*$ vers $\mathcal{M}$ tel que

$$\mathrm{Hom}\,(e', e) = e' . H . e \quad \text{si } (e', e) \in H_0^\bullet \times H_0^\bullet$$

et que $\mathrm{Hom}\,(h', h)$ soit l'application

$f \to h' . f . h$ de $\mathrm{Hom}\,(\alpha(h'), \beta(h))$ dans $\mathrm{Hom}\,(\beta(h'), \alpha(h))$, pour tout $(h', h) \in H \times H$. Si $e \in H_0^\bullet$ et $h \in H$, l'application

$$\mathrm{Hom}\,(e, h) : f \to f . h$$

est appelée application *e-transposée de h*, et notée h_e^*. Si $p = (H^\bullet, \underline{p}, K^\bullet)$ est un foncteur et si $e \in H_0^\bullet$, l'application

$$k \to \mathrm{Hom}_{H^\bullet}(e, p(k)) = p(k)_e^*$$

définit un foncteur de K^* vers $\mathcal{M}$, noté p_e^* et appelé *foncteur e-transposé de p*.

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie de tous les foncteurs

$$\Phi = (\hat{C}^\bullet, \underline{\Phi}, C^\bullet) \quad \text{tels que} \quad (\hat{C}, \underline{\Phi}, C) \in \mathcal{M}.$$

Soit $p_{\mathcal{F}}$ le foncteur projection :

$$(\hat{C}^\bullet, \underline{\Phi}, C^\bullet) \to (\hat{C}, \underline{\Phi}, C) \text{ de } \mathcal{F} \text{ vers } \mathcal{M}.$$

$p_{\mathcal{F}}$ est un foncteur d'homomorphismes (*i.e.* un foncteur fidèle tel que $(\mathcal{M}, \underline{p}_{\mathcal{F}}\iota, \mathcal{F}_\gamma)$ soit un foncteur d'hypermorphismes [1]). Soit $\mathcal{F}_g$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}$ ayant pour unités les groupoïdes $G^\bullet \in \mathcal{F}_0$. Si Φ est un foncteur de $C^\bullet$ vers $\hat{C}^\bullet$, nous représentons par $\underline{\Phi}$ la surjection de C sur $\Phi(C) \subset \hat{C}$ telle que $\Phi = (\hat{C}^\bullet, \underline{\Phi}, C^\bullet)$, par $(\hat{C}^\bullet, \underline{\Phi}\iota, C'^\bullet)$ la restriction de Φ à une sous-catégorie $C'^\bullet$ de $C^\bullet$, et nous poserons :

$$\Phi_0 = (\hat{C}_0^\bullet, \underline{\Phi}\,\iota, C_0^\bullet) \quad \text{et} \quad \Phi_\gamma = (\hat{C}_\gamma^\bullet, \underline{\Phi}\,\iota, C_\gamma^\bullet).$$

Espèces de structures p-dominées :

Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, \mathcal{H}^\bullet)$ un foncteur. Rappelons [1] qu'un couple *p-dominant une espèce de structures* est un couple $(C^\bullet, F)$, où F est un foncteur d'une sous-catégorie de $C^\bullet$ vers $\mathcal{H}$ tel que :

$$p(F(e)) \neq \varnothing \quad \text{et} \quad p(F(e')) \cap p(F(e)) = \varnothing$$

si $e \in \alpha(F)_0$, $e' \in \alpha(F)_0$ et $e \neq e'$. Soit $\varkappa'(F)$ l'application $(f, z) \to fz = F(f)(z)$ si, et seulement si, $f \in \alpha(F)$ et $z \in F(\alpha(f))$. L'espèce de structures

$$\eta(F) = (C^\bullet, S(F), \varkappa'(F)), \text{ où } S(F) = \bigcup_{e \in \alpha(F)_0} p(F(e)),$$

définie par le couple $(C^\bullet, p \,.\, F)$, est dite *sous* $(C^\bullet, F)$. On dit aussi que $(\eta(F), F)$ est *une espèce de structures p-dominée.*

Pour simplifier, nous supposons que p est fidèle et nous écrivons un élément de $\mathcal{H}$ sous la forme d'un triplet

$$h = (\beta(h), \underline{p(h)}, \alpha(h)).$$

Soit $\mathcal{A}(p)_0$ la classe de tous les foncteurs F tels que $(\alpha(F), F)$ soit un couple p-dominant une espèce de structures et que l'on ait $\alpha(F) \in \mathcal{F}_0$. Soit $\mathcal{A}(p)$ la classe des quadruplets (F', Φ, φ, F) tels que :

$$F \in \mathcal{A}(p)_0, \qquad F' \in \mathcal{A}(p)_0, \quad \Phi = (\alpha(F'), \underline{\Phi}, \alpha(F)) \in \mathcal{F},$$

$\varphi = (S(F'), \underline{\varphi}, S(F)) \in \mathcal{M}$, que $(\eta(F'), \Phi, \varphi, \eta(F))$ soit une application covariante [1] et que, pour tout $e \in \alpha(F)_0$, on ait :

$$(F' \,.\, \Phi(e), \underline{\varphi}\iota, F(e)) \in \mathcal{H}.$$

Un élément de $\mathcal{A}(p)$ sera appelé *application covariante* p-dominée *de* F vers F' (voir [1]).

Nous noterons aussi $\mathcal{A}(p)$ la catégorie obtenue en munissant 1
la classe $\mathcal{A}(p)$ de la loi de composition :

$$(F'', \Phi', \varphi', F_1') \,.\, (F', \Phi, \varphi, F) = (F'', \Phi' \,.\, \Phi, \varphi' \,.\, \varphi, F)$$

si, et seulement si, $F_1' = F'$.

Cas particulier :

Un couple $p_{\mathcal{F}}$-dominant une espèce de structures est appelé une *espèce de morphismes* (voir [1]). Soit $(C^\bullet, F)$ une espèce de morphismes. La catégorie $S(F)^\bullet$ somme des catégories $F(e)$, où $e \in \alpha(F)_0$, est une catégorie munie de la catégorie d'opérateurs $\alpha(F)$ relativement à $\varkappa'(F)$ (au sens de [1]). Soit F^0 le foncteur de $\alpha(F)$ vers $\mathscr{F}$ tel que

$$F^0(e) = F(e)_0 \quad \text{si} \quad e \in \alpha(F)_0,$$

$$F^0(f) = F(f)_0 \quad \text{si} f \in e' . \alpha(F) . e.$$

Le couple $(C^\bullet, F^0)$ est une espèce de morphismes triviale (c'est-à-dire entièrement déterminée par l'espèce de structures $\eta(F^0)$). Le couple $(C^\bullet, F^\gamma)$, où F^γ est le foncteur de $\alpha(F)$ vers $\mathscr{F}$ tel que

$$F^\gamma(f) = F(f)_\gamma \quad \text{si} \quad f \in e' . \alpha(F) . e,$$

est une espèce de morphismes et on a $S(F^\gamma)^\bullet = S(F)^\bullet_\gamma$. Nous poserons $\mathscr{A} = \mathscr{A}(p_{\mathscr{F}})$. On a $(F', \Phi, \varphi, F) \in \mathscr{A}$ si, et seulement si, $F \in \mathscr{A}_0$, $F' \in \mathscr{A}_0$, $\Phi = (\alpha(F'), \underline{\Phi}, \alpha(F)) \in \mathscr{F}$, $(S(F')^\bullet, \underline{\varphi}, S(F)^\bullet) \in \mathscr{F}$, et si $(\eta(F'), \Phi, \varphi, \eta(F))$ est une application covariante.

Sous-foncteurs et foncteurs quotient :

Soit $p = (C^\bullet, \underline{p}, H^\bullet)$ un foncteur. Soient C' et C'' deux sous-classes de C formées respectivement de monomorphismes et d'épimorphismes de $C^\bullet$ et définissant des sous-catégories de $C^\bullet$. Nous désignerons par $(C', p)^{/-}$ la classe des (C', p)-injections, par $(C'', p)^{-/}$ la classe des (C'', p)-surjections (voir [1]).

Soit $\mathfrak{N}(H^\bullet)$ la sous-catégorie de la catégorie longitudinale
1 des transformations naturelles formée des $\Psi \in \boxminus H^\bullet . \mathscr{F}$. Soit $\hat{p}$ le foncteur de $\mathfrak{N}(H^\bullet)$ vers $\mathfrak{N}(C^\bullet)$ défini par l'application $\Psi \to \boxminus p . \Psi$ (voir prop. 1 [5]). Soit $\mathfrak{N}'(C')$ la sous-classe de $\mathfrak{N}(C^\bullet)$ formée des

$$\Psi' = (\boxminus C^\bullet, \underline{\Psi}', K^\bullet) \in \mathscr{F} \text{ tels que } \Psi'(K) \subset \square(C^\bullet; C', C).$$

Puisque C' est formé de monomorphismes de $C^\bullet$, la classe $\square(C^\bullet; C', C)$ est formée de monomorphismes de $\boxplus C^\bullet$ et par suite $\mathfrak{N}'(C')$ est formé de monomorphismes de $\mathfrak{N}(C^\bullet)$.

De même si $C''^\bullet$ est une sous-catégorie de $C^\bullet$ formée d'épimorphismes de $C^\bullet$, la sous-classe $\mathfrak{N}''(C'')$ de $\mathfrak{N}(C^\bullet)$ formée des

$$\Psi'' = (\boxminus C^\bullet, \underline{\Psi}'', K^\bullet) \text{ tels que } \Psi''(K) \subset \square(C^\bullet; C'', C)$$

est une classe d'épimorphismes de $\mathfrak{N}(C^\bullet)$.

Proposition 1 : *Soit $\Psi \in \mathfrak{N}(H^\bullet)$; pour que toute restriction $(\boxminus H^\bullet, \underline{\Psi}_\iota, K_1^\bullet)$ de Ψ à une sous-catégorie $K_1^\bullet$ de $K^\bullet = \alpha(\Psi)$ soit une*

$(\mathfrak{N}'(C'), \hat{p})$-injection, il faut et il suffit que, pour tout $f \in K$, on ait $\Psi(f) \in \square(H^\bullet; (C', p)^{\ulcorner}, H)$.

Démonstration : Soit $\Psi = (\boxminus H^\bullet, \underline{\Psi}, K^\bullet)$ une transformation naturelle et soit $\Psi' = (\boxminus H^\bullet, \underline{\Psi}\iota, K_1^\bullet)$ une restriction de Ψ. Supposons que, pour tout $f \in K$, on ait

$$\Psi'(f) \in \square(H^\bullet; (C', p)^{\ulcorner}, H).$$

Soit $\Phi \in \mathfrak{N}(H^\bullet)$ tel que

$$\beta^{\boxplus} \Phi = \beta^{\boxplus} \Psi' \quad \text{et} \quad \hat{p}(\Phi) = \hat{p}(\Psi') \boxplus \varphi'.$$

D'après le théorème 2,3 [1], $\Psi'(f)$ est une $(\square C^\bullet, \boxplus p)$-injection, de sorte qu'il existe un et un seul $\Phi'(f) \in \square H^\bullet$ tel que

$$\Psi'(f) \boxplus \Phi'(f) = \Phi(f) \quad \text{et} \quad \square p(\Phi'(f)) = \varphi'(f). \qquad (1)$$

Si $(f', f) \in K_1^\bullet * K_1^\bullet$, il existe aussi un et un seul $\Phi'(f') \in \square H^\bullet$ tel que

$$\Psi'(f') \boxplus \Phi'(f') = \Phi(f') \text{ et } \square p(\Phi'(f')) = \varphi'(f') \qquad (2)$$

et il existe un et un seul $\Phi'(f'.f)$ tel que

$$\Psi'(f'.f) \boxplus \Phi'(f'.f) = \Phi(f'.f) \text{ et } \square p(\Phi'(f'.f)) = \varphi'(f'.f). \quad (3)$$

En multipliant latéralement membre à membre les égalités (1) et (2), et en utilisant l'axiome de permutabilité (prop. 30,1 [1]), on trouve:

$$\begin{aligned} \Phi(f') \boxminus \Phi(f) &= (\Psi'(f') \boxplus \Phi'(f')) \boxminus (\Psi'(f) \boxplus \Phi'(f)) \\ &= (\Psi'(f') \boxminus \Psi'(f)) \boxplus (\Phi'(f') \boxminus \Phi'(f)) \\ &= \Psi'(f'.f) \boxplus (\Phi'(f') \boxminus \Phi'(f)). \end{aligned}$$

En comparant avec l'égalité (3), il en résulte

$$\Phi'(f') \boxminus \Phi'(f) = \Phi'(f'.f)$$

car $\Psi'(f'.f)$ est un monomorphisme. Donc l'application $f' \to \Phi'(f')$ définit un foncteur Φ' de $K_1^\bullet$ vers $\boxminus H^\bullet$ et Φ' est l'unique transformation naturelle telle que $\Psi' \boxplus \Phi' = \Phi$ et $\hat{p}(\Phi') = \varphi'$. Ainsi $\Psi' \in (\mathfrak{N}'(C'), \hat{p})^{\ulcorner}$. — Inversement, supposons que toute restriction de Ψ soit une $(\mathfrak{N}'(C'), \hat{p})$-injection. Soit $e \in K_0^\bullet$ et soit $\Psi(e) = j^{\boxminus}$, où $j \in H$. Soit $h \in H$ tel que

$$\beta(h) = \beta(j) \quad \text{et} \quad p(h) = p(j) \,.\, h'.$$

La transformation naturelle

$$\Psi' = (\boxminus H^\bullet, \underline{\Psi}\iota, K_1^\bullet), \quad \text{où } K_1 = \{e\},$$

est une restriction de Ψ. Soit

$$\Phi = (\boxbar H^\bullet, \underline{\Phi}, K_1^\bullet) \quad \text{et} \quad \Phi(e) = h^{\boxminus};$$

on a

$$\hat{p}(\Phi) = \hat{p}(\Psi') \boxbar \varphi', \quad \text{où } \varphi'(e) = h'^{\boxminus}.$$

Comme Ψ' est une $(\mathcal{N}'(C'), \hat{p})$-injection, il existe un et un seul $\Phi' \in \mathcal{N}(H^\bullet)$ tel que

$$\Phi = \Psi' \boxbar \Phi' \quad \text{et} \quad \hat{p}(\Phi') = \varphi';$$

on en déduit, si $\Phi'(e) = \bar{h}'^{\boxminus}$,

$$h = j \,.\, \bar{h}' \quad \text{et} \quad p(\bar{h}') = h'.$$

Donc j est une (C', p)-injection. Il s'ensuit

$$\Psi(K) \subset \square\,(H^\bullet; (C', p)^{/-}, H).$$

Définition 1 : *Soit* $F = (H^\bullet, \underline{F}, K^\bullet)$ *un foncteur. On dira que* F' *est un* (C', p)-sous-foncteur de F *s'il existe une transformation naturelle* Ψ *de* F' *vers* F *telle que* $\Psi(K) \subset \square\,(H^\bullet; (C', p)^{/-}, H)$. *On dira que* F'' *est un* (C'', p)-foncteur quotient de F *s'il existe une transformation naturelle* Ψ'' *de* F *vers* F'' *telle que*

$$\Psi''(K) \subset \square\,(H^\bullet; (C'', p)^{-/}, H).$$

D'après la proposition 1, F' est un (C', p)-sous-foncteur de F si, et seulement si, il existe une transformation naturelle Ψ de F' vers F dont toute restriction est une $(\mathcal{N}'(C'), \hat{p})$-injection. Par dualité, F'' est un (C'', p)-foncteur quotient de F si, et seulement si, il existe une transformation naturelle Ψ'' de F vers F'' dont toute restriction soit une $(\mathcal{N}''(C''), \hat{p})$-surjection.

Remarque : En particulier si p est le foncteur projection canonique
1 de la catégorie des homomorphismes entre groupes dans $\mathscr{M}$, un $(\mathscr{M}^i, p)$-sous-foncteur de F est un sous-foncteur de F et un $(\mathscr{M}^s, p)$-foncteur quotient de F est un foncteur quotient de F, au sens de [6].

Proposition 2 : *Supposons que* C' *définisse un ordre sur la classe de ses unités et soit* $F = (H^\bullet, \underline{F}, K^\bullet)$ *un foncteur. Si* F' *et* F_1' *sont deux* (C', p)*-sous-foncteurs de* F *tels que* $p \,.\, F' = p \,.\, F_1'$, *il existe une équivalence naturelle* Γ *de* F_1' *vers* F' *telle que* $\hat{p}(\Gamma) \in \mathcal{N}'(C')$.

En effet, soient Ψ_1 et Ψ des $(\mathcal{N}'(C'), \hat{p})$-injections de F_1' et F'

respectivement vers F. Comme, pour tout $e \in K_0^{\bullet}$, le k tel que $\square p(\Psi(e)) = k^{\boxminus}$ est le seul élément de C' de source $p \,.\, F'(e) = p \,.\, F'_1(e)$ et de but $p \,.\, F(e)$, on a $\hat{p}\,(\Psi) = \hat{p}\,(\Psi_1)$. Puisque Ψ et Ψ_1 sont des $(\mathfrak{N}'\,(C'), \hat{p})$-injections, il résulte du corollaire 2 du théorème 1,3 [1] que l'on a $\Psi_1 = \Psi \boxbar \Gamma$, où Γ est une équivalence naturelle telle que $\hat{p}\,(\Gamma)\,(e) = p \,.\, F'\,(e)^{\boxminus}$.

Corollaire : Avec les hypothèses de la proposition 2 *et si p_γ est bien fidèle* [1], *on a $F' = F'_1$.*

Proposition 3 *: Soit $F = (H^{\bullet}, \underline{F}, K^{\bullet}) \in \mathscr{F}$; soit τ une application de $K_0^{\bullet}$ dans $(C', p)^{\ulcorner}$ telle que, pour tout $f \in e' \,.\, K \,.\, e$, il existe un quatuor de $C^{\bullet}$ de la forme $\psi\,(f) = (\underline{p}\, \underline{F}\,(f), \underline{p}\; \tau\,(e'), \underline{p}\, \tau\,(e), \varphi(f))$. Alors il existe un (C', p)-sous-foncteur F' de F tel que (F, τ, F') définisse une transformation naturelle si $\beta\tau = F_0$.*

Démonstration : Soit $(f', f) \in K^{\bullet} * K^{\bullet}$ et $e'' = \beta(f')$; on a

$$\psi(f') \boxminus \psi(f) = (\underline{p}\, \underline{F}\,(f' . f), \underline{p}\; \tau\,(e''), \underline{p}\; \tau\,(e), \varphi\,(f') \,.\, \varphi\,(f))$$

et

$$\psi\,(f' . f) = (\underline{p}\, \underline{F}\,(f' . f), \underline{p}\; \tau\,(e''), \underline{p}\; \tau\,(e), \varphi\,(f' \,. f)).$$

Comme C' est formé de monomorphismes, la relation

$$\underline{p}\; \tau\,(e'') \,.\, \varphi\,(f' . f) = \underline{p}\,(\underline{F}\,(f' . f)) \,.\, \underline{p}\; \tau\,(e) = \underline{p}\; \tau\,(e'') \,.\, \varphi(f') \,.\, \varphi\,(f)$$

entraîne $\varphi\;(f' . f) = \varphi(f') \,.\, \varphi(f)$, d'où $\psi\;(f' . f) = \psi(f') \boxminus \psi(f)$. Ainsi l'application $f \to \psi\,(f)$ définit un foncteur ψ. Par ailleurs, d'après la proposition 4,3 [1], il existe un et un seul

$$\Psi\,(f) = (F(f), \tau\,(e'), \tau\,(e), F'\,(f)) \in \square\, H^{\bullet}$$

tel que $p\;(F'(f)) = \varphi\,(f)$. Il en résulte

$$\Psi\,(f') \boxminus \Psi(f) = (F(f' . f), \tau\,(e''), \tau\,(e), F'\,(f') \,.\, F'\,(f));$$

les relations $\tau\,(e'') \in R_g\,(H)$ et

$$\tau\,(e'') \,.\, F'\,(f') \,.\, F'\,(f) = F(f' \,. f) \,.\, \tau\,(e) = \tau\,(e'') \,.\, F'\,(f' . f)$$

entraînent $F'\,(f' . f) = F'\,(f') \,.\, F'\,(f)$. Donc l'application $f \to F'\,(f)$ définit un foncteur F' de $K^{\bullet}$ vers $H^{\bullet}$ et Ψ est une transformation naturelle de F' vers F. Ceci signifie que F' est un (C', p)-sousfoncteur de F.

Cas particulier : Supposons que $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, H^\bullet)$ et que p_γ soit bien fidèle. Soit $F = (H^\bullet, \underline{F}, K^\bullet) \in \mathcal{F}$. Si F'_0 est une application de $K_0^\bullet$ dans $H_0^\bullet$ telle que $F'_0(e)$ soit une $(\mathcal{M}^\iota, p)$-sous-structure de $F(e)$ pour tout $e \in K_0^\bullet$ et si on a $\underline{p}\,\underline{F}(f)\ (\underline{p}\ F'_0(e)) \subset \underline{p}\ (F'_0(e'))$ pour tout $f \in e' \,.\, K \,.\, e$, alors il existe un et un seul $(\mathcal{M}^\iota, p)$-sous-foncteur F' de F prolongeant F'_0. En effet, il existe un et un seul $(\mathcal{M}^\iota, p)$-sous-morphisme $\bar{f}$ de $F(f)$, de source $F'_0(e)$ et de but $F'_0(e')$, de sorte que le résultat est conséquence des proposition 3 et 2.

Définition 2 : Soit $F = (H^\bullet, \underline{F}, K^\bullet)$ un foncteur. Un $(\mathcal{M}^\iota, p)$-sous-foncteur (*resp. un $(\mathcal{M}^s, p)$-foncteur quotient*) *de F sera appelé un p-*sous-foncteur (*resp. p*-foncteur quotient) de *F*.

(C', p, H'_0)-sous-morphismes :

Soit $p = (C^\bullet, \underline{p}, H^\bullet)$ un foncteur; soient $C'^\bullet$ et $C''^\bullet$ deux sous-catégories de $R_g(C^\bullet)$ et de $R_d(C^\bullet)$ respectivement et soit H'_0 une sous-classe de $H_0^\bullet$.

Définition 3 : Soient $s \in H_0^\bullet$ et $j \in p(s) \,.\, C'$; posons $\Sigma = s \,.\, (C', p)^{\urcorner} \,.\, H'_0$; un élément de Σ est appelé un (C', p, H'_0)-sous-morphisme de *s*. *Supposons qu'il existe $\bar{j} \in \cup_{C''^\bullet}\, p(\Sigma)$ et qu'il existe un produit fibré naturalisé* ([1], 4) $((j, j'), (\bar{j}, \bar{j}'))$ *dans $C''^\bullet$. On dira que j* engendre un
1 (C', p, H'_0)-sous-m*orphisme h de s si la classe des $h' \in \Sigma$ tels que $j \,.\, j' \underset{C'}{<} p(h')$ admet h pour $(C', p)^{\urcorner\bullet}$-minimum.*

Soient $s \in H_0^\bullet$ et $j \in p(s) \,.\, C'$. Pour que j engendre un (C', p, H'_0)-sous-morphisme h de s, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) il existe $\bar{j} \in \cup_{C''^\bullet}\, p(\Sigma)$ et il existe un produit fibré naturalisé
$$((j, j'), (\bar{j}, \bar{j}')) \text{ dans } C''^\bullet;$$

2) la sous-classe Σ' de $p(\Sigma)$ formée des majorants de $j \,.\, j'$ admet $p(h)$ pour $C'^\bullet$-minimum.

En effet, ces conditions sont nécessaires, puisque p est compatible avec les préordres $\underset{H^\bullet}{<}$ et $\underset{C^\bullet}{<}$. Si elles sont vérifiées et si on a $h' \in \Sigma$ et $p(h') \in \Sigma'$, il existe $g \in C'$ tel que $p(h) = p(h') \,.\, g$ et, en vertu du théorème 1,3 [1], il existe un et seul $\bar{g} \in (C', p)^{\urcorner}$ tel que
$$h = h' \,.\, \bar{g} \quad \text{et} \quad p(\bar{g}) = g.$$

La classe des (C', p, H'_0)-sous-morphismes de s engendrés par $j \in p(s) \,.\, C'$ est la classe des éléments $h \,.\, g'$ tels que h soit un (C', p, H'_0)-

sous-morphisme engendré par j et que l'on ait

$$g' \in H^{\bullet}_{\gamma} . H'_0 \quad \text{et} \quad p(g') \in C',$$

puisque $(C', p)^{\ulcorner}$ est formée de monomorphismes de $H^{\bullet}$.

Soit h un (C', p, H'_0)-sous-morphisme de s engendré par $j \in p(s) . C'$; s'il existe un (C', p, H'_0)-sous-morhisme $\bar{h}$ tel que 1
$\bar{j} = p(\bar{h}) \in \cup_{C''} p(\Sigma)$, d'après le théorème 1,3 [1], $\bar{h}$ est un $(C', p)^{\ulcorner\bullet}$-maximum de Σ.

Si $s \in H'_0$ et si $p(s) \in C'$, alors s est un (C', p, H'_0)-sous-morphisme de s engendré par $p(s)$.

Proposition 4 : *Soient $s \in H^{\bullet}_0$ et $p(s) \in C'$. Pour que $p(s)$ engendre un (C', p, H'_0)-sous-morphisme de s, il faut et il suffit que la classe Σ des (C', p, H'_0)-sous-morphismes de s admette un $(C', p)^{\ulcorner\bullet}$-maximum.*

Démonstration : Soit $e = p(s)$. Supposons que $\bar{h} \in \max_{(C', p)^{\ulcorner\bullet}} \Sigma$ et soit $\bar{j} = p(\bar{h})$. On a $\bar{j} \in \cup_{C''} p(\Sigma)$, puisque p est compatible avec les préordres $\underset{H^{\bullet}}{<}$ et $\underset{C^{\bullet}}{<}$. De plus $((e, \bar{j}), (\bar{j}, \alpha(\bar{j})))$ est un produit fibré naturalisé dans $C''^{\bullet}$. Soit Σ' la classe des $k \in p(\Sigma)$ tels que $\bar{j} \underset{C''}{<} k$; comme $p(\Sigma) \underset{C''}{<} \bar{j}$, les éléments k et $\bar{j}$ sont $C''^{\bullet}$-équivalents. Donc $p(\bar{h}) \in \min_{C''} \Sigma'$ et $\bar{h}$ est un (C', p, H'_0)-sous-morphisme de s engendré par $\bar{j}$. — Inversement, soit h un (C', p, H'_0)-sous-morphisme de s engendré par j. Soit $\bar{j} \in \cup_{C''} p(\Sigma)$. Puisque $((e, \bar{j}), (\bar{j}, \alpha(\bar{j})))$ est un produit fibré naturalisé on a $\bar{j} \underset{C''}{<} p(h)$, par hypothèse. Il en résulte que $\bar{j}$ et $p(h)$ sont $C''^{\bullet}$-équivalents. Pour tout $h' \in \Sigma$, on a $p(h') \underset{C''}{<} \bar{j} \underset{C''}{<} p(h)$, de sorte qu'il existe $g \in C'$ tel que $p(h') = p(h) . g$. D'après le théorème 1,3 [1], il existe un et un seul $\bar{g} \in (C', p)^{\ulcorner}$ tel que

$$h' = h . \bar{g} \quad \text{et} \quad p(\bar{g}) = g.$$

Ceci montre que h est un $(C', p)^{\ulcorner\bullet}$-maximum de Σ.

Soit $H'^{\bullet}$ une sous-catégorie de $H^{\bullet}$.

Définition 4 : *Soit $F = (H^{\bullet}, \underline{F}, K^{\bullet})$ un foncteur. On dira qu'un foncteur $F' = (H^{\bullet}, \underline{F}', K^{\bullet})$ est un (C', p, H')*-sous-foncteur de *F si F' est un (C', p)-sous-foncteur de F tel que $F'(K) \subset H'$.*

Cas particulier : Soient $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, H^{\bullet})$ un foncteur d'homomorphismes [1], H'_0 une sous-classe de $H^{\bullet}_0$ et $H'^{\bullet}$ une sous-catégorie de $H^{\bullet}$.

Définition 5 : *Soient $S \in H^{\bullet}_0$ et $M \subset p\,(S)$. On dira que M engendre une $(p,\ H'_0)$*-sous-structure s de S *si $(p\,(S),\ \iota,\ M)$ engendre un $(\mathcal{M}^{\iota},\ p,\ H'_0)$-sous-morphisme h de S tel que $\alpha\,(h) = s$. Soit $F = (H^{\bullet}, \underline{F}, K^{\bullet})$ un foncteur et soit G un $\mathcal{M}$-sous-foncteur de $p\,.\,F$. On dira que F' est un (p, H')-sous-foncteur de F* engendré par *G si F' est un $(\mathcal{M}^{\iota},\ p,\ H')$-sous-foncteur de F tel que, pour tout $e \in K^{\bullet}_0$, l'élément $F'\,(e)$ soit la $(p,\ H'^{\bullet}_0)$-sous-structure de $F\,(e)$ engendrée par $G\,(e)$.*

Si F' est un (p, H')-sous-foncteur de F engendré par G, la transformation naturelle Ψ de F' vers F correspondante est définie par le triplet $(F,\ \tau,\ F')$, où $\tau\,(e)$ est le $(\mathcal{M}^{\iota}, p, H'^{\bullet}_0)$-sous-morphisme de $F\,(e)$ engendré par $G\,(e)$, i.e.

$$\alpha\,\tau\,(e) = F'\,(e), \quad \beta\,\tau\,(e) = F\,(e) \quad \text{et} \quad \underline{p}\,\tau\,(e) = (\underline{p}\underline{F}\,(e),\ \iota,\ \underline{p}\underline{F}'(e)).$$

Soient $S \in H^{\bullet}_0$ et $M \subset p\,(S)$. Soit Σ'_S la classe des p-sous-structures s' de S telles que $s' \in H'_0$. D'après les définitions 3 et 5, pour que M engendre une $(p,\ H'_0)$-sous-structure $\bar{s}'$ de S, il faut et il suffit que la classe des $s' \in \Sigma'_S$ tels que

$$M \cap (\cup\, p\,(\Sigma'_S)) \subset p\,(s')$$

admette $\bar{s}'$ pour plus petit élément relativement à la relation d'ordre [1] $s'' \sqsubset s'$ si, et seulement si, s'' est une p-sous-structure de s'. D'après la proposition 4, $p\,(S)$ engendre une $(p,\ H'_0)$-sous-structure de S si, et seulement si, la classe des $s' \in H'_0$ tels que $s' \sqsubset S$ admet un plus grand élément pour la relation $\sqsubset$. Si $H^{\bullet}_0 = H'_0$, alors M engendre une $(p,\ H^{\bullet}_0)$-sous-structure s de S si, et seulement si, la classe des s' tels que $s' \sqsubset S$ et $M \subset p\,(s')$ admet s pour plus petit
1 élément relativement à $\sqsubset$; on dira dans ce cas que M *engendre la p-sous-structure s de S.*

Soit $F = (H^{\bullet}, \underline{F}, K^{\bullet})$ un foncteur. D'après le corollaire de la proposition 2, il existe au plus un (p, H')-sous-foncteur de F engendré par G. En particulier, F est le $(p,\ H)$-sous-foncteur engendré par $p\,.\,F$.

Proposition 5 : *Pour qu'un foncteur $F' = (H^{\bullet}, \underline{F}', K^{\bullet})$ soit le (p, H')-sous-foncteur de F engendré par le $\mathcal{M}$-sous-foncteur $G = (\mathcal{M}, \underline{G}, K^{\bullet})$ de $p\,.\,F$ il faut et il suffit que*

1) *pour tout* $f \in K$, $F'(f) \in H'$ *et* $F'(f)$ *soit un* $(\mathcal{M}^{\iota}, p)$*-sous-morphisme de* $F(f)$;

2) *pour tout* $e \in K_0^{\bullet}$, $F'(e)$ *soit la* $(p, H_0'^{\bullet})$*-sous-structure engendrée par* $G(e)$.

Démonstration : Ces conditions sont évidemment nécessaires. Si elles sont vérifiées, soit τ l'application $e \to \tau(e)$, où $\tau(e)$ est, pour tout $e \in K_0^{\bullet}$, l'élément de H défini par le triplet $(F(e), \iota, F'(e))$. D'après la proposition 2, il existe un $(\mathcal{M}^{\iota}, p)$-sous-foncteur unique F'' de F tel que (F, τ, F'') définisse une transformation naturelle. Soit $f \in K$; comme $F'(f)$ et $F''(f)$ sont deux $(\mathcal{M}^{\iota}, p)$-sous-morphismes de $F(f)$ de source $F'(e)$ et de but $F'(e')$, où $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, ils sont égaux. Donc $F' = F''$ et F' est le (p, H')-sous-foncteur de F engendré par G.

Exemple : Soient $C^{\bullet} \in \mathcal{F}_0$ et $M \subset C$; alors M engendre une $p_{\mathcal{F}}$-sous-structure de $C^{\bullet}$, à savoir la sous-catégorie $\overline{M}^{\bullet}$ de $C^{\bullet}$ engendrée par M. De plus M engendre une $(p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}_{g0})$-sous-structure de $C^{\bullet}$, qui est le sous-groupoïde de $C^{\bullet}$ engendré par $M \cap C_{\gamma}^{\bullet}$.

2. Suites exactes courtes relatives a un ideal

(C', p, H')*-images :*

Soit $p = (C^{\bullet}, \underline{p}, H^{\bullet})$ un foncteur et soit $H'^{\bullet}$ une sous-catégorie de $H^{\bullet}$. Soit $C'^{\bullet}$ une sous-catégorie de $R_g(C^{\bullet})$.

Définition 6 : Soit $g \in H$. *On dira que* g *admet* m *pour* (C', p, H')-image *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) $p(\alpha(g))$ *engendre un* $(C', p, H_0'^{\bullet})$*-sous-morphisme* h *de* $\alpha(g)$.

2) *Soit* H'_g *la classe des* $h' \in (C', p)^{\ulcorner}$ *tels qu'il existe*

$$(g, h', h, g') \in \square\, H^{\bullet}, \text{ où } g' \in H'.$$

Alors H'_g *admet* m *pour* $(C', p)^{\ulcorner\bullet}$*-minimum.*

Dans ce cas l'élément $\bar{g}'$ *tel que* $(g, m, h, \bar{g}') \in \square\, H^{\bullet}$ *est appelé* (C', p, H')-sous-morphisme image de g.

En particulier, $g \in H$ a m pour (C', p, H)-image si, et seulement si, la classe H_g des $h' \in (C', p)^{\ulcorner}$ tels que $g = h' . g'$, où $g' \in H$, 1 admet m pour $(C', p)^{/\overline{}\bullet}$-minimum, c'est-à-dire si, et seulement si, $m \in H_g$ et si la condition $h' \in H_g$ entraîne qu'il existe $k \in H$ tel que :

$$m = h' . k \qquad \text{et} \qquad p(k) \in C'$$

(car, d'après le théorème 1,3 [1] cette dernière condition a pour conséquence $k \in (C', p)^{/\overline{}}$). Si $g \in (C', p)^{/\overline{}}$ alors g est sa (C', p, H)-image.

Si m est une (C', p, H')-image de $g \in H$, pour tout $\gamma' \in \alpha(m).H'^{\bullet}_{\gamma}$ tel que $p(\gamma') \in C'$ l'élément $m . \gamma'$ est aussi une (C', p, H')-image de g.

Proposition 6 : *Soit $g \in H$ et supposons que $p(\alpha(g))$ engendre un $(C', p, H_0'^{\bullet})$-sous-morphisme h de $\alpha(g)$; pour que g admette une (C', p, H')-image m, il faut et il suffit que la classe Q_g des quatuors $(g, h', h, g') \in L$ tels que $g' \in H'$ admette un $L^{\boxplus}$-minimum $(g, m, h, \bar{g}')$, où $L = \square(H^{\bullet}; (C', p)^{/\overline{}}, H)$.*

Démonstration : Supposons que $q = (g, m, h, \bar{g}')$ soit un $L^{\boxplus}$-minimum de Q_g. Soit $h' \in H_g'$; il existe $q' = (g, h', h, g') \in L$, et par suite il existe

$$q'' = (g', h'', k, \bar{g}') \in L \ \text{ tel que } \ q = q' \boxplus q''.$$

Il en résulte $m = h' . h''$, d'où $m \underset{H^{\bullet}}{<} h'$ (et aussi $k = \alpha(h)$, car $h . k = h \in R_g(H^{\bullet})$). Ainsi m est une (C', p, H')-image de g. — Inversement, soit m une (C', p, H')-image de g et soit

$$q = (g, m, h, \bar{g}') \in L.$$

Supposons $q' = (g, h', h, g') \in Q_g$. La relation $h' \in H_g'$ entraîne qu'il existe $h'' \in (C', p)^{/\overline{}}$ tel que $m = h' . h''$. Les égalités :

$$h' . g' = g . h = m . \bar{g}' = h' . h'' . \bar{g}'$$

ont pour conséquence $g' = h'' . \bar{g}'$, car h' est un monomorphisme de $H^{\bullet}$. On en déduit :

$$q'' = (g', h'', \alpha(h), \bar{g}') \in L \quad \text{et} \quad q = q' \boxplus q''.$$

Par suite q est un $L^{\boxplus}$-minimum de Q_g.

Exemple: Soit $\Phi = (C^{\bullet}, \underline{\Phi}, S^{\bullet}) \in \mathscr{F}$. Le foncteur Φ admet $(C^{\bullet}, \iota, \overline{\Phi(S)^{\bullet}})$ pour $(\mathscr{M}^{\iota}, p_{\mathscr{F}}, \mathscr{F})$-image et $(C^{\bullet}, \iota, C_1^{\bullet})$ pour $(\mathscr{M}^{\iota}, p_{\mathscr{F}}, \mathscr{F}_g)$-image, où $C_1^{\bullet}$ est le sous-groupoïde de $C^{\bullet}$ engendré par $\overline{\Phi(S_\gamma^{\bullet})}$. De plus Φ admet $(\overline{\Phi(S)}^{\bullet}, \underline{\Phi}, S^{\bullet})$ (resp. $(C_1^{\bullet}, \underline{\Phi}\iota, S_\gamma^{\bullet})$) pour $(\mathcal{M}^{\iota}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ - (resp. pour $(\mathcal{M}^{\iota}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}_g)$ -) sous-morphisme image.

Idéaux et noyaux :

Définition 7 : *Soit $H^{\bullet}$ une catégorie. On appelle* idéal de $H^{\bullet}$ *une sous-classe J de H telle que $J \,.\, H \subset J$ et $H \,.\, J \subset J$.*

Exemples : 1) Une catégorie $H^{\bullet}$ munie d'un idéal J tel que $e' \,.\, J \,.\, e$ contienne un et un seul élément pour tout $(e', e) \in H_0^{\bullet} \times H_0^{\bullet}$ est une catégorie avec 0-morphismes, l'élément unique de $e' \,.\, J \,.\, e$ étant appelé le 0-morphisme de e vers e'.

2) La classe $J_{\mathcal{F}}$ des foncteurs $\Phi = (C^{\bullet}, \underline{\Phi}, S^{\bullet}) \in \mathcal{F}$ tels que $\Phi(S) \subset C_0^{\bullet}$ est un idéal de $\mathcal{F}$.

3) La classe $J_{\mathcal{A}}$ des $(F', \Phi, \varphi, F) \in \mathcal{A}$ tels que :

$$(S(F')^{\bullet}, \underline{\varphi}, S(F)^{\bullet}) \in J_{\mathcal{F}}$$

est un idéal de $\mathcal{A}$.

Définition 8 : *Soit $H^{\bullet}$ une catégorie. On appelle* application idéalisante pour $H^{\bullet}$ *une application I de $H_0^{\bullet}$ dans H vérifiant les conditions* :

1) *$\beta I(e) = e$ pour tout $e \in H_0^{\bullet}$; posons $e_0 = \alpha I(e)$; on a $I(e_0) = e_0$.*

2) *Pour tout $h \in H$, il existe un $h_0 \in H$ tel que :*

$$(I\beta(h), h, h_0, I\alpha(h)) \in \square H^{\bullet}.$$

Proposition 7 : Si $H^{\bullet}$ est une catégorie et I une application idéalisante pour $H^{\bullet}$, la classe J des $g \in H$ tels qu'il existe $g' \in H$ vérifiant $g = I\beta(g) \,.\, g'$ est un idéal de $H^{\bullet}$.

En effet, soit $g \in J$ et $e = \beta(g)$. Si $h \in H \,.\, e$ et $\beta(h) = e'$, on a

$$g = I(e) \,.\, g' \qquad \text{et} \qquad h \,.\, g = h \,.\, I(e) \,.\, g' = I(e') \,.\, h_0 \,.\, g',$$

d'où $h \,.\, g \in J$. Si $h' \in \alpha(g) \,.\, H$, on trouve :

$$g \,.\, h' = I(e) \,.\, g' \,.\, h' \in J.$$

Par suite J est un idéal de $H^{\bullet}$.

Exemples : $\mathscr{F}$ admet l'application : $C^\bullet \to (C^\bullet, \iota, C_0^\bullet)$ pour application idéalisante et $J_{\mathscr{F}}$ est l'idéal correspondant. $\mathscr{A}$ admet l'application :

$$F \to (F, (C^\bullet, \iota, C^\bullet), (S(F), \iota, S(F)_0^\bullet), F^0)$$

où $C^\bullet = \alpha(F)$, pour application idéalisante; $J_{\mathscr{A}}$ est l'idéal correspondant.

Soient $p = (C^\bullet, \underline{p}, H^\bullet)$ un foncteur, $H'^\bullet$ une sous-catégorie de $H^\bullet$, J un idéal de $H^\bullet$ et $C'^\bullet$ une sous-catégorie de $C^\bullet$ formée de monomorphismes de $C^\bullet$.

Définition 9 *: Soit $g \in H$; on dira que g admet n pour (C', p, H', J)-noyau si $g \, . \, n \in J$, si $n \in (C', p)^{/\overline{}} \, . \, H_0'^\bullet$ et si les conditions $h \in H$, $g \, . \, h \in J$ et $\alpha(h) \in H'$ assurent l'existence d'un $h' \in H'$ tel que $h = n \, . \, h'$.*

En particulier, soit $H'^\bullet$ une sous-catégorie pleine de $H^\bullet$. Si $g \in H$, g admet un (C', p, H', J)-noyau si, et seulement si, $n \in (C', p)^{/\overline{}}$ et si la classe des $h \in \alpha(g) \, . \, H \, . \, H_0'^\bullet$ tels que $g \, . \, h \in J$ admet n pour $H^\bullet$-maximum. Si $j \in J \, . \, H_0'^\bullet$, j admet $\alpha(j)$ pour $(R_g(C^\bullet), p, H', J)$-noyau.

Exemple : Soit $F = (C^\bullet, \underline{F}, S^\bullet) \in \mathscr{F}$; alors F admet $(S^\bullet, \iota, S_1^\bullet)$, où $S_1 = \overset{-1}{\underline{F}}(C_0^\bullet)$ est le noyau de F, pour $(\mathscr{M}^\iota, p_{\mathscr{F}}, \mathscr{F}, J_{\mathscr{F}})$-noyau et $(S^\bullet, \iota, (S_1)_\gamma^\bullet)$ pour $(\mathscr{M}^\iota, p_{\mathscr{F}}, \mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}})$-noyau.

Suites exactes courtes :

Soit $(C^\bullet, \underline{p}, H^\bullet) = p$ un foncteur. Soient $C'^\bullet$ et $C''^\bullet$ des sous-catégories de $R_g(C^\bullet)$ et $R_d(C^\bullet)$ respectivement, H_0 une sous-classe de $H_0^\bullet$ et $H'^\bullet$ une sous-catégorie de $H^\bullet$.

Définition 10 *: On appelle (C'', C', p, J)-*suite exacte courte *un couple (k, h) tel que $h \in (C', p)^{/\overline{}}$, $k \in (C'', p)^{\overline{}/}$ et que k soit un H^*-maximum de la classe des k' tels que $k' \, . \, h \in J$. On dira que p est à (C'', C', H_0, J)-*suites exactes courtes *si, pour tout $h \in (C', p)^{/\overline{}} \, . \, H_0$, il existe une (C'', C', p, J)-suite exacte courte (k, h).*

Remarque : Si $p = H^\bullet$, si $C'^\bullet$ et $C''^\bullet$ sont respectivement les sous-catégories de $H^\bullet$ formées des monomorphismes et des épimorphismes de $H^\bullet$ et si J est un idéal de 0-morphismes (ex. 1), une suite exacte courte au sens de [7] est une $(C'', C', H^\bullet, J)$-suite exacte courte, mais non réciproquement, car nous n'imposons pas que h soit un (C', p, H, J)-noyau de k. En effet, cette dernière condition ne sera pas toujours vérifiée dans les cas que nous aurons à considérer.

Pour que (k, h) soit une (C'', C', p, J)-suite exacte courte, il faut et il suffit que l'on ait

$$h \in (C', p)^{/\overline{\;\;}},\ k \in (C'', p)^{\overline{\;\;}/},\ (k, h) \in H^{\bullet} * H^{\bullet} \text{ et } k \,.\, h \in J$$

et que les conditions $k' \in H$ et $k' \,.\, h \in J$ assurent l'existence d'un $g \in H$ tel que $k' = g \,.\, k$ (alors g est déterminé d'une manière unique par ces conditions).

Soit $j \in J$; le couple $(\beta(j), j)$ (resp. $(j, \alpha(j))$) est une (C'', C', p, J)-suite exacte courte si, et seulement si, $j \in (C', p)^{/\overline{\;\;}}$ et $p(\beta(j)) \in C''$ (resp. si $j \in (C'', p)^{\overline{\;\;}/}$, $p(\alpha(j)) \in C'$ et si, pour tout $j' \in J.\,\alpha(j)$, il existe $f \in C$ vérifiant $p(j') = f.\,p(j)$.)

Proposition 8 : *Soient* (k, h) *et* (k', h') *deux* (C'', C', p, J)*-suites exactes courtes et soit* $q = (h', g', g, h) \in \square H^{\bullet}$. *Il existe* $q' \in \square H^{\bullet}$ *tel que* (q', q) *soit une* $(\hat{C}'', \hat{C}', \boxminus p, \hat{J})$*-suite exacte courte, où on pose* $\hat{C}'' = \square (C^{\bullet}; C, C'')$, $\hat{C}' = \square (C^{\bullet}; C, C')$ *et* $\hat{J} = \square (H^{\bullet}; H, J)$.

Démonstration : D'après le théorème 2,3 [1], q est une $(\hat{C}', \boxminus p)$-injection, car h et h' sont des (C', p)-injections. Puisque (k, h) est une (C'', C', p, J)-suite exacte courte, la relation

$$k' \,.\, g' \,.\, h = k' \,.\, h' \,.\, g \in J$$

entraîne qu'il existe un et un seul $g'' \in H$ tel que $k' \,.\, g' = g'' \,.\, k$. Posons $q' = (k', g'', g', k)$; on a $q' \in \square H^{\bullet}$ et q' est une $(\hat{C}'', \boxminus p)$-surjection, d'après le théorème 2,3 [1]. De plus $\hat{J}$ est un idéal de $\boxminus H^{\bullet}$ et on a $q' \boxminus q \in \hat{J}$. Soit $q'' = (f', \bar{g}'', g', f) \in \square H^{\bullet}$ tel que $q'' \boxminus q \in \hat{J}$. Comme $f \,.\, h \in J$ et $f' \,.\, h' \in J$, il existe $\bar{f} \in H$ et $\bar{f}' \in H$ tels que $f = \bar{f} \,.\, k$ et $f' = \bar{f}' \,.\, k'$. On obtient :

$$\bar{g}'' \,.\, \bar{f} \,.\, k = \bar{g}'' \,.\, f = f' \,.\, g' = \bar{f}' \,.\, k' \,.\, g' = \bar{f}' \,.\, g'' \,.\, k,$$

d'où $\bar{g}'' \,.\, \bar{f} = \bar{f}' \,.\, g''$, car k est un épimorphisme de $H^{\bullet}$. On en déduit

$$\bar{q}'' = (\bar{f}', \bar{g}'', g'', \bar{f}) \in \square H^{\bullet} \quad \text{et} \quad q'' = \bar{q}'' \boxminus q'.$$

Donc (q', q) est une $(\hat{C}'', \hat{C}', \boxminus p, \hat{J})$-suite exacte courte.

Corollaire : Soit $F = (H^{\bullet}, \underline{F}, K^{\bullet}) \in \mathscr{F}$ *et soit* (F, τ, F') *un triplet définissant une transformation naturelle tel que* F' *soit un* (C', p)-

sous-foncteur de F. Si pour $e \in K_0^{\bullet}$ *il existe une* (C'', C', p, J)*-suite exacte courte* $(\tau'(e), \tau(e))$, *il existe un* (C'', p)*-foncteur quotient* F'' *de F tel que* (F'', τ', F) *définisse une transformation naturelle.*

Démonstration : Soit $f \in H$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. D'après la proposition 8, il existe une et une seule $(\hat{C}'', \hat{C}', \boxminus\, p, \hat{J})$-suite exacte courte $(q'(f), q(f))$, où

$q(f) = (F(f), \tau(e'), \tau(e), F'(f))$ et

$$q'(f) = (F''(f), \tau'(e'), \tau'(e), F(f)).$$

Comme $\square\, p\,(q'(f)) \in \square\, C^{\bullet}$, il résulte de la proposition duale de la proposition 3 que l'application $f \to F''(f)$ définit un (C'', p)-foncteur quotient de F et que (F'', τ', F) est un triplet définissant une transformation naturelle.

La notion de suite exacte courte permet de définir celle de suite exacte quelconque. Nous allons donner seulement des indications
1 sur cette question, dont nous réservons l'étude pour un autre article.

Définition 11 : *Soit* $g \in H$; *on dira que g admet* n^* *pour* (C'', C', p, H', J) -conoyau *si g admet une* (C', p, H')*-image m et si* (n^*, m) *est une* (C'', C', p, J)*-suite exacte courte. On dira que g admet* m^* pour (C'', C', p, H', J)-coimage *si g admet un* (C', p, H', J)*-noyau n, si* (m^*, n) *est une* (C'', C', p, J)*- suite exacte courte et s'il existe* $g' \in H$ *tel que* $g = g' \,.\, m^*$.

Remarque : Si $p = H^{\bullet}$, la définition 11 est différente des définitions analogues dans [7]. Si $H^{\bullet}$ est abélienne, les notions que nous venons de définir (relativement à $p = H^{\bullet}$, $C'' = R_d(H^{\bullet})$, $C' = R_g(H^{\bullet})$, $H' = H$ et à la classe J des 0-morphismes) sont identiques aux notions généralement utilisées.

Proposition 9 : *Soit* $g \in H$; *si g admet n pour* (C', p, H', J)*-noyau et* m^* *pour* (C'', C', p, H', J)*-coimage, n est aussi un* (C', p, H', J)*-noyau de* m^*.

En effet, on a $m^* \,.\, n \in J$; soit $h \in H$ et $m^* \,.\, h \in J$; il existe $g' \in H$ tel que $g = g' \,.\, m^*$, d'où :

$$g \,.\, h = g' \,.\, m^* \,.\, h \in J;$$

comme n est un (C', p, H', J)-noyau de g, il existe $f \in H'$ tel que $h = n \,.\, f$. Donc n est un (C', p, H', J)-noyau de m^*.

Si (k, h) est une (C'', C', p, J)-suite exacte courte, k est le (C'', C', p, H, J)-conoyau de h, puisque h est alors une (C', p, H)-image de h.

Définition 12 : *On dira que* (g', g) *est* un (C'', C', p, H', J)-couple exact *si* $(g', g) \in H^{\bullet} * H^{\bullet}$ *et si* g' *admet une* (C'', C', p, H', J)-*coimage* m^* *telle que* m^* *soit un* (C'', C', p, H', J)-*conoyau de* g. *On dira qu'une suite* $(g_i)_{i \in I}$, *où* I *est un segment fini ou infini de l'ensemble des entiers, est une* (C'', C', p, H', J)-suite exacte *si* (g_{i+1}, g_i) *est un* (C'', C', p, H', J)-*couple exact, lorsque* $i \in I$ *et* $i + 1 \in I$.

Si $(g_i)_{i \leqslant n}$ est une (C'', C', p, H', J)-suite exacte telle que $e = \alpha(g_1) \in J$ (resp. $e' = \beta(g_n) \in J$), alors $(g_n, \ldots, g_1, e, \ldots, e, \ldots)$ 1
(resp. $(\ldots, e', g_n, \ldots, g_1)$) est une (C'', C', p, H', J)-suite exacte.

Remarque : Si $(g', g) \in H^{\bullet} * H^{\bullet}$ et si g admet une (C', p, H')-image m telle que m soit un (C', p, H', J)-noyau de g' et si g' admet une (C'', C', p, H', J)-coimage m^*, le couple (g', g) est exact. Mais cette condition n'est pas nécessaire.

Proposition 10 : *Si* (g', g) *est un* (C'', C', p, H', J)-*couple exact et si* m *est une* (C', p, H')-*image de* g *et* n *un* (C', p, H', J)-*noyau de* g', *il existe* $f \in H'$ *tel que* $m = n \, . f$; *si de plus* $H' = H$, *on a* $g' \, . \, g \in J$.

Démonstration : Soit m^* la (C'', C', p, H', J)-coimage de g'; alors (m^*, n) est une (C'', C', p, J)-suite exacte courte, de même que (m^*, m). D'après la proposition 9, n est un (C', p, H', J)-noyau de m^*, de sorte qu'il existe $f \in H'$ tel que $m = n \, . f$. Par ailleurs, si $H' = H$, il existe un $g_1 \in H$ tel que $g = m \, . \, g_1$; par suite on trouve:

$$g' \, . \, g = g' \, . \, m \, . \, g_1 = g' \, . \, n \, . f \, . \, g_1 \in J \, . f \, . \, g_1 \subset J.$$

Proposition 11 : *Si* (k, h) *est une* (C'', C', p, J)-*suite exacte courte telle que* k *admette un* (C', p, H, J)-*noyau* n, *alors* (k, h) *est un* (C'', C', p, H, J)-*couple exact et* (k, n) *est une* (C'', C', p, J)-*suite exacte courte.*

Démonstration : h étant une (C', p, H)-image de h, l'élément k est un (C'', C', p, H, J)-conoyau de h. Puisque $k \, . \, h \in J$, il existe $f \in H$ tel que $h = n \, . f$. Soit $k' \in H$ tel que $k' \, . \, n \in J$. La relation :

$$k' \, . \, h = k' \, . \, n \, . f \in J$$

entraîne qu'il existe $k'' \in H$ tel que $k' = k'' . k$. Il en résulte que (k, n) est une (C'', C', p, J)-suite exacte courte, c'est-à-dire k est la (C'', C', p, H', J)-coimage de k. Donc (k, h) est un (C'', C', p, H, J)-couple exact.

Cas particulier :

Supposons que $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, H^\bullet)$ soit un foncteur d'homomorphismes.

Définition 13 *: Une* $(\mathcal{M}^s, \mathcal{M}^\iota, p, J)$*-suite exacte courte sera appelée* une (p, J)-suite exacte courte; *si* $(\bar\varrho, \bar\jmath)$ *est une* (p, J)*-suite exacte courte telle que* $p(\bar\jmath) \in \mathcal{M}^\iota$ *et* $p(\bar\varrho) \in \mathcal{M}^q$, *on appellera* $\beta(\bar\varrho)$ la (p, J)-structure quotient de S par s, *notée* S/s, *où* $S = \beta(\bar\jmath)$ *et* $s = \alpha(\bar\jmath)$. *Si* F' *est un* p*-sous-foncteur de* $F = (H^\bullet, \underline{F}, K^\bullet)$ *et si* F'' *est un* p*-foncteur quotient de* F *tel que* $F''(e) = F(e)/F'(e)$ *pour tout* $e \in K^\bullet_0$, *on appelle* F'' le p-foncteur quotient de F par F'.

1 Supposons p saturé [1]. Pour toute (p, J)-suite exacte courte (k, h), il existe une (p, J)-suite exacte courte $(\bar\varrho, \bar\jmath)$, où $p(\bar\varrho) \in \mathcal{M}^q$, $p(\bar\jmath) \in \mathcal{M}^\iota$,

$$\bar\varrho = g' . k, \quad \bar\jmath = h . g, \quad g \in H^\bullet_\gamma \quad \text{et} \quad g' \in H^\bullet_\gamma.$$

Par suite, si $H'^\bullet$ est une sous-catégorie de $H^\bullet$, pour montrer que p est à (H', J)-suites exactes courtes (*i.e.* à $(\mathcal{M}^s, \mathcal{M}^\iota, H'^\bullet_0, J)$-suites exactes courtes), il suffit de montrer qu'il existe S/s, si $s \in H'^\bullet_0$, $S \in H^\bullet_0$ et $s \sqsubset S$. Dans ce cas, si $F'(K^\bullet_0) \subset H'^\bullet_0$, où F' est un p-sous-foncteur de F, il existe d'après le corollaire de la proposition 8 un p-foncteur quotient de F par F'.

Remarque : Si $\bar\varrho$ est un p-épimorphisme tel que $p(\bar\varrho) \in \mathcal{M}^q$ (c'est-à-dire si $\beta(\bar\varrho)$ est la p-structure quotient de $\beta(\bar\varrho)$ par une relation d'équivalence ϱ), il peut ne pas exister de $s \in H^\bullet_0$ tel que $(\bar\varrho, \alpha(\bar\varrho) \leftarrow\!\!\backslash\, s)$ soit une (p, J)-suite exacte courte.

3. Quotient d'une catégorie par une sous-catégorie

Sous-catégories propres et sous-catégories distinguées :

Soit $H^\bullet$ une catégorie.

Définition 14 *: On dira qu'une sous-catégorie* $G^\bullet$ *de* $H^\bullet$ *est* propre *si on a* $H^\bullet_0 \subset G$ *et si les conditions* $h \in H$ (resp. $h \in G$), $g \in G$ *et*

$\beta(h) = \beta(g)$ *entraînent qu'il existe* $(g, h, h', g') \in \square(H^{\bullet}; H, G)$ 1
(*resp.* $\in \square\, G^{\bullet}$).

Une sous-catégorie $C^{\bullet}$ de $H^{\bullet}$ est telle que C^* soit propre dans la catégorie duale H^* de $H^{\bullet}$ si on a $H_0^{\bullet} \subset C$ et si les conditions

$$g \in C,\ h \in H \text{ (resp. } \in C) \quad \text{et} \quad \alpha(h) = \alpha(g)$$

assurent l'existence d'un

$$(g', h', h, g) \in \square(H^{\bullet}; H, C) \quad (\text{resp. } \in \square\, C^{\bullet}).$$

Tout sous-groupoïde $G^{\bullet}$ de $H^{\bullet}$ tel que $G_0^{\bullet} = H_0^{\bullet}$ est propre.

Soit $\mathscr{V}_0$ la classe des couples $(H^{\bullet}, C)$ tels que $C^{\bullet}$ soit une sous-catégorie de $H^{\bullet}$ contenant $H_0^{\bullet}$. Soit $\mathscr{V}$ la catégorie dont les éléments sont les triplets $((H_2^{\bullet}, C_2), \varphi, (H_1^{\bullet}, C_1))$ tels que

$$(H_i^{\bullet}, C_i) \in \mathscr{V}_0,\ i = 1, 2,\ (H_2^{\bullet}, \varphi, H_1^{\bullet}) \in \mathscr{F} \quad \text{et} \quad \varphi(C_1) \subset C_2,$$

la loi de composition étant définie par :

$$((H_4^{\bullet}, C_4), \varphi', (H_3^{\bullet}, C_3)) \,.\, ((H_2^{\bullet}, C_2), \varphi, (H_1^{\bullet}, C_1)) = ((H_4^{\bullet}, C_4), \varphi'\varphi, (H_1^{\bullet}, C_1))$$

si, et seulement si, $(H_3^{\bullet}, C_3) = (H_2^{\bullet}, C_2)$.

On identifie $\mathscr{V}_0$ à la classe des unités de $\mathscr{V}$. Soit $\mathscr{V}$(resp. $\mathscr{V}^d$, resp. $\mathscr{V}^r$) la sous-catégorie pleine de $\mathscr{V}$ ayant pour unités les couples $(H^{\bullet}, C)$ tels que $C^{\bullet}$ soit propre (resp. propre et que $C \subset R_d(H^{\bullet})$, resp. $C \subset R(H^{\bullet})$).

Théorème 1 : *$\mathscr{V}$ est une catégorie à $\mathscr{V}^d$-projections* [1] *admettant un foncteur $(\mathscr{V}^d, \mathscr{V})$-projection* [1] *naturalisé (R, r) tel que, pour tout $(H^{\bullet}, C) \in \mathscr{V}_0$, on ait $r(H^{\bullet}, C) = ((H^{\bullet}/\sigma, \tilde{\sigma}(C)), \tilde{\sigma}, (H^{\bullet}, C))$, où $H^{\bullet}/\sigma$ est une catégorie quotient strict de $H^{\bullet}$ par la relation d'équivalence σ :*

$$h \sim h' \textit{ si, et seulement si, il existe } f \in C \textit{ tel que } h \,.\, f = h' \,.\, f.$$

Démonstration : Soit $(H^{\bullet}, C) \in \mathscr{V}_0$. La relation σ est réflexive (car $C_0^{\bullet} = H_0^{\bullet}$) et symétrique. Soient $h \in H$, $h' \in H$ et $h'' \in H$ tels que $h \sim h'$ et $h' \sim h''$. Il existe $f \in C$ et $f' \in C$ tels que

$$h \,.\, f = h' \,.\, f \quad \text{et} \quad h' \,.\, f' = h'' \,.\, f'.$$

$C^{\bullet}$ étant propre, il existe $(f, f', f_1, f_1') \in \square\, C^{\bullet}$ et on a

$$h \,.\, (f \,.\, f_1) = h' \,.\, f \,.\, f_1 = h' \,.\, f' \,.\, f_1' = h'' \,.\, f' \,.\, f_1' = h'' \,.\, (f \,.\, f_1),$$

d'où $h \sim h''$. Ainsi σ est une relation d'équivalence sur H, compatible avec α et β et dont la restriction à $H_0^{\bullet}$ est l'identité. Montrons que σ est compatible sur $H^{\bullet}$. En effet, supposons

$$h \sim h',\, h_1 \sim h_1',\, (h_1, h) \in H^{\bullet} * H^{\bullet} \quad \text{et} \quad (h_1', h') \in H^{\bullet} * H^{\bullet}.$$

Il existe $f \in C$ et $f_1 \in C$ tels que

$$h \,.\, f = h' . f \quad \text{et} \quad h_1 \,.\, f_1 = h_1' \,.\, f_1.$$

Puisque $C^{\bullet}$ est propre, il existe aussi

$$(f_1, h, h'', f') \in \square\, (H^{\bullet}; H, C) \quad \text{et} \quad (f', f, g', g) \in \square\, C^{\bullet}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} h_1 \,.\, h \,.\, (f' \,.\, g') = h_1 \,.\, f_1 \,.\, h'' \,.\, g' = h_1' \,.\, f_1 \,.\, h'' \,.\, g' = h_1' \,.\, h \,.\, f' \,.\, g' = \\ = h_1' \,.\, h \,.\, f \,.\, g = h_1' \,.\, h' \,.\, f \,.\, g = h_1' \,.\, h' \,.\, (f' . g'), \end{aligned}$$

ce qui signifie $h_1 \,.\, h \sim h_1' \,.\, h'$. Par suite σ est bicompatible sur $H^{\bullet}$ et il existe une catégorie $\bar{H}^{\bullet} = H^{\bullet}/\sigma$ quotient strict de $H^{\bullet}$ par σ. — Soit $\hat{\sigma}$ le $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme $(\bar{H}^{\bullet}, \tilde{\sigma}, H^{\bullet})$ correspondant; posons $\bar{C} = \tilde{\sigma}\,(C)$; on a $\bar{C}_0^{\bullet} = \bar{H}_0^{\bullet}$. Soit $f \in C$ et $\bar{f} = \tilde{\sigma}(f)$. Soient $h \in H$ et $h' \in H$ tels que

$$\tilde{\sigma}\,(h) \,.\, \bar{f} = \tilde{\sigma}\,(h') \,.\, \bar{f}, \text{ c'est-à-dire } \tilde{\sigma}\,(h \,.\, f) = \tilde{\sigma}\,(h' \,.\, f).$$

Il existe $g \in C$ vérifiant $h' \,.\, f \,.\, g = h \,.\, f \,.\, g$, par définition de σ, et par conséquent on a $h \sim h'$ et $\tilde{\sigma}\,(h) = \tilde{\sigma}\,(h')$. Ainsi $\bar{C} \subset R_d\,(\bar{H}^{\bullet})$. Si $\bar{h} \in \bar{H}$ (resp. $\in \bar{C}$) et si $\beta\,(\bar{h}) = \beta\,(\bar{f})$, il existe $h \in \bar{h}$ (resp. $\in C \cap \bar{h}$) tel que $\beta\,(f) = \beta(h)$, car σ n'identifie pas deux unités différentes; il existe alors

$$q = (f, h, h', f') \in \square\, (H^{\bullet}; H, C) \text{ (resp. } \in \square\, C^{\bullet}),$$

de sorte que l'on trouve

$$\square\, \tilde{\sigma}\,(q) = (\bar{f}, \bar{h}, \tilde{\sigma}\,(h'), \tilde{\sigma}\,(f')) \in \square\, (\bar{H}^{\bullet}; \bar{H}, \bar{C}) \text{ (resp. } \in \square\, \bar{C}^{\bullet}).$$

Donc $\bar{C}^{\bullet}$ est une sous-catégorie propre de $\bar{H}^{\bullet}$ et on a $(\bar{H}^{\bullet}, \bar{C}) \in \mathscr{V}^d$ et

$$\Sigma = ((\bar{H}^{\bullet}, \bar{C}^{\bullet}), \tilde{\sigma}, (H^{\bullet}, C)) \in \mathscr{V}.$$

— Soit $\Phi = ((K^{\bullet}, G), \varphi, (H^{\bullet}, C)) \in \mathscr{V}$ et $(K^{\bullet}, G) \in \mathscr{V}^d$. Si $h \in H$, $h' \in H$ et $h \sim h'$, il existe $f \in C$ tel que $h \,.\, f = h' . f$. Comme φ définit un foncteur, on a

$$\varphi\,(h) \,.\, \varphi\,(f) = \varphi\,(h') \,.\, \varphi\,(f).$$

Or $\varphi\,(f) \in G \subset R_d\,(K^{\bullet})$; on en déduit $\varphi\,(h) = \varphi\,(h')$. Ainsi $\varphi = \varphi'\, \tilde{\sigma}$, si φ' désigne l'application $\bar{\sigma}(h) \to \varphi(h)$ de $\bar{H}$ dans K. Étant donné que $\bar{\sigma}$ est un $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme, on a aussi $(K^{\bullet}, \varphi', \bar{H}^{\bullet}) \in \mathscr{F}$. Puisque

$$\varphi'(\bar{C}) = \varphi' \bar{\sigma}(C) = \varphi(C) \subset G,$$

on obtient

$$\Phi' = ((K^{\bullet}, G), \varphi', (\bar{H}^{\bullet}, \bar{C})) \in \mathscr{V}^d$$

et Φ' est l'unique élément de $\mathscr{V}^d$ tel que $\Phi' \,.\, \Sigma = \Phi$. Ceci prouve que Σ est un $(\mathscr{V}^d, \mathscr{V})$-projecteur, que nous noterons $r(H^{\bullet}, C)$. D'après la proposition 25,3 [1], il existe un foncteur $(\mathscr{V}^d, \mathscr{V})$-projection naturalisé (R, r). — Si $C \subset R_d(H^{\bullet})$, le couple $(\bar{H}^{\bullet}, \bar{C})$ s'identifie à $(H^{\bullet}, C)$.

Théorème 2 : Si C^* est une sous-catégorie propre de la catégorie duale H^* de $H^{\bullet}$, il existe une catégorie $\bar{H}^{\bullet}$ quotient de $H^{\bullet}$ par la relation d'équivalence σ_* :

$h \sim h'$ si, et seulement si, il existe $f \in C$ tel que $f \,.\, h = f \,.\, h'$.

Si $\bar{\sigma}_*$ est le $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme de $H^{\bullet}$ sur $\bar{H}^{\bullet}$, la classe $\bar{\sigma}_*(C)$ définit une sous-catégorie propre de $\bar{H}^*$ et $\bar{\sigma}_*(C) \subset R_g(\bar{H}^{\bullet})$.

Soit $\mathscr{V}_0'$ la sous-classe de $\mathscr{V}_0$ formée des $(H^{\bullet}, C) \in \mathscr{V}_0$ vérifiant la condition :

Si $h \in H$, $h' \in H$, $f \in C$ et $f \,.\, h = f \,.\, h'$, il existe $g \in C$ tel que $h \,.\, g = h' \,.\, g$.

Soit $\mathscr{V}_0''$ la classe des $(H^{\bullet}, C) \in \mathscr{V}_0$ tels que $(H^*, C) \in \mathscr{V}_0$. Soit $\tilde{\mathscr{V}}_0 = \mathscr{V}_0' \cup \mathscr{V}_0''$ et soit $\tilde{\mathscr{V}}$ la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathscr{V}}$ ayant $\tilde{\mathscr{V}}_0$ pour classe d'unités.

Théorème 3 : Il existe un foncteur $(\mathscr{V}^r, \tilde{\mathscr{V}})$-projection naturalisé 1
$(\tilde{R}, \tilde{r})$ tel que $\tilde{r}(H^{\bullet}, C) = r(H^{\bullet}, C)$ si $(H^{\bullet}, C) \in \mathscr{V}_0'$ et que, si $(H^{\bullet}, C) \in \mathscr{V}_0''$, on ait $\tilde{r}(H^{\bullet}, C) = (\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{C})$, où $\tilde{H}^{\bullet}$ est la catégorie quotient strict de $H^{\bullet}$ par la relation d'équivalence σ'' :

$h \sim h'$ si, et seulement si, il existe $f \in C$ et $f' \in C$ tels que

$$f' \,.\, h \,.\, f = f' \,.\, h' \,.\, f.$$

Démonstration : Reprenons les notations de la démonstration du théorème 1. En particulier, soit

$$\Sigma = r(H^{\bullet}, C) = ((\bar{H}^{\bullet}, \bar{C}), \bar{\sigma}, (H^{\bullet}, C)).$$

— Supposons $(H^{\bullet}, C) \in \mathscr{V}_0'$. Comme $\tilde{\mathscr{V}}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{V}$, pour prouver que $r(H^{\bullet}, C)$ est un $(\mathscr{V}^r, \tilde{\mathscr{V}})$-projecteur, il suffit de montrer que l'on a $\bar{C} \subset R_g(\bar{H}^\bullet)$. En effet, soient $\bar{f} \in \bar{C}$, $\bar{h} \in \bar{H}$ et $\bar{h}' \in \bar{H}$ tels que $\bar{f} . \bar{h} = \bar{f} . \bar{h}'$. Cette égalité signifie qu'il existe

$$h \in \bar{h},\ h' \in \bar{h}' \text{ et } f \in \bar{f} \cap C \text{ tels que } f . h \sim f . h' \bmod \sigma;$$

par suite il existe $g \in C$ tel que $f . (h . g) = f . (h' . g)$. Par hypothèse, il existe aussi $f' \in C$ tel que

$$(h . g) . f' = (h' . g) . f'.$$

Il s'ensuit $h \sim h' \bmod \sigma$, d'où $\bar{C} \subset R_g(\bar{H}^\bullet)$.

— Supposons $(H^\bullet, C) \in \mathscr{V}''_0$. On a $\bar{C} \subset R_d(\bar{H}^\bullet)$ et $\bar{C}^*$ est évidemment une sous-catégorie propre de $\bar{H}^*$. D'après le théorème 2, il existe une catégorie $\hat{H}^\bullet$ quotient strict de $\bar{H}^\bullet$ par la relation d'équivalence σ_* :

$\bar{h} \sim \bar{h}'$ si, et seulement si, il existe $\bar{f} \in \bar{C}$ tel que $\bar{f} . \bar{h} = \bar{f} . \bar{h}'$.

Soit $\bar{\sigma}_*$ le $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme de $\bar{H}^\bullet$ sur $\bar{H}^\bullet/\sigma_*$. La classe $\hat{C} = \bar{\sigma}_*(\bar{C})$ définit une sous-catégorie propre de $\hat{H}^\bullet$ telle que $\hat{C} \subset R_g(\hat{H}^\bullet)$. Supposons

$$\hat{h} \in \hat{H}, \quad \hat{h}' \in \hat{H} \quad \text{et} \quad \hat{f} \in \hat{C}$$

tels que $\hat{h} . \hat{f} = \hat{h}' . \hat{f}$. Il existe $\bar{h} \in \hat{h}$, $\bar{h}' \in \hat{h}$ et $\bar{f} \in \hat{f}$ tels que

$$\bar{h} . \bar{f} \sim \bar{h}' . \bar{f} \bmod \sigma_* \text{ et } \bar{f} \in \bar{C},$$

i.e. il existe $\bar{g} \in \bar{C}$ tel que $\bar{g} . \bar{h} . \bar{f} = \bar{g} . \bar{h}' . \bar{f}$. Comme $\bar{C} \subset R_d(\bar{H}^\bullet)$, on en déduit

$$\bar{g} . \bar{h} = \bar{g} . \bar{h}', \qquad \text{d'où} \qquad \bar{h} \sim \bar{h}' \bmod \sigma_*.$$

Ainsi $\hat{C} \subset R(\hat{H}^\bullet)$ et on a $(\hat{H}^\bullet, \hat{C}) \in \mathscr{V}^r$. — Une démonstration analogue à celle du théorème 1 montre que

$$\Sigma' = ((\hat{H}^\bullet, \hat{C}), \bar{\sigma}_*, (\bar{H}^\bullet, \bar{C})) \in \mathscr{V}$$

est un $(\mathscr{V}^r, \mathscr{V}^d)$-projecteur. Puisque Σ est un $(\mathscr{V}^d, \mathscr{V})$-projecteur,

$$\Sigma' . \Sigma = ((\hat{H}^\bullet, \hat{C}), \bar{\sigma}_* \bar{\sigma}, (H^\bullet, C)) \in \mathscr{V}$$

est un $(\mathscr{V}^r, \mathscr{V})$-projecteur, en vertu du théorème 7,3 [1]. $\tilde{\mathscr{V}}$ étant une sous-catégorie pleine de $\mathscr{V}$, des relations $\Sigma' . \Sigma \in \tilde{\mathscr{V}}$ et $(\hat{H}^\bullet, \hat{C}) \in \mathscr{V}^r$, il résulte que $\Sigma' . \Sigma$ est un $(\mathscr{V}^r, \tilde{\mathscr{V}})$-projecteur.

— Soit σ'' la relation (H, B, H) telle que

$(h', h) \in B$ si, et seulement si, il existe $g \in C$ et $g' \in C$ tels que

$$g' . h . g = g' . h' . g.$$

Si $(h', h) \in B$ et $g' . h . g = g' . h' . g$, où $g \in C, g' \in C$, on a

$$\tilde{\sigma}(g') . \tilde{\sigma}(h) = \tilde{\sigma}(g' . h) = \tilde{\sigma}(g' . h') = \tilde{\sigma}(g') . \tilde{\sigma}(h'),$$

d'où $\tilde{\sigma}(h') \sim \tilde{\sigma}(h) \bmod \sigma_*$ et $\tilde{\sigma}_* \tilde{\sigma}(h') = \tilde{\sigma}_* \tilde{\sigma}(h)$. Inversement, si

$$\tilde{\sigma}_* \tilde{\sigma}(h) = \tilde{\sigma}_* \tilde{\sigma}(h'), \text{ où } h \in H \text{ et } h' \in H,$$

il existe $f' \in C$ tel que $\tilde{\sigma}(f' . h) = \tilde{\sigma}(f' . h')$, ce qui assure l'existence de $f \in C$ tel que $f' . h . f = f' . h' . f$. Ceci montre que σ'' est la relation d'équivalence associée à $\tilde{\sigma}_* \tilde{\sigma}$, de sorte que $\hat{H}^\bullet$ est isomorphe à la catégorie quotient de $H^\bullet$ par σ''. Il s'ensuit que $(H^\bullet, C)$ admet $(H^\bullet/\sigma'', \tilde{\sigma}''(C))$ pour $(\mathscr{V}^r, \tilde{\mathscr{V}})$-projection. Si $(H^\bullet, C) \in \mathscr{V}'_0 \cap \mathscr{V}''_0$ et si $g'' . h . g = g'' . h' . g$, il existe $f \in C$ tel que $h . g . f = h' . g . f$; ainsi les relations σ et σ'' sont identiques dans ce cas. On définit donc une $(\mathscr{V}^r, \tilde{\mathscr{V}})$-projection naturalisée $\tilde{r}$ en posant :

$$\tilde{r}(H^\bullet, C) = r(H^\bullet, C) \text{ si } (H^\bullet, C) \in \mathscr{V}'_0$$

et $\quad \tilde{r}(H^\bullet, C) = ((H^\bullet/\sigma'', \tilde{\sigma}''(C)), \tilde{\sigma}'', (H^\bullet, C)) \qquad$ si $(H^\bullet, C) \in \mathscr{V}''_0$.

Définition 15 *: S'il existe une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte $(\hat{\varrho}, (H^\bullet, \iota, G^\bullet))$ et si $G^\bullet$ est le noyau de $\hat{\varrho}$, on appellera $G^\bullet$* une sous-catégorie distinguée de $H^\bullet$. *On dira qu'une sous-catégorie $C^\bullet$ de $H^\bullet$* engendre une sous-catégorie distinguée $G^\bullet$ de $H^\bullet$ *si $G^\bullet$ est la plus petite des sous-catégories distinguées de $H^\bullet$ contenant C. Une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-structure quotient de $H^\bullet \in \mathscr{F}_0$ par $C^\bullet \in \mathscr{F}_0$ est appelée* catégorie quotient de $H^\bullet$ par $C^\bullet$ *et notée $H^\bullet/C^\bullet$.*

Si $G^\bullet$ est une sous-catégorie distinguée de $H^\bullet$, les conditions $k . g = g'$ (resp. $g . k = g'$), où $k \in H$, $g \in G$ et $g' \in G$, entraînent $k \in G$.

Proposition 12 *: Soit $G^\bullet$ une sous-catégorie de $H^\bullet$. S'il existe une catégorie quotient de $H^\bullet$ par $G^\bullet$ alors $G^\bullet$ engendre une sous-catégorie distinguée $\bar{G}^\bullet$ de $H^\bullet$ et on a $H^\bullet/G^\bullet = H^\bullet/\bar{G}^\bullet$.*

Démonstration: Soit $(\hat{\varrho}, (H^\bullet, \iota, G^\bullet))$ une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte. Si $\bar{G}^\bullet$ est le noyau de $\hat{\varrho}$, le couple $(\hat{\varrho}, (H^\bullet, \iota, \bar{G}^\bullet))$ est aussi une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte d'après la proposition 11, de sorte que $\bar{G}^\bullet$ est une sous-catégorie distinguée de $H^\bullet$ et que l'on a $H^\bullet/G^\bullet = H^\bullet/\bar{G}^\bullet$. — Soit $C^\bullet$ une sous-catégorie distinguée de $H^\bullet$ contenant G et soit $(\hat{\sigma}, (H^\bullet, \iota, C^\bullet))$ la $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte correspondante. On a

$$\hat{\sigma} . (H^\bullet, \iota, G^\bullet) \in J_{\mathscr{F}},$$

aussi existe-t-il un $\chi \in \mathscr{F}$ tel que $\chi \, . \, \hat{\varrho} = \hat{\sigma}$. On en déduit

$$\hat{\sigma}(\bar{G}) = \chi(\hat{\varrho}(\bar{G})) \subset \beta(\hat{\sigma})_0,$$

c'est-à-dire $\bar{G}$ est contenu dans le noyau C de $\hat{\sigma}$. Donc $\bar{G}^\bullet$ est la plus petite sous-catégorie distinguée de $H^\bullet$ contenant G.

Identifions $\mathscr{F}$ à la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathscr{V}}$ ayant pour unités les couples $(H^\bullet, H_0^\bullet)$. Soit (N, ν) le foncteur $(\mathscr{F}, \mathscr{N}')$-projection naturalisé construit au théorème 9,3 [1].

1 *Théorème* 4 *: Il existe un foncteur* $(\mathscr{F}, \overline{\mathscr{V}})$*-projection naturalisé* (V, v). *Soit* $(H^\bullet, G) \in \overline{\mathscr{V}}_0$*; on a* $v(H^\bullet, G) = (N(H^\bullet/\bar{\varrho}), \underline{\nu}(H^\bullet/\bar{\varrho})\,\tilde{\bar{\varrho}}, (H^\bullet, G))$, *où* $\bar{\varrho}$ *est la relation d'équivalence bicompatible sur* $H^\bullet$ *engendrée par* (H, A', H) *:*
$(h', h) \in A'$ *si, et seulement si, il existe* $(g', h', h, g) \in \square(H^\bullet; H, G)$*; il existe une catégorie quotient de* $H^\bullet$ *par* $G^\bullet$ *si, et seulement si,* $p_{\mathscr{N}'}\,\nu(H^\bullet/\bar{\varrho})$ *est un épimorphisme.*

Démonstration : D'après le théorème 6,3 [1], il existe un graphe multiplicatif $H^\bullet/\bar{\varrho}$ quotient de $H^\bullet$ par $\bar{\varrho}$; soit $\hat{\varrho}$ le $p_{\mathscr{N}'}$-épimorphisme $\tilde{\bar{\varrho}}$ canonique de $H^\bullet$ sur $H^\bullet/\bar{\varrho}$. Posons

$$v(H^\bullet, G) = (N(H^\bullet/\bar{\varrho}), \underline{\nu}(H^\bullet/\bar{\varrho})\,\hat{\underline{\varrho}}, (H^\bullet, G)).$$

Si $g \in G$, la relation $(g, \alpha(g)) \in A'$ entraîne $g \sim \alpha(g) \bmod \bar{\varrho}$, d'où

$$\hat{\rho}(G) \subset (H^\bullet/\bar{\varrho})_0 \qquad \text{et} \qquad v(H^\bullet, G) \in \overline{\mathscr{V}}.$$

Soit $\Phi = (K^\bullet, \varphi, (H^\bullet, G)) \in \overline{\mathscr{V}}$. Si

$$q = (g', h', h, g) \in \square(H^\bullet; H, G),$$

on a

$$\square\,\varphi(q) = \varphi(h)^{\boxminus} = \varphi(h')^{\boxminus},$$

car $\varphi(G) \subset K_0^\bullet$. Par suite la relation d'équivalence ϱ_φ associée à φ est une relation d'équivalence bicompatible sur $H^\bullet$ contenant A'; il en résulte qu'elle contient $\bar{\varrho}$, c'est-à-dire on a $\varphi(h) = \varphi(h')$, si $h \sim h' \bmod \bar{\varrho}$. Soit $\underline{\varphi}'$ l'application $h \bmod \bar{\varrho} \to \varphi(h)$ ainsi définie; $\hat{\varrho}$ étant une $p_{\mathscr{N}'}$-surjection, $\varphi' = (K^\bullet, \underline{\varphi}', H^\bullet/\bar{\varrho})$ est l'unique néo-foncteur tel que

$$(K^\bullet, \varphi, H^\bullet) = \varphi' \, . \, \hat{\varrho}.$$

Comme (N, ν) est un foncteur $(\mathscr{F}, \mathscr{N}')$-projection naturalisé, $N(\varphi')$ est l'unique foncteur satisfaisant à la relation

$$N(\varphi') \, . \, \nu(H^\bullet/\bar{\varrho}) = \varphi'.$$

On en déduit :

$N(\varphi') \,.\, \nu(H^{\bullet}/\bar{\varrho}) \,.\, \hat{\varrho} = (K^{\bullet}, \varphi, H^{\bullet})$, d'où $N(\varphi') \,.\, v(H^{\bullet}, G) = \Phi$.

Ainsi $v(H^{\bullet}, G)$ est un $(\mathscr{F}, \overline{\mathscr{V}})$-projecteur. Nous poserons $\hat{\varrho}' = \nu(H^{\bullet}/\bar{\varrho}) \,.\, \hat{\varrho}$.

— Supposons que $p_{\mathscr{N}'}\, \nu(H^{\bullet}/\bar{\varrho})$ soit un épimorphisme. D'après la proposition 39,3 [1], $\hat{\varrho}'$ est un $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme. On a

$$\hat{\varrho}' \,.\, (H^{\bullet}, \iota, G^{\bullet}) \in J_{\mathscr{F}}.$$

Soit $\varphi = (K^{\bullet}, \underline{\varphi}, H^{\bullet}) \in \mathscr{F}$ et $\varphi \,.\, (H^{\bullet}, \iota, G^{\bullet}) \in J_{\mathscr{F}}$; comme

$$\Phi = (K^{\bullet}, \underline{\varphi}, (H^{\bullet}, G)) \in \overline{\mathscr{V}},$$

la démonstration précédente montre l'existence d'un $\varphi'' \in \mathscr{F}$ tel que $\varphi'' \,.\, \hat{\varrho}' = \varphi$. Donc $(\hat{\varrho}', (H^{\bullet}, \iota, G^{\bullet}))$ est une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte et il existe une catégorie quotient de $H^{\bullet}$ par $G^{\bullet}$, isomorphe à $N(H^{\bullet}/\bar{\varrho})$.

— Inversement, supposons qu'il existe une catégorie $H^{\bullet}/G^{\bullet}$ et soit $(\hat{\sigma}, (H^{\bullet}, \iota, G^{\bullet}))$ la $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte correspondante. Puisque $\hat{\varrho}' \,.\, (H^{\bullet}, \iota, G^{\bullet}) \in J_{\mathscr{F}}$, il existe $\psi' \in \mathscr{F}$ tel que $\psi' \,.\, \hat{\sigma} = \hat{\varrho}'$. Par ailleurs on a

$$(\beta(\hat{\sigma}), \underline{\hat{\sigma}}, (H^{\bullet}, G)) \in \overline{\mathscr{V}}$$

et, d'après le début de la démonstration, il existe un $\psi'' \in \mathscr{F}$ tel que $\psi'' \,.\, \hat{\varrho}' = \hat{\sigma}$. Ces relations entraînent :

$$\psi'' \,.\, \psi' \,.\, \hat{\sigma} = \hat{\sigma} \quad \text{et} \quad \psi' \,.\, \psi'' \,.\, v(H^{\bullet}, G) = v(H^{\bullet}, G).$$

Il s'ensuit $\psi' = \psi''^{-1} \in \mathscr{F}_{\gamma}$, car $\hat{\sigma}$ est un $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme et $v(H^{\bullet}, G) \in R_d(\mathscr{F}, \overline{\mathscr{V}})$. Par conséquent $\hat{\varrho}'$ est un $p_{\mathscr{N}'}$-épimorphisme, ainsi que $\nu(H^{\bullet}/\bar{\varrho})$.

Contre-exemple : Soit $H^{\bullet}$ la catégorie ayant 5 morphismes h_1, h_2, f_1, f_2, k et 5 unités distincts e_1, e_2, s_1, s_2 et e tels que :

$h_1 \in s_1 \,.\, H \,.\, e_1$, $\;h_2 \in e_2 \,.\, H \,.\, s_2$, $\;f_i \in s_i \,.\, H \,.\, e, i = 1, 2$, $\;$ et $k = h_2 \,.\, f_2$.

Soit $G^{\bullet}$ la sous-catégorie de $H^{\bullet}$ engendrée par la classe $\{e_1, e_2, f_1, f_2\}$. Avec les notations du théorème 4, $H^{\bullet}/\bar{\varrho}$ est un graphe multiplicatif ayant 2 morphismes $\bar{h}_1$ et $\bar{h}_2$ et 3 unités distincts $\bar{e}_1$, $\bar{s}_2$ et $\bar{e}$ tels que

$$\alpha(\bar{h}_2) = \bar{e} = \beta(\bar{h}_1) \quad \text{et} \quad (\bar{h}_2, \bar{h}_1) \notin (H^{\bullet}/\bar{\varrho}) * (H^{\bullet}/\bar{\varrho}).$$

Par suite $p_{\mathscr{N}'}\, \nu(H^{\bullet}/\bar{\varrho})$ n'est pas un épimorphisme et, en vertu du théorème 4, il n'existe pas de catégorie quotient de $H^{\bullet}$ par $G^{\bullet}$.

Catégorie quotient d'une catégorie par une sous-catégorie propre

Soit $H^{\bullet}$ une catégorie; le théorème 4 donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une catégorie quotient de $H^{\bullet}$ par une sous-catégorie $G^{\bullet}$. Nous allons maintenant montrer comment construire, dans certains cas, cette catégorie quotient. Pour démontrer le théorème 5, nous aurons à utiliser la proposition suivante :

Soit $H^{\bullet}$ une catégorie; soit $\varrho = (H, A, H)$ une relation d'équivalence compatible avec α et β. Supposons qu'il existe une sous-classe G de H vérifiant les conditions suivantes :

1) $H_0^{\bullet} \subset G$. Si $(g', h', h, g) \in \square\,(H^{\bullet}; H, G)$, on a $(h', h) \in A$.

2) Si $e_i \in H_0^{\bullet}$, $i = 1, 2$, et $(e_1, e_2) \in A$, il existe $g_i \in G$ tels que

$$\beta(g_i) = e_i,\ \alpha(g_1) = \alpha(g_2) \text{ et } g_1 \in R_g(H^{\bullet}).$$

3) Si $g \in G$, $h \in H$ (resp. $h \in G$) et $\beta(g) = \beta(h)$, il existe

1 $$(g, h, h', g') \in \square\,(H^{\bullet}; H, G) \text{ (resp. } \in \square\,(H^{\bullet}; G, G)\text{)}.$$

Proposition 13 *: Si les conditions précédentes sont vérifiées, la relation d'équivalence $\bar{\varrho}$ bicompatible sur $H^{\bullet}$ engendrée par ϱ est la relation (H, B, H) telle que*

$(h', h) \in B$ si, et seulement si, il existe deux familles $(f_i^j)_{i \leqslant m,\, j \leqslant n}$ et $(f'^j_i)_{i \leqslant m,\, j \leqslant n}$ telles que $(f_i^j, f'^j_i) \in A$ si $i \leqslant m, j \leqslant n$ et que, en posant

$$f^j = f_m^j \cdot f_{m-1}^j \cdot \dots \cdot f_1^j \quad et \quad f'^j = f'^j_m \cdot f'^j_{m-1} \cdot \dots \cdot f'^j_1,$$

on ait $h = f^1,\ h' = f'^n$ et $f'^j = f^{j+1}$ *si* $1 \leqslant j < n$.

De plus il existe une catégorie quotient strict de $H^{\bullet}$ par $\bar{\varrho}$.

Démonstration : En vertu de la condition 1, pour tout $g \in G$, on a :

$$g \cdot \alpha(g) = g \text{ et } \beta(g) \cdot g = g,$$

d'où $\qquad (g, \alpha(g)) \in A$ et $(\beta(g), g) \in A$.

Soit $M = \square\,(H^{\bullet}; H, G)$. On a $A \subset B$ et (H, B, H) est une relation d'équivalence. Supposons $(h', h) \in B$ et soient $(f_i^j)_{i \leqslant m, j \leqslant n}$ et $(f'^j_i)_{i \leqslant m, j \leqslant n}$ les familles correspondantes. Comme $(f_i^j, f'^j_i) \in A$, on doit avoir $f^j \sim f'^j \bmod \bar{\varrho}$, car $\bar{\varrho}$ est compatible sur $H^{\bullet}$; étant donné que $\bar{\varrho}$ est une relation d'équivalence et que $f'^j = f^{j+1}$, on en déduit $h' \sim h \bmod \bar{\varrho}$. Ainsi $B \subset \bar{A}$, si $\bar{\varrho} = (H, \bar{A}, H)$. — Montrons que

(H, B, H) est bicompatible sur $H^{\bullet}$. En effet, supposons $(\bar{h}, h) \in H^{\bullet} * H$ 1
$(\bar{h}', h') \in H^{\bullet} * H^{\bullet}$ et $(\bar{h}', \bar{h}) \in B$. Soient $(\bar{f}^{i}_{j})_{i \leqslant \bar{m},\, j \leqslant \bar{n}}$ et $(\bar{f}'^{i}_{i})_{i \leqslant \bar{m},\, j \leqslant \bar{n}}$ les 2
deux familles correspondant au couple $(\bar{h}', \bar{h})$. On peut supposer $n = \bar{n}$ (car, si $n < \bar{n}$, il suffit de remplacer les familles $(f^{j}_{i})_{i \leqslant m,\, j \leqslant n}$ et $(f'^{j}_{i})_{i \leqslant m, j \leqslant n}$ respectivement par les familles $(f^{j}_{i})_{i \leqslant m,\, j \leqslant \bar{n}}$ et $(f'^{j}_{i})_{i \leqslant m,\, j \leqslant \bar{n}}$, où $f^{j}_{i} = f'^{j}_{i} = f'^{n}_{i}$ si $n < j \leqslant \bar{n}$). Soit :

$$e^{j} = \beta(f^{j}_{m}) = \beta(f'^{j-1}_{m}) \quad \text{et} \quad \bar{e}^{j} = \alpha(\bar{f}^{j}_{1}) = \alpha(\bar{f}'^{j-1}_{1}),$$

pour tout $1 < j \leqslant n$; en particulier, on pose :

$$\bar{e}^{1} = \alpha(\bar{h}) = \beta(h) = e^{1} \quad \text{et} \quad \bar{e}^{n+1} = \alpha(\bar{h}') = \beta(h') = e^{n+1}.$$

La relation d'équivalence ϱ étant compatible avec α et β, on a :

$$(e^{j}, e^{j+1}) \in A \quad \text{et} \quad (\bar{e}^{j}, \bar{e}^{j+1}) \in A,$$

d'où :

$$(e^{j}, e^{1}) \in A, \quad (\bar{e}^{j}, \bar{e}^{1}) \in A \quad \text{et} \quad (\bar{e}^{j}, e^{j}) \in A.$$

Par hypothèse, si $1 < j \leqslant n$, il existe $g^{j} \in G$ et $\bar{g}^{j} \in G$ tels que

$$\alpha(g^{j}) = \alpha(\bar{g}^{j}), \quad \beta(g^{j}) = e^{j}, \beta(\bar{g}^{j}) = \bar{e}^{j} \quad \text{et} \quad g^{j} \in R_{g}(H^{\bullet}).$$

Choisissons :

$$g^{1} = e^{1} = \bar{g}^{1} \quad \text{et} \quad g^{n+1} = e^{n+1} = \bar{g}^{n+1}.$$

Posons :

$$\hat{f}^{j}_{m+1} = \bar{f}^{j}_{1} \cdot \bar{g}^{j} \quad \text{et} \quad \hat{f}'^{j}_{m+1} = \bar{f}'^{j}_{1} \cdot \bar{g}^{j+1}, \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

On a

$$\hat{f}^{j}_{m+1} \sim \bar{f}^{j}_{1} \sim \bar{f}'^{j}_{1} \quad \text{et} \quad \hat{f}'^{j}_{m+1} \sim \bar{f}'^{j}_{1} \bmod \varrho,$$

et par suite

$$\hat{f}^{j}_{m+1} \sim \hat{f}'^{j}_{m+1} \bmod \varrho.$$

D'après la condition 3, il existe, pour tout j tel que $1 < j \leqslant n$,

$$q^{j}_{m} = (g^{j}, f^{j}_{m}, \hat{f}^{j}_{m}, g^{j}_{m}) \in M \quad \text{où} \quad (f^{j}_{m}, \hat{f}^{j}_{m}) \in A$$

$$q^{j}_{m-1} = (g^{j}_{m}, f^{j}_{m-1}, \hat{f}^{j}_{m-1}, g^{j}_{m-1}) \in M, \text{ où } (\hat{f}^{j}_{m-1}, f^{j}_{m-1}) \in A,$$

et, par récurrence, pour tout i vérifiant $1 \leqslant i < m$, il existe

$$q^{j}_{i} = (g^{j}_{i+1}, f^{j}_{i}, \hat{f}^{j}_{i}, g^{j}_{i}) \in M, \quad \text{où} \quad (\hat{f}^{j}_{i}, f^{j}_{i}) \in A.$$

De même, il existe, pour $1 \leqslant j < n$,

$$q'^{j}_{m} = (g^{j+1}, f'^{j}_{m}, \hat{f}'^{j}_{m}, g'^{j}_{m}) \in M \quad \text{et} \quad q'^{j}_{i} = (g'^{j}_{i+1}, f'^{j}_{i}, \hat{f}'^{j}_{i}, g'^{j}_{i}) \in M$$

si $1 \leqslant i < m$, et on a $(\hat{f}'^{j}_{i}, f'^{j}_{i}) \in A$. Il existe aussi

$$q^{j} = (g^{j}_{1}, g'^{j-1}_{1}, k^{j}, k'^{j-1}) \in \square\,(H^{\bullet}; G, G), \quad \text{où} \quad 1 < j \leqslant n,$$

et on a

1 $$\hat{f}^{j}_{1} . k^{j} \sim \hat{f}^{j}_{1} \quad \text{et} \quad \hat{f}'^{j}_{1} . k'^{j} \sim \hat{f}'^{j}_{1} \bmod \varrho.$$

En particulier, soient

$$\tilde{f}^{1}_{i} = \hat{f}^{1}_{i} = f^{1}_{i} \quad \text{et} \quad \tilde{f}'^{n}_{i} = \hat{f}'^{n}_{i} = f'^{n}_{i} \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Posons :

$$\tilde{f}^{j}_{i} = \hat{f}^{j}_{i} \text{ et } \tilde{f}'^{j}_{i} = \hat{f}'^{j}_{i} \text{ si } 1 < i \leqslant m+1,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$\tilde{f}^{j}_{m+i} = \bar{f}^{j}_{i} \text{ et } \tilde{f}'^{j}_{m+i} = \bar{f}'^{j}_{i} \text{ si } 2 \leqslant i \leqslant \bar{m},\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$\tilde{f}^{j}_{1} = \hat{f}^{j}_{1} . k^{j} \text{ et } \tilde{f}'^{j-1}_{1} = \hat{f}'^{j-1}_{1} . k'^{j-1}, \text{ si } 1 < j \leqslant n,$$

$$\hat{f}^{j} = \tilde{f}^{j}_{m} . \dots . \tilde{f}^{j}_{1} \text{ et } \hat{f}'^{j} = \tilde{f}'^{j}_{m} . \dots . \tilde{f}'^{j}_{1}, \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Comme, si $1 < j \leqslant n$, on a

$$q^{j}_{m} \boxplus q^{j}_{m-1} \boxplus \dots \boxplus q^{j}_{1} \boxplus q^{j} \in M$$

$$q'^{j-1}_{m} \boxplus \dots \boxplus q'^{j-1}_{1} \boxplus (g'^{j-1}_{1}, g^{j}_{1}, k'^{j-1}, k^{j}) \in M,$$

on obtient

$$f^{j} . g^{j}_{1} . k^{j} = g^{j} . \hat{f}^{j} = g^{j} . \hat{f}'^{j-1}, \quad \text{d'où} \quad \hat{f}^{j} = \hat{f}'^{j-1}, \text{ car } g^{j} \in R_{g}(H^{\cdot}).$$

Il en résulte que la famille $(\tilde{f}^{j}_{i})_{i \leqslant m+\bar{m},\, j \leqslant n}$ a les propriétés suivantes, où

$$\tilde{f}^{j} = \tilde{f}^{j}_{m+\bar{m}} . \dots . \tilde{f}^{j}_{2} . \tilde{f}^{j}_{1} \text{ et } \tilde{f}'^{j} = \tilde{f}'^{j}_{m+\bar{m}} . \dots . \tilde{f}'^{j}_{1}, \text{ si } 1 \leqslant j \leqslant n :$$

$$\tilde{f}^{1} = \bar{f}^{1} . f^{1} = \bar{h} . h, \quad \tilde{f}'^{n} = \bar{f}'^{n} . f'^{n} = \bar{h}' . h',$$

$$(\tilde{f}^{j}_{i}, \tilde{f}'^{j}_{i}) \in A \quad \text{si} \quad 1 \leqslant i \leqslant m + \bar{m} \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$\tilde{f}^{j} = \bar{f}^{j} . \bar{g}^{j} . \hat{f}^{j} = \bar{f}'^{j-1} . \bar{g}^{j} . \hat{f}'^{j-1} = \tilde{f}'^{j-1},$$

si $1 < j \leqslant n$. Donc $(\bar{h}' . h', \bar{h} . h) \in B$, ce qui prouve que (H, B, H) est compatible sur $H^{\bullet}$. — Il en résulte que (H, B, H) est identique à la relation d'équivalence $\bar{\varrho}$ bicompatible sur $H^{\bullet}$ engendrée par ϱ, et que ϱ et $\bar{\varrho}$ induisent la même relation sur $H^{\bullet}_{0}$.

— Soient $h \in H$ et $e \in H^{\bullet}_{0}$ tels que $(e, \beta(h)) \in A$. Il existe $g \in G$ et $g' \in G$ tels que

$$\alpha(g) = \alpha(g'), \quad \beta(h) = \beta(g') \quad \text{et} \quad \beta(g) = e.$$

D'après la condition 3, il existe $(g', h, h', g'') \in M$ et, en vertu de la condition 1, on a $(h', h) \in A$ et $(g \,.\, h', h') \in A$. Par suite

$$g \,.\, h' \sim h \bmod \bar{\rho} \quad \text{et} \quad \beta(g \,.\, h') = e.$$

Ainsi la condition de la proposition 14,3 [1] est vérifiée, de sorte qu'il existe une catégorie quotient strict de $H^\bullet$ par $\bar{\rho}$.

Corollaire : Si $G^\bullet$ est une sous-catégorie propre de $H^\bullet$ et si $\varrho = (H, A, H)$ est une relation d'équivalence compatible avec α et β, vérifiant les conditions 1 *et* 2, *alors il existe une catégorie quotient strict de $H^\bullet$ par la relation d'équivalence $\bar{\varrho}$ bicompatible sur $H^\bullet$ engendrée par ϱ.*

En effet, ϱ et G vérifient évidemment les conditions 1, 2, 3; le corollaire est donc conséquence de la proposition 13 et la relation $\bar{\varrho}$ est celle définie dans l'énoncé de la proposition 13.

Soient $H^\bullet$ une catégorie et $G^\bullet$ une sous-catégorie propre de $H^\bullet$. Nous désignons par (H, A', H) la relation :
$(h', h) \in A'$ si, et seulement si, il existe $(g', h', h, g) \in \square\,(H^\bullet; H, G)$ et par $\bar{\varrho}$ la relation d'équivalence bicompatible sur $H^\bullet$ engendrée par (H, A', H).

Théorème 5 : Si $(H^\bullet, G) \in \bar{\mathscr{V}}_0$, il existe une catégorie quotient de $H^\bullet$ par $G^\bullet$. Dans le cas où $G \subset R_g(H^\bullet)$, on a $H^\bullet/G^\bullet = H^\bullet/\bar{\varrho}$; sinon, $H^\bullet/G^\bullet$ est isomorphe à $\tilde{H}^\bullet/\tilde{G}^\bullet$, où $(\tilde{H}^\bullet, \tilde{G})$ est la $(\mathscr{V}^r, \bar{\mathscr{V}})$-projection $\tilde{R}(H^\bullet, G)$ (théorème 3).

Démonstration : Supposons d'abord $G \subset R_g(H^\bullet)$ et posons $M = \square\,(H^\bullet; H, G)$. Soit $\varrho = (H, A, H)$ la relation définie par :

$(h_2, h_1) \in A$ si, et seulement si, il existe $(g_i', h_i, h, g_i) \in M, i = 1, 2$.

On a $A' \subset A$. Si $(h_2, h_1) \in A$, il existe $h \in H$ tel que

$$(h_2, h) \in A' \quad \text{et} \quad (h_1, h) \in A',$$

de sorte que ϱ est contenue dans la relation d'équivalence engendrée par (H, A', H). Nous allons prouver que ϱ est identique à cette relation d'équivalence. Comme ϱ est réflexive (car $H_0^\bullet \subset G$) et symétrique, il nous suffira pour cela de prouver que ϱ est transitive. En effet, soient

$$(h_3, h_2) \in A \text{ et } (h_2, h_1) \in A.$$

Il existe

$$(g'_i, h_i, h, g_i) \in M,\ i = 1{,}2 \quad \text{et} \quad (\bar{g}'_j, h_j, \bar{h}, \bar{g}_j) \in M, j = 2{,}3.$$

$G^{\bullet}$ étant propre, il existe

$(g_2, \bar{g}_2, f_2, \bar{f}_2) \in \square\, G^{\bullet}$, $(g'_2, \bar{g}'_2, f'_2, \bar{f}'_2) \in \square\, G^{\bullet}$ et $(f'_2, h \,.\, f_2, k, f) \in M$.

On en déduit

$$h_1 \,.\, g_1 \,.\, f_2 \,.\, f = g'_1 \,.\, h \,.\, f_2 \,.\, f = g'_1 \,.\, f'_2 \,.\, k,$$

d'où $(g'_1 \,.\, f'_2, h_1, k, g_1 \,.\, f_2 \,.\, f) \in M$. Les relations

$$\bar{g}'_2 \,.\, \bar{f}'_2 \,.\, k = g'_2 \,.\, f'_2 \,.\, k = g'_2 \,.\, h \,.\, f_2 \,.\, f = h_2 \,.\, g_2 \,.\, f_2 \,.\, f = h_2 \,.\, \bar{g}_2 \,.\, \bar{f}_2 \,.\, f = \bar{g}'_2 \,.\, \bar{h} \,.\, \bar{f}_2 \,.\, f$$

et $\bar{g}'_2 \in R_g(H^{\bullet})$ entraînent $\bar{f}'_2 \,.\, k = \bar{h} \,.\, \bar{f}_2 \,.\, f$. Par conséquent

$$(\bar{g}'_3, h_3, \bar{h}, \bar{g}_3) \boxminus (\bar{f}'_2, \bar{h}, k, \bar{f}_2 \,.\, f) = (\bar{g}'_3 . \bar{f}'_2, h_3, k, \bar{g}_3 \,.\, \bar{f}_2 \,.\, f) \in M.$$

Il s'ensuit $(h_3, h_1) \in A$. Donc ϱ est la relation d'équivalence engendrée par (H, A', H). Elle est évidemment compatible avec α et β et elle vérifie les conditions du corollaire de la proposition 13. En vertu de ce corollaire, il existe une catégorie quotient strict de $H^{\bullet}$ par la relation d'équivalence $\bar{\varrho}$ bicompatible sur $H^{\bullet}$ engendrée par ϱ et la relation $\bar{\varrho}$ est construite effectivement dans cette même proposition 13. Ainsi on a $H^{\bullet}/\bar{\varrho} = N(H^{\bullet}/\bar{\varrho})$ et, en vertu du théorème 4, $H^{\bullet}/\bar{\varrho}$ est la catégorie quotient de $H^{\bullet}$ par $G^{\bullet}$.

—Supposons $(H^{\bullet}, G) \in \check{\mathscr{V}}_0$ et soit $\check{R}(H^{\bullet}, G) = (\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{G})$; soit $\hat{\sigma}$ le $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme canonique de $H^{\bullet}$ sur $\tilde{H}^{\bullet}$. La première partie de la démonstration affirme qu'il existe une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte $(\hat{\varrho}, (\tilde{H}^{\bullet}, \iota, \tilde{G}^{\bullet}))$, car $\tilde{G} \subset R(\tilde{H}^{\bullet})$. Montrons que

$$(\hat{\varrho} \,.\, \hat{\sigma}, (H^{\bullet}, \iota, G^{\bullet}))$$

est aussi une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte. En effet, soit

$$\Phi = (K^{\bullet}, \underline{\Phi}, H^{\bullet}) \in \mathscr{F} \text{ et } \Phi(G) \subset K^{\bullet}_0.$$

Si $h \in H, h' \in H$ et $\hat{\sigma}(h) = \hat{\sigma}(h')$, il existe par construction (théorème 1) $g \in G$ et $g' \in G$ vérifiant $g' \,.\, h \,.\, g = g' \,.\, h' \,.\, g$; on en déduit

$$\Phi(h) = \Phi(g') \,.\, \Phi(h) \,.\, \Phi(g) = \Phi(g') \,.\, \Phi(h') \,.\, \Phi(g) = \Phi(h'),$$

car $\Phi(G) \subset K^{\bullet}_0$. Ainsi on définit une application $\hat{\sigma}(h) \to \Phi(h)$ et, $\hat{\sigma}$ étant un $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme, il existe un et un seul $\Phi' \in \mathscr{F}$ tel que
1 $\Phi' \,.\, \hat{\sigma} = \Phi$. Comme $(\hat{\varrho}, (\tilde{H}^{\bullet}, \iota, \tilde{G}^{\bullet}))$ est une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte

courte, la relation $\Phi'(\tilde{G}) \subset K_0^\bullet$ assure l'existence d'un $\Phi'' \in \mathscr{F}$ tel que

$$\Phi''.\hat{\varrho} = \Phi', \quad \text{d'où } \Phi''.(\hat{\varrho}.\hat{\sigma}) = \Phi.$$

Ceci prouve que $(\hat{\varrho}.\hat{\sigma}, (H^\bullet, \iota, G^\bullet))$ est une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte. Par conséquent il existe une catégorie quotient de $H^\bullet$ par $G^\bullet$, isomorphe à $\tilde{H}^\bullet/\tilde{G}^\bullet$.

Corollaire : $p_{\mathscr{F}}$ est à $(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}})$-suite exactes courtes; si $C^\bullet$ est un sous-groupoïde de $H^\bullet \in \mathscr{F}_0$, on a $H^\bullet/C^\bullet = H^\bullet/G^\bullet = H^\bullet/\bar{\varrho}$, où $G = C \cup H_0^\bullet$.

En effet, on a $(H^\bullet, G) \in \bar{\mathscr{V}}_0$ et $G \subset R(H^\bullet)$. Remarquons que, dans ce cas, la relation (H, A', H) est une relation d'équivalence, et par suite est identique à ϱ.

Théorème 6 : Soient $H^\bullet$ une catégorie et $G^\bullet$ une sous-catégorie propre de $H^\bullet$ telle que $(H^\bullet, G) \in \mathscr{V}'_0$ et que

(0′) *Les conditions $(g'_1, h', h, g_1) \in \square(H^\bullet; H, G)$ et $g'_2 \in \beta(h').G.\beta(h)$ entraînent qu'il existe $(g'_2, h', h.g, g_2) \in \square(H^\bullet; H, G)$ où $g \in G$.*

Alors $G^\bullet$ engendre la sous-catégorie distinguée $\hat{G}^\bullet$ de $H^\bullet$, où $\hat{G}$ est la classe des $k \in H$ pour lesquels existent $g \in G$ et $g' \in G$ vérifiant $k.g = g'$.

Démonstration : D'après le théorème 5, il existe $H^\bullet/G^\bullet$. — Supposons d'abord que l'on ait $G \subset R_g(H^\bullet)$, (ce qui a pour conséquence $(H^\bullet, G) \in \mathscr{V}'_0$) et que G vérifie la condition (0′). Reprenons les notations de la démonstration du théorème 5 et montrons que ϱ est compatible sur $H^\bullet$. En effet, posons $i = 1, 2$, et supposons

$$(h'_i, h_i) \in H^\bullet * H^\bullet, \ (h_2, h_1) \in A \text{ et } (h'_2, h'_1) \in A.$$

Il existe

$$q_i = (\bar{g}_i, h_i, h, g_i) \in M \quad \text{et} \quad q'_i = (\bar{g}'_i, h'_i, h', g'_i) \in M,$$

par définition de ϱ. Comme $G^\bullet$ est propre, il existe

$$(g'_1, \bar{g}_1, f'_1, f_1) \in \square\, G^\bullet \text{ et } (g'_2.f'_1, \bar{g}_2.f_1, f'_1, f'_2) \in \square\, G^\bullet,$$

ce qui donne

$$t_i = (g'_i, \bar{g}_i, f'_1.\bar{f}'_1, f_1.\bar{f}'_i) \in \square\, G^\bullet.$$

Il existe aussi

$$t' = (f_1.\bar{f}'_1, h, k', f) \in M$$ 1

et, en vertu de la condition (0'), il existe $g \in G$, $k = k' . g$ et

$$t'_2 = (\bar{f}_1 . \bar{f}'_2, h, k, f_2) \in M.$$

On obtient, en posant $f_1 = f . g$ et $t'_1 = (\bar{f}_1 . \bar{f}'_1, h, k, f_1)$,

$$q'_i \boxminus t_i \boxminus t'_i = (\bar{g}'_i, h'_i . \bar{g}_i . h, h' . f'_1 . \bar{f}'_1 . k, f_i) \in M,$$

et, puisque $\bar{g}_i . h = h_i . g_i$, on en déduit

$$(\bar{g}'_i, h'_i . h_i, h' . f'_1 . \bar{f}'_1 . k, g_i . f_i) \in M.$$

Ceci montre que l'on a $h'_2 . h_2 \sim h'_1 . h_1$ mod ϱ, de sorte que ϱ et $\bar{\varrho}$ sont identiques.

— Soit $\bar{G}$ le noyau du $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme $\hat{\varrho}$ de $H^{\bullet}$ sur $H^{\bullet}/\varrho$. On a $\hat{G} \subset \bar{G}$. Si $k \in \bar{G}$, on a $k \sim \beta(k)$ mod ϱ, aussi existe-t-il

$$(g', k, h, g) \in M \quad \text{et} \quad (g'_1, \beta(k), h, g_1) \in M.$$

Par hypothèse, il existe alors $(g'_1, k, h . f, g'') \in M$, où $f \in G$. On en déduit $g_1 . f = g'_1 . h . f = k . g''$. Donc $k \in \hat{G}$ et $\bar{G} = \hat{G}$.

— Considérons maintenant le cas général et reprenons les notations de la démonstration du théorème 5. Soient

$$(\tilde{g}'_1, \tilde{h}', \tilde{h}, \tilde{g}_1) \in \square(\tilde{H}^{\bullet}; \tilde{H}, \tilde{G}) \text{ et } \tilde{g}'_2 \in \beta(\tilde{h}') . \tilde{G} . \beta(\tilde{h}).$$

Il existe $g'_1 \in \tilde{g}'_1$, $h' \in \tilde{h}'$, $h \in \tilde{h}$, $g_1 \in \tilde{g}_1$ et $g'_2 \in \tilde{g}'_2$ tels que $g'_i \in G$,

$$g'_1 . h \sim h' . g_1 \bmod \sigma \quad \text{et} \quad g'_2 \in \beta(h') . G . \beta(h).$$

Par définition de σ, il existe $f \in G$ tel que $g'_1 . h . f = h' . g_1 . f$, c'est-à-dire

$$(g'_1, h', h . f, g_1 . f) \in M = \square(H^{\bullet}; H, G).$$

Puisqu'il existe $q = (g'_2, h', h . f . g, g_2) \in M$, où $g \in G$, il en résulte

$$\square \tilde{\sigma}(q) = (\tilde{g}'_2, \tilde{h}', \tilde{h}'', \tilde{g}_2) \in \square(\tilde{H}^{\bullet}; \tilde{H}, \tilde{G}),$$

où $\tilde{h}'' = \tilde{h} . \hat{\sigma}(f . g)$. Ainsi $(\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{G})$ vérifie la condition (0') et, d'après la première partie de la démonstration, le noyau $\tilde{C}$ du $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme $\hat{\varrho}$ de $\tilde{H}^{\bullet}$ sur $\tilde{H}^{\bullet}/\tilde{G}^{\bullet}$ est la classe des $\tilde{k} \in \tilde{H}$ tels que l'on ait $\tilde{k} . \tilde{g} = \tilde{g}'$, où $\tilde{g} \in \tilde{G}$ et $\tilde{g}' \in \tilde{G}$. Soit $\hat{G}$ la classe des $k \in H$ tels que l'on ait $k . g = g'$, où $g \in G$ et $g' \in G$. Si $k \in \hat{G}$, on a $\tilde{\sigma}(k) . \tilde{\sigma}(g) = \tilde{\sigma}(g')$, d'où $\tilde{\sigma}(k) \in \tilde{C}$, et k appartient au noyau C du $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme $\hat{\varrho} . \hat{\sigma}$ de $H^{\bullet}$ sur $\tilde{H}^{\bullet}/\tilde{G}^{\bullet}$. Inversement, si $k \in C$, on a $\tilde{k} = \tilde{\sigma}(k) \in \tilde{C}$ et il existe $\tilde{g} \in \tilde{G}$ et $\tilde{g}' \in \tilde{G}$ tels que $\tilde{k} . \tilde{\sigma}(g) = \tilde{\sigma}(g')$. Il s'ensuit qu'il existe $f \in G$ tel que $k . g . f = g' . f$, ce qui entraîne $k \in \hat{G}$. Donc $\hat{G} = C$.

Corollaire 1 : *Soient* $H^{\bullet}$ *une catégorie et* $G^{\bullet}$ *un sous-groupoïde de* $H^{\bullet}$ *contenant* $H_0^{\bullet}$. *Pour que* (H, G) *vérifie* (0′), *il faut et il suffit que :* (0) *si* $h \in H$ *et* $g' \in \beta(h) . G . \beta(h)$, *il existe* $g \in G$ *tel que* $g' . h = h . g$; *dans ce cas,* $G^{\bullet}$ *est une sous-catégorie distinguée de* $H^{\bullet}$ *et* $H^{\bullet}/G^{\bullet} = H^{\bullet}/\varrho$.

En effet, (0′) entraîne (0) et si (0) est vérifié, les relations

$$(g_1', h', h, g_1) \in \square (H^{\bullet}; H, G) \quad \text{et} \quad g_2' \in \beta(h') . G . \beta(h)$$

assurent l'existence de $(g_1'^{-1} . g_2', h, h, f) \in \square (H^{\bullet}; H, G)$, d'où l'on déduit $(g_2', h', h, g_1 . f) \in \square (H^{\bullet}; H, G)$. Dans ce cas, en vertu du théorème 6, on a $\bar{\varrho} = \varrho$ et $\hat{G} = G$, car des conditions $k \in H$, $g \in G$ et $g' = k . g \in G$ résulte $k = g' . g^{-1} \in G$.

Corollaire 2 : *Soit* $H^{\bullet}$ *un groupoïde. Pour qu'un sous-groupoïde* $G^{\bullet}$ *de* $H^{\bullet}$ *contenant* $H_0^{\bullet}$ *soit distingué, il faut et il suffit que l'on ait* $h^{-1} . G . h \subset G$ *pour tout* $h \in H$.

Démonstration : Si $G^{\bullet}$ vérifie cette condition, il vérifie aussi la condition (0) et, d'après le corollaire 1, il est distingué dans $H^{\bullet}$. — Inversement, supposons $G^{\bullet}$ distingué. Soient $h \in H$ et $g \in G$ tels que

$$g' = h^{-1} . g . h \text{ soit défini.}$$

Soit $\dot{\varrho}$ le $p_{\mathcal{F}}$-épimorphisme de $H^{\bullet}$ sur $H^{\bullet}/G^{\bullet}$. On a

$$\dot{\varrho}(g') = \dot{\varrho}(h^{-1}) . \dot{\varrho}(g) . \dot{\varrho}(h) = \dot{\varrho}(\alpha(h)),$$

car $G^{\bullet}$ est le noyau de $\dot{\varrho}$; d'où $g' \in G$.

Corollaire 3 : *Si* $H^{\bullet}$ *est un groupe et* $C^{\bullet}$ *un sous-groupe de* $H^{\bullet}$, *alors* $H^{\bullet}/C^{\bullet}$ *est le groupe quotient de* $H^{\bullet}$ *par le sous-groupe distingué engendré par* $C^{\bullet}$.

En effet, le plus petit sous-groupoïde distingué de $H^{\bullet}$ contenant C est identique au sous-groupe distingué (au sens usuel) engendré par $C^{\bullet}$.

4. Cohomologie

Complexes :

Soit Z l'anneau des entiers. Soit ω la sous-catégorie libre du groupoïde $(Z \times Z)^{\perp}$ des couples d'entiers formé des $(j, i) \in Z \times Z$

tels que $j < i$ (la loi de composition $\perp$ est définie par :

$$(j', i') \perp (j, i) = (j', i) \text{ si, et seulement si, } i' = j).$$

On identifie (i, i) avec i. Soit $H^{\bullet}$ une catégorie et J un idéal de $H^{\bullet}$.

Définition 15 : *On appelle* complexe de $(H^{\bullet}, J)$ *un foncteur* K *de* ω *vers* $H^{\bullet}$ *tel que, pour tout* $j \in Z$, *on ait* :

$$K(j-1, j) \, . \, K(j, j+1) \in J.$$

Puisque ω est une catégorie libre, un complexe K est entièrement déterminé par la donnée de la suite $(K(n-1, n))_{n \in Z}$. Inversement, si $(h_n)_{n \in Z}$ est une suite telle que :

$$h_n \in H, \; \beta(h_n) = \alpha(h_{n-1}) \text{ et } h_{n-1} \, . \, h_n \in J,$$

l'application $\begin{cases} (n-1, n) \to h_n \\ (m, n) \to h_{m+1} \, . \, h_{m+2} \, . \, \dots \, . \, h_{n-1} \, . \, h_n \\ n \to \alpha(h_n) \end{cases}$

définit un complexe K; pour simplifier, on dira que K est alors le complexe $(h_n)_{n \in Z}$.

Proposition 14 : *Soit* K *un complexe de* $(H^{\bullet}, J)$ *et soit* $E \in H_0^{\bullet}$. *Si* K_E^{*} *désigne le foncteur E-transposé de* K (voir n[0] 1), *pour tout* $n \in Z$ *on a :*

$$K_E^{*}(n, n+1) \, . \, K_E^{*}(n-1, n) \; (K_E^{*}(n-1)) \subset J.$$

En effet, si K est le complexe $(h_n)_{n \in Z}$ et si $g \in K_E^{*}(n-1) = E \, . \, H \, . \, K(n-1)$, on trouve :

$$K_E^{*}(n, n+1) \, . \, K_E^{*}(n-1, n)(g) = (h_{n+1})_E^{*} \, . \, (h_n)_E^{*}(g) =$$

$$g \, . \, h_n \, . \, h_{n+1} \in g \, . \, J \subset J.$$

Définition 16 : *Soit* K *un complexe de* $(H^{\bullet}, J)$; *un élément de* $K_E^{*}(n)$, *où* $E \in H_0^{\bullet}$, *est appelé* une n-cochaîne de K vers E; *une n-cochaîne* g *de* K *vers* E *telle que* $K_E^{*}(n, n+1)(g) \in J$ *est appelée* un n-cocycle de K vers E *et un élément de* $K_E^{*}(n-1, n) \; (K_E^{*}(n-1))$, un n-cobord de K vers E.

Soit $\mathscr{K}(H^{\bullet}, J)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de ω vers $H^{\bullet}$ ayant pour unités les complexes de $(H^{\bullet}, J)$. Un élément de $\mathscr{K}(H^{\bullet}, J)$ est déterminé par (et souvent identifié avec) un triplet (K', τ, K), où K

est un complexe $(h_n)_{n \in Z}$, où K' est un complexe $(h'_n)_{n \in Z}$ et où τ est une application de Z dans H telle que, pour tout $n \in Z$, on ait

$$\tau(n) \in K'(n) . H . K(n) \quad \text{et} \quad h'_n . \tau(n) = \tau(n-1) . h_n.$$

Soit $\mathfrak{C}(H^{\bullet}, J) = H^{\bullet} \times \mathcal{K}(H^{\bullet}, J)^{*}$.

Théorème 7 : Pour tout $n \in Z$, il existe un foncteur C^n de $\mathfrak{C}(H^{\bullet}, J)$ vers $\mathcal{M}$ et des $\mathcal{M}$-sous-foncteurs Z^n et B^n de C^n tels que $C^n(E, K)$, $B^n(E, K)$ et $Z^n(E, K)$ soient les classes des n-cochaînes, des n-cocycles et des n-cobords de K vers E, si K est un complexe et $E \in H^{\bullet}_0$.

Démonstration : L'application

$$(K', \tau, K) \to \tau(n), \quad \text{où} \quad (K', \tau, K) \in \mathcal{K}(H^{\bullet}, J),$$

définit un foncteur $\tilde{n}$ de $\mathcal{K}(H^{\bullet}, J)^{*}$ vers H^{*}. Soit C^n le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{H^{\bullet}} . (H^{\bullet} \times \tilde{n}) \text{ de } \mathfrak{C}(H^{\bullet}, J) \text{ vers } \mathcal{M}.$$

Si $(E, K) \in \mathfrak{C}(H^{\bullet}, J)^{\bullet}_0$, la classe $C^n(E, K)$ est la classe $E . H . K(n)$ des n-cochaînes de K vers E. Soit

$$c = (h, (K', \tau, K)) \in \mathfrak{C}(H^{\bullet}, J),$$

où K est le complexe $(h_n)_{n \in Z}$, où K' est le complexe $(h'_n)_{n \in Z}$ et où $E = \beta(h)$ et $E' = \alpha(h)$. Alors $C^n(c)$ est l'application

$$f \to h . f . \tau(n) \text{ de } C^n(E', K') \text{ dans } C^n(E, K).$$

— Soit $f \in Z^n(E', K')$; on a

$$K^{*}_E(n, n+1)(C^n(c)(f)) = h . f . \tau(n) . h_{n+1} =$$
$$h . f . h'_{n+1} . \tau(n+1) \in J,$$

et par suite :

$$C^n(c)(Z^n(E', K')) \subset Z^n(E, K).$$

Il en résulte que l'application :

$$c \to (Z^n(E, K), \underline{C^n(c)}\, \iota, Z^n(E', K'))$$

définit un foncteur Z^n de $\mathfrak{C}(H^{\bullet}, J)$ vers $\mathcal{M}$, qui est un $\mathcal{M}$-sous-foncteur de C^n. Soit $B^n(E, K)$ la classe des n-cobords de K vers E et soit $g \in B^n(E', K')$; il existe $g' \in K'^{*}_{E'}(n-1)$ tel que $g = g' . h'_n$ et on obtient :

$$C^n(c)(g) = h . g' . h'_n . \tau(n) =$$
$$h . g' . \tau(n-1) . h_n \in K^{*}_E(n-1, n)(K^{*}_E(n-1)) = B^n(E, K).$$

On en déduit que l'application

$$c \to (B^n(E, K), \underline{C^n(c)}\,\iota, B^n(E', K'))$$

définit un foncteur B^n de $\mathfrak{C}(H^\bullet, J)$ vers $\mathcal{M}$, qui est un $\mathcal{M}$-sous-foncteur de Z^n.

Définition 17 *: Avec les notations du théorème* 7, *les foncteurs* C^n, Z^n *et* B^n *sont appelés respectivement* foncteurs n-cochaînes, n-cocycles *et* n-cobords relatifs à $(H^\bullet, J)$.

Foncteur de cohomologie :

Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, \mathcal{H})$ un foncteur d'homomorphismes. Soient $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathcal{H}$. Supposons que K soit un complexe de $(H^\bullet, J)$ et que D_K^E soit un foncteur de ω^* vers $\mathcal{H}$ tel que, pour tout $n \in Z$, on ait :

$$p(D_K^E(n-1, n)) = K_E^*(n-1, n), \text{ où } E \in H_0^\bullet.$$

Posons : $\bar{C}^n(E, K) = D_K^E(n)$; on a $p(\bar{C}^n(E, K)) = C^n(E, K)$.

Définition 18 *: On dira que K admet une* $(D_K^E, \mathcal{H}', \mathcal{I})$-structure de
1 cohomologie d'ordre n vers E, *notée* $\bar{H}^n(E, K)$, *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) *Il existe une p-sous-structure* $\bar{Z}^n(E, K)$ *de* $\bar{C}^n(E, K)$ *telle que* $p(\bar{Z}^n(E, K)) = Z^n(E, K)$.

2) $B^n(E, K)$ *engendre une* $(p, \mathcal{H}'_0)$*-sous-structure* $\bar{B}^n(E, K)$ *de* $\bar{Z}^n(E, K)$.

3) *Il existe une* $(p, \mathcal{I})$*-structure quotient* $\bar{H}^n(E, K)$ *de* $\bar{Z}^n(E, K)$ *par* $\bar{B}^n(E, K)$.

On dira que $\bar{H}^n(E, K) = s$ *est* triviale *si* $p(s)$ *engendre une* $(p, \mathcal{H}'_0)$*-sous-structure* s' *de* s *telle que* $s' \in \mathcal{I}$.

Les conditions 1 et 2 entraînent que $\bar{B}^n(E, K)$ est la $(p, \mathcal{H}'_0)$-sous-structure de $\bar{C}^n(E, K)$ engendrée par $B^n(E, K)$. Si p est à $(\mathcal{H}', \mathcal{I})$-suites exactes courtes et saturé la condition 3 est vérifiée.

Soit $H'^\bullet$ une sous-catégorie de $H^\bullet$ et soit D un foncteur de $H'^\bullet \times H^*$ vers $\mathcal{H}$ tel que $p \,.\, D$ soit une restriction du foncteur $\mathrm{Hom}_{H^\bullet}$. Si K est un complexe de $(H^\bullet, J)$ et si $E \in H'^\bullet_0$, désignons par D_K^E le foncteur de ω^* vers $\mathcal{H}$ tel que

$$D_K^E(n, n+1) = D(E, K(n, n+1)).$$

Soit $\mathfrak{C}'(H^\bullet, J)$ la sous-catégorie de $\mathfrak{C}(H^\bullet, J)$ formée des $(h, (K', \tau, K))$ tels que $h \in H'$ et soit $\bar{C}^n$ le foncteur de $\mathfrak{C}'(H^\bullet, J)$ vers $\mathscr{H}$ tel que :

$$\bar{C}^n(h, (K', \tau, K)) = D(h, \tau(n)).$$

Le foncteur $p \,.\, \bar{C}^n$ est une restriction de C^n. En particulier, si (E, K) est une unité de $\mathfrak{C}'(H^\bullet, J)$, on a :

$$\bar{C}^n(E, K) = D(E, K(n)) = D^E_K(n),$$

de sorte que $\bar{C}^n(E, K)$ est une structure (appartenant à $\mathscr{H}_0$) au-dessus de la classe des n-cochaînes de K vers E.

Définition 19 : *On dira que* $(\mathscr{H}', \mathscr{J}, D, J)$ *admet* $\bar{H}^n$ *pour* foncteur de cohomologie d'ordre n *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) *Il existe un p-sous-foncteur* $\bar{Z}^n$ *de* $\bar{C}^n$, *appelé* foncteur n-cocycle pour $(\mathscr{H}', \mathscr{J}, D, J)$, *tel que* $p \,.\, \bar{Z}^n$ *soit une restriction de* Z^n.

2) *Il existe un* $(p, \mathscr{H}')$*-sous-foncteur* $\bar{B}^n$ *de* $\bar{Z}^n$ *engendré par* B^n; *on l'appelle* foncteur n-cobord pour $(\mathscr{H}', \mathscr{J}, D, J)$.

3) $\bar{H}^n$ *est un p-foncteur quotient de* $\bar{Z}^n$ *par* $\bar{B}^n$.

Ces conditions entraînent que $\bar{H}^n(E, K)$ est une $(D^E_K, \mathscr{H}', \mathscr{J})$-structure de cohomologie d'ordre n de K vers E.

Le *problème de la cohomologie pour* $(\mathscr{H}', \mathscr{J}, D, J)$ est le problème de l'existence d'un foncteur de cohomologie d'ordre n pour $(\mathscr{H}', \mathscr{J}, D, J)$.

Proposition 15 : $(\mathscr{H}', \mathscr{J}, D, J)$ *admet au plus un foncteur n-cocycle et un foncteur de cohomologie d'ordre n.*

En effet, si $(E, K) \in \mathfrak{C}'(H^\bullet, J)_0$ les conditions de la définition 19 déterminent $\bar{Z}^n(E, K)$, $\bar{B}^n(E, K)$ et $\bar{H}^n(E, K)$ d'une façon unique. 1
Par suite la proposition 15 résulte du corollaire de la proposition 2 et de son dual.

Définition 20 : *Si* $(\mathscr{H}', \mathscr{J}, D, J)$ *admet* $\bar{H}^n$ *pour foncteur de cohomologie d'ordre n et si K est un complexe de* $(H^\bullet, J)$ *tel que* $\bar{H}^n(E, K)$ *soit triviale pour tout* $E \in H'^\bullet_0$, *on dira que K est* une suite exacte pour $(\mathscr{H}', \mathscr{J}, D, J)$.

Ainsi on peut définir une notion de suite exacte dans une catégorie munie d'un idéal J et d'un foncteur D tel que $(H^\bullet, D)$ soit une catégorie p-dominée. Nous étudierons ailleurs cette question. 2

1¶ *Théorème* 8 : *Supposons p saturé et à $(\mathcal{H}', \mathcal{I})$-suites exactes courtes. Pour que $(\mathcal{H}', \mathcal{I}, D, J)$ admette un foncteur de cohomologie d'ordre n, il faut et il suffit que les conditions* 1 *et* 2 *de la définition* 18 *soient vérifiées pour tout $(E, K) \in \mathfrak{C}'(H^{\bullet}, J)_0$ et que, si $c \in \mathfrak{C}'(H^{\bullet}, J)$, on ait $C^n(c)(M) \subset M'$, où $M = p(\bar{B}^n(\alpha(c)))$ et $M' = p(\bar{B}^n(\beta(c)))$.*
Démonstration : Ces conditions sont évidemment nécessaires. Supposons-les vérifiées. Soit

$$c \in \mathfrak{C}'(H^{\bullet}, J), \quad \alpha(c) = (E, K) \quad \text{et} \quad \beta(c) = (E', K').$$

Comme $S = \bar{Z}^n(E, K)$ et $S' = \bar{Z}^n(E', K')$ sont des p-sous-structures de $\bar{C}^n(E, K)$ et de $\bar{C}^n(E', K')$ respectivement et que l'on a

$$C^n(c)(p(S)) \subset p(S')$$

d'après le théorème 7, il résulte de la proposition 3 qu'il existe un p-sous-foncteur $\bar{Z}^n$ de $\bar{C}^n$, qui est un foncteur n-cocycle pour $(\mathcal{H}', \mathcal{I}, D, J)$. — Soient $s = \bar{B}^n(E, K)$ et $s' = \bar{B}^n(E', K')$ les $(p, \mathcal{H}'_0)$-sous-structures de S et S' engendrées par $B^n(E, K)$ et $B^n(E', K')$. Puisque $Z^n(c)(p(s)) \subset p(s')$, il existe, en vertu des propositions 2 et 5, un p-sous-foncteur $\bar{B}^n$ de $\bar{Z}^n$ engendré par B^n. Comme p est à $(\mathcal{H}', \mathcal{I})$-suites exactes courtes, le corollaire de la proposition 8 affirme qu'il existe aussi un p-foncteur quotient de $\bar{Z}^n$ par $\bar{B}^n$. Ce foncteur est un foncteur de cohomologie d'ordre n pour $(\mathcal{H}', \mathcal{I}, D, J)$.

Corollaire : Supposons que D soit un foncteur de $H'^{\bullet} \times H^*$ vers $\mathcal{F}$ tel que $p_{\mathcal{F}} . D$ soit une restriction de $\mathrm{Hom}_{H^{\bullet}}$. *Pour que $(\mathcal{F}_g, J_{\mathcal{F}}, D, J)$ admette un foncteur de cohomologie d'ordre n, il faut et il suffit que, pour tout $(E, K) \in \mathfrak{C}'(H^{\bullet}, J)_0$, la classe $Z^n(E, K)$ définisse une sous-catégorie $\bar{Z}^n(E, K)$ de $\bar{C}^n(E, K)$.*

Démonstration : La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la vérifiée. Du début de la démonstration du théorème 8, il résulte qu'il existe un foncteur n-cocycle $\bar{Z}^n$ pour $(\mathcal{F}_g, J_{\mathcal{F}}, D, J)$. Soit

$$c \in \mathfrak{C}'(H^{\bullet}, J), \ \alpha(c) = (E, K) \ \text{et} \ \beta(c) = (E', K').$$

La classe $\mathrm{B}^n(E, K)$ engendre une $(p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}_{g0})$-sous-structure de $\bar{Z}^n(E,K)$, à savoir le sous-groupoïde $\hat{C}^{\bullet}$ de $\bar{Z}^n(E, K)$ engendré par la classe

$$C = B^n(E, K) \cap \bar{Z}^n(E, K)_{\gamma}.$$

Soit de même $\hat{C}'^{\bullet}$ le sous-groupoïde de $\bar{Z}^n(E', K')$ engendré par

$$C' = B^n(E', K') \cap \bar{Z}^n(E', K')_{\gamma}.$$

Posons $Z^n(c) = F$. D'après le théorème 7, on a

$$F(B^n(E, K)) \subset B^n(E', K').$$

Puisque $Z^n(c)$ est un foncteur tel que $p(Z^n(c)) = F$, on a :

$$F(Z^n(E, K)_\gamma) \subset Z^n(E', K')_{\gamma'}, \text{ d'où } F(C) \subset C'.$$

Si $f \in C$, on a $F(f^{-1}) \in C'^{-1}$. Soit $k \in \hat{C}$; il existe $f_i \in C \cup C^{-1}$ tels que $k = f_n. \dots .f_1$; il en résulte

$$F(k) = F(f_n). \dots .F(f_1), \quad \text{où} \quad F(f_i) \in C' \cup C'^{-1}.$$

Donc $F(k) \in \hat{C}'$. De plus $p_{\mathscr{F}}$ est à $(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}})$-suites exactes courtes, d'après le corollaire du théorème 5. Ainsi les conditions du théorème 8 sont vérifiées; en vertu de ce théorème, $(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}}, D, J)$ admet un foncteur de cohomologie d'ordre n.

5. Foncteurs de cohomologie relatifs aux espèces de morphismes

Foncteurs de cohomologie relatifs à $\mathscr{A}$:

Soit $\mathscr{A}$ la catégorie des applications covariantes $p_{\mathscr{F}}$-dominées (n° 1). Soit $J_{\mathscr{A}}$ son idéal construit dans le n° 2. Soit $C^\bullet \in \mathscr{F}_0$; soient $\mathscr{A}_{C^\bullet}$ la sous-catégorie de $\mathscr{A}$ formée des $(F', C^\bullet, \varphi, F) \in \mathscr{A}$, et $J_{C^\bullet}$ l'idéal de $\mathscr{A}_{C^\bullet}$, intersection de $J_{\mathscr{A}}$ et de $\mathscr{A}_{C^\bullet}$.

Définition 21 *: Un complexe de* $(\mathscr{A}, J_{\mathscr{A}})$ *(resp. de* $(\mathscr{A}_{C^\bullet}, J_{C^\bullet})$*) est appelé* complexe d'espèces de morphismes *(resp. de* morphismes sur $C^\bullet$*).*

Un complexe d'espèces de morphismes sur $C^\bullet$ est un complexe d'espèces de morphismes K tel que

$$K(n-1, n) = (F_{n-1}, C^\bullet, \varphi_n, F_n) \text{ pour tout } n \in Z.$$

Soit $\overline{\mathscr{F}}$ la catégorie des foncteurs doubles [2], $\overline{p_{\mathscr{F}}}$ son foncteur projection canonique vers $\mathscr{M}$. Soient $p_1^{\mathscr{F}}$ et $p_2^{\mathscr{F}}$ les deux foncteurs de $\overline{\mathscr{F}}$ vers $\mathscr{F}$ tels que, si $\Phi = ((\hat{S}^\bullet, \hat{S}^\perp), \underline{\Phi}, (S^\bullet, S^\perp))$, on ait

$$p_1^{\overline{\mathscr{F}}}(\Phi) = (\hat{S}^\bullet, \underline{\Phi}, S^\bullet) \text{ et } p_2^{\overline{\mathscr{F}}}(\Phi) = (\hat{S}^\perp, \underline{\Phi}, S^\perp).$$

Soit $\mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$ la catégorie des applications covariantes $\overline{p_{\mathscr{F}}}$-dominées (n° 1). L'application

$$(\bar{G}', \Phi, \varphi, \bar{G}) \to (p_i^{\mathscr{F}} . \bar{G}', \Phi, \varphi, p_i^{\mathscr{F}} . \bar{G}), \text{ où } i = 1, 2,$$

définit un foncteur $\bar{p}_i^{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$ vers $\mathscr{A}$.

Soit $\bar{G} \in \mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})_0$. Alors $G_i = p_i^{\mathscr{F}} . \bar{G}$ est une espèce de morphismes et on a

$$\eta(\bar{G}) = \eta(G_1) = \eta(G_2);$$

de plus $(S(G_1)^{\bullet}, S(G_2)^{\bullet})$ est une catégorie double, que nous noterons $S(\bar{G})$. Si $(\bar{G}', \Phi, \varphi, \bar{G}) \in \mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$, on a

$$(S(\bar{G}'), \underline{\varphi}, S(\bar{G})) \in \overline{\mathscr{F}}.$$

Soit $A = (\hat{S}^{\bullet}, \hat{S}^{\perp}) \in \overline{\mathscr{F}}_0$ et soit $S^{\bullet} \in \mathscr{F}_0$; les applications source et but dans $\hat{S}^{\perp}$ sont notées $\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$. Si φ et φ' sont deux applications de S sur une partie de $\hat{S}$ telles que $\alpha^{\perp} \varphi' = \beta^{\perp} \varphi$, nous désignons par $\varphi' \perp \varphi$ l'application

$$f \to \varphi'(f) \perp \varphi(f) \text{ de } S \text{ dans } \hat{S}.$$

Rappelons [2] que l'on obtient une catégorie, notée $\mathscr{F}(A, S^{\bullet})$, ou $\mathscr{F}(\hat{S}^{\bullet}, S^{\bullet})^{\perp}$, en munissant $\hat{S}^{\bullet} . \mathscr{F} . S^{\bullet}$ de la loi de composition

$$(\hat{S}^{\bullet}, \varphi', S^{\bullet}) \perp (\hat{S}^{\bullet}, \varphi, S^{\bullet}) = (\hat{S}^{\bullet}, \varphi' \perp \varphi, S^{\bullet}) \text{ si, et seulement si, } \alpha^{\perp} \varphi' = \beta^{\perp} \varphi.$$

Supposons donnée une sous-catégorie $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{A}$ et soit q un foncteur de $\mathscr{A}'$ vers $\mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$ tel que $\bar{p}_1^{\mathscr{F}} . q = \mathscr{A}'$. (Par exemple, $\mathscr{A}'$ peut avoir un seul élément $G = p_1^{\mathscr{F}} . \bar{G}$, où $\bar{G} \in \mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})_0$.) Si $G \in \mathscr{A}'$, posons $S(q(G)) = (S(G)^{\bullet}, S(G)^{\perp})$.

Proposition 16 : *Il existe un foncteur D de $\mathscr{A}' \times \mathscr{A}^*$ vers $\mathscr{F}$ tel que $p_{\mathscr{F}} . D$ soit une restriction du foncteur* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}$ *et que, si*

$$(G, F) \in \mathscr{A}'_0 \times \mathscr{A}_0 \textit{ et } S(q(G)) = (\hat{S}^{\bullet}, \hat{S}^{\perp}),$$

$D(G, F)$ soit la catégorie obtenue en munissant $G . \mathscr{A} . F$ de la loi de composition :

$$(G, \Phi', \varphi', F) \perp (G, \Phi, \varphi, F) = (G, \Phi, \varphi' \perp \varphi, F) \textit{ si, et seulement si,}$$
$$\alpha^{\perp} \varphi' = \beta^{\perp} \varphi \textit{ et } \Phi' = \Phi.$$

Démonstration : Soit $(G, F) \in \mathscr{A}'_0 \times \mathscr{A}_0$ et $S(q(G)) = (\hat{S}^{\bullet}, \hat{S}^{\perp})$. Soit $M^{\perp}$ la catégorie produit

$$(\alpha(G) . \mathscr{F} . \alpha(F))^0 \times \mathscr{F}(\hat{S}^{\bullet}, S(F)^{\bullet})^{\perp},$$

où ^{0} est la loi de composition triviale (tous les éléments sont des unités). Soit γ la bijection

$$(G, \Phi, \varphi, F) \to (\Phi, (\hat{S}^{\bullet}, \underline{\varphi}, S(F)^{\bullet}))$$

de G . $\mathscr{A}$. F sur une sous-classe M' de M. Montrons que M' définit une sous-catégorie de $M^{\perp}$. Pour cela, il suffit de prouver que, si

$$m_i = (G, \Phi, \varphi_i, F) \in \mathscr{A}, \ i = 1{,}2 \quad \text{et} \quad \alpha^{\perp} \varphi_2 = \beta^{\perp} \varphi_1,$$

on a

$$\alpha^{\perp}(\gamma(m_i)) \in M', \beta^{\perp}(\gamma(m_i)) \in M' \quad \text{et} \quad \gamma(m_2) \perp \gamma(m_1) \in M',$$

c'est-à-dire que $(\eta(G), \Phi, \alpha^{\perp} \varphi_1, \eta(F))$, $(\eta(G), \Phi, \beta^{\perp} \varphi_i, \eta(F))$ 1
et $(\eta(G), \Phi, \varphi_2 \perp \varphi_1, \eta(F))$ sont des applications covariantes. En effet, soit $f \in \alpha(F)$ et $z \in F(\alpha(f))$. On a :

$$\Phi(f)(\alpha^{\perp}\varphi_i(z)) = \alpha^{\perp}(\Phi(f)\varphi_i(z)) = \alpha^{\perp}\varphi_i(fz),$$
$$\Phi(f)(\beta^{\perp}\varphi_i(z)) = \beta^{\perp}(\Phi(f)\varphi_i(z)) = \beta^{\perp}\varphi_i(fz),$$
$$\varphi_2 \perp \varphi_1(fz) = \varphi_2(fz) \perp \varphi_1(fz) = \Phi(f)\varphi_2(z) \perp \Phi(f)\varphi_1(z) =$$
$$= \Phi(f)(\varphi_2(z) \perp \varphi_1(z)) = \Phi(f)(\varphi_2 \perp \varphi_1)(z),$$

car l'application $z' \to \Phi(f)z'$ définit le foncteur double $q(G)(\Phi(f))$. On en déduit

$$(G, \Phi, \alpha^{\perp}\varphi_i, F) \in \mathscr{A}, (G, \Phi, \beta^{\perp}\varphi_i, F) \in \mathscr{A} \text{ et } (G, \Phi, \varphi_2 \perp \varphi_1, F) \in \mathscr{A}.$$

Donc $M'^{\perp}$ est une sous-catégorie de $M^{\perp}$, et par suite $(G . \mathscr{A} . F)^{\perp}$ est la catégorie image de $M'^{\perp}$ par γ^{-1}; nous la noterons $D(G, F)$. — Soit $(m', m) \in \mathscr{A}' \times \mathscr{A}$, où

$$m' = (G', \Phi', \varphi', G) \quad \text{et} \quad m = (F, \Phi, \varphi, F').$$

On a

$$q(m') = (q(G'), \Phi', \varphi', q(G)) \in \mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}}).$$

Montrons que Hom $(m', m) = a$ définit un foncteur $D(m', m)$ de $D(G, F)$ vers $D(G', F')$, d'où résultera la proposition 16 puisque Hom est un foncteur et que $p_{\mathscr{F}}$ est fidèle. En effet, supposons

$$m_i = (G, \Psi, \psi_i, F) \in \mathscr{A}, \ i = 1, 2, \quad \text{et} \quad \alpha^{\perp}\psi_2 = \beta^{\perp}\psi_1.$$

Posons $\Psi' = \Phi' . \Psi . \Phi$ et $\varphi' . \psi_i . \varphi = \psi'_i$; on a

$$a(m_i) = (G', \Psi', \psi'_i, F') \in \mathscr{A}.$$

Puisque φ' définit un foncteur de $S(G)^{\perp}$ vers $S(G')^{\perp}$, on trouve :

$$\alpha^{\perp}\, \psi_2' = \varphi'\, \alpha^{\perp}\, \psi_2\, \varphi = \varphi'\, \beta^{\perp}\, \psi_1\, \varphi = \beta^{\perp}\, \psi_1',$$

ainsi $a(m_2) \perp a(m_1)$ est défini dans $D(G', F')$. De plus la relation

$$\begin{aligned} \psi_2' \perp \psi_1'(z) = \psi_2'(z) \perp \psi_1'(z) &= \varphi'(\psi_2\, \varphi(z)) \perp \varphi'(\psi_1\, \varphi(z)) \\ &= \varphi'(\psi_2\, \varphi(z) \perp \psi_1\, \varphi(z)) = \varphi'(\psi_2 \perp \psi_1)\, \varphi(z) \end{aligned}$$

pour tout $z \in S(F')$, entraîne :

$$\begin{aligned} a(m_2) \perp a(m_1) &= (G', \Psi', \psi_2' \perp \psi_1', F') = \\ &= (G', \Phi'.\Psi.\Phi, \varphi'.(\psi_2 \perp \psi_1).\varphi, F') = a(m_2 \perp m_1). \end{aligned}$$

Ceci montre que a définit un foncteur $D(m', m)$ de $D(G, F)$ vers $D(G', F')$. Donc l'application $(m', m) \to D(m', m)$ où $(m', m) \in \mathscr{A}' \times \mathscr{A}$ définit le foncteur D cherché.

Théorème 9 : *($\mathscr{F}_g$, $J_{\mathscr{F}}$, D, $J_{\mathscr{A}}$) admet un foncteur de cohomologie $\bar{H}^n(q)$ d'ordre n, où D est le foncteur construit dans la proposition* 16.
Démonstration : Soient C^n, Z^n et B^n les foncteurs n-cochaînes, n-cocycles et n-cobords associés à $(\mathscr{A}, J_{\mathscr{A}})$, qui sont (théorème 7) des foncteurs de $\mathfrak{C}$ vers $\mathscr{F}$, où $\mathfrak{C} = \mathscr{A} \times \mathscr{K}(\mathscr{A}, J_{\mathscr{A}})^*$;

$$\text{soit } \mathfrak{C}' = \mathscr{A}' \times \mathscr{K}(\mathscr{A}, J_{\mathscr{A}})^*.$$

Supposons

$$(G, K) \in \mathfrak{C}_0', \text{ où } K = (\partial_n)_{n \in Z} \quad \text{et} \quad \partial_n = (F_{n-1}, \Phi_n, \varphi_n, F_n) \in \mathscr{A}.$$

Posons $S(q(G)) = (\hat{S}^{\bullet}, \hat{S}^{\perp})$. On a

$$p_{\mathscr{F}} \,.\, D(G, F_n) = \mathrm{Hom}(G, F_n) = C^n(G, K).$$

D'après la proposition 16, l'application

$$m \to m \,.\, \partial_n, \text{ où } m \in G \,.\, \mathscr{A} \,.\, F_{n-1},$$

définit un foncteur δ^n de $D(G, F_{n-1})$ vers $D(G, F_n)$. En vertu de la proposition 14, on a $\delta^{n+1} \,.\, \delta^n(m) \in J_{\mathscr{A}}$, ce qui signifie

$$\psi\, \varphi_n\, \varphi_{n+1}(S(F_{n+1})) \subset \hat{S}_0^{\bullet}, \text{ si } m = (G, \Psi, \psi, F_{n-1}).$$

Soit $N^{\perp} = \mathscr{F}(S(q(G)), S(F_{n+1})^{\bullet})$. Soit N' la sous-classe de N formée des $\Gamma \in N$ tels que $\Gamma(S(F_{n+1})) \subset \hat{S}_0^{\bullet}$. Comme $\hat{S}_0^{\bullet}$ définit une sous-catégorie de $\hat{S}^{\perp}$, la classe N' définit une sous-catégorie $N'^{\perp}$ de $N^{\perp}$. D'après la proposition 16, il existe un isomorphisme γ de

$D(G, F_{n+1})$ sur une sous-catégorie $M'^{\perp}$ de

$$M^{\perp} = L^0 \times N^{\perp}, \quad \text{où} \quad L = \alpha(G) \,.\, \mathscr{F} \,.\, \alpha(F_{n+1}).$$

Par définition, $Z^n(G, K)$ est la classe des $m = (G, \Psi, \psi, F_n) \in \mathscr{A}$ tels que $\delta^{n+1}(m) \in J_{\mathscr{A}}$, c'est-à-dire tels que

$$(\hat{S}^{\bullet}, \underline{\psi}\, \underline{\varphi}_{n+1}, S(F_{n+1})^{\bullet}) \in N'.$$

Ceci signifie que $Z^n(G, K)$ est l'image réciproque par δ^{n+1} de la sous-catégorie $\gamma^{-1}((L \times N') \cap M')$ de $D(G, F_{n+1})$. Il en résulte que $Z^n(G, K)$ définit une sous-catégorie de $D(G, F_n) = \bar{C}^n(G, K)$. On en déduit, en vertu du corollaire du théorème 8, que

$$(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}}, D, J_{\mathscr{A}})$$

admet un foncteur de cohomologie d'ordre n, que nous noterons $\bar{H}^n[q]$. On a :

$$\bar{H}^n[q](G, K) = Z^n(G, K)^{\perp} / \bar{B}^n(G, K),$$

où $\bar{B}^n(G, K)$ désigne le sous-groupoïde de $Z^n(G, K)^{\perp}$ engendré par la classe $B^n(G, K) \cap Z^n(G, K)^{\perp}_{\gamma}$. —Remarquons que l'on a :

$$\bar{H}^n[q](G, K) = \bar{H}^n[\hat{q}](G, K),$$

en désignant par $\hat{q}$ le foncteur de la sous-catégorie de $\mathscr{A}$ ayant G pour seul élément vers $\mathscr{F}$ tel que $\hat{q}(G) = q(G)$.

Corollaire : Si $G \in \mathscr{A}'_0$ et si $S(q(G))^{\perp}$ est un groupoïde, alors $\bar{H}^n[q](G, K)$ est un groupoïde.

En effet, reprenons les notations de la démonstration du théorème 9. Comme $\hat{S}^{\perp}$ est un groupoïde, $\mathscr{F}(\hat{S}^{\bullet}, S(F_n)^{\bullet})^{\perp}$ est un groupoïde, l'inverse de Γ étant le foncteur Γ' de $S(F_n)^{\bullet}$ vers $\hat{S}^{\bullet}$ [2], où $\Gamma'(z)$ est l'inverse de $\Gamma(z)$ dans $\hat{S}^{\perp}$, pour tout $z \in S(F_n)$. Il en résulte que $D(G, F_n)$ est un groupoïde. Puisque $\hat{S}^{\bullet}_0$ définit un sous-groupoïde de $\hat{S}^{\perp}$, la catégorie $Z^n(G, K)^{\perp}$ est aussi un groupoïde, de même que sa catégorie quotient par $\bar{B}^n(G, K)$.

Définition 22 : Avec les notations du théorème 9, le foncteur $\bar{H}^n[q]$ est appelé foncteur de cohomologie d'ordre n relatif à $(\mathscr{A}, q)$. *Si $(G, K) \in \mathfrak{C}'_0$, on appelle $\bar{H}^n[q]$ (G, K)* la catégorie de cohomologie d'ordre n de K vers $q(G)$, *notée aussi $\bar{H}^n(q(G), K)$.*

Soit $\mathscr{A}''$ une sous-catégorie de $\mathscr{A}$ et soit $\hat{q}$ un foncteur de $\mathscr{A}''$ vers $\mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$. Posons $\pi = \bar{p}_1^{\mathscr{F}} \,.\, \hat{q}$. Pour tout $m \in \mathscr{A}''$, soit q_m le foncteur de la sous-catégorie de $\mathcal{A}$ engendrée par $\{\pi(m)\}$ vers $\mathcal{A}(\overline{p_{\mathcal{F}}})$ tel que

$$q_m(\pi(m)) = \hat{q}(m).$$

Alors l'application

$$(m, (K', \tau, K)) \to \bar{H}^n[q_m](\pi(m), (K', \tau, K))$$

définit un foncteur, noté $\bar{H}^n[\hat{q}]$, de $\mathcal{A}'' \times \mathcal{K}(\mathcal{A}, J_{\mathcal{A}})^*$ vers $\mathcal{F}$, en vertu de la remarque terminant la démonstration du théorème 9.

Définition 23 : *Avec les notations précédentes, $\bar{H}^n[\hat{q}]$ sera appelé* foncteur de cohomologie d'ordre n relatif à $\hat{q}$.

Exemple : Soit $G \in \mathcal{A}_0$ et soit $G^{\square}$ le foncteur de $\alpha(G)$ vers $\overline{\mathcal{F}}$ tel que, si $f \in \alpha(G)$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, on ait

$$\begin{cases} G^{\square}(f) = (G^{\square}(e'), \square\, \underline{G(f)}, G^{\square}(e)) \\ G^{\square}(e) = (\boxplus\, G(e), \boxminus\, \overline{G(e)}). \end{cases}$$

L'application

$$(G', \Phi, \varphi, G) \to (G'^{\square}, \Phi, \square\, \varphi, G^{\square}),$$

où $(G', \Phi, \varphi, G) \in \mathcal{A}$, définit un foncteur $q^{\square}$ de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{A}(\overline{p_{\mathcal{F}}})$. Il en résulte un foncteur de cohomologie $\bar{H}^n[q^{\square}]$.

Foncteur de cohomologie centrale :

Proposition 17 : *Soit $G \in \mathcal{A}_0$; pour tout $e \in \alpha(G)_0$, soit $G(e)_d$ la classe des $z \in G(e)$ tels que $\alpha(z) = \beta(z) = s$ et que, si*

$$f \in \alpha(G) . e, \quad z' \in fs . G(\beta(f)) . fs,$$

on ait $fz . z' = z' . fz$. Il existe un $p_{\mathcal{F}}$-sous-foncteur G_d de G tel que $G_d(e) = G(e)^{\bullet}_d$ et il existe $G^{[2]}_d \in \mathcal{A}(\overline{p_{\mathcal{F}}})$ tel que

$$p_1^{\mathcal{F}} . G_d^{[2]} = G_d = p_2^{\mathcal{F}} . G_d^{[2]}.$$

Démonstration : Si $\Gamma^{\bullet}$ est le centre d'un demi-groupe, alors $(\Gamma^{\bullet}, \Gamma^{\bullet})$ est une catégorie double. Il en résulte que, si $\Gamma(e)^{\bullet}$ est la sous-catégorie de $G(e)$ somme des centres des demi-groupes $s . G(e) . s$, où $s \in G(e)_0$, alors $(\Gamma(e)^{\bullet}, \Gamma(e)^{\bullet})$ est une catégorie double. — Posons $S = G(e)_d$. On a $S \subset \Gamma(e)$. Soient

$$z \in s . S . s, \quad z' \in s . S . s, \quad f \in \alpha(G) . e \quad \text{et} \quad e' = \beta(f).$$

Comme $f(z'.z) = fz'.fz$, pour tout $z'' \in fs.G(e').fs$ on a

$$z''.f(z'.z) = z''.fz'.fz = fz'.z''.fz = fz'.fz.z'' = f(z'.z).z'',$$

d'où $z'.z \in S$. Par suite $S^{\bullet}$ est une sous-catégorie de $\Gamma(e)^{\bullet}$ et $(S^{\bullet}, S^{\bullet})$ est une sous-catégorie double de $(\Gamma(e)^{\bullet}, \Gamma(e)^{\bullet})$. Si on suppose de plus

$$f' \in \alpha(G).e' \quad \text{et} \quad z_1 \in f'(fs).G(\beta(f')).f'(fs),$$

on trouve

$$z_1.f'(fz) = z_1.(f'.f)z = (f'.f)z.z_1 = f'(fz).z_1,$$

et par suite $fz \in G(e')_d$. Ceci prouve que l'application

$$f \to (G_d(e'), \underline{G(f)}\,\iota, G_d(e)), \quad \text{où } f \in \alpha(G),$$

définit un foncteur $G_d \in \mathscr{A}_0$. Il s'ensuit que l'application

$$f \to ((G_d(e'), G_d(e')), \underline{G(f)}\,\iota, (G_d(e), G_d(e))),$$

où $f \in \alpha(G)$, définit un foncteur $G_d^{[2]} \in \mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})_0$.

Définition 24 : *Avec les notations de la proposition* 17, *on appelle* G_d le demi-centre de G. *Le demi-centre de* G_γ *est appelé* centre de G *et noté* G_c.

Soit $\mathscr{A}^d$ (resp. $\mathscr{A}^c$) la sous-catégorie de $\mathscr{A}$ formée des applications covariantes $p_{\mathscr{F}}$-dominées (G', Φ, φ, G) telles que

$$\varphi(G_d(e)) \subset G'_d(\Phi(e)) \quad (\text{resp. } \varphi(G_c(e)) \subset G'_c(\Phi(e))),$$

pour tout $e \in \alpha(G)_0$. L'application

$$(G', \Phi, \varphi, G) \to (G'^{[2]}_d, \Phi, \varphi_d, G^{[2]}_d), \text{ où } \varphi_d = (S(G'_d), \underline{\varphi}\,\iota, S(G_d))$$

$$(\text{resp.} \quad (G', \Phi, \varphi, G) \to (G'^{[2]}_c, \Phi, \varphi_c, G^{[2]}_c),$$

$$\text{où } \varphi_c = (S(G'_c), \underline{\varphi}\,\iota, S(G_c)))$$

définit un foncteur de $\mathscr{A}^d$ (resp. de $\mathscr{A}^c$) vers $\mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$, que nous désignons par q_d (resp. par q_c).

Définition 25 : *Le foncteur de cohomologie* $\bar{H}^n[q_d]$ (*resp.* $\bar{H}^n[q_c]$) *relatif à* q_d (*resp. à* q_c) *est appelé* foncteur de cohomologie demi-centrale (*resp.* cohomologie centrale), *noté* $\bar{H}^n_d$ (*resp.* $\bar{H}^n_c$). *La catégorie* $\bar{H}^n_d(G, K)$ (*resp.* $\bar{H}^n_c(G, K)$) *est appelée* catégorie de cohomologie demi-centrale (*resp.* cohomologie centrale) d'ordre n de K vers G, *où K est un complexe de $(\mathscr{A}, J_{\mathscr{A}})$ et $G \in \mathscr{A}_0$.*

Foncteurs de cohomologie sur une catégorie :

Soit $C^{\bullet}$ une catégorie et soit $\bar{G} \in \mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$ tel que $\alpha(\bar{G}) = C^{\bullet}$ et $G = p_1^{\mathscr{F}} . \bar{G}$. Soit q le foncteur vers $\mathscr{A}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$ de la sous-catégorie $\mathscr{A}_G$ ayant G pour seul élément, tel que $q(G) = \bar{G}$. Si $F \in \mathscr{A}_0$, la classe $G . \mathscr{A}_{C^{\bullet}} . F$ définit une sous-catégorie $D_{\bar{G}}(G, F)$ de $D(G, F)$, où D est le foncteur relatif à q construit dans la proposition 16. Soit $m = (F, C^{\bullet}, \varphi, F') \in \mathscr{A}$. On a

$$D(G, m)(D_{\bar{G}}(G, F)) \subset D_{\bar{G}}(G, F');$$

par suite $D(G, m)$ admet pour restriction un foncteur $D_{\bar{G}}(G, m)$ de $D_{\bar{G}}(G, F)$ vers $D_{\bar{G}}(G', F')$ et l'application $(G, m) \to D_{\bar{G}}(G, m)$ définit un $p_{\mathscr{F}}$-sous-foncteur $D_{\bar{G}}$ de D.

Théorème 10 : *$(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}}, D_{\bar{G}}, J_{C^{\bullet}})$ admet un foncteur de cohomologie $\bar{H}^n_{C^{\bullet}}[q]$ d'ordre n. Si K est un complexe d'espèces de morphismes sur $C^{\bullet}$, alors $\bar{H}^n_{C^{\bullet}}[q](G, K)$ est une sous-catégorie de $\bar{H}^n(\bar{G}, K)$. Si $S(\bar{G}) = (\hat{S}^{\bullet}, \hat{S}^{\perp})$ où $\hat{S}^{\perp}$ est un groupoïde, $\bar{H}^n_{C^{\bullet}}[q](G, K)$ est un groupoïde.*

Démonstration : Soient $C^n_{C^{\bullet}}$, $Z^n_{C^{\bullet}}$ et $B^n_{C^{\bullet}}$ les foncteurs n-cochaînes, n-cocycles et n-cobords relatifs à $(\mathscr{A}_{C^{\bullet}}, J_{C^{\bullet}})$; on a

$$C^n_{C^{\bullet}}(G, K) = C^n(G, K) \cap \mathscr{A}_{C^{\bullet}} = V$$

en posant $V = p_{\mathscr{F}}(D_{\bar{G}}(G, K))$, d'où :

$$Z^n_{C^{\bullet}}(G, K) = Z^n(G, K) \cap V$$

et

$$B^n_{C^{\bullet}}(G, K) = B^n(G, K) \cap V.$$

Comme V définit une sous-catégorie de $D(G, K(n))$, il en résulte que $Z^n_{C^{\bullet}}(G, K)$ définit une sous-catégorie $\bar{Z}^n_{C^{\bullet}}(G, K)$ de $Z^n(G, K)^{\perp}$ admettant pour sous-groupoïde la classe $\bar{B}^n(G, K) \cap \mathscr{A}_{C^{\bullet}}$ (notations théorème 9). D'après le corollaire du théorème 8, il existe donc un foncteur de cohomologie $\bar{H}^n_{C^{\bullet}}[q]$ pour $(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}}, D_{\bar{G}}, J_{C^{\bullet}})$. — Soit $\bar{\varrho}$ la relation d'équivalence bicompatible sur $\bar{Z}^n(G, K) = V'^{\perp}$ engendrée par la relation ϱ :

$g \sim g'$ si, et seulement si, il existe $(h', g', g, h) \in \square(V'^{\perp}; V', \bar{B}^n(G, K))$.

D'après le théorème 5, on a $\bar{H}^n(\bar{G}, K) = V'^{\perp}/\bar{\rho}$. Or $Z^n_{C^\bullet}(G, K)$ est 1
saturé pour ϱ, et par construction aussi pour $\bar{\varrho}$. Il en résulte que 2¶
$\bar{H}^n_{C^\bullet}[q](G, K)$ est la sous-catégorie de $\bar{H}^n(\bar{G}, K)$ formée des classes $(G, C^\bullet, \varphi, K(n))$ mod $\bar{\varrho}$. — Si de plus $\hat{S}^{\perp}$ est un groupoïde, alors $Z^n_{C^\bullet}(G, K)$ est un sous-groupoïde du groupoïde (corollaire theorème 9) $Z^n(G, K)^{\perp}$ et par suite $\bar{H}^n_{C^\bullet}[q](G, K)$ est un groupoïde.

Définition 26 : *Avec les notations du théorème* 10, $\bar{H}^n_{C^\bullet}[q]$ *est appelé* le foncteur de cohomologie d'ordre n sur $C^\bullet$ relatif à $\bar{G}$ *et* $\bar{H}^n_{C^\bullet}[q](G, K)$, la catégorie de cohomologie d'ordre n sur $C^\bullet$ de K vers G, *notée* $\bar{H}^n_{C^\bullet}(\bar{G}, K)$. *Pour tout* $G \in \mathscr{A}_0$ *on appelle* $\bar{H}^n_{C^\bullet}(G^{[2]}_d, K)$ (*resp.* $\bar{H}^n_{C^\bullet}(G^{[2]}_c, K)$) la catégorie de cohomologie demi-centrale (*resp.* centrale) d'ordre n sur $C^\bullet$ relative à G.

Remarque : Supposons $S(\bar{G}) = (\hat{S}^\bullet, \hat{S}^{\perp})$; alors la classe sous-jacente à $\bar{H}^n_{C^\bullet}(\bar{G}, K)$ est l'ensemble de cohomologie d'ordre n de K vers G, au sens de [4]; si $\hat{S}^{\perp}$ est un groupoïde, $\bar{H}^n_{C^\bullet}(\bar{G}, K)$ est le groupoïde de cohomologie d'ordre n de K vers $\bar{G}$, dans la terminologie de [4]. Le groupoïde $\bar{H}^n_{C^\bullet}(G^{[2]}_c, K)$ est le groupoïde de
cohomologie centrale de K vers G, selon la définition (donnée de 3+
façon imprécise) de [4].

6. Foncteurs de cohomologie relatifs aux applications contravariantes

Applications contravariantes :

Soit $F = (\mathscr{M}, \underline{F}, C^\bullet)$ un foncteur. Nous désignerons par $\sigma(F)$ l'espèce de structures $(C^\bullet, S, \varkappa')$ définie comme suit : Soit S la classe des couples (e, z) tels que $e \in C^\bullet_0$ et $z \in F(e)$; on a

$$\varkappa'(f, (e, z)) = (e', F(f)(z)) \text{ si, et seulement si, } f \in e' . C . e.$$

Si $\bar{\tau} = (F', \tau, F)$ définit une transformation naturelle de F vers F', alors

$$\sigma(\bar{\tau}) = (\sigma(F'), C^\bullet, \varphi, \sigma(F)), \quad \text{où } \varphi(e, z) = (e, \tau(e)(z)),$$

est une application covariante.

Soit $\underline{\mathscr{A}}$ la sous-catégorie de la catégorie des applications covariantes entre espèces de structures [1] formée des applications covariantes de la forme $(\eta', C^\bullet, \varphi, \eta)$, où $C^\bullet \in \mathscr{F}_0$, $\eta = [C^\bullet, S, \varkappa']$ et $\eta' = [C^\bullet, S', \varkappa'']$. Rappelons que $\mathscr{F}$ est une catégorie d'opérateurs à droite sur la catégorie $\theta^\bullet(\mathfrak{M})$ des triplets définissant des transformations naturelles (voir proposition 1,1 [5]) relativement à la loi de composition :

$((F', \tau, F), \Phi) = (F' \,.\, \Phi, \tau\, \Phi, F \,.\, \Phi)$ si, et seulement si, $\alpha(F) = \beta(\Phi)$.

Soit $H = (\eta', C^\bullet, \varphi, \eta) \in \underline{\mathscr{A}}$ et $\Phi \in C^\bullet \,.\, \mathscr{F}$. Soient F et F' les foncteurs de $C^\bullet$ vers $\mathscr{M}$ tels que $(C^\bullet, F)$ et $(C^\bullet, F')$ soient les couples définissant η et η' respectivement et soit (F', τ, F) le triplet définissant une transformation naturelle canoniquement associé à H (théorème 6,2 [1]). L'application covariante $\sigma((F', \tau, F)\Phi)$ appartient à $\underline{\mathscr{A}}$ et sera désignée par $H \circ \Phi$. En particulier soit $\eta = [C^\bullet, S, \varkappa']$, $\Phi = (C^\bullet, \underline{\Phi}, \hat{C}^\bullet)$ et soit π la projection canonique de S sur $C_0^\bullet$. Alors

$$\sigma(F \,.\, \Phi) = \eta \circ \Phi = [\hat{C}^\bullet, S_\Phi, \varkappa'_\Phi],$$

où S_Φ est la classe produit fibré [1] $\Phi_0 \vee \pi$ et où

$$\varkappa'_\Phi(f, (e, z)) = (e', \Phi(f)\, z)$$

si, et seulement si, $f \in e' \,.\, \hat{C} \,.\, e$ et $\pi(z) = \Phi(e)$.

Remarques : 1) $\mathscr{F}$ n'est pas une catégorie d'opérateurs à droite sur $\underline{\mathscr{A}}_0$ relativement à la loi de composition $(\eta, \Phi) \to \eta \circ \Phi$, car $\eta \circ (\Phi \,.\, \Phi')$ est une espèce de structures équivalente, mais non identique, à $(\eta \circ \Phi) \circ \Phi'$.

2) Si $\chi(\eta)$ est le foncteur d'hypermorphismes associé à η [1], alors $\chi(\eta \circ \Phi)$ est tel que

$$((\chi(\eta), v), (\Phi, \chi(\eta \circ \Phi))), \quad \text{où } v(f, (e, z)) = (\Phi(f), z),$$

1 soit un produit fibré naturalisé dans $\mathscr{F}$ (voir [1]) et $(\eta, \Phi, \eta \circ \Phi)$ est une application covariante où $\gamma(e, z) = z$.

Définition 27 : Soient $\eta = [C^\bullet, S, \varkappa']$ *et* $\hat{\eta} = [\hat{C}^\bullet, \hat{S}, \hat{\varkappa}']$ *deux espèces de structures. On dira que* $(\hat{\eta}, \Phi, \varphi, \eta)$ *est* une application
2 contravariante de η vers $\hat{\eta}$ *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) *Φ est un foncteur de $\hat{C}^\bullet$ vers $C^\bullet$.*
2) *$(\hat{\eta}, \hat{C}^\bullet, \varphi, \eta \circ \Phi)$ est un application covariante.*

La condition 2 signifie que, si π est la projection canonique de S sur $C_0^\bullet$, alors φ est une application de la classe $S_\Phi = \Phi_0 \vee \pi$

dans $\hat{S}$ telle que, si $f \in e' \,.\, \hat{C} \,.\, e$ et $\pi(z) = \Phi(e)$, on ait

$$f \varphi(e, z) = \varphi(e', \Phi(f) z).$$

Si $\Phi = (C^{\bullet}, \underline{\Phi}, \hat{C}^{\bullet})$ est un foncteur, soit $\Phi^* = (C^*, \underline{\Phi}, \hat{C}^*)$ son dual.

Proposition 18 *: Il existe une bijection canonique a_* de la classe $\mathscr{B}$ des applications contravariantes entre espèces de structures sur la classe Q_* des quintettes de la forme $(F^*, \mathscr{M}^*, \Psi^*, \Phi^*, \hat{F}^*)$, où $(\alpha(F), F)$ et* 1
$(\alpha(\hat{F}), \hat{F})$ sont des couples définissant des espèces de structures et Φ un foncteur de $\alpha(\hat{F})$ vers $\alpha(F)$.

Démonstration : Soit $\eta = [C^{\bullet}, S, \varkappa'] \in \mathscr{A}_0$; posons $a_*(\eta) = (C^{\bullet}, F)$, où $(C^{\bullet}, F)$ est le couple définissant η. Soit $m = (\hat{\eta}, \Phi, \varphi, \eta) \in \mathscr{B}$ et soient :

$$a(\eta) = (C^{\bullet}, F), \quad a(\hat{\eta}) = (\hat{C}^{\bullet}, \hat{F}) \quad \text{et} \quad a(\eta \circ \Phi) = (\hat{C}^{\bullet}, F \circ \Phi).$$ 2

Il existe une équivalence naturelle Γ de $F \,.\, \Phi$ vers $F \circ \Phi$, définie par l'application

$$f \to (F \circ \Phi(f), \gamma^{e'}, \gamma^{e}, F \,.\, \Phi(f)),$$

où $f \in e' \,.\, \hat{C} \,.\, e$ et où γ^e est la bijection $z \to (e, z)$. Comme $(\hat{\eta}, \hat{C}^{\bullet}, \varphi, \eta \circ \Phi)$ est une application covariante, il lui est associé d'une façon biunivoque une transformation naturelle Ψ de $F \circ \Phi$ vers $\hat{F}$ telle que

$$\Psi(f) = (\hat{F}(f), \varphi(e'), \varphi(e), F \circ \Phi(f)),$$

où $\varphi(e)$ est une restriction de φ. Il en résulte que $\Psi \boxdot \Gamma$ est une transformation naturelle de $F \,.\, \Phi$ vers $\hat{F}$ et par suite on a :

$$a_*(m) = (F^*, \mathscr{M}^*, (\Psi \boxdot \Gamma)^*, \Phi^*, \hat{F}^*) \in Q_*.$$

—Inversement, si

$$M = (F^*, \mathscr{M}^*, \overline{\Psi}^*, \Phi^*, \hat{F}^*) \in Q_*, \; \overline{\Psi}(e) = (\psi(e))^{\boxminus},$$

et si η et $\hat{\eta}$ sont les espèces de structures définies par $(\alpha(F), F)$ et $(\alpha(\hat{F}), \hat{F})$ respectivement, on a :

$$M = a_*(m), \quad \text{où } m = (\hat{\eta}, \Phi, \varphi, \eta) \in \mathscr{B} \text{ et}$$

où φ est l'application $(e, z) \to \psi(e)(z)$. Donc a_* est une bijection de $\mathscr{B}$ sur Q_*.

Corollaire : $\mathscr{B}$ *est une catégorie pour la loi de composition :*

$$(\hat{\eta}', \Phi', \varphi', \eta') \,.\, (\hat{\eta}, \Phi, \varphi, \eta) = (\hat{\eta}', \Phi \,.\, \Phi', \varphi' \mathbin{\blacklozenge} \varphi, \eta)$$

si, et seulement si, $\eta' = \hat{\eta}$, où $\varphi' \mathbin{\blacklozenge} \varphi\,(e, z) = \varphi'\,(e, \varphi\,(\Phi'\,(e), z))$.

En effet, Q_* définit une sous-catégorie de la catégorie longitudinale $Q^{\bullet}$ des quintettes (voir [5]) et la catégorie $\mathscr{B}$ définie dans ce corollaire est la duale de la catégorie image de Q_* par l'application
1+ tion a_*^{-1}.

Applications contravariantes p-dominées :

Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, \mathscr{H})$ un foncteur. Soit $Q^{\bullet}_{\mathscr{H}}$ la sous-catégorie de $Q^{\bullet}$ formée des quintettes

2 $$\bar{M} = (F^*, \mathscr{H}^*, \Psi^*, \Phi^*, \hat{F}^*)$$

tels que

$$p\bar{M} = ((p \,.\, F)^*, \mathcal{M}^*, \Psi', \Phi^*, (p \,.\, \hat{F})^*) \in Q_*, \text{ où } \Psi' = (\boxminus p \,.\, \Psi)^*.$$

Si $\bar{M} \in Q_{\mathscr{H}}$, il existe, d'après la proposition 18, une application contravariante $(\hat{\eta}, \Phi, \varphi, \eta) = a_*^{-1}(p\bar{M})$. En particulier, si p est fidèle, la donnée de $(\hat{F}, \Phi, \varphi, F)$ détermine entièrement le quintette $\bar{M} \in Q_{\mathscr{H}}$.

Nous supposons désormais que *p est fidèle.*

Définition 28 *: On appelle* application contravariante p-dominée de F vers $\hat{F}$ *un quadruplet* $(\hat{F}, \Phi, \varphi, F)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $(\alpha(F), F)$ *et* $(\alpha(\hat{F}), \hat{F})$ *sont des couples p-dominant des espèces de structures* η *et* $\hat{\eta}$ *respectivement.*

2) $(\hat{\eta}, \Phi, \varphi, \eta)$ *est une application contravariante.*

3) *Pour tout* $e \in \alpha(\hat{F})_0$, *il existe* $\varphi^e \in \hat{F}(e). \ \mathscr{H} \,.\, (F \,.\, \Phi(e))$ *tel que* $\underline{p}\,(\varphi^e) = \varphi\gamma^e$, *où* γ^e *est la bijection* $z \to (e, z)$, *où* $z \in p \,.\, F(e)$.

Proposition 19 *: La classe des applications contravariantes p-dominées devient une catégorie* $\mathscr{B}(p)$ *pour la loi de composition :*

$(\hat{F}', \Phi', \varphi', F') \,.\, (\hat{F}, \Phi, \varphi, F) = (\hat{F}', \Phi \,.\, \Phi', \varphi' \mathbin{\blacklozenge} \varphi, F)$ *si, et seulement si,* $F' = \hat{F}$,

et l'application $(\hat{F}, \Phi, \varphi, F) \to (\hat{\eta}, \Phi, \varphi, \eta)$ *définit un foncteur fidèle* $\pi(p)$ *de* $\mathscr{B}(p)$ *vers* $\mathscr{B}$ (corollaire prop. 18).

Démonstration : Soit $m = (\hat{F}, \Phi, \varphi, F) \in \mathscr{B}(p)$. On a $(\hat{\eta}, \Phi, \varphi, \eta) \in \mathscr{B}$, où η et $\hat{\eta}$ sont les espèces de structures sous $(\alpha(F), F)$ et $(\alpha(\hat{F}), \hat{F})$

respectivement. D'après la proposition 18, il existe

$$((p\,.\,F)^*, \mathcal{M}^*, \Psi^*, \Phi^*, (p\,.\,\hat{F})^*) = a_*\,(\hat{\eta}, \Phi, \varphi, \eta) \in Q_*.$$

Puisque p est fidèle, il en résulte qu'il existe

$$b_*\,(m) = (F^*, \mathcal{H}^*, \overline{\Psi}^*, \Phi^*, \hat{F}^*) \in Q_{\mathcal{H}}$$

tel que $\overline{\Psi}$ soit la transformation naturelle définie par l'application

$$f \to (\hat{F}\,(f), \varphi^{e'}, \varphi^e, F\,.\,\Phi\,(f)) \quad \text{si } f \in e'\,.\,\hat{C}\,.\,e. \qquad 1$$

De plus l'application $m \to b_*\,(m)$ est une bijection sur $Q_{\mathcal{H}}$. La catégorie image de $Q^{\bullet}_{\mathcal{H}}$ par la bijection b_*^{-1} est la duale de la catégorie définie dans l'énoncé.

Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, \mathcal{H})$ un foncteur d'homomorphismes saturé au-dessus de $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire $p\,(\mathcal{H}_\gamma)$ est un sous-groupoïde saturé de $\mathcal{M}$). Soit (η, F) une espèce de structures p-dominée, où $\eta = [C^{\bullet}, S, \varkappa']$. Soit Φ un foncteur de $\hat{C}^{\bullet}$ vers $C^{\bullet}$. Pour tout $e \in \hat{C}^{\bullet}_0$, il existe un et un seul $g^e \in \mathcal{H}_\gamma\,.\,(F\,.\,\Phi\,(e))$ tel que $p\,(g^e)$ soit la bijection $\gamma^e : z \to (e, z)$. L'application

$$f \to g^{e'}\,.\,(F\,.\,\Phi\,(f))\,.\,(g^e)^{-1}, \quad \text{si } f \in e'\,.\,\hat{C}\,.\,e,$$

définit un foncteur $F \circ \Phi$ de $\hat{C}^{\bullet}$ vers $\mathcal{H}$ et $(\eta \circ \Phi, F \circ \Phi)$ est une espèce de structures p-dominée. Soit de plus $M = (F', C^{\bullet}, \varphi, F)$ une application covariante p-dominée et soit η' l'espèce de structures sous $(C^{\bullet}, F')$. Pour tout $e \in C^{\bullet}_0$, il existe $\overline{\varphi}^e \in F'\,(e)\,.\,\mathcal{H}\,.\,F\,(e)$ tel que $p\,(\overline{\varphi}^e)$ soit une restriction de φ; si $e \in \hat{C}^{\bullet}_0$, posons :

$$\overline{\psi}^e = (g'^e)\,.\,\overline{\varphi}^e\,.\,(g^e)^{-1} \in F' \circ \Phi\,(e)\,.\,\mathcal{H}\,.\,F \circ \Phi\,(e), \qquad 2$$
$$\text{où } p\,(g'^e)\,(z) = (e, z).$$

Alors $(F' \circ \Phi, \hat{C}^{\bullet}, \psi, F \circ \Phi)$ est une application covariante p-dominée, que nous désignerons par $M \circ \Phi$, le symbole ψ représentant l'application $(e, z) \to (e, \varphi\,(z))$, somme des applications $p\,(\overline{\psi}^e)$.

Proposition 20 : *Soient (η, F) et $(\hat{\eta}, \hat{F})$ deux espèces de structures p-dominées. Pour que $(\hat{F}, \Phi, \varphi, F)$ soit une application contravariante p-dominée, il faut et il suffit que Φ soit un foncteur de $\alpha\,(\hat{F})$ vers $\alpha\,(F)$ et que $(\hat{F}, \alpha\,(\hat{F}), \varphi, F \circ \Phi)$ soit une application covariante p-dominée.*

En effet, il existe $\overline{\varphi}^e \in \hat{F}\,(e)\,.\,\mathcal{H}\,.\,F \circ \Phi\,(e)$ *tel que* $p\,(\overline{\varphi}^e)$ soit une restriction de φ si, et seulement si, il existe un φ^e vérifiant la condition 3 de la définition 28, car :

$$\varphi^e = \overline{\varphi}^e \,.\, g^e, \text{ où } p\,(g^e) \text{ est la bijection } \gamma^e : z \to (e, z).$$

Foncteurs de cohomologie relatifs à $\mathscr{B}\,(p_{\mathscr{F}})$:

Nous aurons à utiliser la catégorie $\mathscr{B}\,(p_{\mathscr{F}})$ des applications contravariantes entre espèces de morphismes, c'est-à-dire $p_{\mathscr{F}}$-dominées. D'après la proposition 20, $(\hat{F}, \Phi, \varphi, F) \in \mathscr{B}\,(p_{\mathscr{F}})$ est équivalent aux conditions : $F \in \mathscr{A}_0$, $\hat{F} \in \mathscr{A}_0$, Φ est un foncteur de $\alpha\,(\hat{F})$ vers $\alpha\,(F)$ et $(\hat{F}, \alpha\,(\hat{F}), \varphi, F \circ \Phi) \in \mathscr{A}$.

Soit $p_*^{\overline{\mathscr{F}}}$ le foncteur de $\mathscr{B}\,(\overline{p_{\mathscr{F}}})$ vers $\mathscr{B}\,(p_{\mathscr{F}})$ tel que

$$p_*^{\overline{\mathscr{F}}}\,(\hat{F}, \Phi, \varphi, F) = (p_1^{\mathscr{F}} \,.\, \hat{F}, \Phi, \varphi, p_1^{\mathscr{F}} \,.\, F) \text{ (not. n° 5).}$$

Soit $\mathscr{B}'$ une sous-catégorie de $\mathscr{B}\,(p_{\mathscr{F}})$ et soit $\hat{q}$ un foncteur de $\mathscr{B}'$ vers $\mathscr{B}\,(\overline{p_{\mathscr{F}}})$ tel que $p_*^{\overline{\mathscr{F}}} \,.\, \hat{q} = \mathscr{B}'$.

Soit $\mathscr{C}$ la sous-catégorie de la catégorie $\mathscr{B}' \times \mathscr{K}\,(\mathscr{A}, J_{\mathscr{A}})^*$ formée des couples

$$((\hat{G}, \Phi, \varphi, G), (K, \tau, K'))$$

vérifiant les conditions suivantes :

1) $(\hat{G}, \Phi, \varphi, G) \in \mathscr{B}'$, où $\Phi = (C^\bullet, \underline{\Phi}, \hat{C}^\bullet)$;

2) K est un complexe sur $C^\bullet$, K' est un complexe sur $\hat{C}^\bullet$ et on a

$$\tau\,(n) = (K\,(n),\ \Phi,\ \varphi_n,\ K'\,(n)) \text{ pour tout } n \in Z.$$

Les unités de $\mathscr{C}$ sont identifiées aux couples (G, K), où $G \in \mathscr{B}'_0$ et K est un complexe d'espèces de morphismes sur $\alpha\,(G)$.

Théorème 11 *: Pour tout $n \in Z$, il existe un foncteur $\hat{H}^n$ de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{F}$ tel que $\hat{H}^n\,(G, K) = \hat{H}^n_{C^\bullet}\,(\hat{q}\,(G), K)$, si $(G, K) \in \mathscr{C}_0$.*
Démonstration : Soit $c = ((G', \Phi, \varphi, G), (K, \tau, K')) \in \mathscr{C}$. Soient :

$$\tau\,(n) = (F_n, \Phi, \varphi_n, F'_n),\ K\,(n-1, n) = (F_{n-1}, C^\bullet, \partial_n, F_n)$$

$$\text{et} \quad K'\,(n-1, n) = (F'_{n-1}, \hat{C}^\bullet, \partial'_n, F'_n).$$

Posons :

$$\hat{K}\,(n-1, n) = K\,(n-1, n) \circ \Phi = (F_{n-1} \circ \Phi, \hat{C}^\bullet, \hat{\partial}_n, F_n \circ \Phi),$$

où $\hat{\partial}_n$ est l'application $(e, z) \to (e, \partial_n\,(z))$, si $z \in F_n\,(\Phi\,(e))$.

L'application $(n-1, n) \to \hat{K}(n-1, n)$ définit un complexe $\hat{K}$ d'espèces de morphismes sur $\hat{C}^{\bullet}$, noté aussi $K \circ \Phi$. Pour tout $n \in Z$, posons $\hat{\tau}(n) = (F_n \circ \Phi, \hat{C}^{\bullet}, \hat{\varphi}_n, F'_n)$, où $\hat{\varphi}_n$ est l'application

$$z' \to (e, \varphi_n(z')), \text{ où } z' \in F'_n(e).$$

On a $\hat{\tau}(n) \in \mathscr{A}_{\hat{C}^{\bullet}}$ et, si $z' \in F'_n(e)$,

$$\hat{\partial}_n \hat{\varphi_n}(z') = (e, \partial_n \varphi_n(z')) = (e, \varphi_{n-1} \partial'_n(z')) = \hat{\varphi}_{n-1} \partial'_n(z');$$

d'où $(\hat{K}, \hat{\tau}, K') \in \mathcal{K}(\mathscr{A}_{\hat{C}^{\bullet}}, J_{\hat{C}^{\bullet}})$. L'application $m \to m \circ \Phi$, où $m \in \mathscr{A}_{C^{\bullet}}$, définit un foncteur $\tilde{\Phi}$ de $\mathscr{A}_{C^{\bullet}}$ vers $\mathscr{A}_{\hat{C}^{\bullet}}$ tel que $\tilde{\Phi}(J_{C^{\bullet}}) \subset J_{\hat{C}^{\bullet}}$. Il en 1
résulte que l'on a :

$$\tilde{\Phi}(Z^n_{C^{\bullet}}(G, K)) \subset Z^n_{\hat{C}^{\bullet}}(G \circ \Phi, \hat{K})$$

et

$$\tilde{\Phi}(B^n_{C^{\bullet}}(G, K)) \subset B^n_{\hat{C}^{\bullet}}(G \circ \Phi, \hat{K})$$

(notations du théorème 10). Posons :

$$\bar{G} = \hat{q}(G) \text{ et } S(\bar{G}) = (\hat{S}^{\bullet}, \hat{S}^{\perp}).$$

D'après la démonstration du théorème 10, $Z^n_{C^{\bullet}}(G, K)$ définit une sous-catégorie $\mathsf{Z}^n_{C^{\bullet}}(G, K)$ de $\mathscr{F}(\hat{S}^{\bullet}, S(F_n)^{\bullet})^{\perp}$. La restriction de $\tilde{\Phi}$ à $\mathsf{Z}^n_{C^{\bullet}}(G, K)$ définit un foncteur $\tilde{\Phi}'$ de $\mathsf{Z}^n_{C^{\bullet}}(G, K)$ vers la catégorie $\mathsf{Z}^n_{\hat{C}^{\bullet}}(G \circ \Phi, \hat{K})$. Soit $\mathscr{A}'$ la sous-catégorie de $\mathscr{A}$ engendrée par la classe $\{\hat{m}\}$, où $\hat{m} = (G', \hat{C}^{\bullet}, \varphi, G \circ \Phi)$, et soit q' le foncteur de $\mathscr{A}'$ vers $\mathscr{B}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$ tel que 2

$$q'(\hat{m}) = (\hat{q}(G'), \hat{C}^{\bullet}, \varphi, \bar{G} \circ \Phi).$$

Soit D le foncteur de $\mathscr{A}' \times \mathscr{A}^*$ vers $\mathscr{F}$ correspondant à ces données d'après la proposition 16. En vertu du théorème 9, $(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}}, D, J_{\mathscr{A}})$ admet un foncteur n-cocycle $\bar{Z}^n$ et un foncteur n-cobord $\bar{B}^n$. Si

$$\hat{c} = ((G', \hat{C}^{\bullet}, \varphi, G \circ \Phi), (\hat{K}, \hat{\tau}, K')),$$

alors $\bar{Z}^n(\hat{c})$ est un foncteur de $\mathsf{Z}^n(G \circ \Phi, \hat{K})$ vers $\mathsf{Z}^n(G', K')$ tel que

$$\bar{Z}^n(\hat{c})(Z^n_{\hat{C}^{\bullet}}(G \circ \Phi, \hat{K})) \subset Z^n_{\hat{C}^{\bullet}}(G', K'),$$

car

$$\bar{Z}^n(\hat{c})(G \circ \Phi, \hat{C}^{\bullet}, \psi, F_n \circ \Phi) = (G', \hat{C}^{\bullet}, \varphi \,.\, \psi \,.\, \hat{\varphi}_n, F'_n).$$

Comme $Z^n_{\hat{C}^\bullet}(G \circ \Phi, \hat{K})$ et $\bar{Z}^n_{\hat{C}^\bullet}(G', K')$ sont des sous-catégories de $Z^n(G \circ \Phi, \hat{K})$ et de $Z^n(G', K')$ respectivement, il existe un foncteur X de $Z^n_{\hat{C}^\bullet}(G \circ \Phi, \hat{K})$ vers $Z^n_{\hat{C}^\bullet}(G', K')$ restriction de $Z^n(\hat{c})$. De plus on a

$$X(B^n_{\hat{C}^\bullet}(G \circ \Phi, \hat{K})) \subset B^n_{\hat{C}^\bullet}(G', K').$$

Par conséquent $X \,.\, \tilde{\Phi}'$ est un foncteur de $\bar{Z}^n_{C^\bullet}(G, K)$ vers $Z^n_{\hat{C}^\bullet}(G', K')$ appliquant $B^n_{C^\bullet}(G, K)$ dans $B^n_{\hat{C}^\bullet}(G', K')$; nous le désignerons par $\hat{Z}^n(c)$. Comme $\bar{H}^n_{C^\bullet}(\bar{G}, K)$ est la catégorie quotient de $Z^n_{C^\bullet}(G, K)$ par le sous-groupoïde de $Z^n_{C^\bullet}(G, K)$ engendré par $B^n_{C^\bullet}(G, K) \cap Z^n(G, K)_\gamma$, il résulte de la proposition 8 qu'il existe un foncteur $\hat{H}^n(c)$, quotient de $\hat{Z}^n(c)$, de $\bar{H}^n_{C^\bullet}(\bar{G}, K)$ vers $\bar{H}^n_{\hat{C}^\bullet}(\hat{q}(G'), K')$.

— Montrons que l'application $\underline{\hat{Z}}^n : c \to \hat{Z}^n(c)$ définit un foncteur de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{F}$. En effet, soit aussi

$$c' = ((G'', \Phi', \varphi', G'), (K', \tau', K'')) \in \mathscr{C}.$$

Soit $m = (G, C^\bullet, \psi, F_n) \in Z^n_{C^\bullet}(G, K)$. Posons

$$\hat{Z}^n(c)(m) = (G', \hat{C}^\bullet, \psi', F'_n)$$
$$\hat{Z}^n(c') \,.\, \hat{Z}^n(c)(m) = (G'', \hat{C}^\bullet, \psi_1, F''_n)$$
$$\hat{Z}^n(c' \,.\, c)(m) = (G'', \hat{C}^\bullet, \psi_2, F''_n).$$

On a

$$\psi'(z') = \varphi(e, \psi\, \varphi_n(z')), \quad \text{si } z' \in F'_n(e).$$

Si $z'' \in F''_n(e)$, on obtient :

$$\psi_1(z'') = \varphi'(e, \varphi(\Phi'(e), \psi\varphi_n\, \varphi'_n(z''))) =$$
$$= \varphi' \blacklozenge \varphi(e, \psi\, \varphi_n\, \varphi'_n(z'')) = \psi_2(z'').$$

Il en résulte

$$\hat{Z}^n(c') \,.\, \hat{Z}^n(c) = \hat{Z}^n(c' \,.\, c),$$

et par suite $\underline{\hat{Z}}^n$ définit un foncteur $\hat{Z}^n$ de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{F}$. D'après le corollaire de la proposition 8, l'application $c \to \hat{H}^n(c)$ définit un $p_{\mathscr{F}}$-foncteur quotient $\hat{H}^n$ de $\hat{Z}^n$.

Soit $J_{\mathscr{B}}$ l'idéal de $\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})$ formé des applications contravariantes

$$(F', \Phi, \varphi, F) \in \mathscr{B}(p_{\mathscr{F}}) \text{ telles que } \varphi(S(F \circ \Phi)) \subset S(F')^\bullet_0,$$

c'est-à-dire telles que $(F', \alpha(F'), \varphi, F \circ \Phi) \in J_{\mathscr{A}}$.

Théorème 12 : *Il existe un foncteur D_* de $\mathscr{B}' \times \mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})^*$ vers $\mathscr{F}$ tel que $p_{\mathscr{F}} . D_*$ soit une restriction de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})}$ et $(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}}, D_*, J_{\mathscr{B}})$ admet un foncteur de cohomologie d'ordre n.*

Démonstration : Soient :

$$m = (F, \Phi, \varphi, \hat{F}) \in \mathscr{B}(p_{\mathscr{F}}), m' = (G', \Phi', \varphi', G) \in \mathscr{B}',$$

$C^\bullet = \alpha(G)$ et $\hat{C}^\bullet = \alpha(G')$. Posons $\bar{G} = \hat{q}(G)$ et $\bar{G}' = \hat{q}(G')$. Soit M_Ψ la classe des $(G, \Psi, \psi, F) \in \mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})$ tels que Ψ soit fixé. L'application

$$i_\Psi : (G, \Psi, \psi, F) \to (G, C^\bullet, \psi, F \circ \Psi)$$

est une bijection de M_Ψ sur $G . \mathscr{A}_{C^\bullet} . (F \circ \Psi)$. Soit encore $D_{\bar{G}}(G, F \circ \Psi)$ la catégorie construite au n° 5 (avant théorème 10), qui admet $i_\Psi(M_\Psi)$ pour classe sous-jacente. Soit $M_\Psi^\perp$ la catégorie image de $D_{\bar{G}}(G, F \circ \Psi)$ par i_Ψ^{-1}. On obtient une catégorie $D_*(G, F)$ somme des catégories $M_\Psi^\perp$ en munissant la classe $G . \mathscr{B}(p_{\mathscr{F}}) . F$ de la loi de composition :

$$(G, \Psi', \psi', F) \perp (G, \Psi, \psi, F) = (G, \Psi, \psi' \perp \psi, F)$$
$$\text{si, et seulement si}, \Psi = \Psi' \quad \text{et} \quad \alpha^\perp \psi' = \beta^\perp \psi.$$

L'application $U \to U \circ \Phi'$ définit un foncteur Y de $D_{\bar{G}}(G, F \circ \Psi)$ vers

$$D_{\bar{G} \circ \Phi'}(G \circ \Phi', (F \circ \Psi) \circ \Phi').$$

Si $u = (G, \Psi, \psi, F) \in M_\Psi$, on a

$$u' = \mathrm{Hom}(m', m)(u) = (G', \Phi . \Psi . \Phi', \varphi' \dagger \psi \dagger \varphi, \hat{F})$$

et

$$i_{\Phi.\Psi.\Phi'}(u') = (G', \hat{C}^\bullet, \varphi' \dagger \psi \dagger \varphi, \hat{F} \circ (\Phi . \Psi . \Phi'))$$
$$= i_{\Phi'}(m') . Y(G, C^\bullet, \psi, F \circ \Psi) . m'',$$

où $m'' = ((F \circ \Psi) \circ \Phi', \hat{C}^\bullet, \chi, \hat{F} \circ (\Phi . \Psi . \Phi')) \in \mathscr{A}$ est l'application covariante telle que

$\chi(e, z) = (e, (\Phi'(e), \varphi(\Psi . \Phi'(e), z)))$ si $z \in \hat{F}(\Phi . \Psi . \Phi'(e))$. D'après le théorème 10, l'application $u'' \to i_{\Phi'}(m') . u'' . m''$ définit un foncteur $Y' = D_{\bar{G}}(i_{\Phi'}(m'), m'')$ de $D_{\bar{G} \circ \Phi'}(G \circ \Phi', (F \circ \Psi) \circ \Phi')$ vers $D_{\bar{G}'}(G', \hat{F}')$, où $\hat{F}' = \hat{F} \circ (\Phi . \Psi . \Phi')$. Ainsi $Y' . Y$ est un foncteur de $D_{\bar{G}}(G, F \circ \Psi)$ vers $D_{\bar{G}'}(G', \hat{F}')$. Puisque

$$\mathrm{Hom}(m', m)(u) = i_{\Phi.\Psi.\Phi'}^{-1} \underline{Y}' \underline{Y} i_\Psi(u),$$

on en déduit que l'application $\mathrm{Hom}(m', m)$ définit un foncteur

$D_*(m', m)$ de $D_*(G, F)$ vers $D_*(G', \hat{F})$. Comme $p_{\mathscr{F}}$ est fidèle et que $p_{\mathscr{F}} . D_*(m', m) = \mathrm{Hom}(m', m)$, l'application

$$(m', m) \to D_*(m', m)$$

définit un foncteur D_* de $\mathscr{B}' \times \mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})^*$ vers $\mathscr{F}$.

—Soit

$$K \in \mathscr{K}(\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}}), J_{\mathscr{B}}), \quad G \in \mathscr{B}'_0 \quad \text{et} \quad \bar{G} = \hat{q}(G).$$

D'après le théorème 8, il suffit de montrer que la classe $Z^n_*(G, K)$ des n-cocycles de K vers G définit une sous-catégorie de $D_*(G, K(n))$. En effet, soit :

$$K(n, n+1) = (F_n, \Phi, \varphi_{n+1}, F_{n+1}) = \partial_{n+1} \text{ et } u = (G, \Psi, \psi, K(n)) \in \mathscr{B}(p_{\mathscr{F}}).$$

Posons $M'_\Psi = Z^n_*(G, K) \cap M_\Psi$; on a $u \in M'_\Psi$ si, et seulement si, $i_{\Phi.\Psi}(u . \partial_{n+1}) \in J_{\mathscr{A}}$, de sorte que la restriction de i_Ψ à M'_Ψ est une bijection de M'_Ψ sur la sous-classe N'_Ψ de $D_{\bar{G}}(G, F_n \circ \Psi)$ formée des U tels que $U.m \in J_{\mathscr{A}}$, où $m = i_\Phi(\partial_{n+1}) \circ \Psi$. Etant donné que $D_{\bar{G}}(G, m)$ est un foncteur, un raisonnement analogue à celui fait au cours de la démonstration du théorème 10 prouve que N'_Ψ définit une sous-catégorie de $D_{\bar{G}}(G, F_n \circ \Psi)$. Il s'ensuit que M'_Ψ définit une sous-catégorie de $D_*(G, K)$. Donc $Z^n_*(G, K)$ définit une sous-catégorie de $D^*(G, K)$, somme des catégories M'_Ψ lorsque Ψ varie. Ceci achève la démonstration du théorème 12.

1+

Corollaire : Soit $G \in \mathscr{B}'_0$ et $\hat{q}(G) = (\hat{S}^\cdot, \hat{S}^\perp)$, où $\hat{S}^\perp$ est un groupoïde. Si K est un complexe de $(\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}}), J_{\mathscr{B}})$, alors $\bar{H}^n_*(G, K)$ est un groupoïde, où $\bar{H}^n_*$ est le foncteur de cohomologie d'ordre n relatif à $(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}}, D_*, J_{\mathscr{B}})$.

En effet, si $F \in \mathscr{B}'_0$, alors $D_{\hat{q}(G)}(G, F \circ \Phi)$ est un groupoïde
2 pour tout $\Phi \in \mathscr{F}$, d'après la proposition 11, de sorte que $D_*(G, F)$ est un groupoïde. Comme au théorème 10, on en déduit que $Z^n_*(G, K)$ est un groupoïde, et par suite sa catégorie quotient $\bar{H}^n_*(G, K)$ est aussi un groupoïde.

Définition 29 : Avec les notations du théorème 12, le foncteur de cohomologie $\bar{H}^n_*$ d'ordre n relatif à $(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}}, D_*, J_{\mathscr{B}})$ sera appelé foncteur de cohomologie d'ordre n relatif à $(\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}}), \hat{q})$ *et noté* $\bar{H}^n_*(\hat{q})$.

Soit $\mathscr{B}''$ une sous-catégorie de $\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})$ et soit $\tilde{q}$ un foncteur de $\mathscr{B}''$ vers $\mathscr{B}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$; posons $\pi = p^{\overline{\mathscr{F}}}_* . \tilde{q}$. Soit $\hat{q}_m$ le foncteur de la sous-catégorie de $\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})$ engendrée par $\{\pi(m)\}$, où $m \in \mathscr{B}''$, vers $\mathscr{B}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$ tel que $\hat{q}_m(\pi(m)) = \tilde{q}(m)$. L'application

$$(m, (K', \tau, K)) \to \bar{H}^n_*(\hat{q}_m)(\pi(m), (K', \tau, K))$$

définit un foncteur, noté $\bar{H}^n_*(\tilde{q})$, de $\mathscr{B}' \times \mathscr{K}(\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}}), J_{\mathscr{B}})^*$ vers $\mathscr{F}$, que nous appellerons aussi *foncteur de cohomologie d'ordre n relatif à $\tilde{q}$*. De même, en désignant par $\hat{H}^n(\hat{q}_m)$ le foncteur de $\mathscr{C}(\hat{q}_m)$ vers $\mathscr{F}$ relatif à $\hat{q} = \hat{q}_m$ construit dans le théorème 11, l'application

$$(m, (K', \tau, K)) \to \hat{H}^n(\hat{q}_m)(\pi(m), (K', \tau, K))$$

définit un foncteur d'une catégorie $\mathscr{C}(\tilde{q})$ vers $\mathscr{F}$ que nous représentons par $\hat{H}^n(\tilde{q})$.

Exemple : Soit $\mathscr{B}_d$ (resp. $\mathscr{B}_c$) la sous-catégorie de $\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})$ formée des applications contravariantes $(G', \Phi, \varphi, G) \in \mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})$ telles que

$$(G', C^{\bullet}, \varphi, G \circ \Phi) \in \mathscr{A}^d \text{ (resp. } \in \mathscr{A}^c)$$

(voir fin n° 5). L'application

$$(G', \Phi, \varphi, G) \to (G_d, \Phi, \varphi_d, G_d) \text{ (resp. } \to (G_c, \Phi, \varphi_c, G_c)),$$

où G_d et G_c sont respectivement le demi-centre et le centre de G et où φ_d et φ_c sont des restrictions de φ, définit un foncteur $\hat{q}_d$ de $\mathscr{B}_d$ (resp. $\hat{q}_c$ de $\mathscr{B}_c$) vers $\mathscr{B}(\overline{p_{\mathscr{F}}})$ (car $(G \circ \Phi)_d = G_d \circ \Phi$). Le foncteur de cohomologie $\bar{H}^n_*(\hat{q}_d)$ sera appelé *foncteur de cohomologie demi-centrale d'ordre n relatif à $\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})$ et* le foncteur $\bar{H}^n_*(\hat{q}_c)$, foncteur de cohomologie *centrale* d'ordre n relatif à $\mathscr{B}(p_{\mathscr{F}})$.

Conclusion

Supposons, avec les notations du n° 4, que $(\mathscr{H}', \mathscr{J}, D, J)$ admette un foncteur de cohomologie d'ordre n, noté $\bar{H}^n$, et soit $S^{\bullet}$ une catégorie.

Le problème qui se pose est celui de la construction d'un foncteur R de $S^{\bullet}$ vers $\mathscr{K}(H^{\bullet}, J)$ (foncteur « résolution »). S'il existe un tel foncteur, le foncteur $\bar{H}^n.(H''^{\bullet} \times R^*)$ sera appelé *foncteur de cohomologie d'ordre n de $S^{\bullet}$ vers $(\mathscr{H}', \mathscr{J}, D, J)$*. Nous réservons l'étude de cette question pour un autre article. Rappelons toutefois (voir plus de détails dans [2]) le résultat suivant, relatif au cas où $S^{\bullet} = \mathscr{F}$.

Soit $C^{\bullet}$ une catégorie. On appelle n-simplexe de $C^{\bullet}$ une suite $(f_n, \ldots, f_1, e)$, telle que $(f_n, \ldots, f_1)$ soit un chemin du graphe sous-jacent à $C^{\bullet}$ (voir [1]) et que $e = \alpha(f)$. A partir de l'application b_n : $(f_n, \ldots, f_1, e) \to \beta(f_n)$ de la classe des n-simplexes de $C^{\bullet}$ dans C on construit une espèce de morphismes sur $C^{\bullet}$, notée K_n, telle que $K_n(e)$ soit un quotient du module libre engendré par $\bar{b}_n^1(e)$. On définit une résolution libre (voir déf. dans [4])

$$R(C^{\bullet}) = (K_{-1}, K_n, \partial_n)_{n \geqslant 0}$$

de Z sur $C^{\bullet}$, appelée *résolution normalisée canonique de* $C^{\bullet}$. On en déduit un foncteur résolution R de $C^{\bullet}$ vers $\mathscr{K}(\mathscr{A}, J_{\mathscr{A}})$, et par suite un foncteur de cohomologie de $\mathscr{F}$ vers $(\mathscr{F}_g, J_{\mathscr{F}}, D, J_{\mathscr{A}})$, à savoir le foncteur $\bar{H}^n_{c\cdot\cdot}(\mathscr{A}_c \times R^*)$. De plus on obtient :

Théorème 13 : *Il existe un foncteur* $\hat{H}^n_c$ *de* $\mathscr{B}_c$ *vers* $\mathscr{F}$ *tel que* $\hat{H}^n_c(F)$ *soit la catégorie de cohomologie centrale de* $R(\alpha(F))$ *vers* F.

En effet, l'application

$$(\bar{G}, \Phi, \varphi, G) \to ((\bar{G}, \Phi, \varphi, G), R(\Phi))$$

définit un foncteur $\hat{R}$ de $\mathscr{B}_c$ vers la sous-catégorie $\mathscr{C}(\hat{q}_c)$ de $\mathscr{B}_c \times \mathscr{K}(\mathscr{A}, J_{\mathscr{A}})^*$ et le foncteur cherché est le foncteur $\hat{H}^n(\hat{q}_c) . \hat{R}$ (voir n° 6 fin).

Nous montrerons dans un autre article que le foncteur $\hat{H}^n_c$ a les propriétés d'un « foncteur de cohomologie » usuel et qu'il permet, en particulier, de définir la cohomologie d'une catégorie à valeurs dans une catégorie abélienne. De plus nous appliquerons nos
1 résultats à l'étude de la cohomologie non abélienne.

RÉFÉRENCES

[1] Catégories et structures, multigraphié Paris (1964) et sous presse (Dunod).
[2] Catégories structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 1963, 80, p. 349-426.
2 [3] C.R.A.S. t. 259 (1964) p. 2050 et t. 260 (1965) p.
[4] C.R.A.S. t. 258, 1964, p. 2461 et t. 259, 1964, p. 1683.
[5] Catégories structurées : III Quintettes et applications covariantes, *Sém. Topo. et Géom. diff.* (Ehresmann) Paris, V (1963).
[6] EILENBERG-MAC LANE, General theory of natural equivalences, Trans. A.M.S. 58 (1945), p. 231-294.
[7] MAC LANE, Homology, Springer, Berlin (1963).

Note ajoutée sur épreuves : Certains résultats de cet article (en particulier : sous-foncteurs et foncteurs quotient, catégorie quotient d'une catégorie par une sous-catégorie) ont été incorporés dans la version imprimée de [1] (Paris, 1965), alors qu'ils ne figuraient pas dans le texte multigraphié.

UNIVERSITY OF KANSAS AT LAWRENCE *Technical Report 10, July, 1966*
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

/93/

INTRODUCTION TO THE THEORY OF STRUCTURED CATEGORIES

by Charles EHRESMANN

INTRODUCTION.

If p is a functor from a category $C^{\cdot}$ toward a category $\hat{C}^{\cdot}$, a unit s of $C^{\cdot}$ is called a *p-structure on* $p(s)$. If $\hat{C}^{\cdot}$ is a category $\mathfrak{M}$ of mappings, p-structures on classes are usually defined by the construction of a typical functor (CS, Appendix II) from a sub-category of $\mathfrak{M}$ toward $\mathfrak{M}$. In 1+
many cases, it may be shown that the p-structures obtained by such a construction are equivalent to structures defined by using only «functorial» properties of the category $\mathfrak{M}$, so that «similar» structures can also be defined when $\mathfrak{M}$ is replaced by a category $H^{\cdot}$. So an important problem is the following one:

From now on, we suppose that p is a functor from $C^{\cdot}$ toward the category $\mathfrak{M}$ of mappings associated to a universe $\mathfrak{M}_0$. How to define «canonically», for a category $H^{\cdot}$, the notion of a *structure of kind* p *over* $H^{\cdot}$ (or more strictly on a unit e of $H^{\cdot}$), so that a p-structure be a structure of kind p over $\mathfrak{M}$? This problem may be reformulated: Let $\hat{\mathfrak{F}}$ be the category of functors corresponding to a universe $\hat{\mathfrak{M}}_0$ admitting $\mathfrak{M}_0$ as en element. Is it possible to construct a «canonical» functor $y(p)$ from a sub-category $\mathcal{Y}(p)$ of $\hat{\mathfrak{F}}$ toward $\hat{\mathfrak{F}}$ and a natural transformation defined by a triple $(J, t, y(p))$, where J is the injection functor from $\mathcal{Y}(p)$ toward $\hat{\mathfrak{F}}$ and where $t(\mathfrak{M}) = p$?

Depending on the properties of the functor p, three main methods are available.

1) If e is a unit of a category $H^{\cdot}$, let $\eta_e^{H^{\cdot}}$ be the canonical functor $h \to Hom(e,h)$ from the dual category H^* of $H^{\cdot}$ toward $\mathfrak{M}$ which associates to a unit e' of $H^{\cdot}$ the class $e.H.e'$ of morphisms with source e'

and target e .

A functor $\eta_e^{H^\cdot}(p)$ from H^* toward $C^\cdot$ such that $p.\eta_e^{H^\cdot}(p) = \eta_e^{H^\cdot}$ is called *a structure of* $H^\cdot$*-element of* $C_0^\cdot$ *on* e . This method was outlined in [4] and [7]. But in that way a p-structure s corresponds to a structure of $\mathfrak{M}$-element of $C_0^\cdot$ on $p(s)$ if, and only if, p has the property :

If s is a unit of $C^\cdot$, for each class M' there exists a «canonical» p-structure on the class of mappings from M' into $p(s)$.

This property is satisfied if p is the forgetting functor from the category of homomorphisms between some elementary algebraic structures (groups, rings,...) or from the category of functors or neofunctors. However, it is not fullfilled for many usual functors p such as the forgetting functor from
1 the category of continuous mappings or from the category of homomorphisms between fields.

2) Suppose that a p-structure s be characterized by a sub-multiplicative graph $s_{\mathfrak{M}}$ of $\mathfrak{M}$ satisfying some «functorial» axioms (this will be made precise in the section 1) and that q be a functor from a category $H^\cdot$ toward $\mathfrak{M}$. Then a *q-structuration of* s may be defined as a section of q over $s_{\mathfrak{M}}$ compatible with the axioms. Algebraic structures (elementary or not) are so defined. In particular let $p_{\mathcal{F}}$ be the forgetting functor from the category of functors corresponding to $\mathfrak{M}_0$. A $p_{\mathcal{F}}$-structure is a category $S^\cdot$ such that $S \in \mathfrak{M}_0$; to $S^\cdot$ is associated the sub-multiplicative graph $S^\cdot_{\mathfrak{M}}$ of $\mathfrak{M}$ generated by the law of composition of $S^\cdot$ and its mappings source and target ; the axioms of a category are expressed «functorially» in terms of $S^\cdot_{\mathfrak{M}}$ and of some fiber products of elements of $S^\cdot_{\mathfrak{M}}$ (this is mentioned in [4]). The q-structurations of $S^\cdot$ correspond to the q-structured categories defined in [6] when q is a homomorphisms functor with finite products. This method was first devised to get topological and differentiable categories in [8], and generalized in [5]. If q is equivalent to the canonical functor toward $\mathfrak{M}$ associated to a generator of the category $H^\cdot$, the q-structured categories correspond biunivocally to the structures of $H^\cdot$-element of $C_0^\cdot$.

3) The second method leads to a more abstract approach : Suppose that

there exists a bijection from the class of p-structures onto the class of neofunctors from a multiplicative graph $U^\bullet$ toward $H^\bullet$ satisfying some «functorial» properties (with the definition of the section 1: onto the class of homomorphisms between a t-sketch over $U^\bullet$ and a t-sketch over $\mathfrak{M}$). Then we define a *structure of kind* p over $H^\bullet$ as a neofunctor from $U^\bullet$ toward $H^\bullet$ satisfying «similar» properties. Such a definition $^{(*)}$ will result from the section 1. It admits as special cases the definition of a structure of monoid on an object of $H^\bullet$ given in [12], and its refinements for other elementary algebraic structures (such as groups in [11], and the general intrinsic notion in [9] of *algebras of type* T *over* $H^\bullet$). Remark that a category $S^\bullet$ is not an «elementary» algebraic structure (in the meaning of [9]) on S, but only on the family of classes $(e.S.e')_{(e,e')}$ where e and e' are two units of $S^\bullet$. It follows that the type $T_{S_0^\bullet}$ of a category depends on the class of units $S_0^\bullet$ of $S^\bullet$ and that the structures of kind $p\mathcal{F}$ over $H^\bullet$ (i.e. the $(H^\bullet, H^*, VH^\bullet)$-categories defined in the section 5) do not correspond to the algebras of type $T_{S_0^\bullet}$ over $H^\bullet$. 1+

Of course there exist functors p which do not fulfill the property listed in 3; indeed, in the definition of p, more peculiar aspects of the category $\mathfrak{M}$ might be used, for instance the fact that each unit of $\mathfrak{M}$ is the sum of «atoms». But all the usual functors, including the forgetting functors θ from the category of continuous mappings and p_C from the category 2
of homomorphisms between fields (which were excluded in 1) satisfy these conditions. For example, to the fields is associated a multiplicative graph $U_C^\bullet$, which is obtained by gluing together the sketches relative to a group and a demi-group and by adding some morphisms to translate the distributivity axiom; the properties will include one requiring that if u, $u_0^\bullet$ and u^* are respectively the units of $U_C^\bullet$ such that

$$F(u) = K, \quad F(u_0^\bullet) = \{0\}, \quad F(u^*) = K - \{0\}$$

when F is the neofunctor defining the field $(K, ., +)$, then u be mapped

*) More precisely, with the notations of page 13: Suppose that there exist $\bar{\mu} \in \mathcal{S}_0^{(\mu,\mu_1)}$, $\lambda \in (\sigma(t)(\mu_1))_0^L$ and $\Gamma \in \hat{\mathfrak{F}}_\gamma$ such that $p.\Gamma = \Pi^L . p_\lambda(\bar{\mu})$, where Π^L is the $\{L\}$ product functor from $\mathfrak{M}^L$ toward $\mathfrak{M}$. Then we call structure of kind p over $H^\bullet$ (or on a family of units of $H^\bullet$) a $p_\lambda(\bar{\mu})$-structure, when $\bar{\mu}' \in \mathcal{S}^{(\mu,\mu_1)}$ and $\sigma(t)(\bar{\mu}') = H^\bullet$.

by a structure $\hat{F}$ of kind p_C onto the sum of $\hat{F}(u_0^{\cdot})$ and of $\hat{F}(u^*)$. When p is a functor satisfying both the conditions 1 and 3, underlying a structure of kind p over $H^{\cdot}$ there is a $H^{\cdot}$-element of $C_0^{\cdot}$.

To a functor p may be associated several sketches. We will not study here the problem of equivalence of structures defined by two different sketches. Such a problem has been strudied for algebras of type T over $\mathfrak{M}$ in [10], for algebras of type T over $H^{\cdot}$ in [9]. We will concentrate our attention on the «smallest» sketches, for they are the most interesting ones to get structures easily handled (while the «types»» which are the greatest
1 ones, are more suitable for logical purposes). So we will define the «idea
of the structure» and the first section is devoted to the outline of an «ideology». This paves the way for a general theory of structures defined by an
2 idea, theory which will be developed in another paper.

In the subsequent sections, we will define the ideas of a quasi-multiplicative graph, of a quasi-category, of a category and of a groupoid. Though the sketches are easily obtained from the remark of 2, our main target will be to define «the smallest» idea. So a $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-category, where H^{ι} is a sub-class of monomorphisms of $H^{\cdot}$ and $VH^{\cdot}$ a class of naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber products, will be defined as a neofunctor toward $H^{\cdot}$ from a multiplicative graph admitting only 3 units and 6 morphisms, the «axioms» to be satisfied by these elements being abstract formulations of the axioms of a category given in [CS]. A $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-category is also a $(H^{\cdot}, H^{\iota})$-quasi-multiplicative graph satisfying supplementary axioms.

In the last two sections, we compare the notions of $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-categories on one side, of q-structured categories and of structures of $H^{\cdot}$-category on the other side. We show that the category of $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-functors is an enlargement of the category of q-structured functors, if q is a functor from $H^{\cdot}$ toward $\mathfrak{M}$ (if a category is an enlargement of another one, both are equivalent). The structures of $H^{\cdot}$-categories correspond isomorphically to the $(H^{\cdot}, R_g(H^{\cdot}), VH^{\cdot})$-categories when $H^{\cdot}$ is a category with finite fiber products and $VH^{\cdot}$ the class associated to a fiber product mapping. In general, they correspond isomorphically to the $(\hat{H}^{\cdot}, R_g(H^{\cdot}), V\hat{H}^{\cdot})$-categories, where $\hat{H}^{\cdot}$ is a category obtained from $H^{\cdot}$ by «adding» fiber products.

The terminology and notations are those of «Catégories et Structures» which is referred to as CS. In particular, if $U^{\bullet}$ is a multiplicative graph, we denote by $U^{\bullet}_0$ the class of its units, by α and β its mappings source and target, by $C^{\bullet} * C^{\bullet}$ the class of its composable couples. A mapping f from a class M into a class N is denoted by the triple $(N, \underline{f}, M)$, where $\underline{f}$ is the surjection from M onto $\underline{f}(M) \subset N$ defining f. The restriction of f to a sub-class M' of M is written $(N, \underline{f\iota}, M')$. A neofunctor F from $U^{\bullet}$ toward a multiplicative graph $V^{\bullet}$ is also denoted by $(V^{\bullet}, \underline{F}, U^{\bullet})$, where $\underline{F}$ is the surjection defining the mapping from U into V underlying F. A quartet of a multiplicative graph $U^{\bullet}$ is a quadruple

$$(y', x', x, y) \in U^4 \text{ such that } y'.x = x'.y.$$

The quartets of $U^{\bullet}$ are the morphisms of the double multiplicative graph $(\boxminus U^{\bullet}, \boxplus U^{\bullet})$. A natural transfomationr Φ between neofunctors from a multiplicative graph $K^{\bullet}$ toward $U^{\bullet}$ is a neofunctor from $K^{\bullet}$ toward $\boxminus U^{\bullet}$. The triple defining Φ (usually called natural transformation) is (F', τ, F), where F and F' are the neofunctors from $K^{\bullet}$ toward $U^{\bullet}$ and τ the surjection from $K^{\bullet}_0$ into U such that

$$\Phi(x) = (F'(x), \tau(e'), \tau(e), F(x)),$$

if $x \in e'.K.e$. The groupoid of all invertible elements of a category $H^{\bullet}$ is denoted by $H^{\bullet}_{\gamma}$.

TABLE OF CONTENTS.

1. IDEAS OF STRUCTURES.

Let $\mathfrak{M}_0$ and $\hat{\mathfrak{M}}_0$ be two universes such that $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$. We denote by $\mathfrak{M}$ and $\hat{\mathfrak{M}}$ respectively the full categories of mappings corresponding to $\mathfrak{M}_0$ and $\hat{\mathfrak{M}}_0$, by $\hat{\mathfrak{N}}'$ the category of neofunctors associated with $\hat{\mathfrak{M}}$, by $P_{\mathfrak{N}'}$ its canonical functor toward $\hat{\mathfrak{M}}$; we identify the units of $\hat{\mathfrak{N}}'$ with the multiplicative graphs $U^{\cdot}$ such that $U \in \hat{\mathfrak{M}}_0$.

We suppose given a family $t = (T_i)_{i \in I}$ of functors from $\hat{\mathfrak{N}}'$ toward $\hat{\mathfrak{N}}'$ such that $T_i(j)$ be a monomorphism if j is a monomorphism.

EXAMPLES 1. Let $K^{\cdot}$ be a multiplicative graph and denote by $\mathfrak{N}_{K^{\cdot}}(U^{\cdot})$ 1
the horizontal multiplicative graph (called «graphe multiplicatif longitudinal», CS Chapter I, Definition 40) of natural transformations between neofunctors from $K^{\cdot}$ toward $U^{\cdot}$. If p is a neofunctor $(U_2^{\cdot}, \underline{p}, U_1^{\cdot})$ the surjection $\Phi \to \boxminus p . \Phi$ defines a neofunctor $\mathfrak{N}_{K^{\cdot}}(p)$ from $\mathfrak{N}_{K^{\cdot}}(U_1^{\cdot})$ toward $\mathfrak{N}_{K^{\cdot}}(U_2^{\cdot})$ (CS Chapter II, Proposition 46). So we define a functor $\mathfrak{N}_{K^{\cdot}}$ from $\hat{\mathfrak{N}}'$ toward $\hat{\mathfrak{N}}'$; most often, we will choose for T_i such a functor. In particular, if $K^{\cdot}$ is the category the elements of which are n units, the corresponding functor $\mathfrak{N}_{K^{\cdot}}$ is identified with the functor χ_n which maps the multiplicative graph $U^{\cdot}$ onto $(U^{\cdot})^n$ and p onto p^n.

DEFINITION. We call *t-sketch* a couple $\mu = (U^{\cdot}, (M_i)_{i \in I})$ such that:

1) $U^{\cdot}$ is a multiplicative graph and $U^{\cdot} \in \hat{\mathfrak{N}}'_0$.

2) M_i is a sub-class of $P_{\mathfrak{N}'}.\, T_i(U)$ for each $i \in I$.

A couple $(z, (y, x))$ such that $(y, x) \in U^{\cdot} * U^{\cdot}$ and $z = y . x$ is called an *axiom of* μ.

We call *homomorphism between t-sketches* a triple (μ_2, F, μ_1) satisfying the conditions:

1) $\mu_m = (U_m^{\cdot}, (M_i^m)_{i \in I})$ is a t-sketch for $m = 1$ and 2.

2) $F = (U_2^{\cdot}, \underline{F}, U_1^{\cdot})$ is a neofunctor.

3) $T_i(F)(M_i^1) \subset M_i^2$ for each $i \in I$.

A t-sketch is also a $\hat{t}$-sketch, if $\hat{t} = (\hat{T}_i)_{i \in I}$, where T_i is a subfunctor (CS Chapter III, Definition 36) of $\hat{T}_i$ for each $i \in I$.

If μ is a t-sketch, the class of all axioms of μ is the graph of the mapping $\kappa(U^{\cdot})$ (law of composition of $U^{\cdot}$); it will be denoted by $A(U^{\cdot})$.

The homomorphisms between t-sketches are the elements of the category $\mathcal{S}(t)$, which admits the law of composition

$$(\mu_2', \underline{F}', \mu_1').(\mu_2, \underline{F}, \mu_1) = (\mu_2', \underline{F}'\underline{F}, \mu_1) \text{ if, and only if, } \mu_1' = \mu_2.$$

We identify the class of units of $\mathcal{S}(t)$ with the class $\mathcal{S}(t)_0$ of t-sketches. The surjection $(\mu_2, \underline{F}, \mu_1) \to F$ (notations of the definition) defines a functor $\sigma(t)$ from $\mathcal{S}(t)$ toward $\hat{\mathcal{N}}'$. A $P_{\mathcal{N}'}.\sigma(t)$-sub-structure μ_1 of a t-sketch $\mu = (U^{\cdot}, (M_i)_{i \in I})$ will be called a *t-sub-sketch of* μ; it is a t-sketch $\mu_1 = (U_1^{\cdot}, (M_i')_{i \in I})$ such that:

1) $U_1^{\cdot}$ is a multiplicative sub-graph of $U^{\cdot}$;

2) $f_i(M_i') = \beta(\underline{f}_i) \cap M_i$ for each $i \in I$, where $f_i = T_i(U^{\cdot}, \iota, U_1^{\cdot})$.

DEFINITION. We say that a *t-sketch* $\mu = (U^{\cdot}, (M_i)_{i \in I})$ is *defined by*
1 μ_1 *and the class* A *of axioms* if μ_1 is a t-sketch which has the form $(U^{1}, (M_i')_{i \in I})$ where $M_i = T_i(U^{\cdot}, \iota, U^{1})(M_i')$, and if

$$A(U^{\cdot}) = A(U^{1}) \cup A.$$

Suppose given a t-sketch $\overline{\mu} = (H^{\cdot}, (M_i^H)_{i \in I})$ in which $H^{\cdot}$ is a category.

DEFINITION. We call *$\overline{\mu}$-realization of a t-sketch* μ a neofunctor

$$F = (H^{\cdot}, \underline{F}, U^{\cdot}) \text{ such that } (\overline{\mu}, \underline{F}, \mu) \in \mathcal{S}(t).$$

EXAMPLES 2. a) If t is the empty family $\emptyset$, a t-sketch is identified with a multiplicative graph and $\mathcal{S}(t)$ with the category $\hat{\mathcal{N}}'$.

b) Suppose $I = \{1, 2\}$; define T_1 as the functor $(\hat{\mathcal{N}}', \iota, \hat{\mathcal{N}}')$ and T_2 as the functor $\mathcal{N}_{K^{\cdot}}$ constructed in Example 1. If $U^{\cdot}$ is a multiplicative
2 graph, denote by $\nu(U^{\cdot})$ a class of natural transformations $\Phi \in \mathcal{N}_{K^{\cdot}}(U^{\cdot})$ defined by a triple $(\phi, r, \overline{e})$, where $\overline{e}$ is the «constant neofunctor» over $e \in U_0^{\cdot}$; then $\mu = (U^{\cdot}, (M, \nu(U^{\cdot})))$, where $M \subset U$, is a t-sketch. Let $H^{\cdot}$ be a category and $\overline{\mu} = (H^{\cdot}, (H^{\iota}, N))$ be a t-sketch with N the sub-class of $\nu(H^{\cdot})$ formed by the elements $\Phi \in \mathcal{N}_{K^{\cdot}}(H^{\cdot})$ defining a projective limit (CS Appendix I). A neofunctor $F = (H^{\cdot}, \underline{F}, U^{\cdot})$ is a $\overline{\mu}$-realization of μ if, and only if,

$$F(m) \in H^{\iota} \text{ for each } m \in M$$

and $\boxminus F.\Phi \in N$ for each $\Phi \in \nu(U^{\bullet})$. 1+

DEFINITIONS. Let μ be a t-sketch. We say that (μ, μ_1) is a *$\overline{\mu}$-idea* (of a t-structure) if (μ, ι, μ_1) is a homomorphism between t-sketches and if two $\overline{\mu}$-realizations of μ extending the same $\overline{\mu}$-realization of μ_1 are equivalent; if moreover each $\overline{\mu}$-realization F of μ_1 may be extended into a $\overline{\mu}$-realization $\overline{F}$ of μ, we say that μ is *$\overline{\mu}$-generated by* μ_1. We call *constructive $\overline{\mu}$-idea* (abbreviated in: *$\overline{\mu}$-Idea*) a couple (μ, μ_1) such that μ_1 2
be a t-sub-sketch of μ and that there exist a t-sketch μ' satisfying the conditions:

1) μ is defined by μ' and a class A of axioms;

2) μ' is $\overline{\mu}$-generated by μ_1;

then μ_1 will be called a *$\overline{\mu}$-system of generators of* μ. If (μ, μ_1) is a $\overline{\mu}$-idea, we call *$(\overline{\mu}, \mu, \mu_1)$-structure a* $\overline{\mu}$-realization of μ_1 which extends into a $\overline{\mu}$-realization of μ.

If μ is defined by μ' and a class A of axioms, then (μ, μ') is a $\overline{\mu}$-idea; in particular, (μ, μ) is a $\overline{\mu}$-Idea for each $\overline{\mu}$. Let (μ, μ_1) be a $\overline{\mu}$-Idea and F a $\overline{\mu}$-realization of μ_1; with the notations of the preceding definition, F extends into a $\overline{\mu}$-realization $\hat{F}$ of μ' and F is a $(\overline{\mu}, \mu, \mu_1)$-structure if, and only if,

$$\hat{F}(z) = \hat{F}(y).\hat{F}(x) \quad \text{for each } (z,(y,x)) \in A.$$

In that case, any $\overline{\mu}$-realization of μ extending F is equivalent to $(H^{\bullet}, \underline{\hat{F}}, U^{\bullet})$, hence (μ, μ_1) is a $\overline{\mu}$-idea.

The $\overline{\mu}$-realizations of μ are identical with the $(\overline{\mu}, \mu, \mu)$-structures.

We denote by $\mathcal{H}(\overline{\mu}, \mu, \mu_1)$ the full sub-category of $\mathfrak{N}_{U^{\bullet}}(H^{\bullet})$ the elements of which are the *morphisms between $(\overline{\mu}, \mu, \mu_1)$-structures*, i.e. the natural transformations Φ defined by a triple (F', τ, F) such that F and F' are $(\overline{\mu}, \mu, \mu_1)$-structures.

REMARKS. 1) A t-sketch μ may admit two different $\overline{\mu}$-systems of generators; conversely there may exist two $\overline{\mu}$-ideas (μ, μ_1) and (μ', μ_1) with the same μ_1. A $\overline{\mu}$-idea may not be a $\overline{\mu}'$-idea.

2) In some examples, we have the following situation: Let (μ, μ_1) be

a $\bar{\mu}$-idea; there exists a t-sub-sketch $\mu_2 = (U_2^{\cdot}, (M_i')_{i \in I})$ of μ_1 such that two $\bar{\mu}$-realizations of μ_1 are equal if they have the same restriction to $U_2^{\cdot}$. Then the mapping

$$F \to (H^{\cdot}, \underline{F}\iota, U_2^{\cdot}), \quad \text{where } F \text{ is a } (\bar{\mu}, \mu, \mu_1)\text{-structure},$$

is injective, so that we may identify the category of morphisms between $(\bar{\mu}, \mu, \mu_1)$-structures with a full sub-category of $\mathfrak{N}_{U_2^{\cdot}}(H^{\cdot})$.

Let $\boxminus$ be the functor from $\hat{\mathfrak{N}}'$ toward $\hat{\mathfrak{N}}'$ which maps a multiplicative graph $U^{\cdot}$ into the vertical multiplicative graph $\boxminus U^{\cdot}$ (CS Chapter I, Definition 40) and a neofunctor p onto $\boxminus p$. We denote by $\alpha_{U^{\cdot}}^{\boxplus}$ (resp. by $\beta_{U^{\cdot}}^{\boxplus}$) the neofunctor from $\boxminus U^{\cdot}$ toward $U^{\cdot}$ such that (CS Chapter I, Proposition 27)

$$\alpha_{U^{\cdot}}^{\boxplus}(q) = x \ \ (\text{resp. } \beta_{U^{\cdot}}^{\boxplus}(q) = x') \ \text{ if } \ q = (x', y', y, x) \in \square U^{\cdot}.$$

If $U' \subset U$, we write $\square(U^{\cdot}; U, U')$ for the class of all $q \in \square U^{\cdot}$ such that $x \in U'$ and $x' \in U'$. Let (c) be the condition on T_i:

(c) There exists an equivalence defined by $(\boxminus . T_i, \gamma_i, T_i . \boxminus)$ and for each $U^{\cdot} \in \hat{\mathfrak{N}}_0'$, we have

$$T_i(\alpha_{U^{\cdot}}^{\boxplus}) = \alpha_{T_i(U^{\cdot})}^{\boxplus} \cdot \gamma_i(U^{\cdot}) \ \text{ and } \ T_i(\beta_{U^{\cdot}}^{\boxplus}) = \beta_{T_i(U^{\cdot})}^{\boxplus} \cdot \gamma_i(U^{\cdot}).$$

1 (For example the functors $\mathfrak{N}_{K^{\cdot}}$ and χ_n satisfy this property.)

PROPOSITION 1. *If T_i satisfies (c) for each $i \in I$, then*

$$\mathcal{H}(\bar{\mu}, \mu, \mu) = \mathcal{H}(\boxminus \bar{\mu}, \mu, \mu)_0$$

where μ is a t-sketch and

$$\boxminus\bar{\mu} = (\boxminus H^{\cdot}, (L_i)_{i \in I}), \ \ L_i = \gamma_i(H^{\cdot})^{-1}(\boxminus(H_i^{\cdot}; H_i, M_i^H)), \ \ H_i = T_i(H^{\cdot}).$$

PROOF. Put $\mu = (U^{\cdot}, (M_i)_{i \in I})$. Let $\Phi = (\boxminus H^{\cdot}, \underline{\Phi}, U^{\cdot})$ be a natural transformation defined by the triple (F', τ, F). Suppose $m \in M_i$. As $T_i(\Phi)$ is a neofunctor from $T_i(U^{\cdot})$ toward $T_i(\boxminus H^{\cdot})$, we have

$$T_i(\Phi)(m) \in T_i(\boxminus H^{\cdot}) \ \text{ and } \ \hat{m} = \gamma_i(H^{\cdot}). T_i(\Phi)(m) \in \square T_i(H^{\cdot}).$$

By hypothesis:

$$T_i(F) = T_i(\alpha_{H^{\cdot}}^{\boxplus}.\Phi) = T_i(\alpha_{H^{\cdot}}^{\boxplus}). T_i(\Phi) = \alpha_{T_i(H^{\cdot})}^{\boxplus} \cdot \gamma_i(H^{\cdot}). T_i(\Phi).$$

Hence

$\alpha^{\boxplus}_{T_i(H^{\cdot})}(\hat{m}) = T_i(F)(m)$ and, similarly, $\beta^{\boxplus}_{T_i(H^{\cdot})}(\hat{m}) = T_i(F')(m)$.

It follows that $T_i(\Phi)(m) \in L_i$ if, and only if,

$$T_i(F)(m) \in M_i^H \quad \text{and} \quad T_i(F')(m) \in M_i^H .$$

So $\Phi \in \mathcal{H}(\overline{\mu},\mu,\mu)$ is equivalent to $\Phi \in \mathcal{H}(\boxminus\overline{\mu},\mu,\mu)_0$.

COROLLARY. *With the assumption of the proposition 1, if* (μ,μ_1) *is a* $\overline{\mu}$*-idea, then* $\mathcal{H}(\boxminus\overline{\mu},\mu,\mu_1)_0 \subset \mathcal{H}(\overline{\mu},\mu,\mu_1)$.

Indeed, Φ is a $\boxminus\overline{\mu}$-realization of μ_1 if, and only if, it is a morphism between $\overline{\mu}$-realizations of μ_1, according to the proposition 1. If

$$\Phi \in \mathcal{H}(\boxminus\overline{\mu},\mu,\mu_1)_0 ,$$

then Φ extends in a $\boxminus\overline{\mu}$-realization $\hat{\Phi}$ of μ and so $\Phi \in \mathcal{H}(\overline{\mu},\mu,\mu_1)$.

Suppose that $\hat{\mathfrak{M}}_0$ belongs to a universe $\overline{\mathfrak{M}}_0$. Let $\overline{\mathfrak{M}}$ and $\overline{\mathfrak{F}}$ be the category of mappings and the category of functors corresponding to $\overline{\mathfrak{M}}_0$. Then $(\overline{\mathfrak{F}},<)$ is a regular sub-inductive category [2] for the order:

$F < \hat{F}$ if, and only if, $F = (H_2^{\cdot}, \underline{\hat{F}}\iota, H_1^{\cdot})$, where $H_1^{\cdot}$ and $H_2^{\cdot}$ are sub-categories of $\alpha(\hat{F})$ and $\beta(\hat{F})$ respectively.

The forgetting functor toward $\overline{\mathfrak{M}}$ from $\overline{\mathfrak{F}}$ defines an ordered functor

$$P_{\overline{\mathfrak{F}}} = ((\overline{\mathfrak{M}},\subset), \underline{P}_{\overline{\mathfrak{F}}}, (\overline{\mathfrak{F}},<)).$$

Let $\mathcal{S}'(t)$ be the full sub-category of $\mathcal{S}(t)$ the units of which are the t-sketches $(H^{\cdot},(M_i^H)_{i\in I})$ such that $H^{\cdot}$ be a category. Denote by $\mathcal{H}(t)^{\cdot}$ the category sum of the categories $\mathcal{H}(\overline{\mu},\mu,\mu_1)$, when (μ,μ_1) is a $\overline{\mu}$-idea of t-structures and $\overline{\mu} \in \mathcal{S}'(t)_0$. So an element of $\mathcal{H}(t)$ is a couple $\tilde{\Phi} = (\Phi,(\overline{\mu},\mu,\mu_1))$, where $\Phi \in \mathcal{H}(\overline{\mu},\mu,\mu_1)$.

PROPOSITION 2. $\eta = (\mathcal{S}'(t),\mathcal{H}(t),\kappa')$ *is a system of structures (CS Chapter II, Definition 6), where* κ' *is the law of composition:*

$$(\overline{\mu}',\underline{F},\overline{\mu})\tilde{\Phi} = (\boxminus F.\Phi,(\overline{\mu}',\mu,\mu_1)), \quad \textit{where} \quad F = \sigma(t)(\overline{\mu}',\underline{F},\overline{\mu}),$$

if, and only if, $\tilde{\Phi} = (\Phi,(\overline{\mu},\mu,\mu_1))$ *and if* (μ,μ_1) *is a* $\overline{\mu}'$*-idea.*

Moreover there exists a $P_{\overline{\mathfrak{F}}}$*-dominated system of structures* (η, X) [3].

PROOF. For each $\overline{\mu} \in \mathcal{S}'(t)_0$, denote by $X(\overline{\mu})$ the full sub-category of $\mathcal{H}(t)^{\cdot}$ sum of the categories $\mathcal{H}(\overline{\mu}, \mu, \mu_1)$, where (μ, μ_1) is a $\overline{\mu}$-idea. Suppose

$$\hat{F} = (\overline{\mu}', \underline{F}, \overline{\mu}) \in \mathcal{S}'(t) \quad \text{and} \quad F = \sigma(t)(\hat{F}).$$

Let $M_{\hat{F}}$ be the full sub-category of $X(\overline{\mu})$ sum of the categories $\mathcal{H}(\overline{\mu}, \mu, \mu_1)$ such that (μ, μ_1) be a $\overline{\mu}$-idea and a $\overline{\mu}'$-idea. If

$$\tilde{\Phi} \in M_{\hat{F}} \quad \text{and} \quad \tilde{\Phi} = (\Phi, (\overline{\mu}, \mu, \mu_1))$$

where Φ is the natural transformation defined by the triple (G_2, τ, G_1), then $F.G_m$, for $m = 1$ and 2, is a $\overline{\mu}'$-realization of μ_1; if $\hat{G}_m$ is a $\overline{\mu}$-realization of μ extending G_m, the $\overline{\mu}'$-realization $F.\hat{G}_m$ of μ extends $F.G_m$, so that

$$F.G_m \in \mathcal{H}(\overline{\mu}', \mu, \mu_1)_0 \quad \text{and} \quad \boxminus F.\Phi \in \mathcal{H}(\overline{\mu}', \mu, \mu_1).$$

Hence

$$\hat{F}\tilde{\Phi} = (\boxminus F.\Phi, (\overline{\mu}', \mu, \mu_1)) \in X(\overline{\mu}').$$

The surjection $\tilde{\Phi} \to \hat{F}\tilde{\Phi}$ defines a functor $X(\hat{F})$ from $M_{\hat{F}}$ toward $X(\overline{\mu}')$ (CS Chapter II, Proposition 46). If $\hat{F}' = (\overline{\mu}'', \underline{F}', \overline{\mu}') \in \mathcal{S}'(t)$, denote by ϕ the functor $X(\hat{F}')X(\hat{F})$, pseudoproduct [2] of $(X(\hat{F}'), X(\hat{F}))$ in $(\overline{\mathcal{F}}, <)$. The source of ϕ is the full sub-category of $M_{\hat{F}}$ the units of which are the

$$\tilde{G} \in M_{\hat{F}} \quad \text{such that} \quad X(\hat{F})(\tilde{G}) \in M_{\hat{F}'},$$

i.e. the $\tilde{G} = (G, (\overline{\mu}, \mu, \mu_1)) \in M_{\hat{F}}$ such that (μ, μ_1) is a $\overline{\mu}''$-idea. Hence, $\phi < X(\hat{F}'.\hat{F})$. This proves that the surjection $X: \hat{F} \to X(\hat{F})$ defines a $(\overline{\mathcal{F}}, <)$-neofunctor [3] $X = ((\overline{\mathcal{F}}, <), \underline{X}, \mathcal{S}'(t))$. It follows that

$$X' = ((\overline{\mathfrak{M}}, \subset), \underline{P\mathcal{F}}\,\underline{X}, \mathcal{S}'(t))$$

is a $(\overline{\mathfrak{M}}, \subset)$-neofunctor associated with a system of structures, for (Theorem 3 [3])

$$X(\overline{\mu}) \cap X(\overline{\mu}') = \emptyset \quad \text{if} \quad \overline{\mu} \neq \overline{\mu}'.$$

It is clear that η is the system of structures associated with X', so that (η, X) is a $P\mathcal{F}$-dominated system of structures.

Let $\mathcal{S}^{(\mu,\mu_1)}$ be the full sub-category of $\mathcal{S}'(t)$ such that $\overline{\mu} \in \mathcal{S}_0^{(\mu,\mu_1)}$

when (μ, μ_1) is a $\bar{\mu}$-idea; suppose $\lambda = (u_i)_{i \in L}$, where $u_i \in \sigma(t)(\mu_1)_0$. If $\bar{\mu} \in \mathcal{S}_0^{(\mu,\mu_1)}$, we define a functor $p_\lambda(\bar{\mu}) = (H^{\cdot L}, f, \mathcal{H}(\bar{\mu}, \mu, \mu_1))$, where 1
$f(\phi) = (\tau(u_i))_{i \in L}$ if $\phi(u_i) = \tau(u_i)^{\boxminus}$, and a natural transformation $\Theta_\lambda^{(\mu,\mu_1)} = (\boxminus \hat{\mathfrak{F}}, \theta, \mathcal{S}^{(\mu,\mu_1)})$ such that, if $\hat{F} \in \bar{\mu}''. \mathcal{S}^{(\mu,\mu_1)}. \bar{\mu}'$,

$$\theta(\hat{F}) = ((\sigma(t)(\hat{F}))^L, p_\lambda(\bar{\mu}''), p_\lambda(\bar{\mu}'), F'), \quad \text{where } F' < X(\hat{F}).$$

CONVENTIONS.

If M is a class, the groupoid of couples associated with M is denoted by $(M \times M)^{\mathbf{1}}$, with the law of composition (CS Chapter I, Example 2):

$$(u'', \bar{u}')\mathbf{1}(u', u) = (u'', u) \text{ if, and only if, } \bar{u}' = u'.$$

We suppose given a category $H^{\cdot}$ and a sub-class H^{ι} of the class $R_g(H^{\cdot})$ of all monomorphisms of $H^{\cdot}$. Let $\Pi H^{\cdot}$ (resp. $VH^{\cdot}$) be a fixed sub-class (eventually empty) of the class of all naturalized $\{\{1,2\}\}$-products (resp. -fiber-products) in $H^{\cdot}$ (CS Chapter IV). In the case where $H^{\cdot}$ is with finite products (resp. fiber products), we say that $\Pi H^{\cdot}$ (resp. that $VH^{\cdot}$) is *associated with a naturalized* $\{\{1,2\}\}$*-product* (resp. *-fiber product) mapping* ν (CS Chapter IV, Definitions 1 and 10) if it is the class of all $\nu(x, x')$, where

$$(x, x') \in H_0^{\cdot} \times H_0^{\cdot} \quad (\text{resp. } \in H \times H \text{ and } \beta(x) = \beta(x')).$$

We denote by $\Pi^{\iota} H^{\cdot}$ the class of couples (v_1, v_2) satisfying the conditions

1) $\beta(v_1) = \beta(v_2) = s$, $\alpha(v_1) = \alpha(v_2) = s'$;

2) There exists a naturalized product $((p_1, p_2), S) \in \Pi H^{\cdot}$ of (s, s) and a $j \in S. H^{\iota}. s'$ such that $v_1 = p_1 . j$ and $v_2 = p_2 . j$.

DEFINITION. We call *left regular family of* $H^{\cdot}$ a family $(w_i)_{i \in I}$, where 2

$$w_i \in H.e \quad \text{and} \quad e \in H_0^{\cdot},$$

such that $f = f'$ if $w_i . f = w_i . f'$ for each $i \in I$.

For example, the family of projections of a naturalized product or fiber product is left regular. The class of all left regular families (w_1, w_2) of $H^{\cdot}$ will be written $R^2 H^{\cdot}$. We have $\Pi^{\iota} H^{\cdot} \subset R^2 H^{\cdot}$.

Suppose $q_i = (h_i', f_i', f_i, h_i) \in \square H^{\cdot}$. If $f_i = f$ for each $i \in I$ and if

$(h_i)_{i\in I}$ and $(h_i')_{i\in I}$ are left regular families of $H^{\cdot}$, then $(q_i)_{i\in I}$ is a left regular family of $\boxminus H^{\cdot}$. We denote by $\Pi^{\square}H^{\cdot}$ the class of couples $((q_1, q_2), f^{\boxminus})$ such that

$$f_1 = f_2 = f,\ \ ((h_1, h_2), \alpha(f)) \in \Pi H^{\cdot},\ \ ((h_1', h_2'), \beta(f)) \in \Pi H^{\cdot},$$

by $V^{\square}H^{\cdot}$ the class of quadruples $((q_1, q_3), (q_2, q_4))$ such that

$$q_1 \boxminus q_3 = q_2 \boxminus q_4,\ \ ((h_1, h_3), (h_2, h_4)) \in VH^{\cdot},\ \ ((h_1', h_3'), (h_2', h_4')) \in VH^{\cdot}.$$

We know (CS Chapter IV, Propositions 5 and 25) that $\Pi^{\square}H^{\cdot}$ (resp. $V^{\square}H^{\cdot}$) is a class of naturalized products (resp. fiber products) in $\boxminus H^{\cdot}$.

If $H^{\cdot}$ is the category $\mathfrak{M}$ of mappings such that the universe $\mathfrak{M}_0$ be an element of $\hat{\mathfrak{M}}_0$, we choose for $\mathfrak{M}^{\iota}$ the class of canonical injections (M, ι, M') of a sub-class M' of M into M. The class of all injections is $\mathfrak{M}^i$. Let Π be the class $\Pi\mathfrak{M}$ associated with the canonical $\{\{1,2\}\}$-product mapping π such that

$$\pi((M, M')) = ((p_1^M, p_2^{M'}), M \times M'),$$

where $M \times M'$ is the cartesian product,

$$p_1^M((m, m')) = m \quad \text{and} \quad p_2^{M'}((m, m')) = m'.$$

We write Π^{ι} instead of $\Pi^{\iota}\mathfrak{M}$. Let V be the class $V\mathfrak{M}$ associated with the canonical naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber product mapping ν in $\mathfrak{M}$, such that

$$\nu(f_1, f_2) = ((f_1, v_1), (f_2, v_2)) \quad \text{if} \quad \beta(f_1) = \beta(f_2),$$

where $\alpha(v_1)$ is the sub-class of $M_1 \times M_2 = \alpha(f_1) \times \alpha(f_2)$ formed by the couples

$$(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2 \quad \text{such that} \quad f_1(m_1) = f_2(m_2),$$

and where v_i is the restriction of $p_i^{M_i}$ to $\alpha(v_1)$.

The functor $(\hat{\mathfrak{N}}', \iota, \hat{\mathfrak{N}}')$ is denoted by χ_1 and let χ_2 and χ_4 be the functors from $\hat{\mathfrak{N}}'$ toward $\hat{\mathfrak{N}}'$ (defined in the Example 1) such that

$$\chi_2(p) = p^2 \quad \text{and} \quad \chi_4(p) = p^4, \quad \text{where } p \in \hat{\mathfrak{N}}'.$$

In the following constructions, we will always suppose that the constructed multiplicative graph $U^{\cdot}$ is such that the class $U^{\cdot} * U^{\cdot}$ of composable couples be the smallest sub-class of $U \times U$ having the listed properties and that $U \in \mathfrak{M}_0$.

Let $U^{\bullet}$ be a multiplicative graph and U_1 a sub-class of U. We will say that $U^{\bullet}$ *is stably generated by* U_1 if $U^{\bullet}$ is the stable sub-multiplicative graph of $U^{\bullet}$ generated by U_1 (CS Chapter I, Definition 10). If $U_1^{\bullet}$ is a sub-multiplicative graph of $U^{\bullet}$ (that is if $\alpha(U_1) \cup \beta(U_1) \subset U_1$), then $U^{\bullet}$ is stably generated by U_1 if, and only if, each element of U is a composite of a finite sequence

$$X = (x_n, \ldots, x_1) \quad \text{where} \quad x_i \in U_1 \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, n$$

(CS Chapter I, Proposition 1). In that case two neofunctors F_1 and F_2 from $U^{\bullet}$ toward a category $H^{\bullet}$ are equal as soon as

$$F_1(x) = F_2(x) \quad \text{for each} \quad x \in U_1 .$$

If (F', t, F) is a triple defining a natural transformation between neofunctors from $U_1^{\bullet}$ toward $H^{\bullet}$ and if F and F' are restrictions to $U_1^{\bullet}$ of neofunctors $\hat{F}$ and $\hat{F}'$ respectively from $U^{\bullet}$ toward $H^{\bullet}$, then $(\hat{F}', t, \hat{F})$ also defines a natural transformation.

2. TWO ELEMENTARY SKETCHES.

A. The defining sketch of a graph.

Let $U^{\bullet}_{\mathcal{G}}$ be the multiplicative graph, the elements of which are

two units u and u_0,
three morphisms a, b, i,

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, "i"] & u \arrow[l, bend right, "b"'] \arrow[l, bend left, "a"] \end{tikzcd}$$

such that

$$i \in u . U_{\mathcal{G}} . u_0 \text{ and } b . i = u_0 = a . i$$

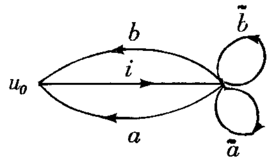
(which implies that $U^{\bullet}_{\mathcal{G}} * U^{\bullet}_{\mathcal{G}}$ is formed by the couples:

$$(u, u),\ (u_0, u_0),\ (a, u),\ (b, u),\ (u_0, a),\ (u_0, b),\ (u, i),$$
$$(i, u_0),\ (a, i) \text{ and } (b, i)).$$

By adding to $U^{\bullet}_{\mathcal{G}}$ two other morphisms

$$\bar{a} = i . a \in u . U_{\mathcal{G}} . u \quad \text{and} \quad \bar{b} = i . b \in u . U_{\mathcal{G}} . u,$$

we obtain a category $\tilde{U}_{\mathcal{G}}^{\bullet}$ with the following table of multiplication:



	u	u_0	i	a	b	$\bar{a}$	$\bar{b}$
u	u		i			$\bar{a}$	$\bar{b}$
u_0		u_0		a	b		
i		i		$\bar{a}$	$\bar{b}$		
a	a		u_0			a	b
b	b		u_0			a	b
$\bar{a}$	$\bar{a}$		i			$\bar{a}$	$\bar{b}$
$\bar{b}$	$\bar{b}$		i			$\bar{a}$	$\bar{b}$

It is clear that $\mu_{\mathcal{G}} = (U_{\mathcal{G}}^{\bullet}, \{i\})$ is a (χ_1)-sketch.

PROPOSITION 1. *Let* $\mathcal{G}_0$ *be the class of graphs* $[C] = (C, \beta, a)$ *such that* $C \in \mathfrak{M}_0$, *and let* $\mathcal{G}_0^{\mathfrak{V}}$ *be the class of neofunctors* $\Gamma = (\mathfrak{M}, \underline{\Gamma}, U_{\mathcal{G}}^{\bullet})$ *such that* $\Gamma(i) \in \mathfrak{M}^{\iota}$. *There exists a bijection* $\gamma_{\mathcal{G}} : \Gamma \to (\Gamma(u), \Gamma(b), \Gamma(a))$ *of* $\mathcal{G}_0^{\mathfrak{V}}$ *onto* $\mathcal{G}_0$.

PROOF. Suppose $\Gamma \in \mathcal{G}_0^{\mathfrak{V}}$ and write

$\Gamma(u) = C$, $\Gamma(a) = (C_0, a, C)$, $\Gamma(b) = (C_0, \beta, C)$, $\Gamma(i) = (C, \iota, C_0)$.

As Γ is a neofunctor, $\Gamma(a.i) = C_0$, so that the restriction of a to C_0 is the identity; similarly the restriction of β to C_0 is the identity. It follows that (C, β, a) is a graph, denoted by $\gamma_{\mathcal{G}}(\Gamma)$. - Conversely, if $[C] = (C, \beta, a) \in \mathcal{G}_0$, there exists a unique neofunctor $\Gamma = (\mathfrak{M}, \underline{\Gamma}, U_{\mathcal{G}}^{\bullet})$ such that

$$\Gamma(a) = (C_0, a, C),\quad \Gamma(b) = (C_0, \beta, C) \text{ and } \Gamma(i) = (C, \iota, C_0),$$

where $C_0 = a(C)$ is the class of vertices of $[C]$. Naturally $[C] = \gamma_{\mathcal{G}}(\Gamma)$. Thus $\gamma_{\mathcal{G}}$ is a bijection of $\mathcal{G}_0^{\mathfrak{V}}$ onto $\mathcal{G}_0$.

Let $\mu_{\mathfrak{M}}^{\iota}$ be the (χ_1)-sketch $(\mathfrak{M}, (\mathfrak{M}^{\iota}))$. Then $\mathcal{G}_0^{\mathfrak{V}}$ is the class of $(\mu_{\mathfrak{M}}^{\iota}, \mu_{\mathcal{G}}, \mu_{\mathcal{G}})$-structures; so the Proposition 1 leads to:

1 DEFINITION. $\mu_{\mathcal{G}} = (U_{\mathcal{G}}^{\bullet}, \{i\})$ is called the *sketch defining a graph.* A $(\mu_{H^{\bullet}}^{\iota}, \mu_{\mathcal{G}}, \mu_{\mathcal{G}})$-structure, where $\mu_{H^{\bullet}}^{\iota}$ is the (χ_1)-sketch $(H^{\bullet}, (H^{\iota}))$, will be called a *$(H^{\bullet}, H^{\iota})$-graph* and a morphism between $(\mu_{H^{\bullet}}^{\iota}, \mu_{\mathcal{G}}, \mu_{\mathcal{G}})$-structures, a *morphism between $(H^{\bullet}, H^{\iota})$-graphs.*

Hence, a $(H^{\cdot}, H^{\iota})$-graph is a neofunctor $F = (H^{\cdot}, \underline{F}, U_{\mathcal{G}}^{\cdot})$ such that $F(i) \in H^{\iota}$. We denote by $\mathcal{G}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ the category $\mathcal{H}(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota}, \mu_{\mathcal{G}}, \mu_{\mathcal{G}})$ of morphisms between $(H^{\cdot}, H^{\iota})$-graphs. As χ_1 verifies the condition (c) (n° 1), the Proposition 1-1 asserts that a morphism between $(H^{\cdot}, H^{\iota})$-graphs is a $(\boxminus H^{\cdot}, \square(H^{\cdot}; H, H^{\iota}))$-graph.

PROPOSITION 2. *There exists an isomorphism* $\hat{\gamma}_{\mathcal{G}}^{H^{\cdot}}$ *from* $\mathcal{G}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ *onto the sub-category* $\hat{\mathcal{G}}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ *of the category*

$$H^{\cdot} \times (\mathcal{G}(H^{\cdot}, H^{\iota})_0 \times \mathcal{G}(H^{\cdot}, H^{\iota})_0)^{\perp}$$

formed by the couples $(h, (F_2, F_1))$ *such that*

$$h . F_1(i) . F_1(a) = F_2(i) . F_2(a) . h, \quad h . F_1(i) . F_1(b) = F_2(i) . F_2(b) . h.$$

PROOF. Let $\Phi \in \mathcal{G}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ be defined by the triple (F_2, τ, F_1). Write $h = \tau(u)$. We get

$$h . F_1(i) . F_1(a) = F_2(i) . \tau(u_0) . F_1(a) = F_2(i) . F_2(a) . h$$

and, similarly,

$$h . F_1(i) . F_1(b) = F_2(i) . F_2(b) . h.$$

Hence

$$\hat{\gamma}_{\mathcal{G}}^{H^{\cdot}}(\Phi) = (h, (F_2, F_1)) \in \hat{\mathcal{G}}(H^{\cdot}, H^{\iota}).$$

- Conversely, suppose

$$\phi = (h, (F_2, F_1)) \in \hat{\mathcal{G}}(H^{\cdot}, H^{\iota}).$$

We write $\hat{d} = F_1(d)$ and $\hat{d}' = F_2(d)$ for each $d \in U_{\mathcal{G}}$. If $h_0 = \hat{a}' . h . \hat{\imath}$, we have

$$h_0 . \hat{a} = \hat{a}' . h . \hat{\imath} . \hat{a} = \hat{a}' . \hat{\imath}' . \hat{a}' . h = \hat{a}' . h \quad \text{and also} \quad h_0 . \hat{b} = \hat{b}' . h,$$
$$\hat{\imath}' . h_0 = \hat{\imath}' . \hat{a}' . h . \hat{\imath} = h . \hat{\imath} . \hat{a} . \hat{\imath} = h . \hat{\imath}.$$

(Remark that $h_0 = \hat{b}' . h . \hat{\imath}$, for $\hat{\imath}'$ is a monomorphism and

$$\hat{\imath}' . \hat{b}' . h . \hat{\imath} = h . \hat{\imath} . \hat{b} . \hat{\imath} = h . \hat{\imath} = \hat{\imath}' . h_0 \quad .)$$

So (F_2, τ, F_1) defines a natural transformation Φ, where

$$\tau(u) = h \quad \text{and} \quad \tau(u_0) = h_0 .$$

It follows that

$$\Phi \in \mathcal{G}(H^{\cdot}, H^{\iota}) \quad \text{and} \quad \phi = \hat{\gamma}\mathcal{G}^{H^{\cdot}}(\Phi).$$

This proves that $\hat{\gamma}\mathcal{G}^{H^{\cdot}} : \Phi \to \hat{\gamma}\mathcal{G}^{H^{\cdot}}(\Phi)$ defines an isomorphism from $\mathcal{G}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ onto $\hat{\mathcal{G}}(H^{\cdot}, H^{\iota})$.

COROLLARY 1. *$\mathcal{G}^{\mathcal{U}} = \mathcal{G}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{\iota})$ is isomorphic to the category $\mathcal{G}$ of homomorphisms between graphs corresponding to $\mathfrak{M}$.*

PROOF. Suppose

$$\hat{h} = (h, (F_2, F_1)) \in \mathfrak{M} \times (\mathcal{G}_0^{\mathcal{U}} \times \mathcal{G}_0^{\mathcal{U}}).$$

Then, according to the Proposition 1, we have

$$\gamma\mathcal{G}(F_m) = [C_m] = (C_m, \beta_m, a_m) \in \mathcal{G}_0.$$

The relation $\hat{h} \in \hat{\mathcal{G}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{\iota})$ is equivalent to the relations

$$a_2 \underline{h} = \underline{h} a_1 \quad \text{and} \quad \beta_2 \underline{h} = \underline{h} \beta_1,$$

that is to the relation

$$\eta = ([C_2], \underline{h}, [C_1]) \in \mathcal{G}.$$

Hence the surjection $\hat{h} \to \eta$ defines an isomorphism $\hat{\gamma}\hat{\mathcal{G}}$ from $\hat{\mathcal{G}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{\iota})$ onto $\mathcal{G}$, and $\hat{\gamma}\hat{\mathcal{G}} . \hat{\gamma}\mathcal{G}^{\mathfrak{M}}$ is an isomorphism from $\mathcal{G}^{\mathcal{U}}$ onto $\mathcal{G}$, denoted by $\hat{\gamma}\mathcal{G}$.

COROLLARY 2. *The surjection*

$$p_1^H \hat{\gamma}\mathcal{G}^{H^{\cdot}} : \Phi \to h \quad \text{if} \quad \hat{\gamma}\mathcal{G}^{H^{\cdot}}(\Phi) = (h, (F_2, F_1))$$

defines a faithful functor $\pi\mathcal{G}^{H^{\cdot}}$ from $\mathcal{G}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ toward $H^{\cdot}$.

EXAMPLE. $\mathcal{G}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ is the class $\bar{\mathcal{G}}_0^{\mathcal{U}}$ af all neofunctors $F = (\mathfrak{M}, \underline{F}, U\dot{\mathcal{G}})$. Suppose $F \in \bar{\mathcal{G}}_0^{\mathcal{U}}$ and $F(i) = j$; since $F(a).j = F(u_0)$, the mapping j is an injection from $M = a(j)$ into $C = F(u)$; if we write $C_0 = j(M)$ and if we denote by j' the bijection $(C_0, \underline{j}, M)$, then

$$[C] = (C, \underline{j'.F(b)}, \underline{j'.F(a)})$$

is a graph and j' defines M as a class of objects for $[C]$; we say that $([C], j')$ is a «concrete graph». So a $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$-graph is also a $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{i})$-graph, and $\bar{\mathcal{G}}_0^{\mathcal{U}}$ is isomorphic to the class of all concrete graphs.

B. The defining sketch of a multiplicative class.

Let $U\dot{\mathfrak{N}}$ be the category formed by:

$$\begin{tikzcd} u & u*u \arrow[l, "k"'] \arrow[l, bend right, "v_1"'] \arrow[l, bend left, "v_2"] \end{tikzcd}$$

2 units u and $u*u$,
3 morphisms k, v_1, v_2 of source $u*u$ and of target u.

$\mu_{\mathfrak{N}} = (U_{\mathfrak{N}}^{\cdot}, (\{(v_1, v_2)\}))$ is a (χ_2)-sketch. Ley $\mu_{\mathfrak{M}}^{\Pi}$ and $\mu_{\mathfrak{M}}^{R}$ be respectively the (χ_2)-sketches

$$\mu_{\mathfrak{M}}^{\Pi} = (\mathfrak{M}, (\Pi^{\iota})) \quad \text{and} \quad \mu_{\mathfrak{M}}^{R} = (\mathfrak{M}, (R^2\mathfrak{M})).$$

We denote by $\bar{\mathfrak{N}}^{\upsilon}$ and by $\mathfrak{N}^{\upsilon}$ respectively the categories of morphisms between $(\mu_{\mathfrak{M}}^{R}, \mu_{\mathfrak{N}}, \mu_{\mathfrak{N}})$-structures and between $(\mu_{\mathfrak{M}}^{\Pi}, \mu_{\mathfrak{N}}, \mu_{\mathfrak{N}})$-structures.

PROPOSITION 1. *$\mathfrak{N}^{\upsilon}$ is isomorphic to the category $\mathfrak{N}$ of homomorphisms between multiplicative classes $C^{\cdot}$ such that $C \in \mathfrak{M}_0$ and $\bar{\mathfrak{N}}^{\upsilon}$ is the saturated sub-category of $\bar{\mathfrak{N}}^{\upsilon}$ generated by $\mathfrak{N}^{\upsilon}$ (CS Chapter I, Definition 16).*

PROOF. An element of $\mathfrak{N}_0^{\upsilon}$ (resp. of $\bar{\mathfrak{N}}_0^{\upsilon}$) is a functor $\Gamma = (\mathfrak{M}, \underline{\Gamma}, U_{\mathfrak{N}}^{\cdot})$, such that $\Gamma(v_m)$ be the restriction of p_m^C to $C^{\cdot} * C^{\cdot} = \Gamma(u*u)$, where $C = \Gamma(u)$ (resp. that the family $(\Gamma(v_1), \Gamma(v_2))$ be left regular). If $\Gamma \in \mathfrak{N}_0^{\upsilon}$, we have

$$\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}}(\Gamma) = (\Gamma(u), \Gamma(k)) \in \mathfrak{N}_0.$$

Conversely, if $C^{\cdot} = (C, \kappa) \in \mathfrak{N}_0$, then $C^{\cdot} = \hat{\gamma}_{\mathfrak{N}}(\Gamma)$, where

$$\Gamma = (\mathfrak{M}, \underline{\Gamma}, U_{\mathfrak{N}}^{\cdot}), \quad \Gamma(k) = \kappa, \quad \Gamma(v_m) = (C, \underline{p}_m^C \iota, C^{\cdot} * C^{\cdot})$$
for $m = 1$ and 2.

- If $\Phi \in \mathfrak{N}^{\upsilon}$ is defined by the triple (Γ_2, r, Γ_1), we get

$$\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}}(\Phi) = (\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}}(\Gamma_2), r(u), \hat{\gamma}_{\mathfrak{N}}(\Gamma_1)) \in \mathfrak{N},$$

and $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}}$ defines an isomorphism from $\mathfrak{N}^{\upsilon}$ onto $\mathfrak{N}$.

- Suppose $F \in \bar{\mathfrak{N}}_0^{\upsilon}$ and write

$$F(k) = (C, \underline{\kappa}, M) \quad \text{and} \quad F(v_m) = v_m' \quad \text{for } m = 1 \text{ and } 2.$$

There exists a unique mapping $w = [v_1', v_2']$ of M into $C \times C$ such that $p_m^C . w = v_m'$ (it is defined by $w(d) = (v_1'(d), v_2'(d))$). For (v_1', v_2') to be left regular, it is necessary and sufficient that w be a monomorphism. So there exists a bijection f of M onto $w(M) = C^{\cdot} * C^{\cdot}$ such that $w = j.f$, where

$$j = (C \times C, \iota, C^\cdot * C^\cdot) \in \mathfrak{M}^\iota .$$

We get

$$v'_m . f^{-1} = p^C_m . w . f^{-1} = p^C_m . j ,$$

and $(C, F(k).f^{-1})$ is a multiplicative class $C^\cdot$. It follows that there exists an equivalence $\Phi \in \mathfrak{N}^\upsilon_0 . \tilde{\mathfrak{N}}^\upsilon$ defined by the triple (F', τ, F) such that

$$\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}}(F') = C^\cdot, \quad \tau(u) = C \quad \text{and} \quad \tau(u*u) = f .$$

So $\tilde{\mathfrak{N}}^\upsilon$ is an enlargement (CS Chapter V, Definition 10) of $\mathfrak{N}^\upsilon$. Moreover $\tilde{\mathfrak{N}}^\upsilon_0$ is isomorphic to the class of concrete multiplicative classes, i.e. of couples $(C^\cdot, f)$, where $C^\cdot \in \mathfrak{N}_0$ and where f is a bijection onto $C^\cdot * C^\cdot$.

1 DEFINITION. $\mu\mathfrak{N} = (U_{\mathfrak{N}}^\cdot, (\{(v_1, v_2)\}))$ is called *the sketch defining a multiplicative class*. Let $\mu^{\Pi^\iota}_{H^\cdot}$ and $\mu^R_{H^\cdot}$ be the (χ_2)-sketches $(H^\cdot, (\Pi^\iota H^\cdot))$ and $(H^\cdot, (R^2 H^\cdot))$ respectively. A $(\mu^R_{H^\cdot}, \mu\mathfrak{N}, \mu\mathfrak{N})$-structure is called a *$H^\cdot$-multiplicative class* and a $(\mu^{\Pi^\iota}_{H^\cdot}, \mu\mathfrak{N}, \mu\mathfrak{N})$-structure a *$(H^\cdot, \Pi^\iota H^\cdot)$-multiplicative class*.

We denote by $\mathfrak{N}(H^\cdot)$ and $\mathfrak{N}(H^\cdot, \Pi^\iota H^\cdot)$ respectively the category of morphisms between $H^\cdot$-multiplicative classes and between $(H^\cdot, \Pi^\iota H^\cdot)$-multiplicative classes.

PROPOSITION 2. *There exists an isomorphism $\hat{\gamma}^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}}$ of $\mathfrak{N}(H^\cdot)$ onto a sub-category $\hat{\mathfrak{N}}(H^\cdot)$ of $H^\cdot \times (\mathfrak{N}(H^\cdot)_0 \times \mathfrak{N}(H^\cdot)_0)^{\mathbf{1}}$; hence $p^H_i \hat{\gamma}^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}}$ defines a faithful functor $\pi^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}}$ from $\mathfrak{N}(H^\cdot)$ toward $H^\cdot$.*

PROOF. Let $\hat{\mathfrak{N}}(H^\cdot)$ be the sub-category of $H^\cdot \times (\mathfrak{N}(H^\cdot)_0 \times \mathfrak{N}(H^\cdot)_0)^{\mathbf{1}}$ formed by the couples $(h, (F_2, F_1))$ such that $h \in F_2(u).H.F_1(u)$ and that there exists $h*h \in H$ satisfying

$$F_2(k).h*h = h.F_1(k) \quad \text{and} \quad F_2(v_m).h*h = h.F_1(v_m) \quad \text{for } m = 1 \text{ and } 2.$$

In that case (F_2, τ, F_1), where $\tau(u) = h$ and $\tau(u*u) = h*h$ is a triple defining a natural transformation $\Phi \in \mathfrak{N}(H^\cdot)$. - Conversely, if $\Phi \in \mathfrak{N}(H^\cdot)$ is the natural transformation defined by the triple (F_2, τ, F_1), we have

$$\hat{\gamma}^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}}(\Phi) = (\tau(u), (F_2, F_1)) \in \hat{\mathfrak{N}}(H^\cdot).$$

The surjection $\hat{\gamma}^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}} : \Phi \to \hat{\gamma}^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}}(\Phi)$ is a bijection from $\mathfrak{N}(H^\cdot)$ onto $\hat{\mathfrak{N}}(H^\cdot)$. Indeed, if $\hat{\gamma}^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}}(\Phi') = \hat{\gamma}^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}}(\Phi)$ and if Φ' is defined by the triple (F'_2, τ', F'_1) we have

$$F'_1 = F_1, \quad F'_2 = F_2, \quad \tau(u) = h = \tau'(u),$$

$$F_2(v_m).\tau(u*u) = \tau(u).F_1(v_m) = F_2(v_m).\tau'(u*u)$$

for $m = 1$ and 2. Since $(F_2(v_1), F_2(v_2))$ is left regular, the last equalities imply $\tau(u*u) = \tau'(u*u)$. Hence $\Phi = \Phi'$. We conclude that

$$\hat{\gamma}^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}} : \Phi \to \hat{\gamma}^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}}(\Phi)$$

defines an isomorphism from $\mathfrak{N}(H^\cdot)$ onto $\hat{\mathfrak{N}}(H^\cdot)$ and that the surjection $\Phi \to \tau(u)$ defines a faithful functor $\pi^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}} = (H^\cdot, \underline{\pi}^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}}, \mathfrak{N}(H^\cdot))$.

3. THE IDEA OF A QUASI-MULTIPLICATIVE GRAPH.

Let us recall the following definition [1]:

DEFINITION. A *quasi-multiplicative graph* is a triple $(C^\cdot, \beta, \alpha)$ such that

1) $C^\cdot$ is a multiplicative class, (C, β, α) is a graph $[C^\cdot, \beta, \alpha]$;
2) If $(g, f) \in C^\cdot * C^\cdot$, then

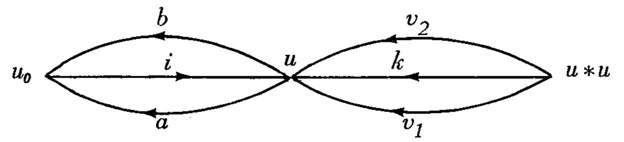
$$\beta(g.f) = \beta(g), \quad \alpha(g.f) = \alpha(f) \quad \text{and} \quad \alpha(g) = \beta(f).$$

A *quasi-neofunctor* is a triple (D_2, F, D_1) such that:

1) D_m is a quasi-multiplicative graph $(C^\cdot_m, \beta_m, \alpha_m)$ for $m = 1$ and 2;
2) $(C^\cdot_2, F, C^\cdot_1)$ is a homomorphism between multiplicative classes;
3) $([D_2], F, [D_1])$ is a homomorphism between graphs.

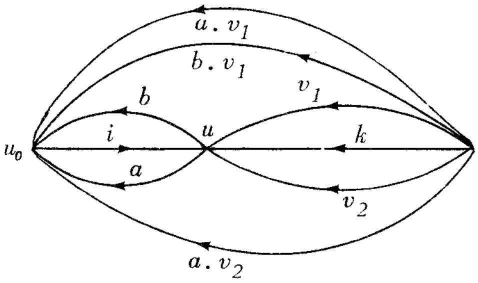
Let $U\dot{\mathfrak{N}}''$ be the multiplicative graph admitting $U\dot{\mathfrak{G}}$ and $U\dot{\mathfrak{N}}$ as sub-multiplicative graphs stably generated by $U\mathfrak{G}\mathfrak{N} = U\mathfrak{G} \cup U\mathfrak{N}$ and such that:

$$b.v_2 = a.v_1, \quad b.k = b.v_1, \quad a.k = a.v_2.$$



$U\mathfrak{G}\mathfrak{N}$

(So $U\mathfrak{N}'' = U\mathfrak{G}\mathfrak{N} \cup \{a.v_1, b.v_1, a.v_2\}$.)



$U\mathfrak{N}''$

PROPOSITION 1. *Write*

$\mu\mathfrak{N}'' = (U\dot{\mathfrak{N}}'', (\{i\}, \{(v_1, v_2)\}))$ *and* $\mu\mathfrak{G}\mathfrak{N} = (U\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N}, (\{i\}, \{(v_1, v_2)\}))$.

Then $(\mu\mathfrak{N}'', \mu\mathfrak{G}\mathfrak{N})$ *is a* $\bar{\mu}$*-Idea of a* (χ_1, χ_2)*-structure, where*

$$\bar{\mu} = (H^{\cdot}, (H, H \times H)).$$

PROOF. $\mu\mathfrak{G}\mathfrak{N}$ is clearly a (χ_1, χ_2)-sub-sketch of the (χ_1, χ_2)-sketch $\mu\mathfrak{N}''$. Let $A\mathfrak{N}''$ be the class formed by the three axioms

$$(a.v_1, (b, v_2)), \quad (b.v_1, (b, k)), \quad (a.v_2, (a, k))$$

of $U\dot{\mathfrak{N}}''$ and denote by $U\overset{1}{\mathfrak{N}}''$ the multiplicative graph such that

$$A(U\overset{1}{\mathfrak{N}}'') = A(U\dot{\mathfrak{N}}'') - A\mathfrak{N}''.$$

Then $\mu\mathfrak{N}''$ is defined by

$$\mu\overset{1}{\mathfrak{N}}'' = (U\overset{1}{\mathfrak{N}}'', (\{i\}, \{(v_1, v_2)\})) \quad \text{and} \quad A\mathfrak{N}''.$$

If $F = (H^{\cdot}, \underline{F}, U^{\cdot}\mathfrak{G}\mathfrak{N})$ is a neofunctor, we define a unique neofunctor $\bar{F} = (H^{\cdot}, \underline{\bar{F}}, U\overset{1}{\mathfrak{N}}'')$ extending F by writing

$$\bar{F}(a.v_1) = F(a).F(v_1), \quad \bar{F}(b.v_1) = F(b).F(v_1),$$
$$\bar{F}(a.v_2) = F(a).F(v_2).$$

So $\mu\overset{1}{\mathfrak{N}}''$ is $\bar{\mu}$-generated by $\mu\mathfrak{G}\mathfrak{N}$ and $\mu\mathfrak{G}\mathfrak{N}$ is a $\bar{\mu}$-system of generators of $\mu\mathfrak{N}''$.

Denote by $\mu^{\iota\Pi}_{\mathfrak{M}}$ the (χ_1, χ_2)-sketch $(\mathfrak{M}, (\mathfrak{M}^{\iota}, \Pi^{\iota}))$.

PROPOSITION 2. *The category* $\mathfrak{N}''^{\upsilon}$ *of morphisms between* $(\mu^{\iota\Pi}_{\mathfrak{M}}, \mu\mathfrak{N}'', \mu\mathfrak{G}\mathfrak{N})$ *structures is isomorphic to the category* $\mathfrak{N}''$ *of quasi-neofunctors corresponding to* $\mathfrak{M}$.

PROOF. Suppose $\Gamma \in \mathfrak{N}_0^{\bullet\upsilon}$; so Γ is a neofunctor $(\mathfrak{M}, \underline{\Gamma}, U^{\bullet}_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$ such that

$$\Gamma(i) \in \mathfrak{M}^{\iota}, \quad (\Gamma(v_1), \Gamma(v_2)) \in \Pi^{\iota},$$

which extends into a neofunctor $\hat{\Gamma}$ from $U^{\bullet}_{\mathfrak{N}^{\bullet}}$. Write $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\bullet}}(\Gamma) = (C^{\cdot}, \beta, a)$, where

$$(C, \beta, a) = (\Gamma(u), \Gamma(b), \Gamma(a)), \quad \kappa = \Gamma(k) \quad \text{and} \quad C^{\cdot} = (C, \kappa).$$

We know that (C, β, a) is a graph (Proposition 1-A-2) and that $C^{\cdot} \in \mathfrak{N}_0$ (Proposition 1-B-2). If $(y, x) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$, we have

$$a(y) = a(p_1^C(y,x)) = \hat{\Gamma}(a.v_1)(y,x) = \hat{\Gamma}(b.v_2)(y,x) =$$
$$\beta(p_2^C(y,x)) = \beta(x),$$
$$a(y.x) = \hat{\Gamma}(a.k)(y,x) = \hat{\Gamma}(a.v_2)(y,x) = a(x),$$
$$\beta(y.x) = \hat{\Gamma}(b.k)(y,x) = \hat{\Gamma}(b.v_1)(y,x) = \beta(y).$$

Therefore $(C^{\cdot}, \beta, a) \in \mathfrak{N}_0^{\bullet}$. - Conversely, if $(C^{\cdot}, \beta, a) \in \mathfrak{N}_0^{\bullet}$, it is the image by $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\bullet}}$ of the neofunctor $\Gamma \in \mathfrak{N}_0^{\bullet\upsilon}$ such that

$$\Gamma(k) = (C, \underline{\kappa}, C^{\cdot} * C^{\cdot}), \quad \Gamma(a) = (C_0^{\cdot}, a, C), \quad \Gamma(b) = (C_0^{\cdot}, \beta, C)$$
$$\text{and} \quad \Gamma(v_m) = (C, \underline{p}_m^C \iota, C^{\cdot} * C^{\cdot}).$$

- If $\Phi \in \mathfrak{N}^{\bullet\upsilon}$ is defined by the triple (Γ_2, r, Γ_1), we denote by $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\bullet}}(\Phi)$ the triple

$$\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\bullet}}(\Phi) = (\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\bullet}}(\Gamma_2), \underline{r(u)}, \hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\bullet}}(\Gamma_1)).$$

It follows from the Proposition 2-B-2 and the Corollary 1 of the Proposition 2-A-2 that $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\bullet}}(\Phi) \in \mathfrak{N}^{\bullet}$. So $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\bullet}}$ defines an isomorphism from $\mathfrak{N}^{\bullet\upsilon}$ onto $\mathfrak{N}^{\bullet}$.

DEFINITION. $(\mu_{\mathfrak{N}^{\bullet}}, \mu_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$ is called *the Idea of a quasi-multiplicative graph*. Let $\mu_{H^{\cdot}}^{\iota R}$ and $\mu_{H^{\cdot}}^{\iota \Pi}$ be respectively the (χ_1, χ_2)-sketches

$$\mu_{H^{\cdot}}^{\iota R} = (H^{\cdot}, (H^{\iota}, R^2 H^{\cdot})) \quad \text{and} \quad \mu_{H^{\cdot}}^{\iota \Pi} = (H^{\cdot}, (H^{\iota}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})).$$

A $(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota R}, \mu_{\mathfrak{N}^{\bullet}}, \mu_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$-structure (resp. $(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota \Pi}, \mu_{\mathfrak{N}^{\bullet}}, \mu_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$-structure) will be called a *$(H^{\cdot}, H^{\iota})$-quasi-multiplicative graph* (resp. *$(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$-quasi-multiplicative graph*). 1

We denote by $\mathfrak{N}^{\bullet}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ and $\mathfrak{N}^{\bullet}(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$ respectively the categories of morphisms between $(H^{\cdot}, H^{\iota})$-quasi-multiplicative graphs, and between $(H^{\cdot}, \Pi^{\iota}H^{\cdot})$-quasi-multiplicative graphs. Hence $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})_0$ (resp. $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, \Pi^{\iota}H^{\cdot})_0$) is the class of neofunctors $F = (H^{\cdot}, \underline{F}, U^{\cdot}_{\mathfrak{G}\mathfrak{N}})$ such that

$$F(i) \in H^{\iota}, \quad (F(v_1), F(v_2)) \in R^2 H^{\cdot} \quad (\text{resp. } \in \Pi^{\iota}H^{\cdot})$$

$$F(a).F(v_2) = F(a).F(k), \quad F(b).F(v_1) = F(b).F(k),$$

$$F(a).F(v_1) = F(b).F(v_2).$$

PROPOSITION 3. *$\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota}) \subset \mathfrak{N}''(L^{\cdot}, L^{\iota})_0$, where*

$$L^{\cdot} = \boxminus H^{\cdot} \quad \text{and} \quad L^{\iota} = \square(H^{\cdot}; H, H^{\iota}).$$

There exists an isomorphism $\hat{y}^{H^{\cdot}}_{\mathfrak{N}''}$ from $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ onto a sub-category $\hat{\mathfrak{N}}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ of

$$H^{\cdot} \times (\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})_0 \times \mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})_0)^{\perp};$$

hence $\underline{p}^H_1 \hat{y}^{H^{\cdot}}_{\mathfrak{N}''}$ defines a faithful functor $\pi^{H^{\cdot}}_{\mathfrak{N}''}$ from $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ toward $H^{\cdot}$.

PROOF. Suppose that $\Phi \in \mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ is the natural transformation defined by a triple (F_2, r, F_1). By hypothesis, there exist neofunctors $\hat{F}_1$ and $\hat{F}_2$ extending F_1 and F_2 respectively to $U^{\cdot}_{\mathfrak{N}''}$. Since $U^{\cdot}_{\mathfrak{N}''}$ is stably generated by $U_{\mathfrak{G}\mathfrak{N}}$, the triple $(\hat{F}_2, r, \hat{F}_1)$ also defines a natural transformation $\hat{\Phi} = (L^{\cdot}, \hat{\underline{\Phi}}, U^{\cdot}_{\mathfrak{N}''})$ extending Φ. It follows that Φ is a $(L^{\cdot}, L^{\iota})$-quasi-multiplicative graph; so $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota}) \subset \mathfrak{N}''(L^{\cdot}, L^{\iota})_0$.

- Let $\hat{\mathfrak{N}}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ be the class of all couples $\hat{h} = (h, (F_2, F_1))$ such that F_1 and F_2 are $(H^{\cdot}, H^{\iota})$-quasi-multiplicative graphs, that $h \in H$ and that

$$(h, (F'_2, F'_1)) \in \hat{\mathfrak{G}}(H^{\cdot}, H^{\iota})$$

(Proposition 2-A-2), where $F'_m = (H^{\cdot}, \underline{F}_{m^{\iota}}, U^{\cdot}_{\mathfrak{G}})$,

$$(h, (F''_2, F''_1)) \in \hat{\mathfrak{N}}(H^{\cdot})$$

(Proposition 2-B-2), where $F''_m = (H^{\cdot}, \underline{F}_{m^{\iota}}, U^{\cdot}_{\mathfrak{N}})$.

According to the Propositions 2-A-2 and 2-B-2, there exist $\Phi' \in \mathfrak{G}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ and $\Phi'' \in \mathfrak{N}(H^{\cdot})$ such that

$$(h, (F'_2, F'_1)) = \hat{y}^{H^{\cdot}}_{\mathfrak{G}}(\Phi') \quad \text{and} \quad (h, (F''_2, F''_1)) = \hat{y}^{H^{\cdot}}_{\mathfrak{N}}(\Phi'').$$

As the neofunctors Φ' and Φ'' from $U^{\cdot}_{\mathcal{G}}$ and $U^{\cdot}_{\mathfrak{N}}$ respectively toward $\boxminus H^{\cdot}$ have the same restriction to $U_{\mathcal{G}} \cap U_{\mathfrak{N}} = \{u\}$, there exists a unique natural transformation

$$\Phi = (\boxminus H^{\cdot}, \underline{\Phi}, U^{\cdot}_{\mathcal{G}\mathfrak{N}}) \text{ from } F_1 \text{ toward } F_2$$

extending both Φ' and Φ''. Hence $\Phi \in \mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$. It follows that the surjection

$$\Phi \to (r(u), (F_2, F_1)), \text{ where } \Phi \text{ is defined by } (F_2, r, F_1),$$

defines an isomorphism $\hat{\gamma}^{H^{\cdot}}_{\mathfrak{N}''}$ from $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ onto $\hat{\mathfrak{N}}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$, so that the surjection $\Phi \to r(u)$ defines a faithful functor $\pi^{H^{\cdot}}_{\mathfrak{N}''}$ from $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ toward $H^{\cdot}$.

REMARK. A $(L^{\cdot}, L^{\iota})$-quasi-multiplicative graph Φ (notation Proposition 3) is not always an element of $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$; indeed, if Φ is defined by (F_2, r, F_1), the relation $(\Phi(v_1), \Phi(v_2)) \in R^2 L^{\cdot}$ does not imply

$$(F_2(v_1), F_2(v_2)) \in R^2 H^{\cdot}.$$

In fact, $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ is the class of $(\bar{\mu}^{\square}, \mu_{\mathfrak{N}''}, \mu_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$-structures, where $\bar{\mu}^{\square} = (L^{\cdot}, (L^{\iota}, R^{\square} H^{\cdot}))$ and $R^{\square} H^{\cdot}$ is the class of couples (q_1, q_2) such that $q_m = (h'_m, f'_m, f, h_m) \in \square H^{\cdot}$,

$$(h_1, h_2) \in R^2 H^{\cdot} \text{ and } (h'_1, h'_2) \in R^2 H^{\cdot}.$$

From the Example A-2 and the Proposition 1-B-2, it results that $\tilde{\mathfrak{N}}''^{\mathcal{U}} = \mathfrak{N}''(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{i})$ is the saturated sub-category of $\mathfrak{N}''(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{i})$ generated by $\mathfrak{N}''^{\mathcal{U}}$ and that there exists a bijection of $\tilde{\mathfrak{N}}''^{\mathcal{U}}_0$ onto the class of bi-concrete quasi-multiplicative graphs, i.e. of triples

$$(D, j', f), \text{ where } D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \mathfrak{N}''_0$$

and where j' and f are bijections onto $C^{\cdot}_0$ and $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ respectively.

DEFINITION. We call *non associative quasi-category* a quasi-multiplicative graph $(C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ such that

$$(y, x) \in C^{\cdot} * C^{\cdot} \text{ if } (y, x) \in C \times C \text{ and } \alpha(y) = \beta(x).$$

A quasi-neofunctor (D_2, F, D_1) such that D_1 and D_2 be non associative quasi-categories is called a *non associative quasi-functor*.

$(C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \mathfrak{N}_0^{\#}$ is a non associative quasi-category if, and only if, $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ is the class $\alpha \vee \beta$ of all couples

$$(y, x) \in C \times C \quad \text{such that} \quad \beta(x) = \alpha(y).$$

We will denote by ξ_0 the quadruple

$$\xi_0 = ((a, v_1), (b, v_2)),$$

by $\mu_{\mathcal{F}\#}$ the (χ_1, χ_4)-sketch $(U^{\cdot}_{\mathfrak{N}^{\#}}, (\{i\}, \{\xi_0\}))$, by $\mu'_{\mathfrak{G}\mathfrak{N}}$ its (χ_1, χ_4)-sub-sketch $(U^{\cdot}_{\mathfrak{G}\mathfrak{N}}, (\{i\}, \{\xi_0\})))$ by μ_ϵ its (χ_1, χ_4)-sub-sketch

$$(U^{\cdot}_\epsilon, (\{i\}, \{\emptyset\})), \quad \text{where } U_\epsilon = U_{\mathfrak{G}} \cup \{k, u*u\}),$$

by $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$ the (χ_1, χ_4)-sketch $(H^{\cdot}, (H^{\iota}, VH^{\cdot}))$.

PROPOSITION 4. *$(\mu_{\mathcal{F}\#}, \mu'_{\mathfrak{G}\mathfrak{N}})$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-Idea. If $VH^{\cdot}$ is associated with a naturalized fiber product mapping, $(\mu_{\mathcal{F}\#}, \mu_\epsilon)$ is also a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-Idea. The category $\mathcal{F}^{\#}$ of non associative quasi-functors corresponding to $\mathfrak{M}$ is isomorphic to the category $\mathcal{F}^{\#\upsilon}$ of morphisms between $(\mu^{\iota V}_{\mathfrak{M}^{\cdot}}, \mu_{\mathcal{F}\#}, \mu'_{\mathfrak{G}\mathfrak{N}})$-structures.*

PROOF. The proof of the first assertion is similar to the proof of the Proposition 1. If $VH^{\cdot}$ is associated with a fiber product mapping and if F is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of μ_ϵ, there exists a unique

$$\xi_0(F) = ((F(a), v'_1), (F(b), v'_2)) \in VH^{\cdot},$$

so that F extends into the unique $\mu^{\iota V}_{N^{\cdot}}$-realization $\hat{F}$ of $\mu'_{\mathfrak{G}\mathfrak{N}}$ such that

$$\hat{F}(v_m) = v'_m \quad \text{for } m = 1 \text{ and } 2.$$

As $\mu'_{\mathfrak{G}\mathfrak{N}}$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-system of generators of $\mu_{\mathcal{F}\#}$, it follows that $(\mu_{\mathcal{F}\#}, \mu_\epsilon)$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-Idea.

- Let Γ be a $(\mu^{\iota V}_{\mathfrak{M}^{\cdot}}, \mu_{\mathcal{F}\#}, \mu'_{\mathfrak{G}\mathfrak{N}})$-structure. Since $(\Gamma(v_1), \Gamma(v_2)) \in R^2\mathfrak{M}$, the Proposition 2 asserts that $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\#}}(\Gamma)$ is a quasi-multiplicative graph $(C^{\cdot}, \beta, \alpha)$. From the relation

$$((\Gamma(a), \Gamma(v_1)), (\Gamma(b), \Gamma(v_2))) \in V,$$

we deduce that $C^{\cdot} * C^{\cdot} = \alpha \vee \beta$, so $(C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \mathcal{F}_0^{\#}$. Hence the restriction of $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\#}}$ (Proposition 2) to $\mathcal{F}^{\#\upsilon}$ defines an isomorphism of $\mathcal{F}^{\#\upsilon}$ onto the full sub-category $\mathcal{F}^{\#}$ of $\mathfrak{N}^{\bullet}$, denoted by $\hat{y}_{\mathcal{F}^{\#}}$.

DEFINITION. $(\mu_{\mathcal{F}^{\#}}, \mu_{\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N}})$ is called *the Idea of a non associative quasi-category.* A $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_{\mathcal{F}^{\#}}, \mu_{\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N}})$-structure is called a *non associative $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-category* and a morphism between $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_{\mathcal{F}^{\#}}, \mu_{\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N}})$-structures, a *non associative $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-functor.*

We denote by $\mathcal{F}^{\#}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ the category of non associative $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-functors. So $\mathcal{F}^{\#}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ is the full sub-category of $\mathfrak{N}^{\bullet}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ the units of which are the $(H^{\cdot}, H^{\iota})$-quasi-multiplicative graphs F such that

$$\xi_0(F) = ((F(a), F(v_1)), (F(b), F(v_2))) \in VH^{\cdot}.$$

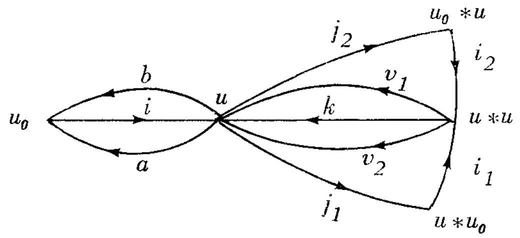
4. THE IDEA OF A MULTIPLICATIVE GRAPH.

Let $U^{\bullet}_{\mathfrak{N}'}$ be the multiplicative graph admitting $U^{\cdot}_{\mathfrak{N}''}$ as a sub-multiplicative graph, stably generated by the class the elements of which are

the elements of $U_{\mathfrak{N}^{\bullet}}$,

two other units $u * u_0$ and $u_0 * u$,

four other morphisms j_1, i_1, j_2, i_2



such that

$a(i_1) = u * u_0$, $a(i_2) = u_0 * u$,

$\left.\begin{array}{l} j_m \text{ is the inverse of } k.i_m \\ v_m.(i_m.j_m) = u \end{array}\right]$ for $m = 1$ and 2,

$v_2.(i_1.j_1) = i.a$ and $v_1.(i_2.j_2) = i.b$.

So $U^{\bullet}_{\mathfrak{N}'}$ has 6 other morphisms $k.i_m$, $i_m.j_m$, $i.a$ and $i.b$. Let $\mu_{\mathfrak{N}'}$ be the (χ_1, χ_2)-sketch $(U^{\bullet}_{\mathfrak{N}'}, (\{i, i_1, i_2\}, \{(v_1, v_2)\}))$.

PROPOSITION 1. *Let $F = (H^{\cdot}, \underline{F}, U^{\bullet}_{\mathfrak{N}'})$ be a neofunctor; then*

$$\xi_1(F) = ((i'.a', v_1'.i_1'), (i', b'.v_2'.i_1'))$$
$$\text{and } \xi_2(F) = ((i', a'.v_1'.i_2'), (i'.b', v_2'.i_2')),$$

where $d' = F(d)$ *for* $d \in U\mathfrak{N}'$, *are naturalized fiber products in* $H^\cdot$, *and* j_m' *is the inverse of* $v_m'.i_m'$ *for* $m = 1$ *and* 2. *Moreover* $(\mu\mathfrak{N}', \mu\mathfrak{S}\mathfrak{N})$ *is a* $\mu\,{}^{\iota R}_{H^\cdot}$*-idea.*

PROOF. We are going to prove that $\xi_1(F)$ is a naturalized fiber product. We have

$$i'.a'.v_1'.i_1' = i'.F(a.v_1).i_1' = i'.F(b.v_2).i_1' = i'.b'.v_2'.i_1'.$$

j_1' is invertible in $H^\cdot$, for j_1 is invertible in $U\mathfrak{N}'$; from the relation

$$v_1'.i_1'.j_1' = F(v_1.(i_1.j_1)) \in H_0^\cdot,$$

it follows that $v_1'.i_1'$ is the inverse of j_1'. As i' is a monomorphism because it admits a' as a left inverse, we may use the

LEMMA. *If* (h_1, h_2, f_1, f_2) *is a quartet of* $H^\cdot$ *such that* $f_1 \in H_\gamma^\cdot$ *and* $h_2 \in R_g(H^\cdot)$, *then* $\eta = ((h_1, f_1), (h_2, f_2))$ *is a naturalized fiber product.* (Indeed, the Proposition 23 (CS Chapter IV) shows that

$$((h_1, a(h_1)), (h_2, f_2.f_1^{-1}))$$

is a naturalized fiber product, so η is also one, for f_1 is invertible.)

- Similarly, $\xi_2(F)$ is a naturalized fiber product. - In order to show that $(\mu\mathfrak{N}', \mu\mathfrak{S}\mathfrak{N})$ is a $\mu\,{}^{\iota R}_{H^\cdot}$-idea, we have to prove that, if F' is a $\mu\,{}^{\iota R}_{H^\cdot}$-realization of $\mu\mathfrak{N}'$ admitting the same restriction to $U\mathfrak{S}\mathfrak{N}$ as F, then F and F' are equivalent. Indeed, denote by d'' the element $F'(d)$ for $d \in U\mathfrak{N}'$, by g_m the element $j_m''.j_m'^{-1}$ for $m = 1$ and 2. We have

$$q_m = (j_m'', g_m, u', j_m') \in \square H^\cdot.$$

Since $d' = d''$ when $d \in U\mathfrak{S}\mathfrak{N}$, we get

$$v_m'.i_m''.j_m'' = u' = v_m'.i_m'.j_m', \quad v_1'.i_2''.j_2'' = i'.b' = v_1'.i_2'.j_2',$$
$$v_2'.i_1''.j_1'' = v_2'.i_1'.j_1',$$

hence $i_m''.j_m'' = i_m'.j_m'$, for (v_1', v_2') is left regular. It follows

$$i_m''.g_m = i_m''.j_m''.j_m'^{-1} = i_m', \quad \text{so } q_m' = (i_m'', u*u', g_m, i_m') \in \square H^\cdot.$$

As the class $M = U_{\mathcal{G}\mathfrak{N}} \cup \{i_1, j_1, i_2, j_2\}$ stably generates $U_{\mathfrak{N}'}$, the surjection from M into $\square H^{\cdot}$ defined by

$$d \to d'^{\boxminus} \quad \text{if } d \in U_{\mathfrak{N}''}, \quad i_m \to q'_m, \quad j_m \to q_m$$

may be uniquely extended into an equivalence from F onto F'.

PROPOSITION 2. *The category $\mathfrak{N}'^{\mathcal{U}}$ of morphisms between $(\mu^{\iota\Pi}_{\mathfrak{M}}, \mu_{\mathfrak{N}'}, \mu_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$-structures is isomorphic to the category $\mathfrak{N}'$ of neofunctors corresponding to $\mathfrak{M}$.*

PROOF. Let Γ be a $(\mu^{\iota\Pi}_{\mathfrak{M}}, \mu_{\mathfrak{N}'}, \mu_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$-structure. Then Γ extends into a neofunctor $\hat{\Gamma} = (\mathfrak{M}, \hat{\underline{\Gamma}}, U_{\mathfrak{N}'})$ such that

$$\Gamma(i) \in \mathfrak{M}^{\iota}, \quad \hat{\Gamma}(i_m) \in \mathfrak{M}^{\iota} \text{ for } m = 1 \text{ and } 2, \quad (\Gamma(v_1), \Gamma(v_2)) \in \Pi^{\iota}.$$

Since $\Gamma \in \mathfrak{N}''^{\mathcal{U}}$ (Proposition 2-3), we know that $(C^{\cdot}, \beta, a)$, where

$$a = \Gamma(a), \quad \beta = \Gamma(b), \quad C^{\cdot} = (\Gamma(u), \Gamma(k)),$$

is a quasi-multiplicative graph. We have to show that, if $x \in C$, the element $a(x)$ (resp. $\beta(x)$) is the unique right (resp. unique left) unit of x in $C^{\cdot}$. It follows from the proof of the Proposition 1 that $C^{\cdot} * C^{\cdot}_0 = \hat{\Gamma}(u * u_0)$ is the class $\Gamma(i).\Gamma(a) \vee \Gamma(i)$ of couples $(x, a(x))$, that $\hat{\Gamma}(j_1)$ is the bijection

$$x \to (x, a(x)) \quad \text{from } C \text{ onto } C^{\cdot} * C^{\cdot}_0$$

and that $\hat{\Gamma}(i_1)$ is the canonical injection from $C^{\cdot} * C^{\cdot}_0$ into $C^{\cdot} * C^{\cdot}$. Similarly, $\hat{\Gamma}(j_2)$ is the bijection

$$x \to (\beta(x), x) \quad \text{from } C \text{ onto } C^{\cdot}_0 * C^{\cdot} \subset C^{\cdot} * C^{\cdot}.$$

Since $\hat{\Gamma}(k.i_m).\hat{\Gamma}(j_m) = \Gamma(u)$, we have

$$x.a(x) = x = \beta(x).x \quad \text{for each } x \in C.$$

If $(x', a(x)) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$, we get

$$a(x') = \beta(a(x)) = a(x), \quad \text{hence} \quad x'.a(x) = x'.a(x') = x'.$$

If $(\beta(x), x') \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$, we also get $\beta(x).x' = x'$. As

$$a(x) = \beta(a(x)) \quad \text{and} \quad \beta(x) = a(\beta(x)),$$

we conclude that $a(x)$ and $\beta(x)$ are units of $C^{\cdot}$. If e is a unit of $C^{\cdot}$, it results from the relation $(\beta(e), e) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ that $e = \beta(e)$; if moreover $(x, e) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$, we have $a(x) = \beta(e) = e$. So $a(x)$ is the unique right unit of x and, in the same way, $\beta(x)$ is the unique left unit of x. Consequently $C^{\cdot} \in \mathfrak{N}^{\cdot}_{0}$. We write $C^{\cdot} = \hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\cdot}}(\Gamma)$.

- If $\Phi \in \mathfrak{N}^{\cdot \upsilon}$ is the natural transformation defined by the triple $(\Gamma_2, \tau, \Gamma_1)$ and if $C^{\cdot}_m = \hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\cdot}}(\Gamma_m)$, we have

$$\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\cdot}}(\Phi) = (C^{\cdot}_2, \underline{\tau(u)}, C^{\cdot}_1) \in \mathfrak{N} \quad \text{(Proposition 1-B-2)},$$

$$((C_2, \beta, a), \underline{\tau(u)}, (C_1, \beta, a)) \in \mathcal{G} \quad \text{(Proposition 1-A-2)}.$$

It results that $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\cdot}}(\Phi) \in \mathfrak{N}^{\cdot}$ and that $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\cdot}}$ defines an isomorphism from $\mathfrak{N}^{\cdot \upsilon}$ onto $\mathfrak{N}^{\cdot}$, denoted by $\hat{\gamma}_{\mathfrak{N}^{\cdot}}$.

COROLLARY. *If $(C^{\cdot}, \beta, a)$ is a quasi-multiplicative graph, then $C^{\cdot}$ is a multiplicative graph if, and only if,*

$$x . a(x) = x = \beta(x) . x \quad \textit{for each} \quad x \in C.$$

Indeed, let Γ be the neofunctor $\hat{\gamma}^{-1}_{\mathfrak{N}^{\cdot\cdot}}(C^{\cdot}, \beta, a)$ and f_1 (resp. f_2) the bijection

$$x \to (x, a(x)) \quad (\text{resp.} \to (\beta(x), x))$$

of C onto $C^{\cdot} * C^{\cdot}_0$ (resp. onto $C^{\cdot}_0 * C^{\cdot}$). The preceding proof shows that Γ extends into a neofunctor $\hat{\Gamma}$ from $U_{\mathfrak{N}^{\cdot}}$ such that $\hat{\Gamma}(j_m) = f_m$ and $\hat{\Gamma}(i_m) \in \mathfrak{M}^{\iota}$ if, and only if,

$$\Gamma(k) . \hat{\Gamma}(i_m) . f_m = C \quad \text{for} \quad m = 1 \text{ and } 2,$$

which is equivalent to the listed condition.

1 DEFINITION. $(\mu_{\mathfrak{N}^{\cdot}}, \mu_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$ is called *the idea of a multiplicative graph.* A $(\mu^{\iota R}_{H^{\cdot}}, \mu_{\mathfrak{N}^{\cdot}}, \mu_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$-structure (resp. $(\mu^{\iota \Pi}_{H^{\cdot}}, \mu_{\mathfrak{N}^{\cdot}}, \mu_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$-structure) is called a $(H^{\cdot}, H^{\iota})$- (resp. a $(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$-*) multiplicative graph.*

We denote by $\mathfrak{N}^{\cdot}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ and by $\mathfrak{N}^{\cdot}(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$ respectively the categories of $(H^{\cdot}, H^{\iota})$-*neofunctors* (i.e. of morphisms between $(H^{\cdot}, H^{\iota})$-multiplicative graphs) and of $(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$-neofunctors (i.e. of morphisms between $(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$-multiplicative graphs). Hence $F \in \mathfrak{N}^{\cdot}(H^{\cdot}, H^{\iota})_0$ if, and only if, F is a neofunctor $(H^{\cdot}, \underline{F}, U^{\cdot}_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$ such that $F \in \mathfrak{N}^{\bullet}(H^{\cdot}, H^{\iota})_0$ and that there exists a neofunctor $\hat{F} = (H^{\cdot}, \hat{\underline{F}}, U^{\cdot}_{\mathfrak{N}^{\cdot}})$ extending F and satisfying the relations

$$\hat{F}(i_m) \in H^\iota \quad \text{for } m = 1 \text{ and } 2.$$

According to the Proposition 1, $\hat{F}$ is determined up to an equivalence by F. The category $\mathfrak{N}'(H^\cdot, H^\iota)$ (resp. $\mathfrak{N}'(H^\cdot, \Pi^\iota H^\cdot))$ is a full sub-category of $\mathfrak{N}''(H^\cdot, H^\iota)$ (resp. of $\mathfrak{N}''(H^\cdot, \Pi^\iota H^\cdot)$). The restriction $\pi^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}'}$ of $\pi^{H^\cdot}_{\mathfrak{N}''}$ to $\mathfrak{N}'(H^\cdot, H^\iota)$ is a faithful functor toward $H^\cdot$. From the n° 3, it follows that $\mathfrak{N}'(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^i)$ is the saturated sub-category of $\mathfrak{N}'(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^i)$ generated by $\mathfrak{N}'^{\upsilon} = \mathfrak{N}'(\mathfrak{M}, \Pi^\iota)$.

PROPOSITION 3. *$\mathfrak{N}'(H^\cdot, H^\iota) \subset \mathfrak{N}'(L^\cdot, L^\iota)_0$, where*

$$L^\cdot = \boxminus H^\cdot \quad \textit{and} \quad L^\iota = \square(H^\cdot; H, H^\iota).$$

PROOF. Suppose that $\Phi \in \mathfrak{N}'(H^\cdot, H^\iota)$ is the natural transformation defined by the triple (F_1', τ, F_2'). Since F_1' and F_2' are $(H^\cdot, H^\iota)$-multiplicative graphs, there exist $\mu^{\iota R}_{H^\cdot}$-realizations F_1 and F_2 of $\mu_{\mathfrak{N}'}$ extending respectively F_1' and F_2'. We write $h = \tau(u)$,

$$h_m = F_2(j_m) . h . F_1(j_m)^{-1} \quad \text{for } m = 1 \text{ and } 2,$$

$$q_m = (F_2(j_m), h_m, h, F_1(j_m)) \in \square H^\cdot .$$

The quadruple

$$q_m' = (F_2(i_m), \tau(u * u), h_m, F_1(i_m))$$

is such that, in the vertical category $H^\cdot \boxminus H^\cdot$ of quadruples of $(H^\cdot; H^\cdot)$ 1
(CS Chapter I, Proposition 35), we have

$$\Phi(v_1) \boxminus q_1' \boxminus q_1 = \Phi(u) \in \square H^\cdot ,$$

$$\Phi(v_2) \boxminus q_1' \boxminus q_1 = \Phi(i) \boxminus \Phi(a) \in \square H^\cdot .$$

As $(F_2(v_1), F_2(v_2))$ is left regular and as $F_1(j_m)$ is invertible, we deduce from the following lemma that

$$q_1' \in \square H^\cdot \quad \text{and, similarly,} \quad q_2' \in \square H^\cdot .$$

LEMMA. *Let $Q_m = (x_m', y_m', y_m, x_m)$ be a quadruple of $(H^\cdot; H^\cdot)$, for $m = 1, 2, 3, 4$. If*

$$Q_1, \; Q_3, \; Q_4, \; Q_3 \boxminus Q_2 \boxminus Q_1 \; \textit{and} \; Q_4 \boxminus Q_2 \boxminus Q_1$$

are quartets of $H^\cdot$ and if

$$(x'_3, x'_4) \in R^2 H^{\cdot} \quad and \quad x_1 \in H^{\cdot}_{\gamma},$$

then Q_2 *is also a quartet of* $H^{\cdot}$. (Indeed, we have

$$x'_m . x'_2 . y_2 . x_1 = x'_m . x'_2 . x'_1 . y_1 = y'_m . x_m . x_2 . x_1 = x'_m . y'_2 . x_2 . x_1$$

for $m = 3$ and 4. So

$$x'_2 . y_2 . x_1 = y'_2 . x_2 . x_1 \text{ and } x'_2 . y_2 = y'_2 . x_2,$$

that is $Q_2 \in \square H^{\cdot}$.)

- As $U\mathfrak{Y}_{\mathfrak{N}'}$ is stably generated by $U\mathcal{G}_{\mathfrak{N}} \cup \{i_1, j_1, i_2, j_2\}$, there exists a unique natural transformation $\hat{\Phi}$ from F_1 toward F_2 extending Φ to $U\mathfrak{Y}_{\mathfrak{N}'}$, and such that

$$\hat{\Phi}(j_m) = q_m \quad \text{and} \quad \hat{\Phi}(i_m) = q'_m .$$

Therefore $\Phi \in \mathfrak{N}'(L^{\cdot}, L^{\iota})_0$.

PROPOSITION 4. *If* $H^{\iota} = H^{\cdot}_{\gamma} . H^{\iota}$, *then* $\mathfrak{N}'(H^{\cdot}, H^{\iota})$ *is a full saturated sub-category of* $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$.

PROOF. Let $\Phi \in \mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ be an equivalence defined by the triple (F_2, r, F_1), and suppose $F_1 \in \mathfrak{N}'(H^{\cdot}, H^{\iota})_0$. We have to show that: $\Phi \in \mathfrak{N}'(H^{\cdot}, H^{\iota})$. As

$$F_2(v_m) = r(u) . F_1(v_m) . r(u*u)^{-1} \quad \text{for } m = 1 \text{ and } 2,$$

and as $(F_1(v_1), F_1(v_2))$ is left regular, $(F_2(v_1), F_2(v_2))$ is also left regular. Denote by F'_1 a $\mu^{\iota R}_{H^{\cdot}}$-realization of $\mu\mathfrak{Y}_{\mathfrak{N}'}$ extending F_1, by r' the surjection:

$$\hat{u} \to r(\hat{u}) \text{ if } \hat{u} = u, u_0 \text{ and } u*u,$$
$$u*u_0 \to u*u_0 \quad \text{and} \quad u_0 * u \to u_0 * u.$$

There exists a neofunctor F'_2 extending F_2 such that the triple (F'_2, r', F'_1) defines an equivalence Φ'. We have

$$F'_2(i_m) = r(u*u) . F'_1(i_m) \in H^{\cdot}_{\gamma} . H^{\iota} \subset H^{\iota} \quad \text{for } m = 1 \text{ and } 2.$$

Hence F'_2 is a $\mu^{\iota R}_{H^{\cdot}}$-realization of $\mu\mathfrak{Y}_{\mathfrak{N}'}$ extending F_2, and $\Phi \in \mathfrak{N}'(H^{\cdot}, H^{\iota})$.

DEFINITION. We call *non associative category* a multiplicative graph $C^{\cdot}$ such that $C^{\cdot} * C^{\cdot} = \alpha \vee \beta$. A neofunctor between non associative categories is called *a non associative functor.*

Let $\mu\mathfrak{F}''$ be the (χ_1,χ_4)-sketch $(U\dot{\mathfrak{N}}',(\{i\},\{\xi_0\}))$ and $\mu\dot{\mathfrak{G}}$ its (χ_1,χ_4)-sub-sketch $(U\dot{\mathfrak{G}},(\{i\},\{\xi_0\}))$. We suppose in the end of this Section that $H^\bullet$ *is with finite fiber products.*

PROPOSITION 5. *$(\mu\mathfrak{F}'',\mu\dot{\mathfrak{G}})$ is a $\mu^{\iota V}_{H}$-Idea. The category $\mathfrak{F}''^{\mathfrak{V}}$ of morphisms between $(\mu^{\iota V}_{\mathfrak{M}},\mu\mathfrak{F}'',\mu\dot{\mathfrak{G}})$-structures is isomorphic to the category $\mathfrak{F}''$ of non associative functors corresponding to $\mathfrak{M}$.*

PROOF. Denote by $A\mathfrak{F}''$ the class of the 4 axioms

$$(u,(k.i_1,j_1)),\quad (u,(k.i_2,j_2)),$$
$$(u*u_0,(j_1,k.i_1)),\quad (u_0*u,(j_2,k.i_2))$$

of $U\dot{\mathfrak{N}}'$. Let $U\overset{\bullet}{\mathfrak{N}}'$ be the multiplicative graph such that (notation Propo- 1
sition 1-3)

$$A(U\overset{\bullet}{\mathfrak{N}}') = A(U\dot{\mathfrak{N}}') - (A\mathfrak{N}''\cup A\mathfrak{F}'').$$

Then $\mu\overset{\bullet}{\mathfrak{F}}'' = (U\overset{\bullet}{\mathfrak{N}}',(\{i\},\{\xi_0\}))$ is a (χ_1,χ_4)-sketch and $\mu\mathfrak{F}''$ is defined by $\mu\overset{\bullet}{\mathfrak{F}}''$ and $A\mathfrak{N}''\cup A\mathfrak{F}''$. Suppose that F is a $\mu^{\iota V}_{H}$-realization of $\mu\dot{\mathfrak{G}}$; so F is a neofunctor $(H^\bullet,\underline{F},U\dot{\mathfrak{G}})$ such that $F(i)\in H^\iota$ and

$$\xi_0(F) = ((F(a),F(v_1)),(F(b),F(v_2)))\in VH^\bullet.$$

We are going to construct an extension of F to $U\overset{\bullet}{\mathfrak{N}}'$. Let $\overline{F}$ be the extension $(H^\bullet,\overline{\underline{F}},U\dot{\mathfrak{N}}'')$ of F constructed in the Proposition 1-3. We will write d' instead of $\overline{F}(d)$, if $d\in U\mathfrak{N}''$. There exist naturalized fiber products

$$\xi_1(\hat{F}) = ((i'.a',w'_1),(i',w'_2))\quad\text{and}\quad \xi_2(\hat{F}) = ((i',w'_3),(i'.b',w'_4))$$

in $H^\bullet$. As $(i'.a').u' = i'.a'$, there exists one and only one $j'_1\in H$ such that

$$w'_1.j'_1 = u'\quad\text{and}\quad w'_2.j'_1 = a'.$$

Since $((a',v'_1),(b',v'_2))$ is a naturalized fiber product and since

$$a'.w'_1 = b'.i'.a'.w'_1 = b'.(i'.w'_2),$$

there exists one and only one $i'_1\in H$ such that

$$v'_1.i'_1 = w'_1\quad\text{and}\quad v'_2.i'_1 = i'.w'_2\,.$$

In the same way we define j'_2 and i'_2. Let $\hat{\underline{F}}$ be the surjection from $U\mathfrak{N}'$ into H admitting $\overline{F}$ as restriction to $U\mathfrak{N}''$ and defined moreover by

$$\hat{\underline{F}}(i_m) = i'_m, \quad \hat{\underline{F}}(j_m) = j'_m \quad \text{and} \quad \hat{\underline{F}}(\overline{d}.\, d) = \overline{d}'.\, d'$$

if $(\overline{d}, d) = (i, a), (i, b), (k, i_m)$ or (i_m, j_m) for $m = 1$ and 2. We get

$$v'_1 . i'_1 . j'_1 = w'_1 . j'_1 = u',$$

$$v'_2 . i'_1 . j'_1 = i'. w'_2 . j'_1 = i'. a'.$$

From the relations $w'_1 . j'_1 . w'_1 = w'_1$ and

$$w'_2 . j'_1 . w'_1 = a'. w'_1 = a'. v'_1 . i'_1 = b'. v'_2 . i'_1 = b'. i'. w'_2 = w'_2$$

it follows $j'_1 . w'_1 = a(w'_1)$, for (w'_1, w'_2) is left regular. Thus j'_1 admits w'_1 as an inverse. For the same reasons, we get

$$v'_2 . i'_2 . j'_2 = u', \quad v'_1 . i'_2 . j'_2 = i'. b'$$

and j'_2 is invertible. Hence $(H^{\cdot}, \hat{\underline{F}}, U\overset{\bullet}{\mathfrak{N}}')$ is a neofunctor $\hat{F}$ extending F.

- $\hat{F}$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of $\mu\overset{\bullet}{\mathfrak{F}}''$. Suppose that $\hat{F}'$ is also a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of $\mu\overset{\bullet}{\mathfrak{F}}''$ extending F. The neofunctors $\hat{F}$ and $\hat{F}'$ admit $\overline{F}$ as restriction to $U\overset{\bullet}{\mathfrak{N}}''$. The last part of the proof of the Proposition 1 shows that $\hat{F}$ and $\hat{F}'$ are equivalent (for this proof does not use the axioms belonging to $A\mathfrak{N}'' \cup A\mathfrak{F}''$). So $\mu\overset{\bullet}{\mathfrak{G}}\mathfrak{N}$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-system of generators of $\mu\mathfrak{F}''$.

- Let F be a $(\mu^{\iota V}_{\mathfrak{M}}, \mu\mathfrak{F}'', \mu\overset{\bullet}{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$-structure and $\hat{F}$ its extension to $U\overset{\bullet}{\mathfrak{N}}'$ constructed above.; we may suppose

$$\xi_1(\hat{F}) \in V \quad \text{and} \quad \xi_2(\hat{F}) \in V.$$

Then $i'_m \in \mathfrak{M}^{\iota}$, so that $\hat{F} \in \mathfrak{N}'_0$. According to the Proposition 2, $\hat{\gamma}\mathfrak{N}'(\hat{F}) = (F(u), F(k))$ is a multiplicative graph $C^{\cdot}$. Since

$$C^{\cdot} * C^{\cdot} = F(u * u) = F(a) \vee F(b),$$

we have $C^{\cdot} \in \mathfrak{F}''_0$. It follows that the restriction of $\hat{\gamma}\mathfrak{N}''$ to $\mathfrak{F}''^{\upsilon}$ defines an isomorphism $\hat{\gamma}\mathfrak{F}''$ onto the full sub-category $\mathfrak{F}''$ of $\mathfrak{N}'$.

COROLLARY. *A* $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu\mathfrak{F}'', \mu\overset{\bullet}{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$*-structure is a non associative* $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$*-quasi-category* F *such that*

$$F(k).\, \hat{F}(i_m).\, \hat{F}(j_m) = F(u) \quad \textit{for } m = 1 \textit{ and } 2,$$

where $\hat{F}$ *is the extension of* F *to* $U\mathfrak{N}^{\bullet}_{\prime}$ *constructed in the proof above.*

Indeed, the condition is necessary. Suppose that it is satisfied by F. We have seen in the preceding proof that $\hat{F}(j_m)$ is invertible. Hence $F(k).\hat{F}(i_m)$ is its unique inverse in $H^{\cdot}$, so that

$$\hat{F}(j_m).F(k).\hat{F}(i_m) \in H^{\cdot}_0 \quad \text{for } m = 1 \text{ and } 2.$$

So $(H^{\cdot}, \underline{\hat{F}}, U\mathfrak{N}^{\bullet}_{\prime})$ is a neofunctor, and F a $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu\mathfrak{F}^{\prime\prime}, \mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$-structure.

DEFINITION. $(\mu\mathfrak{F}^{\prime\prime}, \mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$ is called *the Idea of a non associative category*. A $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu\mathfrak{F}^{\prime\prime}, \mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$-structure is called a *non associative* $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$*-category* and a morphism between $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu\mathfrak{F}^{\prime\prime}, \mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$-structures, a *non associative* $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$*-functor.*

We denote by $\mathfrak{F}^{\prime\prime}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ the category of non associative $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-functors. It is the full sub-category of $\mathfrak{N}^{\prime\prime}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ the units of which are the non associative $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-categories F such that, for an extension $\hat{F}$ of F to $U\mathfrak{N}^{\bullet}_{\prime}$:

$$F(k).\hat{F}(i_m).\hat{F}(j_m) = F(u) \quad \text{for } m = 1 \text{ and } 2$$

(Corollary of the Proposition 5). The restriction of $\hat{\gamma}^{H^{\cdot}}_{\mathfrak{N}^{\prime\prime}}$ (Proposition 3-3) to $\mathfrak{F}^{\prime\prime}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ is an isomorphism onto a full sub-category

$$\hat{\mathfrak{F}}^{\prime\prime}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot}) \quad \text{of} \quad \hat{\mathfrak{N}}^{\prime\prime}(H^{\cdot}, H^{\iota}).$$

The restriction of $\pi^{H^{\cdot}}_{\mathfrak{N}^{\prime\prime}}$ (Proposition 3-3) to $\mathfrak{F}^{\prime\prime}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ is a faithful functor toward $H^{\cdot}$.

5. THE IDEA OF A CATEGORY.

Let us recall [1] that a *quasi-category* is a non associative quasi-category $(C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ in which the following axiom of associativity is satisfied:

(A) If $z.(y.x)$ and $(z.y).x$ are defined in $C^{\cdot}$, they are equal.

A *category* is a non associative category satisfying (A); it is also a quasi-category.

Let $U\mathfrak{F}^{\bullet}_{\prime}$ be the multiplicative graph admitting $U\mathfrak{N}^{\bullet}_{\prime\prime}$ as a sub-multiplicative graph, and stably generated by the class the elements of which are :

the elements of $U\mathfrak{N}''$,

2 other units $u*(u*u)$ and $(u*u)*u$,

7 other morphisms $k_1, k_2, w_1, w_2, w_3, w_4, g$,

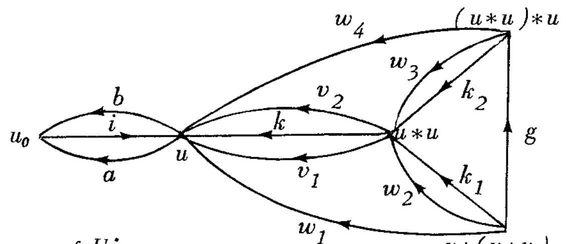
and such that :

$$a(w_1) = u*(u*u), \quad a(w_3) = (u*u)*u,$$
$$a.\, w_1 = (b.k).w_2, \quad (a.k).w_3 = b.w_4,$$
$$w_1 = v_1.k_1, \quad k.w_2 = v_2.k_1, \quad k.w_3 = v_1.k_2, \quad w_4 = v_2.k_2,$$
$$w_4.g = v_2.w_2, \quad v_1.(w_3.g) = w_1, \quad v_2.(w_3.g) = v_1.w_2,$$
$$k.(k_2.g) = k.k_1.$$

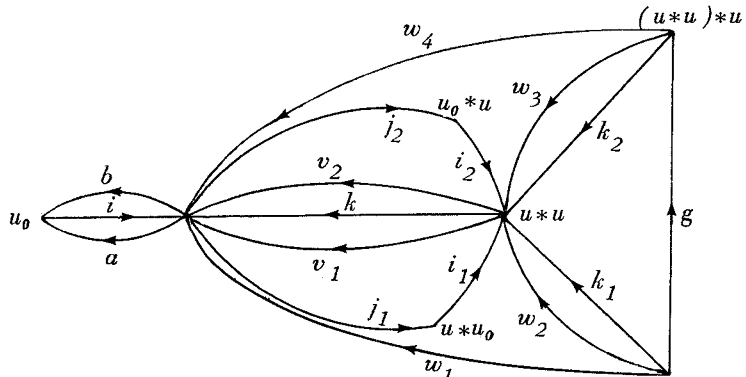
Let $U\dot{\mathfrak{F}}$ be the multiplicative graph admitting $U\dot{\mathfrak{N}}'$ and $U\dot{\mathfrak{F}}'$ as two sub-multiplicative graphs and such that $U\dot{\mathfrak{F}} = U\dot{\mathfrak{N}}' \cup U\dot{\mathfrak{F}}'$ (more precisely $U\dot{\mathfrak{F}}$ is the fiber sum of

$$((U\dot{\mathfrak{F}}', \iota, U\dot{\mathfrak{N}}''), (U\dot{\mathfrak{N}}', \iota, U\dot{\mathfrak{N}}''))$$

in the category $\mathfrak{N}'$ of neofunctors).



generators of $U\dot{\mathfrak{F}}'$



generators of $U\dot{\mathfrak{F}}$

We write

$$\xi = ((a, w_1), (b.k, w_2)) \quad \text{and} \quad \xi' = ((a.k, w_3), (b, w_4))$$

and we denote by $\mu\mathcal{F}'$ and by $\mu\mathcal{F}$ respectively the (χ_1, χ_4)-sketches

$$\mu\mathcal{F}' = (U\dot{\mathcal{F}}', (\{i\}, \{\xi_0, \xi, \xi'\})) \quad \text{and} \quad \mu\mathcal{F} = (U\dot{\mathcal{F}}, (\{i\}, \{\xi_0, \xi, \xi'\})).$$

These sketches admit $\mu\mathcal{F}^{\#} = (U\dot{\mathcal{N}}'', (\{i\}, \{\xi_0\}))$ as a (χ_1, χ_4)-sub sketch.

We always suppose that $H^{\cdot}$ *is with finite fiber products and that* $VH^{\cdot}$ *contains the class associated with a naturalized* $\{\{1, 2\}\}$*-fiber product mapping.*

PROPOSITION 1. *$(\mu\mathcal{F}', \mu\mathcal{F}^{\#})$ and $(\mu\mathcal{F}, \mu\mathcal{F}^{\#})$ are $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-Ideas. $(\mu\mathcal{F}', \mu\dot{\mathcal{G}}\mathcal{N})$ and $(\mu\mathcal{F}, \mu\dot{\mathcal{G}}\mathcal{N})$ are $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-ideas.*

PROOF. Write $A\mathcal{F}' = \{(k.(k_2.g), (k.k_1))\}$ and denote by $U\overset{1}{\mathcal{F}}'$ the multiplicative graph such that

$$A(U\overset{1}{\mathcal{F}}') = A(U\dot{\mathcal{F}}') - A\mathcal{F}', \qquad 1$$

by $U\overset{1}{\mathcal{F}}$ the multiplicative graph such that

$$A(U\overset{1}{\mathcal{F}}) = A(U\dot{\mathcal{F}}) - (A\mathcal{F}' \cup A\mathcal{F}'') \qquad 1$$

(notations of the Proposition 5-4). Then

$$\mu\overset{1}{\mathcal{F}}' = (U\overset{1}{\mathcal{F}}', (\{i\}, \{\xi_0, \xi, \xi'\})) \quad \text{and} \quad \mu\overset{1}{\mathcal{F}} = (U\overset{1}{\mathcal{F}}, (\{i\}, \{\xi_0, \xi, \xi'\}))$$

are (χ_1, χ_4)-sketches. $\mu\mathcal{F}'$ is defined by $\mu\overset{1}{\mathcal{F}}'$ and the class $A\mathcal{F}'$ (formed of one axiom); $\mu\mathcal{F}$ is defined by $\mu\overset{1}{\mathcal{F}}$ and $A\mathcal{F} = A\mathcal{F}' \cup A\mathcal{F}''$.

- Suppose that $F = (H^{\cdot}, \underline{F}, U\dot{\mathcal{N}}'')$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of $\mu\mathcal{F}^{\#}$. We are going to show that F may be extended, uniquely up to an equivalence, into a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of $\mu\overset{1}{\mathcal{F}}'$. If $d \in U\mathcal{N}''$, we write $d' = F(d)$. In particular we have $a'.k' = a'.v'_2$ and $b'.k' = b'.v'_1$. There exist

$$\xi(\hat{F}) = ((a', w'_1), (b'.k', w'_2)) \in VH^{\cdot}$$

and

$$\xi'(\hat{F}) = ((a'.k', w'_3), (b', w'_4)) \in VH^{\cdot}.$$

As $((a', v'_1), (b', v'_2))$ is a naturalized fiber product and as

$$a'.w'_1 = b'.(k'.w'_2),$$

there exists one and only one $k'_1 \in H$ such that

$$w'_1 = v'_1 . k'_1 \quad \text{and} \quad k'.w'_2 = v'_2 . k'_1 .$$

Since $a'.(k'.w'_3) = b'.w'_4$, there exists one and only one $k'_2 \in H$ such that

$$k'.w'_3 = v'_1 . k'_2 \quad \text{and} \quad w'_4 = v'_2 . k'_2 .$$

From the equalities

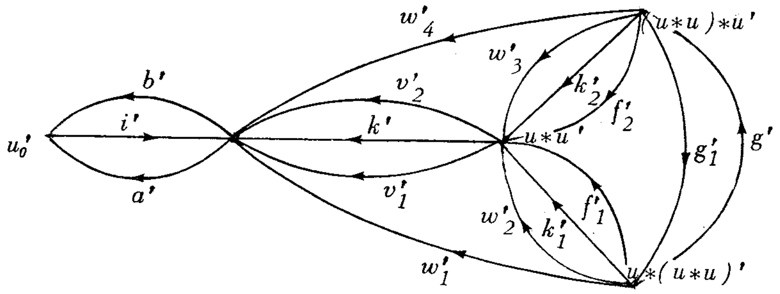
$$a'.w'_1 = b'.k'.w'_2 = b'.(v'_1 . w'_2),$$
$$b'.w'_4 = a'.k'.w'_3 = a'.(v'_2 . w'_3),$$

it follows that there exists one and only one $f'_1 \in H$ such that

$$w'_1 = v'_1 . f'_1 \quad \text{and} \quad v'_1 . w'_2 = v'_2 . f'_1$$

and that there exists one and only one $f'_2 \in H$ such that

$$v'_2 . w'_3 = v'_1 . f'_2 \quad \text{and} \quad w'_4 = v'_2 . f'_2 .$$



We get

$$(a'.k').f'_1 = a'.v'_2 . f'_1 = a'.v'_1 . w'_2 = b'.(v'_2 . w'_2)$$

and

$$a'.v'_1 . w'_3 = b'.v'_2 . w'_3 = b'.v'_1 . f'_2 = b'.k'.f'_2 .$$

So, since $\xi(\hat{F}) \in VH^{\cdot}$ and $\xi'(\hat{F}) \in VH^{\cdot}$, there exists one and only one $g' \in H$ such that

$$w'_3 . g' = f'_1 \quad \text{and} \quad w'_4 . g' = v'_2 . w'_2$$

and there exists one and only one $g'_1 \in H$ such that

$$w'_1 . g'_1 = v'_1 . w'_3 \quad \text{and} \quad w'_2 . g'_1 = f'_2 .$$

Moreover

$$v'_1 . w'_3 . g' = v'_1 . f'_1 = w'_1 \quad \text{and} \quad v'_2 . w'_3 . g' = v'_2 . f'_1 = v'_1 . w'_2 .$$

Hence we define a neofunctor $\hat{F}$ from $U\overset{1}{\mathcal{F}}{}'$ toward $H^{\cdot}$ by writing:

$\hat{F}(d) = d'$ if $d \in U\mathcal{F}'$ and if d' is defined above,

$\hat{F}(u*(u*u)) = a(k_1')$, $\hat{F}((u*u)*u) = a(k_2')$,

$\hat{F}(d_1 . d) = \hat{F}(d_1).\hat{F}(d)$ if $(d_1, d) \in U\overset{1}{\mathcal{F}}{}' * U\overset{1}{\mathcal{F}}{}'$,

the preceding proof implying

$$\hat{F}(d_1).\hat{F}(d) = \hat{F}(\hat{d}_1).\hat{F}(\hat{d}) \quad \text{whenever } d_1 . d = \hat{d}_1 . \hat{d},$$

except perhaps when

$$d_1 = k = \hat{d}_1, \quad d = k_1 \quad \text{and} \quad \hat{d} = k_2 . g,$$

case which is not to be considered, for $(k, k_1) \notin U\overset{1}{\mathcal{F}}{}' * U\overset{1}{\mathcal{F}}{}'$.

- Let us show that g' admits g'_1 as inverse in $H^{\cdot}$. Indeed, from the relations

$$v_1' . w_2' . g_1' . g' = v_1' . f_2' . g' = v_2' . w_3' . g' = v_2' . f_1' = v_1' . w_2'$$

and

$$v_2' . w_2' . g_1' . g' = v_2' . f_2' . g' = w_4' . g' = v_2' . w_2',$$

we deduce $w_2' . g_1' . g' = w_2'$, for (v_1', v_2') is left regular. We have also

$$w_1' . g_1' . g' = v_1' . w_3' . g' = v_1' . f_1' = w_1'$$

and, (w_1', w_2') being left regular, we conclude that $g_1' . g' = a(g')$. In the same way we obtain

$$w_4' . g' . g_1' = v_2' . w_2' . g_1' = v_2' . f_2' = w_4',$$

and $w_3' . g' . g_1' = w_3'$ because

$$v_1' . w_3' . g' . g_1' = w_1' . g_1' = v_1' . w_3',$$

$$v_2' . w_3' . g' . g_1' = v_1' . w_2' . g_1' = v_1' . f_2' = v_2' . w_3'.$$

Thus $g' . g_1' = \beta(g')$ and $g_1' = (g')^{\cdot 1}$ in $H^{\cdot}$.

- $\hat{F}$ is a $\mu_H^{\iota V}$-realization of $\mu\overset{1}{\mathcal{F}}{}'$ extending F. Suppose that $\hat{F}'$ is another $\mu_H^{\iota V}$-realization of $\mu\overset{1}{\mathcal{F}}{}'$ extending F, and denote by d'' the element $\hat{F}'(d)$ for $d \in U\mathcal{F}'$. We have

$$d' = d'' \quad \text{if} \quad d \in U\mathfrak{N}''.$$

As $\xi(\hat{F}) = \hat{F}^4(\xi)$ and $\xi(\hat{F}') = \hat{F}'^4(\xi)$ are naturalized fiber products of $(a', b'.k')$, there exists one and only one $d_1 \in H^{\cdot}_{\gamma}$ such that

$$w''_1 . d_1 = w'_1 \text{ and } w''_2 . d_1 = w'_2 .$$

Similarly, there exists one and only one $d_2 \in H^{\cdot}_Y$ such that

$$w''_3 . d_2 = w'_3 \text{ and } w''_4 . d_2 = w'_4 .$$

Let r be the surjection from $(U\mathcal{F}_{\prime})^{\cdot}_0$ into $H^{\cdot}_Y$ such that

$r(\hat{u}) = \hat{u}$ if $\hat{u} = u, u_0$ or $u*u$,

$r(u*(u*u)) = d_1$ and $r((u*u)*u) = d_2$.

We are going to prove that $(\hat{F}', r, \hat{F})$ defines an equivalence. Indeed, we have

$$v'_1 . k'_1 = w'_1 = w''_1 . d_1 = v'_1 . k''_1 . d_1,$$
$$v'_2 . k'_1 = k' . w'_2 = k' . w''_2 . d_1 = v'_2 . k''_1 . d_1 ;$$

so, (v'_1, v'_2) being left regular, $k'_1 = k''_1 . d_1$. Similarly $k'_2 = k''_2 . d_2$. From the relations

$$v'_1 . w''_3 . d_2 . g' = v'_1 . w'_3 . g' = w'_1 = w''_1 . d_1 = v'_1 . w''_3 . g'' . d_1,$$
$$v'_2 . w''_3 . d_2 . g' = v'_2 . w'_3 . g' = v'_1 . w'_2 = v'_1 . w''_2 . d_1 = v'_2 . w''_3 . g'' . d_1,$$

we deduce $w''_3 . d_2 . g' = w''_3 . g'' . d_1$; we also get

$$w''_4 . d_2 . g' = w'_4 . g' = v'_2 . w'_2 = v'_2 . w''_2 . d_1 = w''_4 . g'' . d_1,$$

and (w''_3, w''_4) being left regular, $d_2 . g' = g'' . d_1$. Write

$$M = U\mathcal{H}_{\bullet} \cup \{ w_1, w_2, w_3, w_4, k_1, k_2, g \} .$$

The equalities that we have just proved mean that $(\hat{F}'_1, r, \hat{F}_1)$ is a triple defining an equivalence, where $\hat{F}_1$ and $\hat{F}'_1$ are the restrictions of $\hat{F}$ and $\hat{F}'$ to $M^{\cdot}$. Since M stably generates $U\overset{\perp}{\mathcal{F}}_{\prime}$, the triple $(\hat{F}', r, \hat{F})$ also defines an equivalence. Hence $\mu\mathcal{F}^{\#}$ is a $\mu^{\iota V}_{H}$-system of generators of $\mu\mathcal{F}_{\prime}$.

- To show that $(\mu\mathcal{F}, \mu\mathcal{F}^{\#})$ is a $\mu^{\iota V}_{H}$-Idea, we will extend the neofunctor $\hat{F}$ constructed above to $U\overset{\perp}{\mathcal{F}}$. Let $U\overset{\top}{\mathcal{H}}_{\prime}$ be the multiplicative graph such that, with the notations of the Proposition 5-4;

$$A(U\overset{\top}{\mathcal{H}}_{\prime}) = A(U\mathring{\mathcal{H}}_{\prime}) - A\mathcal{F}_{\bullet} = A(U\overset{\perp}{\mathcal{H}}_{\prime}) \cup A\mathcal{H}_{\bullet} .$$

The Proposition 5-4 asserts that there exists a neofunctor $(H^{\cdot}, \underline{F}', U\overset{\perp}{\mathcal{H}}_{\prime})$, extending F. As F is a neofunctor from $U\mathring{\mathcal{H}}_{\bullet}$ toward $H^{\cdot}$, the surjection $\underline{F}'$ also defines a neofunctor $F' = (H^{\cdot}, \underline{F}, U\overset{\top}{\mathcal{H}}_{\prime})$. By definition, $U\mathring{\mathcal{H}}_{\bullet}$ is a stable sub-multiplicative graph of $U\overset{\perp}{\mathcal{F}}{}'$ and of $U\overset{\top}{\mathfrak{N}}{}'$, and $U\overset{\perp}{\mathcal{F}}$ is the fiber sum in $\mathfrak{N}'$ of

$$((U\overset{\perp}{\mathcal{F}}{}', \iota, U\mathfrak{N}''), (U\overset{\top}{\mathfrak{N}}{}', \iota, U\dot{\mathfrak{N}}'')).$$

Hence there exists a unique neofunctor $\tilde{F} = (H^{\cdot}, \tilde{\underline{F}}, U\overset{\perp}{\mathcal{F}})$ extending both $\hat{F}$ and F', and $\tilde{F}$ is a $\mu_H^{\iota V}$-realization of $\mu\overset{\perp}{\mathcal{F}}$ extending F.

- Suppose that $\tilde{F}'$ be another $\mu_H^{\iota V}$-realization of $\mu\overset{\perp}{\mathcal{F}}$ extending F, and denote by $\hat{F}'$ and F'' respectively the restrictions of $\tilde{F}'$ to $U\overset{\perp}{\mathcal{F}}{}'$ and to $U\overset{\top}{\mathfrak{N}}{}'$. From the beginning of the proof and from the Proposition 5-4, it follows that there exist two equivalences Φ from $\hat{F}$ onto $\hat{F}'$ and Φ' from F' onto F'' such that

$$\Phi(d) = \Phi'(d) = d'^{\boxminus} \quad \text{for each} \quad d \in U\dot{\mathfrak{N}}''.$$

Therefore, there exists a unique equivalence $\tilde{\Phi}$ from $\tilde{F}$ onto $\tilde{F}'$ extending both Φ and Φ'. This proves that $\mu_{\mathcal{F}^{\#}}$ is a $\mu_H^{\iota V}$-system of generators of $\mu\mathcal{F}$.

- If G is a $\mu_H^{\iota V}$-realization of $\mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N}$ and if $\hat{G}_1$ and $\hat{G}_2$ are two $\mu_H^{\iota V}$-realizations of $\mu\mathcal{F}'$ (resp. of $\mu\mathcal{F}$) extending G, then $\hat{G}_1$ and $\hat{G}_2$ admit the same restriction $\bar{G}$ to $U\dot{\mathfrak{N}}''$. Since $\bar{G}$ is a $\mu_H^{\iota V}$-realization of $\mu_{\mathcal{F}^{\#}}$ and $(\mu\mathcal{F}', \mu_{\mathcal{F}^{\#}})$ and $(\mu\mathcal{F}, \mu_{\mathcal{F}^{\#}})$ are $\mu_H^{\iota V}$-Ideas, $\hat{G}_1$ and $\hat{G}_2$ are equivalent. Consequently $(\mu\mathcal{F}', \mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$ (resp. $(\mu\mathcal{F}, \mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$) is a $\mu_H^{\iota V}$-idea.

COROLLARY. *If $VH^{\cdot}$ is the class associated to a naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber product mapping in $H^{\cdot}$, two $\mu_H^{\iota V}$-realizations $\hat{F}_1$ and $\hat{F}_2$ of $\mu\mathcal{F}'$ (resp. of $\mu\overset{\perp}{\mathcal{F}}{}'$) admitting the same restriction to $U\mathcal{G}\mathfrak{N}$ are equal.*

Indeed, $\hat{F}_1$ and $\hat{F}_2$ admit the same restriction F to $U\dot{\mathfrak{N}}''$ and the preceding proof shows that $\hat{F}_1$ and $\hat{F}_2$ are equal to the extension $\hat{F}$ of of F constructed above.

PROPOSITION 2. *The category $\mathcal{F}'^{\upsilon}$ of morphisms between $(\mu_{\mathfrak{M}}^{\iota V}, \mu\mathcal{F}', \mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$-structures is isomorphic to the category $\mathcal{F}'$ of quasi-functors corresponding to $\mathfrak{M}$; the category $\mathcal{F}^{\upsilon}$ of morphisms between $(\mu_{\mathfrak{M}}^{\iota V}, \mu\mathcal{F}, \mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$-structures is isomorphic to the category $\mathcal{F}$ of functors corresponding to $\mathfrak{M}$.*

PROOF. Suppose $F \in \mathcal{F}'^{\upsilon}_0$ and denote by $(C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ the non associative quasi-category $\hat{\gamma}_{\mathcal{F}^{\#}}(F)$ (Proposition 4-3). According to the Corollary of the Proposition 1, there exists a unique $\mu\mathfrak{M}^V$-realization $\hat{F}$ of $\mu\mathcal{F}'$ extending F, which is constructed in the proof of the Proposition 1. We see that $\hat{F}$ is defined as follows:

$\hat{F}(u*(u*u))$ is the class $C^{\bullet}*(C^{\bullet}*C^{\bullet})$ of all couples $(z,(y,x))$ such that $(y,x)\in C^{\bullet}*C^{\bullet}$ and $z\in C.\beta(y)$,

$\hat{F}((u*u)*u)$ is the class $(C^{\bullet}*C^{\bullet})*C^{\bullet}$ of all couples $((z,y),x)$ such that $(z,y)\in C^{\bullet}*C^{\bullet}$ and $x\in \alpha(y).C$,

$\hat{F}(k_1)$ is the mapping from $C^{\bullet}*(C^{\bullet}*C^{\bullet})$ into $C^{\bullet}*C^{\bullet}$ such that: $(z,(y,x))\to(z,y.x)$,

$\hat{F}(k_2)$ is the mapping from $(C^{\bullet}*C^{\bullet})*C^{\bullet}$ into $C^{\bullet}*C^{\bullet}$ such that: $((z,y),x)\to(z.y,x)$,

$\hat{F}(g)$ is the bijection $(z,(y,x))\to((z,y),x)$ from $C^{\bullet}*(C^{\bullet}*C^{\bullet})$ onto $(C^{\bullet}*C^{\bullet})*C^{\bullet}$.

Thus $\hat{F}(k.(k_2.g))$ and $\hat{F}(k).\hat{F}(k_1)$ are respectively the mappings

$$(z,(y,x))\to(z.y).x \quad \text{and} \quad (z,(y,x))\to z.(y.x)$$

from $C^{\bullet}*(C^{\bullet}*C^{\bullet})$ into C. As $(H^{\bullet},\hat{F},U\mathcal{F}')$ is a neofunctor, we get: $\hat{F}(k.(k_2.g))=\hat{F}(k).\hat{F}(k_1)$; so

$$z.(y.x)=(z.y).x \quad \text{if} \quad (z,(y,x))\in C^{\bullet}*(C^{\bullet}*C^{\bullet}),$$

that is if the two members are defined. So $(C^{\bullet},\beta,\alpha)$ is a quasi-category, denoted by $\hat{\gamma}_{\mathcal{F}'}(F)$.

- Conversely, if D is a quasi-category, we always have

$$D=\hat{\gamma}_{\mathcal{F}'}(F), \quad \text{where} \quad F=\hat{\gamma}^{-1}_{\mathcal{F}^{\#}}(D).$$

- If Φ is the natural transformation $\Phi\in\mathcal{F}'^{\mathfrak{V}}$ defined by the triple (F_2,τ,F_1) then $\Phi\in\mathcal{F}^{\#\mathfrak{V}}$, so that (Proposition 3-3)

$$\hat{\gamma}_{\mathcal{F}^{\#}}(\Phi)=(\hat{\gamma}_{\mathcal{F}'}(F_2),\underline{\tau(u)},\hat{\gamma}_{\mathcal{F}'}(F_1))\in\mathcal{F}^{\#}.$$

As $\mathcal{F}'$ is a full sub-category of $\mathcal{F}^{\#}$, we conclude that the restriction $\hat{\gamma}_{\mathcal{F}'}$ of $\hat{\gamma}_{\mathcal{F}^{\#}}$ to $\mathcal{F}'^{\mathfrak{V}}$ is an isomorphism onto $\mathcal{F}'$.

- Suppose $F\in\mathcal{F}_0^{\mathfrak{V}}$; we have $F\in\mathcal{F}_0'^{\mathfrak{V}}$ and $\hat{\gamma}_{\mathcal{F}'}(F)=(C^{\bullet},\beta,\alpha)$. The Proposition 5-4 asserts that $C^{\bullet}$ is a non associative category; hence $C^{\bullet}$ is a category, denoted by $\hat{\gamma}_{\mathcal{F}}(F)$. If $\Phi \in \mathcal{F}^{\mathrm{U}}$ is defined by the triple (F_2, r, F_1) we get

$$\hat{\gamma}_{\mathcal{F}'}(\Phi) = ((C_2^{\cdot}, \beta, a), \underline{r(u)}, (C_1^{\cdot}, \beta, a)) \in \mathcal{F}' ;$$

so $(C_2^{\cdot}, \underline{r(u)}, C_1^{\cdot})$ is an element $\hat{\gamma}_{\mathcal{F}}(\Phi)$ of $\mathcal{F}$, and $\hat{\gamma}_{\mathcal{F}} : \Phi \to \hat{\gamma}_{\mathcal{F}}(\Phi)$ defines an isomorphism $\hat{\gamma}_{\mathcal{F}}$ from $\mathcal{F}^{\mathrm{U}}$ onto $\mathcal{F}$.

DEFINITION. $(\mu_{\mathcal{F}'}, \mu_{\dot{\mathcal{G}}\mathcal{N}})$ (resp. $(\mu_{\mathcal{F}}, \mu_{\dot{\mathcal{G}}\mathcal{N}})$) is called the *idea of a quasi-category* (resp. *of a category*). A $(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota V}, \mu_{\mathcal{F}'}, \mu_{\dot{\mathcal{G}}\mathcal{N}})$-structure is called a *$(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-category*, a $(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota V}, \mu_{\mathcal{F}}, \mu_{\dot{\mathcal{G}}\mathcal{N}})$-structure a *$(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-category*. A morphism between $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-categories is called a *$(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-functor*, a morphism between $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-categories a *$(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-functor.*

We denote by $\mathcal{F}'(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ the category of the $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-functors, by $\mathcal{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ its full sub-category formed by the $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-functors. Hence $F \in \mathcal{F}'(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})_0$ is a non associative $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-category such that, if $\hat{F}$ is a $\mu_{H^{\cdot}}^{\iota V}$-realization of $\mu_{\mathcal{F}'}^{\mathbf{1}}$ extending F (there exists such a $\hat{F}$ according to the Proposition 1), then

$$F(k).\hat{F}(k_2) = F(k).\hat{F}(k_2).\hat{F}(g).$$

A $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-category is a $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-category F such that, if $\tilde{F}$ denotes a $\mu_{H^{\cdot}}^{\iota V}$-realization of $\mu_{\mathcal{F}}^{\mathbf{1}}$ extending F, we have

$$F(k).\tilde{F}(i_m).\tilde{F}(j_m) = F(u) \quad \text{for } m = 1 \text{ and } 2.$$

$\mathcal{F}'(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ is a full sub-category of

$$\mathcal{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota}) \text{ and of } \mathcal{F}^{\#}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot}).$$

If $R_g(H^{\cdot}) = H_{\gamma}^{\cdot}.H^{\iota}.H_{\gamma}^{\cdot}$, then $\mathcal{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ is a full sub-category of $\mathcal{N}'(H^{\cdot}, H^{\iota})$; it is always a full sub-category of $\mathcal{F}''(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$. The restriction of $\pi_{\mathcal{N}''}^{H^{\cdot}}$ to $\mathcal{F}'(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ (resp. to $\mathcal{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$) is a faithful functor $\pi_{\mathcal{F}'}^{H^{\cdot}}$ (resp. $\pi_{\mathcal{F}}^{H^{\cdot}}$) toward $H^{\cdot}$.

REMARK. If $VH^{\cdot}$ is the class associated with a naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber product mapping in $H^{\cdot}$, a $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-category (resp. -category) F may be identified with its restriction to $U_{\epsilon}^{\cdot}$, where

$$U_\epsilon = U_{\mathcal{G}} \cup \{ k, u * u \},$$

which determines uniquely F.

PROPOSITION 3. *$\mathcal{F}'(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot) = \mathcal{F}'(L^\cdot, L^\iota, V^\square H^\cdot)_0$ and*

$$\mathcal{F}(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot) = \mathcal{F}(L^\cdot, L^\iota, V^\square H^\cdot)_0,$$

where $L^\cdot = \boxminus H^\cdot$ and $L^\iota = \square(H^\cdot; H, H^\iota)$.

PROOF. A $(L^\cdot, L^\iota, V^\square H^\cdot)$-quasi-category is a $(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)$-quasi-functor, according to the Corollary of the Proposition 1-1. Conversely, suppose $\Phi \in \mathcal{F}'(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)$ and denote by (F_2, τ, F_1) the triple defining the natural transformation Φ. Let $\hat{F}_m$ be a $\mu^{\iota V}_{H^\cdot}$-realization of $\mu \mathcal{F}'$ extending F_m for $m = 1$ and 2, and $\bar{F}_m$ its restriction to $U\dot{\mathfrak{H}}$". The triple $(\bar{F}_2, \tau, \bar{F}_1)$ defines a $\mu^{\iota V^\square}_{L^\cdot}$-realization $\bar{\Phi}$ of $\mu_{\mathcal{F}^\#}$ (proof Proposition 3-3). There exist naturalized fiber products t and t' of

$$(\bar{\Phi}(a), \bar{\Phi}(b.k)) \text{ and } (\bar{\Phi}(a.k), \bar{\Phi}(b))$$

respectively in $L^\cdot$ such that

$$(p^H_1)^4(t) = \xi(\hat{F}_2), \quad (p^H_1)^4(t') = \xi'(\hat{F}_2),$$
$$(p^H_4)^4(t) = \xi(\hat{F}_1), \quad (p^H_4)^4(t') = \xi'(\hat{F}_1),$$

where p^H_n = n-th projection of H^4. We have constructed (Proposition 1) a $\mu^{\iota V^\square}_{L^\cdot}$-realization $\hat{\Phi}$ of $\mu \dot{\mathcal{F}}'$ extending $\bar{\Phi}$ such that $\xi(\hat{\Phi}) = t$ and $\xi'(\hat{\Phi}) = t'$. As $\hat{F}'_1 = \alpha^\boxplus(\hat{\Phi})$ is the unique (Corollary Proposition 1) $\mu^{\iota V}_{H^\cdot}$-realization of $\mu \dot{\mathcal{F}}'$ extending $\bar{F}_1$ such that

$$\xi(\hat{F}'_1) = \xi(\hat{F}_1) \text{ and } \xi'(\hat{F}'_1) = \xi'(\hat{F}_1),$$

we get $\underline{\hat{F}'_1} = \underline{\hat{F}_1}$. Similarly $\underline{\hat{F}_2} = \underline{\beta^\boxplus(\hat{\Phi})}$. So $(L^\cdot, \underline{\hat{\Phi}}, U\dot{\mathcal{F}}')$ is a natural transformation from $\hat{F}_1$ into $\hat{F}_2$, and $\Phi \in \mathcal{F}'(L^\cdot, L^\iota, V^\square H^\cdot)_0$. Using the proof of the Proposition 3-3, we find a similar result when $\mathcal{F}'$ is replaced by $\mathcal{F}$.

PROPOSITION 4. *$\mathcal{F}'(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)$ and $\mathcal{F}(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)$ are saturated sub-categories of $\mathcal{F}^\#(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)$. If $S(H^\iota) = H^\cdot_\gamma . H^\iota . H^\cdot_\gamma$, the category $\mathcal{F}'(H^\cdot_\iota) = \mathcal{F}'(H^\cdot, S(H^\iota), \hat{V}H^\cdot)$ (resp. $\mathcal{F}(H^\cdot_\iota) = \mathcal{F}(H^\cdot, S(H^\iota), \hat{V}H^\cdot)$) where $\hat{V}H^\cdot$ is the class of all $\{\{1,2\}\}$-naturalized fiber products in $H^\cdot$,* *is an enlargement of* $\mathfrak{F}'(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ *(resp. of* $\mathfrak{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$*).*

PROOF. Let $\Phi \in \mathfrak{F}^{\#}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ be an equivalence defined by the triple (F_2, r, F_1), where $F_1 \in \mathfrak{F}'(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})_0$. Then Φ extends into a $\mu^{\iota}_{L}V^{\square}$-realization $\hat{\Phi}$ of $\mu\dot{\mathfrak{F}}'$ (proof of the Proposition 3), defined by the triple $(\hat{F}_2, \hat{r}, \hat{F}_1)$. The construction of $\hat{\Phi}$ (Proposition 1) shows that $\hat{\Phi}$ is an equivalence. Since F_1 is a $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-category, $\hat{F}'_1 = (H^{\cdot}, \underline{\hat{F}}_1, U\dot{\mathfrak{F}}')$ is a neofunctor. It follows that $\hat{F}'_2 = (H^{\cdot}, \underline{\hat{F}}_2, U\dot{\mathfrak{F}}')$ is also a neofunctor. Hence

$$F_2 \in \mathfrak{F}'(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})_0 \quad \text{and} \quad \Phi \in \mathfrak{F}'(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})_{\gamma}.$$

This proves the first assertion. A similar proof shows that $\mathfrak{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ is a saturated sub-category of $\mathfrak{F}^{\#}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$.

- Suppose $F \in \mathfrak{F}'(H^{\cdot}_{\iota})_0$ and let $\bar{F}$ be the neofunctor extending F to $U\dot{\mathfrak{N}}^{*}$. As $S(H^{\iota}) = H^{\cdot}_{\gamma}.H^{\iota}.H^{\cdot}_{\gamma}$, there exist

$$y \in H^{\cdot}_{\gamma} \quad \text{and} \quad y_0 \in H^{\cdot}_{\gamma} \quad \text{such that} \quad y.F(i).y_0^{-1} \in H^{\iota}.$$

Write

$$F'(a) = y_0.F(a).y^{-1} \quad \text{and} \quad F'(b) = y_0.F(b).y^{-1}.$$

Since $VH^{\cdot}$ contains the class associated with a naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber product mapping, there exists

$$t = ((F'(a), v'_1), (F'(b), v'_2)) \in VH^{\cdot}.$$

As $y \in H^{\cdot}_{\gamma}$, $y_0 \in H^{\cdot}_{\gamma}$ and $\xi_0(F) \in \hat{V}H^{\cdot}$, we have (CS Chapter IV)

$$((F'(a), y.F(v_1)), (F'(b), y.F(v_2))) \in \hat{V}H^{\cdot}.$$

So there exists one, and only one, $x \in H^{\cdot}_{\gamma}$ such that

$$v'_1.x = y.F(v_1) \quad \text{and} \quad v'_2.x = y.F(v_2).$$

Denote by r the surjection

$$u \to y, \quad u_0 \to y_0, \quad u*u \to x$$

into $H^{\cdot}_{\gamma}$. There exists a neofunctor $\bar{F}' = (H^{\cdot}, \underline{\bar{F}}', U\dot{\mathfrak{N}}^{*})$ such that the triple $(\bar{F}', r, \bar{F})$ defines an equivalence Φ'. The restriction of Φ' to $U\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N}$ is an equivalence Φ defined by the triple

$$(F', r, F), \quad \text{where} \quad F' = (H^{\cdot}, \underline{\bar{F}}'\iota, U\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N}).$$

We have

$$\Phi \in \mathcal{F}^{\#}(H^{\cdot}, S(H^{\iota}), \hat{V}H^{\cdot}) \quad \text{and} \quad F' \in \mathcal{F}^{\#}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot}),$$

because

$$F'(i) = \gamma . F(i) . \gamma_0^{-1} \in H^{\iota} \quad \text{and} \quad \xi_0(F') = t \in VH^{\cdot}.$$

It follows from the first part of the proposition that Φ belongs to $\mathcal{F}'(H^{\cdot}_{\iota})$, so that $F' \in \mathcal{F}'(H^{\cdot}_{\iota})$. We have seen in the proof of the proposition 1 that we may construct an extension $\hat{F}'$ of F' to $U\dot{\mathcal{F}}$ satisfying the relations

$$\xi(\hat{F}') \in VH^{\cdot} \quad \text{and} \quad \xi'(\hat{F}') \in VH^{\cdot}.$$

Hence $F' \in \mathcal{F}'(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$. This proves that $\mathcal{F}'(H^{\cdot}_{\iota})$ is an enlargement of $\mathcal{F}'(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$.

- If moreover we suppose $F \in \mathcal{F}(H^{\cdot}_{\iota})_0$, we have $\Phi \in \mathcal{F}(H^{\cdot}_{\iota})$, according to the first part of the proposition; consequently $F' \in \mathcal{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$, and $\mathcal{F}(H^{\cdot}_{\iota})$ is an enlargement of $\mathcal{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$.

COROLLARY. *The category* $\tilde{\mathcal{F}}'^{\mathcal{U}} = \mathcal{F}'(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{\iota}, \hat{V}\mathfrak{M})$ *is an enlargement of* $\mathcal{F}'^{\mathcal{U}}$ *and* $\tilde{\mathcal{F}}^{\mathcal{U}} = \mathcal{F}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{\iota}, \hat{V}\mathfrak{M})$ *is an enlargement of* $\mathcal{F}^{\mathcal{U}}$.

Indeed, this is the particular case of the Proposition 4 when

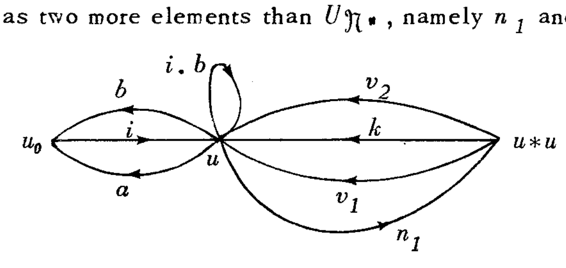
$$H^{\cdot} = \mathfrak{M}, \quad H^{\iota} = \mathfrak{M}^{\iota}.$$

6. THE IDEA OF A GROUPOID.

Let $U\dot{\mathfrak{N}}''_{\mathfrak{g}}$ be the multiplicative graph admitting $U\dot{\mathfrak{N}}''$ as a sub-multiplicative graph, stably generated by the class $U\mathfrak{N}'' \cup \{n_1\}$ and such that

$$v_1 . n_1 = u \quad \text{and} \quad k . n_1 = i . b$$

(i.e. $U\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}}$ has two more elements than $U\mathfrak{N}''$, namely n_1 and $i.b$).



Let $U^{\cdot}_{g}$ be the multiplicative graph stably generated by $U\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}} \cup U\mathcal{F}$, admitting $U\dot{\mathfrak{N}}''_{\mathfrak{g}}$ and $U\dot{\mathcal{F}}$ as sub-multiplicative graphs, and such that

$$(v_2 . n_1).(v_2 . n_1) = u \qquad 1$$

(i.e. $U_g = U\mathcal{F} \cup \{ n_1, v_2 . n_1 \}$). $U\mathfrak{N}''_g \cup \{ v_2 . n_1 \}$ defines a sub-multiplicative graph $U\dot{\mathfrak{N}}''_g$ of $U^\cdot_g$.

We again suppose that $VH^\cdot$ *contains the class associated with a naturalized* $\{\{ 1, 2\}\}$*-fiber product mapping in* $H^\cdot$.

PROPOSITION 1. *Let* μ_g *and* $\mu\mathfrak{N}''_g$ *be the* (χ_1, χ_4)*-sketches:*

$$\mu_g = (U^\cdot_g, (\{ i \}, \{ \xi_0, \xi, \xi' \})) \quad and \quad \mu\mathfrak{N}''_g = (U\dot{\mathfrak{N}}''_g, (\{ i \}, \{ \xi_0 \})).$$

Then $(\mu_g, \mu\mathfrak{N}''_g)$ *is a* $\mu^{\iota V}_H$*-Idea and* $(\mu_g, \mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$ *is a* $\mu^{\iota V}_H$*-idea.*

PROOF. Write $A_g = \{ (u, (v_2 . n_1, v_2 . n_1)) \}$ and let $U^{\mathbf{1}}_g$ be the multiplicative graph such that, with the notations of the Proposition 1-5:

$$A(U^{\mathbf{1}}_g) = A(U^\cdot_g) - (A_g \cup A\mathcal{F}). \qquad 2$$

μ_g is defined by the (χ_1, χ_4)-sketch $\mu^{\mathbf{1}}_g = (U^{\mathbf{1}}_g, (\{ i \}, \{ \xi_0, \xi, \xi' \}))$ and the class $A_g \cup A\mathcal{F}$ of axioms. Suppose that $F' = (H^\cdot, \underline{F}', U\dot{\mathfrak{N}}''_g)$ is a $\mu^{\iota V}_H$-realization of $\mu\mathfrak{N}''_g$. Since $F = (H^\cdot, \underline{F}'\iota, U\dot{\mathfrak{N}}'')$ is a $\mu^{\iota V}_H$-realization of $\mu\mathcal{F}^\#$, there exists, according to the Proposition 1-5, a $\mu^{\iota V}_H$-realization $\hat{F}$ of $\mu\mathcal{F}^{\mathbf{1}}$ extending F. It is clear that $U^{\mathbf{1}}_g$ is the fiber sum in $\mathfrak{N}'$ of

$$((U\dot{\mathfrak{N}}''_g, \iota, U\dot{\mathfrak{N}}''), (U\mathcal{F}^{\mathbf{1}}, \iota, U\dot{\mathfrak{N}}'')).$$

The neofunctors $\hat{F}$ and F' admit F as restriction to $U\dot{\mathfrak{N}}''$; so there exists a unique neofunctor $\tilde{F} = (H^\cdot, \underline{\tilde{F}}, U^{\mathbf{1}}_g)$ extending both $\hat{F}$ and F'. Let $\tilde{F}'$ be another $\mu^{\iota V}_H$-realization of $\mu^{\mathbf{1}}_g$ extending F'. The Proposition 1-5 asserts that there exists an equivalence

$$\hat{\Phi} \text{ from } \hat{F} \text{ onto } \hat{F}' = (H^\cdot, \underline{\tilde{F}}'\iota, U\mathcal{F}^{\mathbf{1}})$$

It follows that there is an equivalence $\tilde{\Phi}$ from $\tilde{F}$ onto $\tilde{F}'$ extending $\hat{\Phi}$ and such that

$$\tilde{\Phi}(d) = F(d)^{\boxminus} \quad \text{for each} \quad d \in U\dot{\mathfrak{N}}''_g .$$

Hence $\mu\mathfrak{N}''_g$ is a $\mu^{\iota V}_H$-system of generators of μ_g.

- Let F be a $\mu^{\iota V}_H$-realization of $\mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N}$ and suppose that $\tilde{F}_1$ and $\tilde{F}_2$ are two $\mu^{\iota V}_H$-realizations of μ_g extending F. Since

$$\hat{F}_1 = (H^{\cdot}, \underline{\tilde{F}}_1 \iota, U^{\perp}_{\mathfrak{F}}) \text{ and } F'_2 = (H^{\cdot}, \underline{\tilde{F}}_2 \iota, \hat{U}^{\cdot}_{\mathfrak{N}''_g})$$

admit the same restriction to $U^{\cdot}_{\mathfrak{N}''}$, there exists a unique neofunctor $(H^{\cdot}, \underline{\tilde{F}}'', U^{\perp}_g)$ extending both $\hat{F}_1$ and F'_2. It is clear that $\tilde{F}'' = (H^{\cdot}, \underline{\tilde{F}}'', U^{\cdot}_g)$ is also a neofunctor, because $\tilde{F}_1$ and $\tilde{F}_2$ are neofunctors from $U^{\cdot}_g$. We are going to show that $\tilde{F}'' = \tilde{F}_1$. We write $l = v_2 . n_1$ and

$$\tilde{F}_1(d) = d', \quad \tilde{F}''(d) = d'' \text{ for each } d \in U_g.$$

By hypothesis, $d' = d''$ if $d \in U_{\mathfrak{N}''}$. We have

$$a'.l'' = a'.v'_2.n''_1 = a'.k'.n''_1 = a'.i'.b' = b'$$

and

$$b'.l'' = a'.l''.l'' = a';$$

similarly,

$$a'.l' = b' \text{ and } b'.l' = a'.$$

$\xi(\hat{F}_1)$ being a naturalized fiber product in $H^{\cdot}$, from the relation

$$a'.l'' = b' = b'.i'.b' = b'.k'.n'_1$$

it follows that there exists a unique $f \in H$ satisfying

$$w'_1.f = l'' \text{ and } w'_2.f = n'_1.$$

The element $k'_1.f$ has the properties:

$$v'_1.k'_1.f = w'_1.f = l'', \quad v'_2.k'_1.f = k'.w'_2.f = k'.n'_1 = i'.b'.$$

Using the left regularity of (v'_1, v'_2), we get $k'_1.f = i'_1.j'_1.l''$ for

$$v'_1.i'_1.j'_1.l'' = l'' \text{ and } v'_2.i'_1.j'_1.l'' = i'.a'.l'' = i'.b'.$$

So $k'.k'_1.f = k'.i'_1.j'_1.l'' = l''$. Now we calculate $k'.k'_2.g'.f$. We obtain

$$v'_1.k'_2.g'.f = k'.w'_3.g'.f,$$

$$v'_2.k'_2.g'.f = w'_4.g'.f = v'_2.w'_2.f = v'_2.n'_1 = l' = v'_2.i'_2.j'_2.l'.$$

From the equalities

$$v'_1.w'_3.g'.f = w'_1.f = l'' = v'_1.n''_1.l''$$

and

$$v'_2.w'_3.g'.f = v'_1.w'_2.f = v'_1.n'_1 = u' = v'_2.n''_1.l'',$$

we deduce $w'_3.g'.f = n''_1.l''$. Hence

$v_1'.k_2'.g'.f = k'.w_3'.g'.f = k'.n_1''.l'' = i'.b'.l'' = i'.b'.l' = v_1'.i_2'.j_2'.l'$,

so that

$$k_2'.g'.f = i_2'.j_2'.l' \quad\text{and}\quad k'.k_2'.g'.f = k'.i_2'.j_2'.l' = l'.$$

Since we have $k'.k_1' = k'.k_2'.g'$, we get

$$l'' = k'.k_1'.f = k'.k_2'.g'.f = l'.$$

Furthermore $n_1' = n_1''$, because

$$v_1'.n_1' = u' = v_1'.n_1'' \quad\text{and}\quad v_2'.n_1' = l' = l'' = v_2'.n_1''.$$

As $U\mathfrak{F}\cup\{n_1, l\}$ stably generates $U^{\cdot}_{\tilde{g}}$, the neofunctors $\bar{F}_1$ and $\bar{F}''$ are equal. Thus the neofunctors $\bar{F}_1$ and $\bar{F}_2$ admit the same restriction to $U\dot{\mathfrak{N}}''_{\mathfrak{g}}$ and, $(\mu_g, \mu\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}})$ being a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-Idea, $\bar{F}_1$ and $\bar{F}_2$ are equivalent. Consequently, $(\mu_g, \mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-idea.

COROLLARY. *There exists a bijection r from the class of $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}})$ structures onto the class of $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_g, \mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$-structures.*

PROOF. If F' is a $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_g, \mu\dot{\mathfrak{N}}''_{\mathfrak{g}})$-structure, denote by $r(F')$ the neofunctor $(H^{\cdot}, \underline{F}'\iota, U\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$; then $r(F')$ is a $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_g, \mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$-structure. - Conversely, suppose that F is a $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_g, \mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$-structure and denote by $\bar{F}$ a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of μ_g extending F, by F' its restriction to $U\dot{\mathfrak{N}}''_{\mathfrak{g}}$. Thus F' is a $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}})$-structure, and we have $F = r(F')$. The last part of the proof of the Proposition 1 shows that F' does not depend on the particular extension $\bar{F}$ chosen. So $r: F' \to r(F')$ is a bijection.

PROPOSITION 2. *The category $\mathfrak{F}^{\upsilon}_{\mathfrak{g}}$ of morphisms between $(\mu^{\iota V}_{\mathfrak{M}}, \mu_g, \mu\dot{\mathfrak{G}}\mathfrak{N})$-structures is isomorphic to the full sub-category $\mathfrak{F}_{\mathfrak{g}}$ of $\mathfrak{F}$ the units of which are the groupoids $C^{\cdot} \in \mathfrak{F}_0$.*

PROOF. Suppose $\Gamma \in \mathfrak{F}^{\upsilon}_{\mathfrak{g}0}$ and denote by $\hat{\Gamma}$ a $\mu^{\iota V}_{\mathfrak{M}}$-realization of μ_g extending Γ. Since $\Gamma \in \mathfrak{F}^{\upsilon}$, it follows from the Proposition 2-5 that

$$\hat{\gamma}\mathfrak{F}(\Gamma) = (\Gamma(u), \Gamma(k))$$

is a category $C^{\cdot}$. Write $l' = \hat{\Gamma}(v_2.n_1)$. As

$$\Gamma(v_1).\hat{\Gamma}(n_1) = \Gamma(u) \text{ and } \Gamma(k).\hat{\Gamma}(n_1) = \hat{\Gamma}(i.b),$$

we have, for each $x \in C$:

$$\hat{\Gamma}(n_1)(x) = (x, l'(x)) \in C^{\cdot} * C^{\cdot} \quad \text{and} \quad x.l'(x) = \beta(x).$$

1 So $l'(x)$ is a right inverse of x in $C^{\cdot}$. From the relation $l'.l' = \Gamma(u)$, we get $x = l'(l'(x))$, which means that x is also a right inverse of $l'(x)$. Hence x is the inverse of $l'(x)$ in $C^{\cdot}$, and $C^{\cdot}$ is a groupoid.

- Conversely suppose $C^{\cdot} \in \mathcal{F}_{g}{}^{o}$ and let $\hat{\Gamma}$ be a $\mu^{\iota V}_{\mathfrak{M}}$-realization of $\mu\mathcal{F}$ extending $\Gamma = \hat{\gamma}\mathcal{F}^{-1}(C^{\cdot})$. Then $\Gamma \in \mathcal{F}^{\upsilon}_{g}$, for we construct an extension $\bar{\Gamma} = (\mathfrak{M}, \bar{\underline{\Gamma}}, U^{\cdot}_{g})$ of $\hat{\Gamma}$ such that $\bar{\Gamma}(n_1)$ be the mapping

$$x \to (x, x^{-1}) \text{ from } C \text{ into } C^{\cdot} * C^{\cdot}.$$

It follows that the restriction of $\hat{\gamma}\mathcal{F}$ to $\mathcal{F}^{\upsilon}_{g}$ is an isomorphism $\hat{\gamma}_g$ onto $\mathcal{F}_{g}$.

DEFINITION. $(\mu_g, \mu\dot{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$ is called *the idea of a groupoid.* A $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_g, \mu\dot{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$ structure is called a *$(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-groupoid.*

We denote by $\mathcal{F}_{g}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ the category of morphisms between $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-groupoids. It is a full sub-category of $\mathcal{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$. A $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-groupoid is a $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-category F such that F extends in a neofunctor $F' = (H^{\cdot}, \underline{F}', U^{\cdot}\mathfrak{N}^{\bullet}_{g})$ satisfying the condition

$$F(v_2).F'(n_1).F(v_2).F'(n_1) = F(u).$$

In fact, we will show (Proposition 5) that this last condition is implied by the preceding ones.

PROPOSITION 3. *$\mathcal{F}_{g}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ is a saturated sub-category of the category $\mathcal{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$. If $S(H^{\iota}) = H^{\cdot}_{\gamma}.H^{\iota}.H^{\cdot}_{\gamma}$, the category*

$$\mathcal{F}_{g}(H^{\cdot}_{\iota}) = \mathcal{F}_{g}(H^{\cdot}, S(H^{\iota}), \hat{V}H^{\cdot})$$

where $\hat{V}H^{\cdot}$ is the class of all naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber products in $H^{\cdot}$ is an enlargement of $\mathcal{F}_{g}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$.

PROOF. Let $\Phi \in \mathcal{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})_{\gamma}$ be the natural transformation defined by the triple (F_2, τ, F_1) such that F_1 be a $(H^{\cdot}, H^{\iota}, \underline{VH}^{\cdot})$-groupoid. Denote by $\bar{F}_1$ a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of $\underline{\mu_g}$ extending $\bar{F}_1$, by $\bar{F}_1$ its restriction to $U\mathfrak{N}^{\bullet}_{g}$. There exists a neofunctor $\bar{F}_2 = (H^{\cdot}, \bar{\underline{F}}_2, U\mathfrak{N}^{\bullet}_{g})$ extending F_2

such that the triple $(\bar F_2, r, \bar F_1)$ define an equivalence. If we put

$$h' = r(u),\quad h = r(u*u),\quad n_1' = \bar F_1(n_1),\quad v_2' = \bar F_1(v_2),$$
$$n_1'' = \bar F_2(n_1),\quad v_2'' = \bar F_2(v_2),$$

we get

$$v_2''.n_1''.v_2''.n_1'' = h'.v_2'.h^{-1}.h.n_1'.h'^{-1}.h'.v_2'.h^{-1}.h.n_1'.h'^{-1} =$$
$$h'.v_2'.n_1'.v_2'.n_1'.h'^{-1} = F_2(u) = \bar F_2(u).$$ 1

This implies $F_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)_0$.

- Suppose $S(H^\iota) = H^\cdot_\gamma . H^\iota . H^\cdot_\gamma$ and $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^\cdot_\iota)_0$; as $\mathcal{F}(H^\iota)$ is an enlargement of $\mathcal{F}(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)$ (Proposition 4-5), there exists an equivalence Φ from F onto $F' \in \mathcal{F}(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)_0$. Since $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^\cdot_\iota)$ is saturated in $\mathcal{F}(H^\cdot_\iota)$, we get $\Phi \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^\cdot_\iota)$, from which we deduce $F' \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)$. Hence $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^\cdot_\iota)$ is an enlargement of $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)$.

COROLLARY. *$\tilde{\mathcal{F}}^{\upsilon} = \mathcal{F}_{\mathcal{G}}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^i, \hat V\mathfrak{M})$ is an enlargement of $\mathcal{F}^{\upsilon}_{\mathcal{G}}$.*

PROPOSITION 4. *$\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot) = \mathcal{F}_{\mathcal{G}}(L^\cdot, L^\iota, V^{\square}H^\cdot)_0$, where*

$$L^\cdot = \boxminus H^\cdot \quad \textit{and} \quad L^\iota = \square(H^\cdot; H, H^\iota).$$

PROOF. As $(\mu_g, \mu'_{\mathcal{G}\mathfrak{N}})$ is a $\mu^{\iota}_L V^{\square}$-idea (Proposition 1), it results from the Corollary of the Proposition 1-1 that a $(L^\cdot, L^\iota, V^{\square}H^\cdot)$-groupoid is an element of $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)$. Conversely, suppose that $\Phi \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^\cdot, H^\iota, VH^\cdot)$ is the natural transformation defined by the triple (F_2, r, F_1). Denote by $\tilde F_m$, for $m = 1$ and 2, a $\mu^{\iota}_H V$-realization of μ_g extending F_m. According to the Proposition 4-5, there exists a $\mu^{\iota}_L V^{\square}$-realization $\hat\Phi$ of $\mu\mathcal{F}^{\#}$ extending Φ, defined by a triple $(\hat F_2, \hat r, \hat F_1)$ where

$$\hat F_m = (H^\cdot, \tilde F_{m}{}^{\iota}, U^\cdot_{\mathcal{F}}).$$

The elements

$$f_1 = r(u*u).\tilde F_1(n_1) \quad \text{and} \quad f_2 = \tilde F_2(n_1).r(u)$$

satisfy the relations

$$F_2(v_1).f = r(u).F_1(v_1).\tilde F_1(n_1) = r(u) = F_2(v_1).f_2,$$
$$F_2(k).f_1 = r(u).F_1(k).\tilde F_1(n_1) = r(u).\tilde F_1(i.b) =$$
$$\tilde F_2(i.b).r(u) = F_2(k).f_2.$$

It results from the following lemma that $f_1 = f_2$. Hence the triple $(\bar{F}_2, \tau, \bar{F}_1)$ defines a natural transformation $\bar{\Phi}$ extending $\hat{\Phi}$, since $U_g^{\cdot}$ is stably generated by $U\mathcal{F}\cup\{n_1\}$. So $\bar{\Phi}$ is a $\mu_{L^{\cdot}}^{\iota V^{\square}}$-realization of μ_g extending Φ, and Φ is a $(L^{\cdot}, L^{\iota}, V^{\square}H^{\cdot})$-groupoid.

1 LEMMA. *Suppose* $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{G}}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})_0$ *and* $f_m \in F(u*u).H$ *for* $m = 1$ *and* 2. *If*

$$F(v_1).f_1 = F(v_1).f_2 \quad \text{and} \quad F(k).f_1 = F(k).f_2,$$

then $f_1 = f_2$.

PROOF. Denote by $\bar{F}$ the unique extension of F to $U\mathcal{H}''_{\mathcal{G}}$ (Corollary of the Proposition 1). We write d' instead of $\bar{F}(d)$, when $d \in U\mathcal{H}''_{\mathcal{G}}$. As $\xi(F) \in VH^{\cdot}$ and

$$a'.l'.v_1'.f_m = a'.v_2'.n_1'.v_1'.f_m = a'.k'.n_1'.v_1'.f_m =$$
$$a'.i'.b'.v_1'.f_m = b'.v_1'.f_m = b'.k'.f_m,$$

where $l' = v_2'.n_1'$, there exists one and only one $t_m \in H$ such that

$$w_1'.t_m = l'.v_1'.f_m \quad \text{and} \quad w_2'.t_m = f_m.$$

We deduce $k_1'.t_1 = k_1'.t_2$ from the relations

$$v_1'.k_1'.t_1 = w_1'.t_1 = l'.v_1'.f_1 = l'.v_1'.f_2 = v_1'.k_1'.t_2,$$
$$v_2'.k_1'.t_1 = k'.w_2'.t_1 = k'.f_1 = k'.f_2 = v_2'.k_1'.t_2.$$

Hence

$$k'.k_2'.g'.t_1 = k'.k_1'.t_1 = k'.k_1'.t_2 = k'.k_2'.g'.t_2.$$

We are going to prove the equality

$$v_2'.f_m = k'.k_2'.g'.t_m,$$

from which will result $v_2'.f_1 = v_2'.f_2$, and so $f_1 = f_2$ because (v_1', v_2') is left regular. Indeed, we find $w_3'.g'.t_m = n_1'.l'.v_1'.f_m$, for

$$v_1'.w_3'.g'.t_m = w_1'.t_m = l'.v_1'.f_m = v_1'.n_1'.l'.v_1'.f_m,$$

$$v_2'.w_3'.g'.t_m = v_1'.w_2'.t_m = v_1'.f_m = l'.l'.v_1'.f_m = v_2'.n_1'.l'.v_1'.f_m.$$

Using the relations

$$v_1'.k_2'.g'.t_m = k'.w_3'.g'.t_m = k'.n_1'.l'.v_1'.f_m =$$

$$i'.b'.l'.v_1'.f_m = i'.a'.v_1'.f_m = i'.b'.v_2'.f_m,$$

$$v_2'.k_2'.g'.t_m = w_4'.g'.t_m = v_2'.w_2'.t_m = v_2'.f_m,$$

we get $k_2'.g'.t_m = i_2'.j_2'.v_2'.f_m$, since

$$v_1'.i_2'.j_2'.v_2'.f_m = i'.b'.v_2'.f_m \quad\text{and}\quad v_2'.i_2'.j_2'.v_2'.f_m = v_2'.f_m.$$

It follows

$$k'.k_2'.g'.t_m = k'.i_2'.j_2'.v_2'.f_m = v_2'.f_m,$$

which was to be proved.

COROLLARY. *There exists an isomorphism $\hat{r}$ from the category*

$$\mathcal{H}(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota V}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}})$$

of morphisms between $(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota V}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}})$-structures onto $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$.

PROOF. The surjection

$$\Phi \to (\boxminus H^{\cdot}, \underline{\Phi}\iota, U^{\cdot}_{\mathcal{G}}\mathfrak{N}), \quad\text{where}\quad \Phi \in \mathcal{H}(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota V}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}})$$

defines a functor $\hat{r}$ from $\mathcal{H}(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota V}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}})$ toward $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$. If $\hat{r}(\Phi) = \hat{r}(\bar{\Phi})$, where Φ and $\bar{\Phi}$ are defined respectively by the triples:

$$(F_2, \tau, F_1) \quad\text{and}\quad (\bar{F}_2, \bar{\tau}, \bar{F}_1)$$

we have, according to the Corollary of the Proposition 1,

$$F_2 = \bar{F}_2 \quad\text{and}\quad F_1 = \bar{F}_1 \ ;$$

$U^{\cdot}_{\mathcal{G}}\mathfrak{N}$ being a sub-multiplicative graph of $U^{\cdot}\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}}$ admitting the same units, we get $\tau = \bar{\tau}$. So $\Phi = \bar{\Phi}$, and $\hat{r}$ is injective.

If $\Phi' \in \mathcal{F}_{\mathfrak{g}}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$, the Proposition 4 asserts that Φ' is a $(L^{\cdot}, L^{\iota}, V^{\square}H^{\cdot})$-groupoid, i.e. there exists a $\mu_{L^{\cdot}}^{\iota V^{\square}}$-realization $\tilde{\Phi}$ of μ_g extending Φ', and $\Phi = (\boxminus H^{\cdot}, \underline{\tilde{\Phi}}\iota, U^{\cdot}\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}})$ is a $(\mu_{L^{\cdot}}^{\iota V^{\square}}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}})$-structure. Using the Corollary of the Proposition 1-1, we find

$$\Phi \in \mathcal{H}(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota V}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}''_{\mathfrak{g}}) \quad\text{and}\quad \Phi' = \hat{r}(\Phi).$$

This shows that $\hat{r}$ is an isomorphism onto $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$.

Denote by U^{0}_{g} the multiplicative graph such that

$$A(U^{0}_{g}) = A(U^{\cdot}_{g}) - A_g, \quad\text{where}\quad A_g = \{(u, (v_2.n_1, v_2.n_1))\}.$$

PROPOSITION 5. *$\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ is isomorphic to the category*

$$\mathcal{H}(\mu\,{}^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu^{o}_{g}, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\shortparallel})$$

of morphisms between $(\mu\,{}^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu^{o}_{g}, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\shortparallel})$-structures, where

$$\mu^{o}_{g} = (U^{o}_{g}, (\{i\}, \{\xi_0, \xi, \xi'\})).$$

PROOF. It follows from the Proposition 1 that μ^{o}_{g} is defined by μ^{1}_{g} and the class $A\mathcal{F}_{\shortparallel}$ of axioms and that μ^{1}_{g} is $\mu\,{}^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-generated by $\mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\shortparallel}$. Therefore $(\mu^{o}_{g}, \mu\mathfrak{N}^{\shortparallel})$ is a $\mu\,{}^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-Idea. - Suppose $F \in \mathcal{H}(\mu\,{}^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu^{o}_{g}, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\shortparallel})_0$. Then F is a neofunctor $(H^{\cdot}, \underline{F}, U\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\shortparallel})$ which extends into a $\mu\,{}^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization $\tilde{F}$ of μ^{o}_{g}. We are going to show that $\tilde{\underline{F}}$ defines a $\mu\,{}^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of μ_g, i.e. that

$$F(v_2).F(n_1).F(v_2).F(n_1) = F(u).$$

Though a straightforward calculation would lead to this result, it will be easier to give another kind of proof. Denote by u' the element $F(u)$, by
1 $p^{*}_{u'}$ the functor from $H^{\cdot}$ toward $\mathfrak{M}$ such that

$$p^{*}_{u'}(e) = e.H.u' \ \text{ if } \ e \in H^{\cdot}_0,$$

$$p^{*}_{u'}(h) = (\beta(h).H.u', \hat{h}, \alpha(h).H.u'), \text{ where } \hat{h}(k) = h.k, \ \text{ if } h \in H.$$

This functor is compatible with finite fiber products; if $\hat{V}$ denotes the class of all naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber products in $\mathfrak{M}$, and if $\mu = (\mathfrak{M}, (\mathfrak{M}^{i}, \hat{V}))$, the triple $(\mu, \underline{p}^{*}_{u'}, \mu\,{}^{\iota V}_{H^{\cdot}})$ is a homomorphism between (χ_1, χ_4)-sketches. Since $(\mu^{o}_{g}, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\shortparallel})$ is a μ-Idea, the Proposition 2-1 proves that $G = p^{*}_{u'}.F$ is a $(\mu, \mu^{o}_{g}, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\shortparallel})$-structure. Consequently $G' = (\mathfrak{M}, \underline{G}\iota, U\mathcal{G}\mathfrak{N})$ is a $(\mathfrak{M}, (\mathfrak{M}^{i}, \hat{V}))$-category. It follows from the Proposition 4-5 that there exists an equivalence $\Phi' \in \mathcal{F}^{\upsilon}_{0}.\tilde{\mathcal{F}}^{\upsilon}_{\gamma}.G'$ which is defined by a triple

$$(G'_1, r, G') \ \text{ such that } \ r(u) = u'.H.u' \in \mathfrak{M}_0.$$

Since $U\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\shortparallel}$ is stably generated by $U\mathcal{G}\mathfrak{N} \cup \{n_1\}$, the equivalence Φ' may be extended into an equivalence defined by the triple (G_1, r, G), where

$$G_1 = (\mathfrak{M}, \underline{G}_1, U\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\shortparallel}) \ \text{ and } \ G_1(n_1) = r(u*u).G(n_1).$$

We have

$$1' = G_1(v_2).G_1(n_1) = G(v_2).r(u*u)^{-1}.r(u*u).G(n_1) = G(v_2).G(n_1).$$

Denote by $C^{\cdot}$ the catetory $\hat{\gamma}\mathcal{F}(G')$ (Proposition 2-5); then $C = u'.H.u'$. Suppose $x \in C$. We see as in the proof of the Proposition 2 that x admits $l'(x)$ as a right inverse. A category in which each morphism admits a right inverse is a groupoid (CS Chapter 1. Proposition 7). If $C^{\cdot}$ is a groupoid, $l'(x)$ is the inverse of x in $C^{\cdot}$, and we have

$$l'(l'(x)) = x \quad \text{for each } x \in C.$$

From the relation

$$l' = G(v_2).G(n_1) = p^*_{u'}.F(v_2).p^*_{u'}.F(n_1),$$

we deduce $l'(x) = F(v_2).F(n_1).x$ and

$$x = l'(l'(x)) = F(v_2).F(n_1).F(v_2).F(n_1).x.$$

Replacing x by the particular element $u' \in C$ in the last equality, we get

$$u' = F(v_2).F(n_1).F(v_2).F(n_1).$$

Hence F is a $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\prime\prime})$-structure. - Conversely a $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\prime\prime})$ structure is also a $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu^{o}_{g}, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\prime\prime})$-structure. So

$$\mathcal{H}(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu_g, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\prime\prime}) = \mathcal{H}(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu^{o}_{g}, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\prime\prime})$$

and the proposition follows from the Corollary of the Proposition 4.

COROLLARY. *$(\mu^{o}_{g}, \mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-idea and $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ is also the category of morphisms between $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu^{o}_{g}, \mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$-structures.*

PROOF. Let $\tilde{F}_1$ and $\tilde{F}_2$ be two $\mu^{\iota V}_{\tilde{H}^{\cdot}}$-realizations of μ^{o}_{g} extending $F = (H^{\cdot}, \underline{F}, U\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$. Then $F'_m = (H^{\cdot}, \tilde{\underline{F}}_m, U\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\prime\prime})$, for $m = 1$ and 2, is a $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu^{o}_{g}, \mu\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}^{\prime\prime})$-structure. According to the Proposition 5, $\tilde{\underline{F}}_m$ defines a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of μ_g. Hence F is a $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-groupoid. As $(\mu_g, \mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-idea (Proposition 1), $\tilde{F}_1$ and $\tilde{F}_2$ are equivalent, i.e. $(\mu^{o}_{g}, \mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-idea. - Since F is a $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu^{o}_{g}, \mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$-structure if, and only if, F is a $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-groupoid, $\mathcal{F}_{\mathfrak{g}}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ is identical to the category of morphisms between $(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}, \mu^{o}_{g}, \mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})$-structures.

REMARK. The last assertion of the Proposition 1 (resp. the lemma of the Proposition 3) could also be proved by a method similar to the one given for the Proposition 5, using the functor p_u^*, as well as the known result: each element of a category admits at most one inverse (resp. of a groupoid is left regular).

7. DUALITY; PRODUCTS.

Suppose that $H^{\cdot}$ is with finite fiber products and that $VH^{\cdot}$ contains the class associated with a naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber product mapping. Let $\mathcal{K}$ by any of the symbols $\mathcal{F}^{\#}$, $\mathcal{F}^{\bullet}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$ or $\mathcal{F}_{\mathcal{g}}$.

PROPOSITION 1. *There exists an isomorphism δ from $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ onto itself, applying onto itself the full sub-category $\mathfrak{N}'(H^{\cdot}, H^{\iota})$ (resp. sub-category $\mathcal{K}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$, if*

$$((h'_1, h_1), (h'_2, h_2)) \in VH^{\cdot} \text{ implies } ((h'_2, h_2), (h'_1, h_1)) \in VH^{\cdot}.)$$

PROOF. The surjection

$$d \to d \text{ if } d = u,\ u_0,\ u*u,\ i \text{ or } k,$$
$$a \to b,\quad b \to a,\quad v_1 \to v_2,\quad v_2 \to v_1,$$

defines an isomorphism Δ of $U\mathcal{G}\mathfrak{N}$ onto itself. This isomorphism extends into an isomorphism $\Delta_{\mathfrak{N}''}$ of $U\mathfrak{N}''$ onto itself, and also into an isomorphism $\Delta_{\mathfrak{N}'}$ of $U\mathfrak{N}'$ onto itself such that

$$\Delta_{\mathfrak{N}'}(i_1) = i_2,\quad \Delta_{\mathfrak{N}'}(i_2) = i_1,\quad \Delta_{\mathfrak{N}'}(j_1) = j_2,\quad \Delta_{\mathfrak{N}'}(j_2) = j_1.$$

Suppose $F = (H^{\cdot}, \underline{F}, U\mathcal{G}\mathfrak{N}) \in \mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})_0$ and write $F^* = F.\Delta$. If $\bar{F}$ is a $\mu_H^{\iota R}$-realization of $\mu\mathfrak{N}''$ (resp. of $\mu\mathfrak{N}'$) extending F, the neofunctor $\bar{F}.\Delta_{\mathfrak{N}''}$ (resp. $\bar{F}.\Delta_{\mathfrak{N}'}$) is a $\mu_H^{\iota R}$-realization $\bar{F}^*$ of $\mu\mathfrak{N}''$ (resp. of $\mu\mathfrak{N}'$) extending F^*. Hence

$$F^* \in \mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})_0 \quad (\text{resp. } F^* \in \mathfrak{N}'(H^{\cdot}, H^{\iota})_0).$$

If $\Phi \in \mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ is the natural transformation defined by the triple (F_1, r, F), the triple (F_1^*, r, F^*) also defines a natural transformation $\Phi^* \in \mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$. By mapping Φ onto Φ^*, we get an isomorphism δ from $\mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$ onto itself, which maps $\mathfrak{N}'(H^{\cdot}, H^{\iota})$ onto $\mathfrak{N}'(H^{\cdot}, H^{\iota})$, and such that $\delta.\delta = \mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$.

- Suppose that $VH^{\cdot}$ satisfies the symmetry relation listed in the proposition. We replace $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ by (-) to simplify the notations. It is clear that

$$\delta(\mathcal{F}^{\#}(\text{-})) = \mathcal{F}^{\#}(\text{-}) \quad \text{and} \quad \delta(\mathcal{F}''(\text{-})) = \mathcal{F}''(\text{-}).$$

Suppose $F \in \mathcal{F}'(\text{-})_0$ and denote by $\hat{F}$ a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of $\mu\mathcal{G}'$ extending $\hat{F}$; the element $\hat{F}(d)$ will be written d', for each $d \in U\mathcal{G}'$. The proof of the Proposition 1-5 shows that g' is invertible in $H^{\cdot}$ and that we construct a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization $\hat{F}^*$ of $\mu\mathcal{G}'$ extending F^* if we put:

$$\hat{F}^*(w_1) = w'_4, \quad \hat{F}^*(w_2) = w'_3, \quad \hat{F}^*(w_4) = w'_1, \quad \hat{F}^*(w_3) = w'_2,$$
$$\hat{F}^*(k_1) = k'_2, \quad \hat{F}^*(k_2) = k'_1,$$
$$\hat{F}^*(g) = g'^{-1}.$$

Thus $F^* \in \mathcal{F}'(\text{-})_0$, and $\delta(\mathcal{F}'(\text{-})) = \mathcal{F}'(\text{-})$. If moreover $F \in \mathcal{F}(\text{-})_0$ and if $\bar{F}$ is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of $\mu\mathcal{G}$ extending $\hat{F}$, there exists a unique $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization $\bar{F}^*$ of $\mu\mathcal{G}$ extending both $\hat{F}^*$ and $(H^{\cdot}, \bar{F}\iota, U\mathfrak{H}').\Delta\mathfrak{H}'$. So

$$F^* \in \mathcal{F}(\text{-})_0 \quad \text{and} \quad \delta(\mathcal{F}(\text{-})) = \mathcal{F}(\text{-}).$$

- Finally, suppose $F \in \mathcal{F}_g(\text{-})_0$, and let $\bar{F}$ be a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of μ_g extending $\hat{F}$. Write

$$n'_1 = \bar{F}(n_1), \quad l' = \bar{F}(v_2.n_1), \quad n''_1 = n'_1.l'.$$

We get

$$F^*(v_1).n''_1 = v'_2.n'_1.l' = l'.l' = u',$$
$$F^*(k).n''_1 = k'.n'_1.l' = i'.b'.l' = i'.a' = i'.F^*(b).$$

Hence we extend F^* in a neofunctor $F'^* = (H^{\cdot}, \underline{F}', U\mathfrak{H}''_g)$, if we put $F'^*(\underline{n}_1) = n''_1$. By definition of μ^o_g, there exists a unique $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization $\bar{F}^*$ of μ^o_g extending both F'^* and $\hat{F}^*$. According to the Proposition 5-6, $\bar{F}^*$ defines a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of μ_g. We conclude that F^* is a $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-groupoid. Therefore $\delta(\mathcal{F}_g(\text{-})) = \mathcal{F}_g(\text{-})$.

COROLLARY 1. *If $VH^{\cdot}$ is the class associated with a naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber product mapping $\bar{\nu}$ in $H^{\cdot}$, there exists a canonical isomorphism $\delta_{\bar{\nu}}$ from $\mathcal{F}^{\#}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ onto itself which maps $\mathcal{K}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ onto itself.*

PROOF. Suppose $h_1 \in H$, $h_2 \in \beta(h_1).H$, and write

$$\bar{\nu}(h_1, h_2) = ((h_1, h'_1), (h_2, h'_2)), \quad \bar{\nu}(h_2, h_1) = ((h_2, h''_1), (h_1, h''_2)).$$

Since $\bar{\nu}(h_2, h_1)$ and $((h_2, h'_2), (h_1, h'_1))$ are both naturalized fiber products of (h_2, h_1), there exists one, and only one, $x \in H^{\cdot}_{\gamma}$, denoted by $x_\nu(h_1, h_2)$, such that

$$h'_2 = h''_1 . x \quad \text{and} \quad h'_1 = h''_2 . x .$$

We replace $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ by $(-)$ and $(H^{\cdot}, H^{\iota}, \hat{V}H^{\cdot})$ by $(=)$ where $\hat{V}H^{\cdot}$ is the class of all naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber products in $H^{\cdot}$. Suppose $F \in \mathcal{F}^{\#}(-)_0$; we have $F \in \mathcal{F}^{\#}(=)_0$ and, $\hat{V}H^{\cdot}$ satisfying the symmetry condition of the Proposition 1, $F^* = \delta(F) \in \mathcal{F}^{\#}(=)$. There exists an equivalence Φ_F defined by the triple (F^*_ν, τ, F^*) such that

$$\tau(u) = u, \quad \tau(u_0) = u_0 ,$$
$$\tau(u * u) = x_\nu(F(a), F(b)).$$

F^* extending into a neofunctor from $U\dot{\mathfrak{N}}_{*}$, the same is true for F^*_ν, so that $F^*_\nu \in \mathfrak{N}^{*}(H^{\cdot}, H^{\iota})$. As

$$\xi_0(F^*_\nu) = \bar{\nu}(F(b), F(a)) \in VH^{\cdot},$$

we get $F^*_\nu \in \mathcal{F}^{\#}(-)$. The surjection

$$\Phi \to \Phi_F . \boxplus \delta(\Phi) \boxplus \Phi_F^{-1} , \quad \text{if} \quad \Phi \in F' . \mathcal{F}^{\#}(-) . F,$$

defines an isomorphism $\delta_{\bar{\nu}}$ from $\mathcal{F}^{\#}(-)$ onto itself.

- If $F \in \mathcal{K}(-)_0$, we have $F^* \in \mathcal{K}(=)_0$ according to the Proposition 1. As $\mathcal{K}(=)$ is a saturated sub-category of $\mathcal{F}^{\#}(=)$ (Propositions 4-5 and 4-6), we find

$$\Phi_F \in \mathcal{K}(=) \quad \text{and} \quad F^*_\nu \in \mathcal{K}(=) \cap \mathcal{F}^{\#}(-) = \mathcal{K}(-).$$

It follows $\delta_{\bar{\nu}}(\mathcal{K}(-)) = \mathcal{K}(-)$.

COROLLARY 2. *The isomorphism δ_ν relative to $(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{\iota}, V)$ defined in the Corollary 1 maps Γ onto Γ^*_ν, where $\hat{\gamma}\mathfrak{N}_{*}(\Gamma)$ is a non associative quasi-category $(C^{\cdot}, \beta, a)$ and $\hat{\gamma}\mathfrak{N}_{*}(\Gamma^*_\nu)$ its dual (C^*, a, β).*

Indeed, if $\Gamma = \hat{\gamma}\mathfrak{N}_{*}^{-1}(C^{\cdot}, \beta, a)$, the bijection $x_\nu(\Gamma(a), \Gamma(b))$ defined in the Corollary 1 is the bijection

$$(m, m') \to (m', m) \text{ from } a \vee \beta = C^{\cdot} * C^{\cdot} \text{ onto } \beta \vee a = C^* * C^*,$$

so that $\Gamma^*_\nu(k)$ is the law of composition of C^* :

$$(m', m) \to m.m' \text{ if, and only if, } \alpha(m) = \beta(m').$$

DEFINITION. If $VH^{\cdot}$ is the class associated with the naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber product mapping $\bar{\nu}$, and if F is a non associative $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-category, the non associative $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-quasi-category $\delta_{\bar{\nu}}(F)$ constructed in the Corollary 1 of the Proposition 1 is called the *$\bar{\nu}$-dual of F*.

Let $\mathfrak{S}^{\ell}$ be the full sub-category of the category $\mathfrak{S}(\chi_1, \chi_4)$ of homomorphisms between (χ_1, χ_4)-sketches the units of which are the (χ_1, χ_4) sketches

$$\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}} = (H^{\cdot}, (H^{\iota}, VH^{\cdot})),$$

such that $H^{\cdot}$ is a category with finite fiber products, H^{ι} a class of monomorphisms of $H^{\cdot}$, and $VH^{\cdot}$ a class of naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber products in $H^{\cdot}$ containing the class associated to a naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber product mapping. In particular, the sub-category of $\hat{\mathfrak{F}}$ formed by the functors $p \in \hat{\mathfrak{F}}$ compatible with the monomorphisms and with finite fiber products is isomorphic to the full sub-category of $\mathfrak{S}^{\ell}$ the units of which are the (χ_1, χ_4) sketches $(H^{\cdot}, (R_g(H^{\cdot}), \hat{V}H^{\cdot}))$, where $\hat{V}H^{\cdot}$ is the class of all naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber products in $H^{\cdot}$.

For each $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}} \in \mathfrak{S}^{\ell}_0$, we have constructed in the preceding sections categories

$$\bar{\mathfrak{K}}(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}) = \mathfrak{K}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot}),$$

where $\mathfrak{K}$ is again one of the symbols $\mathfrak{F}^{\#}$, $\mathfrak{F}''$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{g}}$. Let $\hat{\mathfrak{F}}$ be the category of functors associated with the universe $\mathfrak{M}_0$. It results from the Proposition 2-1 that there exists a functor $\bar{\mathfrak{K}}$ from $\mathfrak{S}^{\ell}$ toward $\hat{\mathfrak{F}}$ such that $\bar{\mathfrak{K}}(\mu^{\iota V'}_{H'^{\cdot}}, \underline{p}, \mu^{\iota V}_{H^{\cdot}})$ be the functor

$$\Phi \to \boxminus(H'^{\cdot}, \underline{p}, H^{\cdot}).\Phi$$

from $\bar{\mathfrak{K}}(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}})$ toward $\bar{\mathfrak{K}}(\mu^{\iota V'}_{H'^{\cdot}})$.

According to the Propositions 4-5 and 4-6, the functors $\bar{\mathfrak{K}}$ so defined satisfy the relations

$$\begin{tikzcd} & & \bar{\mathfrak{F}}'' \arrow[dr, two heads] & \\ \bar{\mathfrak{F}}_{\mathfrak{g}} \arrow[r, two heads] & \bar{\mathfrak{F}} \arrow[ur, two heads] \arrow[r, two heads] & \bar{\mathfrak{F}}' \arrow[r, two heads] & \bar{\mathfrak{F}}^{\#} \end{tikzcd}$$

where $\overline{\mathcal{K}}' \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{K}}$ means that $\overline{\mathcal{K}}'$ is a sub-functor of $\overline{\mathcal{K}}$ and that $\overline{\mathcal{K}}'(\mu_{H^\cdot}^{\iota V})$ is a full saturated sub-category of $\overline{\mathcal{K}}(\mu_{H^\cdot}^{\iota V})$ for each $\mu_{H^\cdot}^{\iota V} \in \mathcal{S}^{\ell}_0$.

PROPOSITION 2. *$\mathcal{S}^{\ell}$ is a category with $\hat{\mathfrak{M}}_0$-products and $\overline{\mathcal{K}}$ is a functor compatible with products.*

PROOF. Suppose $M \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ and, for each $m \in M$,

$$\mu_m = (H_m^\cdot, (H_m^\iota, VH_m^\cdot)) \in \mathcal{S}^{\ell}_0.$$

Write

$$H^\cdot = \prod_{m \in M} H_m^\cdot \quad \text{and} \quad H^\iota = \prod_{m \in M} H_m^\iota \ .$$

We denote by $VH^\cdot$ the class of all families

$$(((h_1^m)_{m \in M}, (v_1^m)_{m \in M}), ((h_2^m)_{m \in M}, (v_2^m)_{m \in M}))$$

such that

$$((h_1^m, v_1^m), (h_2^m, v_2^m)) \in VH_m^\cdot \quad \text{for each } m \in M.$$

We know (CS Chapter IV, Proposition 33) that $VH^\cdot$ is a class of naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber products in $H^\cdot$. Hence

$$\mu_{H^\cdot}^{\iota V} = (H^\cdot, (H^\iota, VH^\cdot)) \in \mathcal{S}^{\ell}_0.$$

Since $\mathcal{S}^{\ell}$ is a sub-category of the category $\sigma_0^*(\hat{\mathcal{F}})$ induced from $\hat{\mathcal{F}}$ by the mapping $\sigma_0^* : \mu_{H^\cdot}^{\iota V} \to H^\cdot$ (CS Chapter IV, Definition 13), it follows (CS Chapter IV, Corollary 1, Proposition 39) that $\mu_{H^\cdot}^{\iota V}$ is the product of $(\mu_m)_{m \in M}$ in $\mathcal{S}^{\ell}$, the m-th projection being

$$(\mu_m, \underline{p}_m, \mu_{H^\cdot}^{\iota V}), \text{ where } p_m = (H_m^\cdot, \underline{p}_m^{H_m}, H^\cdot)$$

is the m-th projection of $H^\cdot$ onto $H_m^\cdot$.

- Suppose $F_m \in \overline{\mathcal{K}}(\mu_m)_0$ for each $m \in M$. The surjection $x \to (F_m(x))_{m \in M}$ if $x \in U\mathcal{G}\mathfrak{N}$ defines the neofunctor $F = [F_m]_{m \in M}$ toward $H^\cdot$, and $F_m = p_m \cdot F$. If $\overline{F}_m$ is a $\mu_{H^\cdot}^{\iota V}$-realization of $\mu\mathcal{K}$ extending F_m (if $\mathcal{K} = \mathcal{F}_g$, we write $\mu\mathcal{F}_g = \mu_g$ and $U^\cdot\mathcal{F}_g = U_g^\cdot$), the neofunctor $[\overline{F}_m]_{m \in M}$ is a $\mu_{H^\cdot}^{\iota V}$-realization of $\mu\mathcal{K}$ extending F; so $F \in \overline{\mathcal{K}}(\mu_{H^\cdot}^{\iota V})$. Conversely, any $F' \in \overline{\mathcal{K}}(\mu_{H^\cdot}^{\iota V})_0$ is of the form

$$F' = [p_m \cdot F']_{m \in M}, \quad \text{where } p_m \cdot F' \in \overline{\mathcal{K}}(\mu_m).$$

Let q be the isomorphism from $\prod_{m \in M} (\boxminus H_m^\cdot)$ onto $\boxminus H^\cdot$ such that

$$q((h'_m, f'_m, f_m, h_m))_{m\in M} = ((h'_m)_{m\in M}, (f'_m)_{m\in M}, (f_m)_{m\in M}, (h_m)_{m\in M}).$$

If $\Phi_m \in \overline{\mathfrak{K}}(\mu_m)$ for $m \in M$, then

$$\Phi = q.[\Phi_m]_{m\in M} \in \overline{\mathfrak{K}}(\mu_{H^\cdot}^{\iota V}) \quad\text{and}\quad \Phi_m = \boxminus p_m . \Phi .$$

So

$$\Phi \to (\boxminus p_m . \Phi)_{m\in M}, \quad\text{where}\quad \Phi \in \overline{\mathfrak{K}}(\mu_{H^\cdot}^{\iota V}),$$

defines an isomorphism from $\overline{\mathfrak{K}}(\mu_{H^\cdot}^{\iota V})$ onto $\prod_{m\in M} \overline{\mathfrak{K}}(\mu_m)$. Therefore $\overline{\mathfrak{K}}(\mu_{H^\cdot}^{\iota V})$ is a product of $(\overline{\mathfrak{K}}(\mu_m))_{m\in M}$ in $\hat{\mathfrak{F}}$, so that $\overline{\mathfrak{K}}$ is a functor compatible with $\hat{\mathfrak{M}}_0$-products.

PROPOSITION 3. *Suppose* $\mu = \mu_{H^\cdot}^{\iota V} \in \mathcal{S}_0^{\ell}$. *If* $\overline{\Pi}$ *is a* $\{M\}$*-product functor in* $H^\cdot$ *such that* $\overline{\Pi}((h_m)_{m\in M}) \in H^\iota$ *when* $h_m \in H^\iota$ *for each* $m \in M$, *then* $\overline{\mathfrak{K}}(\mu)$ *is a category with* $\{M\}$*-products.* 1

PROOF. Denote by $\bar{\pi}$ a naturalized $\{M\}$-product mapping in $H^\cdot$ corresponding to the $\{M\}$-product functor $\overline{\Pi}$ from $(H^\cdot)^M$ toward $H^\cdot$. In the proof of the Proposition 2, we have constructed a product

$$\mu^M = ((H^\cdot)^M, ((H^\iota)^M, V(H^\cdot)^M))$$

of $(\mu)_{m\in M}$ in $\mathcal{S}^{\ell}$. For this product, we have $\overline{\Pi}^4(V(H^\cdot)^M) \subset \hat{V}H^\cdot$, so

$$\hat{\overline{\Pi}} = (\hat{\mu}, \overline{\Pi}, \mu^M) \in \mathcal{S}^{\ell}, \quad\text{where}\quad \hat{\mu} = (H^\cdot, (H^\iota, \hat{V}H^\cdot))$$

and $\hat{V}H^\cdot$ is the class of all naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber products in $H^\cdot$.

- Suppose $F_m \in \overline{\mathfrak{K}}(\mu)_0$ for each $m \in M$. In the horizontal category of natural transformations $\mathfrak{N}(H^\cdot, U\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})^{\square}$, the family $(F_m)_{m\in M}$ admits as a product the parallel product (CS Appendix II) $\underset{m\in M}{\mathrm{X}} F_m = \overline{\Pi}.[F_m]_{m\in M}$. We put $F = \underset{m\in M}{\mathrm{X}} F_m$; the m-th projection of F onto F_m is the natural transformation Φ_m defined by the triple (F_m, τ_m, F), where τ_m is the surjection $\bar{\pi}[F_m]_{m\in M}$ which maps $\hat{u} \in (U\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N})_0$ onto p_m, if

$$\bar{\pi}((F_m(\hat{u}))_{m\in M}) = ((p_m)_{m\in M}, F(\hat{u})).$$

According to the Proposition 2, $[F_m]_{m\in M} \in \overline{\mathfrak{K}}(\mu^M)$ and

$$F = \overline{\mathfrak{K}}(\hat{\overline{\Pi}})([F_m]_{m\in M}) \in \overline{\mathfrak{K}}(\hat{\mu}).$$

Hence $((\Phi_m)_{m\in M}, F)$ is a naturalized product in $\overline{\mathfrak{K}}(\hat{\mu})$. The proofs of the Propositions 4-5 and 4-6 imply that $\overline{\mathfrak{K}}(\hat{\mu})$ is an enlargement of $\overline{\mathfrak{K}}(\mu)$.

So there exists an equivalence Φ from a $F' \in \overline{\mathcal{K}}(\mu)_0$ onto F. It results that $((\Phi_m \boxplus \Phi)_{m \in M}, F')$ is a naturalized product in $\overline{\mathcal{K}}(\mu)$ of $(F_m)_{m \in M}$. Consequently $\overline{\mathcal{K}}(\mu)$ is a category with $\{M\}$-products.

We are not going to develop here the general theory of $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ categories. Instead, we will show in the next sections how the notion of a $(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$-category compares with the notion of a structured category on one hand, with the notion of a structure of category on a unit of $H^{\cdot}$ (in the meaning of [4]) on the other hand.

1 **8. STRUCTURED CATEGORIES.**

Suppose that q is a faithful functor $(K^{\cdot}, \underline{q}, H^{\cdot})$.

PROPOSITION 1. *If F is a $\mu^{\iota R}_{H^{\cdot}}$-realization of $\mu \mathcal{G}\mathcal{N}$ and if*

$$q.F \in \mathcal{N}^{\bullet}(K^{\cdot}, R_g(K^{\cdot})),$$

then $F \in \mathcal{N}^{\bullet}(H^{\cdot}, H^{\iota})$. If $q^{\iota V} = (\mu^{\iota V}_{K^{\cdot}}, \underline{q}, \mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}) \in \mathcal{S}^{\ell}$ and if F is a $\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}$-realization of $\mu \mathcal{G}'\mathcal{N}$, we have $F \in \overline{\mathcal{K}}(\mu^{\iota V}_{H^{\cdot}})$ if, and only if, $q.F \in \overline{\mathcal{K}}(\mu^{\iota V}_{K^{\cdot}})$, where $\mathcal{K} = \mathcal{F}^{\#}, \mathcal{F}^{\bullet}, \mathcal{F}'$ or $\mathcal{F}$.

PROOF. We will use the following lemma:

LEMMA. *Suppose $\hat{q} = (\mu'', \underline{q}, \mu') \in \mathcal{S}'(t)$, where $\sigma(t)(\hat{q})$ is the faithful functor q* (notations of the Section 1). *Let μ be a t-sketch defined by $\mu^{\mathbf{1}}$ and a class A of axioms. If $\mu^{\mathbf{1}}$ is μ'-generated and μ''-generated by μ_1, a μ'-realization G of μ_1 is a (μ', μ, μ_1)-structure if, and only if, $q.G$ is a (μ'', μ, μ_1)-structure.*

(Indeed, the condition is necessary. If it is satisfied, there exists a μ'-realization G' of $\mu^{\mathbf{1}}$ extending G. Since $q.G'$ is a μ''-realization of $\mu^{\mathbf{1}}$ extending $q.G$, the surjection $\underline{qG'}$ defines a μ''-realization G'' of μ. For each $(z,(y,x)) \in A$, the elements $G'(z)$ and $G'(y).G'(x)$ are equal, for they have the same right and left units and they are mapped by q onto $G''(z) = G''(y).G''(x)$. So $\underline{G}'$ defines a μ'-realization of μ extending G, and G is a (μ', μ, μ_1)-structure.)

- We have

$$(\mu'', \underline{q}, \mu^{\iota R}_{H^{\cdot}}) \in \mathcal{S}'(\chi_1, \chi_4), \quad \text{where } \mu'' = (K^{\cdot}, (K, K \times K)).$$

Let F be a $\mu_{H^\cdot}^{\iota R}$-realization of $\mu\mathfrak{G}\mathfrak{N}$ such that $q.F \in \mathfrak{N}^\bullet(K^\cdot, R_g(K^\cdot))$. Then $q.F$ is also a $(\mu'', \mu\mathfrak{N}'', \mu\mathfrak{G}\mathfrak{N})$-structure. Since $\mu\mathfrak{N}''$ is defined by $\mu\overset{1}{\mathfrak{N}}''$ and $A\mathfrak{N}''$ (Proposition 1-3), it follows from the lemma that

$$F \in \mathfrak{N}''(H^\cdot, H^\iota).$$

- Suppose $q^{\iota V} \in \mathcal{S}^{\ell}$ and denote by F a $\mu_{H^\cdot}^{\iota V}$-realization of $\mu\overset{1}{\mathfrak{G}}\mathfrak{N}$ such that $q.F \in \overline{\mathfrak{K}}(\mu_{K^\cdot}^{\iota V})$. We have just seen that $F \in \mathfrak{N}''(H^\cdot, H^\iota)$; hence $F \in \mathfrak{F}^{\#}(\mu_{H^\cdot}^{\iota V})$. If $\mathfrak{K} = \mathfrak{F}''$, $\mathfrak{F}'$ or $\mathfrak{F}$, we know (Propositions 3-4 and 1-5) that $\mu\mathfrak{K}$ is defined by $\mu\overset{1}{\mathfrak{K}}$ and a class of axioms, where $\mu\overset{1}{\mathfrak{K}}$ is $\mu_{H^\cdot}^{\iota V}$-generated and $\mu_{K^\cdot}^{\iota V}$-generated by $\mu\mathfrak{F}^{\#}$. Therefore the lemma asserts that $F \in \overline{\mathfrak{K}}(\mu_{H^\cdot}^{\iota V})$.

Since q is faithful, a neofunctor F from a multiplicative graph $U^\cdot$ toward $H^\cdot$ is uniquely determined by the couple $(q.F, F_0)$, where F_0 is the restriction of F to $U_0^\cdot$. Suppose moreover that $q_\gamma = (K^\cdot, \underline{q}\iota, H_\gamma^\cdot)$ is right faithful («bien fidèle», CS Chapter II, Definition 3). Denote again 1
by $\overline{\mathfrak{K}}$ one of the functors $\overline{\mathfrak{F}}$, $\overline{\mathfrak{F}}''$, $\overline{\mathfrak{F}}'$, $\overline{\mathfrak{F}}$ or $\overline{\mathfrak{F}}_g$ (Section 7).

PROPOSITION 2. *Suppose $F \in \mathfrak{L}_0$, $F' \in \mathfrak{L}_0$ and $q.F = q.F'$; then $F = F'$ in each of the following cases:*

1) $F(u) = F'(u)$ when $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}(H^\cdot, H^\iota)$, or when

$$\mathfrak{L} = \overline{\mathfrak{K}}(\mu_{H^\cdot}^{\iota V}) \;\; if \;\; q^{\iota V} = (\mu_{K^\cdot}^{\iota V}, \underline{q}, \mu_{H^\cdot}^{\iota V}) \in \mathcal{S}^{\ell}.$$

2) $F(u) = F'(u)$ and $F(u*u) = F'(u*u)$, when

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{N}(H^\cdot) \;\; or \;\; \mathfrak{L} = \mathfrak{N}''(H^\cdot, H^\iota).$$

3) $F(u*u) = F'(u*u)$ when

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{N}'(H^\cdot, H^\iota) \;\; and \;\; q.F \in \mathfrak{N}'(K^\cdot, R_g(K^\cdot)).$$

PROOF. 1) Suppose $F(u) = F'(u)$. - If $\mathfrak{L} = \mathfrak{G}(H^\cdot, H^\iota)$, the elements $F(i)$ and $F'(i)$ are two q-monomorphisms, since they admit $F(a)$ and $F'(a)$ as left inverses (CS Chapter III, Proposition 1); q_γ being right faithful, from the relations

$$\beta(F(i)) = F(u) = F'(u) = \beta(F'(i)) \quad \text{and} \quad q(F(i)) = q(F'(i))$$

it follows (CS Chapter III, Corollary 2, Theorem 1) $F(i) = F'(i)$. Hence $F(u_0) = F'(u_0)$ and, q being faithful, $F = F'$. - If

$$q^{\iota V} \in \mathcal{S}^{\ell} \text{ and } \mathcal{L} = \overline{\mathcal{K}}(\mu_H^{\iota V}),$$

the preceding proof shows that F and F' have the same restriction to $U\dot{\mathcal{G}}$. As $\xi_0(F)$ and $\xi_0(F')$ are two naturalized fiber products of $(F(a), F(b))$ such that

$$q^4(\xi_0(F)) = \xi_0(q.F) = \xi_0(q.F') = q^4(\xi_0(F'))$$

be a naturalized fiber product of $(q.F(a), q.F(b))$ in $K^{\cdot}$, we deduce $\xi_0(F) = \xi_0(F')$ from the assumption that q_γ is right faithful (CS Chapter IV, Proposition 28). So $F(u*u) = F'(u*u)$ and $F = F'$.

2) Suppose $F(u) = F'(u)$ and $F(u*u) = F'(u*u)$. - If $\mathcal{L} = \mathfrak{N}(H^{\cdot})$, then $F = F'$, because u and $u*u$ are the unique units of $U\mathfrak{N}$. - If $\mathcal{L} = \mathfrak{N}''(H^{\cdot}, H^{\iota})$, from the beginning of the proof it results that F and F' have the same restriction to $U\dot{\mathcal{G}}$. The restrictions of F and F' to $U\mathfrak{N}$ belonging to $\mathfrak{N}(H^{\cdot})$, they are also equal. So $F = F'$.

3) Suppose $\mathcal{L} = \mathfrak{N}'(H^{\cdot}, H^{\iota})$,

$$F(u*u) = F'(u*u) \text{ and } q.F \in \mathfrak{N}'(K^{\cdot}, R_g(K^{\cdot})).$$

We denote by $\hat{F}$ and $\hat{F}'$ a $\mu_H^{\iota R}$-realization of $\mu\mathfrak{N}'$ extending F and F' respectively. Since $q.\hat{F}$ and $q.\hat{F}'$ are extensions of $q.F$ to $U\mathfrak{N}'$, we have seen in the proof of the Proposition 1-4 that there exists an equivalence Φ from $q.\hat{F}$ onto $q.\hat{F}'$ such that

$$\Phi(d) = q.F(d)^{\boxminus} \text{ for each } d \in U\mathfrak{N}''.$$

As $\alpha(i_m . j_m) = u$ and $\beta(i_m . j_m) = u*u$, it follows that

$$q.\hat{F}(i_m . j_m) = q.\hat{F}'(i_m . j_m) \text{ for } m = 1 \text{ and } 2.$$

The elements $\hat{F}(i_m . j_m)$ and $\hat{F}'(i_m . j_m)$ admitting respectively $F(k)$ and $F'(k)$ as left inverses, they are two q-monomorphisms with the same target $F(u*u)$ and the same image by q. Therefore (CS Chapter III, Corollary 2, Theorem 1) they are equal, i.e. $F(u) = F'(u)$. Using the second part of the proof, we conclude that $F = F'$.

COROLLARY. *Suppose that F and F' are elements of $\mathcal{H}(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})_0$ such that*

$$q.F = q.F' \text{ and } F(u) = F'(u),$$

where $\mathcal{H} = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ or $\mathfrak{N}''$. If $q^3(\Pi H^{\cdot}) \subset \Pi K^{\cdot}$, where $\Pi K^{\cdot}$ is the class *associated to a naturalized* $\{\{1,2\}\}$*-product mapping in* $K^{\cdot}$, *and if* H^{ι} *is a class of q-monomorphisms, then* $F = F'$.

PROOF. Suppose $\mathcal{H} = \mathfrak{N}$. There exist

$\eta = ((p_1, p_2), s) \in \Pi H^{\cdot}$, $\eta' = ((p_1', p_2'), s') \in \Pi H^{\cdot}$, $j \in H^{\iota}$ and $j' \in H^{\iota}$ such that

$$F(v_m) = p_m \cdot j \text{ and } F'(v_m) = p_m' \cdot j' \text{ for } m = 1 \text{ and } 2.$$

As $q^3(\eta)$ and $q^3(\eta')$ are two naturalized products of $(q.F(u), q.F(u))$ belonging to $\Pi K^{\cdot}$, they are equal. The functor q_{γ} being right faithful, it follows (CS Chapter IV, Proposition 8) that $\eta = \eta'$. Using the relations

$$q(p_m).q(j) = q.F(v_m) = q(p_m').q(j') = q(p_m).q(j'),$$

we find $q(j) = q(j')$, because $(q(p_1), q(p_2))$ is left regular in $K^{\cdot}$. Since j and j' are two q-monomorphisms with the same target $s = s'$, we get $j = j'$ (CS Chapter III, Corollary 2, Theorem 1), q_{γ} being right faithful. Hence

$$F(u*u) = a(j) = a(j') = F'(u*u), \text{ and } F = F'.$$

- If $\mathcal{H} = \mathfrak{N}'$ or $\mathcal{H} = \mathfrak{N}''$, the restrictions F_1 and F_1' of F and F' to $U^{\cdot}_{\mathcal{G}}$ belong to $\mathcal{G}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ and $F_1(u) = F_1'(u)$, so that, according to the Proposition 2, $F_1 = F_1'$. The restrictions F_2 and F_2' of F and F' to $U^{\cdot}_{\mathfrak{N}}$ are also equal, for they are elements of $\mathfrak{N}(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$. Consequently, $F = F'$.

In the end of this section, we consider a functor $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ from $H^{\cdot}$ toward the category $\mathfrak{M}$ of mappings. Let ν (resp. let π) be the canonical $\{\{1,2\}\}$-fiber product (rsep. -product) mapping in $\mathfrak{M}$; the classes Π and V are again the classes associated to π and ν respectively. We suppose that:

H^{ι} is the class of $(\mathfrak{M}^{\iota}, p)$-injections (CS Chapter III, Definition 1);

$\Pi H^{\cdot}$ is the class of all naturalized products

$$((p_1, p_2), s) \text{ in } H^{\cdot} \text{ such that } ((p(p_1), p(p_2)), p(s)) \in \Pi;$$

$VH^{\cdot}$ is the class of all naturalized fiber products

$$\eta = ((h_1, h_1'), (h_2, h_2')) \text{ in } H^{\cdot} \text{ such that } p^4(\eta) \in V.$$

Let $\mathcal{K}$ be again any of the symbols $\mathcal{F}^{\#}$, $\mathcal{F}''$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$ or $\mathcal{F}_g$ and let $\mathcal{H}$ be any of the symbols $\mathcal{G}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$ or $\mathcal{K}$. We will use the following categories:

1° $\mathcal{G}(p)$ is the caterory $\mathcal{G}(H^{\cdot}, H^{\iota})$;

2° $\mathcal{H}(p)$, for $\mathcal{H} = \mathcal{N}$ (resp. $= \mathcal{N}'$ or $\mathcal{N}''$), is the full sub-category of $\mathcal{N}(H^{\cdot})$ (resp. of $\mathcal{H}(H^{\cdot}, H^{\iota})$) the units of which are the $H^{\cdot}$-multiplicative classes (resp. the $(H^{\cdot}, H^{\iota})$-quasi-multiplicative graphs) F such that $p . F \in \mathcal{H}^{\upsilon}$ (Propositions 1-B-2, 2-4 and 2-3).

3° $\hat{\mathcal{H}}(p) = \mathcal{H}(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$, for $\mathcal{H} = \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ or $\mathcal{N}''$; it is a full sub-category of $\mathcal{H}(p)$.

1 4° $\mathcal{K}(p) = \mathcal{K}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ if p is ν-compatible (CS Chapter IV, Definition 11), i.e. if $VH^{\cdot}$ contains the class associated to a naturalized fiber product mapping.

PROPOSITION 3. *The surjection* $\Phi \to \hat{\gamma}_{\mathcal{H}}(\boxminus p . \Phi)$ *defines a functor* $\hat{p}_{\mathcal{H}}$ *from* $\mathcal{H}(p)$ *toward* $\mathcal{H}$. *The surjection* $\Phi \to r(u)$, *if* $\Phi \in \mathcal{H}(p)$ *is the natural transformation defined by the triple* (F_2, r, F_1), *defines a faithful functor* $\pi^{p}_{\mathcal{H}}$ *from* $\mathcal{H}(p)$ *toward* $H^{\cdot}$.

PROOF. Denote by $\underline{m}_{\mathcal{H}}$ the surjection $\Phi \to \boxminus p . \Phi$ where $\Phi \in \mathcal{H}(p)$. Since

$$p^{\iota} = (\mu^{\iota}_{\mathfrak{M}}, \underline{p}, \mu^{\iota}_{H^{\cdot}}) \in \mathcal{S}(\chi_1),$$

the Proposition 2-1 asserts that $\underline{m}_{\mathcal{G}}$ defines a functor $m_{\mathcal{G}}$ from $\mathcal{G}(p)$ toward $\mathcal{G}(\mathfrak{M}, (\mathfrak{M}^{\iota}))$. We have seen (Proposition 1-A-2) that $\mathcal{G}(\mathfrak{M}, (\mathfrak{M}^{\iota})) = \mathcal{G}^{\upsilon}$ and, in the Corollary of the Proposition 2-A-2, we have constructed the isomorphism $\hat{\gamma}_{\mathcal{G}}$ from $\mathcal{G}^{\upsilon}$ onto $\mathcal{G}$. Hence $\hat{p}_{\mathcal{G}}$ is the functor $\hat{\gamma}_{\mathcal{G}} . m_{\mathcal{G}}$.

- If $\mathcal{K}(p)$ is defined, we have

$$p^{\iota V} = (\mu^{\iota V}_{\mathfrak{M}}, \underline{p}, \mu^{\iota V}_{H^{\cdot}}) \in \mathcal{S}^{\ell}.$$

The surjection $\underline{m}_{\mathcal{K}}$ defines the functor $\overline{\mathcal{K}}(p^{\iota V})$ (Proposition 1-7) from $\mathcal{K}(p)$ toward $\overline{\mathcal{K}}(\mu^{\iota V}_{\mathfrak{M}}) = \mathcal{K}^{\upsilon}$. So $\hat{p}_{\mathcal{K}} = \hat{\gamma}_{\mathcal{K}} . \overline{\mathcal{K}}(p^{\iota V})$, where $\hat{\gamma}_{\mathcal{K}}$ is the isomorphism from $\mathcal{K}^{\upsilon}$ onto $\mathcal{K}$ defined in the Propositions: 4-3 if $\mathcal{K} = \mathcal{F}^{\#}$; 5-4 if $\mathcal{K} = \mathcal{F}''$; 2-5 if $\mathcal{K} = \mathcal{F}$ or $\mathcal{F}'$; 2-6 if $\mathcal{K} = \mathcal{F}_g$.

- By definition $\underline{m}_{\mathcal{H}}(\Phi) \in \mathcal{H}^{\upsilon}$ when $\Phi \in \mathcal{H}(p)_0$ and $\mathcal{H} = \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ or $\mathcal{N}''$. So $\underline{m}_{\mathcal{H}}$ defines a functor $m_{\mathcal{H}}$ from $\mathcal{H}(p)$ toward $\mathcal{H}^{\upsilon}$, and we have $\hat{p}_{\mathcal{H}} = \hat{\gamma}_{\mathcal{H}} . m_{\mathcal{H}}$

where $\hat{y}\mathcal{H}$ is the isomorphism from $\mathcal{H}^{\upsilon}$ toward $\mathcal{H}$ defined in the Proposition: 1-B-2 if $\mathcal{H} = \mathfrak{N}$; 2-3 if $\mathcal{H} = \mathfrak{N}''$; 2-4 if $\mathcal{H} = \mathfrak{N}'$.

- $\pi^{p}_{\mathcal{H}}$ is a faithful functor, for it is a restriction to the category $\mathcal{H}(p)$ of one of the faithful functors:

$\pi^{H^{\bullet}}_{\mathcal{G}}$ if $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ (Proposition 2-A-2);

$\pi^{H^{\bullet}}_{\mathfrak{N}}$ if $\mathcal{H} = \mathfrak{N}$ (Proposition 2-B-2);

$\pi^{H^{\bullet}}_{\mathfrak{N}''}$ if $\mathcal{H} = \mathfrak{N}', \mathfrak{N}''$ or $\mathcal{K}$ (Proposition 2-3).

COROLLARY. *If p is faithful, $\hat{p}\mathcal{H}$ is a faithful functor.*

PROOF. Suppose that $\Phi \in \mathcal{H}(p)$ and $\Phi' \in \mathcal{H}(p)$ are the natural transformations defined respectively by the triples (F_2, τ, F_1) and (F_2, τ', F_1) and that $\hat{p}\mathcal{H}(\Phi) = \hat{p}\mathcal{H}(\Phi')$. If $D_m = \hat{p}\mathcal{H}(F_m) \in \mathcal{H}_0$ for $m = 1, 2$, we have

$$(D_2, \underline{\tau(u)}, D_1) = \hat{p}\mathcal{H}(\Phi) = \hat{p}\mathcal{H}(\Phi') = (D_2, \underline{\tau'(u)}, D_1).$$

As p is a faithful functor toward $\mathfrak{M}$, from the relations

$$\tau(u) \in F_2(u).H.F_1(u), \quad \tau'(u) \in F_2(u).H.F_1(u) \quad \text{and} \quad \underline{\tau(u)} = \underline{\tau'(u)},$$

we deduce $\tau(u) = \tau'(u)$. Hence

$$\pi^{p}_{\mathcal{H}}(\Phi) = \tau(u) = \pi^{p}_{\mathcal{H}}(\Phi'),$$

and according to the Proposition 3, $\Phi = \Phi'$.

PROPOSITION 4. *If $p_\gamma = (\mathfrak{M}_\gamma, \underline{p}\iota, H^{\bullet}_\gamma)$ is a saturated hypermorphisms functor (CS Chapter II, Definition 20), $\mathcal{K}(H^{\bullet}, R_g(H^{\bullet}), \hat{V}H^{\bullet})$ is an en-* 1
largement of $\mathcal{K}(p)$, where $\hat{V}H^{\bullet}$ is the class of all naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber products in $H^{\bullet}$.

PROOF. Suppose $F \in \mathcal{K}(H^{\bullet}, R_g(H^{\bullet}), \hat{V}H^{\bullet})$. We have seen in the proof of the Proposition 2 that $F(i)$ is a p-monomorphism, so that

$$F \in \mathcal{K}(H^{\bullet}, p^{\frown}, \hat{V}H^{\bullet}),$$

where $p^{\frown}$ denotes the class of p-monomorphisms. If $g \in p^{\frown}$, there exists $g' \in H^{\bullet}_\gamma . \alpha(g)$ such that $p(g')$ be the bijection defining $p(g)$; it follows

$$g . g'^{-1} \in H^{\iota} \; ; \; \text{so } p^{\frown} = H^{\iota} . H^{\bullet}_\gamma .$$

We have constructed in the proof of the Proposition 4-5 an equivalence

$$\Phi \in \mathcal{K}(p)_0 . \mathcal{K}(H^{\bullet}, R_g(H^{\bullet}), \hat{V}H^{\bullet}). F.$$

Hence $\mathcal{K}(H^{\cdot}, R_g(H^{\cdot}), \hat{V}H^{\cdot})$ is an enlargement of $\mathcal{K}(p)$.

DEFINITION. We say that F *is a* $(\mathcal{H}, p)$*-structuration of* D if $F \in \mathcal{H}(p)_0$ and if $D = \hat{p}_{\mathcal{H}}(F)$ (Proposition 3). If $F \in \hat{\mathcal{H}}(p)_0$, where $\mathcal{H} = \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ or $\mathfrak{N}''$, we call F *a strong* $(\mathcal{H}, p)$*-structuration of* $\hat{p}_{\mathcal{H}}(F)$.

In other words, F is a $(\mathcal{H}, p)$-structuration of D if F is a $\hat{p}_{\mathcal{H}}$-structure on $D \in \mathcal{H}_0$. If p is faithful, we have the following bijections:

$$F \to (\hat{p}_{\mathcal{H}}(F), F(u), F(u_0), F(u*u)) \text{ from } \mathcal{H}(p) \text{ into } \mathcal{H} \times H_0^{\cdot} \times H_0^{\cdot} \times H_0^{\cdot} \text{ if } \mathcal{H} = \mathfrak{N}', \mathfrak{N}'' \text{ or } \mathcal{K};$$

$$F \to (\hat{p}_{\mathcal{H}}(F), F(u), F(u_0)) \text{ from } \mathcal{G}(p) \text{ into } \mathcal{G} \times H_0^{\cdot} \times H_0^{\cdot};$$

$$F \to (\hat{p}_{\mathcal{H}}(F), F(u), F(u*u)) \text{ from } \mathfrak{N}(p) \text{ into } \mathfrak{N} \times H_0^{\cdot} \times H_0^{\cdot}.$$

Moreover, let F be a $(\mathcal{F}^{\#}, p)$-structuration of D. Then F is a $(\mathcal{K}, p)$-structuration of D, where $\mathcal{K} = \mathcal{F}'', \mathcal{F}'$ or $\mathcal{F}$, if, and only if, $D \in \mathcal{K}_0$, according to the Proposition 1. F is a $(\mathcal{F}_g, p)$-structuration of $D \in \mathcal{F}_{g0}$ if, and only if, there exists an extension of F to $U_{\mathfrak{N}''_g}$.

We suppose now that p *is faithful and* ν*-compatible*, and that its restriction p_γ to $H_\gamma^{\cdot}$ *is right faithful*. It follows from the Proposition 2 and its corollary that there exist the following bijections:

$$\phi_{\mathcal{H}}: F \to (\hat{p}_{\mathcal{H}}(F), F(u)) \text{ from } \mathcal{H}(p) \text{ into } \mathcal{H}_0 \times H_0^{\cdot} \text{ if } \mathcal{H} = \mathcal{G} \text{ or } \mathcal{K};$$

$$\phi_{\mathcal{H}}: F \to (\hat{p}_{\mathcal{H}}(F), F(u), F(u*u)) \text{ from } \mathcal{H}(p) \text{ into } \mathcal{H}_0 \times H_0^{\cdot} \times H_0^{\cdot}, \text{ if } \mathcal{H} = \mathfrak{N} \text{ or } \mathfrak{N}'';$$

$$\phi_{\mathfrak{N}'}: F \to (\hat{p}_{\mathfrak{N}'}(F), F(u*u)) \text{ from } \mathfrak{N}'(p) \text{ into } \mathfrak{N}'_0 \times H_0^{\cdot};$$

$$\phi_{\hat{\mathcal{H}}}: F \to (\hat{p}_{\mathcal{H}}(F), F(u)) \text{ from } \hat{\mathcal{H}}(p) \text{ into } \mathcal{H}_0 \times H_0^{\cdot}, \text{ if } \mathcal{H} = \mathfrak{N}, \mathfrak{N}' \text{ or } \mathfrak{N}''.$$

From the Corollary of the Proposition 3, we deduce that the surjection

$$\bar{\Phi}_{\mathcal{H}}: \Phi \to (\phi_{\mathcal{H}}(F_2), \underline{\tau(u)}, \phi_{\mathcal{H}}(F_1))$$

$$(\text{resp. } \bar{\Phi}_{\hat{\mathcal{H}}}: \Phi \to (\phi_{\hat{\mathcal{H}}}(F_2), \underline{\tau(u)}, \phi_{\hat{\mathcal{H}}}(F_1))),$$

where $\Phi \in \mathcal{H}(p)$ (resp. $\in \hat{\mathcal{H}}(p)$ and $\mathcal{H} = \mathfrak{N}, \mathfrak{N}'$ or $\mathfrak{N}''$) is the natural transformation defined by the triple (F_2, τ, F_1), is a bijection. We denote by $\mathcal{H}'(p)$ (resp. by $\hat{\mathcal{H}}'(p)$) the category image of $\mathcal{H}(p)$ by $\bar{\Phi}_{\mathcal{H}}$ (resp. of

$\hat{\mathcal{H}}'(p)$ by $\overline{\Phi}_{\hat{\mathcal{H}}}$ if $\mathcal{H} = \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ or $\mathcal{N}''$). The surjections $\underline{\pi}^{p}_{\mathcal{H}}(\overline{\Phi}^{-1}_{\mathcal{H}}$ and $\underline{\hat{p}}_{\mathcal{H}}\overline{\Phi}^{-1}_{\mathcal{H}}$ (Proposition 3 and its corollary) are faithful functors from $\mathcal{H}'(p)$ toward $H^{\cdot}$ and toward $\mathcal{H}$ respectively.

DEFINITION. An element of $\mathcal{H}'(p)_0$ (resp. of $\hat{\mathcal{H}}'(p)_0$ for $\mathcal{H} = \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ or $\mathcal{N}''$) will be called a *p-structured* (resp. a *strongly p-structured) element of* $\mathcal{H}_0$.

The word «element of $\mathcal{H}_0$» may be in each case replaced by its usual meaning: for example a p-structured element of $\mathcal{F}_0$ is also called a p-structured category, etc...

Hence (D, s) is a p-structured element of $\mathcal{H}_0$, for $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ or $\mathcal{K}$ (resp. for $\mathcal{H} = \mathcal{N}'$) if, and only if, there exists a $(\mathcal{H}, p)$-structuration F of $D \in \mathcal{H}_0$ such that $F(u) = s$ (resp. that $F(u*u) = s$). To say that $(D, s, s*s)$ is a p-structured element of $\mathcal{H}_0$ for $\mathcal{H} = \mathcal{N}$ or $\mathcal{N}''$ means that there exists a $(\mathcal{H}, p)$-structuration F of $D \in \mathcal{H}_0$ such that

$$F(u) = s \quad \text{and} \quad F(u*u) = s*s.$$

(D, s) is a strongly p-structured element of $\mathcal{H}_0$, for $\mathcal{H} = \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ or $\mathcal{N}''$, if, and only if, there exists a strong $(\mathcal{H}, p)$-structuration F of $D \in \mathcal{H}_0$ such that $F(u) = s$. The $(\mathcal{H}, p)$-structuration F is always uniquely determined by these conditions, since $\phi_{\mathcal{H}}$ and $\phi_{\hat{\mathcal{H}}}$ are bijections. More directly these definitions can be expressed as follows: Suppose $s \in H^{\cdot}_0$ and $C = p(s)$. The symbol $S' \prec S$ means that S' is a p-sub-structure (CS Chapter III, Definition 7) of S.

1) $([C], s)$ is a *p-structured graph* if, and only if,

 a) $[C]$ is a graph (C, β, α);

 b) there exist $s_0 \prec s$, $\overline{a} \in s_0.H.s$ and $\overline{b} \in s_0.H.s$ such that

$$p(\overline{a}) = (\alpha(C), \alpha, C) \quad \text{and} \quad p(\overline{b}) = (\alpha(C), \beta, C).$$

2) $(C^{\cdot}, s, s*s)$ is a *p-structured multiplicative class* if, and only if:

 a) $C^{\cdot}$ is a multiplicative class;

 b) there exists $\overline{k} \in s.H.s*s$ such that $p(\overline{k})$ be the law of composition $\kappa(C^{\cdot})$ of $C^{\cdot}$;

 c) there exists $\overline{v}_m \in s.H.s*s$, for $m = 1$ and 2, such that

31 $$p(\overline{v}_m) = (C, \underline{p}^{C}_{m} \iota, C^{\cdot} * C^{\cdot}).$$

3) $(D, s, s*s)$ is a *p-structured quasi-multiplicative graph* if, and only if:

a) $D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ is a quasi-multiplicative graph;

b) $((C, \beta, \alpha), s)$ is a p-structured graph;

c) $(C^{\cdot}, s, s*s)$ is a p-structured multiplicative class.

4) (D, s) is a *p-structured non associative quasi-category* if, and only if:

a) $D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ is a non associative quasi-category;

b) $((C, \beta, \alpha), s)$ is a p-structured graph; it follows that, with the notations of 1-b, there exists a fiber product $s*s$ of $(\overline{a}, \overline{b})$ in $H^{\cdot}$ such that $p(s*s) = C^{\cdot} * C^{\cdot}$;

c) $(C^{\cdot}, s, s*s)$ is a p-structured multiplicative class.

5) (D, s) is a *p-structured non associative category* (resp. *p-structured quasi-category*, resp. *p-structured category*) if, and only if:

a) D is a non associative category (resp. a quasi-category, resp. a category);

b) (D, s) is a p-structured non associative quasi-category.

6) $(C^{\cdot}, s)$ is a *p-structured groupoid* if, and only if:

a) $C^{\cdot}$ is a groupoid and (D, s) a p-structured category;

b) there exists $\overline{I} \in s.H.s$ such that $p(\overline{I})$ be the bijection $x \to x^{\cdot 1}$ from C onto C.

7) $(C^{\cdot}, s*s)$ is a *p-structured multiplicative graph* if, and only if:

a) $C^{\cdot}$ is a multiplicative graph;

b) there exists $\overline{j}_m \in H^{\cdot}_{\gamma}$ such that $\beta(\overline{j}_m) \vdash s*s$, for $m = 1$ and 2, that $\alpha(\overline{j}_1) = \alpha(\overline{j}_2)$, and that $p(\overline{j}_1)$ be the bijection $x \to (x, \alpha(x))$ and $p(\overline{j}_2)$ the bijection $x \to (\beta(x), x)$, where $x \in C$.

c) $(C^{\cdot}, s, s*s)$ is a p-structured quasi-multiplicative graph, where $s = \alpha(\overline{j}_1)$.

8) (D, s) is a *strongly p-structured multiplicative class* (resp. p-structured *quasi-multiplicative graph*, resp. p-structured *multiplicative*

graph) if, and only if:

a) $D \in \mathfrak{N}_0$ (resp. $\in \mathfrak{N}''_0$, resp. $\in \mathfrak{N}'_0$);

b) there exists a product $s \times s$ of (s, s) in $H^{\cdot}$ and $s*s \,\bar{\leftarrow}\, s \times s$, such that $(D, s, s*s)$ be a p-structured multiplicative class (resp. p-structured quasi-multiplicative graph, resp. that $(D, s*s)$ be a p-structured multiplicative graph).

REMARKS. 1) Let $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ be a functor. The surjection

$$F \to (\hat{p}_{\mathcal{G}}(F), F(b), F(a)), \quad \text{where} \quad F \in \mathcal{G}(p)_0,$$

is a bijection from $\mathcal{G}(p)_0$ onto the class of p-structured graphs defined in the Definition 3, II [5]. The surjection

$$F \to (\hat{p}_{\mathfrak{N}}(F), F(k)), \quad \text{where} \quad F \in \mathfrak{N}(p)_0 \text{ (resp. } \in \hat{\mathfrak{N}}(p)_0 \text{)},$$

defines an injection from $\mathfrak{N}(p)_0$ (resp. from $\hat{\mathfrak{N}}(p)_0$) into, but not necessarily onto, the class of (resp. of strongly) p-structured multiplicative classes defined in the Definitions 1 and 2, II [5]. The surjection

$$F \to (\hat{p}_{\mathfrak{N}'}(F), F(k), F(b), F(a)), \quad \text{where} \quad F \in \mathfrak{N}'(p)_0 \text{ (resp. } \hat{\mathfrak{N}}'(p)_0 \text{)}$$

defines an injection from $\mathfrak{N}'(p)$ (resp. from $\hat{\mathfrak{N}}'(p)$) into, but not onto, the class of (resp. of strongly) p-structured multiplicative graphs defined in the Definition 7, II [5]. If p is a homomorphisms functor (CS Chapter II, Definition 19) or more generally (as was remarked in [1]) if p is faithful and p_{γ} right faithful, the notions of p-structured graphs and of strongly p-structured multiplicative classes or multiplicative graphs defined here and in [5] are equivalent. But, even in this case, the definition of a p-structured multiplicative class (resp. multiplicative graph) given here is more restrictive than the one in [5]; indeed in [5] we do not require that the condition 2-c be satisfied (resp. satisfied nor that, with the notations of the condition 7-b above, $\beta(\bar{j}_2)$ (but only $\beta(\bar{j}_1)$) be a sub-structure of $s*s$). It is easy to see that the results of [5] are also true with the more restrictive definition of this paper. 1

2) If p is a homomorphisms functor with finite products, the notions of a p-structured category and of a p-structured groupoid $(C^{\cdot}, s)$ are equivalent to the notions of a $H^{\cdot}$-structured category and of a $H^{\cdot}$-structured

groupoid of [6]. Indeed, if $(C^{\cdot}, s) = \phi\mathcal{H}(F)$, then $s*s = F(u*u)$ is a sub-structure of $s \times s$, since $s*s$ is the fiber product of $(F(a), F(b))$ (CS Chapter IV, Theorem 6). The p-structured quasi-categories are defined in the Section 7 of [1].

9. STRUCTURES OF $H^{\cdot}$-CATEGORIES.

If $H^{\cdot}$ is a category, we denote by $\hat{V}H^{\cdot}$ the class of all naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber products in $H^{\cdot}$. The symbol $\mathcal{H}$ will again replace one of the symbols

$$\mathcal{G},\ \mathcal{N},\ \mathcal{N}',\ \mathcal{N}'' \text{ or } \mathcal{K}, \text{ where } \mathcal{K} = \mathcal{F}^{\#}, \mathcal{F}'', \mathcal{F}', \mathcal{F} \text{ or } \mathcal{F}_{g}.$$

1 Let $\mathcal{H}(H^{\cdot})$ be the category

$\mathcal{H}(H^{\cdot}, R_g(H^{\cdot}))$ when $\mathcal{H} = \mathcal{G}, \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ or $\mathcal{N}''$,

$\mathcal{H}(H^{\cdot}, R_g(H^{\cdot}), \hat{V}H^{\cdot})$ when $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ and $H^{\cdot}$ is with finite fiber products.

The sketches

$$\mu^{\iota}_{H^{\cdot}} = (H^{\cdot}, (H^{\iota})), \quad \mu^{\iota R}_{H^{\cdot}} = (H^{\cdot}, (H^{\iota}, R^2 H^{\cdot}))$$
$$\text{and } \mu^{\iota \hat{V}}_{H^{\cdot}} = (H^{\cdot}, (H^{\iota}, \hat{V}H^{\cdot}))$$

relative to the case $H^{\iota} = R_g(H^{\cdot})$ are denoted respectively by

$$\mu^{i}_{H^{\cdot}},\quad \mu^{iR}_{H^{\cdot}} \text{ and } \mu^{i\hat{V}}_{H^{\cdot}}.$$

The category $\mathcal{H}(\mathfrak{M})$ is represented by $\bar{\mathcal{H}}^{\upsilon}$ as was previously done.

We suppose that $H^{\cdot}$ is a given category such that

$$e'.H.e \in \mathfrak{M}_0 \text{ for each } e \in H^{\cdot}_0 \text{ and } e' \in H^{\cdot}_0.$$

If $K^{\cdot}$ is a category, we denote by $\mathfrak{A}(K^{\cdot})$ the horizontal category

$$\mathfrak{N}(K^{\cdot}, H^{*})^{\boxplus}$$

of natural transformations between functors from the dual category H^{*} of $H^{\cdot}$ toward $K^{\cdot}$; its units are identified with the functors from H^{*} toward $K^{\cdot}$. If $K^{\cdot}$ is with $\mathcal{J}$-fiber products or $\mathcal{J}$-products, where $\mathcal{J}$ is a class of classes, $\mathfrak{A}(K^{\cdot})$ is with $\mathcal{J}$-fiber products or with $\mathcal{J}$-products respectively (CS Appendix II, Proposition 2).

In particular, we write $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{M})$. Suppose that $\Psi_m \in \mathfrak{A}$ be the natural transformation defined by the triple $(\bar{G}_m, \tau_m, G_m)$ for each integer m. We have

$\Psi_m \in R_g(\mathcal{A})$ if, and only if, $\tau_m(e) \in \mathcal{M}^i$ for each $e \in H_0^\cdot$,

$(\Psi_1, \Psi_2) \in R^2\mathcal{A}$ if, and only if, $(\tau_1(e), \tau_2(e)) \in R^2\mathcal{M}$ for each $e \in H_0^\cdot$.

Moreover $\mathcal{A}$ admits as a canonical naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber product mapping the mapping $\nu_{\mathcal{A}}$ such that, if $\bar{G}_1 = \bar{G}_2$, we have

$$\nu_{\mathcal{A}}(\Psi_1, \Psi_2) = ((\Psi_1, \Psi_3), (\Psi_2, \Psi_4))$$

where

$$((\tau_1(e), \tau_3(e)), (\tau_2(e), \tau_4(e))) \in V \quad \text{for each} \quad e \in H_0^\cdot.$$

We construct an isomorphism η from $H^\cdot$ onto a sub-category $H^\cdot_{\mathcal{A}}$ 1
of $\mathcal{A}$ as follows: If $e \in H_0^\cdot$, the functor $\eta(e)$ from H^* to $\mathcal{M}$ maps $e' \in H_0^\cdot$ onto the class $e.H.e'$ and $h \in H$ onto the mapping

$$(e.H.\alpha(h), \bar{h}, e.H.\beta(h)) \quad \text{where } \bar{h}(h') = h'.h \text{ for } h' \in e.H.\beta(h).$$

If $f \in H$, then $\eta(f)$ is the natural transformation defined by

$$(\eta(\beta(f)), \tau_f, \eta(\alpha(f))),$$

where $\tau_f(e')$ is, for each $e' \in H_0^\cdot$, the mapping

$$h' \to f.h' \text{ from } \alpha(f).H.e' \text{ into } \beta(f).H.e'.$$

$H^\cdot_{\mathcal{A}}$ is a full sub-category of $\mathcal{A}$; indeed (CS Chapter II, page 63) if $\Phi \in \mathcal{A}$ is the natural transformation defined by the triple $(\eta(e'), \tau, \eta(e))$, where $e \in H_0^\cdot$ and $e' \in H_0^\cdot$, and if $f = \tau(e)(e)$, then $\Phi = \eta(f)$. 2

Let $\pi_{\mathcal{H}}$ be the faithful functor (previously noted $\pi^{\mathcal{M}}_{\mathcal{H}}$) from $\bar{\mathcal{H}}^\upsilon$ toward $\mathcal{M}$ such that $\pi_{\mathcal{H}}(\Psi) = \underline{\tau(u)}$ if $\Psi \in \bar{\mathcal{H}}^\upsilon$ is the natural transformation defined by the triple (F', τ, F). We define a functor $\bar{\pi}_{\mathcal{H}}$ from $\mathcal{A}(\bar{\mathcal{H}}^\upsilon)$ toward $\mathcal{A}$ mapping Ψ onto $\boxminus \pi_{\mathcal{H}}.\Psi$. We have shown in the preceding sections that there exists an isomorphism $\hat{\gamma}_{\mathcal{H}}$ from the sub-category $\mathcal{H}^\upsilon$ of $\bar{\mathcal{H}}^\upsilon$ onto $\mathcal{H}$, and that $\bar{\mathcal{H}}^\upsilon$ is an enlargement of $\mathcal{H}^\upsilon$. The surjection

$$\Psi \to \boxminus(\bar{\mathcal{H}}^\upsilon, \hat{\gamma}_{\mathcal{H}}^{-1}, \mathcal{H}).\Psi, \quad \text{where} \quad \Psi \in \mathcal{A}(\mathcal{H}),$$

defines an isomorphism from $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ onto a full sub-category of $\mathcal{A}(\bar{\mathcal{H}}^\upsilon)$ which admits $\mathcal{A}(\bar{\mathcal{H}}^\upsilon)$ as an enlargement.

PROPOSITION 1. *There exists an isomorphism* $a_{\mathcal{H}}$ *from* $\mathcal{H}(\mathcal{A})$ *onto* $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}}^{\upsilon})$. *If* $\mathcal{H} = \mathcal{G}, \mathcal{N}, \mathcal{N}'$ *or* $\mathcal{N}''$ *(resp. If* $H^{\cdot}$ *is with finite fiber products), there exists an isomorphism* $\eta_{\mathcal{H}}$ *from* $\mathcal{H}(H^{\cdot})$ *onto a full sub-category of* $\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{H}}^{\upsilon})$ *mapped into* $H_{\mathcal{A}}$ *by* $\tilde{\pi}_{\mathcal{H}}$.

PROOF. It is well known that, if $U^{\cdot}$ is a multiplicative graph, there ex-
1 ists a canonical isomorphism $a(U^{\cdot})$ from

$$\mathfrak{N}(\mathcal{A}, U^{\cdot})^{\boxplus} = \mathfrak{N}(\mathfrak{N}(\mathcal{M}, H^*)^{\boxplus}, U^{\cdot})^{\boxplus}$$

onto

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{N}(\mathcal{M}, U^{\cdot})^{\boxplus}, H^*)^{\boxplus};$$

in particular $a(U^{\cdot})$ maps a unit $G \in \mathfrak{N}(\mathcal{A}, U^{\cdot})^{\boxplus}_{0}$ onto the functor G' from H^* toward $\mathfrak{N}(\mathcal{M}, U^{\cdot})^{\boxplus}$ such that

2 $$G'(h)(x) = \epsilon . G(x)(h) \quad \text{for each } h \in H \text{ and } x \in U,$$

ϵ denoting the canonical isomorphism (CS Chapter I, Proposition 23) from $\boxminus \mathcal{M}$ onto $\boxplus \mathcal{M}$ defined by the surjection

$$(\hat{z}', z', z, \hat{z}) \to (z', \hat{z}', \hat{z}, z) \quad \text{where } (\hat{z}', z', z, \hat{z}) \in \square \mathcal{M}.$$

Suppose $G \in \mathfrak{N}(\mathcal{A}, U^{\cdot})^{\boxplus}_{0}$ and write $G' = a(U^{\cdot})(G)$. We have

$G(x) \in R_g(\mathcal{A})$ if, and only if, $G'(e)(x) \in \mathcal{M}^i$ for each $e \in H^{\cdot}_0$,

$(G(x_1), G(x_2)) \in R^2 \mathcal{A}$ if, and only if,

$(G'(e)(x_1), G'(e)(x_2)) \in R^2 \mathcal{M}$ for each $e \in H^{\cdot}_0$;

$((G(x), G(x_1)), (G(x'), G(x_2))) \in \hat{V} \mathcal{A}$ if, and only if,

$((G'(e)(x), G'(e)(x_1)), (G'(e)(x'), G'(e)(x_2))) \in \hat{V} \mathcal{M}$

for each $e \in H^{\cdot}_0$,

3 because $G(x)(e)$ is, for $e \in H^{\cdot}_0$ and $x \in U$, the degenerated quartet $G'(e)(x)^{\boxminus}$ associated with $G'(e)(x)$ (CS Chapter I, Proposition 30). - If $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ or $\mathcal{N}$, it follows that

$$G \in \mathcal{H}(\mathcal{A})_0 \text{ if, and only if, } G'(e) \in \tilde{\mathcal{H}}^{\upsilon}_0 \text{ for each } e \in H^{\cdot}_0,$$

i.e. if, and only if, $G'(H) \subset \tilde{\mathcal{H}}^{\upsilon}$. - If $\mathcal{H} = \mathcal{N}'$ or $\mathcal{N}''$ (resp. $= \mathcal{K}$), we deduce from the preceding result that G is a $\mu^{iR}_{\mathcal{A}}$-realization of $\mu\, \mathcal{G}_{\mathcal{N}}$ (resp. a $\mu^{i\hat{V}}_{\mathcal{A}}$-realization of $\mu\, \dot{\mathcal{G}}_{\mathcal{N}}$) if, and only if, $G'(e)$ is a $\mu^{iR}_{\mathcal{M}}$-realization of

$\mu\mathcal{G}\mathfrak{N}$ (resp. a $\mu^{i\hat{V}}_{\mathfrak{M}}$-realization of $\mu\dot{\mathcal{G}}\mathfrak{N}$) for each $e \in H_0^{\bullet}$. Similarly, $\hat{G}$ is a $\mu^{iR}_{\mathfrak{A}}$-realization (resp. a $\mu^{i\hat{V}}_{\mathfrak{A}}$-realization) of $\mu\mathcal{H}$ extending G if, and only if, $\hat{G}' = a(a(\hat{G}))(\hat{G})$ is a neofunctor such that $\hat{G}'(e)$ be a $\mu^{iR}_{\mathfrak{M}}$- (resp. a $\mu^{i\hat{V}}_{\mathfrak{M}}$-) realization of $\mu\mathcal{H}$ extending $G'(e)$ for each $e \in H_0^{\bullet}$ (we write $\mu_g = \mu\mathcal{F}_{g}$). Hence $G \in \mathcal{H}(\mathfrak{A})_0$ implies $G'(H) \subset \bar{\mathcal{H}}^{\upsilon}$. Conversely, suppose $G'(H) \subset \bar{\mathcal{H}}^{\upsilon}$ and let $\hat{G}'(e)$ be, for each $e \in H_0^{\bullet}$, a $\mu^{iR}_{\mathfrak{M}}$- (resp. a $\mu^{i\hat{V}}_{\mathfrak{M}}$-) realization of $\mu\mathcal{H}$ extending $G'(e)$; if $h \in H$, we have constructed in the proofs of the Propositions 3-3 and 3-4 (resp. 3-5 and 3-6) a $\mu^{iR}_{\boxminus\mathfrak{M}}$- (resp. a $\mu^{i\hat{V}}_{\boxminus\mathfrak{M}}$-) realization $\hat{G}'(h)$ of $\mu\mathcal{H}$ extending $G'(h)$ defined by a triple of the form

$$(\hat{G}'(\alpha(h)), r, \hat{G}'(\beta(h))).$$

The surjection $h \to \hat{G}'(h)$ defines a functor $\hat{G}'$; as said above

$$\hat{G} = a(a(\hat{G}))^{-1}(\hat{G}')$$

is a $\mu^{iR}_{\mathfrak{A}}$- (resp. a $\mu^{i\hat{V}}_{\mathfrak{A}}$-) realization of $\mu\mathcal{H}$ extending G. So, whatever be $\mathcal{H}$, we have

$$G \in \mathcal{H}(\mathfrak{A})_0 \text{ if, and only if, } G'(H) \subset \bar{\mathcal{H}}^{\upsilon}.$$

This proves that the surjection

$$G \to a_{\mathcal{H}}(G) = (\bar{\mathcal{H}}^{\upsilon}, \mathcal{G}', H^*)$$

is a bijection from $\mathcal{H}(\mathfrak{A})_0$ onto $\mathfrak{A}(\bar{\mathcal{H}}^{\upsilon})_0$.

- Let $\Psi \in \mathcal{H}(\mathfrak{A})$ be the natural transformation defined by the triple (G_2, r, G_1) and denote by (G_2', r', G_1') the triple defining $\Psi' = a(\alpha(\Psi))(\Psi)$. We have

$$G_m'' = a_{\mathcal{H}}(G_m) = (\bar{\mathcal{H}}^{\upsilon}, \mathcal{G}'_m, H^*) \text{ for } m = 1 \text{ and } 2.$$

The triple (G_2'', r', G_1'') also defines a natural transformation $a_{\mathcal{H}}(\Psi)$, belonging to $\mathfrak{A}(\bar{\mathcal{H}}^{\upsilon})$. Hence the surjection $\Psi \to a_{\mathcal{H}}(\Psi)$, where $\Psi \in \mathcal{H}(\mathfrak{A})$, defines an isomorphism $a_{\mathcal{H}}$ from $\mathcal{H}(\mathfrak{A})$ onto $\mathfrak{A}(\bar{\mathcal{H}}^{\upsilon})$.

- Denote by η' the injective functor $(\mathfrak{A}, \underline{\eta}, H^{\bullet})$, where η is the canonical isomorphism from $H^{\bullet}$ onto $H^{\bullet}_{\mathfrak{A}}$ (resp. $H^{\bullet}_{\mathfrak{A}}$ and suppose $H^{\bullet}$ with finite fiber products).

$$(\mu^{i}_{\mathfrak{A}}, \underline{\eta}, \mu^{i}_{H^{\bullet}}) \text{ and } (\mu^{iR}_{\mathfrak{A}}, \underline{\eta}, \mu^{iR}_{H^{\bullet}}) \text{ (resp. and } (\mu^{i\hat{V}}_{\mathfrak{A}}, \underline{\eta}, \mu^{i\hat{V}}_{H^{\bullet}}))$$

are homomorphisms between (χ_1)-sketches and (χ_1, χ_4)-sketches (resp. and (χ_1, χ_4)-sketches). According to the Proposition 2-1, the surjection

$$\Phi \to \boxminus \eta' . \Phi, \text{ where } \Phi \in \mathcal{H}(H^{\boldsymbol{\cdot}}),$$

defines an isomorphism $\mathcal{H}(\eta)$ from $\mathcal{H}(H^{\boldsymbol{\cdot}})$ onto a sub-category $\mathcal{H}'(\mathfrak{A})$ of $\mathcal{H}(\mathfrak{A})$. As $H^{\boldsymbol{\cdot}}_{\mathfrak{A}}$ is a full sub-category of $\mathfrak{A}$, if $\Psi \in \mathcal{H}(\mathfrak{A})$ is such that its right and left units belong to $\mathcal{H}'(\mathfrak{A})$, we get $\Psi(U) \subset \square H_{\mathfrak{A}}$; we conclude that the surjection

$$x \to \boxminus \eta^{-1}(\Psi(x)), \text{ where } x \in U,$$

defines an element $\Phi \in \mathcal{H}(H^{\boldsymbol{\cdot}})$ for which

$$\Psi = \mathcal{H}(\eta)(\Phi) \in \mathcal{H}'(\mathfrak{A}).$$

Therefore $\mathcal{H}'(\mathfrak{A})$ is a full sub-category of $\mathcal{H}(\mathfrak{A})$. The surjection $\underline{a}_{\mathcal{H}}\, \underline{\mathcal{H}(\eta)}$ defines an isomorphism $\eta_{\mathcal{H}}$ from $\mathcal{H}(H^{\boldsymbol{\cdot}})$ onto a full sub-category of $\mathfrak{A}(\bar{\mathcal{H}}^{\mathfrak{V}})$.
- If $F \in \mathcal{H}(H^{\boldsymbol{\cdot}})_0$, from the relations

$$a_{\mathcal{H}}(\eta'.F)(h)(u) = \eta'.F(u)(h)^{\boxminus},$$

we deduce

$$\bar{\pi}_{\mathcal{H}}\eta_{\mathcal{H}}(F)(h) = \eta'.F(u)(h)$$

for each $h \in H$, so that

$$\bar{\pi}_{\mathcal{H}}\eta_{\mathcal{H}}(F) = \eta(F(u)) \in H_{\mathfrak{A}}.$$

As $H^{\boldsymbol{\cdot}}_{\mathfrak{A}}$ is a full sub-category of $\mathfrak{A}$, it follows that

$$\bar{\pi}_{\mathcal{H}}\eta_{\mathcal{H}}(\Phi) \in H_{\mathfrak{A}} \quad \text{if} \quad \Phi \in \mathcal{H}(H^{\boldsymbol{\cdot}})$$

as was to be shown.

The Proposition 1 shows that, if $F \in \mathcal{H}(H^{\boldsymbol{\cdot}})_0$, then $\eta_{\mathcal{H}}(F)$ is an element of $\mathfrak{A}(\bar{\mathcal{H}}^{\mathfrak{V}})$ mapped by $\bar{\pi}_{\mathcal{H}}$ onto an element of $H_{\mathfrak{A}}$. But this condition does not characterize an element of $\mathcal{H}(H^{\boldsymbol{\cdot}})_0$.

DEFINITION. If $e \in H^{\boldsymbol{\cdot}}_0$, we call *generalized $H^{\boldsymbol{\cdot}}$-element of* $\mathcal{H}_0$ a functor $G' \in \mathfrak{A}(\bar{\mathcal{H}}^{\mathfrak{V}})_0$ such that $\bar{\pi}_{\mathcal{H}}(G') = \eta(e)$, where $e \in H^{\boldsymbol{\cdot}}_0$.

This definition agrees with the definition of structures of a certain species on an object of the category $H^{\boldsymbol{\cdot}}$ given in [7]. From the Proposition 1 it follows that the restriction of $a^{-1}_{\mathcal{H}}$ to the class $\bar{\pi}^{-1}_{\mathcal{H}}(H^{\boldsymbol{\cdot}}_{\mathfrak{A}0})$ of general-

ized $H^{\bullet}$-elements of $\mathcal{H}_0$ is a bijection onto a sub-class of $\mathcal{H}(\mathcal{A})$. By shrinking this sub-class of $\mathcal{H}(\mathcal{A})$, we are going to sharpen the notion of 1
a generalized $H^{\bullet}$-element of $\mathcal{H}_0$, when $\mathcal{H}$ is one of the categories $\mathcal{K}$.

Let $\mathcal{K}_0^c$ be the class of concrete elements of $\mathcal{K}_0$, i.e. the class of couples (D, c) such that $D \in \mathcal{K}_0$, that c is an injection of a class M into the class C underlying D and that $c(D)$ is the class of vertices of D. In other words, c defines M as a class of objects for the non associative quasi-category D. For example, $\mathcal{F}_0^c$ is the class of concrete categories (most frequently in the literature, the word «category» means concrete category). Let $\mathcal{K}^c$ be the category formed by the triples $((D', c'), \underline{f}, (D, c))$ such that

$$(D, c) \in \mathcal{K}_0^c, \quad (D', c') \in \mathcal{K}_0^c \quad \text{and} \quad (D', \underline{f}, D) \in \mathcal{K},$$

the law of composition being

$$((D'', c''), \underline{f}', (\hat{D}', \hat{c}')).((D', c'), \underline{f}, (D, c)) = (D'', c''), \underline{f}'\underline{f}, (D, c))$$

if, and only if, $(\hat{D}', \hat{c}') = (D', c')$. We identify $\mathcal{K}$ with the full sub-category of $\mathcal{K}^c$ the units of which are the couples $(D, (D, \iota, D_0))$. Let $p_{\mathcal{K}}^c$ be the faithful functor from $\mathcal{K}^c$ toward $\mathcal{M}$ which maps

$$((D', c'), \underline{f}, (D, c)) \in \mathcal{K}^c \quad \text{onto} \quad p_{\mathcal{K}}(D', \underline{f}, D) = (C', \underline{f}, C),$$

where $p_{\mathcal{K}}$ is the canonical forgetting functor from $\mathcal{K}$ toward $\mathcal{M}$.

PROPOSITION 2. *$\mathcal{K}^c$ is an enlargement of $\mathcal{K}$ and there exists an isomorphism $\bar{\gamma}_{\mathcal{K}}$ from the category $\mathcal{K}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^i, V)$ onto $\mathcal{K}^c$.*

PROOF. If $(D, c) \in \mathcal{K}_0^c$, we have $(D, \iota, (D, c)) \in \mathcal{K}_0 . \mathcal{K}_\gamma^c$, so that $\mathcal{K}^c$ is an enlargement of $\mathcal{K}$. - Suppose $F \in \mathcal{K}(\mathcal{M}, \mathcal{M}^i, V)_0$. If r is the surjection from $(U\mathcal{G}\mathcal{N})_0$ onto $\mathcal{M}_\gamma$ such that

$$u \to u, \quad u * u \to u * u,$$
$$u_0 \to \underline{c} \ \text{ where } \ F(i) = (F(u), \underline{c}, F(u_0)) \in \mathcal{M}^i,$$

there exists a triple (F', r, F) defining an equivalence Φ. We have shown that $\tilde{\mathcal{K}}^{\mathfrak{v}}$ is a saturated sub-category of $\mathfrak{N}(\mathcal{M}, U\mathcal{G}\mathcal{N})^{\boxplus}$; so we find $\Phi \in \tilde{\mathcal{K}}_\gamma^{\mathfrak{v}}$. Since $F'(i) \in \mathcal{M}^\iota$ and $\xi_0(F') = \xi_0(F) \in V$, we have $F' \in \mathcal{K}_0$. It follows that we define a bijection

$$F \to \tilde{\gamma}_{\mathcal{K}}(F) = (\hat{\gamma}_{\mathcal{K}}(F'), F(i)) \text{ from } \mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^i, V)_0 \text{ onto } \mathcal{K}^c_0,$$

which extends into the isomorphism $\tilde{\gamma}_{\mathcal{K}}$ from $\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^i, V)$ onto $\mathcal{K}^c$ mapping Φ onto $(\tilde{\gamma}_{\mathcal{K}}(F_2), \underline{\tau(u)}, \tilde{\gamma}_{\mathcal{K}}(F_1))$, when Φ is the natural transformation defined by the triple (F_2, τ, F_1).

We denote by $V\mathcal{A}$ the class of naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber products in $\mathcal{A}$ associated with the mapping $\nu_{\mathcal{A}}$.

PROPOSITION 3. *There exists an isomorphism $i_{\mathcal{K}}$ from $\mathcal{A}(\mathcal{K}^c)$ onto a full sub-category of $\mathcal{A}(\bar{\mathcal{K}}^\upsilon)$ and the surjection $\underline{a}_{\mathcal{K}}^{-1}\, \underline{i}_{\mathcal{K}}$ defines an isomorphism $b_{\mathcal{K}}$ from $\mathcal{A}(\mathcal{K}^c)$ onto $\mathcal{K}(\mathcal{A}, R_g(\mathcal{A}), V\mathcal{A})$.*

PROOF. Since $\mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^i, V)$ is a full sub-category of $\bar{\mathcal{K}}^\upsilon$, it follows from the Proposition 2 that $\tilde{\gamma}'_{\mathcal{K}} = (\bar{\mathcal{K}}^\upsilon, \underline{\tilde{\gamma}}_{\mathcal{K}}^{-1}, \mathcal{K}^c)$ is an injective functor. So the surjection

$$\Phi' \to \boxminus \tilde{\gamma}'_{\mathcal{K}} \cdot \Phi', \text{ where } \Phi' \in \mathcal{A}(\mathcal{K}^c),$$

defines an isomorphism $i_{\mathcal{K}}$ from $\mathcal{A}(\mathcal{K}^c)$ onto the full sub-category of $\mathcal{A}(\bar{\mathcal{K}}^\upsilon)$ the units of which are the functors

$$G' \in \mathcal{A}(\bar{\mathcal{K}}^\upsilon)_0 \text{ such that } G'(H) \subset \mathcal{K}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^i, V).$$

Moreover the surjection $\underline{a}_{\mathcal{K}}^{-1}\, \underline{i}_{\mathcal{K}}$ defines an isomorphism $b_{\mathcal{K}}$ from $\mathcal{A}(\mathcal{K}^c)$ onto a full sub-category of $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, because $a_{\mathcal{K}}$ is an isomorphism from $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ onto $\mathcal{A}(\bar{\mathcal{K}}^\upsilon)$, according to the Proposition 1. If $G' \in \mathcal{A}(\bar{\mathcal{K}}^\upsilon)_0$, the functor $G = a_{\mathcal{K}}^{-1}(G')$ belongs to $\mathcal{K}(\mathcal{A}, R_g(\mathcal{A}), V\mathcal{A})$ if, and only if

$$\xi_0(G) = ((G(a), G(v_1)), (G(b), G(v_2))) \in V\mathcal{A},$$

i.e. if $\xi_0(G'(e)) \in V$ for each $e \in H_0^{\cdot}$. This last condition means that

$$G'(e) \in \mathfrak{N}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^i, V)_0 \text{ for each } e \in H_0^{\cdot}.$$

Hence the relations

$$G \in \mathcal{K}(\mathcal{A}, R_g(\mathcal{A}), V\mathcal{A})_0 \text{ and } a_{\mathcal{K}}(G) \in i_{\mathcal{K}}(\mathcal{A}(\mathcal{K}^c))_0$$

are equivalent. We conclude that $b_{\mathcal{K}}$ is an isomorphism from $\mathcal{A}(\mathcal{K}^c)$ onto $\mathcal{K}(\mathcal{A}, R_g(\mathcal{A}), V\mathcal{A})$.

The isomorphism η from $H^{\cdot}$ onto $H^{\cdot}_{\mathcal{A}}$ maps $R_g(H^{\cdot})$ onto a subcategory of $R_g(\mathcal{A})$ denoted by $\mathcal{A}^\iota$. Let $\hat{\mathcal{A}}(\mathcal{K}^c)$ be the full sub-category of $\mathcal{A}(\mathcal{K}^c)$ the units of which are the functors

$$G' \in \mathcal{A}(\mathcal{K}^c)_0 \quad \text{such that} \quad b_{\mathcal{K}}(G') \in \mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\iota}, V\mathcal{A}).$$

If $G' \in \mathcal{A}(\mathcal{K}^c)_0$, we have $G' \in \hat{\mathcal{A}}(\mathcal{K}^c)_0$ if, and only if there exists $i' \in R_g(H^{\cdot})$ such that $b_{\mathcal{K}}(G')(i) = \eta(i')$, which means (Propositions 3 and 1):

$$i_{\mathcal{K}}(G')(h)(i) = \epsilon . \eta(i')(h) \quad \text{for each} \quad h \in H.$$

It follows from the Proposition 3 that

$$b'_{\mathcal{K}} = (\mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\iota}, V\mathcal{A}), \underline{b}_{\mathcal{K}}\iota, \mathcal{A}(\mathcal{K}^c))$$

is an isomorphism.

Let $\hat{H}^{\cdot}$ be the full sub-category of $\mathcal{A}$ saturated by finite fiber products generated by $H^{\cdot}_{\mathcal{A}}$. This category admits a restriction $\nu'_{\hat{\mathcal{A}}}$ of $\nu_{\mathcal{A}}$ as a naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber product mapping. Denote by $V\hat{H}^{\cdot}$ the class $V\mathcal{A} \cap \hat{H}^4$ associated to $\nu'_{\mathcal{A}}$. 1

PROPOSITION 4. *There exists an isomorphism* $b''_{\mathcal{K}}$ *from* $\hat{\mathcal{A}}(\mathcal{K}^c)$ *onto* $\mathcal{K}(\hat{H}^{\cdot}, \mathcal{A}^{\iota}, V\hat{H}^{\cdot})$. *If* $VH^{\cdot}$ *is the class associated with a naturalized* $\{\{1,2\}\}$-*fiber product mapping in* $H^{\cdot}$, *then* $\hat{\mathcal{A}}(\mathcal{K}^c)$ *is isomorphic to* $\mathcal{K}(H^{\cdot}, R_g(H^{\cdot}), VH^{\cdot})$.

PROOF. We write $\mathcal{K}(-)$ instead of $\mathcal{K}(\hat{H}^{\cdot}, \mathcal{A}^{\iota}, V\hat{H}^{\cdot})$. Since $(\mu^{\iota V}_{\mathcal{A}}, \iota, \mu^{\iota V}_{\hat{H}^{\cdot}})$ is a homomorphism between (χ_1, χ_4)-sketches, the surjection

$$\Phi \to (\boxminus\mathcal{A}, \underline{\Phi}, U^{\cdot}_{\mathcal{G}\mathcal{M}}), \quad \text{where} \quad \Phi \in \mathcal{K}(-),$$

defines an isomorphism $\hat{\eta}_{\mathcal{K}}$ from $\mathcal{K}(-)$ onto a full sub-category of $\mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\iota}, V\mathcal{A})_0$. Suppose $G \in \mathcal{K}(\mathcal{A}, \mathcal{A}^{\iota}, V\mathcal{A})_0$. We have $G(i) \in H_{\mathcal{A}}$ and, $H^{\cdot}_{\mathcal{A}}$ being a full sub-category of $\mathcal{A}$, we find

$$G(a) \in H_{\mathcal{A}} \quad \text{and} \quad G(b) \in H_{\mathcal{A}}.$$

The category $\hat{H}^{\cdot}$ is saturated by finite fiber products in $\mathcal{A}$, so that

$$\xi_0(G) = \nu'_{\mathcal{A}}(G(a), G(b)) \in V\hat{H}^{\cdot}.$$

Moreover $G(k) \in \hat{H}$, for $\hat{H}^{\cdot}$ is a full sub-category of $\mathcal{A}$. Hence

$$G(U_{\mathcal{G}\mathcal{M}}) \subset \hat{H} \quad \text{and} \quad G' = (\hat{H}^{\cdot}, \underline{G}, U^{\cdot}_{\mathcal{G}\mathcal{M}}) \qquad 2$$

is a $\mu^{\iota V}_{\hat{H}^{\cdot}}$-realization of $\mu^{\cdot}_{\mathcal{G}\mathcal{M}}$. If $\hat{G}$ is a $\mu^{\iota V}_{\mathcal{A}}$-realization of $\mu_{\mathcal{K}}$ extending G, similarly, according to the constructions of the Propositions 3-4, 1-5 and 1-6, the class $\hat{G}(\alpha(\hat{G}))$ is contained in $\hat{H}$; it results that $(\hat{H}^{\cdot}, \hat{\underline{G}}, \alpha(\hat{G}))$ is a $\mu^{\iota, V}_{\hat{H}^{\cdot}}$-realization of $\mu\mathcal{K}$ extending G', from which we deduce

$$G' \in \mathcal{K}(-)_0 \quad \text{and} \quad G = \hat{\eta}\mathcal{K}(G').$$

Hence $\hat{\eta}\mathcal{K}$ is an isomorphism from $\mathcal{K}(-)$ onto $\mathcal{K}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{\iota}, V\mathfrak{A})$, and $\hat{\eta}\mathcal{K}^{-1} \cdot b'_{\mathcal{K}}$ is an isomorphism $b''_{\mathcal{K}}$ from $\hat{\mathfrak{A}}(\mathcal{K}^c)$ onto $\mathcal{K}(-)$.

- Suppose that $VH^{\cdot}$ is the class associated with a naturalized $\{\{1,2\}\}$-fiber product mapping in $H^{\cdot}$. The surjection

$$\Phi \to \boxminus(\hat{H}^{\cdot}, \underline{\eta}, H^{\cdot}).\Phi, \quad \text{where} \quad \Phi \in \mathcal{K}(H^{\cdot}, R_g(H^{\cdot}), VH^{\cdot}),$$

defines an isomorphism $\hat{\eta}'_{\mathcal{K}}$ from $\mathcal{K}(H^{\cdot}, R_g(H^{\cdot}), VH^{\cdot})$ onto the full subcategory $\mathcal{K}_1$ of $\mathcal{K}(\hat{H}^{\cdot}, \mathfrak{A}^{\iota}, \hat{V}\hat{H}^{\cdot})$ the units of which are the elements G of $\mathcal{K}(\hat{H}^{\cdot}, \mathfrak{A}^{\iota}, \hat{V}\hat{H}^{\cdot})_0$ such that $\xi_0(G) \in \eta^4(VH^{\cdot})$. Using the preceding result, we have only to prove that $\mathcal{K}_1$ and $\mathcal{K}(-)$ are isomorphic. If x_1 and x_2 are two elements of $\hat{H}$ such that

$$\beta(x_1) = \beta(x_2) \in H_{\mathfrak{A}}, \quad \alpha(x_1) \in H_{\mathfrak{A}}, \quad \alpha(x_2) \in H_{\mathfrak{A}}$$

there exists one and only one

$$t = ((x_1, x'_1), (x_2, x'_2)) \in \eta^4(VH^{\cdot})$$

and one, and only one,

$$t' = ((x_1, x''_1), (x_2, x''_2)) \in \hat{V}\hat{H}^{\cdot}.$$

As t and t' are two naturalized fiber products of (x_1, x_2) in $\hat{H}^{\cdot}$, there exists one, and only one, $X \in \hat{H}^{\cdot}_{\gamma}$, denoted by $X(x_1, x_2)$, such that

$$x''_m = x'_m \cdot X(x_1, x_2) \quad \text{for} \quad m = 1 \text{ and } 2.$$

Suppose

$$G \in \mathcal{K}(-)_0, \quad a' = G(a), \quad b' = G(b)$$
$$(\text{resp. } G_1 \in \mathcal{K}_{1\,0}, \quad a' = G_1(a), \quad b' = G_1(b)).$$

A method already applied (Proposition 4-5) shows that there exists a triple (G_1, τ, G), where

$$\tau(u) = u, \quad \tau(u_0) = u_0, \quad \tau(u * u) = X(a', b'),$$

defining an equivalence $\Phi_G \in \mathcal{K}(\hat{H}^{\cdot}, \mathfrak{A}^{\iota}, \hat{V}\hat{H}^{\cdot})$. We have $G_1 \in \mathcal{K}_1$ (resp.

have $G \in \mathcal{K}(\cdot)$) and G_1 is the unique unit of $\mathcal{K}_1$ equivalent to G and admitting the same restriction to $U_{\mathcal{G}}^{\cdot}$ as G. So the surjection

$$\Phi \to \Phi_G \cdot \boxed{\,} \Phi \boxed{\,} \Phi_G^{-1}, \text{ where } \Phi \in G'.\mathcal{K}(-).G,$$

defines an isomorphism $\delta_{\mathcal{K}}$ from $\mathcal{K}(\cdot)$ onto $\mathcal{K}_1$. We conclude that

$$\hat{\eta}'^{-1}_{\mathcal{K}} \cdot \delta_{\mathcal{K}} \cdot b'_{\mathcal{K}}$$

is an isomorphism from $\hat{\mathfrak{A}}(\mathcal{K}^c)$ onto $\mathcal{K}(H^{\cdot}, R_g(H^{\cdot}), VH^{\cdot})$.

DEFINITION. We call *$H^{\cdot}$-element of* $\mathcal{K}_0$ on (e, e_0) an element G of $\hat{\mathfrak{A}}(\mathcal{K}^c)_0$ such that

$$b_{\mathcal{K}}(G)(i) = \eta(i'), \text{ where } i' \in H, \ \alpha(i') = e_0 \text{ and } \beta(i') = e.$$

The notions of $H^{\cdot}$-categories and of $H^{\cdot}$-groupoids on (e, e_0) have been defined in [4] and [7]. The Proposition 4 asserts that the $H^{\cdot}$-categories on (e, e_0) correspond biunivocally to the $(\hat{H}^{\cdot}, \mathfrak{A}^{\iota}, V\hat{H}^{\cdot})$-categories (i.e. to the $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{\iota}, V\mathfrak{A})$-categories G such that $G(u)$ and $G(u_0)$ be re- 1
presentable functors) and, if $H^{\cdot}$ is with finite fiber products, to the $(H^{\cdot}, R_g(H^{\cdot}), VH^{\cdot})$-categories, where $VH^{\cdot}$ is associated with a naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber product mapping in $H^{\cdot}$.

REMARK. To consider the category $\hat{H}^{\cdot}$ is a way of adding fiber products to the category $H^{\cdot}$ (virtual products [9] are obtained by a similar construction). If $H^{\cdot}$ is with finite fiber products, $\hat{H}^{\cdot}$ is the saturated sub-category of $\mathfrak{A}$ generated by $H^{\cdot}_{\mathfrak{A}}$; so it is equivalent, but not isomorphic, to $H^{\cdot}$. We can construct a category $\bar{H}^{\cdot}$ with finite fiber products, admitting $H^{\cdot}$ as a sub-category, and which reduces to $H^{\cdot}$ when $H^{\cdot}$ is with finite fiber products: Choose a naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber product mapping $\tilde{\nu}$ in $\mathfrak{A}$ such that

$$\tilde{\nu}(\Psi_1, \Psi_2) \in H^4_{\mathfrak{A}} \quad \text{if } \Psi_1 \in H_{\mathfrak{A}},\ \Psi_2 \in H_{\mathfrak{A}} \text{ and if there exists a fiber product of } (\eta^{-1}(\Psi_1), \eta^{-1}(\Psi_2)) \text{ in } H^{\cdot};$$

$$\tilde{\nu}(\Psi_1, \Psi_2) = \nu_{\mathfrak{A}}(\Psi_1, \Psi_2) \quad \text{otherwise.}$$

Let $\bar{H}^{\cdot}$ be the intersection of all full sub-categories $K^{\cdot}$ of $\mathfrak{A}$ such that 2

$$H_{\mathfrak{A}} \subset K \text{ and } \tilde{\nu}(\Psi_1, \Psi_2) \in K^4 \text{ if } \Psi_1 \in K \text{ and } \Psi_2 \in \beta^{\boxed{\,}}(\Psi_1).K.$$

Then $\tilde{H}^{\cdot}$ admits a restriction $\tilde{\nu}'$ of $\tilde{\nu}$ as a naturalized $\{\{1, 2\}\}$-fiber product mapping; denote by $V\tilde{H}^{\cdot}$ the class associated with $\tilde{\nu}'$; we can identify $H^{\cdot}$ with the sub-category $H\dot{\mathcal{Q}}$ of $\tilde{H}^{\cdot}$. The method applied in the last part of the Proposition 4 shows that

$$\hat{\mathcal{Q}}(\mathcal{K}^{c}) \textit{ is isomorphic to } \mathcal{K}(\tilde{H}^{\cdot}, \mathcal{Q}^{\iota}, V\tilde{H}^{\cdot}).$$

1 The categories $\hat{H}^{\cdot}$ and $\tilde{H}^{\cdot}$ both may be interpreted as solutions of «universal problems» of adding finite fiber products to $H^{\cdot}$ (see «Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints», to appear in «*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*», Paris, 1966).

INDEX OF NOTATIONS.

$\mathfrak{N}(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$ 23; $\mathfrak{N}^{\shortparallel}(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$ 23; $\mathfrak{N}^{\prime}(H^{\cdot}, \Pi^{\iota} H^{\cdot})$ 30
$\mathfrak{F}^{\#}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ 27; $\mathfrak{F}^{\bullet}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ 35
$\mathfrak{F}^{\prime}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ and $\mathfrak{F}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ 43; $\mathfrak{F}_{g}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ 50
$\mathfrak{H}(p)$ and $\hat{\mathfrak{H}}(p)$ 66; $\mathfrak{H}^{\prime}(p)$ and $\hat{\mathfrak{H}}^{\prime}(p)$ 69
$\mathfrak{A}(K^{\cdot})$ and $\mathfrak{A}$ 72; $\mathfrak{H}(H^{\cdot})$ 72; $\mathfrak{K}^{c}$ 77; $\hat{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}^{c})$ 78

Functors:
$\pi_{\mathfrak{G}}^{H^{\cdot}} : \mathfrak{G}(H^{\cdot}, H^{\iota}) \to H^{\cdot}$ 18; $\pi_{\mathfrak{N}}^{H^{\cdot}} : \mathfrak{N}(H^{\cdot}) \to H^{\cdot}$ 20
$\pi_{\mathfrak{N}^{\shortparallel}}^{H^{\cdot}} : \mathfrak{N}^{\shortparallel}(H^{\cdot}, H^{\iota}) \to H^{\cdot}$ 24
$\hat{r} : \mathfrak{H}(\mu_{H^{\cdot}}^{\iota V}, \mu_{g}, \mu_{\mathfrak{N}_{g}^{\shortparallel}}) \to \mathfrak{F}_{g}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ 53
$\delta : \mathfrak{N}^{\shortparallel}(H^{\cdot}, H^{\iota}) \to \mathfrak{N}^{\bullet}(H^{\cdot}, H^{\iota})$ 56
$\delta_{\overline{\nu}} : \mathfrak{F}^{\#}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot}) \to \mathfrak{F}^{\#}(H^{\cdot}, H^{\iota}, VH^{\cdot})$ 57
$\overline{\mathfrak{K}} : \mathcal{S}^{\ell} \to \hat{\mathfrak{F}}$ 59
$\hat{p}_{\mathfrak{H}} : \mathfrak{H}(p) \to \mathfrak{H}$ and $\pi_{\mathfrak{H}}^{p} : \mathfrak{H}(p) \to H^{\cdot}$ 66
$\mathfrak{Z}_{\mathfrak{H}} : \mathfrak{H}(p) \to \mathfrak{H}^{\prime}(p)$ and $\mathfrak{Z}_{\hat{\mathfrak{H}}} : \mathfrak{H}(p) \to \hat{\mathfrak{H}}^{\prime}(p)$ 68; $\eta : H^{\cdot} \to \mathfrak{A}$ 73
$\pi_{\mathfrak{H}} : \bar{\hat{\mathfrak{H}}}^{\mathfrak{v}} \to \mathfrak{M}$ and $\bar{\pi}_{\mathfrak{H}} : \mathfrak{A}(\bar{\hat{\mathfrak{H}}}^{\mathfrak{v}}) \to \mathfrak{A}$ 73
$a_{\mathfrak{H}} : \mathfrak{H}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}(\bar{\hat{\mathfrak{H}}}^{\mathfrak{v}})$ and $\eta_{\mathfrak{H}} : \mathfrak{H}(H^{\cdot}) \to \mathfrak{A}(\bar{\hat{\mathfrak{H}}}^{\mathfrak{v}})$ 74
$b_{\mathfrak{K}} : \mathfrak{A}(\mathfrak{K}^{c}) \to \mathfrak{K}(\mathfrak{A}, R_{g}(\mathfrak{A}), V\mathfrak{A})$ 78; $b_{\mathfrak{K}}^{\prime} : \hat{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}^{c}) \to \mathfrak{K}(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}^{\iota}, V\mathfrak{A})$ 79
$b_{\mathfrak{K}}^{\prime\prime} : \hat{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}^{c}) \to \mathfrak{K}(\hat{H}^{\cdot}, \mathfrak{A}^{\iota}, V\hat{H}^{\cdot})$ 79.

SUBJECT INDEX.

BIBLIOGRAPHY.

CS. EHRESMANN, C., *Catégories et Structures*, Dunod, Paris 1965.

1. » Structures quasi-quotient, *Math. Ann.* (to appear; mimeographed Paris 65).
2. » Sous-structures et catégories ordonnées, *Fund. Math.* 54, 1964, 211-228.
3. » Expansion des systèmes de structures dominées, *CRAS Paris* 262, 1966, 8.
4. GROTHENDIECK, A., Techniques de descente et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique, *Sém. Bourbaki*: 195, 1959-60; 212, 1960-61.
5. EHRESMANN, C., Structures quotient, *Comm. Math. Helv.* 38, 1963, 219-283.
6. » Catégories structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 80, 1963, 349-426.
7. DIEUDONNE-GROTHENDIECK, Eléments de Géométrie algébrique, II, 1ère partie, *Publ. IHES* 11, Paris, 1961.
8. EHRESMANN, C., Catégories topologiques et catégories différentiables, *Coll. Géom. diff. globale, Bruxelles*, 1958, 137-150.
9. BENABOU, J., Structures algébriques dans les catégories, Thèse Paris, 1966 (to appear in *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*).
10. COHN, P.M., *Universal Algebra*, Harper and Row, New York, 1965.
11. ECKMANN-HILTON, Group-like structures in general categories, *Math. Ann.*: I, 145, 1962, 227-255; II, 151, 150-186; III, 151, 1963, 165-187.
12. KAN, D.M., On monoids and their duals, *Bol. Soc. Mat. Mex.* 3, 1958, 52-61.

Lawrence, Kansas (July, 1966)

CAHIERS DE TOPOLOGIE Vol. X, 1
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

/104/

CATÉGORIES STRUCTURÉES GÉNÉRALISÉES

par Charles EHRESMANN

Plusieurs articles sont consacrés en partie ou en totalité à la
théorie des catégories structurées ([1], [2], [3], [4]). Ces textes
sont assez denses, les hypothèses y étant réduites au minimum; il semble
donc utile d'en extraire les principaux résultats, avec des hypothèses
moins générales mais vérifiées dans beaucoup de cas. Tel est le but du
§ 1. Les exemples les plus courants sont rappelés dans le § 2. L'esquisse
d'une catégorie (un peu plus simple que celle utilisée dans [4]) et les
catégories structurées généralisées sont définies dans le § 3, où sont 1
aussi comparées diverses notions de catégories structurées.

Les résultats nouveaux (énoncés sans démonstration dans [7]) se
trouvent dans le § 4 : Soit p un foncteur de H vers la catégorie d'appli-
cations $\mathcal{M}$. On associe à une catégorie p-structurée $(C^{\bullet}, s)$ une espèce
de morphismes dont les fibres sont formées des éléments de H de même 2
source et de but s. Ces fibres deviennent des catégories q-structurées
lorsque (H, D) est une catégorie q-dominée, le foncteur D étant supposé
«partiellement» compatible avec les produits fibrés. Si en outre q est à
atomes, la catégorie produit croisé associée [5] est fortement q-dominée. 3
Ces théorèmes permettent par exemple de retrouver la catégorie quasi-
topologique des sections locales associée à une catégorie topologique [6].

La terminologie et les notations sont celles de [5].

1 **1. Catégorie des foncteurs p - structurés.**

A. DEFINITIONS.

Nous supposons donné un foncteur $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, H^\cdot)$ d'homomorphismes saturé au-dessus de la catégorie pleine d'applications $\mathcal{M}$. Le symbole $s' \vdash s$ signifie que s' est une p-sous-structure de $s \in H_o^\cdot$.

2 p est à noyaux (de couples) si, et seulement si, p est résolvant à droite. Si p est à $\emptyset$-produit et à produits fibrés finis, il est aussi à produits finis; en effet, soit a un élément final de $H^\cdot$ tel que $p(a)$ soit un ensemble ayant un seul élément; si $s_1 \in H_o^\cdot$ et $s_2 \in H_o^\cdot$, il existe un et un seul $f_i \in a \,.\, H \,.\, s_i$ pour $i = 1$ et 2, et (s_1, s_2) admet pour produit dans p le produit fibré de (f_1, f_2). Dans ce cas, p est à $I^\cdot$-limites projectives, pour toute catégorie finie $I^\cdot$; si F est un foncteur de $I^\cdot$ vers $H^\cdot$, il existe une limite projective s de F telle que $p(s)$ soit la limite projective canonique de $p \,.\, F$, c'est-à-dire la classe des familles $(x_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} p \,.\, F(i)$, où $J = I_o^\cdot$, ayant la propriété : Pour tout $k \in I$, on a $x_{\beta(k)} = (p \,.\, F(k))(x_{\alpha(k)})$. Il s'ensuit que les conditions suivantes sont vérifiées :

1° Si $s_i \vdash s$ pour tout $i \in I$ = ensemble fini, il existe $s' \vdash s$ telle que

$$p(s') = \bigcap_{i \in I} p(s_i).$$

2° Si $h \in H$ et si $s' \vdash \beta(h)$, il existe un $(\mathcal{M}^\iota, p)$-sous-morphisme h' de h de but s'.

DEFINITION. On appelle *catégorie p-structurée* un couple $(C^\cdot, s)$ satisfaisant les axiomes :

1° $C^\cdot$ est une catégorie, $s \in H_o^\cdot$ et $C = p(s)$.

2° Il existe $s_o \vdash s$, $a \in s_o \,.\, H \,.\, s$ et $b \in s_o \,.\, H \,.\, s$ tels que

$$p(s) = (C_o^\cdot, \alpha, C) \quad \text{et} \quad p(b) = (C_o^\cdot, \beta, C).$$

3° Il existe un produit fibré $s * s$ de (a, b) et un $k \in s \,.\, H \,.\, s * s$ tels que

$$p(k) = (C, \kappa, C^\cdot * C^\cdot),$$

κ étant la loi de composition de $C^\cdot$.

REMARQUES. 1) Si p est à produits fibrés, il existe un produit fibré $s * s$ de (a, b) dans p tel que $p(s * s) = C^\cdot * C^\cdot$ et la condition 3 devient :

3'° Il existe $k \in s \,.\, H \,.\, s * s$ tel que $p(k) = (C, \kappa, C^\cdot * C^\cdot)$.

2) Si p est résolvant à droite, la condition 2 peut être remplacée par :

2'° Il existe $\overline{a} \in s \,.\, H \,.\, s$ et $\overline{b} \in s \,.\, H \,.\, s$ tels que $p(\overline{a}) = (C, \alpha, C)$, $p(\overline{b}) = (C, \beta, C)$. En effet, s_o est alors le $(\mathfrak{M}^\iota, p)$-noyau du couple $(s, \overline{a})$ (ou $(s, \overline{b})$).

3) La condition 2 est équivalente à la suivante :

2"° Il existe $s_o \in H_o^\cdot$, $i \in s \,.\, H \,.\, s_o$, $a \in s_o \,.\, H \,.\, s$ et $b \in s_o \,.\, H \,.\, s$ tels que

$$p(i) = (C, \iota, C_o^\cdot), \qquad p(a) = (C_o^\cdot, \alpha, C), \qquad p(b) = (C_o^\cdot, \beta, C).$$

Soit $\mathfrak{F}(p)$ *la catégorie des foncteurs p-structurés* dont les éléments sont les triplets

$$\overline{F} = ((\overline{C}^\cdot, \overline{s}), \underline{f}, (C^\cdot, s))$$

vérifiant les conditions

1° $(C^\cdot, s)$ et $(\overline{C}^\cdot, \overline{s})$ sont des catégories p-structurées;

2° $F = (\overline{C}^\cdot, \underline{f}, C^\cdot)$ est un foncteur;

3° Il existe $f \in \overline{s} \,.\, H \,.\, s$ tel que $p(f) = (\overline{C}, \underline{f}, C)$.

Les surjections : $\overline{F} \to F$, $\overline{F} \to f$ et $\overline{F} \to p(f)$ définissent des foncteurs

$\dot{\wp}_{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}(p)$ vers la catégorie $\mathfrak{F}$ des foncteurs,

$\wp_{\mathfrak{F}}^{H}$ de $\mathfrak{F}(p)$ vers $H^\cdot$,

$\wp$ de $\mathfrak{F}(p)$ vers $\mathfrak{M}$.

On a évidemment $\wp = p_{\mathfrak{F}} \,.\, \dot{\wp}_{\mathfrak{F}} = p \,.\, \wp_{\mathfrak{F}}^{H}$.

Si $(C^\cdot, s)$ est une catégorie p-structurée, une $\wp$-sous-structure (resp. $\wp$-structure quasi-quotient) de $(C^\cdot, s)$ est appelée une *sous-catégorie p-structurée* (resp. une *catégorie p-structurée quasi-quotient*) 1
de $(C^\cdot, s)$.

B. QUELQUES THEOREMES GENERAUX.

Supposons que $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^\cdot)$ soit un foncteur d'homomorphismes saturé à produits finis et résolvant à droite (et par suite à $I^\cdot$-limites projectives pour toute catégorie finie $I^\cdot$, en particulier à produits fibrés finis).

THEOREME 1. *$\hat{p}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé à produits finis et résolvant à droite.*

En effet, on montre que $(C_i^\cdot, s_i)_{i \in I}$ admet pour produit dans $\hat{p}$ la catégorie p-structurée $(\prod_{i \in I} C_i^\cdot, \prod_{i \in I} s_i)$. De plus $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ admet pour $(\mathfrak{M}^l, \hat{p})$-noyau la catégorie p-structurée $(K^\cdot, s')$, où $K^\cdot$ est le noyau de $(\hat{p}\mathfrak{F}'(\overline{F}_1), \hat{p}\mathfrak{F}'(\overline{F}_2))$ et s' le noyau de $(\hat{p}\mathfrak{F}^H(\overline{F}_1), \hat{p}\mathfrak{F}^H(\overline{F}_2))$.

THEOREME 2. *Soit $(C^\cdot, s)$ une catégorie p-structurée; si $\hat{C}^\cdot$ est une sous-catégorie de $C^\cdot$ et si $\hat{s} \vdash s$ et $p(\hat{s}) = \hat{C}$, alors $(\hat{C}^\cdot, \hat{s})$ est une sous-catégorie p-structurée de $(C^\cdot, s)$.*

Supposons que p soit la restriction d'un foncteur $P = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{P}, \hat{H}^\cdot)$ d'homomorphismes saturé, où $\hat{\mathfrak{M}}$ est la catégorie pleine des applications associée à un univers $\mathfrak{M}_o$ tel que $\mathfrak{M}_o \in \hat{\mathfrak{M}}_o$ et $\mathfrak{M}_o \subset \hat{\mathfrak{M}}_o$. Si $H = \underline{P}^{-1}(\mathfrak{M})$, P est dit *dénombrablement engendrant pour* $\mathfrak{M}$ si les conditions suivantes sont vérifiées, où $S \in \hat{H}_o^\cdot$:

1° Si $M \subset P(S)$ et si $M \in \tilde{\mathfrak{M}}$ = saturante de $\mathfrak{M}$ dans $\hat{\mathfrak{M}}$, il existe une P-sous-structure s de S telle que $M \subset P(s)$, $P(s) \in \tilde{\mathfrak{M}}$ et que, pour toute P-sous-structure s' de S vérifiant $M \subset P(s')$, on ait $P(s) \subset P(s')$.

2° Si s_i est une P-sous-structure de S pour tout entier i et si $P(s_i) \subset P(s_{i+1})$, il existe une P-sous-structure $\hat{s}$ de S telle que $P(\hat{s}) = \bigcup_{i \in N} P(s_i)$.

La condition 1 signifie que P est $\vdash$-engendrant pour $\mathfrak{M}$.

THEOREME 3. *Supposons P dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$ et à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produits fibrés. Le foncteur $\hat{P}$ de $\mathfrak{F}(P)$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$. Si de plus $H \in \hat{\mathfrak{M}}_o$, pour tout $(C^\cdot, s) \in \mathfrak{F}(p)_o$ et toute relation d'équivalence r sur C, il existe une catégorie p-structurée $(\hat{C}^\cdot, \hat{s})$ quasi-quotient de $(C^\cdot, s)$ par r.*

La dernière affirmation veut dire qu'il existe un foncteur p-structuré

$$\overline{G} = ((\hat{C}^{\cdot}, \hat{s}), \underline{g}, (C^{\cdot}, s))$$

tel que g soit compatible avec r et que, si $\overline{F} \in \mathfrak{F}(p).(C^{\cdot}, s)$ et si $\hat{p}(\overline{F})$ est compatible avec r, il existe un et un seul $\overline{F}' \in \mathfrak{F}(p)$ tel que $\overline{F}'.\overline{G} = \overline{F}$.

Tous ces théorèmes sont précisés et démontrés dans « Structures quasi-quotient» [3].

C. CATEGORIES STRUCTUREES PARTICULIERES.

DEFINITION. On appelle *groupoïde p-structuré* une catégorie p-structurée $(C^{\cdot}, s)$ vérifiant de plus l'axiome :

4° $C^{\cdot}$ est un groupoïde et il existe un $I \in s.H.s$ tel que $p(I)$ soit la bijection $x \to x^{-1}$ de C sur C.

Soit $\mathfrak{F}_g(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{F}(p)$ ayant pour unités les groupoïdes p-structurés et soit $\hat{p}_g$ la restriction de $\hat{p}$ à $\mathfrak{F}_g(p)$.

THEOREME 4. *Supposons p à produits fibrés finis. $\mathfrak{F}_g(p)$ est une sous-catégorie saturée, stable par produits et noyaux de $\mathfrak{F}(p)$.*

THEOREME 5. *Supposons que p soit la restriction d'un foncteur P dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$ et à $\hat{\mathfrak{M}}_o$-produits fibrés, comme dans le § B; alors $\hat{P}_g$ est dénombrablement engendrant pour $\mathfrak{M}$ et, si $H \in \hat{\mathfrak{M}}_o$, le foncteur $\hat{p}_g$ est à structures quasi-quotient et la catégorie $\mathfrak{F}(p)$ à $\mathfrak{F}_g(p)$-projections.*

Soient H' et H'' deux sous-classes de H.

DEFINITION. On appelle catégorie *$p((H', H'), H'')$-structurée (resp. $p(H', H'')$-structurée)* une catégorie p-structurée $(C^{\cdot}, s)$ telle que l'on ait, avec les notations de la définition § A,

$$a \in H', \quad b \in H' \quad \text{et} \quad k \in H''$$

$$(\text{resp.} [a, b] \in H' \quad \text{et} \quad k \in H'').$$

Si $H'^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $H^{\cdot}$ stable par produits et par p-sous-structures, les résultats précédents sont aussi vrais pour les caté- -

gories $p(H', H'')$- structurées ou $p((H', H'), H'')$- structurées.

2. Exemples de catégories p - structurées.

Parmi les exemples les plus importants figurent les catégories
1 structurées par des ordres.

A. CATEGORIES ORDONNEES.

Soit Ω la catégorie des applications ordonnées et ω son foncteur projection vers $\mathfrak{M}$. Le foncteur ω est un foncteur d'homomorphismes saturé à $\mathfrak{M}_o$- produits fibrés et $\vdash$- étalant (i. e. si $(M, <) \in \Omega_o$ et si $M' \subset M$, alors M' définit la sous- structure $(M', <)$ de $(M, <)$).

Soit Ω' la sous- catégorie de Ω formée des applications ordonnées strictes, i. e. des $f = ((\hat{M}, <), \underline{f}, (M, <)) \in \Omega$ tels que

$$x' = x \text{ lorsque } x' < x \text{ et } f(x') = f(x).$$

DEFINITION. On appelle *catégorie ordonnée* une catégorie $\omega(\Omega', \Omega)$- structurée.

EXEMPLE. La catégorie $\mathfrak{M}$, munie de l'ordre

$$(M'_1, f_1, M_1) < (M', f, M) \text{ si, et seulement si, } M_1 \subset M,\ M'_1 \subset M' \text{ et } f_1 = f/M_1,$$

est une catégorie ordonnée.

Pour que $(C^\cdot, <)$ soit une catégorie ordonnée, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions suivantes :

1° Si $x' < x$, on a $\alpha(x') < \alpha(x)$ et $\beta(x') < \beta(x)$.

2° $x' < x$, $y' < y$, $(y', x') \in C^\cdot * C^\cdot$ et $(y, x) \in C^\cdot * C^\cdot$ entraînent $y'.x' < y.x$.

3° $x' < x$, $\alpha(x') = \alpha(x)$ et $\beta(x') = \beta(x)$ entraînent $x' = x$.

Les résultats du § 1 - B s'appliquent aux catégories ordonnées.

Soit Ω'' la sous- catégorie de Ω formée des étalements, i. e. des $f \in \Omega$ tels que, pour tout $x \in M$ et tout $y' < f(x)$, il existe $x' < x$ vérifiant $y' = f(x')$. Une catégorie $\omega(\Omega', \Omega'')$- structurée est une catégorie ordonnée $(C^\cdot, <)$ telle que

$$z < y.x \text{ entraîne qu'il existe } y' < y,\ x' < x \text{ et } z = y'.x'.$$

Soit $(C^{\bullet}, <)$ une catégorie ordonnée. Si $(x, y) \in C \times C$, notons $\langle x, y \rangle$ la classe des couples $(x', y') \in C^{\bullet} * C^{\bullet}$ tels que $x' < x$ et $y' < y$.

DEFINITION. Si $\langle x, y \rangle$ a un plus grand élément $(\bar{x}, \bar{y})$ dans $(C \times C, <)$, alors $\bar{x} . \bar{y}$ est appelé *pseudoproduit de* (x, y) et noté xy.

Soit Ω_2 la sous-catégorie de Ω'' formée des $f \in \Omega$ tels que, si $y' < f(x)$, la classe des $x' \in M$ vérifiant $x' < x$ et $f(x') < y'$ admet un plus grand élément $\overline{x'}$ et l'on a $f(\overline{x'}) = y'$. Soit $\Omega_2' = \Omega_2 \cap \Omega'$.

DEFINITION. Une catégorie $\omega((\Omega_2', \Omega_2'), \Omega'')$-structurée est appelée *catégorie ordonnée régulière.*

Ceci signifie que $(C^{\bullet}, <)$ est une catégorie $\omega(\Omega', \Omega'')$-structurée vérifiant de plus l'axiome :

Si $x \in C$, $e < \alpha(x)$ et $e \in C_o^{\bullet}$, il existe un pseudoproduit $xe \in C . e$; si $e' \in C_o^{\bullet}$ et $e' < \beta(x)$, il existe $e'x \in e' . C$.

B. CATEGORIES INDUCTIVES.

Rappelons qu'une classe inductive est une classe ordonnée $(M, <)$ telle que toute partie $A \neq \emptyset$ admette une intersection (borne inférieure) $\cap A$; ou d'une manière équivalente, toute partie majorée A admet une borne supérieure, appelée agrégat, $\cup A$.

Une application inductive est une application ordonnée

$$f = ((M', <), \underline{f}, (M, <)) \in \Omega,$$

où $(M, <)$ et $(M', <)$ sont des classes inductives, vérifiant:

1° Si A est une partie majorée dans $(M, <)$ on a $f(\cup A) = \cup f(A)$;

2° Si $y < x$ et $y' < x$, on a $f(y \cap y') = f(y) \cap f(y')$.

Soit $\mathcal{J}$ la sous-catégorie de Ω formée des applications inductives et soit $\omega_{\mathcal{J}}$ la restriction de ω à $\mathcal{J}$. Alors $\omega_{\mathcal{J}}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé à $\mathfrak{M}_o$-produits et résolvant à droite.

DEFINITION. On appelle *catégorie inductive* une catégorie $\omega_{\mathcal{J}}(\mathcal{J} \cap \Omega', \mathcal{J})$-structurée.

Pour que $(C^{\bullet}, <)$ soit une catégorie inductive, il faut et il suffit que soient vérifiées les propriétés :

1° $(C^{\cdot}, <)$ est une catégorie ordonnée et $(C, <)$ une classe inductive;

2° Si $A < x$, on a $\alpha(\bigcup A) = \bigcup \alpha(A)$ et $\beta(\bigcup A) = \bigcup \beta(A)$;

3° Si $y < x$ et $y' < x$, on a $\alpha(y' \cap y) = \alpha(y') \cap \alpha(y)$ et $\beta(y' \cap y) = \beta(y') \cap \beta(y)$;

4° Si $y_i < y$, $x_i < x$ et $(y_i, x_i) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ pour tout $i \in I$ (resp. pour $i = 1, 2$), on a

$$\bigcup_{i \in I} y_i . x_i = (\bigcup_{i \in I} y_i) . (\bigcup_{i \in I} x_i)$$

(resp. $(y_1 \cap y_2) . (x_1 \cap x_2) = (y_1 . x_1) \cap (y_2 . x_2)$).

PROPOSITION 1. *La condition 4 est conséquence des conditions 1, 2, 3. $(C^{\cdot}, <)$ est une catégorie inductive si, et seulement si, c'est une catégorie $\omega(\mathcal{J} \cap \Omega', \mathcal{J})$-structurée (resp. $\omega(\mathcal{J} \cap \Omega', \Omega)$-structurée). Dans ce cas, deux éléments quelconques ont un pseudoproduit et le pseudoproduit est associatif si, et seulement si, $(C^{\cdot}, <)$ est aussi $\omega(\Omega', \Omega'')$-structurée.*

Les catégories structurées par des ordres sont étudiées en particulier dans « Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie » [8], où l'on trouvera d'autres références.

1 *C. CATEGORIES TOPOLOGIQUES.*

Soit $\mathcal{T}$ la catégorie des applications continues entre espaces topologiques et soit θ son foncteur projection vers $\mathfrak{M}$; θ est un foncteur d'homomorphismes saturé à $\mathfrak{M}_0$-produits, résolvant à droite et $\ulcorner$-étalant, la θ-sous-structure de T sur $M \subset \theta(T)$ étant la topologie T/M induite par T sur M.

DEFINITION. Une catégorie θ-structurée est appelée *catégorie topologique.*

$(C^{\cdot}, T)$ est une catégorie topologique si, et seulement si,

1° $C^{\cdot}$ est une catégorie, T une topologie sur C;

2° (T, α, T), (T, β, T) et $(T, \kappa, T * T)$ sont des applications continues, où $T * T = T \times T / C^{\cdot} * C^{\cdot}$.

PROPOSITION 2. *Soit* $(C^{\cdot}, T)$ *une catégorie topologique. Si* T *est séparée,* $C_0^{\cdot}$ *est fermé. Si* $(C^{\cdot}, T)$ *est un groupoïde topologique (i. e.* θ*-structuré),* T *est séparée si, et seulement si,* T_0 *est séparée et* $C_0^{\cdot}$ *fermé.*

Soit $\hat{\theta}$ le foncteur projection vers $\mathfrak{M}$ de la catégorie $\mathcal{F}(\theta)$ des foncteurs continus (i. e. θ-structurés). Ce foncteur a les propriétés indiquées dans le § 1-B. En particulier, si $(C^{\cdot}, T)$ est une catégorie topologique et $\hat{C}^{\cdot}$ une sous-catégorie de $C^{\cdot}$, alors $(\hat{C}^{\cdot}, T/\hat{C})$ est une catégorie topologique.

Soit $(C^{\cdot}, T)$ une catégorie topologique. Soit r une relation d'équivalence sur C.

THEOREME 6. *Il existe une catégorie topologique* $(\overline{C}^{\cdot}, \overline{T})$ *quasi-quotient de* $(C^{\cdot}, T)$ *par* r *et* $\overline{C}^{\cdot}$ *est une catégorie quasi-quotient de* $C^{\cdot}$ *par* r. 1

PREUVE. On construit $(\overline{C}^{\cdot}, \overline{T})$ comme suit : Soit $\mathcal{F}(\Theta)$ la catégorie des foncteurs continus relatifs à l'univers $\hat{\mathfrak{M}}_0$ considéré au § 1 -B. Soit I la classe des $F \in \mathcal{F}(\theta).(C^{\cdot}, T)$ tels que $\hat{\hat{\theta}}(F)$ soit compatible avec r. Dans $\mathcal{F}(\Theta)$, il existe

$$(\hat{G}^{\cdot}, \hat{T}) = \prod_{F \in I} \beta(F) \quad \text{et} \quad \hat{F} = [F]_{F \in I}.$$

La classe $\hat{\theta}(\hat{F})(C)$ engendre une sous-catégorie $G^{\cdot}$ de $\hat{G}^{\cdot}$ et $(G^{\cdot}, \hat{T}/G)$ est une sous-catégorie topologique de $(\hat{G}^{\cdot}, \hat{T})$. On a $G \in \tilde{\mathfrak{M}}$, de sorte qu'il existe un isomorphisme $V \in \mathcal{F}(\Theta)_{\gamma}$ de $(G^{\cdot}, \hat{T}/G)$ sur $(\overline{C}^{\cdot}, \overline{T}) \in \mathcal{F}(\theta)_0$. Alors $V.\hat{F}$ est la $\hat{\theta}$-quasi-surjection définissant $(\overline{C}^{\cdot}, \overline{T})$ comme catégorie topologique quasi-quotient de $(C^{\cdot}, T)$ par r. - Montrons que $\overline{C}^{\cdot}$ est une catégorie quasi-quotient de $C^{\cdot}$ par r. En effet, soit $f = (K^{\cdot}, \underline{f}, C^{\cdot})$ un foncteur compatible avec r; on a

$$F = ((K^{\cdot}, K_g), \underline{f}, (C^{\cdot}, T)) \in I,$$

en notant K_g la topologie grossière sur K; par suite, il existe $F' \in \mathcal{F}(\theta)$ tel que $F'.(V.\hat{F}) = F$. Il s'ensuit $f = \hat{\theta}'_{\mathcal{F}}(F').j$, où $j = \hat{\theta}'_{\mathcal{F}}(V.\hat{F})$. Ceci montre que j est une $p_{\mathcal{F}}$-quasi-surjection. ■

COROLLAIRE. *$(C^\bullet, T)$ admet une catégorie topologique quasi-quotient par r de la forme $(N(C^\bullet/\hat{r}), \overline{T})$, où $\hat{r}$ est la relation d'équivalence bicompatible sur $C^\bullet$ engendrée par r et où $N(C^\bullet/\hat{r})$ est la catégorie $(\mathfrak{F}, \mathfrak{N}')$-projection du graphe multiplicatif quotient $C^\bullet/\hat{r}$.*

En effet, $N(C^\bullet/\hat{r})$ est une catégorie quasi-quotient de $C^\bullet$ par r.

COROLLAIRE. *S'il existe une catégorie quotient $\overline{C}^\bullet$ de $C^\bullet$ par r, il existe une catégorie topologique quotient $(\overline{C}^\bullet, \overline{T})$ de $(C^\bullet, T)$ par r, où $\overline{T}$ est une topologie sur $\overline{C}$ moins fine que T/r.*

Les catégories topologiques et leur cas particulier, les catégories microtransitives, sont étudiées dans l'article «Catégories topologiques» I, II, III [6].

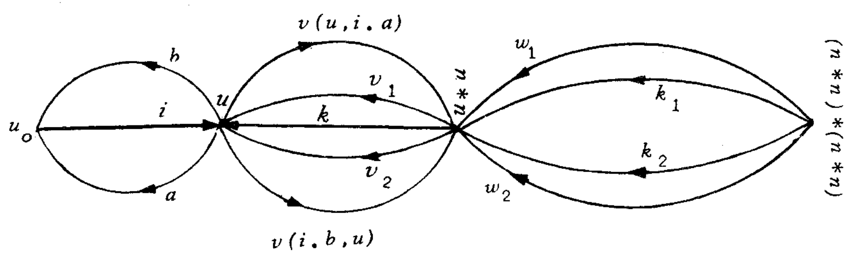
3. Catégories structurées généralisées.

A. ESQUISSE D'UNE CATEGORIE.

Soit $[U_1]$ le graphe ayant 4 sommets u, u_o, $u*u$, $(u*u)*(u*u)$ et dont les seules flèches sont

$$\begin{cases} a \text{ et } b \text{ de } u \text{ vers } u_o \\ i \text{ de } u_o \text{ vers } u \\ v_1, v_2 \text{ et } k \text{ de } u*u \text{ vers } u \\ v(u, i.a) \text{ et } v(i.b, u) \text{ de } u \text{ vers } u*u \\ w_1, w_2, k_1 \text{ et } k_2 \text{ de } (u*u)*(u*u) \text{ vers } u*u. \end{cases}$$

1 Nous désignerons par $U\dot{\mathfrak{F}}$ le graphe multiplicatif défini comme suit : $[U_1]$ est un sous-graphe du graphe $[U\dot{\mathfrak{F}}]$ sous-jacent à $U\dot{\mathfrak{F}}$, contenant toutes les unités de $U\dot{\mathfrak{F}}$;



les éléments de $U\mathfrak{F}$ sont ceux de U_1 et 11 autres morphismes g_i, où $1 \leq i \leq 11$;

la loi de composition est telle que les seuls composés soient les composés d'un élément avec ses unités à droite et à gauche, et les composés explicitement indiqués dans les formules ci-dessous; de plus deux composés sont égaux si, et seulement si, l'égalité figure dans les relations suivantes:

(1) $u_o = a.i = b.i$;

(2) $g_1 = a.v_1 = b.v_2$; $g_2 = a.v_2 = a.k$; $g_3 = b.v_1 = b.k$.

(3) $u = v_1.v(u,i.a) = v_2.v(i.b,u)$; $g_4 = i.a = v_2.v(u,i.a)$;
$g_5 = v_1.v(i.b,u) = i.b$;

(4) $k.v(u,i.a) = u = k.v(i.b,u)$;

(5) $g_6 = v_2.w_1 = v_1.w_2$; $g_7 = k.w_1 = v_1.k_1$; $g_8 = v_2.w_2 = v_2.k_1$;
$g_9 = k.w_2 = v_2.k_2$; $g_{10} = v_1.w_1 = v_1.k_2$;

(6) $g_{11} = k.k_1 = k.k_2$.

(Ainsi $U_{\dot{\mathcal{F}}}$ est engendré par $[U_1]$ et une relation, i.e. c'est un quotient d'un sous-graphe multiplicatif de la catégorie libre des chemins associée à $[U_1]$).

Soit $\eta = (H^{\bullet}, \mu, H^{\iota})$ un triplet formé d'une catégorie $H^{\bullet}$, d'une classe H^{ι} de monomorphismes de $H^{\bullet}$ et d'une application produit fibré naturalisé fini μ sur $H^{\bullet}$ (déf. 10-IV [1]). Désignons par $\mathfrak{F}(\eta)_o$ la 1
classe des néofoncteurs F de $U_{\dot{\mathcal{F}}}$ vers $H^{\bullet}$ vérifiant les conditions suivantes :

1° $F(i) \in H^{\iota}$;

2° $((F(a), F(v_1)), (F(b), F(v_2))) = \mu\,(F(a), F(b))$;

3° $((F(v_2), F(w_1)), (F(v_1), F(w_2))) = \mu\,(F(v_2), F(v_1))$.

PROPOSITION 3. *Si F et F' sont deux éléments de $\mathfrak{F}(\eta)_o$ tels que*

$$F(i) = F'(i), \quad F(a) = F'(a), \quad F(b) = F'(b) \text{ et } F(k) = F'(k),$$

alors $F = F'$. 2

PREUVE. F et F' étant des néofoncteurs, on a

$$F(u) = F'(u), \quad F(u_o) = F'(u_o) \quad \text{et} \quad F(u * u) = F'(u * u).$$

De plus la condition 2 entraîne que $F(v_i) = F'(v_i)$ pour $i = 1$ et 2, de sorte que la relation 3 a pour conséquence $F(w_i) = F'(w_i)$ pour $i = 1$ et 2. Désignons par $\hat{d}$ l'élément $F(d)$, où $d \in U_{\mathcal{F}}$. Comme $H^{\bullet}$ est une catégorie, on trouve

$$\hat{a}\,.\,\hat{u} = \hat{u}_o\,.\,\hat{a} = \hat{b}\,.\,\hat{\imath}\,.\,\hat{a}$$

et, en vertu des formules (3), $F(v(u, i.a))$ est l'unique élément associé au couple $(\hat{u}, \hat{\imath}\,.\,\hat{a})$ par le produit fibré naturalisé $\mu(\hat{a}, \hat{b})$; par suite

$$F(v(u, i.a)) = F'(v(u, i.a))$$

et, de même,

$$F(v(i.b, u)) = F'(v(i.b, u))\,.$$

On obtient également

$$\hat{a}\,.\,\hat{g}_7 = \hat{a}\,.\,\hat{k}\,.\,\hat{w}_1 = \hat{a}\,.\,\hat{v}_2\,.\,\hat{w}_1 = \hat{a}\,.\,\hat{v}_1\,.\,\hat{w}_2 = \hat{b}\,.\,\hat{v}_2\,.\,\hat{w}_2\,;$$

d'après (5), $F(k_1)$ est l'unique élément associé par le produit fibré $\mu(\hat{a}, \hat{b})$ au couple $(\hat{k}\,.\,\hat{w}_1, \hat{v}_2\,.\,\hat{w}_2)$. Donc $F(k_1) = F'(k_1)$. D'une manière analogue $F(k_2) = F'(k_2)$ est l'unique élément associé par $\mu(\hat{a}, \hat{b})$ au couple $(\hat{v}_1\,.\,\hat{w}_1, \hat{k}\,.\,\hat{w}_2)$. Ainsi F et F' sont deux néofoncteurs ayant même restriction au sous-graphe $[U_1]$ qui engendre $U^{\bullet}_{\mathfrak{F}}$; il s'ensuit $F = F'$. ■

Soit $\mathfrak{F}(\eta)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathfrak{N}(H^{\bullet}, U^{\bullet}_{\mathfrak{F}})^{\square}$ des transformations naturelles entre néofoncteurs de $U^{\bullet}_{\mathfrak{F}}$ vers $H^{\bullet}$ ayant pour classe d'objets $\mathfrak{F}(\eta)_o$. Soit $\mathfrak{M}^{\iota}$ la classe des injections canoniques $(M, \iota, M') \in \mathfrak{M}$ et soit $\mu_{\mathfrak{M}}$ l'application produit fibré naturalisé fini canonique de $\mathfrak{M}$.

PROPOSITION 4. *Soit* $\eta_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^{\iota}, \mu_{\mathfrak{M}})$; *la catégorie* $\mathfrak{F}(\eta_{\mathfrak{M}})$ *est iso-*
1 *morphe à la catégorie* $\mathfrak{F}$ *des foncteurs associée à* $\mathfrak{M}$.

PREUVE. Soit $F \in \mathfrak{F}(\eta_{\mathfrak{M}})_o$, $C = F(u)$, $C^{\bullet}_o = F(u_o)$ et $(C, \kappa, C^{\bullet} * C^{\bullet}) = F(k)$. Comme $F(i) \in \mathfrak{M}^{\iota}$, on a $C^{\bullet}_o \subset C$ et les relations (1) impliquent que $F(a)$ et $F(b)$ sont des rétractions α et β de C sur $C^{\bullet}_o$. Des égalités (2), il résulte que $C^{\bullet} = (C, \kappa)$ est un quasi-graphe multiplicatif; puisque $C^{\bullet} * C^{\bullet}$ est le produit fibré $\alpha \vee \beta$, ce quasi-graphe multiplicatif est une quasi-catégorie non associative. Les conditions (3) montrent que $F(v(u, i.a))$ est l'application $x \to (x, \alpha(x))$ de C dans $C^{\bullet} * C^{\bullet}$ et, d'après (4), on a

$$x\,.\,\alpha(x) = k(x, \alpha(x)) = x \text{ pour tout } x \in C;$$

de même $\beta(x).x = x$ pour tout $x \in C$, de sorte que $C^{\bullet}$ est une catégorie non associative. Les formules 5 et le fait que $((F(v_2),F(w_1)),(F(v_1),F(w_2)))$ soit un produit fibré naturalisé entraînent que $F(k_1)$ et $F(k_2)$ sont respectivement les applications

$$((x,y),(y,z)) \to (x.y,z) \quad \text{et} \quad ((x,y),(y,z)) \to (x,y.z)$$

de $F(v_2) \vee F(v_1)$ dans $C^{\bullet} * C^{\bullet}$. L'axiome (6) exprime donc que κ est associative. Ainsi $C^{\bullet}$ est une catégorie.

-Inversement soit $S^{\bullet}$ une catégorie; on construit un unique néofoncteur $F \in \mathfrak{F}(\eta_{\mathfrak{M}})_o$ tel que

$$F(i) = (S, \iota, S_o^{\bullet}), \quad F(a) = (S_o^{\bullet}, \alpha, S), \quad F(b) = (S_o^{\bullet}, \beta, S),$$
$$F(k) = (S, \kappa, S^{\bullet} * S^{\bullet}),$$

d'après la proposition 3. Nous avons ainsi prouvé que l'application

$$\gamma_o : F \to C^{\bullet} = (F(u), F(k))$$

est une bijection de $\mathfrak{F}(\eta_{\mathfrak{M}})_o$ sur $\mathfrak{F}_o$.

-Soit $\Psi \in \mathfrak{F}(\eta_{\mathfrak{M}})$ une transformation naturelle définie par un triplet (F', τ, F). On voit facilement que

$$\gamma(\Psi) = (\gamma_o(F'), \underline{\tau(u)}, \gamma_o(F))$$

est un foncteur, et que l'application $\Psi \to \gamma(\Psi)$ définit un isomorphisme de $\mathfrak{F}(\eta_{\mathfrak{M}})$ sur $\mathfrak{F}$. ∎

DEFINITION. Un élément de $\mathfrak{F}(\eta)_o$ sera appelé *catégorie η-structurée.*

REMARQUE. Les catégories η-structurées sont définies dans «Introduction to the theory of Structured Categories», [4], avec une définition légèrement différente, puisque l'esquisse d'une catégorie $U_{\dot{\mathfrak{F}}}$ est définie un peu autrement.

Soit $\mathfrak{F}(H^{\bullet})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des trans- 1
formations naturelles entre néofoncteurs de $U_{\dot{\mathfrak{F}}}$ vers $H^{\bullet}$ ayant pour unités les foncteurs F tels que

$$((F(a), F(v_1)), (F(b), F(v_2))) \quad \text{et} \quad ((F(v_2), F(w_1)), (F(v_1), F(w_2)))$$

soient des produits fibrés naturalisés dans $H^{\bullet}$.

PROPOSITION 5. *Soit* $F \in \mathfrak{F}(H^{\bullet})_o$; *s'il existe* $f \in H^{\bullet}_{\gamma}$ *et* $f_o \in H^{\bullet}_{\gamma}$ *tels que* $f.F(i).f_o^{-1}$ *appartienne à* H^{ι}, *il existe une équivalence naturelle définie par un triplet* (F', τ, F), *où* $F' \in \mathfrak{F}(\eta)_o$, $\tau(u) = f$ *et* $\tau(u_o) = f_o$.

PREUVE. Nous posons $\hat{d} = F(d)$ pour tout $d \in U$. Puisque $a.i = u_o$, on trouve $\hat{a}.\hat{i} = \hat{u}_o$, de sorte que $\hat{i}$ est un monomorphisme. Soient

$$\hat{a}' = f_o.\hat{a}.f^{-1} \quad \text{et} \quad \hat{b}' = f_o.\hat{b}.f^{-1}.$$

Comme $((\hat{a}, \hat{v}_1), (\hat{b}, \hat{v}_2))$ est un produit fibré naturalisé,

$$((\hat{a}', f \,.\, \hat{v}_1), (\hat{b}', f \,.\, \hat{v}_2))$$

en est aussi un et, si

$$\mu(\hat{a}', \hat{b}') = ((\hat{a}', \hat{v}'_1), (\hat{b}', \hat{v}'_2)),$$

il existe $f' \in H^{\bullet}_{\gamma}$ tel que $\hat{v}'_i.f' = f.\hat{v}_i$ pour $i = 1, 2$. Posons $\hat{k}' = f.\hat{k}.f'^{-1}$. D'une manière analogue, $((\hat{v}'_2, f' \,.\, \hat{w}_1), (\hat{v}'_1, f' \,.\, \hat{w}_2))$ et

$$\mu(\hat{v}'_2, \hat{v}'_1) = ((\hat{v}'_2, \hat{w}'_1), (\hat{v}'_1, \hat{w}'_2))$$

étant des produits fibrés naturalisés de $(\hat{v}'_2, \hat{v}'_1)$, il existe $f'' \in H^{\bullet}_{\gamma}$ tel que l'on ait $\hat{w}'_i.f'' = f'.\hat{w}_i$ pour $i = 1, 2$. Soit τ la surjection

$$u \to f, \quad u_o \to f_o, \quad u * u \to f' \quad \text{et} \quad (u * u) * (u * u) \to f'';$$

il existe une équivalence naturelle Γ définie par un triplet (F', τ, F); il est évident que $F'(d) = \hat{d}'$, lorsque ce dernier a été défini. En particulier

$$F'(i) = \hat{i}', \quad F'(v_i) = \hat{v}'_i \quad \text{et} \quad F'(w_i) = \hat{w}'_i,$$

ce qui montre que $F' \in \mathfrak{F}(\eta)$. La démonstration est donc achevée. ∎

COROLLAIRE 1. *Si* $H^{\bullet}_{\gamma}.H^{\iota}.H^{\bullet}_{\gamma} = R_g(H^{\bullet})$, *la catégorie* $\mathfrak{F}(H^{\bullet})$ *est un élargissement de* $\mathfrak{F}(\eta)$.

En effet, $\mathfrak{F}(\eta)$ est pleine dans $\mathfrak{F}(H^{\bullet})$. Si $F \in \mathfrak{F}(H^{\bullet})_o$, on a $F(i) \in R_g(H^{\bullet}) = H^{\bullet}_{\gamma}.H^{\iota}.H^{\bullet}_{\gamma}$ et, d'après la proposition 5, F est isomorphe dans $\mathfrak{F}(H^{\bullet})$ à un $F' \in \mathfrak{F}(\eta)$; ceci signifie que $\mathfrak{F}(H^{\bullet})$ est un élargissement de $\mathfrak{F}(\eta)$. ∎

COROLLAIRE 2. *Si* $\hat{\eta} = (H^{\bullet}, H^{\iota}, \hat{\mu})$, *où* $\hat{\mu}$ *est une application produit fibré fini sur* $H^{\bullet}$, *les catégories* $\mathfrak{F}(\eta)$ *et* $\mathfrak{F}(\hat{\eta})$ *sont isomorphes.*

En effet, soit $F \in \mathfrak{F}(\hat{\eta})_o$; la construction faite ci-dessus en prenant $f = u$ et $f_o = u_o$ conduit à une équivalence naturelle $\Gamma(F)$ de F sur $F' \in \mathfrak{F}(\eta)$. On voit que la surjection $\Psi \to \Gamma(F_1) \square\square \Psi \square\square \Gamma(F)^{-1}$, où $F = \alpha^{\square\square}\Psi$ et $F_1 = \beta^{\square\square}\Psi$, définit un isomorphisme de $\mathfrak{F}(\hat{\eta})$ sur $\mathfrak{F}(\eta)$.

Soit $\overline{\eta} = (\overline{H}^{\bullet}, \overline{H}^{\iota}, \overline{\mu})$ un triplet de la même forme que η et soit G un foncteur de $H^{\bullet}$ vers $\overline{H}^{\bullet}$, compatible avec $(\overline{\mu}, \mu)$ et tel que $G(H^{\iota}) \subset \overline{H}^{\iota}$. Alors la surjection $\Psi \to \boxminus G.\Psi$ définit un foncteur de $\mathfrak{F}(\eta)$ vers $\mathfrak{F}(\overline{\eta})$.

B. COMPARAISON AVEC LES CATEGORIES p-STRUCTUREES.

Soit $p = (\mathfrak{M}, p, H^{\bullet})$ un foncteur d'homomorphismes; supposons que l'on ait $\eta = (H^{\bullet}, H^{\iota}, \mu)$, où H^{ι} est la classe des $(\mathfrak{M}^{\iota}, p)$-injections et où μ est une application produit fibré naturalisé sur $H^{\bullet}$ telle que p soit $(\mu_{\mathfrak{M}}, \mu)$-compatible.

PROPOSITION 6. $\mathfrak{F}(\eta)$ *est isomorphe à la catégorie* $\mathfrak{F}(p)$ *des foncteurs* p*-structurés.* 1

PREUVE. Supposons $\overline{F} \in \mathfrak{F}(\eta)_o$; puisque $p.\overline{F} \in \mathfrak{F}(\eta_{\mathfrak{M}})_o$, il existe d'après la proposition 4 une catégorie $C^{\bullet} = \gamma(p.\overline{F})$. Il est clair que $(C^{\bullet}, \overline{F}(u))$ est une catégorie p-structurée, les morphismes «structurant» α, β et κ étant respectivement $\overline{F}(a)$, $\overline{F}(b)$ et $\overline{F}(k)$. Nous poserons $(C^{\bullet}, \overline{F}(u)) = \hat{\gamma}(\overline{F})$.

- Inversement, soit $(G^{\bullet}, s)$ une catégorie p-structurée, et soit F' le néofoncteur $\gamma^{-1}(G^{\bullet})$. Désignons par $\overline{F}'(i)$, par $\overline{F}'(a)$ et $\overline{F}'(b)$ et par $\overline{F}'(k)$ respectivement les uniques éléments de $s.H.s_o$, de $s_o.H.s$ et de $s.H.s * s$ appliqués par p sur

$$F'(i) = (G, \iota, G^{\bullet}_o), \qquad F'(a) = (G^{\bullet}_o, \alpha, G),$$

$$F'(b) = (G^{\bullet}_o, \beta, G), \qquad F'(k) = (G, \kappa, G^{\bullet} * G^{\bullet}).$$

Puisque p est $(\mu_{\mathfrak{M}}, \mu)$-compatible, il existe des produits fibrés naturalisés

$$((\overline{F}'(a), \overline{F}'(v_1)), (\overline{F}'(b), \overline{F}'(v_2)))$$

et

$$((\overline{F}'(v_2), \overline{F}'(w_1)), (\overline{F}'(v_1), \overline{F}'(w_2)))$$

tels que

$$p(\overline{F}'(v_i)) = F'(v_i) \quad \text{et} \quad p(\overline{F}'(w_i)) = F'(w_i)$$

pour $i = 1$ et 2. Si $\hat{d}_i = \overline{F}'(d_i)$ a été défini et si $F'(d_1).F'(d_2) = F'(d_3).F'(d_4)$, alors $\hat{d}_1.\hat{d}_2 = \hat{d}_3.\hat{d}_4$, puisque p est fidèle. Une démonstration analogue à celle de la proposition 3 permet de construire d'une façon unique des éléments

$$\overline{F}'(v(u,i.a)), \quad \overline{F}'(v(i.b,u)), \quad \overline{F}'(k_1) \quad \text{et} \quad \overline{F}'(k_2)$$

appliqués par p respectivement sur

$$F'(v(u,i.a)), \quad F'(v(i.b,u)), \quad F'(k_1) \quad \text{et} \quad F'(k_2).$$

Ainsi nous obtenons une surjection $\underline{\overline{F}}'_1 : d \to \overline{F}'(d)$ définissant un homomorphisme du graphe $[U_1]$ vers $[H^\bullet]$ et telle que $p\,\underline{\overline{F}}'_1$ soit une restriction de $\underline{F}'$. Comme $[U_1]$ engendre $U^\bullet_{\mathfrak{F}}$ et comme F' est un néofoncteur de $U^\bullet_{\mathfrak{F}}$ vers $\mathcal{M}$, il en résulte que $\underline{\overline{F}}'_1$ s'étend en un néofoncteur unique $\overline{F}'$ de $U^\bullet_{\mathfrak{F}}$ vers $H^\bullet$ vérifiant

$$p.\overline{F}' = F', \quad \overline{F}' \in \mathfrak{F}(\eta) \quad \text{et} \quad (G^\bullet, s) = \hat{\gamma}(\overline{F}').$$

- p étant fidèle, le foncteur de $\mathfrak{N}(H^\bullet, U^\bullet_{\mathfrak{F}})^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(\mathcal{M}, U^\bullet_{\mathfrak{F}})^{\square\square}$ associant $\boxminus\, p.\Psi$ à Ψ est fidèle. Si $\Psi \in \mathfrak{F}(\eta)$ est défini par le triplet $(\overline{F}', \overline{\tau}, \overline{F})$, on a $\hat{\gamma}(\Psi) \in \mathfrak{F}(p)$, où

$$\hat{\gamma}(\Psi) = (\hat{\gamma}(\overline{F}'), \underline{\tau(u)}, \hat{\gamma}(\overline{F})).$$

Inversement, supposons

$$\Phi = ((G^\bullet, s'), \varphi, (C^\bullet, s)) \in \mathfrak{F}(p),$$

$$\text{où} \quad (C^\bullet, s) = \hat{\gamma}(\overline{F}) \quad \text{et} \quad (G^\bullet, s') = \hat{\gamma}(\overline{F}').$$

Puisque $\hat{\varphi} = (G^\bullet, \varphi, C^\bullet)$ est un foncteur, il existe, en vertu de la proposition 4,

$$(F', \tau, F) = \gamma^{-1}(\hat{\varphi}) \in \mathfrak{F}(\eta_{\mathcal{M}}).$$

Désignons par $\overline{\tau}(u)$ l'élément de $s'.H.s$ tel que

$$p(\overline{\tau}(u)) = (G, \varphi, C) = \tau(u)$$

et soit $\overline{\tau}(u_o) = \overline{F}'(a).\overline{\tau}(u).\overline{F}'(i)$; on trouve

$$p(\overline{\tau}(u_o)) = (G_o^{\bullet}, \varphi\iota, C_o^{\bullet}) = \tau(u_o).$$

Etant donné que $F'(a).\tau(u) = \tau(u_o).F(a)$ et que p est fidèle,

$$\overline{F}'(a).\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(u_o).\overline{F}(a).$$

Un raisonnement semblable montre que

$$\overline{F}'(b).\overline{\tau}(u) = \overline{\tau}(u_o).\overline{F}(b) \quad \text{et} \quad \overline{\tau}(u).\overline{F}(i) = \overline{F}'(i).\overline{\tau}(u_o).$$

Les relations

$$\overline{F}'(a).\overline{\tau}(u).\overline{F}(v_1) = \overline{\tau}(u_o).\overline{F}(a).\overline{F}(v_1) = \overline{\tau}(u_o).\overline{F}(b.v_2) =$$
$$= \overline{F}'(b).\overline{\tau}(u).\overline{F}(v_2)$$

assurent l'existence d'un et d'un seul h tel que

$$\overline{F}'(v_i).h = \overline{\tau}(u).\overline{F}(v_i) \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2,$$

car $((\overline{F}'(a), \overline{F}'(v_1)), (\overline{F}'(b), \overline{F}'(v_2)))$ est un produit fibré naturalisé. On a

$$p(h) = \tau(u * u), \qquad \text{d'où } \overline{F}'(k).h = \overline{\tau}(u).\overline{F}(k);$$

posons $\overline{\tau}(u * u) = h$. De même, des égalités

$$\overline{F}'(v_2).h.\overline{F}(w_1) = \overline{\tau}(u).\overline{F}(v_2).\overline{F}(w_1) = \overline{\tau}(u).\overline{F}(v_1.w_2) =$$
$$= \overline{F}'(v_1).h.\overline{F}(w_2),$$

on déduit l'existence d'un et d'un seul h' vérifiant

$$\overline{F}'(w_i).h' = h.\overline{F}(w_i) \quad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2;$$

et l'on a $p(h') = \tau((u*u)*(u*u))$. En posant $\overline{\tau}((u*u)*(u*u)) = h'$, on définit une surjection $\overline{\tau}$ de $U\dot{\mathfrak{F}}_o$ dans H telle que $p\,\overline{\tau} = \tau$. Puisque $\overline{F}$ et $\overline{F}'$ sont des néofoncteurs (première partie de la démonstration), que p est fidèle et que $(p.\overline{F}', \tau, p.\overline{F})$ définit une transformation naturelle, $(\overline{F}', \overline{\tau}, \overline{F})$ définit aussi une transformation naturelle Ψ, telle que $\hat{\gamma}(\Psi) = \Phi$. Par conséquent $\hat{\gamma}$ définit un isomorphisme de $\mathfrak{F}(\eta)$ sur $\mathfrak{F}(p)$. ∎

COROLLAIRE. *Avec les notations de la fin du § A, la catégorie $\mathfrak{F}(H^{\bullet})$ est un élargissement de $\mathfrak{F}(p)$.*

4. Espèce de morphismes associée à une catégorie structurée.

1 A. Soit $\eta = (H^{\bullet}, H^{\iota}, \mu)$ un triplet d'une catégorie $H^{\bullet}$, d'une classe H^{ι} de monomorphismes de $H^{\bullet}$ et d'une application produit fibré naturalisé fini μ sur $H^{\bullet}$. Soit $F \in \mathfrak{F}(\eta)_o$ et $s = F(u)$. Nous désignerons par $\hat{d}$ l'élément $F(d)$, pour tout $d \in U_{\mathfrak{F}}$. Soit K la classe $s.H$. Si $h \in K$ et $h' \in K$ sont tels que $\hat{a}.h' = \hat{b}.h$, il existe un et un seul g tel que

$$\hat{v}_1 . g = h' \quad \text{et} \quad \hat{v}_2 . g = h,$$

car $((\hat{a}, \hat{v}_1), (\hat{b}, \hat{v}_2))$ est un produit fibré naturalisé; nous écrirons

$$g = v(h', h).$$

THEOREME 7. *$K^{\bullet}$ est une catégorie pour la loi de composition :*

$$(h', h) \to h' \bullet h = \hat{k}.v(h', h) \text{ si, et seulement si, } \hat{a}.h' = \hat{b}.h.$$

PREUVE. Posons $\hat{a}' = \hat{i}.\hat{a}$ et $\hat{b}' = \hat{i}.\hat{b}$. Montrons que $K^{\bullet}$ admet pour unités les $m \in s.H$ tels que $m = \hat{a}'.m$. Pour un tel m, on a

$$\hat{b}.m = \hat{b}.\hat{a}'.m = \hat{b}.\hat{i}.\hat{a}.m = \hat{a}.m.$$

Supposons $h \bullet m$ défini, i.e. $\hat{a}.h = \hat{b}.m$, d'où

$$\hat{a}'.h = \hat{i}.\hat{b}.m = \hat{i}.\hat{a}.m = m.$$

Il existe $v(h, m)$ et l'on a

$$v(h, m) = v(\hat{u}.h, \hat{a}'.h) = v(\hat{u}, \hat{i}.\hat{a}).h;$$

par définition de $\mathfrak{F}(\eta)$, on sait que

$$\hat{k}.v(\hat{u}, \hat{i}.\hat{a}) = \hat{k}.F(v(u, i.a)) = \hat{u};$$

il s'ensuit

$$h \bullet m = \hat{k}.v(h, m) = \hat{k}.v(\hat{u}, \hat{i}.\hat{a}).h = \hat{u}.h = h.$$

De même, $m \bullet h' = h'$ lorsque $\hat{a}.m = \hat{b}.h'$. Ainsi m est une unité de $K^{\bullet}$; tout $h \in K$ admet pour seule unité à droite $\hat{a}'.h$, pour seule unité à gauche $\hat{b}'.h$.

- Le composé $h' \bullet h$ est défini si, et seulement si, $\hat{a}'.h' = \hat{b}'.h$; dans ce cas, on trouve

$$\hat{a}'.(h' \bullet h) = \hat{a}'.\hat{k}.v(h',h) = \hat{a}'.\hat{v}_2.v(h',h) = \hat{a}'.h,$$
$$\hat{b}'.(h' \bullet h) = \hat{b}'.\hat{k}.v(h',h) = \hat{b}'.\hat{v}_1.v(h',h) = \hat{b}'.h'.$$

Supposons les composés $h''\bullet(h'\bullet h)$ et $(h''\bullet h')\bullet h$ définis. $((\hat{v}_2,\hat{w}_1),(\hat{v}_1,\hat{w}_2))$ est un produit fibré naturalisé, et l'on a

$$\hat{k}_1 = v(\hat{k}.\hat{w}_1, \hat{v}_2.\hat{w}_2) \quad \text{et} \quad \hat{k}_2 = v(\hat{v}_1.\hat{w}_1, \hat{k}.\hat{w}_2),$$

car $F \in \mathfrak{F}(\eta)$. Puisque

$$\hat{v}_2.v(h'',h') = h' = \hat{v}_1.v(h',h),$$

il existe un et un seul g tel que

$$\hat{w}_1.g = v(h'',h') \quad \text{et} \quad \hat{w}_2.g = v(h',h).$$

Les relations $\hat{k}.\hat{k}_1 = \hat{k}.\hat{k}_2$,

$$\hat{k}.\hat{k}_1.g = \hat{k}.v(\hat{k}.\hat{w}_1.g, \hat{v}_2.\hat{w}_2.g) = \hat{k}.v(\hat{k}.v(h'',h'), \hat{v}_2.v(h',h)) =$$
$$= \hat{k}.v(h''\bullet h', h) = (h''\bullet h')\bullet h,$$
$$\hat{k}.\hat{k}_2.g = \hat{k}.v(\hat{v}_1.v(h'',h'), \hat{k}.v(h',h)) = \hat{k}.v(h'', h'\bullet h) = h''\bullet(h'\bullet h)$$

entraînent

$$(h''\bullet h')\bullet h = h''\bullet(h'\bullet h).$$

Ceci prouve que $K^\bullet$ est une catégorie. ∎

PROPOSITION 7. *La catégorie H^* duale de $H^\cdot$ est une catégorie d'opérateurs sur la catégorie $K^\bullet$ relativement à la loi de composition κ':*

$$(f,h) \to h.f \text{ si, et seulement si, } \beta(f) = \alpha(h).$$

PREUVE. (H^*, K, κ') est une sous-espèce de structures de l'espèce de structures canonique associée à l'opération de H^* sur H définie par la loi de composition de $H^\cdot$. Si $m \in K^\bullet_o$ et si $\alpha(m) = \beta(f)$, on a

$$m.f = \hat{a}'.m.f \in K^\bullet_o.$$

Si $h'\bullet h$ et $(h'\bullet h).f$ sont définis, l'égalité $\hat{a}'.(h'.f) = \hat{b}'.h.f$ assure que le composé $(h'.f)\bullet(h.f)$ est défini, et l'on obtient

$$(h'.f)\bullet(h.f) = \hat{k}.v(h'.f, h.f) = \hat{k}.v(h',h).f = (h'\bullet h).f.$$

Ainsi la surjection $h \to h.f$ définit un foncteur de $K.\beta(f)^{\bullet}$ sur $K.\alpha(f)^{\bullet}$;
ceci achève la démonstration de la proposition. ■

DEFINITION. $K^{\bullet}$ est appelée le *η-prolongement de F*. L'espèce de morphismes $(H^*, K^{\bullet}, \kappa')$ est appelée *l'espèce de morphismes associée à F*.

EXEMPLE. En particulier, soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée, où $p = (\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ est un foncteur d'homomorphismes $(\mu_{\mathfrak{M}}, \mu)$-compatible. D'après la proposition 6, à $(C^{\cdot}, s)$ correspond un élément F de $\mathfrak{F}(\eta)$. Par suite la classe $s.H = K$ admet en vertu du théorème précédent une structure de catégorie. On dira aussi que l'espèce de morphismes $(H^*, K^{\bullet}, \kappa')$ est associée à $(C^{\cdot}, s)$.

Apartir du triplet $(H^*, K^{\bullet}, \kappa')$, on peut construire la catégorie
1¶ produit croisé $P(F)$ (voir chapitre II de « Catégories et Structures») : ses éléments sont les triplets (m, f, h) tels que

$$m \in K_o^{\bullet}, \quad h \in K, \quad f \in \alpha(m).H.\alpha(h) \quad \text{et} \quad \hat{h}'.h = m.f,$$

la loi de composition étant

$$(m', f', h').(m, f, h) = (m', f'.f, h'.f \bullet h)$$

si, et seulement si, $m = \hat{a}'.h'$. Nous aurons à considérer plus loin des sous-catégories P' de $P(F)$.

B. CAS DES CATEGORIES DOMINEES.

Reprenons les hypothèses du début du § A et supposons de plus
2 que $(H^{\cdot}, D)$ soit une catégorie q-dominée, q étant un foncteur $(\mathfrak{M}, \underline{q}, \hat{H}^{\cdot})$ d'homomorphismes saturé, à produits fibrés finis.

PROPOSITION 8. *Soit $F \in \mathfrak{F}(\eta)_o$ et $s' \in H_o^{\cdot}$. Si le foncteur $G: h \to D(h, s')$ de $H^{\cdot}$ vers $\hat{H}^{\cdot}$ est compatible avec les produits fibrés finis, $(K.s'^{\bullet}, D(s, s'))$ est une catégorie q-structurée, où $s = F(u)$.*

PREUVE. Soit $\sigma = D(s, s')$. Comme le foncteur G est compatible avec les produits fibrés finis, on a $\overline{F} = G.F \in \mathfrak{F}(\hat{H}^{\cdot})$, où $\mathfrak{F}(\hat{H}^{\cdot})$ est la catégorie associée à $\hat{H}^{\cdot}$ à la fin du § A. Posons $\hat{\eta} = (\hat{H}^{\cdot}, q_{\iota}^{\frown}, \hat{\mu})$, où $q_\iota^{\ulcorner}$ est la classe des $(\mathfrak{M}^\iota, q)$-injections et $\hat{\mu}$ l'application produit fibré naturalisé telle que q soit $(\mu_{\mathfrak{M}}, \hat{\mu})$-compatible. Puisque $\overline{F}(i)$ admet $\overline{F}(a)$ pour inverse à gauche, $\overline{F}(i)$ est un q-monomorphisme; q étant saturé, il existe $\bar{i} \in q_\iota^{\ulcorner}$ tel que $\overline{F}(i) = \bar{i} . f_o$, où $f_o \in \hat{H}^\bullet_\gamma$. D'après la proposition 5, on peut construire une équivalence naturelle définie par un triplet $(\overline{F}', \tau, \overline{F})$, où

$$\tau(u) = \overline{F}(u) = \sigma, \quad \tau(u_o) = f_o \quad \text{et} \quad \overline{F}' \in \mathfrak{F}(\hat{\eta})_o .$$

Le foncteur $q.\overline{F}'$ appartient à $\mathfrak{F}(\eta_{\mathfrak{M}})$; il projette a sur l'application source $\alpha^\bullet$: $h \to \hat{i}.\hat{a}.h$ de la catégorie $(K.s')^\bullet$ et b sur son application but $\beta^\bullet$; comme $q.\overline{F}'(u * u)$ est le produit fibré canonique $\alpha^\bullet \vee \beta^\bullet$ dans $\mathfrak{M}$, c'est $(K.s')^\bullet * (K.s')^\bullet$ et $q.\overline{F}'(k)$ est la loi de composition de $K.s'^\bullet$: $q.\overline{F}'$ est la catégorie $\eta_{\mathfrak{M}}$-structurée correspondant (proposition 4) à $(K.s')^\bullet$. En vertu de la proposition 6, $(K.s'^\bullet, \sigma)$ est la catégorie q-structurée associée à $\overline{F}' \in \mathfrak{F}(\hat{\eta})$. ∎

Désignons par $\hat{q}$ le foncteur projection canonique de $\mathfrak{F}(q)$ vers $\mathfrak{M}$.

PROPOSITION 9. *Supposons que, pour tout* $s' \in H^\bullet_o$, *le foncteur* $D_{s'}: h \to D(h, s')$ *de* $H^\bullet$ *vers* $\hat{H}^\bullet$ *soit à produits fibrés finis. Si* $F \in \mathfrak{F}(\eta)_o$, *l'espèce de morphismes* $(H^*, K^\bullet, \kappa')$ *est sous-jacente à une espèce de structures* $\hat{q}$*-dominée* $(H^*, \overline{D})$, *où*

$$\overline{D}(s') = ((K.s')^\bullet, D(s, s'))$$

pour tout $s' \in H^\bullet_o$.

PREUVE. D'après la proposition 8, $\overline{D}(s')$ est une catégorie q-structurée. Si $f \in H$, $\alpha(f) = s''$ et $\beta(f) = s'$, on a $g = D(s, f) \in \hat{H}$, et, en vertu de la proposition 7, $\underline{g} = \underline{q(g)}$ définit un foncteur de $(K.s')^\bullet$ vers $(K.s'')^\bullet$. Donc $(\overline{D}(s''), \underline{g}, \overline{D}(s'))$ est un foncteur q-structuré $\overline{D}(f)$. La surjection $f \to \overline{D}(f)$ définit un foncteur de H^* vers $\mathfrak{F}(q)$ tel que $(H^*, \overline{D})$ soit une espèce de structures $\hat{q}$-dominée, admettant (H^*, K, κ') pour espèce de structures sous-jacente. ∎

DEFINITION. On dira que $(H^\bullet, D_o)$ *est une catégorie discrètement q-structurée* si D_o est une application de $H^\bullet_o \times H^\bullet_o$ dans $\hat{H}^\bullet_o$ ayant les propriétés suivantes :

1° $q(D_o(s'', s')) = s'' . H . s'$ pour tout $(s'', s') \in H^{\cdot}_o \times H^{\cdot}_o$;

2° Si $s_i \in H^{\cdot}_o$ pour $i = 1, 2$ et 3, il existe

$$k(s_3, s_2, s_1) \in D_o(s_3, s_1) . \hat{H} . D_o(s_3, s_2) \times D_o(s_2, s_1)$$

appliqué par q sur une restriction de la loi de composition de $H^{\cdot}$.

L'élément $k(s_3, s_2, s_1)$ est entièrement déterminé par ces conditions.

PROPOSITION 10. *Si q est un foncteur d'homomorphismes à atomes (chapitre IV, « Catégories et structures ») et si $(H^{\cdot}, D_o)$ est une catégorie discrètement q-structurée, il existe une catégorie q-dominée $(H^{\cdot}, D)$ telle que D_o soit une restriction de D.*

PREUVE. Soient s, s' et s'' trois unités de $H^{\cdot}$, et $f \in s''.H.s'$. Il existe un élément final f_+ de $\hat{H}^{\cdot}$ tel que $q(f_+) = \{f\}$, et une $(\mathfrak{M}^{\iota}, q)$-injection j_f de source f_+, de but $D_o(s'', s')$, par définition d'un foncteur à atomes; désignons par $\overline{f}$ le morphisme de $\hat{H}^{\cdot}$ de source $D_o(s', s)$, de but $D_o(s'', s')$, tel que $q(\overline{f})$ soit l'application constante sur f (on a $\overline{f} = j_f . g_f$, où g_f est l'unique élément de $f_+ . \hat{H} . D_o(s', s)$). Posons

$$D(f, s) = k(s'', s', s).[\overline{f}, D_o(s', s)];$$

alors $D(f, s) \in D_o(s'', s) . \hat{H} . D_o(s', s)$ et $q(D(f, s))$ est l'application $h \to f.h$ de $s'.H.s$ dans $s''.H.s$. Si $g \in s.H.s_1$, on définit de même

$$D(s'', g) = k(s'', s, s_1).[D_o(s'', s), \overline{g}] \in D_o(s'', s_1) . \hat{H} . D_o(s'', s).$$

Le morphisme

$$D(f, g) = D(s'', g) . D(f, s) \in D_o(s'', s) . \hat{H} . D_o(s', s)$$

est appliqué par q sur $Hom_H.(f, g)$. La surjection $(f, g) \to D(f, g)$ définit un foncteur D de $H^{\cdot} \times H^*$ vers $\hat{H}^{\cdot}$ tel que $q.D = Hom_{H^{\cdot}}$. Autrement dit, $(H^{\cdot}, D)$ est une catégorie q-dominée. Puisque D_o est la restriction de D à $H^{\cdot}_o \times H^{\cdot}_o$, la proposition est démontrée. ∎

DEFINITION. On appelle *catégorie fortement q-dominée* une catégorie q-dominée $(H^{\cdot}, D)$ telle que $(H^{\cdot}, D_o)$, où D_o est la restriction de D à $H^{\cdot}_o \times H^{\cdot}_o$, soit une catégorie discrètement q-structurée.

REMARQUE. Supposons que q soit à atomes et à $\mathfrak{M}_o$-sommes et que $H \in \mathfrak{M}_o$. Soit $(H^\cdot, D_o)$ une catégorie discrètement q-structurée; il existe une somme σ de $(D_o(s'', s'))_{(s'', s') \in H_o^\cdot \times H_o^\cdot}$ dans $\hat{H}^\cdot$ vérifiant $q(\sigma) = H$; les applications source et but de $H^\cdot$ sont «structurées» respectivement par un $\bar{a} \in \sigma . \hat{H} . \sigma$ et un $\bar{b} \in \sigma . \hat{H} . \sigma$ (à savoir : $\bar{a}$ est la somme de $(s''s')_{(s'', s') \in H_o^\cdot \times H_o^\cdot}$, où q applique $s''s' \in \sigma . \hat{H} . D_o(s'', s')$ sur l'application constante sur s'). Mais $(H^\cdot, \sigma)$ n'est pas nécessairement une catégorie q-structurée. Cependant $(H^\cdot, \sigma) \in \mathfrak{F}(q)$ lorsque :

1° $\sum_{i \in I} e_i \times \sum_{i \in I} e_i = \sum_{(i,j) \in I \times I} e_i \times e_j$, où $e_i \in \hat{H}_o^\cdot$ et $I \in \mathfrak{M}_o$;

2° l'injection canonique de e_i dans $\sum_{i \in I} e_i$ est un q-monomorphisme.

En effet, avec ces hypothèses, $(\bar{a}, \bar{b})$ admet pour produit fibré $\sigma * \sigma$ dans $\hat{H}^\cdot$ la somme dans q de $(D(s_3, s_2) \times D(s_2, s_1))_{s_i \in H_o^\cdot}$ et l'unique $\bar{k} \in \sigma . \hat{H} . \sigma * \sigma$ déterminé par la famille $(k(s_3, s_2, s_1))_{s_i \in H_o^\cdot}$ structure la loi de composition de $H^\cdot$. Ces conditions sont par exemple satisfaites si q est le foncteur θ de $\mathfrak{F}$ vers $\mathfrak{M}$.

Dans la fin de ce §, q est un foncteur d'homomorphismes saturé, résolvant à droite et à produits finis (donc à produits fibrés finis), $(H^\cdot, D)$ est une catégorie q-dominée telle que, pour tout $s' \in H_o^\cdot$, le foncteur $D_{s'} : f \to D(f, s')$ soit à produits fibrés finis. Soit $P^\cdot$ la catégorie produit croisé $P(F)$ associée (fin §A) à l'espèce de morphismes $(H^*, K^\bullet \kappa')$; désignons par π le foncteur projection canonique de $P^\cdot$ vers $H^\cdot$, tel que $\pi(m, f, h) = f$. 1+

THEOREME 8. *Avec les hypothèses précédentes, il existe une application* $\bar{D}$ *de* $(H_o^\cdot \times H_o^\cdot)$ *dans* $\hat{H}_o^\cdot$ *vérifiant les conditions suivantes, où* s', s'' *et* s''' *sont des unités :*

1° $q . \bar{D}(s'', s') = \bar{\pi}^1(s''.H.s')$;

2° Il existe $k'(s''', s'', s') \in \bar{D}(s''', s').\hat{H}$, *de source une* q-*sous-structure de* $\bar{D}(s''', s'') \times \bar{D}(s'', s')$, *appliqué par* q *sur la restriction de la loi de composition de* $P^\cdot$ *à la classe*

$$(P^\cdot * P^\cdot) \cap \bar{\pi}^1(s'''.H.s'') \times \bar{\pi}^1(s''.H.s').$$

PREUVE. Soit s'' et s' deux unités de $H^\bullet$; notons p_1, p_2 et p_3 les projections canoniques du produit $S = D(s, s'') \times D(s'', s') \times D(s, s')$ (qui existe dans q). Le couple

$$(k(s, s'', s').[p_1, p_2], D(\hat{b}', s').p_3)$$

d'éléments de $D(s, s').\hat{H}.S$ admet un $(\mathfrak{M}^\iota, q)$-noyau s_1 tel que $q(s_1)$ soit la classe des $(m, f, b) \in q(S)$ vérifiant $m.f = \hat{b}'.b$ (où $\hat{b}' = \hat{i}.\hat{b}$), c'est-à-dire $q(s_1) = \overline{\pi}^1(s''.H.s')$. Nous poserons $s_1 = \overline{D}(s'', s')$. Si $s''' \in H_o^\bullet$, on définit de même

$$s_2 = \overline{D}(s''', s'') \quad \text{et} \quad s_3 = \overline{D}(s''', s').$$

Désignons par $\hat{p}_i$ le $(\mathfrak{M}^\iota, q)$-sous-morphisme de p_i de source s_1, de but $\beta(p_i)$, pour $i = 1, 2$ et 3; soit $\hat{p}'_i$ les éléments analogues correspondants à s_2. Si p_4 et p_5 sont les projections canoniques du produit $s_2 \times s_1$ sur s_2 et sur s_1 respectivement, le couple

$$(\hat{p}_1.p_5, \overline{D}(\hat{a}', s').\hat{p}'_3.p_4)$$

admet un $(\mathfrak{M}^\iota, q)$-noyau $s_2 * s_1$ tel que $q(s_2 * s_1)$ soit la classe des couples

$$(\xi', \xi) \in P^\bullet * P^\bullet, \quad \text{où} \quad \xi \in q(s_1) \quad \text{et} \quad \xi' \in q(s_2);$$

soient $\hat{p}_4$ et $\hat{p}_5$ les $(\mathfrak{M}^\iota, q)$-sous-morphismes de p_4 et p_5 de source $s_2 * s_1$. Considérons les morphismes

$t_1 = \hat{p}'_1.\hat{p}_4 \in D(s, s''').\hat{H}.s_2 * s_1$,

$t_2 = k(s''', s'', s').[\hat{p}'_2.\hat{p}_4, \hat{p}_2.\hat{p}_5] \in D(s''', s').\hat{H}.s_2 * s_1$,

$t'_3 = [k(s, s'', s').[\hat{p}'_3.\hat{p}_4, \hat{p}_2.\hat{p}_5], \hat{p}_3.\hat{p}_5] \in D(s, s') \times D(s, s').\hat{H}.s_2 * s_1$

associant à (ξ', ξ), où $\xi' = (m', f', b')$, $\xi = (m, f, b)$ et $(\xi', \xi) \in q(s_2 * s_1)$, respectivement : m', $f'.f$ et $(b'.f, b)$. Puisque $((K.s')^\bullet, \sigma)$, où $\sigma = D(s, s')$, est une catégorie q-structurée (proposition 8), il existe $\overline{F}'(k) \in \sigma.\hat{H}.\sigma * \sigma$ tel que $q(\overline{F}'(k))$ soit la loi de composition de $(K.s')^\bullet$; comme $\sigma * \sigma$ est une q-sous-structure de $\sigma \times \sigma$ et que

$$q(t'_3)(q(s_2 * s_1)) \subset q(\sigma * \sigma),$$

il existe un $(\mathfrak{M}^\iota, q)$-sous-morphisme $t''_3 \in \sigma * \sigma.\hat{H}.s_2 * s_1$ de t'_3; l'image par q de

$$t_3 = \overline{F}'(k).\, t''_3 \in D(s,\, s').\hat{H}.s_2 * s_1$$

est l'application $(\xi',\, \xi) \to (b'.f) \bullet b$. Par suite, si $t = [t_1, t_2, t_3]$, $q(t)$ est une restriction de la loi de composition de $P^{\cdot}$, et l'on a

$$q(t)(q(s_2 * s_1)) \subset q(s_3),\ \text{où}\ s_3 = \overline{D}(s''',\, s');$$

il s'ensuit l'existence d'un $(\mathfrak{M}^{\iota},\, q)$-sous-morphisme $\tilde{t} \in s_3.\,\hat{H}.\,s_2 * s_1$ de t, et ce $\tilde{t}$ est l'élément $k'(s''',\, s'',\, s')$ cherché. ∎

THEOREME 9. *Supposons vérifiées les conditions du théorème 8 et q à atomes; soit $(s'',\, s') \in H^{\cdot}_o \times H^{\cdot}_o$. Il existe*

$$a'(s'',\, s') \in \overline{D}(s',\, s').\,\hat{H}.\,\overline{D}(s'',\, s') \quad \text{et} \quad b'(s'',\, s'') \in \overline{D}(s'',\, s'').\hat{H}.\overline{D}(s'',\, s')$$

appliqués par q sur des restrictions des applications source et but de $P^{\cdot}$. De plus il existe une catégorie fortement q-structurée $(P^{\cdot},\, D^P)$ telle que $D^P(\mu,\, \mu_1)$ soit une q-sous-structure de $\overline{D}(s'',\, s')$ si $\pi(\mu_1) = s'$ et $\pi(\mu_1) = s''$. 1+

PREUVE. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 8. Notons

$$\overline{s''} \in D(s'',\, s'').\hat{H}.s_1 \quad \text{et} \quad \overline{s'} \in D(s',\, s').\hat{H}.s_1$$

les éléments, qui existent par définition d'un foncteur à atomes, appliqués par q respectivement sur l'application constante sur s'' et sur s'. Il existe

$$g = [\beta_1,\, \overline{s''},\, \beta_1] \in D(s,\, s'') \times D(s'',\, s'') \times D(s,\, s'').\hat{H}.\, s_1;$$

comme $q(g)(\xi) = \beta(\xi)$ pour tout $\xi \in \bar{\pi}^{-1}(s''.\,H.\,s')$, on a

$$q(g)(q(s_1)) \subset q(\overline{D}(s'',\, s'')),$$

de sorte qu'il existe un $(\mathfrak{M}^{\iota},\, q)$-sous-morphisme $b'(s'',\, s') \in \overline{D}(s'',\, s'').\hat{H}.s_1$ appliqué par q sur une restriction de l'application but de $P^{\cdot}$. D'une façon analogue, il existe

$$g' = [D(\hat{a}',\, s').\beta_3,\, \overline{s'},\, D(\hat{a}',\, s').\beta_3] \in D(s,\, s') \times D(s',\, s') \times D(s,\, s').\hat{H}.s_1$$

tel que $q(g')(\xi) = \alpha(\xi)$, et un $(\mathfrak{M}^{\iota},\, q)$-sous-morphisme

$$a'(s'', s'') \in \overline{D}(s', s').\hat{H}.s_1$$

de g' appliqué par q sur l'application source de $P^{\cdot}$.

- Supposons $\mu_1 = (m_1, s', m_1) \in P^{\cdot}_o$ et $\mu = (m, s'', m) \in P^{\cdot}_o$. La classe $\mu . P . \mu_1$ est formée des $(m, f, h) \in \bar{\pi}^{-1}(s''.H.s')$ tels que $\hat{a}'.h = m_1$. Toujours avec les notations de la démonstration du théorème 8, il existe

$$\overline{m} \in D(s'', s).\hat{H}.s_1 \quad \text{et} \quad \overline{m}_1 \in D(s', s).\hat{H}.s_1$$

appliqués par q sur les applications constantes sur m et sur m_1 respectivement. Le couple $(\beta_1, \overline{m})$ admet un $(\mathfrak{M}^l, q)$-noyau σ_1 et le couple $(D(\hat{a}', s'').\beta_3, \overline{m}_1)$ admet un $(\mathfrak{M}^l, q)$-noyau σ_2. Le foncteur q étant à produits fibrés finis, il existe une q-sous-structure $\tilde{s}_1 = \sigma_1 \cap \sigma_2$ de s_1 telle que

$$q(s_1) = q(\sigma_1) \cap q(\sigma_2) = \mu . P . \mu_1 .$$

Posons $D^P(\mu, \mu_1) = \tilde{s}_1$. On construit d'une manière analogue des q-sous-structures $\tilde{s}_2 = D^P(\mu', \mu)$ de s_2 et $\tilde{s}_3 = D^P(\mu', \mu_1)$ de s_3, si $\mu' = (m', s''', m') \in P^{\cdot}_o$. Le produit $\tilde{s}_2 \times \tilde{s}_1$ est une q-sous-structure de $s_2 * s_1$ et l'on a

$$q(t)(q(\tilde{s}_2 \times \tilde{s}_1)) \subset q(\tilde{s}_3), \text{ où } t = k'(s''', s'', s').$$

Par suite il existe un $(\mathfrak{M}^l, q)$-sous-morphisme $t' \in \tilde{s}_3 . \hat{H} . \tilde{s}_2 \times \tilde{s}_1$ de t, et $q(t')$ est l'application

$$(\xi', \xi) \to \xi' . \xi \text{ de } (\mu' . P . \mu) \times (\mu . P . \mu_1) \text{ dans } \mu' . P . \mu_1 .$$

Si l'on désigne par D^P_o l'application

$$(\mu, \mu_1) \to D^P(\mu, \mu_1) \text{ de } P^{\cdot}_o \times P^{\cdot}_o \text{ dans } \hat{H}^{\cdot}_o,$$

ceci signifie que $(H^{\cdot}, D^P_o)$ est une catégorie discrètement q-structurée. D'après la proposition 10, il existe une catégorie fortement q-structurée $(H^{\cdot}, D^P)$ dans laquelle D^P_o est une restriction de D^P ■

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses du théorème, $(P^{\cdot}_{s'}, \overline{D}(s', s'))$ où $P_{s'} = \bar{\pi}^{-1}(s'.H.s')$ est une catégorie q-structurée, pour tout $s' \in H^{\cdot}_o$.*

En effet, $P_{s'}$ définit une sous-catégorie de $P^{\cdot}$ dont les applications source et but et la loi de composition sont structurées respectivement par $a'(s',s')$, par $b'(s', s')$ et par $k'(s',s', s')$. ■

C. APPLICATIONS.

Rappelons que, étant donné un ensemble E, une *quasi-topologie* sur E est une application π associant à tout $x \in E$ un ensemble $\pi(x)$ de filtres sur E (appelés *filtres quasi-convergents vers* x), vérifiant les conditions :

1° $\pi(x)$ contient le filtre de toutes les parties de E contenant x;

2° Si X et X' quasi-convergent vers x, le filtre engendré par les ensembles $M \cup M'$, où $M \in X$ et $M' \in X'$, quasi-converge vers x. Si M est une partie de E, nous notons π / M la quasi-topologie induite par π sur M. Soit $\mathcal{P}_o$ l'ensemble des quasi-topologies π sur les éléments E de l'univers $\mathfrak{M}_o$.

Soit $\mathcal{P}$ la catégorie des applications quasi-continues (π', f, π) entre éléments de $\mathcal{P}_o$, et $\overline{\theta}$ son foncteur d'oubli vers $\mathfrak{M}$. Ce foncteur est un foncteur d'homomorphismes saturé, résolvant à droite, à $\mathfrak{M}_o$-produits et à atomes. Soit λ_o l'application associant au couple (π',π) de deux quasi-topologies la quasi-topologie de la convergence locale [6] $\lambda(\pi', \pi)$ sur l'ensemble $\pi'.\mathcal{P}.\pi$ des applications quasi-continues de π vers π'. Si $f \in \pi'.\mathcal{P}.\pi$, les filtres quasi-convergents vers f dans $\lambda(\pi', \pi)$ sont les filtres F sur $\pi'.\mathcal{P}.\pi$ ayant la propriété : Si $X \in \pi(x)$, on a $F(X) \in \pi'(f(x))$, où $F(X)$ est le filtre engendré par les ensembles $\Phi(M)$ avec

$$\Phi \in F, \quad M \in X \quad \text{et} \quad \Phi(M) = \bigcup_{f' \in \Phi} f'(M).$$

On montre que $(\mathcal{P}, \lambda_o)$ *est une catégorie discrètement* $\overline{\theta}$*-structurée* [6]. D'après la proposition 10, λ_o s'étend en un foncteur λ tel que $(\mathcal{P}, \lambda)$ soit une catégorie $\overline{\theta}$-dominée. De plus, on prouve que les $\lambda(\pi', -)$ *sont compatibles avec les produits fibrés finis.* 1+

Soit $(C^{\cdot}, \pi)$ une catégorie quasi-topologique (i.e. $\overline{\theta}$-structurée). Dans [6], nous avons associé à $(C^{\cdot}, \pi)$ la *catégorie quasi-topologique*

$S(C^\bullet, \pi) = (S^\bullet, \sigma)$ *des sections locales de* $(C^\bullet, \pi)$: Ses éléments sont les triplets $\hat{s} = (U', s, U)$, où U et U' sont des ouverts de la topologie $\tau(\pi_o)$ sous-jacente à $\pi_o = \pi / C^\bullet_o$ et où $(\pi, s, \pi / U)$ est une application quasi-continue telle que

$$\beta s(U) \subset U' \quad \text{et} \quad \alpha s(x) = x \text{ pour tout } x \in U;$$

la loi de composition est définie par :

$$(U'', s', \hat{U}') \bullet (U', s, U) = (U'', \kappa[s' \beta s, s], U)$$

si, et seulement si, $\hat{U}' = U'$. On sait que la quasi-topologie σ est construite à partir de la quasi-topologie de la convergence locale sur l'ensemble des applications quasi-continues d'un ouvert quelconque de $\tau(\pi_o)$ vers π.

Nous allons montrer que l'on peut retrouver cette catégorie à l'aide des résultats du §B. Soit $(\hat{C}^\bullet, \hat{\pi})$ la catégorie quasi-topologique obtenue de la façon suivante : $\hat{C}^\bullet$ admet $C^\bullet$ pour sous-catégorie pleine et possède un seul élément (qui est une unité) a n'appartenant pas à C; si $x \in C$, les filtres appartenant à $\hat{\pi}(x)$ sont les filtres sur $\hat{C}$ engendrés par les éléments de $\pi(x)$; enfin $\hat{\pi}(a)$ contient tous les filtres sur $\hat{C}$. La catégorie quasi-topologique $(\hat{C}^\bullet, \hat{\pi})$ admet $(C^\bullet, \pi)$ pour sous-catégorie quasi-topologique; on pose $\hat{\pi}_o = \hat{\pi} / \hat{C}^\bullet_o$. Soit $(\mathcal{P}^*, K^\bullet, \kappa')$ l'espèce de morphismes associée à la catégorie quasi-topologique $(\hat{C}^\bullet, \hat{\pi})$ dans le §A. Soit $\hat{P}^\bullet$ la catégorie produit croisée correspondante, ψ sa projection canonique vers $\mathcal{P}^*$ et $\hat{S} = \psi^{-1}(\hat{\pi}_o . \mathcal{P} . \hat{\pi}_o)$. Le foncteur $\bar{\theta}$ et la domination λ vérifiant les hypothèses des théorèmes 8 et 9, il résulte du corollaire du théorème 9 l'existence d'une quasi-topologie canonique $\hat{\sigma}$ sur $\hat{S}$ telle que $(\hat{S}^\bullet, \hat{\sigma})$ soit une catégorie quasi-topologique.

THEOREME 10. *La catégorie quasi-topologique* $S(C^\bullet, \pi) = (S^\bullet, \sigma)$ *des sections locales de* $(C^\bullet, \pi)$ *est isomorphe à une sous-catégorie quasi-topologique de* $(\hat{S}^\bullet, \hat{\sigma})$.

PREUVE. Soit $\hat{s} = (U', s, U) \in S$. Nous associons à $\hat{s}$:

- l'application quasi-continue $\hat{s}_1 = (\hat{\pi}, s_1, \hat{\pi}_o)$, où

$$s_1(x) = s(x) \text{ si } x \in U, \qquad s_1(y) = a \text{ si } y \in \hat{C}_o^{\bullet} - U;$$

- l'application quasi-continue $\hat{s}_2 = (\hat{\pi}\ , s_2, \hat{\pi}_o)$, où

$$s_2(x) = x \text{ si } x \in U' \text{ et } s_2(y) = a \text{ si } y \in \hat{C}_o^{\bullet} - U';$$

- l'application quasi-continue $\hat{s}_3 = (\hat{\pi}, s_3, \hat{\pi}_o)$, où

$$s_3(x) = \beta s(x) \text{ si } x \in U \text{ et } s_3(y) = a \text{ si } y \in \hat{C}_o^{\bullet} - U.$$

La surjection $\hat{s} \to (\hat{s}_2, \hat{s}_3, \hat{s}_1)$ définit une bijection z de S sur une partie de $\hat{P}$. On vérifie facilement que $z(S) \subset \hat{S}$ et que z définit un isomorphisme de la catégorie $S^{\bullet}$ sur une sous-catégorie $S'^{\bullet}$ de la catégorie $\hat{S}^{\bullet}$ et un quasi-homéomorphisme de la quasi-topologie σ sur la quasi-topologie $\hat{\sigma}/S'$. ∎

En particulier, une topologie T s'identifie à la quasi-topologie π telle que les filtres quasi-convergents vers x soient les filtres qui convergent vers x dans T. Le théorème 10 appliqué en partant d'une catégorie topologique $(C^{\bullet}, T)$ (c'est-à-dire la quasi-topologie π est une topologie T) permet de retrouver la catégorie quasi-topologique $(S^{\bullet}, \sigma)$ des sections locales d'une catégorie topologique. Rappelons que cette catégorie n'est généralement pas une catégorie topologique; une condition suffisante pour que σ soit une topologie est que la topologie induite par T sur $C_o^{\bullet}$ soit localement compacte [6].

Bibliographie.

[1] *Catégories structurées,* Ann. Ec. Norm. Sup. 80 (1963), 349-426.

[2] *Structures quotient,* Comm. Math. Helv. 38 (1963), 219-283.

[3] *Structures quasi-quotient,* Math. Ann. 171 (1967), 293-363.

[4] *Introduction to the Theory of structured Categories,* Technical Report 10, Un. of Kansas (1966), 95 Pages.

[5] *Catégories et Structures,* Dunod (1965), Paris.

[6] *Catégories topologiques,* Proc. Neder. Akad. van Wetensch., Amsterdam (1965), 133-175.

[7] *Catégories structurées - Catégories différentiables,* Coll. Géom. Diff. Bucarest 1967 (à l'impression: Revue Roumaine Math. 1968).

[8] *Catégories ordonnées - Cohomologie-Holonomie,* Ann. Inst. Fourier 14,1 (1964), 205-268.

-:-:-:-:-:-:-

COURS DE TROISIEME CYCLE 1972-73
UNIVERSITE PARIS VII (Multigraphié Paris 1973)

/113/

ETUDE DES CATEGORIES DANS UNE CATEGORIE

par Andrée et Charles EHRESMANN

Le but de ce cours est de développer une théorie des catégories internes à une catégorie donnée H. Le plus souvent, H est munie d'un foncteur d'oubli p vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des ensembles. Une catégorie dans H, appelée catégorie *p-structurée*, revient alors à la donnée d'une catégorie C dont l'ensemble des morphismes est sous-jacent à une p-structure (= objet de H) s, et dont les applications source, but et composition se relèvent en des morphismes a, $b: s \to s$ et $k: s * s \to s$, où $s*s$ est un produit fibré de (a, b) dans H. Par exemple, les catégories topologiques ou différentiables (lorsque p est le foncteur d'oubli de la catégorie des topologies ou des variétés différentiables) interviennent de façon essentielle en Géométrie Différentielle; elles sont à l'origine de la notion générale.

En l'absence de p, une catégorie dans H devient un foncteur d'une sous-catégorie U_F de la duale de la catégorie simpliciale («esquisse de catégorie») vers H, commutant avec certains produits fibrés. Elle est déterminée par la donnée des «morphismes» source, but et composition (n° I). Si H est à produits fibrés, les catégories dans H correspondent aux structures de catégorie sur un objet de H (au sens de Grothendieck), i.e. à certains foncteurs contravariants de H vers la catégorie des catégories (II). Les transformations naturelles dans H forment une 2-catégorie représentable, une représentation de F étant la catégorie interne de ses quatuors (III). Enfin (IV) diverses constructions universelles de catégories dans H sont indiquées; elles reposent sur l'existence de «sous-catégories internes engendrées» lorsque H est munie d'un «bon» foncteur vers $\mathfrak{M}$.

Les notations sont celles du cours «*Algèbre*», C.D.U., 1967. Si H est une catégorie, H_0 est la classe de ses unités, H^* sa duale.

1. DEFINITION DES CATEGORIES INTERNES.

A. Catégorie simpliciale.

Un entier naturel n est considéré comme étant l'ensemble

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

des entiers strictement plus petits ; en particulier, $0 = \emptyset$ et $1 = \{0\}$. On munit n de l'ordre usuel : $0 < 1 < \dots < n-1$.

Nous désignerons par :

δ_i^n, pour $i \leq n$, l'application croissante de n vers $n+1$ ne prenant pas pas la valeur i, c'est-à-dire telle que

$$\delta_i^n(j) = j \;\text{ si }\; j < i, \quad \delta_i^n(j') = j'+1 \;\text{ si }\; i \leq j' < n\;;$$

σ_i^n, pour $i < n$, l'application croissante de $n+1$ vers n prenant deux fois la valeur i, c'est-à-dire :

$$\sigma_i^n(j) = j \;\text{ si }\; j \leq i, \quad \sigma_i^n(j') = j'-1 \;\text{ si }\; i < j' \leq n.$$

DEFINITION. On appelle *catégorie simpliciale* la catégorie Δ ayant pour objets les entiers naturels n tels que $n \neq 0$, et pour morphismes les applications croissantes entre ces entiers.

REMARQUE. Dans certains textes, on appelle catégorie simpliciale la catégorie $\bar{\Delta}$ formée des applications croissantes entre tous les entiers ;
1+ donc $\bar{\Delta}$ admet Δ pour sous-catégorie pleine et 0 pour objet initial.

Δ est engendrée par l'ensemble D formé

des δ_i^n, où $i \leq n$, des σ_i^n, où $i < n$,

n étant un entier non nul. Plus précisément, si L est la catégorie libre des chemins propres du sous-graphe de Δ engendré par D, on montre que Δ est isomorphe à la catégorie quasi-quotient de L par la relation :

$$\begin{array}{lll}
\delta_i^{n+1} . \delta_j^n & \sim \delta_{j+1}^{n+1} . \delta_i^n & \text{si } i \leq j, \\
\sigma_j^n . \sigma_i^{n+1} & \sim \sigma_i^n . \sigma_{j+1}^{n+1} & \text{si } i \leq j, \\
\sigma_j^{n+1} . \delta_i^{n+1} & \sim \begin{cases} \delta_i^n . \sigma_{j-1}^n \\ n+1 \\ \delta_{i-1}^n . \sigma_j^n \end{cases} & \begin{array}{l} \text{si } i < j \\ \text{si } i = j \text{ et } i = j+1 \\ \text{si } j+1 < i. \end{array}
\end{array}$$

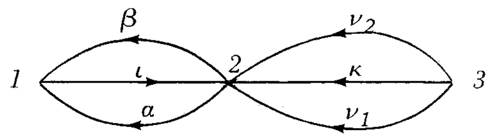
DEFINITION. Soit H une catégorie. On appelle *objet simplicial dans* H un foncteur de la duale Δ^* de Δ vers H. On appelle *application simpliciale dans* H une transformation naturelle entre objets simpliciaux dans H.

En particulier, si H est la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications associée à un univers $\mathfrak{U}$, un objet simplicial (resp. une application simpliciale) dans $\mathfrak{M}$ est appelé simplement objet simplicial (resp. application simpliciale). La Topologie algébrique est essentiellement l'étude de la catégorie des applications simpliciales. 1

B. Esquisse des catégories.

Soit U^* la sous-catégorie de Δ formée des morphismes de la sous-catégorie pleine de Δ ayant pour objets 1 et 2, des morphismes de 1 et 2 vers 3 et de 3. Soit U_F^* la sous-catégorie de Δ ayant pour morphismes les morphismes de la sous-catégorie pleine de Δ ayant pour objets 1, 2 et 3, ainsi que les morphismes de 1, 2, 3 vers 4 et l'unité 4. Nous désignons par U et U_F les catégories duales de U^* et de U_F^*.

- Description de U : La catégorie U est engendrée par le graphe orienté dessiné ci-dessous :



où on écrit :

$$\alpha = \delta_1^1, \quad \beta = \delta_0^1, \quad \iota = \sigma_0^1, \quad \nu_1 = \delta_0^2, \quad \nu_2 = \delta_2^2, \quad \kappa = \delta_1^2 .$$

On a :

$$\alpha \cdot \nu_1 = \beta \cdot \nu_2, \quad \alpha \cdot \nu_2 = \alpha \cdot \kappa, \quad \beta \cdot \nu_1 = \beta \cdot \kappa, \quad \alpha \cdot \iota = 1 = \beta \cdot \iota ;$$

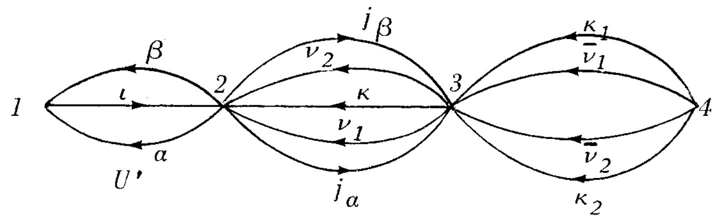
il s'ensuit que ι est à la fois un noyau de $(2, \iota \cdot \alpha)$ et de $(2, \iota \cdot \beta)$.

- Description de U_F : La catégorie U_F contient le graphe U' suivant, où

$$j_\alpha = \sigma_0^2, \quad j_\beta = \sigma_1^2, \quad \bar{\nu}_1 = \delta_0^3, \quad \bar{\nu}_2 = \delta_3^3, \quad \kappa_1 = \delta_1^3, \quad \kappa_2 = \delta_2^3 ;$$

elle est engendrée par U' et les relations :

a) U est une sous-catégorie de U_F et on a $\nu_1 \cdot \bar{\nu}_2 = \nu_2 \cdot \bar{\nu}_1$;



b) $((\alpha, \nu_1), (\beta, \nu_2))$ est un produit fibré naturalisé et, relativement à celui-ci:

$$j_\alpha = [2, \iota . \alpha] \quad (\text{c'est-à-dire } \nu_1 . j_\alpha = 2, \; \nu_2 . j_\alpha = \iota . \alpha),$$

$$j_\beta = [\iota . \beta, 2], \quad \kappa_1 = [\nu_1 . \bar{\nu}_1, \kappa . \bar{\nu}_2], \quad \kappa_2 = [\kappa . \bar{\nu}_1, \nu_2 . \bar{\nu}_2].$$

c) $\kappa . j_\alpha = 2 = \kappa . j_\beta$ (unitarité); $\kappa . \kappa_1 = \kappa . \kappa_2$ (associativité).

Ces conditions caractérisent parfaitement U_F comme catégorie quasi-quotient de la catégorie libre sur le graphe U'.

- Enfin on notera $\hat{U}$ la catégorie engendrée par U' et les relations a et b précédentes (mais non c); elle admet U_F pour catégorie quotient
1 et U' pour sous-graphe; le foncteur canonique de $\hat{U}$ sur U_F est noté ρ.

C. Catégories dans H.

Soit H une catégorie.

2 DEFINITION. On appelle *catégorie interne à H* (ou *catégorie structurée dans H*, abrégé en *catégorie dans H*) un foncteur F de U_F vers H tel que:

$$((F(\alpha), F(\nu_1)), (F(\beta), F(\nu_2)))$$

et

$$((F(\nu_2), F(\bar{\nu}_1)), (F(\nu_1), F(\bar{\nu}_2)))$$

soient des produits fibrés naturalisés dans H.

CONVENTION. Pour simplifier les formules et sauf indication contraire, si F est une catégorie dans H nous poserons:

$$s = F(2), \quad s_0 = F(1), \quad s * s = F(3),$$
$$a = F(\alpha), \quad b = F(\beta), \quad k = F(\kappa), \quad i = F(\iota),$$
$$v_1 = F(\nu_1), \quad v_2 = F(\nu_2), \quad w_1 = F(\bar{\nu}_1), \quad w_2 = F(\bar{\nu}_2),$$
$$j_a = F(j_\alpha), \quad j_b = F(j_\beta), \quad k_1 = F(\kappa_1), \quad k_2 = F(\kappa_2).$$

Si F' est une autre catégorie dans H, nous utiliserons des notations analogues, mais en ajoutant un $'$ à côté de chacun des symboles s, a,...

La proposition suivante sera utilisée plus loin pour montrer qu'une catégorie dans H peut être reconstruite «par limites» à partir de ses restrictions à différents sous-graphes de U_F, lorsque H a assez de limites.

PROPOSITION 1. *Soit $F: U_F \to H$ une catégorie dans H.*

1° Si $u = 1$, 2 ou 3, il existe $c_u \in H$ tel que $F(u)$ soit la source d'un noyau de $(F(u_{i+1}), c_u)$.

2° s_0 est un produit fibré de (j_a, j_b) et s un produit fibré de (j'_a, j'_b) où j'_a et j'_b sont respectivement les crochets

$$[s * s,\ j_a . v_2] \quad et \quad [j_b . v_1,\ s * s]$$

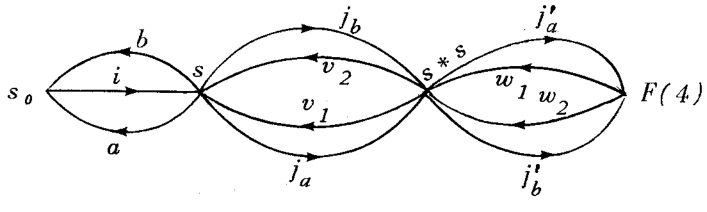
relatifs au produit fibré naturalisé $((v_2, w_1), (v_1, w_2))$.

3° Si s_5 est un produit fibré de $(j'_a . w_2, j'_a . w_1)$ dans H, il existe des éléments j''_a et j''_b be $s_5 . H . F(4)$ tels que $s * s$ soit un produit fibré de (j''_a, j''_b). 1+

Δ. 1° i est inverse à droite de a, car ι est un inverse à droite de a dans U_F ; donc i est un noyau de $(s_0, i.a)$. Comme j_a admet v_1 pour inverse à gauche, j_a est un noyau de $(s * s, j_a . v_1)$. Les égalités

$$v_2 . F(3) = v_2 = v_1 . j_a . v_2, \quad v_2 . j_b . v_1 = v_1 = v_1 . F(3)$$

assurent l'existence des crochets j'_a et j'_b. Puisque j'_a et j'_b admettent respectivement w_1 et w_2 pour inverses à gauche, j'_a est un noyau de $(F(4), j'_a . w_1)$ et j'_b un noyau de $(F(4), j'_b . w_2)$.



2° a) Montrons que $((j_a, i), (j_b, i))$ est un produit fibré naturalisé. En effet, $j_a = [s, i.a]$ et $j_b = [i.b, s]$, de sorte que

$$j_a . i = [i, i.a.i] = [i, i] = [i.b.i, i] = j_b . i.$$

Si f et f' sont deux morphismes de H tels que $j_a . f = j_b . f'$, on obtient

$$f = v_1 . j_a . f = v_1 . j_b . f' = i . b . f',$$
$$f' = v_2 . j_b . f' = v_2 . j_a . f = i . a . f,$$

d'où $a . f = a . i . b . f' = b . f'$. Ainsi, i étant un monomorphisme, $a . f = b . f'$ est l'unique élément f'' tel que $f = i . f''$ et $f' = i . f''$.

b) Montrons que $((j'_a, j_b), (j'_b, j_a))$ est un produit fibré naturalisé. On a $j'_a . j_b = j'_b . j_a$, car, par définition de j'_a comme crochet,

$$w_1 . j'_a . j_b = j_b = j_b . v_1 . j_a = w_1 . j'_b . j_a,$$
$$w_2 . j'_a . j_b = j_a . v_2 . j_b = j_a = w_2 . j'_b . j_a .$$

Si g et g' sont des morphismes de H vérifiant $j'_a . g = j'_b . g'$, on trouve

$$g = w_1 . j'_a . g = w_1 . j'_b . g' = j_b . v_1 . g',$$
$$g' = w_2 . j'_b . g' = w_2 . j'_a . g = j_a . v_2 . g,$$

ce qui implique

$$v_1 . g' = v_1 . j_a . v_2 . g = v_2 . g .$$

Donc $v_1 . g'$ est l'unique élément g'' tel que $g = j_b . g''$ et $g' = j_a . g''$.

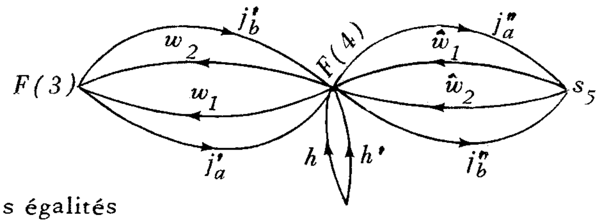
c) Supposons qu'il existe un produit fibré naturalisé dans H

$$((j'_a . w_2, \hat{w}_1), (j'_a . w_1, \hat{w}_2)) .$$

Alors $((w_2, \hat{w}_1), (w_1, \hat{w}_2))$ est aussi un produit fibré naturalisé, j'_a étant un monomorphisme (partie a). Relativement à celui-ci, il existe des crochets $j''_a = [F(4), j'_a . w_2]$ et $j''_b = [j'_b . w_1, F(4)]$, en vertu des égalités

$$w_2 . F(4) = w_2 = w_1 . j'_a . w_2 \quad \text{et} \quad w_2 . j'_b . w_1 = w_1 = w_1 . F(4).$$

Montrons que $((j''_a, j'_b), (j''_b, j'_a))$ est un produit fibré naturalisé dans H.



En effet, les égalités

$$\hat{w}_1 . j''_a . j'_b = j'_b = j'_b . w_1 . j'_a = \hat{w}_1 . j''_b . j'_a,$$
$$\hat{w}_2 . j''_a . j'_b = j'_a . w_2 . j'_b = j'_a = \hat{w}_2 . j''_b . j'_a$$

impliquent $j''_a . j'_b = j''_b . j'_a$. Si h et h' sont des éléments de H tels que $j''_a . h = j''_b . h'$, on trouve

$$h = \hat{w}_1 . j''_a . h = \hat{w}_1 . j''_b . h' = j'_b . w_1 . h',$$
$$h' = \hat{w}_2 . j''_b . h' = \hat{w}_2 . j''_a . h = j'_a . w_2 . h,$$

c'est-à-dire

$$w_1 . h' = w_1 . j'_a . w_2 . h = w_2 . h$$

est l'unique élément h'' vérifiant $h = j'_b . h''$ et $h = j'_a . h''$. ∇

PROPOSITION 2. *Soit G un foncteur de U vers H tel que*

$$((G(\alpha), G(\nu_1)), (G(\beta), G(\nu_2)))$$

soit un produit fibré naturalisé dans H. Si $((G(\nu_2), w_1), (G(\nu_1), w_2))$ est un produit fibré naturalisé dans H, il existe un et un seul foncteur $\bar{F} : \hat{U} \to H$ tel que $\bar{F}$ ait G pour restriction à U et que $\bar{F}(\bar{\nu}_1) = w_1$ et $\bar{F}(\bar{\nu}_2) = w_2$. De plus G est la restriction d'une catégorie F dans H ssi

(1) $\bar{F}(\kappa) . \bar{F}(j_\alpha) = \bar{F}(2) = \bar{F}(\kappa) . \bar{F}(j_\beta)$, $\bar{F}(\kappa) . \bar{F}(\kappa_1) = \bar{F}(\kappa) . \bar{F}(\kappa_2)$. 1

Δ. 1° Puisque $j_\alpha = [2, \iota . \alpha]$, il existe un crochet $[G(2), G(\iota . \alpha)]$ relativement au produit fibré de $(G(\alpha), G(\beta))$; nous poserons:

$$j_a = [G(2), G(\iota . \alpha)].$$

De même, il existe des crochets relativement à ce produit fibré

$$j_b = [G(\iota . \beta), G(2)], \quad k_1 = [G(\nu_1) . w_1, G(\kappa) . w_2],$$
$$k_2 = [G(\kappa) . w_1, G(\nu_2) . w_2],$$

car les égalités

$$\alpha . \nu_1 = \beta . \nu_2, \quad \beta . \nu_1 = \beta . \kappa \text{ et } \alpha . \kappa = \alpha . \nu_2$$

entraînent

$$G(\alpha) . G(\nu_1) . w_1 = G(\beta) . G(\nu_2) . w_1 = G(\beta) . G(\nu_1) . w_2 =$$
$$= G(\beta) . G(\kappa) . w_2,$$
$$G(\alpha) . G(\kappa) . w_1 = G(\alpha) . G(\nu_2) . w_1 = G(\alpha) . G(\nu_1) . w_2 =$$
$$= G(\beta) . G(\nu_2) . w_2 .$$

On montre facilement qu'il existe un et un seul foncteur $\bar{F} : \hat{U} \to H$ vérifiant les conditions voulues et tel que

$$\bar{F}(j_\alpha) = j_a, \quad \bar{F}(j_\beta) = j_b, \quad \bar{F}(\kappa_1) = k_1, \quad \bar{F}(\kappa_2) = k_2.$$

Dire que ce foncteur vérifie les égalités (1) signifie qu'il existe un foncteur $F: U_F \to H$ tel que $\bar{F} = F.\rho$, et F est une catégorie dans H.

2° Soit $F: U_F \to H$ un foncteur et posons $F' = F.\rho: \hat{U} \to H$; les foncteurs F et F' ont la même restriction à U'. Supposons que F soit une catégorie dans H ayant G pour restriction à U. Puisque

$$((G(\nu_2), F(\bar{\nu}_1)), (G(\nu_1), F(\bar{\nu}_2)))$$

est un produit fibré naturalisé et que F et F' prennent la même valeur sur $\bar{\nu}_1$ et $\bar{\nu}_2$, F' est le foncteur $\bar{F}$ associé plus haut à G. Comme F vérifie les conditions (1), F' les vérifie aussi. ∇

COROLLAIRE. *Si F et F' sont des catégories dans H telles que F et F' aient la même restriction G à U, alors F est équivalent à F'.*

Δ. Comme on a les deux produits fibrés naturalisés

$$((v_2, w_1), (v_1, w_2)) \quad \text{et} \quad ((v_2, w_1'), (v_1, w_2'))$$

(avec la convention ci-dessus), il existe un unique inversible g tel que

$$w_1'.g = w_1 \quad \text{et} \quad w_2'.g = w_2,$$

d'où une équivalence t de F' vers un foncteur $F'': U_F \to H$ ayant même restriction à U que F', telle que $t(4) = g$. Les foncteurs $F.\rho$ et $F''.\rho$ ont la même restriction à $U \cup \{\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2\}$, donc ils sont égaux d'après la Proposition 2. Il s'ensuit que $F = F''$ et que t est une équivalence de F' vers F. ∇

La Proposition 2 peut être précisée comme suit (et le résultat sera utilisé plus loin) en utilisant la sous-catégorie U'' de U formée des morphismes de 3 et 2 vers 2.

PROPOSITION 3. *Supposons H à produits fibrés finis. Soit $G': U'' \to H$ un foncteur tel que*

$$((G'(\iota.\alpha), G'(\nu_1)), (G'(\iota.\beta), G'(\nu_2)))$$

soit un produit fibré naturalisé. Alors G' s'étend en un foncteur G de U

vers H *et en un foncteur* $\bar{G}$ *de* $\hat{U}$ *vers* H *tel que*

$$(G(\nu_1), \bar{G}(\bar{\nu}_2)), (G(\nu_2), \bar{G}(\bar{\nu}_1)))$$

soit un produit fibré naturalisé. De plus G *et* $\bar{G}$ *sont déterminés à une équivalence près.* 1

Δ. Posons $G'(\nu_i) = v_i$, $G'(\kappa) = k$, $G'(\iota.\alpha) = \bar{a}$, $G'(\iota.\beta) = \bar{b}$. Puisque

$$\bar{a}.s = \bar{a} = \bar{b}.\bar{a} \quad \text{et} \quad \bar{a}.\bar{b} = \bar{b} = \bar{b}.s,$$

il existe des crochets $j_a = [s, \bar{a}]$ et $j_b = [\bar{b}, s]$ relativement au produit fibré $((\bar{a}, v_1), (\bar{b}, v_2))$. Comme H est à produits fibrés, il existe un produit fibré $((j_a, i), (j_b, i'))$, et l'on a $i = i'$ car

$$i = s.i = k.j_a.i = k.j_b.i' = i'.$$

Il existe des crochets

$$a = [\bar{a}, \bar{a}] \quad \text{et} \quad b = [\bar{b}, \bar{b}]$$

relativement à $((j_a, i), (j_b, i))$, étant donné que les relations

$$v_1.j_a.\bar{a} = \bar{a} = \bar{b}.\bar{a} = v_1.j_b.\bar{a} \quad \text{et} \quad v_2.j_a.\bar{a} = \bar{a} = v_2.j_b.\bar{a}$$

entraînent $j_a.\bar{a} = j_b.\bar{a}$ et que, de même, on trouve $j_a.\bar{b} = j_b.\bar{b}$. On obtient un foncteur $G: U \to H$ étendant G' en posant

$$G(\iota) = i, \quad G(\alpha) = a, \quad G(\beta) = b.$$

- Si G_1 est un foncteur de U vers H étendant G, alors $\hat{\iota} = G_1(\iota)$ est inverse à droite de $G_1(\alpha)$, de sorte que c'est un noyau de $(\bar{a}, G(2))$, et qu'il existe un inversible unique $t(1)$ vérifiant $\hat{\iota}.t(1) = i$. On obtient une équivalence t de G vers G_1 en posant de plus

$$t(2) = G(2) \quad \text{et} \quad t(3) = G(3).$$

- L'existence et l'unicité «à équivalence près» d'un foncteur $\bar{G}: \hat{U} \to H$ prolongeant G résulte de la Proposition 2. ∇

REMARQUE. On montre de même, en s'inspirant de la Proposition 1, que si H est à produits fibrés ou à noyaux de couples, tout foncteur de la sous-catégorie pleine de Δ^* ayant pour seul objet 4 s'étend en un foncteur de $\hat{U}$ vers H. 2

D. Foncteurs dans H.

On désigne toujours par H une catégorie.

DEFINITION. On appelle *foncteur interne à H* ou *structuré dans H* (en abrégé foncteur dans H) une transformation naturelle entre catégories dans H.

Nous désignerons par $F(H)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathfrak{N}(H, U_F)$ (des transformations naturelles entre foncteurs de U_F dans H) ayant pour objets les catégories dans H. C'est une sous-catégorie saturée de $\mathfrak{N}(H, U_F)$, un foncteur équivalent à une catégorie dans H étant une catégorie dans H.

Soit $\boxminus H$ la catégorie latérale des quatuors de H ; notons $a^{\boxminus}$ et $b^{\boxminus}$ les foncteurs de $\boxminus H$ vers H appliquant le quatuor

$$(y', x', x, y) \text{ respectivement sur } y \text{ et sur } y'.$$

PROPOSITION 4. *Il existe une bijection m' de l'ensemble des foncteurs dans H sur l'ensemble des catégories T dans $\boxminus H$ telles que $a^{\boxminus} T$ et $b^{\boxminus} T$ soient des catégories dans H.*

Δ. Soit m la bijection canonique de l'ensemble des transformations naturelles entre foncteurs de U_F vers H sur l'ensemble des foncteurs de U_F vers $\boxminus H$ qui associe à $t: F \to F'$ le foncteur $T: U_F \to \boxminus H$ tel que

$$T(x) = (F'(x), t(u'), t(u), F(x)) \quad \text{si} \quad x \in u'.U_F.u.$$

- Si T est une catégorie dans $\boxminus H$ et si $a^{\boxminus} T = F$ et $b^{\boxminus} T = F'$ sont des catégories dans H, alors $m^{-1}(T): F \to F'$ est un foncteur dans H.
- Si t est un foncteur dans H, alors $T = m(t)$ est une catégorie dans $\boxminus H$: en effet, si q, $\hat{q}$, q' et $\hat{q}'$ sont des quatuors de H tels que $q \boxminus \hat{q} = q' \boxminus \hat{q}'$ et si

$$((a^{\boxminus}(q), a^{\boxminus}(\hat{q})), (a^{\boxminus}(q'), a^{\boxminus}(\hat{q}'))), \quad ((b^{\boxminus}(q), b^{\boxminus}(\hat{q})), (b^{\boxminus}(q'), b^{\boxminus}(\hat{q}')))$$

sont des produits fibrés naturalisés dans H, alors $((q, \hat{q}), (q', \hat{q}'))$ est un produit fibré naturalisé dans $\boxminus H$. Par suite m admet pour restriction la bijection m' cherchée. ∇

COROLLAIRE. *Si H est une catégorie à produits fibrés finis, il existe* *une bijection canonique m' de l'ensemble des foncteurs dans H sur l'ensemble des catégories dans $\boxminus H$.*

Δ. Dans ce cas, tout produit fibré naturalisé $((q,\hat{q}),(q',\hat{q}'))$ dans $\boxminus H$ est transformé par $a^{\boxplus}$ et par $b^{\boxplus}$ en des produits fibrés naturalisés dans H. Par suite, si T est une catégorie dans $\boxminus H$, les foncteurs $a^{\boxplus}T$ et $b^{\boxplus}T$ sont des catégories dans H. Ainsi la bijection m' de la proposition a pour image l'ensemble des catégories dans $\boxminus H$. ∇

PROPOSITION 5. *Soit F et F' des catégories dans H ; soit f un élément de $F'(2).H.F(2)$ vérifiant*

$$i'.a'.f = f.i.a, \quad i'.b'.i = f.i.b.$$

Alors il existe un morphisme f' tel que $v_1'.f' = f.v_1$, $v_2'.f' = f.v_2$. Il existe un foncteur $t: F \to F'$ dans H tel que $t(2) = f$ ssi $k'.f' = f.k$. Dans ce cas, $t(1) = a'.f.i$ et $t(3) = f'$. 1

Δ. Les égalités

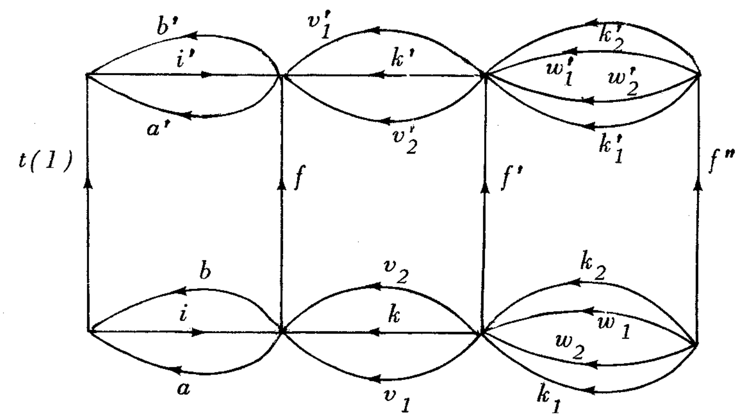
$$i'.a'.f.v_1 = f.i.a.v_1 = f.i.b.v_2 = i'.b'.f.v_2$$

entraînent $a'.f.v_1 = b'.f.v_2$, de sorte qu'il existe un crochet

$$f' = [f.v_1, f.v_2] \quad (\text{c'est-à-dire } v_1'.f' = f.v_1 \text{ et } v_2'.f' = f.v_2)$$

relativement au produit fibré naturalisé $((a',v_1'),(b',v_2'))$. Supposons de plus que $k'.f' = f.k$ et posons

$$t'(1) = a'.f.i, \quad t'(2) = f, \quad t'(3) = f'.$$



1° Désignons par $T'(x)$ le quadruplet

$$(F'(x), t'(u'), t'(u), F(x)), \quad \text{pour tout} \quad x \in u'.U.u.$$

On définit ainsi un foncteur $T': U \to \boxminus H$. En effet, comme U est engendré par $\{\alpha, \beta, \iota, \nu_1, \nu_2, \kappa\}$, il suffit de vérifier que $T'(x)$ est un quatuor lorsque x est l'un de ces générateurs. Or:

- $T'(\nu_1)$ et $T'(\nu_2)$ sont des quatuors, par définition de f',
- $T'(\kappa)$ est un quatuor par hypothèse,
- $T'(\iota)$ est un quatuor, vu les égalités:

$$i'.t'(1) = i'.a'.f.i = f.i.a.i = f.i,$$

- $T'(a)$ et $T'(\beta)$ sont des quatuors, car

$$t'(1).a = a'.f.i.a = a'.i'.a'.f = a'.f,$$
$$t'(1).b = a'.f.i.b = a'.i'.b'.f = b'.f.$$

2° Puisque $((v'_2, w'_1),(v'_1, w'_2))$ est un produit fibré dans H, les égalités

$$v'_2.f'.w_1 = f.v_2.w_1 = f.v_1.w_2 = v'_1.f'.w_2$$

assurent l'existence d'un crochet $f'' = [f'.w_1, f'.w_2]$. En posant

$$W_1 = (w'_1, f', f'', w_1) \quad \text{et} \quad W_2 = (w'_2, f', f'', w_2),$$

on obtient un produit fibré naturalisé $((T'(\nu_2), W_1),(T'(\nu_1), W_2))$ dans $\boxminus H$. Il résulte de la proposition 2 que le foncteur $T': U \to \boxminus H$ s'étend d'une manière unique en un foncteur

$$\bar{T}: \hat{U} \to \boxminus H \quad \text{tel que} \quad \bar{T}(\bar{\nu}_1) = W_1 \quad \text{et} \quad \bar{T}(\bar{\nu}_2) = W_2.$$

Comme $a^{\boxplus}\bar{T}$ étend la restriction $a^{\boxplus}T'$ de F à U et applique $\bar{\nu}_1$ sur w_1 et $\bar{\nu}_2$ sur w_2, il est identique au foncteur $\bar{F} = F.\rho: \hat{U} \to H$ déduit de F (Proposition 2). De même, $b^{\boxplus}\bar{T}$ et F' ont la même restriction à U. Comme $\bar{F}$ et $\bar{F}'$ vérifient la condition (1) de la Proposition 2, il en est de même pour $\bar{T}$, de sorte que T' se prolonge en un foncteur $T: U_F \to \boxminus H$ pour lequel $a^{\boxplus}T$ et $b^{\boxplus}T$ sont les catégories F et F' dans H. La Proposition 4 montre que la transformation naturelle $t: F \to F'$ canoniquement associée à T est un foncteur dans H. Or on a

$$t(1) = t'(1) = a'.f.i, \quad t(2) = t'(2) = f, \quad t(3) = t'(3) = f'. \qquad \nabla$$

Soit p un foncteur de H vers une catégorie K. Si C est une catégorie, notons $\mathfrak{N}(p, C)$ le foncteur de $\mathfrak{N}(H, C)$ vers $\mathfrak{N}(K, C)$ associant à une transformation naturelle $t: F \to F'$ la transformation naturelle

$$pt: p.F \to p.F': C \Rightarrow K.$$

PROPOSITION 6. *Si $p: H \to K$ est un foncteur compatible avec les produits fibrés finis, le foncteur $\mathfrak{N}(p, U_F)$ admet pour restriction un foncteur de $F(H)$ vers $F(K)$. Ce foncteur est fidèle si* p *est fidèle.*

Δ. Si F est une catégorie dans H, alors $p.F$ est évidemment une catégorie dans K, puisque p transforme les produits fibrés

$$((a, v_1), (b, v_2)) \quad \text{et} \quad ((v_2, w_1), (v_1, w_2))$$

en des produits fibrés dans K. Par suite, si $t: F \to F'$ est un foncteur dans H, $pt: p.F \to p.F'$ est un foncteur dans K. Ainsi $\mathfrak{N}(p, U_F)$ admet pour restriction un foncteur $\hat{p}: F(H) \to F(K)$. Ce foncteur est fidèle dès que p est fidèle, $\mathfrak{N}(p, U_F)$ étant alors fidèle. ∇

E. Catégories dans $\mathfrak{M}$.

Soit $\mathfrak{M}$ la catégorie des applications entre ensembles appartenant à un univers $\mathfrak{U}$.

PROPOSITION 7. *La catégorie $F(\mathfrak{M})$ des foncteurs dans la catégorie $\mathfrak{M}$ est équivalente à la catégorie $\mathfrak{F}$ des foncteurs associée à $\mathfrak{U}$.* 1

Δ. Soit K une catégorie dont l'ensemble $\underline{K}$ des morphismes appartient à l'univers $\mathfrak{U}$. On définit un foncteur $G: U \to \mathfrak{M}$ en posant:

$$G(1) = K_0, \quad G(2) = \underline{K}, \quad G(3) = K * K$$

(classe des couples composables dans K) et en appliquant

ι sur l'insertion de K_0 dans $\underline{K}$,

α et β sur les applications source et but de K,

κ sur la loi de composition de K,

ν_1, ν_2 sur les projections canoniques de $K * K$ dans K.

Ce foncteur s'étend (Proposition 2) en un foncteur $\bar{F}: \hat{U} \to \mathfrak{M}$ tel que $\bar{F}(\bar{\nu}_1)$ et $\bar{F}(\bar{\nu}_2)$ soient les projections du produit fibré canonique des applications

$(G(\nu_2), G(\nu_1))$ vers $K*K$. Ce foncteur $\bar{F}$ remplit la condition (1) de la Proposition 2 qui exprime que K_0 est l'ensemble des unités et que la composition est associative. Par suite G se prolonge en un foncteur F de U_F vers $\mathfrak{M}$ qui est une catégorie dans $\mathfrak{M}$ telle que $\bar{F} = F.\rho$. Nous poserons $\eta'(K) = F$.

2° Si K et C sont des catégories, une application f de $\underline{K}$ dans $\underline{C}$ définit un foncteur de K vers C ssi f est compatible avec les applications source, but et loi de composition, i. e. ssi f vérifie les conditions de la Proposition 5 relativement aux catégories dans $\mathfrak{M}$:

$$F = \eta'(K) \quad \text{et} \quad F' = \eta'(C).$$

Ainsi on définit un foncteur $\eta' : \mathfrak{F} \to F(\mathfrak{M})$ associant au foncteur (C, f, K) la transformation naturelle $t : \eta'(K) \to \eta'(C)$ correspondant à f.

3° Le foncteur η' est évidemment injectif. Pour montrer que η' définit une équivalence de $\mathfrak{F}$ vers $F(\mathfrak{M})$, il suffit de montrer que toute catégorie F dans $\mathfrak{M}$ est équivalente à un foncteur de la forme $\eta'(C)$. En effet, posons $\underline{C} = F(2)$. Comme i est une injection, il existe une bijection g_0 de $F(1)$ sur une partie C_0 de $\underline{C}$ telle que $i = \hat{\imath}.g_0$, où $\hat{\imath}$ est l'insertion de C_0 dans $\underline{C}$. Si $((a,\hat{v}_1),(b,\hat{v}_2))$ est le produit fibré canonique dans $\mathfrak{M}$, comme par hypothèse $((a,v_1),(b,v_2))$ est aussi un produit fibré dans $\mathfrak{M}$, il existe une unique bijection g' telle que

$$\hat{v}_1.g' = v_1 \quad \text{et} \quad \hat{v}_2.g' = v_2.$$

On vérifie que $(\underline{C}, k.g'^{-1})$ est une catégorie C et qu'il existe une équivalence $\theta : F \to \eta'(C)$ vérifiant

$$\theta(1) = g_0, \quad \theta(2) = \underline{C}, \quad \theta(3) = g'.$$

On en déduit une équivalence $\eta : F(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{F}$ définie par

$$\eta(F) = C \quad \text{et} \quad \eta(t) = (\eta(F'), t(2), \eta(F))$$

pour tout foncteur $t: F \to F'$ dans $\mathfrak{M}$. ∇

COROLLAIRE. *$\mathfrak{F}$ est isomorphe à la sous-catégorie pleine $F'(\mathfrak{M})$ de $F(\mathfrak{M})$ ayant pour objets les foncteurs F de U_F vers $\mathfrak{M}$ tels que*

$$((a,v_1),(b,v_2)) \quad \textit{et} \quad ((v_2,w_1),(v_1,w_2))$$

soient des produits fibrés naturalisés canoniques et que $F(\iota)$ soit une insertion, noyau canonique de $(F(2), i.a)$ dans $\mathfrak{M}$.

Δ. Pour un tel F, la catégorie $\eta(F)$ construite ci-dessus est de la forme $(\underline{C}, k)$, car g_0 et g' sont des identités. Ainsi $F'(\mathfrak{M})$ est l'image de $\mathfrak{F}$ par η', et la restriction de η' à $F'(\mathfrak{M})$ est un isomorphisme. ∇

DEFINITION. Les équivalences η et η' construites pour prouver la Proposition 7 sont appelées *équivalences canoniques* respectivement de $F(\mathfrak{M})$ vers $\mathfrak{F}$ et de $\mathfrak{F}$ vers $F(\mathfrak{M})$. La catégorie $\eta(F)$ associée à une catégorie F dans $\mathfrak{M}$ est dite *catégorie déterminée par* F.

F. Catégories structurées strictes.

Soit H une catégorie à produits fibrés finis, munie d'une application produit fibré naturalisé μ (qui associe à deux morphismes de même but un produit fibré naturalisé de ces morphismes dans H) et d'une application noyau partielle μ' associant à deux morphismes de même source et de même but ayant un noyau dans H un tel noyau «canonique».

DEFINITION. On appelle *catégorie dans* (H, μ, μ') un foncteur $F: U_F \to H$ tel que:

$$((F(\alpha), F(\nu_1)), (F(\beta), F(\nu_2))) = \mu(F(\alpha), F(\beta)),$$
$$((F(\nu_2), F(\bar{\nu}_1)), (F(\nu_1), F(\bar{\nu}_2))) = \mu(F(\nu_2), F(\nu_1)),$$
$$F(\iota) = \mu'(F(2), F(\iota.\alpha)).$$

Une transformation naturelle entre catégories dans (H, μ, μ') est appelée *foncteur dans* (H, μ, μ').

On note $F(H, \mu, \mu')$ la sous-catégorie pleine de $F(H)$ ayant pour objets les catégories dans (H, μ, μ').

EXEMPLE. Si H est la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications, munie de son application produit fibré naturalisé $\mu_{\mathfrak{M}}$ et de son application noyau naturalisé canonique $\mu'_{\mathfrak{M}}$, une catégorie dans $(\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}}, \mu'_{\mathfrak{M}})$ s'identifie à une catégorie (Corollaire précédent). Une catégorie F dans $(\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}}, \emptyset)$, où $F(2)$ n'est pas le noyau canonique de $(F(2), F(\iota.\alpha))$ s'identifie à une catégorie munie d'une classe d'objets $F(1)$.

Supposons que H soit une catégorie à produits fibrés finis et que $p: H \to \mathfrak{M}$ soit un foncteur d'homomorphismes saturé, compatible avec les produits fibrés finis et avec les noyaux. Il existe une unique application produit fibré naturalisé μ sur H telle que

$$((p(h),p(v)),(p(h'),p(v'))) = \mu_{\mathfrak{M}}(p(h),p(h'))$$
$$\text{si } ((h,v),(h',v')) = \mu(h,h'),$$

et une plus grande application noyau partielle μ' sur H vérifiant

$$p(\mu'(h,h')) = \mu'_{\mathfrak{M}}(p(h),p(h')).$$

DEFINITION. On appelle *catégorie p-structurée* un couple (C,s) d'une catégorie C et d'un objet s de H tel que $p(s) = C$, vérifiant les conditions suivantes:

1° Il existe un objet s_0 de H et des morphismes

$$a \in s_0.H.s, \quad b \in s_0.H.s, \quad i \in s.H.s_0$$

tels que $p(a)$, $p(b)$ et $p(i)$ soient respectivement l'application source de C, son application but et l'insertion de C_0 dans C.

2° Il existe un morphisme k de H de but s tel que $p(k)$ soit la loi de composition de C et que la source de k soit le produit fibré canonique $s * s$ de (a,b) dans H.

On appelle *foncteur p-structuré* un triplet $((C',s'),f,(C,s))$, où:

1° (C,s) et (C',s') sont des catégories p-structurées.

2° $f \in s'.H.s$ et $p(f)$ définit un foncteur de C vers C'.

Les foncteurs p-structurés forment une catégorie, que nous noterons $F(p)$.

PROPOSITION 8. *Il existe un isomorphisme $\hat{\eta}$ de $F(p)$ sur $F(H,\mu,\mu')$.*

Δ. 1° Soit (C,s) une catégorie p-structurée, G le foncteur de U vers H obtenu en posant (notations de la définition précédente):

$$G(\iota) = i, \quad G(\alpha) = a, \quad G(\beta) = b, \quad G(\kappa) = k,$$

et tel que

$$((a, G(\nu_1)), (b, G(\nu_2))) = \mu(a,b).$$

Soit $\bar{F}: \hat{U} \to \mathfrak{M}$ le prolongement de G à $\hat{U}$ construit dans la Proposition 2-1.

$p.\bar{F}: \hat{U} \to \mathfrak{M}$ est le prolongement unique de $p.G$ à $\hat{U}$. Comme $p.G$ se prolonge aussi en un foncteur unique de U_F vers $\mathfrak{M}$ définissant la catégorie $\eta'(C)$ dans $\mathfrak{M}$ canoniquement associée à C, le foncteur $p.\bar{F}$ vérifie la condition (1) de la Proposition 2. Le foncteur p étant fidèle, cette condition est également remplie par $\bar{F}$. Donc G se prolonge en un foncteur $F: U_F \to H$ tel que $p.F$ définisse $\eta'(C)$. Alors F est une catégorie dans (H, μ, μ'), que nous noterons $\hat{\eta}(C, s)$.

2° Soit F une catégorie dans (H, μ, μ'). Alors $p.F$ est une catégorie dans $(\mathfrak{M}, \mu_{\mathfrak{M}}, \mu'_{\mathfrak{M}})$, de sorte qu'il existe une catégorie C telle que $p.F = \eta(C)$. De plus (C, s), où $s = F(2)$ est une catégorie p-structurée car

$$a = F(\alpha), \quad b = F(\beta), \quad i = F(\iota), \quad k = F(\kappa)$$

vérifient les conditions de la définition précédente. Donc: $F = \hat{\eta}(C, s)$.

3° Soit $\hat{f} = ((C', s'), f, (C, s))$ un foncteur p-structuré. Posons

$$F = \hat{\eta}(C, s) \quad \text{et} \quad F' = \hat{\eta}(C', s'),$$

Comme $p(f)$ définit un foncteur de C vers C' et que p est fidèle, on a

$$i'.a'.f = f.i.a, \quad i'.b'.f = f.i.b \quad \text{et} \quad k'.f' = k.f,$$

où $f' = [f.v_1, f.v_2]$ est le morphisme de $s * s$ vers $s' * s'$ tel que $p(f')$ associe $(p(f)(x), p(f)(y))$ à $(x, y) \in C * C$. Ainsi la Proposition 5 assure qu'il existe un et un seul foncteur $t: F \to F'$ dans H vérifiant $t(2) = f$. En associant t à $\hat{f}$, on obtient le foncteur

$$\hat{\eta}: F(p) \to F(H, \mu, \mu').$$

4° Le foncteur $\hat{\eta}$ est évidemment injectif. Montrons qu'il est surjectif, de sorte que c'est un isomorphisme. En effet, soit $t': F \to F'$ un foncteur dans (H, μ, μ'). D'après la partie 2, il existe des catégories p-structurées (C, s) et (C', s') telles que

$$F = \hat{\eta}(C, s) \quad \text{et} \quad F' = \hat{\eta}(C', s').$$

La transformation naturelle pt' est un foncteur dans $\mathfrak{M}$, de $\eta'(C)$ vers $\eta'(C')$; autrement dit, $p(t'(2))$ définit un foncteur de C vers C'. Par suite, $((C', s'), t'(2), (C, s))$ est un foncteur p-structuré, ayant t' pour image par $\hat{\eta}$. ∇

COROLLAIRE. *La catégorie $F(p)$ est équivalente à $F(H)$.*

Δ. Comme $\hat{\eta}$ est un isomorphisme de $F(p)$ sur la sous-catégorie pleine $F(H,\mu,\mu')$ de $F(H)$, il suffit de montrer que, si F est une catégorie dans H, il existe une catégorie p-structurée (C,s) et une équivalence naturelle de F vers $\hat{\eta}(C,s)$. Or la Proposition 5 montre qu'il existe une catégorie C et une équivalence naturelle $\theta: p.F \to \eta'(C)$ telle que $\theta(2) = C$. Le foncteur p étant un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe un et un seul inversible $\bar{\theta}(u)$, de source $F(u)$, tel que

$$p(\bar{\theta}(u)) = \theta(u) \quad \text{pour} \quad u = 1,\ 2,\ 3 \text{ ou } 4.$$

On détermine ainsi une équivalence $\bar{\theta}$ de F vers un foncteur $F': U_F \to H$ telle que $p\bar{\theta} = \theta$. Comme F est une catégorie dans H, le foncteur F' en est aussi une; plus précisément, F' est une catégorie dans (H,μ,μ'), car $p.F' = \eta'(C)$. Il s'ensuit $F' = \hat{\eta}(C,s)$. ∇

Ce corollaire montre que l'étude «catégorique» des catégories p-structurées se ramène à celle des catégories dans H.

EXEMPLES. Soit p_F le foncteur d'oubli fidèle de la catégorie $\mathfrak{F}$ des foncteurs vers $\mathfrak{M}$ qui associe à une catégorie l'ensemble de ses morphismes. Une catégorie p_F-structurée est appelée *catégorie double.* On appelle *2-catégorie* une catégorie double $\mathsf{C} = (C^{\cdot}, C^{o})$ telle que toute unité de $C^{\cdot}$ soit aussi une unité de C^{o}. Dans ce cas, l'ensemble des unités de C^{o} définit une sous-catégorie de $C^{\cdot}$ qu'on appelle *catégorie des 1-morphismes* de C, alors que $C^{\cdot}$ est dite *catégorie des 2-celulles de* C.

Une catégorie p_T-structurée, où p_T est le foncteur d'oubli de la catégorie des applications continues vers $\mathfrak{M}$ est appelée *catégorie topologique.* Une *catégorie différentiable* est une catégorie p_D-structurée (où p_D est le foncteur d'oubli de la catégorie des applications différentiables entre variétés $\mathfrak{D}$ vers $\mathfrak{M}$) vérifiant la condition supplémentaire que α et β soient des submersions (pour qu'il existe un produit fibré).

Les catégories topologiques généralisent la théorie des espaces fibrés car les espaces fibrés principaux localement triviaux peuvent être identifiés à certaines catégories topologiques.

II. STRUCTURES DE CATEGORIE SUR UN OBJET D'UNE CATEGORIE.

A. Rappels sur les transformations naturelles.

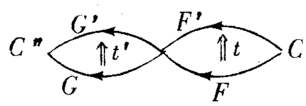
1° Si t est une transformation naturelle de F vers F', où F et F' sont des foncteurs de C vers C', on écrira $t: F \to F': C \Rightarrow C'$.

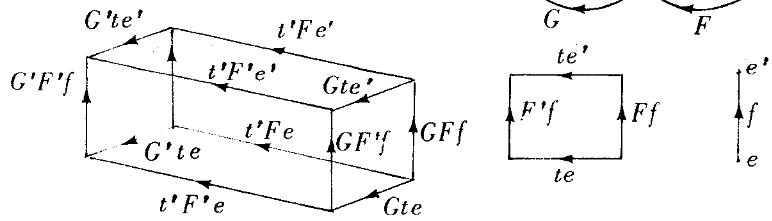
La catégorie longitudinale $\mathfrak{N}(C', C)$ des transformations naturelles entre foncteurs de C vers C' est souvent notée C'^{C}, et ses unités seront identifiées aux foncteurs de C vers C'.

Si $t': G \to G': C' \Rightarrow C''$ est une autre transformation naturelle, on définit la transformation naturelle $t'.t$, dite *composée latérale de* (t', t), comme étant la transformation naturelle $t'': G.F \to G'.F': C \Rightarrow C''$ où

$$t''(e) = t'(F'(e)).G(t(e)) = G'(t(e)).t'(F(e))$$

pour toute unité e de C





(les parenthèses ont été supprimées pour alléger l'écriture).

La catégorie $\mathfrak{F}$ des foncteurs associée à l'univers $\mathfrak{U}$ est la catégorie des 1-morphismes de la 2-catégorie des transformations naturelles $(\mathfrak{N}^{\cdot}, \mathfrak{N}^{\boxdot})$ dont les deux lois sont respectivement la composition latérale (définie ci-dessus) et la composition longitudinale (de sorte que $\mathfrak{N}^{\boxdot}$ est une catégorie somme des catégories C'^{C}, où C et C' sont objets de $\mathfrak{F}$).

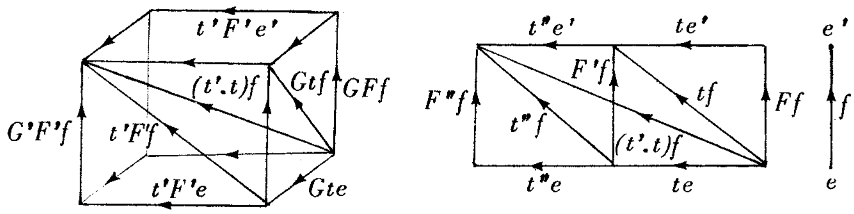
2° Une catégorie H est dite *cartésienne fermée* si H est à produits finis et si, pour toute unité s de H, le foncteur

$$- \times s : H \to H : f \mapsto f \times s$$

produit partiel par s admet un coadjoint.

$\mathfrak{F}$ est une catégorie cartésienne fermée: Si C et K sont deux objets de $\mathfrak{F}$, la $(- \times C)$-structure colibre associée à K est la catégorie K^{C} des transformations naturelles, l'éjecteur correspondant étant le foncteur *évaluation de* $K^C \times K$ *vers* K qui associe à (t, f), où $t: F \to F': C \Rightarrow K$, et $f \in e'.C.e$, le morphisme $t(e').F(f) = F'(f).t(e)$ de K, que nous noterons $t(f)$. Avec cette notation, et si $t': G \to G': K \Rightarrow H$ est aussi une transformation naturelle, on vérifie que

$$(t'.t)(f) = t'(t(f)) \quad \text{pour tout } f \in C.$$



Par ailleurs, si $t'': F' \to F'': C \Rightarrow K$ est une transformation naturelle,

$$(t'' \boxdot t)(f) = t''(f).t(e) = t''(e').t(f) \quad \text{pour tout } f \in e'.C.e.$$

La catégorie $\mathfrak{N}^{\cdot}$ des transformations naturelles est cartésienne fermée: le foncteur produit sur $\mathcal{F}$ s'étend en un foncteur produit $\times_{\mathfrak{N}}$ sur $\mathfrak{N}^{\cdot}$
1 et K^C est aussi la $(- \times_{\mathfrak{N}} C)$-structure colibre associée à K.

3° Comme $\mathcal{F}$ est cartésienne fermée, si K, C et C' sont trois catégories on a un isomorphisme canonique $q: K^{C' \times C} \to (K^C)^{C'}$:

- Soit $G: C' \times C \to K$ un foncteur. Le foncteur $q(G): C' \to K^C$ associe à l'unité e' de C' le foncteur partiel

$$G(e', -): C \to K: f \mapsto G(e', f).$$

Si $f' \in e''.C'.e'$, alors $q(G)(f')$ est la transformation naturelle, notée $G(f', -)$, de $G(e', -)$ vers $G(e'', -)$, définie par

$$G(f', -)(e) = G(f', e) \quad \text{pour toute unité } e \text{ de } C.$$

Cette notation est justifiée par l'égalité :

$$G(f', -)(f) = G(f', f) \quad \text{pour tout } f \in C.$$

- Soit $T: G \to G': C' \times C \Rightarrow K$ une transformation naturelle. Alors la transformation naturelle $q(T): q(G) \to q(G'): C' \Rightarrow K^C$ associe à l'unité e' de C' la transformation naturelle

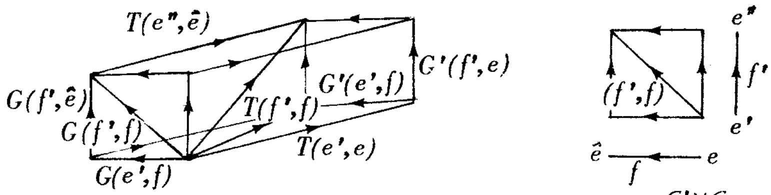
$$q(T)(e'): G(e', -) \to G'(e', -): C \Rightarrow K$$

définie par

$$q(T)(e')(e) = T(e', e) \quad \text{pour toute unité } e \text{ de } C.$$

On vérifie l'égalité (qui détermine entièrement $q(T)$):

$$q(T)(f')(f) = T(f', f) \quad \text{pour tout } f \in C \text{ et } f' \in C'.$$



Il existe aussi un isomorphisme canonique $q' : K^{C' \times C} \to (K^{C'})^C$ associant à $T : C' \times C \Rightarrow K$ la transformation naturelle $q'(T) : C \Rightarrow K^{C'}$ telle que $q'(T)(f)(f') = T(f', f)$ si $f \in C$, $f' \in C'$. D'où l'isomorphisme canonique composé $\bar{q} = q' . q^{-1} : (K^C)^{C'} \to (K^{C'})^C$. 1

EXEMPLE. Au foncteur évaluation $V : K^C \times C \to K$ est ainsi associé le foncteur identique de K^C (car pour toute transformation naturelle $t : C \Rightarrow K$, on a

$$V(t, -)(f) = V(t, f) = t(f) \quad \text{pour tout } f \in C, \quad \text{d'où } V(t, -) = t \text{).}$$

Pour toute unité e de C, le foncteur

$$V(-, e) : K^C \to K : t \mapsto t(e)$$

est appelé *foncteur d'omission de* K^C *associé à* e. Si $q : K^{C' \times C} \to (K^C)^{C'}$ est l'isomorphisme canonique, on obtient

$$V(-, e) . q(T) = T(-, e) \quad \text{pour tout } T : C' \times C \Rightarrow K.$$

4° Soit J et C deux catégories. Pour toute unité e de C, on note $e^\wedge$ le foncteur de J vers C constant sur e. Si $f \in e' . C . e$, alors $f^\wedge$ désigne la transformation naturelle de $e^\wedge$ vers $e'^\wedge$ telle que

$$f^\wedge(j) = f \quad \text{pour tout } j \in J.$$

Une transformation naturelle $t : e^\wedge \to F : J \Rightarrow C$, de source un foncteur constant, sera appelée *cône projectif dans* C, *de sommet* e, *de base* F, *indexé par* J ; un tel cône est dit *cône limite* (ou limite projective naturalisée) si e est une limite projective de F et $t(j)$ la projection canonique de e vers $F(j)$ pour toute unité j de J. On définit de même un cône inductif comme une transformation naturelle de but un foncteur constant.

Soit K une catégorie et $p_e : K^C \to K$ le foncteur d'omission associé à une unité e de C. Considérons un cône projectif $T: F^\frown \to P: J \Rightarrow K^C$. Si $p_e . T: F(e)^\frown \to p_e . P$ est un cône limite, pour toute unité e de C, alors T est un cône limite dans K^C (dit «limite calculée terme à terme»). Il en résulte que, si K est à J-limites projectives, K^C l'est aussi et les foncteurs d'omission sont compatibles avec ces limites.

B. Plongement de Yoneda.

Nous désignons désormais par H une catégorie telle que $s'.H.s$ appartienne à l'univers $\mathfrak{U}$ pour tout couple (s', s) d'unités de H, et nous notons Hom le foncteur homomorphisme de $H \times H^*$ vers $\mathfrak{M}$. Ainsi

$$Hom(h', h): s'.H.s \to s'_1.H.s_1 : f \mapsto h'.f.h$$

si $h \in s.H.s_1$ et $h' \in s'_1.H.s'$.

DEFINITION. On appelle *plongement de Yoneda de H* le foncteur Y' de H vers $\mathfrak{M}^{H^*}$ canoniquement associé au foncteur $Hom: H \times H^* \to \mathfrak{M}$.

Comme $Hom_{H^*}(h, h') = Hom_H(h', h)$, pour tout couple (h', h) de morphismes de H, le plongement de Yoneda de la duale H^* de H est identique au foncteur de H^* vers $\mathfrak{M}^H$ associé à Hom_H ; on le notera Y.

Avec les notations de la partie A, le foncteur Y' associe à l'unité s de H le foncteur $Hom(s, -): H^* \to \mathfrak{M}$ et, pour $h \in s'.H.s$, $Y'(h)$ est la transformation naturelle $Hom(h, -): Hom(s, -) \to Hom(s', -)$ telle que

$$Hom(h, -)(h') = Hom(h, h') \quad \text{pour tout } h' \in H.$$

PROPOSITION 1. *Y' est un foncteur injectif ayant pour image une sous-catégorie pleine $\hat{H}$ de $\mathfrak{M}^{H^*}$; il est compatible avec les limites projectives, ainsi que le foncteur $Hom(-, s): H \to \mathfrak{M}$ pour toute unité s de H.*

1 Δ. 1° L'injectivité provient du fait que

$$Y'(h)(s)(s) = Hom(h, s)(s) = h \quad \text{pour tout } h \in s'.H.s.$$

2° Si s et s' sont deux unités de H et $t: Hom(s, -) \to Hom(s', -)$ une transformation naturelle, on a

$$h = t(s)(s) \in s'.H.s \quad \text{et} \quad t = Y'(t(s)(s)).$$

En effet, le fait que t soit une transformation naturelle signifie que, pour tout $f \in s.H.s''$, on a

$$t(s'').Hom(s,f) = Hom(s',f).t(s),$$

d'où

$$t(s')(f) = t(s'').Hom(s,f)(s) = Hom(s',f).t(s)(s) =$$
$$= Hom(s',f)(h) = h.f = Hom(h,s'')(f).$$

Donc $t(s'') = Hom(h,s'')$, et $t = Hom(h,-)$ appartient à la catégorie $\hat{H}$ image de Y'. Ainsi $\hat{H}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathfrak{M}^{H^*}$.

3° Notons $p_s : \mathfrak{M}^{H^*} \to \mathfrak{M}$ le foncteur d'omission associé à l'unité s de H. D'après la partie A-4, pour que Y' soit compatible avec les limites projectives, il suffit que $p_s.Y'$ le soit pour tout s. Or (Exemple, A-3) $p_s.Y' = Hom(-,s): H \to \mathfrak{M}$. Ainsi tout revient à montrer que $Hom(-,s)$ est compatible avec les limites projectives. Pour cela soit $t: e^\wedge \to F: J \Rightarrow H$ un cône limite. Le foncteur

$$Hom(-,s).F: J \to \mathfrak{M}: j \mapsto Hom(F(j),s)$$

admet pour limite projective canonique l'ensemble A des familles

$$t' = (t'_u)_{u \in J} \quad \text{telles que } t'_u \in F(u).H.s \text{ et, si } j \in u'.J.u,$$
$$t'_{u'} = Hom(F(j),s)(t'_u) = F(j).t'_u,$$

i.e. telles qu'il existe un cône projectif $c(t'): s^\wedge \to F$ défini par

$$c(t')(u) = t'_u \quad \text{pour tout } u \in J_0.$$

On obtient ainsi une bijection c de A sur l'ensemble A' des cônes projectifs de sommet s et de base F. En associant à $c(t')$ son crochet f relativement à t (c'est-à-dire l'unique f tel que $t(u).f = t'_u$ pour tout u) on construit une bijection de A' sur $e.H.s = Hom(-,s)(e)$. Il s'ensuit que $e.H.s$ est aussi une limite projective de $Hom(-,s).F$, le cône limite correspondant étant $Hom(-,s).t$. ∇

DEFINITION. Un foncteur G de H^* vers $\mathfrak{M}$ est dit *représentable* s'il existe une unité s de H telle que G soit équivalent à $Hom(s,-)$; on appelle alors s *un représentant de* G.

Si s est un représentant de G, alors G admet s' pour représentant ssi s et s' sont isomorphes dans H.

Cn note $R(H)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{M}^{H^*}$ ayant pour objets les foncteurs représentables. C'est la sous-catégorie saturée (i.e. fermée par isomorphismes) de $\mathfrak{M}^{H^*}$ engendrée par la sous-catégorie $\hat{H}$ image de H par le plongement de Yoneda Y'.

PROPOSITION 2. *Le foncteur* $y': H \to R(H)$ *restriction de* Y' *est une équivalence. Si* H *est à* J*-limites projectives,* $R(H)$ *est une catégorie stable par* J*-limites projectives dans* $\mathfrak{M}^{H^*}$.

Δ. 1° La restriction de Y' à H étant un isomorphisme sur $\hat{H}$, c'est une équivalence vers la catégorie $R(H)$ équivalente à H. Plus précisément on construit une équivalence $r: R(H) \to H$ telle que $r.y' = H$ comme suit: Pour tout foncteur représentable G choisissons un représentant s_G de G et une équivalence naturelle $l_G: G \to Hom(s_G, -)$; on prendra pour l_G une identité si $G = Hom(s,-) \in \hat{H}_0$. Soit $t: G \to G'$ une transformation naturelle entre foncteurs représentables ; comme $l_{G'} \square t \square l_G^{-1}$ appartient à $\hat{H}$, il existe un unique $h \in s_{G'}.H.s_G$ tel que $t' = Hom(h,-)$. Alors r est le foncteur $R(H) \to H: t \mapsto h$ et $l: R(H) \to y'.r$ est une équivalence.

2° Le foncteur insertion z de $R(H)$ vers $\mathfrak{M}^{H^*}$ est équivalent au foncteur $Y'.r$, puisque $y'.r$ est équivalent à l'identité. Comme Y' est compatible avec les limites projectives (Proposition 1) ainsi que l'équivalence r, le foncteur z l'est aussi.

3° Supposons que H soit à J-limites projectives. La catégorie équivalente $R(H)$ l'est également. Puisque l'insertion z préserve les limites projectives et que $R(H)$ est fermée par isomorphismes, il s'ensuit que $R(H)$ est stable par J-limites projectives, i.e. que G est représentable si G est limite projective d'un foncteur $P: J \to \mathfrak{M}^{H^*}$ à valeurs dans $R(H)$. ∇

C. Structures de catégorie sur un objet d'une catégorie.

Nous désignerons par:

H une catégorie telle que $s'.H.s$ appartienne à $\mathfrak{U}$ pour tout couple (s', s) d'unités de H, par $F(H)$ la catégorie des foncteurs dans H,

$Y: H^* \to \mathfrak{M}^H$ et $Y': H \to \mathfrak{M}^{H^*}$ les plongements de Yoneda,

$\hat{H}$ et $R(H)$ les sous-catégories pleines de $\mathfrak{M}^{H^*}$ ayant respectivement pour objets les foncteurs $Y'(s)$, où $s \in H_0$ et les foncteurs représentables.

L (resp. L') la sous-catégorie pleine de $F(\mathfrak{M})^{H^*}$ ayant pour objets les foncteurs G tels que $p_u . G$ soit représentable (resp. soit objet de $\hat{H}$) pour toute unité u de U_F, où $p_u : F(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}$ désigne la restriction du foncteur d'omission $\mathfrak{M}^{U_F} \to \mathfrak{M} : T \to T(u)$ associé à u.

PROPOSITION 3. *Il existe une équivalence d de $F(H)$ vers L, ayant pour restriction un isomorphisme $d' : F(H) \to L'$, et associant au foncteur t dans H la transformation naturelle $d(t)$ telle que*

$$d(t)(h) = Hom(-, h).t \quad et \quad p_u(d(t)) = Y'(t(u))$$

pour tout $h \in H$ et toute unité u de U_F.

Δ. Soit $\bar{q} : (\mathfrak{M}^{H^*})^{U_F} \to (\mathfrak{M}^{U_F})^{H^*}$ l'isomorphisme canonique (A).

1° Il existe un isomorphisme $\bar{q}' : F(\mathfrak{M}^{H^*}) \to F(\mathfrak{M})^{H^*}$ tel que le foncteur $\mathfrak{R}(\iota_{\mathfrak{M}}, H^*). \bar{q}'$ soit une restriction de $\bar{q}$ (où $\iota_{\mathfrak{M}}$ est l'insertion) :

a) Un foncteur $\bar{G} : U_F \to \mathfrak{M}^{H^*}$ est une catégorie dans $\mathfrak{M}^{H^*}$ ssi il existe un foncteur $\bar{q}'(\bar{G}) : H^* \to F(\mathfrak{M})$ restriction de $\bar{q}(\bar{G})$. En effet, pour toute unité s de H, on a $\bar{q}(\bar{G})(s) = p_s . \bar{G}$, où $p_s : \mathfrak{M}^{H^*} \to H^*$ est le foncteur d'omission associé à s. Les limites projectives se calculant terme à terme dans $\mathfrak{M}^{H^*}$, $\bar{G}$ est une catégorie dans $\mathfrak{M}^{H^*}$ ssi $p_s . \bar{G}$ est une catégorie dans $\mathfrak{M}$ pour toute unité s, c'est-à-dire ssi $\bar{q}(\bar{G})$ prend ses valeurs dans la sous-catégorie pleine $F(\mathfrak{M})$.

b) Il s'ensuit que, si $\bar{T} : \bar{G} \to \bar{G}'$ est un foncteur dans $\mathfrak{M}^{H^*}$, la transformation naturelle $\bar{q}(\bar{T}) : \bar{q}(\bar{G}) \to \bar{q}(\bar{G}')$ admet pour restriction une transformation naturelle $\bar{q}'(\bar{T}) : \bar{q}'(\bar{G}) \to \bar{q}'(\bar{G}')$. On définit ainsi un foncteur $\bar{q}' : F(\mathfrak{M}^{H^*}) \to F(\mathfrak{M})^{H^*}$ et ce foncteur est un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd}
F(\mathfrak{M})^{H^*} \arrow[d, "\mathfrak{R}(\iota_{\mathfrak{M}}, H^*)"'] & F(\mathfrak{M}^{H^*}) \arrow[l, "\bar{q}'"'] \arrow[d] & F(H) \arrow[l, "Y''"'] \arrow[d, "\iota_H"] \\
(\mathfrak{M}^{U_F})^{H^*} & (\mathfrak{M}^{H^*})^{U_F} \arrow[l, "\bar{q}"'] & H^{U_F} \arrow[l, "\mathfrak{R}(Y', U_F)"']
\end{tikzcd}$$

2° Y' étant compatible avec les limites projectives, d'après la Proposition 5-1, le foncteur $\mathfrak{R}(Y', U_F) : H^{U_F} \to (\mathfrak{M}^{H^*})^{U_F}$ admet pour restriction un foncteur $Y'': F(H) \to F(\mathcal{M}^{H^*})$ associant $Y'.t$ à $t \in F(H)$. Considérons le foncteur: $\bar{d} = \bar{q}'.Y'': F(H) \to F(\mathcal{M})^{H^*}$. Il est injectif, l'injectivité de Y' entraînant celle de Y''. Nous allons voir que $\bar{d}$ admet pour restriction un isomorphisme $d: F(H) \to L'$.

a) Si t est un foncteur dans H, la transformation naturelle $\bar{d}(t)$ est telle que, pour tout $h \in H$, on ait

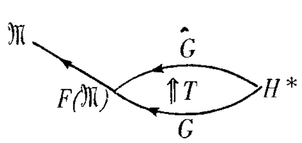
$$\bar{d}(t)(h)(x) = \bar{q}'(Y'.t)(h)(x) = Y'(t(x))(h) =$$
$$Hom(t(x), h) = Hom(-, h).t(x)$$

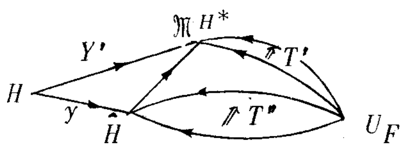
pour tout $x \in U_F$, c'est-à-dire $\bar{d}(t)(h) = Hom(-, h).t$. En particulier

$$p_u.\bar{d}(t) = Y'(t(u)) \text{ pour toute unité } u \text{ de } U_F.$$

b) Montrons que L' est l'image de $\bar{d}$. Pour cela, soit T un morphisme de L' et $T' = \bar{q}'^{-1}(T)$. Pour toute unité u de U_F, on a $T'(u) = p_u.T \in \hat{H}$, de sorte que T' admet pour restriction une transformation naturelle T'' : $U_F \Rightarrow \hat{H}$. Comme T' est un foncteur dans $\mathcal{M}^{H^*}$, sa restriction T'' est un foncteur dans la sous-catégorie pleine $\hat{H}$. Par suite, en désignant par y l'isomorphisme canonique de H sur $\hat{H}$ restriction de Y', la transformation naturelle $y^{-1}.T''$ est un foncteur dans H, vérifiant

$$\bar{d}(y^{-1}.T'') = \bar{q}'.Y'.(y^{-1}.T'') = \bar{q}'(T') = T.$$





Il s'ensuit que $\bar{d}$ admet pour restriction un isomorphisme $d': F(H) \to L'$.

3° Il nous reste à voir que la restriction $d: F(H) \to L$ de $\bar{d}$ est une équivalence, ce qui revient à montrer que tout objet de L est équivalent à un objet de L'. Nous désignons par r une équivalence de $R(H)$ vers H telle que $r.y'$ soit l'identité (il en existe, cf. Proposition 2). $\bar{q}'^{-1}(G)$ admet pour restriction un foncteur $G'': U_F \to R(H)$; or, le foncteur $y'.r$ étant équivalent à l'identité de $R(H)$, le foncteur $Y'.r.G''$ est équivalent à $\bar{q}'^{-1}(G)$. Il s'ensuit que le foncteur $\bar{q}'(\bar{q}'^{-1}(G)) = G$ est équivalent à $\bar{q}'(Y'.r.G'') = \bar{d}(r.G'') \in L'_0$. ∇

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{M}^{H^*} & \\
H \arrow[ur, "Y'"] \arrow[dr, "y'"] & & U_F \arrow[ul, "\bar{q}'^{-1}(G)"'] \arrow[dl, "G''"] \\
& R(H) \arrow[uu] \arrow[ul, bend left, "r"] &
\end{tikzcd}$$

Nous allons voir que, si H a «assez» de limites, un foncteur G de H^* vers $F(\mathfrak{M})$ est un objet de L dès que l'un des foncteurs $p_u . G$ est représentable. La preuve utilise la Proposition 1-1.

PROPOSITION 4. *L est identique (donc $F(H)$ est équivalent) à la sous-* 1
catégorie pleine de $F(\mathfrak{M})^{H^*}$ ayant pour objets les foncteurs G tels que $p_u . G$ soit représentable, où:

1° $u = 2$ (resp. $u = 3$, resp. $u = 4$), si H est à produits fibrés finis;

2° $u = 4$, si H est à noyaux.

Δ. Soit $G : H^* \to F(\mathfrak{M})$ un foncteur. Nous désignons par G' la catégorie $\bar{q}'^{-1}(G)$ dans $\mathfrak{M}^{H^*}$ (voir Proposition 3). On a $G'(u') = p_{u'} . G$, pour toute unité u' de U_F, de sorte que G appartient à L ssi $G'(u')$ est représentable pour tout u'.

1° Supposons H à noyaux et $p_4 . G$ représentable, i.e. $G'(4) \in R(H)$. D'après la Proposition 1-1, $G'(3)$ est la source d'un noyau de $(G'(4), c_3)$ où c_3 est une transformation naturelle de $G'(4)$ vers $G'(4)$. Comme $R(H)$ est une sous-catégorie pleine stable par noyaux (Proposition 2), c_3 appartient à $R(H)$, de même que $G'(3)$; ainsi $G'(3)$ est représentable. D'une manière analogue, $G'(3)$ étant représentable et $G'(2)$ étant la source d'un noyau de $(G'(3), c_2)$, où c_2 est une transformation naturelle de $G'(3)$ vers $G'(3)$, on voit que $G'(2)$ est représentable. Enfin $G'(1)$ est représentable, car c'est la source d'un noyau d'un couple $(G'(2), c_1)$, où $G'(2)$ est représentable.

2° Dans cette partie, nous supposons H à produits fibrés finis.

a) Supposons $G'(2)$ représentable; $G'(\iota . \alpha)$ et $G'(\iota . \beta)$ appartiennent alors à la sous-catégorie pleine $R(H)$. Comme $G'(3)$ est un produit fibré du couple $(G'(\iota . \alpha), G'(\iota . \beta))$ et que $R(H)$ est stable par produits fibrés finis (Proposition 2), $G'(3)$ est représentable. On en déduit que $G'(4)$ est représentable, comme étant le produit fibré de

$$(G'(\nu_1), G'(\nu_2)), \quad \text{où } G'(\nu_i): G'(3) \to G'(2) \text{ est dans } R(H).$$

Enfin $G'(1)$ est représentable, la Proposition 1-1 assurant que $G'(1)$ est un produit fibré de $(G'(j_\alpha), G'(j_\beta))$, où $G'(j_\alpha): G'(2) \to G'(3)$ appartient à $R(H)$.

b) Supposons $G'(3)$ représentable. $G'(4)$ est un produit fibré du couple $(G'(\nu_2), G'(\nu_1))$; comme ν_1 est un inverse à gauche de j_α, $j_a = G'(j_\alpha)$ est un monomorphisme. Par suite $G'(4)$ est aussi un produit fibré de

$$(j_a . G'(\nu_2), j_a . G'(\nu_1)).$$

Puisque $G'(3)$ est représentable, $j_a . G'(\nu_2)$ et $j_a . G'(\nu_1)$ appartiennent à la sous-catégorie pleine $R(H)$ et, $R(H)$ étant stable par produits fibrés finis, $G'(4)$ est représentable. D'après la Proposition 1-1, $G'(2)$ est un produit fibré de deux transformations naturelles de $G'(3)$ vers $G'(4)$ lesquelles appartiennent donc à $R(H)$. Par conséquent $G'(2)$ est aussi représentable, et nous sommes ramenés à la partie a.

c) Supposons $G'(4)$ représentable. Considérons la transformation naturelle $j'_a = [G'(3), G'(j_\alpha . \nu_2)]$, crochet relativement au produit fibré :

$$((G'(\nu_2), G'(\bar{\nu}_1)), (G'(\nu_1), G'(\bar{\nu}_2))).$$

Puisque H est à produits fibrés finis, $R(H)$ l'est aussi, de sorte qu'il existe un produit fibré naturalisé D de $(j'_a . G'(\bar{\nu}_2), j'_a . G'(\bar{\nu}_1))$, dans $R(H)$. D'après la Proposition 1-1, $G'(3)$ est un produit fibré de deux transformations naturelles de $G'(4)$ vers D ; celles-ci appartenant à $R(H)$, il s'ensuit que $G'(3)$ est représentable. On est ainsi ramené à la partie b. ∇

COROLLAIRE. *Si H est à produits fibrés finis, $F(H)$ est équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{F}^{H^*}$ ayant pour objets les foncteurs $\hat{G}$ tels que $p_{\mathfrak{F}} . \hat{G}$ soit représentable (en désignant par $p_{\mathfrak{F}}$ le foncteur d'oubli fidèle de $\mathfrak{F}$ vers $\mathfrak{M}$).*

Δ. Soit $\eta : F(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{F}$ l'équivalence construite dans la Proposition 7-1, telle que $\eta(F) = (F(2), F(\kappa))$ si F est un objet de $F(\mathfrak{M})$ et

$$\eta(\theta) = (\eta(F'), \theta(2), \eta(F)) \quad \text{si} \quad \theta : F \to F'.$$

Comme

$$p_{\mathfrak{F}} \cdot \eta(\theta) = \theta(2) = p_2(\theta) \quad \text{pour tout} \quad \theta ,$$

on a $p_{\mathfrak{F}} . \eta = p_2$. Il en résulte que, si $G : H^* \to F(\mathfrak{M})$ est un foncteur, $p_2 . G$ est représentable ssi $p_{\mathfrak{F}} . \eta . G$ l'est. Autrement dit, l'équivalence

$$\mathfrak{N}(\eta, H^*) : F(\mathfrak{M})^{H^*} \to \mathfrak{F}^{H^*}$$

admet pour restriction une équivalence $\hat{\eta} : L \to \hat{L}$, vers la sous-catégorie $\hat{L}$ ayant pour objets les foncteurs $\hat{G}$ tels que $p_{\mathfrak{F}} . \hat{G}$ soit représentable. Donc $\hat{L}$ est équivalente à $F(H)$, le foncteur $\hat{d} = \hat{\eta} . d : F(H) \to \hat{L}$ étant une équivalence (où d est l'équivalence de la Proposition 3).

DEFINITION (Grothendieck). Un foncteur $G : H^* \to \mathfrak{F}$ tel que $p_{\mathfrak{F}} . G$ soit représentable par s est appelé *structure de catégorie sur l'objet s de H*.

Le corollaire précédent signifie que, si H est à produits fibrés finis, les notions de catégorie dans H et de structure de catégorie sur un objet de H sont équivalentes. Ceci n'est plus vrai si H n'est pas à pro- 1+
duits fibrés finis, une structure de catégorie sur un objet de H pouvant alors ne pas déterminer une catégorie dans H.

D. Existence de limites projectives.

Nous reprenons les notations de C et nous désignons par

$$p_u^H : F(H) \to H : t \mapsto t(u)$$

le foncteur d'omission associé à l'unité u de U_F.

PROPOSITION 5. *Soit $\Phi : J \to F(H)$ un foncteur. Si $p_u^H . \Phi$ admet une limite projective pour toute unité u de U_F, alors Φ admet une limite projective.*

Δ. Remplaçant $\mathfrak{U}$ par un univers plus grand si nécessaire, nous pouvons supposer que J appartient à $\mathfrak{U}$. Alors $F(\mathfrak{M})$, équivalente à $\mathfrak{F}$, est à J-limites projectives, ainsi que $F(\mathfrak{M})^{H^*}$. Soit $d : F(H) \to L$ l'équivalence construite dans la Proposition 3 et $\xi : L \to F(\mathfrak{M})^{H^*}$ l'insertion. Le foncteur $\xi . d . \Phi : J \to F(\mathfrak{M})^{H^*}$ admet une limite projective G. Montrons que $p_u . G$ est représentable pour tout u. Il s'ensuivra que G est aussi une limite projective de $d.\Phi$, et a fortiori que Φ admet une limite projective F telle que $d(F)$ soit équivalent à G. En effet, p_u étant compatible avec les limites projectives, $\mathfrak{R}(p_u, H^*)$ l'est aussi, et $p_u . G$ est une limite projective du foncteur

$$\Phi_u = \mathfrak{R}(p_u, H^*).\xi.d.\Phi : J \to \mathfrak{M}^{H^*}.$$

On a $\Phi_u = Y'.p_u^H.\Phi$, car, pour tout élément j de J,

$$\Phi_u(j) = p_u . d(\Phi(j)) = Y'(\Phi(j)(u)) = Y'(p_u^H.\Phi(j)).$$

Comme Y' est compatible avec les limites projectives, Φ_u admet $Y'(s_u)$ pour limite projective, où s_u est une limite projective de $p_u^H.\Phi$. Il en résulte que $p_u . G$ est représentable par s_u, car il est équivalent à $Y'(s_u)$.

COROLLAIRE. *Soit Φ un foncteur de J vers $F(H)$.*

1° Si H est à noyaux et si $p_4^H.\Phi$ admet une limite projective, Φ admet une limite projective.

2° Si H est à produits fibrés finis et si $p_2^H.\Phi$ (resp. si $p_3^H.\Phi$, resp. $p_4^H.\Phi$) admet une limite projective, Φ admet une limite projective.

Δ. La preuve est analogue à la précédente, car d'après la Proposition 4-C, il suffit de vérifier que $p_u . G$ est représentable lorsque $u = 4$ (resp. $u = 2, 3$ ou 4). ∇

1

III. TRANSFORMATIONS NATURELLES STRUCTUREES DANS H.

Dans cette partie, H désigne une catégorie à produits fibrés finis, $F(H)$ la catégorie des foncteurs dans H. Nous allons montrer que $F(H)$ est la catégorie des 1-morphismes d'une 2-catégorie représentable. Nous désignons par $\mathfrak{M}$ la catégorie des applications associée à un univers $\mathfrak{U}$ auquel appartient $s'.H.s$ pour tout couple (s', s) d'unités de H. Si F est une catégorie dans H, nous reprenons les notations de la partie I, à savoir $a = F(\alpha)$, $b = F(\beta)$, $s = F(2)$, ...

A. Catégorie des quatuors d'une catégorie dans H.

Soit I la catégorie

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & 1 \arrow[dll, "o'"'] \\ (1,0) & & \\ & & 0 \arrow[ull, "o"] \end{tikzcd}$$

servant à définir les produits fibrés de couples. Nous noterons V le foncteur «produit fibré canonique» de $\mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$ vers $\mathfrak{M}$.

Si C est une catégorie dont l'ensemble des morphismes appartient à $\mathfrak{U}$ et si κ_C est sa loi de composition, l'ensemble $\square\, C$ des quatuors de C s'identifie au produit fibré canonique $\kappa_C \vee \kappa_C$ (en identifiant le quatuor (x', y', y, x) au couple $((x', y), (y', x))$), de sorte que $\kappa_C \vee \kappa_C$ est l'ensemble sous-jacent à la catégorie latérale $\boxminus\, C$ des quatuors de C ; autrement dit, $\square\, C = V(W(C))$, où $W(C)$ est le foncteur de I vers $\mathfrak{M}$ appliquant o et o' sur κ_C.

Si $f = (C', \underline{f}, C)$ est un foncteur, soit $W(f)\colon W(C) \Rightarrow W(C')$ la transformation naturelle vérifiant

$$W(f)(1,0) = \underline{f}, \quad W(f)(0) = W(f)(1) = f{*}f,$$

où $f*f$ est une restriction de $\underline{f} \times \underline{f}$. Le foncteur $\boxminus f\colon \boxminus\, C \to \boxminus\, C'$ est défini par l'application $\square f = V(W(f))$.

$$\begin{tikzcd} C' & & \arrow[ll, "\kappa_{C'}"'] & \square\, C' \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \\ C \arrow[u, "\underline{f}"] & & C * C \arrow[ll, "\kappa_C"] \arrow[u, "f*f"'] & \square\, C \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[u, "\square f"'] \end{tikzcd}$$

Nous obtenons ainsi un foncteur $W\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$. Le foncteur $\boxminus : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ associant $\boxminus f$ à f vérifie : $p_{\mathfrak{F}} . \boxminus = V . W$.

Pour toute catégorie C, l'ensemble $\underline{C}$ est une classe d'objets de la catégorie longitudinale $\boxbar\, C$ des quatuors de C, et $(\boxminus\, C, \boxbar\, C)$ est une catégorie double. En particulier, l'application source et l'application but de $\boxbar\, C$ définissent des foncteurs

$$\tilde{\alpha}_C^{\boxbar}\colon \boxminus\, C \to \boxbar\, C, \quad \tilde{\beta}_C^{\boxbar}\colon \boxminus\, C \to \boxbar\, C.$$

En associant $\tilde{\alpha}_C^{\boxbar}$ (resp. $\tilde{\beta}_C^{\boxbar}$) à C, on définit une transformation naturelle $\tilde{\alpha}^{\boxbar}$ (resp. $\tilde{\beta}^{\boxbar}$) de $\boxminus$ vers $\boxbar : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$.

Nous noterons encore $\hat{L}$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{F}^{H^*}$ qui a pour objets les structures de catégorie sur les objets de H, i.e. les foncteurs G tels que $p_{\mathcal{F}} . G$ soit représentable. Soit $\hat{d}$ l'équivalence $\hat{\eta} . d$ de $F(H)$ vers $\hat{L}$ (Corollaire, Proposition 4-II):

1 - Si F est une catégorie dans H, alors $\hat{d}(F) : H^* \to \mathcal{F}$ associe à l'unité e de H la catégorie sur $s.H.e$ dans laquelle la source de $f \in s.H.e$ est $i.a.f$, son but est $i.b.f$ et le composé $f' \circ f$ est:

$$f' \circ f = \kappa . [f', f] \quad \text{ssi} \quad a.f' = b.f.$$

- Si $t: F \to F'$ est un foncteur dans H, la transformation naturelle $\hat{d}(t) : \hat{d}(F) \to \hat{d}(F')$ est telle que $\hat{d}(t)(e) : (s.H.e)^{\circ} \to (s'.H.e)^{\circ}$ soit le foncteur

$$Hom(t(2), e) : f \mapsto t(2).f.$$

En particulier $p_{\mathcal{F}} . \hat{d}(t) = Hom(t(2), -)$.

PROPOSITION 1. *Le foncteur* $\mathfrak{N}(\boxminus, H^*) : \mathcal{F}^{H^*} \to \mathcal{F}^{H^*}$ *admet pour restriction un foncteur* $\boxminus_H : \hat{L} \to \hat{L}$.

Δ. Il suffit de montrer que, si G est un objet de $\hat{L}$, alors $\boxminus . G$ est un objet de $\hat{L}$. En effet, choisissons une catégorie F dans H telle que $\hat{d}(F)$ soit équivalent à G ; désignons par $\square s$ un produit fibré de (k, k), où $k = F(\kappa)$. Nous allons montrer que $p_{\mathcal{F}} . \boxminus . G$ est aussi représentable par $\square s$, de sorte que $\boxminus . G$ sera un objet de $\hat{L}$. En effet,

$$p_{\mathcal{F}} . \boxminus . \hat{d}(F) = V . W . \hat{d}(F).$$

Par construction, la loi de composition de $\hat{d}(F)(e)$ est de la forme

$$\hat{d}(F)(e) = Hom(k, e) . g_e \ , \quad \text{où } g_e : (f', f) \mapsto [f', f],$$

pour toute unité e de H. Il en résulte que le foncteur $W . \hat{d}(F)$ est équivalent au foncteur $D: H^* \to \mathfrak{M}^{\mathrm{I}}$ appliquant:

- l'unité e sur le foncteur $D(e) : \mathrm{I} \to \mathfrak{M}$ associant $Hom(k, e)$ à o, o',

- $h \in e'.H.e$ sur la transformation naturelle $D(h) : D(e) \to D(e')$ telle que

$$D(h)(1,0) = Hom(s, h), \quad D(h)(0) = D(h)(1) = Hom(F(3), h).$$

$V . D$ est un produit fibré du couple

$$(Hom(k,-), Hom(k,-)) = (Y'(k), Y'(k))$$

dans $\mathfrak{M}^{H^*}$. Comme le plongement de Yoneda $Y': H \to \mathfrak{M}^{H^*}$ est compatible avec les produits fibrés, $Y'(\square s)$ est aussi un produit fibré de ce couple, i.e. est équivalent à $V.D$, et, a fortiori, à $p_{\mathcal{F}}.\boxminus.\hat{d}(F)$. Donc $p_{\mathcal{F}}.\boxminus.G$ est représentable par $\square s$. ∇

COROLLAIRE. *Il existe un foncteur $\boxminus_H : F(H) \to F(H)$ tel que l'on ait $\boxminus^{H^*}.\hat{d} = \hat{d}.\boxminus_H$ et que $\boxminus_H F(2)$ soit un produit fibré de $(F(\kappa), F(\kappa))$, pour toute catégorie F dans H.*

Δ. Comme $\hat{d}$ est une équivalence, pour toute catégorie F dans H nous pouvons choisir une catégorie $\hat{F}$ dans H telle que $\hat{d}(\hat{F}) = \boxminus.\hat{d}(F)$ et il existe un et un seul foncteur

$$\boxminus_H : F(H) \to F(H) \text{ tel que } \boxminus_H(F) = \hat{F}.$$

On peut construire explicitement $\hat{F}$ de la manière suivante :

Soit $((k,z_1),(k,z_2))$ un produit fibré naturalisé dans H et $\square s$ la source de z_i. Posons

$$\hat{a} = v_2.z_1, \quad \hat{b} = v_1.z_2, \quad \bar{a} = v_2.z_2, \quad \bar{b} = v_1.z_1.$$

Puisque $k.j_b = k.j_a$, il existe un crochet $\hat{\iota} = [j_b, j_a]$ relativement au produit fibré $((k,z_1),(k,z_2))$. Choisissons un produit fibré naturalisé $((\hat{a},\hat{v}_1),(\hat{b},\hat{v}_2))$. Nous utiliserons les égalités :

$$b.\bar{b} = b.v_1.z_1 = b.k.z_1 = b.k.z_2 = b.v_1.z_2 = b.\hat{b},$$
$$a.\bar{b} = a.v_1.z_1 = b.v_2.z_1 = b.\hat{a},$$
$$a.\hat{b} = a.v_1.z_2 = b.v_2.z_2 = b.\bar{a},$$
$$a.\bar{a} = a.v_2.z_2 = a.k.z_2 = a.k.z_1 = a.v_2.z_1 = a.\hat{a}.$$

Comme

$$a.\bar{b}.\hat{v}_1 = b.\hat{a}.\hat{v}_1 = b.\hat{b}.\hat{v}_2 = b.\bar{b}.\hat{v}_2,$$

il existe un crochet $m_b = [\bar{b}.\hat{v}_1, \bar{b}.\hat{v}_2]$ relativement à $((a,v_1),(b,v_2))$; de même il existe $m_a = [\bar{a}.\hat{v}_1, \bar{a}.\hat{v}_2]$. Les égalités

$$v_2.m_b = \bar{b}.\hat{v}_2 = v_1.z_1.\hat{v}_2 \quad \text{et} \quad v_2.z_2.\hat{v}_1 = \bar{a}.\hat{v}_1 = v_1.m_a$$

assurent l'existence de crochets

$$c_b = [m_b\,,\, z_1 . \hat{v}_2] \quad \text{et} \quad c_a = [z_2 . \hat{v}_1,\, m_a]$$

relativement à $((v_2, w_1), (v_1, w_2))$. Enfin, il existe un crochet

$$\hat{k} = [k_2 . c_b,\, k_1 . c_a]$$

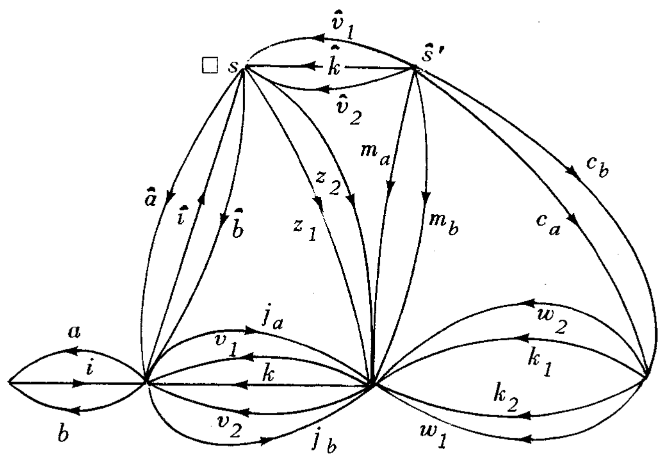
relativement à $((k, z_1), (k, z_2))$, car, en posant toujours

$$k_1 = [v_1 . w_1,\, k . w_2] \quad \text{et} \quad k_2 = [k . w_1,\, v_2 . w_2],$$

on obtient

$$\begin{aligned} k . k_2 . c_b &= k . k_1 . c_b = k . [v_1 . w_1, k . w_2] . c_b = k . [\bar{b} . \hat{v}_1, k . z_1 . \hat{v}_2] = \\ &= k . [\bar{b} . \hat{v}_1,\, k . z_2 . \hat{v}_2] = k . k_1 . [z_1 . \hat{v}_1,\, z_2 . \hat{v}_2] = \\ &= k . k_2 . [z_1 . \hat{v}_1,\, z_2 . \hat{v}_2] = k . [k . z_1 . \hat{v}_1,\, v_2 . z_2 . \hat{v}_2] = \\ &= k . [k . z_2 . \hat{v}_1,\, \bar{a} . \hat{v}_2] = k . k_2 . c_a = k . k_1 . c_a . \end{aligned}$$

On vérifie que $\hat{a}, \hat{b}, \hat{k}, \ldots$ définissent une catégorie $\hat{F}$ dans H et que $\hat{d}(\hat{F}) = \boxminus . \hat{d}(F)$.



V

1 REMARQUE. La construction explicite de $\hat{F}$ est inutile en pratique, car il est plus simple de la déduire de la définition de $\boxminus . G$. Il est toutefois bon de noter qu'on peut aussi définir $\hat{F}$ sans recours à la structure de catégorie G associée à F.

DEFINITION. Avec les notations du corollaire précédent, on appelle $\hat{F}$ *la catégorie latérale des quatuors de* F *dans* H.

En particulier, si F est un objet de $F(\mathfrak{M})$ et C la catégorie (usuelle) associée $\boxminus C$ s'identifie à la catégorie associée à la catégorie latérale des quatuors de F dans $\mathfrak{M}$.

DEFINITION. On appelle *catégorie double dans* H un couple (F', F'') de deux catégories dans H telles que :

1° $F''(\iota.\alpha)$ et $F''(\iota.\beta)$ définissent des foncteurs A et B dans H, de F' vers F'.

2° $F''(\kappa)$ définit un foncteur $K: A \vee B \to F'$ dans H.

PROPOSITION 2. *Il existe une bijection de l'ensemble des catégories dans* $F(H)$ *sur l'ensemble des catégories doubles dans* H.

Δ. 1° Soit D une catégorie dans $F(H)$. Alors $D(2)$ est une catégorie F' dans H ; le foncteur

$$p_2^{F(H)}.D: U_F \to H: x \mapsto D(x)(2)$$

est une catégorie F'' dans H, les foncteurs d'omission étant compatibles avec les produits fibrés. On vérifie aisément que (F', F'') est une catégorie double dans H ; notons-la $\phi(D)$.

2° Soit (F', F'') une catégorie double dans H ; on voit, à l'aide de la Proposition 3-1, qu'il existe une catégorie D dans $F(H)$ telle que

$$D(2) = F', \quad D(\iota.\alpha) = A, \quad D(\iota.\beta) = B \quad \text{et} \quad D(\kappa) = K$$

(avec les notations de la définition). De plus $\phi(D) = (F', F'')$. Ainsi nous avons défini une bijection ϕ de $F(F(H))_0$ sur l'ensemble $F_2(H)_0$ des catégories doubles dans H. ∇

PROPOSITION 3. *Il existe une équivalence* $E_H : \boxminus_H \to \boxplus_H$ *telle que le couple* $(\boxminus_H(F), \boxplus_H(F))$ *soit une catégorie double dans* H, *pour toute catégorie* F *dans* H.

Δ. Soit F une catégorie dans H et $((k, z_1), (k, z_2))$ le produit fibré naturalisé servant à définir $\hat{F} = \boxminus_H(F)$.

1° Comme $k.z_2 = k.z_1$, il existe un crochet $[z_2, z_1]$ relativement à ce produit fibré, et ce crochet est son propre inverse. Par suite il existe un foncteur $\boxplus_H(F)$ dans H et une équivalence $E_H(F): \hat{F} \to \boxplus_H(F)$ tels que

$$E_H(F)(1) = F(2),\quad E_H(F)(2) = \hat{F}(2),$$
$$E_H(F)(3) = [z_2, z_1],\ E_H(F)(4) = \hat{F}(4).$$

Nous noterons $\boxplus_H : F(H) \to F(H)$ l'unique foncteur tel que l'application: $F \mapsto E_H(F)$ définisse une équivalence $E_H : \boxminus_H \to \boxplus_H$.

2° Posons $\bar{F} = \boxplus_H(F)$ et montrons que $(\hat{F}, \bar{F})$ est une catégorie double dans H. Si $G = \hat{d}(F)$, on voit que

$$\hat{d}(\hat{F}) = \boxminus . G \quad \text{et} \quad \hat{d}(\bar{F}) = \boxplus . G.$$

Il s'ensuit qu'il existe un foncteur $A: \hat{F} \to \hat{F}$ dans H tel que $\hat{d}(A)$ soit la transformation naturelle $\tilde{\alpha}^{\boxplus}. G: \boxminus. G \to \boxplus. G$; ce foncteur est défini par

$$\hat{\iota}.\hat{a}.[z_2, z_1] = \hat{\iota}.v_2.z_2 = \bar{F}(\iota.\alpha)$$

(avec les notations du Corollaire, Proposition 1). De même, le morphisme

$$\hat{\iota}.\hat{b}.[z_2, z_1] = \hat{\iota}.v_1.z_1 = \bar{F}(\iota.\beta)$$

définit un foncteur dans H:

$$B: \hat{F} \to \hat{F} \quad \text{tel que} \quad \hat{d}(B) = \tilde{\beta}^{\boxplus}. G.$$

Enfin soit $\tilde{\kappa}^{\boxplus}$ la transformation naturelle de $\tilde{\alpha}^{\boxplus} \vee \tilde{\beta}^{\boxplus}$ vers $\boxminus H$ telle que le foncteur $\tilde{\kappa}^{\boxplus}(C): (\boxplus C * \boxplus C)^{\boxminus} \to \boxminus C$ soit défini par la loi de composition de $\boxplus C$, pour toute catégorie C. Il existe un foncteur dans H:

$$K: A \vee B \to F \quad \text{tel que} \quad \hat{d}(K) = \tilde{\kappa}^{\boxplus}. G,$$

et K est défini par le morphisme $[z_2, z_1].\hat{F}(\kappa) = \bar{F}(\kappa)$. ∇

B. Transformations naturelles structurées.

DEFINITION. On appelle *transformation naturelle dans* H un triplet $\tilde{\theta} = (t', \theta, t)$ vérifiant les conditions suivantes :

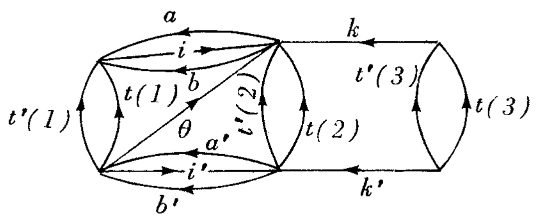
1° $t: F' \to F$ et $t': F' \to F$ sont des foncteurs dans H.

2° $\theta \in F(2).H.F'(1)$ et $a.\theta.b' = b.t(2)$, $b.\theta.a' = a.t'(2)$,

$$k.[\theta.b', t(2)] = k.[t'(2), \theta.a']$$

(où les crochets sont relatifs au produit fibré $((a, v_1), (b, v_2))$).

Nous dirons plus précisément que $\tilde{\theta}: t \to t': F' \Rightarrow F$ est une transformation naturelle dans H. Si F et F' sont des catégories dans H, nous notons $N(F,F')$ l'ensemble des transformations naturelles $\tilde{\theta}: F' \Rightarrow F$ dans H.



Considérons la catégorie latérale $\mathfrak{N}^{\cdot}$ des transformations naturelles associée à l'univers $\mathfrak{U}$, et la sous-catégorie $Q^{\boxminus}$ de la catégorie latérale des quatuors de $\mathfrak{N}^{\cdot}$ formée des quatuors (Φ,τ',τ,Φ'), où Φ et Φ' sont des foncteurs. Soit π et π' les foncteurs de $Q^{\boxminus}$ vers $\mathcal{F}$ associant respectivement Φ et Φ' à (Φ,τ',τ,Φ'). Enfin, Q_H désigne l'ensemble des foncteurs $\Theta: H^* \to Q^{\boxminus}$ tels que $\pi.\Theta$ et $\pi'.\Theta$ appartiennent à la sous-catégorie pleine $\hat{L}$ de $\mathcal{F}^{H^*}$ (considérée dans la Partie **A**).

PROPOSITION 4. *Il existe une application D de l'ensemble $N(H)$ des transformations naturelles dans H sur Q_H ; si F et F' sont des catégories dans H, alors D admet pour restriction une bijection $D_{F,F'}$ de $N(F,F')$ sur l'ensemble $Q(F,F')$ des foncteurs*

$$\Theta \in Q_H \quad \textit{tels que} \quad \pi.\Theta = \hat{d}(F) \quad \textit{et} \quad \pi'.\Theta = \hat{d}(F').$$

Δ. Soit F et F' des catégories dans H, et soit

$$G = \hat{d}(F) \quad \text{et} \quad G' = \hat{d}(F').$$

1° Soit $\tilde{\theta} = (t',\theta,t): F' \Rightarrow F$ une transformation naturelle. On a les transformations naturelles $T = \hat{d}(t)$ et $T' = \hat{d}(t')$ de G' vers G.

a) Soit e une unité de H. Les foncteurs $T(e)$ et $T'(e)$ sont définis par les applications $Hom(t(2),e)$ et $Hom(t'(2),e)$; nous identifions l'ensemble des unités de $G'(e) = \eta(Hom(-,e).F')$ à $Hom(s'_0,e)$. Les conditions indiquées sur $\tilde{\theta}$ signifient que $Hom(\theta,e)$ définit une transformation naturelle $\Theta(e)$ de $T(e)$ vers $T'(e)$; en effet, si

$$f \in G'(e)(2) = s'\cdot H.e,$$

on obtient dans la catégorie $G(e)$:

$$Hom(\theta, e)(b'.f) \circ T(e)(f) = k.[\theta.b'.f,\ t(2).f] =$$
$$= k.[\theta.b',\ t(2)].f = k.[t'(2),\ \theta.a'].f =$$
$$= T'(e)(f) \circ Hom(\theta, e)(a'.f).$$

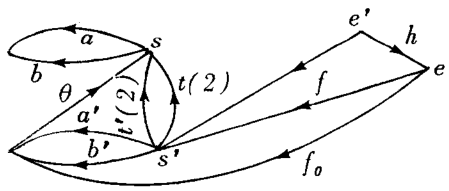
b) Soit $h \in e.H.e'$; alors on a

$$\Theta(h) = (G(h), \Theta(e'), \Theta(e), G'(h)) \in Q_H ,$$

car

$$\Theta(e').G'(h)(f_0) = \Theta(e')(f_0.h) = \theta.f_0.h = G(h).\Theta(e)(f_0),$$

pour toute unité $f_0 \in F'(1).H.e$ de $G'(e)$. Nous avons donc obtenu un foncteur Θ de H^* vers Q_H , puisque G et G' appartiennent à $\hat{L}$. Posons $\Theta = D(\tilde{\theta})$.



2° Soit $\Theta: H^* \to Q^{\boxminus}$ un élément de Q_H vérifiant :

$$\pi.\Theta = \hat{d}(F) = G, \quad \pi'.\Theta = \hat{d}(F') = G'.$$

Pour toute unité e de H , posons $\Theta(e) = (T'(e), \tau(e), T(e))$. En associant $T(e)$ (resp. $T'(e)$) à e , nous définissons une transformation naturelle T (resp. T') de G' vers G dans $\hat{L}$. Il existe un unique foncteur

$$t: F' \to F \text{ dans } H \quad \text{tel que } \hat{d}(t) = T$$

et un unique

$$t': F' \to F \quad \text{tel que } \hat{d}(t') = T'.$$

En associant à e l'application

$$\tau(e): G'(e)_0 = Hom(s'_0, e) \to p_{\mathcal{F}}.G(e) = Hom(s, e),$$

nous définissons une transformation naturelle

$$\tau : Hom(s'_0, -) \to Hom(s, -).$$

Puisque $R(H)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{M}^{H^*}$, il existe un et un seul $\theta \in s.H.s'_0$ tel que $\tau = Hom(\theta, -)$ (à savoir $\theta = \tau(s'_0)(s'_0)$). Le fait que $\Theta(e)$ soit une transformation naturelle, pour toute unité e de H, implique que (t', θ, t) est une transformation naturelle dans H. C'est l'unique transformation naturelle $\tilde{\theta}$ dans H vérifiant $D(\tilde{\theta}) = \Theta$. ∇

On définit sur Q une 2-catégorie $(Q^{\boxbar}, Q^{\cdot})$ comme suit :

$$(\tilde{\Phi}, \tilde{r}', \tilde{r}, \tilde{\Phi}') \boxbar (\Phi, r', r, \Phi') = (\tilde{\Phi}, \tilde{r}' \boxbar r', \tilde{r} \boxbar r, \Phi')$$

ssi $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{\Phi}' = \Phi'$ et si $\tilde{r}' \boxbar r'$ et $\tilde{r} \boxbar r$ sont définis ;

$$(\bar{\Phi}, \bar{r}', \bar{r}, \bar{\Phi}') . (\Phi, r', r, \Phi') = (\bar{\Phi}, \bar{r}' . r', \bar{r} . r, \Phi')$$

ssi $\bar{\Phi}' = \Phi$.

Il en résulte une 2-catégorie $(Q^{\cdot}_H, Q^{\boxbar}_H)$ sur Q_H : 1

$$\Theta' \boxbar \Theta = \Theta'', \quad \text{où} \quad \Theta''(h) = \Theta'(h) \boxbar \Theta(h)$$

ssi ce composé est défini pour tout h dans H,

$$\Theta' . \Theta = \Theta''', \quad \text{où} \quad \Theta'''(h) = \Theta'(h) . \Theta(h)$$

ssi ce composé est défini pour tout h dans H.

PROPOSITION 5. *L'ensemble $N(H)$ des transformations naturelles dans H est muni d'une structure de 2-catégorie pour les lois :*

$$(t'', \theta', t_0) \boxbar (t', \theta, t) = (t'', k.[\theta', \theta], t)$$

ssi $t' = t_0 : F' \Rightarrow F$,

$$(t'_0, \theta_0, t_0).(t', \theta, t) = (t'_0 . t', k''.[\theta_0 . t'(1), t_0(2).\theta], t_0 . t)$$

ssi $t' : F' \Rightarrow F$ *et* $t_0 : F \Rightarrow F''$.

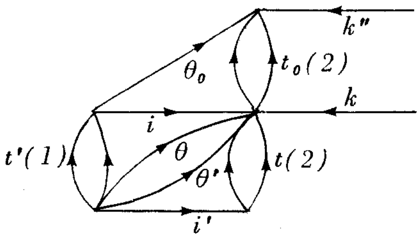
Δ. 1° Soit F et F' des catégories dans H. L'ensemble $Q(F, F')$ définit une sous-catégorie de $Q^{\boxbar}_H$; soit $N(F, F')^{\boxbar}$ la catégorie image de $Q(F, F')^{\boxbar}$ par la bijection inverse de la bijection $D_{F, F'}$ (Proposition 4). On vérifie facilement que la catégorie somme des catégories $N(F, F')^{\boxbar}$ s'identifie à $N(H)^{\boxbar}$.

2° Soit $\tilde{\theta} = (t', \theta, t)$ et $\tilde{\theta}_0 = (t'_0, \theta_0, t_0)$ des transformations naturelles dans H. Si $\Theta = D(\tilde{\theta})$ et $\Theta_0 = D(\tilde{\theta}_0)$, on montre que $\Theta_0 . \Theta$ est défini dans $Q^{\cdot}_H$ ssi $\tilde{\theta}_0 . \tilde{\theta}$ est défini dans $N(H)^{\cdot}$ et dans ce cas, $\tilde{\theta}_0 . \tilde{\theta}$ est l'unique transformation naturelle dans H telle que

$$D(\tilde{\theta}_0 . \tilde{\theta}) = \Theta_0 . \Theta .$$

Comme $(Q^{\cdot}_H, Q^{\boxbar}_H)$ est une 2-catégorie, on en déduit que $(N(H)^{\cdot}, N(H)^{\boxbar})$

est une 2-catégorie ayant pour sommets les catégories dans H , et dont les 1-morphismes s'identifient aux foncteurs dans H.



C. Représentabilité de la 2-catégorie des catégories dans H.

Si $(C^{\cdot}, C^{o})$ est une 2-catégorie, la catégorie de ses 1-morphismes est la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ formée des unités de C^{o}.

DEFINITION (Gray). Une 2-catégorie $(C^{\cdot}, C^{o})$ est dite *représentable* si le foncteur insertion de la catégorie des 1-morphismes vers $C^{\cdot}$ admet un coadjoint. Une structure colibre associée à un sommet e est appelée une *représentation de* e.

PROPOSITION 6. *La 2-catégorie des transformations naturelles dans H est représentable, une représentation de la catégorie F dans H étant la*
1 *catégorie latérale des quatuors de F dans H.*

Δ. La catégorie des 1-morphismes s'identifie à $F(H)$. Soit F une catégorie dans H et $\hat{F}$ la catégorie latérale de ses quatuors. Nous reprenons les notations de la Proposition 1.

1° Il résulte de la Proposition 3 que

$$\bar{a} = v_2 . z_2 \quad \text{et} \quad \bar{b} = v_1 . z_1$$

définissent des foncteurs A et B dans H, de $\hat{F}$ vers F. Montrons que (B, s, A), où $s = F(2)$, est une transformation naturelle dans H, que nous noterons $J(F)$. En effet,

$$a . s . \hat{b} = a . v_1 . z_2 = b . v_2 . z_2 = b . \bar{a},$$
$$b . s . \hat{a} = b . v_2 . z_1 = a . v_1 . z_1 = a . \bar{b},$$
$$k . [s . \hat{b}, \bar{a}] = k . [v_1 . z_2, v_2 . z_2] = k . z_2 = k . z_1 =$$
$$= k . [v_1 . z_1, v_2 . z_1] = k . [\bar{b}, s . \hat{a}].$$

2° Soit F' une catégorie dans H et $\tilde{\theta} = (t', \theta, t) : F' \Rightarrow F$ une transformation naturelle dans H. Nous lui associons le foncteur $\Theta = D(\tilde{\theta})$. Pour toute unité e de H, la transformation naturelle

$$\Theta(e) : \hat{d}(F')(e) \Rightarrow \hat{d}(F)(e)$$

définit l'unique foncteur $\hat{T}(e) : \hat{d}(F')(e) \to \hat{d}(\hat{F})(e)$ tel que

$$\hat{d}(A)(e).\hat{T}(e) = \hat{d}(t)(e), \quad \hat{d}(B)(e).\hat{T}(e) = \hat{d}(t')(e),$$
$$\hat{T}(e)(f) = \theta . f \text{ pour tout } f \in F'(1).H.e \;;$$

autrement dit, $\hat{T}(e)$ est l'unique foncteur tel que

$$D(J(F))(e).\hat{T}(e) = \Theta(e),$$

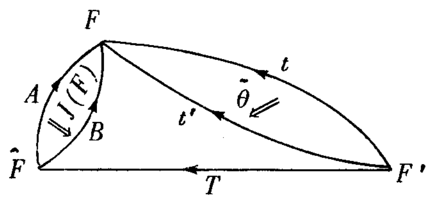
car

$$D(J(F))(e) = (\hat{d}(B)(e), Hom(s, e), \hat{d}(A)(e)).$$

On définit ainsi une transformation naturelle $\hat{T} : \hat{d}(F') \Rightarrow \hat{d}(\hat{F})$. A celle-ci est associé un unique foncteur $T : F' \to \hat{F}$ dans H tel que $\hat{d}(T) = \hat{T}$. Puisque

$$D(J(F).T) = D(J(F)).D(T) = D(J(F)).\hat{d}(T) = D(J(F)).\hat{T} = D(\tilde{\theta}),$$

le foncteur T dans H est l'unique foncteur dans H vérifiant $J(F).T = \tilde{\theta}$. Ceci montre que $J(F)$ définit $\hat{F}$ comme représentation de F.



∇

COROLLAIRE. *Si F et F' sont des catégories dans H, il existe une bijection de $N(F, F')$ sur l'ensemble des foncteurs dans H de F' vers $\boxminus_H F$.*

Δ. Ceci résulte de la proposition. D'une manière explicite, à une transformation naturelle $\tilde{\theta} = (t', \theta, t)$ entre F' et F dans H, on associe le foncteur de F' vers $\boxminus_H(F)$ dans H défini par le crochet

$$[[t'(2), i.a'], [i.b', t(2)]]$$

relativement au produit fibré $((k, z_1), (k, z_2))$. ∇

IV. SOUS-CATEGORIES STRUCTUREES. FAISCEAU ASSOCIE.

Dans cette partie, H désigne une catégorie à produits fibrés finis.

A. Sous-catégories d'une catégorie dans H.

Nous reprenons les notations de I.B et nous désignons par p un foncteur de H vers la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications compatible avec les produits fibrés finis. Si h est un morphisme de H, on notera par $\underline{h}$ l'application $p(h)$.

PROPOSITION 1. *Soit F une catégorie dans H et C la catégorie $\eta(p.F)$ déterminée par l'objet $p.F$ de $F(\mathfrak{M})$. Soit $f: s' \to F(2)$ un p-monomorphisme tel que $\underline{f}(\underline{s}')$ définisse une sous-catégorie de C. Il existe une catégorie F' dans H définie à une équivalence près, telle que f définisse un foncteur dans H de F' vers F.*

Δ. Nous reprenons pour F les notations de la Section I. Comme f est un p-monomorphisme, $\underline{f}$ est une injection et il existe une et une seule catégorie C' telle que $(C, \underline{f}, C')$ soit un foncteur. L'équivalence η' de $\mathcal{F}$ vers $F(\mathfrak{M})$ (Proposition 7-1) associe au foncteur $(C, \underline{f}, C')$ une transformation naturelle $\tau: \Phi' \to \Phi$ telle que $\tau(2) = \underline{f}$ et il existe une equivalence

$$\gamma: \Phi \to p.F \quad \text{telle que} \quad \gamma(2) = \underline{C}.$$

Il s'ensuit que f définit aussi l'élément $\tau' = \gamma \boxdot \tau: \Phi' \to p.F$ de $F(\mathfrak{M})$.

1° Puisque

$$p(i.a.f) = p.F(\iota.\alpha).\tau'(2) = \tau'(2).\Phi'(\iota.\alpha) = f.\Phi'(\iota.\alpha)$$

et que f est un p-monomorphisme, il existe un et un seul $\bar{a}'$ tel que

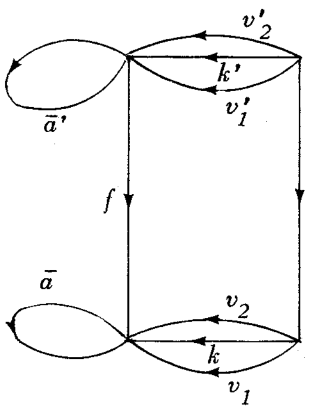
$$i.a.f = f.\bar{a}' \quad \text{et} \quad p(\bar{a}') = \Phi'(\iota.\alpha).$$

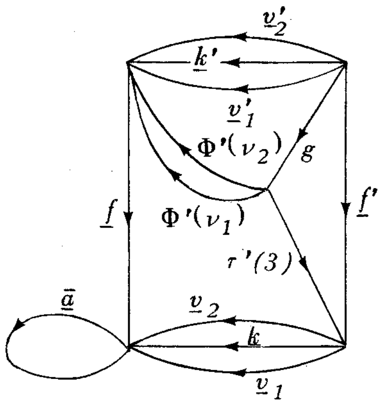
De même, il existe un et un seul $\bar{b}'$ tel que

$$i.b.f = f.\bar{b}' \quad \text{et} \quad p(\bar{b}') = \Phi'(\iota.\beta).$$

Soit $((\bar{a}', v'_1), (\bar{b}', v'_2))$ un produit fibré naturalisé dans H. Il existe un crochet $f' = [f.v'_1, f.v'_2]$ relatif au produit fibré $((i.a, v_1), (i.b, v_2))$, car

$$i.a.f.v'_1 = f.\bar{a}'.v'_1 = f.\bar{b}'.v'_2 = i.b.f.v'_2.$$





Le foncteur p étant compatible avec les produits fibrés finis, il existe un et un seul g tel que

$$\Phi'(\nu_1).g = \underline{v}'_1 \quad \text{et} \quad \Phi'(\nu_2).g = \underline{v}'_2 \,;$$

les égalités

$$\underline{v}_i.\tau'(3).g = \underline{f}.\Phi'(\nu_i).g = \underline{f}.\underline{v}'_i = \underline{v}_i.\underline{f}' \quad \text{où} \quad i = 1,\ 2,$$

entraînant $\underline{f}' = \tau'(3).g$, il en résulte

$$\underline{k}.\underline{f}' = \underline{k}.\tau'(3).g = \underline{f}.\Phi'(\kappa).g\,,$$

et, f étant un p-monomorphisme, il existe un et un seul k' tel que

$$k.f' = f.k' \quad \text{et} \quad p(k') = \Phi'(\kappa).g.$$

Ceci prouve qu'il existe un foncteur $G': U'' \to H$ défini par

$$G'(\iota.\alpha) = \bar{a}', \quad G'(\iota.\beta) = \bar{b}', \quad G'(\nu_i) = v'_i, \quad G'(\kappa) = k'\,;$$

en posant

$$t'(2) = f \quad \text{et} \quad t'(3) = f',$$

on définit une transformation naturelle t' de G' vers le foncteur restriction de F à U''.

2° D'après les Propositions 1-1, 3-1, G' s'étend en un et un seul foncteur $\bar{F}'$ de $\hat{U}$ vers H tel que $((v'_2, \bar{F}'(\nu_1)), (v'_1, \bar{F}'(\nu_2)))$ soit un produit fibré naturalisé donné. De même (en raisonnant dans $\boxminus H$), on voit que t' s'étend en une unique transformation naturelle $\bar{t}$ de $\bar{F}'$ vers $\bar{F}$, où $\bar{F}$ est le foncteur de $\hat{U}$ vers H déduit de F (voir I). Si nous montrons que

$$k'.\bar{F}'(j_\alpha) = s' = k'.\bar{F}'(j_\beta) \quad \text{et} \quad k'.\bar{F}'(\kappa_1) = k'.\bar{F}'(\kappa_2)\ ;$$

on déduira de la Proposition 3-1 que $\bar{t}$ admet pour restriction un foncteur dans H, noté $t\colon F' \to F$. Or, $\bar{t}$ étant une transformation naturelle on obtient

$$f.k'.\bar{F}'(j_\alpha) = \bar{t}(2).\bar{F}'(\kappa.j_\alpha) = F(\kappa.j_\alpha).\bar{t}(2) = \bar{t}(2) = f,$$
$$f.k'.\bar{F}'(j_\beta) = f.\bar{F}'(\kappa.j_\beta) = F(\kappa.j_\beta).f = f,$$
$$f.k'.\bar{F}'(\kappa_1) = \bar{t}(2).\bar{F}'(\kappa.\kappa_1) = F(\kappa.\kappa_1).\bar{t}(4) = F(\kappa.\kappa_2).\bar{t}(4) =$$
$$= \bar{t}(2).\bar{F}'(\kappa.\kappa_2) = f.k'.\bar{F}'(\kappa_2),$$

1 ce qui donne les égalités voulues, f étant un monomorphisme. ∇

Soit $\overline{p_{\mathcal{F}}}$ le foncteur de la catégorie $F(H)$ des foncteurs dans H, vers $\mathfrak{M}$ associant $p(t(2))$ à t.

PROPOSITION 2. *Soit $t\colon F' \to F$ un foncteur dans H. Si $t(2)$ est un p-monomorphisme, t est un $\overline{p_{\mathcal{F}}}$-monomorphisme.*

Δ. Soit $t(2)$ un p-monomorphisme ; posons $t(2) = f$ et supposons que $t'\colon F'' \to F$ soit un foncteur dans H et $\underline{h}$ une application vérifiant

$$\overline{p_{\mathcal{F}}}(t') = \overline{p_{\mathcal{F}}}(t).\underline{h} = \underline{f}.\underline{h}.$$

Comme $\underline{f}' = \underline{f}.\underline{h}$, où $f' = t'(2)$, et comme f est un p-monomorphisme, il existe un et un seul h tel que $f.h = f'$ et $p(h) = \underline{h}$. Nous allons montrer que h définit un foncteur de F'' vers F', c'est-à-dire vérifie les conditions de la Proposition 4-1 ; il s'ensuivra que t est un $p_{\mathcal{F}}$-monomorphisme. Or, prenant des notations analogues pour F, F' et F'', nous obtenons les égalités :

$$f.i'.a'.h = i.a.f.h = i.a.f' = f'.i''.a'' = f.h.i''.a'',$$

qui entraînent

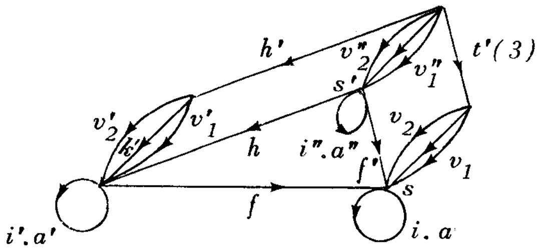
$$i'.a'.h = h.i''.a'' \ ; \ \text{de même} \ i'.b'.h = h.i''.b''.$$

Désignons par h' le crochet $[h.v''_1, h.v''_2]$ relativement au produit fibré $((a', v'_1), (b', v'_2))$; on a $t(3).h' = t'(3)$, car

$$v_j.t(3).h' = f.v'_j.h' = f.h.v''_j = f'.v''_j = v_j.t'(3),$$

pour $j = 1, 2$. Il s'ensuit

$$f.k'.h' = k.t(3).h' = k.t'(3) = f'.k'' = f.h.k'',$$



d'où $k'.h' = h.k''$. Donc h définit un foncteur de F'' vers F'. ∇ 1

DEFINITION. Un foncteur $t: F' \to F$ dans H tel que $t(2)$ soit un p-monomorphisme est appelé $\overline{p}_{\mathfrak{F}}$*-monomorphisme strict*, et F' est dite sous-catégorie *p-stricte de* F *dans* H. En particulier, avec les notations de la proposition précédente, F' est dite *sous-catégorie de* F *dans* H *définie par* $f = t(2)$.

B. Sous-catégories engendrées dans H.

Dans la suite, $\hat{\mathfrak{M}}$ désigne la catégorie des applications associée à un univers $\hat{\mathfrak{U}}$ contenant $\mathfrak{U}$ et $\overline{\mathfrak{U}}$ est l'ensemble des éléments de $\hat{\mathfrak{U}}$ équipotents à un élément de $\mathfrak{U}$. On note P un foncteur d'une catégorie $\hat{H}$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ à produits fibrés finis et on pose $P(h) = \underline{h}$ si $h \in \hat{H}$. Enfin, $\hat{X}$ est un ensemble donné de P-monomorphismes.

Si $\hat{s}$ est une unité de $\hat{H}$ et g une application de $A \in \hat{\mathfrak{U}}$ dans $\underline{\hat{s}}$ on dit que j *est un* $(P, \hat{X})$*-sous-morphisme de* $\hat{s}$ *engendré par* g si: 2

1° $j \in \hat{s}.\hat{X}$ et $g \in \underline{j}.\hat{\mathfrak{M}}$;

2° on a $j \in j'.\hat{H}$ lorsque $j' \in \hat{s}.\hat{X}$ et $g \in \underline{j'}.\hat{\mathfrak{M}}$.

Remarquons que j est un $(P, \hat{X})$-sous-morphisme de $\hat{s}$ engendré par g ssi j est un $(P, \hat{X})$-sous-morphisme de $\hat{s}$ engendré par l'inclusion de $g(A)$ dans $\underline{\hat{s}}$.

Nous désignerons par $\langle N \rangle$ la sous-catégorie du groupoïde des couples $(N \times N)^{\circ}$ formée des couples d'entiers (n', n) tels que $0 < n \leq n'$, qui est associée à l'ordre sur N. Si n est un entier, $\langle n \rangle$ désigne la sous-catégorie pleine de $\langle N \rangle$ ayant pour objets les m tels que $0 < m < n$.

DEFINITION. On dit que P *est dénombrablement* $(\hat{\mathfrak{M}}, \hat{X})$*-engendrant* si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° P est $(\mathfrak{M}, \hat{X})$-engendrant, i.e. pour toute unité $\hat{s}$ de H et toute application g de A dans $\underline{\hat{s}}$, où A appartient à $\mathfrak{U}$, il existe un $(P, \hat{X})$-sous-morphisme de $\hat{s}$ engendré par g.

2° Soit $\Phi : \langle \mathrm{N} \rangle \to H$ un foncteur et t une transformation naturelle de Φ vers un foncteur constant telle que $t(n) \in \hat{X}$ pour tout entier n. Alors, il existe une limite inductive naturalisée t' de Φ telle que $p\,t'$ soit une limite inductive naturalisée et que l'on ait $lim_{t'}\,t \in \hat{X}$, où $lim_{t'}\,t$ est l'unique h vérifiant $t(n) = h \,.\, t'(n)$ pour tout entier n.

D'après la remarque ci-dessus, la condition 1 équivaut à :

1'° Pour toute unité $\hat{s}$ de $\hat{H}$ et toute partie A' de $\underline{\hat{s}}$ appartenant à $\bar{\mathfrak{U}}$, il existe un $(P, \hat{X})$-sous-morphisme de $\hat{s}$ engendré par l'insertion de A' dans $\underline{\hat{s}}$.

Si P est saturé (i.e. si, lorsque $\hat{s}$ est une unité de $\hat{H}$ et $\underline{f} : \underline{\hat{s}} \to B$ une bijection, il existe un inversible f de H de source $\hat{s}$ appliqué sur $\underline{f}$ par P), et si $\hat{X}$ est l'ensemble des P-monomorphismes dont la source
1 est appliquée par P sur un élément de $\bar{\mathfrak{U}}$, la condition 2 équivaut à :

2'° Si $(s_n)_{n \in \mathrm{N}}$ est une suite de P-sous-structures d'une unité $\hat{s}$ de $\hat{H}$ telle que $\underline{s}_n \subset \underline{s}_{n+1} \in \bar{\mathfrak{U}}$ pour tout entier n, alors il existe une P-sous-structure s de $\hat{s}$ telle que $\underline{s} = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} \underline{s}_n$.

Considérons la catégorie $F(\hat{H})$ des foncteurs dans $\hat{H}$ et le foncteur $\bar{P}_{\mathcal{F}}$ de $F(\hat{H})$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ associant $P(t(2))$ au foncteur t dans $\hat{H}$. Soit $\hat{X}_F$ l'ensemble des foncteurs t dans $\hat{H}$ tels que $t(2)$ appartienne à $\hat{X}$. D'après la Proposition 2, $\hat{X}_F$ est formé de $\bar{P}_{\mathcal{F}}$-monomorphismes.

PROPOSITION 3. *On suppose que $\underline{\hat{s}}$ appartient à $\bar{\mathfrak{U}}$, pour toute source $\hat{s}$ d'un élément de $\hat{X}$. Si P est dénombrablement $(\mathfrak{M}, \hat{X})$-engendrant et à produits fibrés finis, $\bar{P}_{\mathcal{F}}$ est $(\mathfrak{M}, \hat{X}_F)$-engendrant.*

Δ. Soit F une catégorie dans $\hat{H}$; nous reprenons pour F les notations de I. Soit A une partie de $\underline{s}$, où $s = F(2)$, telle que A appartienne à $\bar{\mathfrak{U}}$. Il suffit de montrer que l'insertion $j : A \to \underline{s}$ engendre un $(\bar{P}_{\mathcal{F}}, \hat{X}_F)$-sous-morphisme de F.

1° Soit C la catégorie déterminée par $P.F$. Nous allons construire un «plus petit» élément f de $\hat{X}$ tel que l'application $\underline{f}$ définisse un foncteur vers C ; d'après la Proposition 1, il s'ensuivra que f définit un foncteur dans H vers F.

a) Soit A_1 la sous-catégorie de C engendrée par A ; nous notons j_1 l'insertion de A_1 dans $C_1 = \underline{s}$ et i_1 l'insertion de A dans A_1, de sorte que l'on a $j = j_1 . i_1$. Comme A appartient à $\bar{\mathfrak{U}}$, l'ensemble A_1 $\dot{y}$ appartient aussi. Fn effet, le sous-graphe du graphe sous-jacent à C engendré par A est défini par $\Gamma = \alpha(A) \cup \beta(A) \cup A$, qui appartient à l'univers $\bar{\mathfrak{U}}$; la classe $L(\Gamma)$ des chemins propres de Γ est une partie de $\bigcup_{n \in \mathrm{N}} \Gamma^n$, réunion qui appartient à $\bar{\mathfrak{U}}$, car N et les Γ^n y appartiennent. Par suite, $L(\Gamma)$ appartient à $\bar{\mathfrak{U}}$, de même que son image A_1 par l'application qui associe à un chemin son composé dans C.

b) Puisque A_1 appartient à $\bar{\mathfrak{U}}$, il existe un $(P, \hat{X})$-sous-morphisme f_1 de s engendré par j_1 ; soit s_1 sa source ; en particulier il existe une et une seule application g_1 de A_1 dans $\underline{s}_1$ telle que $j_1 = \underline{f}_1 . g_1$. Soit n un entier et supposons construits un foncteur $\Phi_n : \langle n+1 \rangle \to \hat{H}$, une transformation naturelle t_n de Φ_n vers le foncteur $s^{\wedge}$ constant sur s telle que

$$f_n = t_n(m) : s_n \to s \quad \text{appartient à} \quad \hat{X} \quad \text{pour tout} \quad m < n,$$

et une suite croissante $(A_m)_{m \leq n}$ de sous-catégories de C vérifiant :

$(1n)$ $\Phi_n(1) = s_1, \quad t_n(1) = f_1$,

$(2n)$ $j_n = \underline{f}_n . g_n$, où $j_n : A_n \to \underline{s}$ est l'insertion, si $m \leq n$.

Comme f_n appartient à $\hat{X}$, on a

$$\underline{s}_n \in \bar{\mathfrak{U}} \quad \text{et} \quad \underline{f}_n(\underline{s}_n) \in \bar{\mathfrak{U}},$$

de sorte que la sous-catégorie A_{n+1} de C engendrée par $\underline{f}_n(\underline{s}_n)$ vérifie $A_{n+1} \in \bar{\mathfrak{U}}$; soit $i_{n+1} : \underline{s}_n \to A_{n+1}$ l'application restriction de f_n. Le foncteur P étant $(\mathfrak{M}, \hat{X})$-engendrant, il existe un $(P, \hat{X})$-sous-morphisme f_{n+1} de s engendré par l'insertion $j_{n+1} : A_{n+1} \to \underline{s}$; notons $\underline{s}_{n+1}$ la source de f_{n+1} et considérons l'unique application

$$g_{n+1} : A_{n+1} \to \underline{s}_{n+1} \quad \text{telle que} \quad j_{n+1} = \underline{f}_{n+1} . g_{n+1}.$$

Puisque f_{n+1} est un P-monomorphisme de but s et que

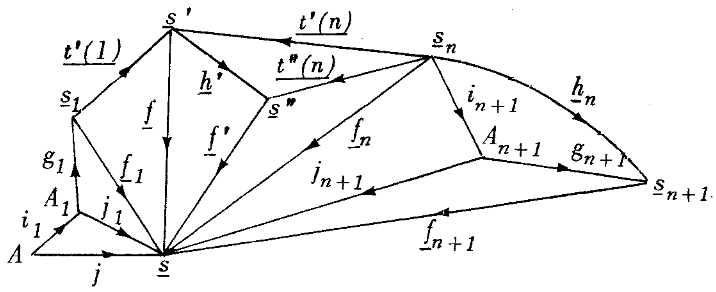
$$\underline{f}_n = j_{n+1} \cdot i_{n+1} = \underline{f}_{n+1} \cdot g_{n+1} \cdot i_{n+1} ,$$

il existe un et un seul h_n tel que

$$f_{n+1} \cdot h_n = f_n \quad \text{et} \quad \underline{h}_n = g_{n+1} \cdot i_{n+1} .$$

Il en résulte que l'on définit un foncteur $\Phi_{n+1} : \langle n+2 \rangle \to \hat{H}$ et une transformation naturelle $t_{n+1} : \Phi_{n+1} \to s^{\wedge}$ étendant t_n et vérifiant les conditions $(1n+1)$ et $(2n+1)$ en posant :

$$\Phi_{n+1}(n+1, n) = h_n \quad \text{et} \quad t_{n+1}(n+1) = f_{n+1} \in \hat{X} .$$



c) Par récurrence, on définit donc des suites croissantes de foncteurs $(\Phi_n)_{n \in \mathrm{N}}$ et de transformations naturelles $(t_n)_{n \in \mathrm{N}}$ vérifiant les conditions $(1n)$ et $(2n)$. Soit Φ le foncteur de $\langle \mathrm{N} \rangle$ vers $\hat{H}$ ayant les Φ_n pour restrictions et t la transformation naturelle telle que

$$t(n) = t_n(n) \quad \text{pour tout entier} \quad n .$$

Le foncteur P étant $(\mathfrak{M}, \hat{X})$-engendrant, il existe une limite inductive naturalisée $t' : \Phi \to s'^{\wedge}$ telle que pt' soit une limite inductive naturalisée dans $\hat{\mathfrak{M}}$ et que $f = \lim_{t'} t$ appartienne à $\hat{X}$.

d) L'ensemble $C' = \bigcup_{n \in \mathrm{N}} A_n$ définit une sous-catégorie de C, puisque c'est la réunion d'une suite croissante de sous-catégories de C. Montrons que $C' = \underline{f}(\underline{s}')$. L'égalité

$$j_n = \underline{f}_n \cdot g_n = \underline{f} \cdot \underline{t'(n)} \cdot g_n$$

entraîne $A_n \subset \underline{f}(\underline{s}')$, pour tout entier n, d'où $C' \subset \underline{f}(\underline{s}')$. Inversement, soit x' un élément de $\underline{s}'$; par construction des limites inductives dans $\hat{\mathfrak{M}}$, il existe un entier n et un x dans $\underline{s}_n$ tel que $x' = \underline{t'(n)}(x)$; il s'ensuit

$$\underline{f}(x') = \underline{f}_n(x) \in A_{n+1} \subset C'.$$

Au total, $C' = \underline{f}(\underline{s}')$.

e) f étant un P-monomorphisme et $\underline{f}(\underline{s}')$ définissant la sous-catégorie C' de C, l'injection $\underline{f}$ définit un foncteur vers C. Par suite, la Proposition 1 assure l'existence d'une catégorie F' dans H et d'un foncteur $r : F' \to F$ dans H vérifiant $r(2) = f \in \hat{X}$.

2° Montrons que r est un $(\bar{P}\mathcal{F}, \hat{X}_F)$-sous-morphisme de F engendré par l'insertion j de A dans $\underline{s}$.

a) Par construction, r est un élément de $\hat{X}_F$ de but F. De plus,

$$j = j_1 \cdot i_1 = \underline{f}_1 \cdot g_1 \cdot i_1 = \underline{f} \cdot \underline{t'(1)} \cdot g_1 \cdot i_1 \in \underline{f} \cdot \hat{\mathfrak{M}}.$$

b) Soit $r': F'' \to F$ un élément de $\hat{X}_F$ tel que $j \in \bar{P}\mathcal{F}(r') \cdot \hat{\mathfrak{M}}$. Posons $f' = r'(2)$ et $F''(2) = s''$. On a $f' \in \hat{X} \cdot s''$ et $\underline{f}'(\underline{s}'')$ définit une sous-catégorie C'' de C contenant $A = j(A)$, et a fortiori A_1, c'est-à-dire j_1 appartient à $\underline{f}' \cdot \hat{\mathfrak{M}}$. Puisque f_1 est le $(P, \hat{X})$-sous-morphisme de s engendré par j_1, il existe un unique

$$t''(1) \in s'' \cdot \hat{H} \cdot s_1 \quad \text{tel que} \quad f' \cdot t''(1) = f_1.$$

Supposons construite une transformation naturelle $t''_n : \Phi_n \to s''^{\wedge}$ telle que

$$t''_n(1) = t''(1) \quad \text{et} \quad f' \cdot t''_n(m) = f_m \quad \text{si } m \leq n.$$

Alors $\underline{f}_n(\underline{s}_n)$ est contenu dans $\underline{f}'(\underline{s}'')$, de sorte que la sous-catégorie A_{n+1} de C engendrée par $\underline{f}_n(\underline{s}_n)$ est contenue dans C'', c'est-à-dire : $j_{n+1} \in \underline{f}' \cdot \hat{\mathfrak{M}}$. Etant donné que f_{n+1} est le $(P, \hat{X})$-sous-morphisme de s engendré par j_{n+1} et que f' appartient à $\hat{X}$, il existe un et un seul h'_{n+1} tel que $f' \cdot h'_{n+1} = f_{n+1}$. Les égalités

$$f' \cdot h'_{n+1} \cdot \Phi(n+1, n) = f_{n+1} \cdot \Phi(n+1, n) = f_n = f' \cdot t''(n)$$

entraînent $h'_{n+1} \cdot \Phi(n+1, n) = t''_n(n)$, car f' est un monomorphisme. On définit donc une transformation naturelle $t''_{n+1} : \Phi_{n+1} \to s''^{\wedge}$ étendant t''_n en posant $t''_{n+1}(n+1) = h'_{n+1}$. Par récurrence, on en déduit une transformation naturelle t'' de Φ vers $s''^{\wedge}$ telle que $f' \cdot t''(n) = f_n$ pour tout entier n. Il existe un et un seul $h' = lim_{t'} t''$ tel que

$$h' \cdot t'(n) = t''(n) \quad \text{pour tout entier } n.$$

On a $f'.h' = f$, car

$$f'.h'.t'(n) = f'.t''(n) = f_n = f.t'(n)$$

pour tout entier n. Comme t' est un $\bar{P}\mathcal{F}$-monomorphisme (Proposition 2), il existe un unique foncteur $r'': F' \to F''$ dans H vérifiant

$$r''(2) = h' \qquad \text{et} \quad r' \boxdot r'' = r.$$

Ainsi r est un $(\bar{P}\mathcal{F}, \hat{X}_F)$-sous-morphisme de F engendré par j. ∇

C. Applications.

Nous supposons ici que $\hat{P}$ est un foncteur de $\hat{H}$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$ à produits fibrés finis et $p: H \to \mathfrak{M}$ sa restriction à la sous-catégorie pleine H définie par $\bar{P}^{1}(\mathfrak{M})$. Enfin $\hat{X}$ est un ensemble de P-monomorphismes dont les sources appartiennent à H. De plus les conditions suivantes sont remplies :

1° $\underline{H}$ appartient à l'univers $\hat{\mathfrak{U}}$ et P est à J-produits si $J \in \hat{\mathfrak{U}}$.

2° Tout couple (h', h'') d'éléments de H de même source et même but admet un noyau n dans p tel que $\hat{X}.n \subset \hat{X}$.

3° P est dénombrablement $(\mathfrak{M}, \hat{X})$-engendrant.

PROPOSITION 4 *(Théorème du faisceau associé). Sous les hypothèses précédentes :*

1° Le foncteur insertion de $F(H)$ vers la catégorie H^{U_F} de tous les foncteurs de U_F vers H admet un adjoint;

2° $F(H)$ est à K-limites inductives pour toute catégorie K, où $\underline{K} \in \hat{\mathfrak{U}}$;

3° Le foncteur $\bar{p}\mathcal{F}$ de $F(H)$ vers $\mathfrak{M}$ admet un adjoint.

Δ. 1° Le foncteur insertion $I: F(\hat{H}) \to \hat{H}^{U_F}$ est à $\hat{\mathfrak{U}}$-produits (Section II) et à noyaux, car P est à limites finies et $\hat{\mathfrak{U}}$-produits. Le foncteur

$$\hat{H}^{U_F} \to \hat{\mathfrak{M}} : t \mapsto P(t(2))$$

admet $\bar{P}\mathcal{F}$ pour restriction à $F(\hat{H})$. Comme $\underline{H}$ appartient à $\hat{\mathfrak{U}}$ par hypothèse, l'ensemble $\underline{H^{U_F}}$ des transformations naturelles de la catégorie finie U_F vers H appartient aussi à $\hat{\mathfrak{U}}$. Enfin $\bar{P}\mathcal{F}$ est $(\mathfrak{M}, \hat{X}_F)$-engendrant, vu
1 la Proposition 3. Ainsi les conditions du critère d'existence de structures libres sont vérifiées, de sorte que I admet un adjoint I'.

2° Le foncteur $\bar{p}\mathcal{F}$ est la restriction de $\bar{P}\mathcal{F}$ à des sous-catégories pleines. Or $\overline{P}_{\mathcal{F}}$ est $(\mathfrak{M}, \hat{X}_F)$-engendrant et à K-limites projectives, pour toute catégorie K telle que K appartienne à $\hat{\mathfrak{M}}$. Il résulte du théorème d'existence d'adjoints que $\overline{p}_{\mathcal{F}}$ admet un adjoint et que $F(H)$ est à K-limites inductives. Un foncteur $G: K \to F(H)$ admet pour limite inductive $I(F)$ si F est une limite inductive de $I.G$ (il en existe, la catégorie H^{U_F} ayant des limites inductives qui se calculent «terme à terme» à partir des limites inductives dans H, car H est à K-limites inductives en vertu du théorème général d'existence de limites inductives dont les hypothèses sont remplies par $\hat{H}$, P).

REMARQUE. 1° Bien d'autres théorèmes d'existence d'adjoints peuvent se déduire de même de la Proposition 3. Ainsi $F(H) \hookrightarrow H^{\Delta^*}$ a un adjoint.

2° Souvent p et P seront de la forme $\prod_{e \in \Omega} Hom_H(-, e)$, où Ω est un ensemble d'unités de H. Si P est fidèle, $\hat{X}$ pourra être l'ensemble des noyaux dans $\hat{H}$ dont la source appartient à H.

1+

EXEMPLES. La catégorie $F(\mathfrak{F})$ dse foncteurs doubles est à K-limites inductives, pour toute «petite» catégorie K. Son foncteur d'oubli vers $\mathfrak{M}$ admet un adjoint et la catégorie des objets simpliciaux dans $\mathfrak{F}$ est à $F(\mathfrak{F})$-projections. Il en est de même pour la catégorie $F(\mathcal{T})$ des catégories topologiques et la catégorie des catégories sous-préinductives.

CAHIERS DE TOPOLOGIE VIII
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

/94/

TRENDS TOWARD UNITY IN MATHEMATICS

by Charles EHRESMANN(*)

Though mathematical results are commonly considered as being immutable truths, Mathematics is not a rigid body of theorems, or perhaps a somewhat expanding collection of theorems, giving rise to more or less complicated exercises as well as to numerous applications in other sciences, but really it is a living science, actually in rapid evolution. And this is a time of proliferation of mathematics; however we can recognize also signifiant trends toward unity.

The same development which leads to a new literature where novels do not need to have a plot, to an abstract music, sometimes written by a computer, to abstract sculpture and painting, which do not intend to give an ordinary representation of real objects, this same development toward abstraction leads to a kind of Mathematics much less motivated by possible applications than by a profound desire to find in each problem the very essence of it, the general structure on which it depends. This is not surprising, for Mathematics is very akin to Art; a mathematical theory not 1
only must be rigourous, but it must also satisfy our mind in quest of simplicity, of harmony, of beauty; and a beautiful theory is an inspired creation like a piece of Art.

For the Platonists among the mathematicians, the motivation of their work lies in this search for the true structure in a given situation and in the study of such an abstract structure for itself. For the more pragmatic mathematician, the purpose of his efforts is to solve a preassigned problem arising in pure or applied Mathematics with any means at his disposal, avoiding as much as possible the introduction of new general concepts. But

---

(*) Talk given at the Honors Dinner of the Department of Mathematics of the University of Kansas, Lawrence, April 25, 1966.

all mathematicians agree that the value of a work in mathematics is best proved if it stimulates new research, and the main range of applications of mathematics is Mathematics itself.

1 Until recently most philosophers, even Bergson, talked about Mathematics as a science concerned with numbers and with quantities in ordinary space, but this is no longer adequate and corresponds more or less to the mathematics of the classical Greeks.

For the Greeks, Mathematics was Arithmetics, i.e. the science of natural numbers, and Geometry, i.e. the study of figures and of ratios of geometrical quantities in ordinary space. Their Geometry was really an axiomatic theory, but they thought the axioms were imposed by «evidence» and in fact they implicitly assumed more axioms than they explicitly stated. It may surprise that they never introduced the notion of a real number,
2 though Eudoxe's theory of ratios of quantities was not essentially different from the definition of real numbers given by Dedekind more than 20 centuries later. This abstraction which consists in considering as a new object a class of previously known objects, in this case a class of rational
3 numbers, was entirely foreign to their mind. Even Archimedes, who invented new domains like Statics and Hydrodynamics, and opened the way for integration theory, was not willing to define abstractly real numbers. After him the urge for invention seemed to be exhausted and Mathematics slumbered throughout the Middle Ages.

The revival came through the introduction of new notions of numbers, the negative numbers and the imaginary numbers by the italian mathematicians of the 16th century, and the introduction of algebraic notations by Viete. The Greeks had a kind of geometrical algebra, but they had no algebraic notations, so that their works are very difficult to read.

A new impulse came from Descartes and Fermat who unified Algebra and Geometry in Analytical Geometry. The problem of the definition and of the determination of the tangent to a curve, already solved in very special cases (for example the spiral by Archimedes) could now be studied in an efficient way and led to the discovery of differential Calculus by Newton and Leibniz. It seems that Leibniz had guessed many of the future developments of Mathematics. Not only did he introduce clearly the notion of a function as a mathematical object, and so prepared the path to functional Analysis, but in his unachieved theory of universal characteristics he dreamed to uncover the algebraic structure of all things and to introduce an universal algorithm to express it. So he was not satisfied with Descartes' analytic Geometry which uses arbitrarily a coordinate system; confusely he foresaw an intrinsic algorithm for Geometry, dream which may be considered as partially realized in linear algebra and Grassmann algebra. Unfortunately his ideas were too advanced for his time and he had not followers enough to persevere in this trail. However his work on differential and integral Calculus was adopted, especially with his notations, and Calculus became for a long period the principal domain of Mathematics.

A further advance came from the discovery in the 19th century of non-euclidean geometries (Lobatchewsky, Bolyai). Now all the ancient bounds of Mathematics were broken : Euclidean Geometry was no longer imposed by perception, but it was a human creation based on axioms; and many other systems of axioms could be devised. Kant's «a priori» of our conception of space becomes hereby obsolete. What was then the essence of Geometry ? The unifying and generalizing notion for the geometries of that time was discovered in the notion of a space with a transitive group of transformations, the group of the euclidean geometry being the group of euclidean displacements. Thus Geometry becomes the theory of invariants
and covariants of a group of transformations. In fact this definition applies 1
only to geometries of homogeneous spaces, and already other geometries were discovered and the need for different generalizations was felt. This led ultimately to the definition of topological spaces, which is the proper setting for all questions concerning continuity, limits and approximations, stressing the common structure underlying most problems of Analysis and Geometry.

At the same period Cantor's theory of sets appeared and became more and more the unifying basis of all Mathematics. It was a new abstraction. From now on «Mathematics is entirely free in its developments», as

says Cantor, «and its concepts have only to be non contradictory and linked with concepts previously introduced by precise definitions». Though paradoxes were discovered soon after, endangering the whole theory of sets and hence the whole edifice of Mathematics, Cantor's masterpiece opened
1 the road to modern mathematical thinking.

The freedom in the creation of mathematical theories has led since the beginning of our century to a multitude of new kinds of structures considered on sets : Besides the various types of algebraic structures (like groups, rings, fields, semi-groups, modules, algebras, Lie algebras, etc...), there are the structures of measure and of probability theory and the numerous refinements of topological structures: uniform structures, metric spaces, topological manifolds, differentiable or analytic manifolds with all sorts of infinitesimal structures like riemannian structures and connections, algebraic manifolds, etc... By association of different structures on the same set, new structures are created such as Lie groups, topological vector spaces, Banach spaces, Hilbert spaces, normed algebras, etc... These structures have mostly been introduced for the needs of pure Mathematics, but naturally they will have ever more applications in other fields as soon as they will be more generally known, and the utilizers of Mathematics will be more and more numerous.

After the introduction of all these different kinds of structures, the necessity of unification was deeply felt; without some unifying theory following a period of rapid expansion, the mathematicians would fatally tend to use divergent, incompatible languages, like the builders of the tower of Babel.

Considering the similarities of all theories, a unification is obtained by giving a general definition of the notion of a structure, or more precisely of a species of structures over sets. This idea is developed by Bourbaki and is the basis of the order and contents of his treatise «Eléments de Mathématiques». The two initial structures considered in Mathematics, the set of integers and the euclidean space, once axiomatically defined, correspond to rigid species of structures over sets, i.e. the structures of such a species are all isomorphic. The species of structures over sets introduced more recently (for example groups or topologies) do not have this rigidity.

The theory of structures over sets admits a more general and axiomatic form within the theory of categories and functors, and this theory of 1
categories seems to be the most characteristic unifying trend in present day Mathematics; for that reason I think it will soon have to be taught at the University level like other fundamentals, as early as linear Algebra or Topology.

A category is a class together with a partially defined law of composition satisfying some axioms. A group is a particular category, with only inversible elements and one unit; but the most typical categories are the categories of mappings, the elements of which are mappings of a set into a set with the usual composition of mappings. The axioms of an abstract category are suggested by these categories of mappings. An element of a category, instead of mapping, is called a morphism and pictured as an arrow from one unit, its source, to another unit, its target. So this general notion of a morphism generalizes the notion of a mapping, which was considered by Dedekind as the basic tool of Mathematics.

Functors are mappings between categories compatible with the laws of composition. They are again morphisms of a category, the category of functors. The usual homomorphisms between the structures of a given species of structures over sets are the morphisms of a category, and this category admits a canonical functor toward a category of mappings; it is the forgetting functor, i.e. forgetting the structures and remembering only the underlying sets. For example, we have the forgetting functor from the category of continuous mappings between topological spaces, or the forgetting functor from the category of homomorphisms between groups.

Now more abstractly we may consider a functor p from a category H toward a category C. A unit (or object) S of the category H will then be called a structure relative to the functor p, or a p-structure, on the unit $p(S)$ of the category C. So H is considered as a category of morphisms

between p - structures. Surprisingly, most of the results obtained for specific species of structures over sets can be integrated in a general theory of p - structures, where one defines and studies sub-structures, quotient
1 structures, free structures, products and sums of families of structures, inductive and projective limits of a functor, etc... At present, given this definition of a p- structure as a precise mathematical object, mathematical
2 research, I believe, will be less concerned with the study of a given p - structure or even of a given functor p; instead its aim will be to define classes of functors p such that, for the corresponding p - structures, a certain theorem previously established for a particular functor p be valid. Once the true reasons for the validity of this theorem are understood, it will generally be seen that only a few of the assumptions are really necessary, and so the class of functors p to which the idea of the theorem may be extended contains many functors besides the original one. In particular, it may contain well known functors to which the initial theorem did not seem to apply. For example, the theorems of compactification of a topological space, of completion of a uniform space, the construction of a free group, a free module, or generally a free algebraic structure generated by a given set, are all special cases of an abstract existence theorem of free p - structures.

Naturally the scheme just described is merely a rough scheme. In fact it is only the creative power of a mathematician which will enable him to discover interesting new classes of functors. As we have seen, one characteristic creative process in Mathematics consists in recognizing as a new object a class of previously defined objects. Have we just reached a stage of the same kind but of superior order when we begin to study classes of functors and, once this new theory will be again sufficiently entangled and sophisticated, will it be necessary to discover a higher degree of unification ? We will not try to answer this question. Yet we realize more and more that Mathematics is a never finished creation, which has not to justify its existence by the importance and the expanding number of its appli-
3 cations; it is not just the «bulldozer of Physics». It is the key for the

understanding of the whole Universe, unifying all human thinking, from
Sciences to Philosophy and Metaphysics. So the great ideal of Plato and
Leibniz, the ideal of Mathematics as the essence of all knowledge, might 1
at last be attained.

COMMENTS ON PART III-2

by Andrée CHARLES EHRESMANN

INTRODUCTION

The general motivations, contents and conventions are explained in the Introduction to the comments of Part III-1. So we only point out peculiar features of this Part III-2.

While the papers in Part III-1 were full-length or summaries of such ones, several articles reproduced here have been written very quickly (the Notes were often transmitted to the «Académie» on the day they were finished) with the idea of a future development which was not realized. The corresponding comments (which use unpublished material, e.g. lecture notes) provide the missing proofs /60, 89, 90, 95/, correct eventual errors /95, 96/, show how modern tools help to enlight and strengthen some results /73, 77, 87, 104/.

The first section of the Report /93/ is an introduction to the theory of sketches which is one of the subjects of Part IV-1; further comments on it will be given there. Less mathematical recollections illustrate the Note /94/ which exhibits Charles's enthusiastic conception of Mathematics and of the central role of Category Theory, in the sixties.

On the suggestion of some readers, the Synopsis is expanded to include «modern translations» of the main results, with simplified or generalized versions of groups of papers.

Finally, the terminology is modified on two points:

1° A functor $p: H \to K$ is said to *lift (canonical) limits* indexed by I if, whenever $F: I \to H$ is a functor and $t: u \Rightarrow p.F$ is a (canonical) limit cone in K, there exists a limit cone $\hat{t}: \hat{u} \Rightarrow F$ in H such that $p\,\hat{t} = t$.

In Part III-1, the term «create» was used i.o. «lift»; but this is rather confusing, since «create» generally (e.g. in [74]) means that each cone

$$t': u' \Rightarrow F \quad \text{such that} \quad p\,t' = t$$

be a limit cone (this condition is not satisfied by very usual functors).

2° In Part III-1, Gray's terminology [133] for fibrations was followed. Here we adopt the dual Grothendieck's one: A *fibration* is a functor with final (i.o. initial) lifts of singletons and (unless specified) with a given normal cleavage. These fibrations which are associated to *Cat*-valued functors are frequently used in the papers and the comments.

As in Part III-1, the comment numbered Y.X is the X^{th} comment on page Y. The symbol:

¶ warns of real flaws or omissions,

+ indicates more substantial addenda.

GENERAL COMMENTS

ON /59/ : CATÉGORIES STRUCTURÉES D'OPÉRATEURS.

This Note has not been developed elsewhere, except in series of unpublished lectures.

431.1. This condition is not clearly stated ; it should read :

If $p_0(\sigma) = \alpha^{\cdot}(\alpha^{1}(f))$, then both composites $\beta^{1}(f)(\alpha^{\cdot}(f)\sigma)$ and $\beta^{\cdot}(f)(\alpha^{1}(f)\sigma)$ are defined and they are equal.

It implies that the two species of structures are strong in the sense of Comment 23.1. Hence the definition means that $\mathcal{C}^{\cdot}_{0}$ and $\mathcal{C}^{1}_{0}$ act on Σ_0 and these two actions commute.

431.2. The last f is inverted.

432.1. For the condition A to be equivalent to B and C, it is necessary that :

- $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ in B or C,
- or $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{1})$ be replaced by the double category $(\mathcal{C}^{\cdot}_{1}, \mathcal{C}^{1}_{1})$ in A.

The proof follows from the equivalence between the category of strong species of structures, the category of discrete fibrations and the category of generalized functors (cf. Comment 25.1).

432.2. R. $\mathcal{S}^{\cdot}_{0}$ i.o. $\mathcal{S}^{1}$.

433.1. For more comments on species of structures dominated in the category of species of structures, cf. /77/ and its Comments.

433.2. Condition (3+4) is not strong enough ; later on /89/ it has been replaced by:

3'° There exists a pullback

$$\begin{tikzcd} \sigma \arrow[d, "\pi"'] & s'' \arrow[l] \arrow[d] \\ s & s \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

where α is the source morphism of $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$, and $(s, \kappa, s'') \in \mathcal{K}$.

Then it is not necessary that p lifts products. If p lifts canonical products and pullbacks, both definitions are equivalent.

A more general study of internal category actions (called internal diagrams in Johnstone [56]) is done in /89, 90/, in Comments of which their sketch is given.

433.3. Topological actions are thoroughly treated in Part II (cf. also Comment 25.1 for historical remarks).

433.4. This definition means that p lifts canonical equalizers (cf. Comment 221.2).

433.5. This theorem is generalized in /89, 90/.

434.1. The proof follows from the fact that $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\cdot})$ is also a double category and from the Proposition page 431.

434.2. This result says that species of morphisms are in 1-1 correspondence with discrete fibrations in *Cat* over a discrete double category. It is a particular case of Propositions A-B, Comment 26.2, which assert that species of structures dominated in a cartesian category V are (pseudo-discrete) internal species of structures over a free V-category; here V = *Cat*, so that a free V-category is just a category.

434.3. To say that Γ' acts on Σ_0 implies that $q(\Sigma_0)$ is the class of objects of Γ' (though there is some ambiguity in the definition given in /55/). In fact, all the results of this Note are still valid if we interpret $[\Gamma, q, \Sigma_0]$ as meaning that (Γ, q, Σ_0) is a strong species of structures (Comment 23.1), i.e.,

fz is defined iff $a(f) = q(z)$

(but $\bar{q}^{1}(e)$ might be void for some objects e).

ON /60/ : SOUS-STRUCTURES ET APPLICATIONS $\mathcal{K}$-COVARIANTES.

Sections 1-4 of this Note are developed in /63/ to which we refer for further comments.

435.1. This terminology is confusing since an ordered species of structures also means an internal species of structures in the category of posets /55, 85/. It would be better called a species of ordered structures.

435.2. Since only «concrete» internal categories have been defined in the preceding papers, it must be precised that a n-fold category is a structured category for the concrete functor $Cat_{n-1} \to Set$ from the category of $(n-1)$-fold categories which maps an $(n-1)$-fold category on the set of its $(n-1)$-blocks.

435.3. The sub-structures may be defined without using an order on $\mathcal{C}$: cf. /66, 69/. Anyway, here it is sufficient that $\mathcal{C}$ be subinductive (Comment 31.1) and this is used in Sections 3-5.

436.1. The orders $<$ and α coincide whenever the functor is an identity.

436.2. Inductive and subinductive groupoids and species of structures are studied in a series of papers summarized in /86/ (cf. Part II).

437.1. $p(\Gamma)$ saturated (= closed by isomorphisms) means that p lifts isomorphisms (i.e., has the transport by isomorphism property).

437.2. $\mathcal{F}$ is only a subinductive category.

437.3 ¶ Condition 1 implies 2, but not conversely (cf. /63/, Remark page 417). However the corollary remains valid.

438.1. These conditions are not sufficient; the composite is defined iff (Φ', ϕ') is a $\mathcal{K}$-covariant map whose source is the target η_1 of (Φ, ϕ) (the same structured category $\beta(\Phi)$ could act in two different ways on $\beta(\phi)$).

438.2. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .
This proposition is generalized in /90/.

438.3. To be coherent with Section 2, the category $\mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ must be equipped with an order, namely the product order induced by $Cat \times Set$, and so it becomes a subinductive category.

438.4 ¶ The conditions are not equivalent (due to the error in Section 4). The theorem should read:

2 implies 1. If 1 is satisfied and if s_1 is a p-sub-structure of s, then σ_1 is a p-sub-structure of σ.

Δ. 1° If 2 is satisfied, there exists a $\mathcal{K}$-species of structures η_1 of the form $((\mathcal{C}_1^{\cdot}, s_1), \pi_1, \sigma_1)$; indeed, the restriction π_1 of π defines a p-sub-morphism

$$\sigma_1 \to s_1 \quad \text{of} \quad \sigma_1 \xhookrightarrow{\iota} \sigma \xrightarrow{\pi} s \ ;$$

438.4 ... so the pullback $s_1 * \sigma_1$

$$\begin{tikzcd} \sigma_1 \arrow[d, "\pi_1"'] & s_1 * \sigma_1 \arrow[l] \arrow[d] \\ s_1 & s_1 \arrow[l, "\alpha_1"] \end{tikzcd}$$

is a sub-structure of $s * \sigma$ and the action κ_1 of $\mathcal{C}_1$ on $p(\sigma_1)$ defines a sub-morphism

$$\kappa_1 : s_1 * \sigma_1 \to \sigma_1 \quad \text{of the action } \kappa : s * \sigma \to \sigma$$

of $\eta = ((\mathcal{C}^{\bullet}, s), \pi, \sigma)$. Then $(\Phi, \phi) : \eta_1 \to \eta$, where

$$\Phi : (\mathcal{C}^{\bullet}_1, s_1) \to (\mathcal{C}^{\bullet}, s) \quad \text{and} \quad \phi : \sigma_1 \to \sigma$$

are defined by insertions, makes η_1 a sub-$\mathcal{K}$-species of η.

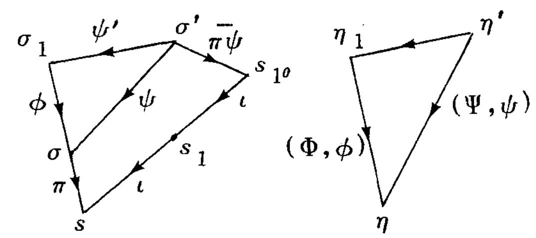
2° Suppose $\eta_1 = ((\mathcal{C}^{\bullet}_1, s_1), \pi_1, \sigma_1)$ is a sub-$\mathcal{K}$-species of η and that $(\Phi, \phi) : \eta_1 \to \eta$ is defined by the insertions. To prove that $\phi : \sigma_1 \to \sigma$ is a p-injection, let $\psi : \sigma' \to \sigma$ be a morphism such that $p(\psi)$ takes its values in $p(\sigma_1)$. Then $\eta' = ((\mathcal{C}^{\bullet}_{10}, s_{10}), \overline{\pi\psi}, \sigma')$ is a $\mathcal{K}$-species of structures where $\overline{\pi\psi} : \sigma' \to s_{10}$ is a p-sub-morphism of $\pi . \psi$, with the trivial action; there is a $\mathcal{K}$-covariant map $(\Psi, \psi) : \eta' \to \eta$, where Ψ is the insertion

$$(\mathcal{C}^{\bullet}_{10}, s_{10}) \hookrightarrow (\mathcal{C}^{\bullet}_1, s_1) \xhookrightarrow{\Phi} (\mathcal{C}^{\bullet}, s).$$

We have

$$\bar{p}(\Psi, \psi) = \bar{p}(\Phi, \phi) \times (I, \underline{\psi}'),$$

where I is the insertion $\mathcal{C}^{\bullet}_{10} \to \mathcal{C}^{\bullet}_1$ and $\underline{\psi}' : p(\sigma') \to p(\sigma_1)$ the restriction of ψ. Hence $(I, \underline{\psi}')$ lifts into a $\mathcal{K}$-covariant map $(I, \psi') : \eta' \to \eta_1$; a fortiori $\psi' = (\sigma_1, \underline{\psi}', \sigma)$ is a morphism of $\mathcal{K}$. So σ_1 is a sub-structure of σ.



∇

ON /70/ : PRODUIT CROISÉ DE CATÉGORIES.

This Note is developed in Chapter II /122/.

439.1. R. $f'.f$ i.o. $f.f$.

440.1. R. isomorphe i.o. équivalente .

For the proofs of this section, cf. Theorem 10-II and Corollary 2 /122/.

440.2+ *Crossed products and fibrations.*

Let $F : C \to Cat$ be a functor (or species of morphisms) and denote $\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma} \to C$ the projection of the associated crossed product. Then, $\tilde{\pi}$ is a fibration, which has been introduced by Grothendieck [43] and is called the Grothendieck category.

$\tilde{\Sigma}$ is characterized by several universal properties:

1° Projective property (Gray [133]): $\tilde{\Sigma}$ is the 2-comma $[\ulcorner 1 \urcorner, F]$:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\ulcorner 1 \urcorner"'] & \tilde{\Sigma} \arrow[l] \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \arrow[dl, phantom, "\searrow"] \\ Cat & C \arrow[l, "F"] \end{tikzcd}$$

2° Inductive property (Gray [40]): $\tilde{\Sigma}$ is the lax colimit of F. This may also be expressed as follows (Guitart [44], Guitart & Van den Bril [45]): For any small category X let $\mathfrak{D}X$ be the large category of diagrams in X, whose morphisms are the triangles

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[dr] & & B \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[l, phantom, "\Leftarrow"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

and $D(X) : \mathfrak{D}X \to Cat$ the «basis» functor. This extends into the *diagram functor* $D : CAT \to CAT/Cat$ (where CAT is associated to a universe to which belongs Cat). Then $\tilde{\Sigma}$ is the free object generated by $F : C \to Cat$ with respect to D.

3° (Cf. /120/.) Let $\Pi : \Gamma \to (C, C^{dis})$ be the discrete fibration in Cat associated to $F : C \to Cat$ (cf. last Theorem /59/). Then $\tilde{\Sigma}$ is the free object *Link* Γ generated by Γ with respect to the Square functor $Cat \to Cat_2$ which maps a category on the double category of its com-

440.2 ... mutative squares.

The mapping $F \mapsto \tilde{\pi}$ extends into an equivalence from the category Cat^{C} into the category *Split* C of (split) fibrations over C, which has for morphisms cartesian functors (Gray [133]). *Split* C is the category of algebras (Bourn [111]), Street [159]) for the monad T on *Cat*/C corresponding to the adjunction (cf. Gray [38]) between the insertion *Split* C $\hookrightarrow$ *Cat*/C and its left adjoint the «comma functor». The monad T determines a 2-monad whose pseudo-algebras are the non-split fibrations (Street [159]).

General fibrations have been introduced by Grothendieck [38] and studied by Gray [38]. Actually, they are thoroughly used as «variable categories»; they also generalize internal categories /93, 104/.

Species of morphisms are studied in the fine (but much too technical!) thesis of Horrent [140], where monads and enrichments of the fibres are «extended» to the crossed product.

440.3. Cf. /122/, Proposition 37-II.

440.4. R. τ i.o. ϕ.

440.5. Particular case of Proposition 38-II /122/.

441.1. Cf. Corollary, Theorem 11-II /122/.

441.2. Proposition 38-II /122/.

441.3. R. $\bar{\phi}'$ i.o. ϕ'.

Z^1 means cocycles, B^1 coboundaries (by analogy with the case of groups).

441.4+ Cf. Theorem 12-II /122/.

$Z^1(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ is the class of objects of the category L which is the lax limit (Gray [39]) of the functor $F : C^{\cdot} \to Cat$ associated to the species of morphisms $(C^{\cdot}, \pi, \Sigma^{\cdot})$. The morphisms of L are the natural transformations between sections of $\tilde{\pi}$ mapped by $\tilde{\pi}$ on an identity. Hence $H^1(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ is the set of components of the groupoid of isomorphisms of $L = laxlim\ F$.

441.5. This definition is equivalent to Definition 38-II /122/.

442.1. Theorem 15-II /122/ proves more precisely that γ is a bijection onto the set of functors $\tilde{\Phi}$ satisfying conditions 1, 3 and

2'o $\tilde{\Phi}(f,s)$ is of the form $z.(f,s)$.

442.2 ¶ This is not true. An element ϕ of $B^1_c(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ is written ϕ_τ but does not define an element of the center of the central section admitting $\phi(C^{\cdot}_0)$ as its class of objects.

Remark that $B^1_c(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ is also the set of those $\phi \in Z^1_c(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$, such that $\phi \underset{\rho}{\sim} \alpha\phi$. Hence the present definition coincides with Definition 40-II / 122/ .

442.3. Cf. Proposition 45-II / 122/ .

442.4. ρ_c is not compatible with α so we have to define:

$$\overline{\phi} \underset{\rho_c}{\sim} \overline{\phi}' \text{ iff } \overline{\phi} \underset{\rho}{\sim} \overline{\phi}' \text{ and } \alpha\overline{\phi} \underset{\rho}{\sim} \alpha\overline{\phi}'$$

(cf. Theorem 16-II / 122/). $H^1_c(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ is commutative.

442.5. In fact, this example (and its treatment by Mac Lane [149]) was one of the starting points of the theory and it suggested the terminology used here. In / 75/ the results of this Note are adapted to ordered fibrations (= internal fibrations in the category of posets). The «ordered cohomology» generalizes the cohomology with values in groupoids defined in Haefliger's Thesis [136] for studying foliations.

ON / 72/ : EXPANSION D'HOMOMORPHISMES EN FONCTEURS.

This Note has been developed (with slightly more general hypotheses) in / 122/ , Chapter V, Section 1.

443.1. A morphism is regular if it is both a mono and an epi.

443.2. $\bar{p}$ would now be called a neofunctor.

Conditions 3 and 4 are weakened in / 122/ .

443.3. Cf. Proposition 6-V / 122/ .

444.1. This definition implies that C is a final sub-category of H (in the sense of [74] and in the stronger sense of Hilton [121]).

444.2. Cf. Proposition 6-V / 122/ .

444.3. R. isomorphe i.o. équivalente . For the proof, cf. Proposition 2-V and its Corollary / 122/ .

444.4. R. $g_i \in p(\bar{F}^p)$, où

$$\bar{F}^p = \{ k \in H \mid p(k) \in F \text{, il existe } \bar{f} \in \bar{F} \text{ avec } \bar{f}.k \in \bar{F} \}$$

i.o. $g_i \in p(F)$. (This correction is necessary for the validity of the next theorem.)

444.5. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .
Cf. Theorem 1-V /122/.

445.1. This definition is about the same as for a biregular p-distinguished couple in /122/, so that the category $\mathfrak{D}$ defined hereafter corresponds to the category $\mathfrak{B}$ of Chapter V /122/.

445.2. R. $\hat{C}_i^{\cdot}$ i.o. $\hat{C}^{\cdot i}$.

446.1. Cf. Theorem 3-V /122/.

Intuitively, this theorem means that, given a functor $p: H \to K$ and subsets F and $\bar{F}$ of K and H, then p may be universally extended into a functor $\hat{p}: \hat{C} \to \hat{K}$ so that the elements of F become isomorphisms of $\hat{K}$, are lifted in a class $\hat{F}$ of isomorphisms of $\hat{C}$ containing $\bar{F}$, and $\hat{p}$ biunivocally maps $\hat{F}.s$ onto $F.\hat{p}(s)$ for each object s of H.

This kind of result seems not to have been tackled with in the literature, except in particular cases: when p is a discrete fibration, it is linked to Kan extensions (looked at upside-down); when p is an identity, categories of fractions are found anew. These two particular cases were the motivation for the development of the theory.

446.2. Cf. Theorem 5-V /122/ (where $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ and $\mathcal{P}'(\mathcal{F})$ are written $\mathcal{P}\mathcal{F}$ and $\mathcal{P}'$ respectively).

446.3. A «perfectionnement» of H is a category of fractions of H by the class of all its regular morphisms. More generally, from the theorem of section 4 we may deduce (cf. Theorem 4-V and Corollary /122/) the construction of the category of fractions of H by a class admitting a calculus of fractions (cf. Comments 163.3 and 553.1).

ON /73/ : COHOMOLOGIE SUR UNE CATÉGORIE.

Section I of this Note is developed in /91/ ; the other sections have not been taken back in subsequent papers.

447.1. The proof is straightforward. Cf. Corollary 2 page 55 /91/.

447.2. A complex of species of morphisms may be seen as a complex (in the sense of /91/) in the category of fibrations, for the ideal formed by the cartesian functors mapping the fibres on objects.

The crossed complexes of Brown & Higgins [113] are such complexes in which the fibres are groups and the acting category is a groupoid.

447.3. Erase the final , .

447.4. R. $\bar{p}_{\mathcal{F}}$ i.o. $p_{\mathcal{F}}$.

448.1. R. $S^{\cdot}_{n}$ i.o. $S^{\cdot}_{u}$.

448.2. Cf. /91/.

448.3. G_c is not well-defined:

$G(e)_c = \{ z \in G(e) \mid fz$ in the center of $G(e')$ for any $f: e \to e' \}$

(otherwise $G_c : C^{\cdot} \to \mathit{Cat}$ would not be a functor nor $\vec{G}$).

448.4. $\mathcal{Z}$ is the category of free abelian groups. The category of $(p_{\mathcal{Z}}, \mathcal{Z})$-dominated species of structures over $C^{\cdot}$ is equivalent to the category of functors $\mathcal{Z}^{C^{\cdot}}$. It would be better to replace $\mathcal{Z}$ by Ab itself.

449.1. $\bar{M} : C^{\cdot} \to Ab$ is the free object generated by $b: M \to C^{\cdot}_0$ with respect to the functor $p: Ab^{C^{\cdot}} \to Set^{C^{\cdot}_0}$ which maps $F : C^{\cdot} \to Ab$ onto the projection

$$\coprod_{e \in C^{\cdot}_0} F(e) \to C^{\cdot}_0 : (e, z) \mapsto e.$$

$\bar{M}$ is also the Kan extension of the functor

$$C^{\cdot}_0 \to Ab : e \mapsto (\text{free abelian group on } \overset{-1}{b}(e))$$

along the insertion $C^{\cdot}_0 \hookrightarrow C^{\cdot}$.

449.2. The proof is straightforward.

Hoff [139] has generalized this result; he replaces Ab by an abelian category with coproducts.

450.1 + *Homology of simplicial objects.*

The simplicial homology fits in the following general pattern (cf. Mac Lane [74] for details).

Let A be an additive category and Δ the simplicial category. If $S: \Delta^{op} \to A$ is a simplicial object in A, the *homology* $H_*(S)$ of S is

450.1 ... defined as the homology of the differential module $\hat{S} = (S(n), \partial_n)$ whose boundary operation $\partial_n : S(n+1) \to S(n)$ is the sum of the face operations $\sum_{i \leq n+1} (-1)^i \, S(\delta_i^n)$; hence $H_n(S) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
H_n(S) & Z_n(S) \arrow[l] \arrow[dd] & & \\
& & B_n(S) \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
S(n) & S(n+1) \arrow[l, "\partial_n"'] & & S(n+2) \arrow[ul] \arrow[ll, "\partial_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

The cohomology $H^*(S,G)$ of S with value in an object G of A is the homology of the simplicial object in Ab^{op}

$$\Delta^{op} \xrightarrow{S} A \xrightarrow{Hom(-,G)} Ab^{op} .$$

Now a category C determines the simplicial object $Nerve\, C$:

$$\Delta^{op} \hookrightarrow Cat^{op} \xrightarrow{Cat(-,C)} Set$$

(cf. Grothendieck [42]) and the functor $Nerve : Cat \to Set^{\Delta^{op}}$ admits an adjoint. Let S_C be the simplicial object

$$\Delta^{op} \xrightarrow{Nerve\ C} Set \xrightarrow{Z^{(-)}} Ab$$

then $S_C(n)$ is the abelian group generated by the set of n-simplexes of C. The differential module associated to C in Section 3 is the module $\hat{S}_C$, so that the simplicial homology of C is the homology of S_C.

This (trivial enough) homology of a category is studied in Baroudi's Thesis [105]; he proves that each natural transformation induces an isomorphism on homologies, and he computes the homology of products, joins. Similar results for the homology of S_C with values in an abelian category (i.o. Ab) are obtained by Hanna [137], who generalizes results of Deheuvels [120] and Roos [156] on homology of posets.

450.2 ¶ R. $\mathfrak{A}_c$ i.o. $\mathfrak{A}$, where $\mathfrak{A}_c$ is the sub-category of $\mathfrak{A}$ formed by the contravariant maps sending center into center.

450.3 + *Homology defined by comonads.*

The central cohomology functor fits in a general theory which englobes most of the usual «abelian» cohomologies and which was set up by several authors (Godement [37], André [103], Barr-Beck [106],... Mac Lane [74]):

450.3 ... Let E be a category and $\mathrm{T} = (T, \eta, \mu)$ a comonad on E, looked at as a simplicial object $\mathrm{T} : \Delta^{op} \to \mathrm{E}^{\mathrm{E}}$ (more precisely, T is a 2-functor when Δ is equipped with the ordinal sum as second composition); its face operations are

$$\mathrm{T}(\delta_i^n) = T^i \eta T^{n-i} : T^{n+1} \to T^n \quad \text{for each } i \leq n.$$

If E is an object of E and $\mathrm{F} : \mathrm{E} \to A$ a functor to an additive category A, we have the simplicial object S_E :

$$\Delta^{op} \xrightarrow{\mathrm{T}} \mathrm{E}^{\mathrm{E}} \xrightarrow{eval_E} \mathrm{E} \xrightarrow{\mathrm{F}} A\ ;$$

its associated differential module $\hat{\mathrm{S}}_E$ (Comment 450.1) gives a *resolution of* E, and its homology or cohomology with value in an object of A are those *of* E *for* (T, F).

Now take for E the abelian category $Ab^{\mathrm{C}^{\cdot}}$, for F its identity, for T the comonad associated to the «projection» functor $p : Ab^{\mathrm{C}^{\cdot}} \to Set^{\mathrm{C}_0^{\cdot}}$ and its adjoint (Comment 449.1). If E is the final object $1 : \mathrm{C}^{\cdot} \to Ab$ of $Ab^{\mathrm{C}^{\cdot}}$ and if $\mathrm{G_c} : \mathrm{C}^{\cdot} \to Ab$ is the center of a species of morphisms $\mathrm{G} : \mathrm{C}^{\cdot} \to Cat$, the cohomology $\mathrm{H}^*(\mathrm{S}_1, \mathrm{G_c})$ of 1 with value in $\mathrm{G_c}$ for (T, F) is exactly the central cohomology $\mathrm{H}^*_{\mathrm{c}}(\mathrm{C}^{\cdot}, \mathrm{G})$ (cf. [163]).

450.4. If ψ is a 1-cocycle, then ψ «is» a crossed homomorphism. Indeed, $(\mathrm{C}^{\cdot}, \psi)$ is a covariant map $\mathrm{K}_1 \to \mathrm{G_c}$ such that $\psi . \partial_2$ maps everything on objects; hence, for each 2-simplex $[f', f, e]$, the morphism

$$\begin{aligned} \psi\partial_2[f', f, e] &= \psi(f'[f, e] - [f'.f, e] + [f', e']) \\ &= f'\psi[f, e] - \psi[f'.f, e] + \psi[f', e'] \end{aligned}$$

is the identity of an abelian group, so that

$$\psi[f'.f, e] = f'\psi[f, e] + \psi[f', e'].$$

This means that the map $f \mapsto \psi[f, e]$ is a crossed homomorphism.

450.5. In the cubical case, face operations are more difficult to define; cubical homology has been considered by Machado [147], Evrard [127] and, generally, by Brown & Higgins through their ω-groupoids [114].

450.6 + *Some interpretations of higher-order central cohomology.*

When C is a group, the 2-cohomology classes of a C-module may

450.6 ... be represented by classes of «factor-sets» or of extensions of C (cf. Mac Lane [149]). It is natural to try to get similar interpretations for $H^2_c(C, G)$ when C is a category. Though the promised Note had never concretized, we had obtained some results in this way, in particular:

a) 2-cocycles or factor-sets as lax functors: Let $G_c : C \to Cat$ be a species of morphisms identical to its center (fibres are sums of abelian groups), and $\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma} \to C$ be the corresponding fibration /70/. $\tilde{\Sigma}$ becomes a 2-category when equipped with the second composition:

$(z', f', u') + (z, f, u) = (z' + z, f, u)$ iff $f = f'$, $u = u'$.

The 1-morphisms reduce to the pairs (f, u).

THEOREM. *The 2-cocycles of* C *with value in* G_c *«are» the unitary lax functors* (Λ, λ) *from* C *(considered as a discrete 2-category) to the 2-category* $\tilde{\Sigma}$, *sections of* $\tilde{\pi}$.

Δ. Such a lax functor is given by:

- the map Λ from C into the category of 1-morphisms of $\tilde{\Sigma}$ section of $\tilde{\pi}$; hence $\Lambda(f) = (f, \Lambda(e))$ for each $f: e \to e'$ in C, and Λ is determined by its restriction to the objects;
- the map $\lambda : C * C \to \tilde{\Sigma}$ mapping (f', f) on a morphism

$$(l(f', f),\ f'.f, \Lambda(e)) : \Lambda(f').\Lambda(f) \to \Lambda(f'.f),$$

where $l: C * C \to \sum_e G(e)$ satisfies the coherence axioms:

$$(*)\quad \begin{array}{c} l(f, e) = \Lambda(e') = l(e', f), \\ l(f'', f'.f) + f'' l(f', f) = l(f'', f') + l(f''.f', f) \end{array}$$

When C is a group, these are the properties defining a factor-set, so we still call l a *factor-set*. Now let (C', ψ) be a 2-cocycle $K_2 \to G$. If we write that $\psi\, \partial_3$ maps the 3-simplex $[f'', f', f, e]$ on an identity $\Lambda(\beta(f''))$, we get an equality which says that the map

$$l : (g', g) \mapsto \psi[g', g, a(g)]$$

is a factor-set; hence ψ corresponds to a lax functor (Λ, λ). ∇

So $H^2_c(C, G)$ is formed by classes of lax functors. This simple interpretation of factor-sets as lax functors seems unnoticed even if C is a group.

450.6...*b) 2-cocyles as extensions of categories:* If C is a group, factor-sets correspond to extensions of C . Similarly if C is a category and $G: C \to Ab$ a functor, the elements of $H^2_c(C, G)$ may also be described as classes of extensions

$$\hat{C} \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} C$$

of C, where i is an insertion from a commutative category, p defines C as a quotient of K by $\hat{C}$ and

$p(k) = p(k')$ iff $k' = i(z).k$ for a unique z of $\hat{C}$

(cf. Hoff [139]). Hence (p, i) is a $(p\mathcal{J}, J\mathcal{J})$-exact sequence /91/ . This remark leads to a theory (only begun in unfinished papers) of extensions of categories for interpreting the non-central 2-cohomology with values in a $\bar{G}: C \to Cat_2$ (= category of double categories).

Higher order central cohomology has been studied by several authors; I'll point out two interpretations because of their possible extension in the «non-abelian» case.

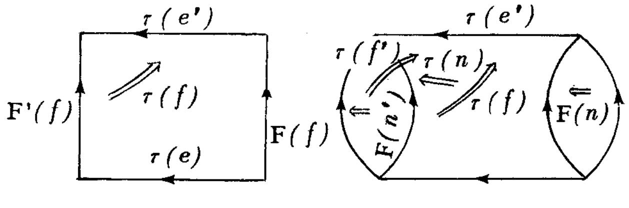
c) 2-cocycles as tetralgebras (Bourn [14]): Let $G: C \to Ab$ be a functor. As an abelian group M defines the n-category $(M, \dots, M)$ and «is» a discrete $(n+1)$-category, we have the $(n+1)$-functor

$$G_n = (C \xrightarrow{G} Ab \xhookrightarrow{i_n} n\text{-}Cat)$$

for each integer n (we write $0\text{-}Cat = Set$). We know that $H^1_c(C,G)$ is the limit of G_0 and $H^1_c(C, G)$ the set of components of the lax limit of G_1 (Comment 441.4). Similarly, $H^2_c(C, G)$ may be defined from G_2 as follows [14] :

If A and B are 3-categories, $F, F' : A \to B$ 3-functors, a *tetradesis* τ from F to F' is the data of:

for each 1-morphism $f: e \to e'$ in A, a square of B, for each 2-morphism $n: f \Rightarrow f'$ in A, a «lax cylinder» in B of the form:



450.6 ... for each path (g, f) of 1-morphisms in A , a 3-morphism in B :

$$\tau(g,f) : \tau(gf) \Rrightarrow \tau(g)F(f).F'(g)\tau(f),$$

satisfying coherence axioms ([14] page 412). (It may be interpreted as a lax 3-functor from A to the 3-category of lax cylinders of B.) Tetradeses from F to F' are the vertices of a 2-category. It is easy to define the corresponding «tetralimit of F'» if it exists. In particular, if B is the 3-category *2-Cat*, the tetralimit of F' is a 2-category with vertices the tetradeses from the constant functor on 1 to F' (called tetralgebras for F').

Now the tetralgebras for the 3-functor $G_2 : C \to$ *2-Cat* reduce to factor-sets (defined in a) and $H^2_C(C, G)$ is the groupoid of components (for the first composition) of the tetralimit of G_2. The difficulty for defining «lax n-limits» leading to an interpretation of $H^n_C(C, G)$ from G_n seems of a purely technical nature.

More generally, if $\overline{G} : C \to$ *2-Cat* is a functor, it would be interesting to compare the associated tetralgebras with the cohomology $H^2(\overline{G}, K)$; Is it possible to choose $\overline{G}$ to find back the non-abelian 2-cohomologies considered by Dedecker [119], Frenkel [130], Giraud [36], Lavendhomme-Roisin [146], ... ?

d) Higher-order cohomology as torsors (Duskin [123]): It is often said that «cohomology means obstruction to the existence of global sections». This assertion is justified by Duskin as follows:

Let E be a category with finite «good» limits (e.g., a topos or a Barr-exact category), Ab E the category of abelian groups in E, so that $Ab\,E \to E$ had an adjoint F. If G is an object of Ab E, the *n-cocycle functor* $Z^n(E, G) : E^{\Delta^{op}} \to$ *Set*, which maps the simplicial object $S : \Delta^{op} \to E$ on the set of n-cocycles of FS with values in G (cf. Comment 450.1) is representable by a simplicial object $K(G, n)$. Duskin defines the group $Tors^n(E, G)$ of $K(G, n)$*-torsors*, whose elements are some simplicial maps over $K(G, n)$ («Kan fibrations»).

If E is equipped with a comonad T, the cohomology group $H^n(S_1, G)$ of 1 with value in G for (T, F) (Comment 450.3) is isomorphic to $Tors^n(E, G)$. In particular, if $E = Ab^C$, where C is a category, it follows that $H^n_C(C,G)$ ($= H^n(S_1,G)$) for $G: C \to Ab$ is isomorphic to $Tors^n(Ab^C, G)$.

In [124], Duskin gives an interpretation of 3-torsors thanks to the notion of a *hypergroupoid* whose data axiomatize horns (3-simplexes less one face) and a rule for «adding the missing face». For instance each 2-groupoid L gives rise to a hypergroupoid $K(L,2)$ and the lax functors $C \to L$ are in 1-1 correspondence with the simplicial maps $Nerve\, C^{op} \to K(L,2)$. (This result is to be compared with the 1-1 correspondence given at the end of /117/ between lax functors $A \to B$ and peculiar functors $KA \to KB$, where KA is the fibration over the sketch of categories corresponding to the double category A .)

ON /74/ : SUR UNE NOTION GÉNÉRALE DE COHOMOLOGIE.

This Note is developed in /91/ to which we refer for comments. By error, two sections are numbered 2.

451.1 This Δ is not to be confused with the simplicial category!

452.1. Cf /91/ for the proof.

453.1. $\bar{\mathfrak{F}}$ is the category of double categories, $\bar{p}_{\mathfrak{F}}$ its forgetful functor toward $\mathfrak{M}$.

454.1. Add (resp. $G(e)_\gamma$).

454.2. R. $(G_c(e')$, i.o. $(G_c(e)$, .

ON /79/ : EXPANSION GÉNÉRALE DES FONCTEURS.

This Note is developed in Sections 1-2, Chapter V /122/. Cf. also the Synopsis for a simplified modern version.

455.1. Add $\bar{F} \subset R(H^{\cdot})$ (this condition is necessary for σ and τ to be transitive in the theorem).

In /122/, the terminology used is «couple $\bar{p}$-distingué régulier».

456.1. $\boxminus(F, \bar{p})$ is a full sub-category of the comma category $(\bar{p}, K)$ (obtained when $F = K$).

456.2. For this theorem and its corollaries, cf. Theorem 7-V and Corollary in /122/.

Another construction of $\hat{C}^{\cdot}$ and $\tilde{C}^{\cdot}$ valid under weaker hypotheses, is given in Section 5 /80/.

456.3. Cf. Theorem 11 /122/, and /77/ where this case is thoroughly studied.

457.1. R. $\bar{p}_1$ i.o. $\grave{p}_1$.

457.2. Cf. Theorem 8 /122/.

Intuitively this theorem means that $\bar{p}: H^{\cdot} \to K^{\cdot}$ admits a universal extension into a functor $\breve{p}$ whose domain is an expansion of H for a class of morphisms lifting elements of F and containing $\bar{F}$. The functor $\breve{p}$ also provides a universal extension of $\bar{p}$ into a functor with a choice of final lifts of elements of F, so that the elements of $\bar{F}$ become choosen final lifts (cf. Synopsis).

458.1. R. $\tilde{C}^{\cdot}$ i.o. $\check{C}^{\cdot}$.

458.2. R. $k \notin \bar{C}$, $k \in \tilde{C}$ i.o. $\bar{k} \in C$, $\tilde{k} \in C$.

458.3. R. $\bar{f} \in \bar{F}^p$ i.o. $\bar{f} \in \bar{F}$.

This condition is necessary to prove that each element of $\bar{F}^p$ belongs to the class $\bar{F}^{p_G}$ associated to an adequate restriction p_G of p, and this implies that F" contains $\bar{F}^p$.

458.4. Cf. /90, 95/ and the modern version given in the Synopsis.

ON /80/ : CATÉGORIE QUOTIENT D'UNE CATÉGORIE PAR UNE SOUS-CATÉGORIE.

This Note is developed in /91/ (taken back in /122/, Chapter III) to which we refer for comments.

459.1. In modern terms, $\pi(e): e \to \Pi(e)$ is a reflector into C'.

460.1. Cf. Theorems 1-3 and 3-3 /91/.

460.2. This definition is identical to that used in /91/ ; in /74/ it is only supposed that $\hat{p}$ be universal among the $p_{\mathcal{J}}$-surjections (and not all the functors) sending H onto objects.

460.3. Cf. Proposition 12 / 91/.

461.1. R. $\tilde{\underline{\nu}}$ i.o. ν . Cf. Theorem 4-3 /91/.

461.2. Cf. Proposition 13 and Theorem 5 /91/.

462.1. Cf. Theorem 6 /91/.

462.2. R. Corollaire 1 i.o. Corollaire .

462.3. R. Corollaire i.o. Corollaite .

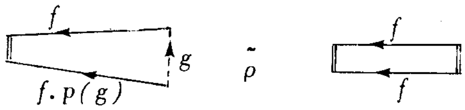
462.4+ The existence of these quotient categories comes from the preceding theorems. Cf. also Remarks pages 284 and 289 /122/. More generally, we have:

PROPOSITION. $\bar{C}'$ *is a quasi-quotient category of* $\boxminus(F, \bar{p})$ *by* G' *iff it is a quasi-quotient category of* $\boxminus(F, \bar{p})$ *by the equivalence* τ *generated by:*

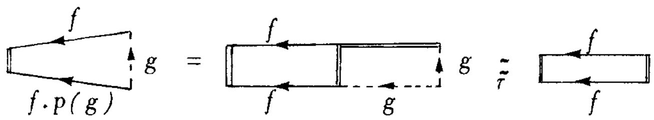
$$(k, f', f, h) \sim (k, f'.p(g'), f.p(g), h')$$

whenever $(h, g', g, h') \in \square(H'; \bar{F}, H)$ (cf. /79/).

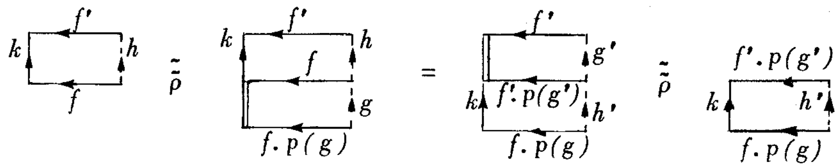
Δ. The quasi-quotient category of $\boxminus(F, \bar{p})$ by G' is its quasi-quotient category by the bicompatible relation $\tilde{\rho}$ generated by



for each g in $\bar{F}$ (with an evident symbolism), while the quasi-quotient by τ is the quasi-quotient by the bicompatible relation $\tilde{\tau}$ generated by τ. Let us prove $\tilde{\tau} = \tilde{\rho}$. Indeed, $\rho \subset \tilde{\tau}$, hence $\tilde{\rho} \subset \tilde{\tau}$, due to



Conversely, $\tilde{\tau} \subset \tilde{\rho}$, because



Finally, $\tilde{\tau} = \tilde{\rho}$, whence the proposition. ∇

There is a similar construction for $\hat{C}'$.

This result, which was first pointed out by Joubert who used it in his Thesis [63] for ordered categories, proves that $\bar{C}$ may be constructed under weaker hypotheses than in /79/ (cf. Synopsis).

ON /84/ : GROUPOÏDES STRUCTURÉS QUASI-QUOTIENTS ET QUASI-COHOMOLOGIE.

Sections 1-2-3 take back results of Sections 5-8 /100/ to which we refer for comments. Section 4 is developed in /102/ (end of Part I).

464.1. Cf. Proposition 1-5 /100/ and its Corollary.

464.2. $p_{\mathfrak{O}}$, $p_{\mathcal{T}}$, $p_{\mathfrak{N}'}$, $p_{\mathcal{F}}$ are the forgetful functors from respectively the category of posets, of topological spaces, of neocategories and of categories.

464.3. Cf. Theorem 1-5 /100/.

464.4. The objects of $\mathcal{K}'(p)$ are the pairs $(C^\cdot, s)$ where $C^\cdot$ is a neocategory and $([C^\cdot], s)$ a p-structured graph, and $\hat{p}_{\mathcal{K}'}: \mathcal{K}'(p) \to \mathfrak{M}$ is the forgetful functor. Cf. Theorem 2-5 /100/.

464.5. p_{ps} is the forgetful functor from the category of sub-preinductive classes (i.e., posets in which two bounded elements admit a meet). Cf. Theorem 3.5 /100/.

464.6. Cf. Theorem 5.8 /100/.

465.1. The objects of $\mathcal{K}(p)$ are the pairs $(C^\cdot, s)$ where $C^\cdot$ is a catgory and $([C^\cdot], s)$ a p-structured graph. Cf. Theorem 3.7 /100/.

465.2. R. demi-groupe i.o. monoïde.

465.3. S is a p-sum of s means that S is a coproduct of $(s^n)_{n \in \mathrm{N}}$ preserved by p. Cf. Theorem 4.6 and Corollary 2 /100/.

465.4. Cf. Theorem 3.8 /100/.

466.1. The proof uses the fact that each subset of $p(s)$ is the image of a p-sub-structure of s and that there exists a p-quotient structure of s by any equivalence on $p(s)$.

466.2. R. $\mathrm{P}_\iota^{\ulcorner}$ i.o. P_ι. (It is the class of P-injections sent by P on insertions.)

466.3. R. $p_\iota^{\ulcorner}$ i.o. $p_4^{\ulcorner}$.

The proof uses the existence of generated sub-structures and of quasi-quotient structures for p and also for $\hat{p}_{\mathfrak{U}}$, when P is $\ulcorner$-generating for $\mathfrak{M}$ (cf. Section 2 /100/).

ON /87/ : EXPANSION DES SYSTÈMES DE STRUCTURES DOMINÉS.

This Note has not been developed afterwards.

467.1 + *u-neofunctors as lax functors.*

Suppose that H satisfies the condition:

The pseudoproduct is associative and $\hat{e}e = \hat{e}$ if e is an object greater than $\hat{e}$.

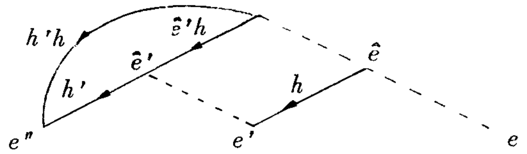
Then there exists a 2-category H_p, called the *2-category of partial morphisms of* H, defined as follows:

- The vertices are the objects of H,
- The 1-morphisms from e to e' are the pairs (h, e) such that

$$h: \hat{e} \to e' \text{ in H and } \hat{e} < e.$$

- The composition of 1-morphisms is given by:

$$(h', e').(h, e) = (h'h, e) \text{ iff } \beta(h) = e'.$$



The associativity comes from that of the pseudoproduct and $he = h$ proves e $(= (e, e))$ is the source of (h, e).

- There is a 2-cell $(h, e) \Rightarrow (h_1, e_1)$ iff

$$e_1 = e, \ \beta(h) = \beta(h_1) \text{ and } h < h_1.$$

Notice that, if H is completely right regular (which says $e\hat{e}: \hat{e} \to e$ if $\hat{e} < e$), then H_p identifies with a sub-2-category of the bicategory of spans of H.

PROPOSITION. *A u-neofunctor* $C \to (H, <)$ *is exactly a unitary lax neofunctor from (the discrete 2-neocategory on)* C *to* H_p.

The definition of lax «neofunctor» is the same as in the case of functors. As the 2-cells define an order, there is no coherence axiom.

467.2. R. $\overline{C}{}^{\cdot}$) i.o. $\overline{C}$).

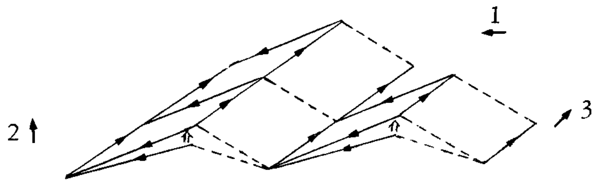
467.3. R. $\underline{F}$, i.o. $\underline{F}'$.

467.4. A u-natural transformation is a unitary lax functor from C to the

2-category H^2_p of partial morphisms of the category $\square H = H^2$ equipped with the product order.

468.1 + *u-inductive limits as lax limits.*

H^2_p becomes a 3-fold category when equipped with the third composition deduced from the vertical composition of squares:



and H_p is the 2-category of objects for this third category.

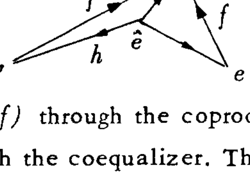
If C is a category, there is associated a 2-category $l\,C$ such that lax functors $F : C \to H_p$ correspond to 2-functors $lF : l\,C \to H_p$ (Benabou, Gray [40], Vaugelade [97]). Then a u-inductive limit of F is exactly a H^2_p-wise colimit of lF (in the sense of /119/). From the existence theorem for lax colimits we get:

THEOREM. *If* H *is cocomplete and if* $(H, <)$ *is completely right regular then u admits small inductive limits.*

Δ. As H is the category of objects for the two first categories on H^2_p, the assertion will result from Proposition 12 /119/ if H^2_p is proved to be corepresentable. Indeed, let $(h, e): e \to e'$ be a 1-morphism of H_p. The pair

$$\begin{tikzcd} \hat{e} \arrow[r, bend left, "e\hat{e}\;\; e\;\; inj"] \arrow[r, bend right, "h\;\; e'\;\; inj'"'] & e'\amalg e \end{tikzcd} \qquad (*)$$

has a coequalizer $g: e'\amalg e \to S$. For a morphism $(f', f): (h, e) \to e_1$



the cofactor of (f', f) through the coproduct coequalizes the pair (*) hence factors through the coequalizer. This proves S is a corepresentation of (h, e), the representation morphism being

468.1 ...

$$\begin{tikzcd}
 & & S \\
 & \hat{e} \arrow[ur] \arrow[dl, "h"] \arrow[dr] & \\
e' \arrow[uurr, "g.inj'"] & & e \arrow[uu, "g.inj"']
\end{tikzcd} \qquad \nabla$$

468.2. Add if $C \in \mathfrak{M}_0$.

This theorem may be deduced from the preceding comment.

468.3. R. $K^{\cdot}$ i.o. K.

The proof is similar to the proof of Theorem 3-2 /100/.

469.1. The theorem is a consequence of the preceding one whose hypotheses are satisfied thanks to the general existence theorem for free objects (Theorem 1-2 /100/).

469.2. The order on $\mathcal{T}_0$ is :

$$T' < T \text{ iff } T' \text{ is an open subset of } T.$$

469.3. Dominated systems of structures are a kind of enrichment of systems of structures. Their definition was suggested by several problems in Analysis (cf. Comment 470.3). It does not seem easy to define enriched systems in a monoidal closed category, similarly as enriched species of structures (Comment 26.2).

470.1 + *Maximal enlargements and Kan extensions.*

The proof constructs a reflection of the system of structures $\eta = (C^{\cdot}, S, \kappa')$ into the sub-category of *strong* species of structures over $C^{\cdot}$; its reflection into the category of *all* species of structures is obtained by replacing C by the sub-category generated by those f for which $\kappa'(f,z)$ is defined for some z in S.

The construction of $\hat{\eta} = (C^{\cdot}, \hat{S}, \hat{\kappa}')$ may be expressed as follows: C_e is the category $C^{\cdot}/e$ of objects over e and $\hat{S}_e$ is the set of components $[f, z]$ of the comma category $\pi \downarrow e$, where $\pi : C^{\cdot} * S \to C^{\cdot}$ is the well-faithful functor associated to η. The action of $C^{\cdot}$ on $\hat{S}$ is

$$(h, [f,z]) \mapsto [h.f, z] \quad \text{iff} \quad \alpha(h) = \beta(f).$$

The same construction has been done by Street [162] for any functor $\pi : \hat{C}^{\cdot} \to C^{\cdot}$; then the discrete fibration associated to the action of $C^{\cdot}$ on $\hat{S}$ is the reflection $E(\pi)$ of π from $Cat/C^{\cdot}$ into the category of discrete fibrations over $C^{\cdot}$. In the canonical factorization giving

470.1 ... the reflector $\pi = E(\pi).\phi$, the functor ϕ is final (and Street uses this property for simplifying the construction of the completion of a category, only «adding» limits of discrete fibrations [162]).

When η is a species of structures with C' as its acting category, $\hat{\eta}$ is the «maximal» (or strong) enlargement of η (in the terminology of /77, 89/). The *Set*-valued functor $\hat{F}: C \to Set$ defining $\hat{\eta}$ is the Kan extension of the functor $F: C' \to Set$ associated to η.

470.2. Erase 5 (it does not exist).

470.3+ *Schwartz's distributions as universal solutions.*

This theorem is akin to Kan extension Theorem: if the system of structures $\eta = \hat{\gamma}(\hat{p}.F)$ is a species of structures on a sub-category C' of C$^{\cdot}$, then the reflection $\hat{F}$ of F in the category of $\hat{p}$-dominated strong species of structures over C$^{\cdot}$ is the Kan extension of $F: C' \to \mathcal{H}$ along $C' \hookrightarrow C^{\cdot}$. An «internal» (i.o. enriched) version of it is given in /89, 90/.

This theorem was suggested by the following construction of finite order distributions I have indicated in [28, 126]:

Let U be an open subset of R and C(U) the space of continuous real functions on U with the compact-open topology. We have a system of structures $(N, C(U), \kappa')$ (over a monoid) where

$\kappa': (n, f) \mapsto f^{(n)}$ iff f has an n-th derivative $f^{(n)}$,

which is dominated in the category of locally convex spaces. Its expansion gives the locally convex space of finite order distributions $D_f(U)$ equipped with the action of N defining the n-th derivative of a distribution. The sheaf of distributions over R is the sheaf associated to the presheaf D_f so obtained. This construction generalizes to get distributions (or vector-valued distributions) over Banach spaces i.o. R (cf. [126]).

ON /89/ : QUASI-ÉLARGISSEMENT D'UN SYSTÈME DE STRUCTURES STRUCTURÉ.

This Note has not been developed elsewhere. The main results are generalized in /90/.

471.1. It is equivalent to say that the cone $(v_i): s \Rightarrow F$ is a p-initial lift of a sub-cone of the limit cone $(p_i): M \Rightarrow p.F$. This definition is still valid for any functor $p: \mathcal{H} \to \mathcal{K}$.

471.2. p_Y is well-faithful iff p is amnestic.

472.1. If $\mathcal{H}$ is not equipped with a forgetful functor, internal neocategories are the realizations of the sketch $\sigma'_{N\,eo}$ of neocategories (Comment 197.1). However, the corresponding «concrete» internal neocategories are a somewhat weaker notion than the present structured neocategories, since the object of composable pairs need not be a sub-pullback of (a, b).

In Comment 197.1, we had also pointed out the sketch $\sigma_{N\,eo}$ whose models in a category $\mathcal{H}$ with pullbacks were called *strongly internal neocategories*. If p lifts pullbacks, the «concrete» strongly internal neocategories in $\mathcal{H}$ coincide with the p-structured neocategories, for a sublimit of (a, b) is a sub-structure of their pullback.

472.2. The non concrete analogue of p-species of structures is the notion of *internal diagram* (or *internal action of a category*, or internal species of structures) extensively used these last years by specialists of topoi (cf. Comments 475.1, 478.3).

472.3+ R. bien fidèle i.o. des hypermorphismes.

The term «hypermorphism neofunctor» is only used in /122/ when the system is a species, i.e., when s' is exactly the pullback.

Proof of the Theorem. Identifying s' to $s_0 * s'$ the source of $(C^{\cdot} * E)^{\cdot}$ lifts into the projection $\hat{a}$ of the sub-pullback

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} s' \arrow[d, "q"'] & s*s' \arrow[l, "\hat{a}"'] \arrow[d, "\hat{q}"] \\ s_0 & s \arrow[l, "a"] \end{tikzcd}$$

and its target into $k': s * s' \to s'$. The set of composable pairs defines (because p lifts pullbacks since it lifts products and equalizers) the pullback

$$\begin{tikzcd} \hat{a} \vee k' \arrow[d, "q \vee q"'] & s'' \arrow[l, "v'"'] \arrow[d, "q''"] \\ a \vee b & s * s \arrow[l, "\iota"] \end{tikzcd} \quad \text{where} \quad \begin{tikzcd} s * s' \arrow[d, "\hat{a}"'] & \hat{a} \vee k' \arrow[l] \arrow[d, "v"] \\ s' & s * s' \arrow[l, "k'"] \end{tikzcd}$$

is a pullback. So s'' is a sub-pullback of $(\hat{a}, k')$. The composition lifts into the factor $[k.\, q'', \hat{a}.\, v.\, v']$ relative to the sub-pullback (*) .

This theorem is precised in / 90, 77 / .

473.1. The proof uses the commutativity of limits and sub-pullbacks (since both are initial lifts). In fact, this theorem comes from general results on sketched structures.

473.2. So $S | A$ is the P-substructure of S generated by A .

473.3. ζ-generating / 100/ means that P is $\ulcorner$-generating for $\mathfrak{M}$ and that a colimit indexed by ζ of small P-substructures of an object S of $\hat{\mathcal{H}}$ is preserved by P and is also a small P-substructure of S .

474.1. The main tool is that a sub-species of the p-species of structures η whose set of structures defines a P-substructure of s' also defines a p-sub-species of structures of η (cf. / 60/).

474.2. The maximal species of structures have been called *strong* species of structures in Comment 23.1. They correspond to discrete fibrations.

474.3. Same proof as for the preceding theorem with M_λ replaced by

$$\{ (f, z) \in C_\lambda \times E_\lambda \mid a(f) = q(z) \}$$

in the maximal case, by

$$\{ (f, z) \in (C_\lambda)_\gamma \times E_\lambda \mid a(f) = q(z) \} \cup$$
$$\{ (f, z) \in C^{\cdot} * E \mid \exists\, z' \in E_\lambda,\ fz' \in E_\lambda;\ f \in C_\lambda \},$$

in the saturated case.

474.4. This theorem is deduced from the general existence Theorem 1.2 / 100/ whose hypotheses are satisfied thanks to the preceding results. It is a kind of «internal» (vz. enriched in / 87 /) Kan extension theorem, which is precised in / 90/ (cf. Comment 478.3 for non-concrete versions).

The «minimal» enlargement extends the system of structures η as little as possible to obtain a species of structures. The «maximal» one takes η into a strong species of structures (which seems to be the best notion). The saturated enlargement is maximal on the isomorphisms, minimal elsewhere.

474.5 + *Germs of species of structures.*

The introduction of structured (as well as enriched) systems of structures was motivated by Analysis problems. In particular, for solving some optimization problems we associated [28] to a differential equation with local existence and unicity of solutions a topological system of structures which has the following properties:

- in the acting neocategory, the set of composable pairs is open in the pullback topology of (α, β);
- the domain of the action is open in the pullback topology of (α, q).

This is called a *germ of species of structures*. The preceding theorem proves that any germ may be canonically embedded into a (maximal) topological species of structures (cf. Bednarz's Thesis [4]).

Differentiable germs of species of structures are also considered in [28], Part II.

ON /90/ : PREMIER THÉORÈME D'EXPANSION STRUCTURÉE.

This Note has only been developed in unpublished lectures. A simplified modern transcription of it is given in the Synopsis.

475.1 + *Internal well-faithful neofunctors and discrete fibrations.*

We recall that a neofunctor $g : \hat{C} \to C$ is *well-faithful* (cf. /122/, Chapter II) or is a *partial discrete fibration*, if:

1° The map $k \mapsto (g(k), \alpha(k))$ into the pullback $\alpha \vee g$ is 1-1.

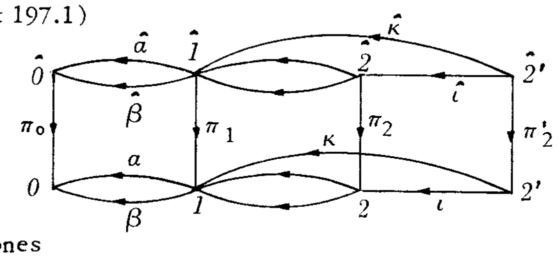
2° $\hat{C} * \hat{C}$ is the pullback

$$\begin{tikzcd} \hat{\alpha} \vee \hat{\beta} \arrow[d, "g \vee g"'] & \hat{C} * \hat{C} \arrow[l] \arrow[d] \\ \alpha \vee \beta & C * C \arrow[l, "\iota"] \end{tikzcd}$$

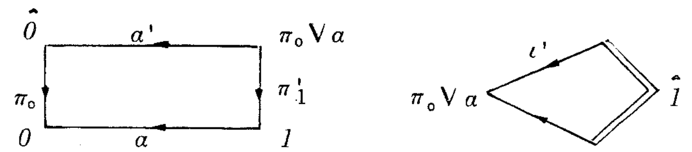
(this condition is always satisfied if $\hat{C}$ is a category).

These axioms imply that the category of well-faithful neofunctors

475.1 ... is equivalent to the category of models in *Set* of the sketch σ_{wf} defined as follows: To the sketch $\sigma_{Neo} \otimes 2$ of (strong) neofunctors (cf. Comment 197.1)

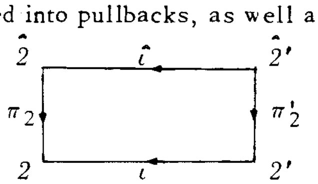


we add the cones

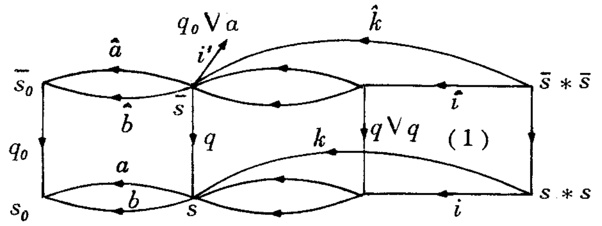


(*)

to be transformed into pullbacks, as well as the cone



The models of σ_{wf} in a category $\mathcal{H}$ are called *internal well-faithful neofunctors in* $\mathcal{H}$. If $\mathcal{H}$ is equipped with a concrete functor p lifting the canonical pullbacks in *Set*, the «concrete» models of σ_{wf} which map ι, $\hat{\iota}$ and ι' on p-injections correspond to the p-structured well-faithful neofunctors $\hat{q}$. Indeed, to $\hat{q}: (\bar{C}^{\cdot}, \bar{s}) \to (C^{\cdot}, s)$ corresponds the model



since: $\bar{s}$ is a sub-pullback of (q_0, a) implies $i': \bar{s} \to q_0 \vee a$ is a p-injection; (1) is a pullback because it is mapped by p on a pullback and i and $\hat{i}$ are p-injections.

So the category $\mathfrak{Q}\mathfrak{N}_b^{\cdot}(p)$ is isomorphic to the category of concrete

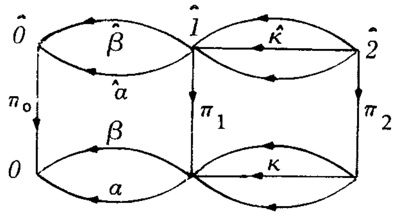
475.1 ... realizations of σ_{wf}. Moreover $\mathcal{N}'_b(p)$ is a category because a vertical composite of pullbacks is a pullback.

The hypermorphism neofunctors are not sketchable, but the «good» notion seems to be the *discrete neofibrations*, which are the hypermorphism neofunctors $g: \hat{C} \to C$ for which $\hat{C}$ is a pullback of (a, g), so that we get the discrete fibrations by restriction to the functors.

The sketch σ_{dnf} of discrete neofibrations is the same as σ_{wf}, except that we replace the cones (*) by the unique cone

$$\begin{tikzcd} \hat{0} \arrow[d, "\pi_0"'] & \hat{1} \arrow[l, "\hat{a}"'] \arrow[d, "\pi_1"] \\ 0 & 1 \arrow[l, "a"] \end{tikzcd} \qquad (**)$$

to be mapped on a pullback. The sketch σ_{df} of discrete fibrations is the sketch $\sigma_{Cat} \otimes 2$ of functors



equipped with the supplementary cone (**) to become a pullback.

The models of σ_{dnf} or σ_{df} in a category $\mathcal{H}$ are the *internal discrete neofibrations* or *fibrations in* $\mathcal{H}$. If $p: \mathcal{H} \to Set$ is a concrete functor lifting canonical pullbacks, the «concrete» models of σ_{dnf} mapping ι and $\hat{\iota}$ on p-injections correspond to the p-structured discrete neofibrations, while the *p-structured discrete fibrations* are just the models of σ_{df} in $\mathcal{H}$ mapped by p on a discrete fibration.

Now a model in a category $\mathcal{H}$ with pullbacks of σ_{wf}, σ_{ndf} or σ_{df} is entirely determined by its values on the «base neocategory», on the «projection» π_0 and on the «upper target» $\hat{\beta}$ (called the *action*). So we deduce from these sketches the sketches σ_{Sys} of systems of structures, σ_{sp} of species of structures, σ_{act} of category actions, obtain-

475.1 ... ed by just keeping: the base neocateeory, the projection π_0, the action $\hat{\beta}$ and the morphisms expressing the unitarity of the action and its compatibility with the composition of the base. Their models in $\mathcal{H}$ are respectively called *internal systems of structures, internal species of structures, internal actions of a category* or *internal diagrams* [56] in the category $\mathcal{H}$.

From this construction, it follows that the category of (concrete) internal systems of structures in $\mathcal{H}$ is equivalent to the category of internal (concrete) well-faithful neofunctors, while the category of internal species of structures is equivalent to the category of internal discrete neofibrations. This is the essence of the theorem of Section 1. For functors, the last result gives the usual equivalence between the categories of internal diagrams and of internal discrete fibrations.

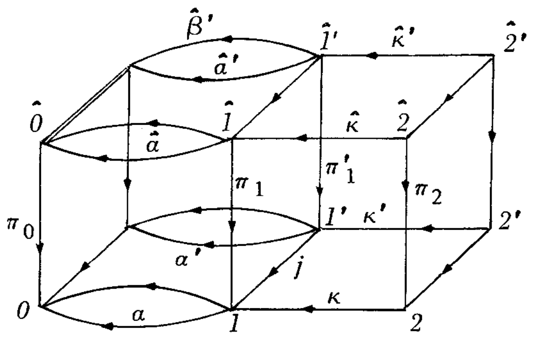
476.1 ¶ R. $K.\tilde{p}(\hat{q})(\bar{K}^{\cdot}_0) \subset \tilde{p}(\hat{q})(\bar{K})$ i.o. $K = \tilde{p}(\hat{q})(\bar{K})$.

This modification, which means that $\hat{q}'$ is a p-structured discrete fibration (Comment 475.1), i.o. an onto hypermorphism functor, is necessary for the following results to be valid.

The sketch of functors with hypermorphisms:

p-structured functors with hypermorphisms are the concrete models of the sketch σ_{fh} constructed as follows:

We take the sketch $(\sigma_{Cat} \otimes 2) \otimes 2$ of squares of functors



and require that the back face becomes the sketch of a discrete fibration, that $\hat{0} = \hat{0}'$, that the arrow $j: 1' \to 1$ be sent on a monomorphism (or, in the concrete case, on a p-injection) and that

476.1...
$$\begin{tikzcd} \hat{1} \arrow[d, "\hat{\alpha}"'] & \hat{\alpha}\vee\hat{\alpha} \arrow[l] \arrow[d] \\ \hat{0} & \hat{1} \arrow[l, "\hat{\alpha}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hat{1} \arrow[d, "\hat{\alpha}"'] & \hat{\alpha}\vee\hat{\alpha}' \arrow[l] \arrow[d] \\ \hat{0} & \hat{1}' \arrow[l, "\hat{\alpha}'"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \hat{1} \arrow[d, "\hat{\alpha}"'] & \hat{\alpha}\vee\hat{\beta}' \arrow[l, "proj_1"'] \arrow[d, "proj_2"] \\ \hat{0} & \hat{1}' \arrow[l, "\hat{\beta}'"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hat{\alpha}\vee\hat{\alpha}' \arrow[d, "\pi_1 \vee j\pi'_1"'] & \hat{\alpha}\vee\hat{\beta}' \arrow[l, "{[\hat{\kappa}, proj_2]}"'] \arrow[d, "\pi_1 \vee j\pi'_1"] \\ \alpha\vee\alpha & 2 = \alpha\vee\beta \arrow[l, "{[\kappa, proj_2]}"] \end{tikzcd}$$

be mapped on pullbacks. (Condition 3 is translated into : the map
$$(\bar{g}, \bar{f}) \mapsto (\bar{g}.\bar{f},\ \bar{f},\ \tilde{p}(\hat{q})(\bar{g}))$$
is 1-1 from the set
$$\{ (\bar{g}, \bar{f}) \in \bar{C} \times \bar{K} \mid \alpha(\bar{g}) = \beta(\bar{f}) \}$$
onto the set
$$\{ (\bar{h}, \bar{f}, g) \in \bar{C} \times \bar{K} \times K \mid \alpha(\bar{h}) = \alpha(\bar{f}),\ g.\tilde{p}(\hat{q})(\bar{f}) = \tilde{p}(\hat{q})(\bar{h}) \} .)$$

The models of σ_{fb} in a category $\mathcal{H}$ are called *internal functors with hypermorphisms in* $\mathcal{H}$.

If in σ_{fb} we replace j by an identity (so that there is only one base category) we get the sketch σ_{fib} *of fibrations with a given splitting*; one of its models in *Set* maps π_1 on a fibration $\bar{C} \to C$ and $\hat{1}'$ on a subcategory $\bar{K}$ of $\bar{C}$ formed by «canonical» cartesian morphisms. The category of models of σ_{fib} in $\mathcal{H}$ is called the category of *internal fibrations in* $\mathcal{H}$. (An equivalent «sketch» is given by Johnstone, exercises 2 (6) [56].) Cf. Comment 513.1 for some properties of internal fibrations and fibrations in a 2-category.

If $p: \mathcal{H} \to Set$ is a concrete functor lifting canonical pullbacks, a concrete model of σ_{fib} , called a *p-structured fibration*, is a p-structured functor with hypermorphisms $(\hat{q}, \hat{q}')$ in which $\hat{q}$ and $\hat{q}'$ have the same codomain.

476.2. The converse is not true. If $\hat{q}'$ is a «general» hypermorphism functor, then $(\hat{q}', \hat{q}')$ is a functor with hypermorphisms iff $\hat{q}'$ is a discrete fibration (a morphism of the domain of $\hat{q}'$ is not a $\hat{q}'$-surjection otherwise).

476.3. Omit the second relation (it is not necessary for the validity of the result and it is not always satisfied in the applications).

477.1 + *Proof.*

The substructure $(\hat{q}_M, \hat{q}'_M)$ of $(\hat{q}, \hat{q}')$ generated by the small subset M of $\bar{C} \times C$ is constructed as follows: The projections of M on $\bar{C}$ and C generate small P-substructures $\bar{s}_1$ of $\bar{s}$ and s_1 of s. We inductively define sequences $(\bar{s}_\lambda)_{\lambda<\zeta}$ and $(s_\lambda)_{\lambda<\zeta}$ of small P-substructures of $\bar{s}$ and s by taking:

- for a limit ordinal λ, the P-substructures generated by

$$\bigcup_{\mu<\lambda} P(\bar{s}_\mu) \text{ and } \bigcup_{\mu<\lambda} P(s_\mu);$$

- for $s_{\lambda+1}$ the P-substructure of s generated by the subcategory of $C^\cdot$ generated by $q(p(\bar{s}_\lambda)) \cup p(s_\lambda)$;
- for $\bar{s}_{\lambda+1}$ the P-substructure of $\bar{s}$ generated by the subcategory of $\bar{C}^\cdot$ generated by:

$$p(\bar{s}_\lambda) \cup \{ g \in \bar{K} \mid \alpha(g) \in p(\bar{s}_\lambda),\ p(g) \in p(s_\lambda) \}$$
$$\cup \{ f \in \bar{C} \mid f.g \in p(\bar{s}_\lambda) \text{ for some } g \in \bar{K} \cap p(\bar{s}_\lambda) \}$$

(the g are added for making $\hat{q}'_M$ a discrete fibration and the f for making $\hat{q}_M$-surjections out of the elements of $\bar{K} \cap p(\bar{s}_\lambda)$). Then the sets $\bigcup_{\lambda<\zeta} p(s_\lambda)$ and $\bigcup_{\lambda<\zeta} p(\bar{s}_\lambda)$ define p-structured sub-categories $(C^\cdot_M, s_M)$ of $(C^\cdot, s)$ and $(\bar{C}^\cdot_M, \bar{s}_M)$ of $(\bar{C}^\cdot, \bar{s})$ to which $\hat{q}$ has a restriction $\hat{q}_M$. As K and C_M define substructures of $(C^\cdot, s)$, their intersection also defines a p-structured subcategory $(K^\cdot_M, s'_M)$ of $(C^\cdot, s)$ (because $\hat{P}$ is $\sqsubset$-generating, cf. Appendix / 102 /); similarly $\bar{K} \cap \bar{C}_M$ defines a p-structured subcategory $(\bar{K}^\cdot_M, \bar{s}'_M)$ of $(\bar{K}^\cdot, \bar{s}')$; whence the restriction $\hat{q}'_M$ of $\hat{q}'$. ∇

Notice that $\hat{q}'$ onto does not imply either $\hat{q}'_M$ onto nor the image of $\bar{p}(\hat{q}'_M)$ onto a p-structured subcategory of $(\bar{K}^\cdot, \bar{s})$. So the modification indicated in Comment 476.1 is essential for this theorem.

477.2 + *Proof.* It is done in two steps:

1° Let $\mathcal{S}(p)_u$ be the subcategory of $\mathcal{S}(p)$ formed by the morphisms

477.2 ...

$$Q = \begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "(\hat q_2, \hat q'_2)"'] & \cdot \arrow[l, "\hat F_1"'] \\ \cdot \arrow[r, equal, "Id_u"'] & \cdot \arrow[u, "(\hat q_1, \hat q'_1)"'] \end{tikzcd}$$

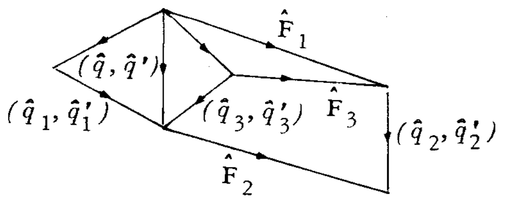
where u is the codomain of $(\hat q, \hat q')$. Then the conditions of the general existence Theorem 1-2 of /100/ are satisfied by the insertion: $\mathcal{S}'(p)_u \hookrightarrow \mathcal{S}(p)_u$, thanks to the preceding theorem (which is used in the case where C is small and is the projection of the given class M on C). Hence $(\hat q, \hat q')$ admits a reflection $(\hat q_1, \hat q'_1)$ into $\mathcal{S}'(p)_u$.

2° Now $(\hat q_1, \hat q'_1)$ is also a reflection of $(\hat q, \hat q')$ in $\mathcal{S}'(p)$, because each morphism

$$Q' = ((\hat q_2, \hat q'_2), \hat F_2, \hat F_1, (\hat q, \hat q'))$$

with $(\hat q_2, \hat q'_2)$ in $\mathcal{S}'(p)$ factorizes as

$$Q' = ((\hat q_2, \hat q'_2), \hat F_2, \hat F_3, (\hat q_3, \hat q'_3)) . Q,$$



with Q in $\mathcal{S}(p)_u$ and $(\hat q_3, \hat q'_3)$ in $\mathcal{S}'(p)$; indeed, $\hat q_3$ and $\hat q'_3$ are obtained by pulling back :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "\hat q_2"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & \cdot \arrow[l, "\hat F_3"'] \arrow[d, "\hat q_3"] \\ \cdot & \cdot \arrow[l, "\hat F_2"] \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "\hat q'_2"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{PB}"] & \cdot \arrow[l, "\hat F_{3\iota}"'] \arrow[d, "\hat q'_3"] \\ \cdot & \cdot \arrow[l, "\hat F_{2\iota}"] \end{tikzcd} \quad \beta(\hat q')$$

and the properties of a functor with hypermorphisms are preserved by pullback. ∇

477.3. R. foncteur i.o. néofoncteur

477.4. R. (K$^\cdot$ i.o. ($\overline{K}^\cdot$

477.5 ¶ Replace the two lines by: Soit $\overline{K}^\cdot_1$ la sous-catégorie de H$^\cdot$ formée des éléments $(k, k.f, f, \overline{e})$, où $\overline{e} \in \overline{C}_0$ et $k \in K$.

478.1. Add $h \in \overline{K}$.

478.2+ R. $(\mathcal{S}'(p), z(p))$ i.o. $z(p)$.

Proof of the theorem.

1° *The first assertion is valid as soon as* p *is a functor lifting canonical pullbacks.* To prove it, we construct $\bar{s}_1$ on H (which is the comma category (K, q)) as the pullback

$$\begin{tikzcd} s'*\bar{s} \arrow[d, "\iota \vee q"'] & & \bar{s}_1 \arrow[ll] \arrow[dd] \\ s*s \arrow[d, "\kappa"'] & 1 & \\ s & s*s \arrow[l, "\kappa"] & s*s' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

where

$$\begin{tikzcd} s' \arrow[d, "a'"'] & s'*\bar{s} \arrow[l] \arrow[d] \\ s_0 & \bar{s} \arrow[l, "bq"] \end{tikzcd} \quad \text{and} \quad \begin{tikzcd} s \arrow[d, "a"'] & s*s' \arrow[l] \arrow[d] \\ s_0 & s' \arrow[l, "b'"] \end{tikzcd}$$

are pullbacks. Then $(\mathrm{H}^{\cdot}, \bar{s}_1)$ is a p-structured category and the projection $q_1 : \bar{s}_1 \to s$ defines a p-structured functor $\hat{q}_1 : (\mathrm{H}^{\cdot}, \bar{s}_1) \to (\mathrm{C}^{\cdot}, s)$ lifting $\bar{q}_1$. Moreover $\bar{\mathrm{K}}_1$ (with the definition given in Comment 477.5) defines a p-substructure $\bar{s}'_1$ of $\bar{s}_1$ (we replace $\bar{s}$ by $\bar{s}_0$ and s by s' in the pullback 1) and $\hat{q}$ has a restriction $\hat{q}'_1 : (\bar{\mathrm{K}}^{\cdot}_1, \bar{s}'_1) \to (\mathrm{K}^{\cdot}, s')$. The elements of $\bar{\mathrm{K}}_1$ being $\bar{q}_1$-surjections, $(\hat{q}_1, \hat{q}'_1)$ is an object of $\mathcal{S}''$. The p-structured functor

$$\hat{f} : (\bar{\mathrm{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \to (\mathrm{H}^{\cdot}, \bar{s}_1) : h \mapsto (\bar{q}(h), e', e, h)$$

gives a morphism $\mathrm{J} : (\hat{q}, \hat{q}'') \to (\hat{q}_1, \hat{q}'_1)$.

Let $(\hat{q}_3, \hat{q}'_3)$ be an object of $\mathcal{S}''$ and $\hat{g} : (\bar{\mathrm{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \to (\bar{\mathrm{C}}^{\cdot}_3, \bar{s}_3)$ define a morphism $\mathrm{G} : (\hat{q}, \hat{q}'') \to (\hat{q}_3, \hat{q}'_3)$. We construct a map $g' : \mathrm{H} \to \bar{\mathrm{C}}_3$ which sends $\bar{f} = (f, f, e, \bar{e}) \in \bar{\mathrm{K}}_1$ onto the unique element of $\bar{\mathrm{K}}_3$ with source $\hat{g}(\bar{e})$ and image f, and which sends (k, f', f, h) on the factor of $g'(\bar{f}').\hat{g}(h)$ through the $\hat{q}_3$-surjection $g'(\bar{f})$. . This map g' defines a functor $\mathrm{H}^{\cdot} \to \bar{\mathrm{C}}^{\cdot}_3$ and, thanks to condition 3 satisfied by the p-structured functor with hypermorphisms $(\hat{q}_3, \hat{q}'_3)$, it lifts into a morphism $\bar{s}_1 \to \bar{s}_3$ (thanks to pullbacks). Hence a p-structured functor

$$\hat{g}' : (\mathrm{H}^{\cdot}, \bar{s}_1) \to (\bar{\mathrm{C}}^{\cdot}_3, \bar{s}_3) \quad \text{such that} \quad \hat{g}'.\hat{f} = \hat{g},$$

which defines the unique factor G' of G through J . It follows that

478.2 ... $(\hat{q}_1, \hat{q}'_1)$ is a reflection of $(\hat{q}, \hat{q}'')$ into $\mathcal{S}''$ and (for the same reason as in Comment 477.2) into $\mathcal{S}'(p)$.

2° The above constructed $\hat{g}'$ is compatible with r iff $\hat{g}'$ sends $\bar{h} = \hat{j}(h)$, for each $h \in \bar{K}^{\cdot}$, onto the unique element $\hat{g}'(\overline{\bar{q}(h)})$ of $\bar{K}_3$ with source $\hat{g}(a(h))$ and image $\bar{q}(h)$; i.e., iff $\hat{g} = \hat{g}'.\hat{j}$ sends $\bar{K}$ into $\bar{K}_3$, or else iff $\hat{g}$ defines a morphism $(\hat{q}, \hat{q}') \to (\hat{q}_3, \hat{q}'_3)$. Hence there is a reflection $(\hat{q}_2, \hat{q}'_2)$ of $(\hat{q}, \hat{q}')$ into $\mathcal{S}''$ (and a fortiori into $\mathcal{S}'(p)$) iff $(\hat{q}_2, \hat{q}'_2)$ is a $(\mathcal{S}'(p), z(p))$-quasi-quotient structure of $(\hat{q}_1, \hat{q}'_1)$ by r. When P is ζ-generating, there exists such a reflection, hence such a quasi-quotient, by the preceding theorem. ∇

Particular cases: 1° If $C = K$, then $(\hat{q}, \hat{q}'')$ «reduces» to $\hat{q}$, and $(\hat{q}_1, \hat{q}'_1)$ is a p-structured fibration (Comment 476.1), which is also the free object generated by $\hat{q}$ with respect to the functor $(\hat{g}, \hat{g}') \mapsto \hat{g}$ from the category of p-structured (split) fibrations over $(C^{\cdot}, s)$ to the category of p-structured functors over $(C^{\cdot}, s)$. For p the identity of *Set*, we find back the comma functor: $(-, C^{\cdot}) : Cat/C^{\cdot} \to Split\ C$ as an adjoint to the insertion (Gray [133]).

2° If $C = K$ and $\bar{C} = \bar{K} = \bar{C}^{\cdot}_0$, then $\hat{q}_1 = \hat{q}'_1$ is a p-structured discrete fibration, which is also the free object generated by $\hat{q}$ with respect to the functor from the category of p-structured discrete fibrations over $(C^{\cdot}, s)$ into $\mathcal{H}/s_0$ which maps $\hat{g} : (\bar{C}^{\cdot}, \bar{s}) \to (C^{\cdot}, s)$ onto the projection $g_0 : \bar{s}_0 \to s_0$.

478.3 + *Internal Kan extensions and existence of* Π_f.

Let $\mathcal{H}$ be a category admitting pullbacks and C an internal category in $\mathcal{H}$. The first part of the Expansion Theorem and the particular cases of Comment 478.2 transpose (Synopsis) for (non-concrete) internal functors. Whence, if C is an internal category in $\mathcal{H}$,

- The «insertion» from $Cat(\mathcal{H})/C$ into the category $Split(\mathcal{H})_C$ of internal (split) fibrations in $\mathcal{H}$ over C has an adjoint (still called the *comma functor* $(-, C)$).
- The «projection functor» from the category $\mathcal{H}^C$ of discrete fibrations in $\mathcal{H}$ into $\mathcal{H}/C_0$ has an adjoint. More precisely, it is monadic (John-

478.3 ... stone [56], Proposition 2.21); if $\mathcal{H}$ is a topos, it is comonadic ([56], Proposition 2.31) and $\mathcal{H}^{\mathrm{C}}$ is a topos.

More generally, suppose $f\colon \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ is an internal functor in $\mathcal{H}$ and $f^*\colon \mathcal{H}^{\mathrm{C}} \to \mathcal{H}^{\mathrm{D}}$, $\vec{f}\colon Split(\mathcal{H})_{\mathrm{C}} \to Split(\mathcal{H})_{\mathrm{D}}$, $f^{\bullet}\colon Cat(\mathcal{H})/\mathrm{C} \to Cat(\mathcal{H})/\mathrm{D}$ are the «change of base» functors (pullback along f). Then:

1° f^* has an adjoint $\underrightarrow{lim}_f$ for each f with codomain C iff $\mathcal{H}^{\mathrm{C}}$ is reflective in $Cat(\mathcal{H})/\mathrm{C}$, e.g., when $\mathcal{H}$ has reflexive coequalizers preserved by pullbacks [56].

2° If $\mathcal{H}$ is a topos, f^* has an adjoint $\underrightarrow{lim}_f$ and a coadjoint $\underleftarrow{lim}_f$, called *the left and right Kan extensions along* f; for $f\colon \mathrm{D} \to 1$ the functor $\underrightarrow{lim}_{\mathrm{D}}\colon \mathcal{H}^{\mathrm{D}} \to \mathrm{D}$ maps a discrete fibration on the «object of its orbits» and it is left exact iff D is filtered (cf. [56], 2, 3).

3° If $\mathcal{H}$ is a topos: $\vec{f}$ has a (2-) adjoint $\vec{\pi}_f$ and, using coequalizers in $Cat(\mathcal{H})$, a (2-)coadjoint $\vec{\Sigma}_f$; if f is an internal fibration, $f^{\bullet}$ has a (2-)adjoint π_f. (Cf. Bourn [111].)

Finally, it seems unworthy not to cite one of the main theorems on internal discrete fibrations, namely Diaconescu's Theorem [26, 56].

478.4. R. maximale i.o. minimale.

When such a section exists, p is always spreading (Comment 247.1).

478.5 + R. q'_2 i.o. q_2 and r. $\bar{\mathrm{K}}_2 = \bar{\mathrm{F}}^{q\,2}$ i.o. $\bar{\mathrm{K}}_2 = \bar{\mathrm{F}} \cup \beta(\bar{\mathrm{F}})$.

Proof of the theorem.

1° If p is spreading, the conditions of the Expansion Theorem are fulfilled and $(\hat{q}, \hat{q}')$ has a reflection $(\hat{q}_2, \hat{q}'_2)$ in $\mathcal{S}'(p)$. Let Z be a maximal section of p; we first show that, taking the underlying functors, $(\bar{q}_2, \bar{q}'_2)$ is a reflection of $(\bar{q}, \bar{q}')$ in $\mathcal{S}'$ $(= \mathcal{S}'(Id_{\mathfrak{M}}))$. Indeed

$$\begin{tikzcd}
 & (\hat{q},\hat{q}') \arrow[dr] \arrow[dr, bend left, "\hat{Z}'(Q)"] & \\
(\hat{q}_2,\hat{q}'_2) \arrow[ur, "J'"] \arrow[rr, "\hat{Q}'"'] & & \hat{Z}''(\bar{q}_3,\bar{q}'_3)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & (\bar{q},\bar{q}') \arrow[dr, "Q"] & \\
(\bar{q}_2,\bar{q}'_2) \arrow[ur, "U'(J')"] \arrow[rr, "U'(\hat{Q}')"'] & & (\bar{q}_3,\bar{q}'_3)
\end{tikzcd}$$

the forgetful functor $\mathcal{F}(p) \to \mathcal{F}$ also has a maximal section $\hat{Z}$ which maps $f\colon \mathrm{C}^{\bullet} \to \mathrm{C}^{\prime\bullet}$ onto $\mathrm{Z}(f)\colon (\mathrm{C}^{\bullet}, \mathrm{Z}(\mathrm{C})) \to (\mathrm{C}^{\prime\bullet}, \mathrm{Z}(\mathrm{C}'))$ /100/ and

478.5 ... it extends into maximal sections $\hat{Z}'$ of $U: \mathcal{S}(p) \to \mathcal{S}$ and $\hat{Z}''$ of $U': \mathcal{S}'(p) \to \mathcal{S}'$ which map $(\bar{q}_3, \bar{q}'_3)$ onto $(\hat{Z}(q_3), \hat{Z}(\bar{q}'_3))$ because a maximal section preserves pullbacks (Comment 247.1). So, if Q is a morphism $(\bar{q}, \bar{q}') \to (\bar{q}_3, \bar{q}'_3)$ into $\mathcal{S}'(p)$, we have the morphism

$$(\hat{q}, \hat{q}') \xrightarrow{can} \hat{Z}'(\bar{q}, \bar{q}') \xrightarrow{\hat{Z}'(Q)} \hat{Z}''(\bar{q}_3, \bar{q}'_3),$$

which factors uniquely as $\hat{Q}'.J'$, through the reflector J'. It follows that $U'(\hat{Q}')$ is the unique factor of Q through $U'(J')$, so that $U'(J')$ is a reflector into $\mathcal{S}'$. (Cf. Synopsis for a generalization.)

2° It remains to prove the theorem for the case $p = Id_{\mathfrak{M}}$. $\bar{C}^{\cdot}_2$ is the quasi-quotient category of $H^{\cdot}$ by the subcategory $H^{\cdot}_1$ generated by the elements

$$<f, h> = (e, f, f.\bar{q}(h), h), \quad \text{where } h \in \bar{F};$$

(cf. /80/); let $t: H^{\cdot} \to \bar{C}^{\cdot}_2$ be the canonical functor. Thanks to the properties of an expansion /79/, $(\bar{q}_2, \bar{q}'_2)$ is an object of $\mathcal{S}'$ where $\bar{q}'_2: \bar{F}^{q2} \to F$ is the restriction of $\bar{q}_2$, and there is a morphism

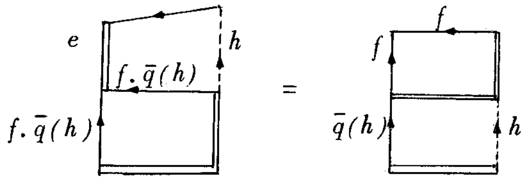
$$J': (\bar{q}, \bar{q}') \to (\bar{q}_2, \bar{q}'_2)$$

defined by the map

$$h \mapsto t(\bar{h}), \quad \text{where } \bar{h} = (\bar{q}(h), e', e, h).$$

Let $(\bar{q}_3, \bar{q}'_3)$ be an object of $\mathcal{S}'$ and $G: (\bar{q}, \bar{q}') \to (\bar{q}_3, \bar{q}'_3)$ be a morphism defined by $\bar{g}: \bar{C}^{\cdot} \to \bar{C}^{\cdot}_3$. In Comment 478.2, we have extended g into a functor $\bar{g}': H^{\cdot} \to \bar{C}^{\cdot}_3$; if we prove $\bar{g}'$ maps H_1 on objects, $\bar{g}'$ will factor through t and its factor will define the unique factor of G through J', so that J' will be a reflector. Indeed, in $H^{\cdot}$ we have

$$<f, h>.\overline{f.\bar{q}(h)} = \bar{f}.\bar{h} \quad \text{for each } h \in \bar{F},$$



where $\bar{f} = <f, f, e, \bar{e}>$, so that

$$\bar{g}'(<f, h>).\bar{g}'(\overline{f.\bar{q}(h)}) = \bar{g}'(\bar{f}).\bar{g}(h).$$

As $\bar{g}$ maps $\bar{F}$ into $\bar{K}_3$ and $\bar{g}'$ maps $\bar{K}_1$ into $\bar{K}_3$, this morphism is

478.5 ... the unique element of $\overline{K}_3$ with source $\bar{g}(a(h))$ and image $f.\bar{q}(h)$, namely it is equal to $\bar{g}'(\overline{f.\bar{q}(h)})$. It follows that $\bar{g}'(<f,h>)$ is an object. ∇

ON /95/ : DEUXIÈME THÉORÈME D'EXPANSION STRUCTURÉE.

This Note has not been developed elsewhere (but cf. Synopsis).

479.1. $\square(\hat{s}\,;s'\,;s)$ is defined by the pullback, where $\underset{\beta'}{\alpha'} : s' \xrightarrow{\iota} \hat{s} \overset{\hat{a}}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \hat{s}_0$,

$$\begin{tikzcd}
\hat{a}\vee\beta' \arrow[d, "\hat{s}*\hat{s}"'] & & \square(\hat{s}\,;s'\,;s) \arrow[ll] \arrow[dd] \\
\cdot \arrow[d, "\hat{\kappa}"'] & & \\
\hat{s} & \cdot \arrow[l, "\hat{\kappa}"] & a'\vee\beta \arrow[l, "\hat{s}*\hat{s}"]
\end{tikzcd}$$

while $\hat{a}\vee\beta'$ and $a'\vee\beta$ denote the pullbacks over $\hat{s}_0$. An analogue pullback gives $\square(s\,;s')$; and κ' defines a sub-morphism of the composition morphism of the p-structured category $(\square\hat{C}^{\cdot},\hat{\kappa}\vee\hat{\kappa})$ /109/.

This theorem does not require the existence of products, but only of pullbacks, in $\mathcal{H}$.

479.2 + 1° *Quasi-expansions and final subcategories.*

Quasi-expansions «relativize» the notion of a final subcategory. Indeed, when p is the identity of *Set* , we have :

PROPOSITION. *A category $\hat{C}$ is a quasi-expansion of a subcategory C by $F = \hat{C}.C_0$ iff the insertion $C \hookrightarrow \hat{C}$ is a final functor (in the sense of* [74] *).*

Δ. Denote by H the category $\boxminus(\hat{C}\,;F\,;C)$ and identify its class of objects with F . The equivalence σ_0 induced by σ on F is generated by:

$$f \sim f' \text{ iff } f' \in f.C .$$

So C is a final subcategory of $\hat{C}$ iff the map

$$\gamma : F/\sigma_0 \to \hat{C}_0 : f \,mod\, \sigma_0 \mapsto \beta(f)$$

is 1-1 and onto.

a) Suppose $b : H \to \hat{C}$ is a quasi-surjection ; then $b_0 : F \to \hat{C}_0$ is onto

479.2 ... as well as its factor γ. The functor

$$\phi : (k, f', f, h) \mapsto (f' \bmod \sigma_0 , f \bmod \sigma_0)$$

from H to the groupoid of pairs of F/σ_0 is compatible with σ so that it factors through b ; hence

$$b(f) = b(f') \text{ implies } \phi(f) = \phi(f'), \text{ i.e., } f \underset{\sigma}{\sim} f'.$$

It follows that γ is also 1-1.

b) Conversely, suppose C is a final subcategory of $\hat{C}$ and consider a functor $q : H \to K$ compatible with σ. For each $k : \hat{e} \to \hat{e}'$ in $\hat{C}$, we may choose $f : e \to \hat{e}$ in F and write

$$q'(k) = q(k, k.f, f, e).$$

Replacing f by $f.g$ where g is in C does not change $q'(k)$ since

$$(k, k.f.g, f.g, e') \underset{\sigma}{\sim} (k, k.f, f, e).$$

The first remark shows that $q'(k)$ is also unaltered if f is replaced by a $f' \in f \bmod \sigma_0$. Whence the unique functor $q' : \hat{C} \to K$ satisfying $q'.b = q$. This proves b is a q-surjection. ∇

2° *On the definition of quasi-expansions.*

With the hypotheses of the last definition page 479, the squares

$$(e', f', f'.h, h) \text{ with } f' \in F, \ h \in F \cap C$$

define a p-structured sub-category (G, S) of

$$u = (\boxminus(\hat{C}; F; C), \square(\hat{s}; s'; s)),$$

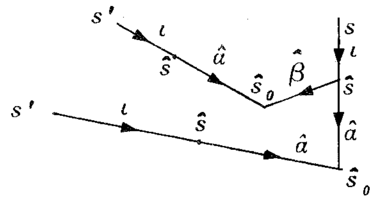
where S is defined thanks to the pullbacks

$$\begin{tikzcd} s' \arrow[d, "\alpha'"'] & & s' * s_1 \arrow[ll] \arrow[d] \\ \hat{s}_0 & \hat{s} \arrow[l, "\beta"'] & s \cap s' \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \hat{s}_0 \vee \beta' \arrow[d, "pr_2"'] & & S \arrow[ll] \arrow[d] \\ \hat{s} & \hat{s} * \hat{s} \arrow[l, "\hat{\kappa}"'] & s' * s_1 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

It is easily proved (as in Comment 462.4) that $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ is a quasi-quotient of u by σ iff it is a quasi-quotient of u by (G, S).

But this definition has to be slightly modified for the following theorems to be valid (cf. Comments 481.1, 482.1 and Synopsis).

480.1. $\sqsupset(\hat{s};s';s)$ is the limit of the diagram



and κ'' is a factor through this limit (which may be computed by pullbacks).

480.2. $(\hat{C}^{\cdot},\hat{s})$ is also the quasi-quotient of $(\sqsupset(\hat{C}^{\cdot};F;C),\sqsupset(\hat{s};s';s))$, by the subcategory G' defined by

$$\{(f.p(g),f,g) \mid g \in F \cap C\};$$

as in Comment 479.2, this definition has to be slightly generalized for the results of /96/ to be valid.

480.3. *Proof:* If $F \cap C$ is formed of isomorphisms, the subcategory G (Comment 479.2) is a subgroupoid satisfying the Ore condition (O) of the end of Section 3 /80/, so that the quasi-quotient category of $\boxminus(\hat{C}^{\cdot};F;C)$ by G is a quotient category. So $\hat{C}^{\cdot}$ is a F-quasi-expansion of C iff it is a F-expansion, and this means F is a set of reflectors into C (cf. /122/, Chapter V).

Similar proof for the next assertion.

480.4. If Y is fully faithful, any (s,j) is a weak prolongation, and a prolongation corresponds to a free object. If (s,j) is a weak Y-prolongation and j is an isomorphism, s is a cofree object with j^{-1} as its coliberty morphism, and (j,s) is also a Y-prolongation.

481.1 ¶ This theorem is not valid. For the second assertion, we only have:

If (v, J) is a weak Z-prolongation with J an isomorphism, then it is a prolongation and v is a Z-cofree structure generated by u. (Comment 480.4.)

The proof sketched for the first assertion has the following flaws:

- u_1 may not be in $\mathcal{E}'(p)$ because nothing proves $\alpha(\hat{q}_1)$ is a $\bar{F}_1$-quasi-expansion of $(\bar{C}^{\cdot}_1,\bar{s})$ (it's only true at the «category» level).
- Even if it is, the $\hat{p}$-quasi-quotient need not give a quasi-expansion

481.1 ... and there is no reason why quasi-quotients should exist in $\mathfrak{S}'(p)$.

However, the indicated theorem is valid if the definition of a quasi-expansion is replaced by the definition given in the Synopsis (where the universal condition satisfied by b is slightly more general). From it we deduce (with the definition of this Note), in the case F and $\bar{F}$ define subcategories, so that $(\hat{q}, \hat{q}')$, where $\hat{q}' : \bar{F} \to F$, is an object of $\mathcal{S}(p)$ and, by /90/, there exists a reflector

$$J' : (\hat{q}, \hat{q}') \to (\hat{q}_2, \hat{q}'_2) \text{ into } \mathcal{S}'(p) :$$

If $u_3 = (F, \bar{F}_3, \bar{C}_3, \hat{q}_3)$ *is an object of* $\mathfrak{S}'(p)$, *any* $l : \bar{C}_3 \to \bar{C}$ *defining a morphism* $Z(u_3) \to u$ *extends into a unique p-structured functor* $\hat{l} : a(\hat{q}_3) \to \hat{q}_2$ *mapping* $\bar{F}_3$ *into* $a(\hat{q}'_2)$

(cf. Synopsis). If $a(\hat{q}_2)$ is a quasi-expansion of $a(\hat{q}'_2)$, which means $(\hat{q}_2, \hat{q}'_2)$ gives an object u_2 of $\mathfrak{S}'(p)$, it follows that u_2 is a weak Z-prolongation of u. But this condition might not be fulfilled in the general case.

482.1 ¶ This is true if p is the identity of $\mathfrak{M}$, but probably not otherwise, unless the slightly more general definition of a quasi-expansion proposed in the Synopsis is adopted, in which case the result is true.

482.2 ¶ This assertion is only valid if the definition of a quasi-expansion of the Synopsis is adopted.

ON /96/ : THÉORÈME DE QUASI-EXPANSION RÉGULIÈRE.

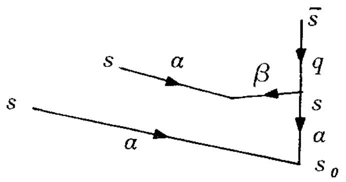
This Note is not developed. The false results become true if regular quasi-expansions are defined like quasi-expansions are in the Synopsis.

484.1. $D(\mu)$ is constructed as a quotient of the p-structured functor from T_1 to T_2 defined by a restriction of d^3_1, where

$$T_i = (\sqsupset(\tilde{C}_i; \tilde{F}_i; \bar{C}_i), \sqsupset(\bar{s} \,|\, \bar{C}_i; a(h_i))).$$

484.2 ¶ Condition 3 of the definition of $\mathfrak{R}'(p)_o$ is only satisfied by v_{u_o} at the «set-level».

484.3. σ is the limit of the following diagram



485.1 ¶ This assertion is not true at the «structure-level».

485.2. The proof is similar to that given in /100/ for the existence of quasi-quotient structured categories.

485.3 ¶ This is only true if p is the identity of $\mathfrak{M}$. The errors are similar to those pointed out in Comment 481.1.

485.4 ¶ Replace p by the identity of $\mathfrak{M}$.

486.1 ¶ Erase il faut et . (The condition is only sufficient.)

486.2. R. Supposons que i.o. Alors .

486.3. R. Catégories i.o. catégorie .

ON /77/ : CATÉGORIES ET STRUCTURES. EXTRAITS.

487.1. Sections 1 to 4 of this paper summarize parts of Chapters II, III, IV and V /122/. This book had been preceded by multigraphed lecture notes, of which the present text was a digest. The printed version is much more general, e.g. with respect to Section 4. Section 5 has not been developed elsewhere.

487.2. For this section which figures partially in /63/, cf. Comments on this paper in Part III-1.

488.1. Cf. Comments on /87/ where this notion is generalized.

489.1. The corresponding functor $C^{\cdot}_1 \to Cat$ is obtained by composition of the functor $F: C^{\cdot}_1 \to \mathcal{A}(\mathfrak{M})$ with the canonical isomorphism from $\mathcal{A}(\mathfrak{M})$ onto a subcategory of the category of discrete fibrations, and then with the «domain» functor to Cat.

489.2. The fibres $G(e)$ might not be disjunct.

490.1 + *Action of the crossed product.*

There is still another characterization of the species of structures which are dominated by covariant maps; it was only indicated in lecture notes /111/ :

PROPOSITION. *The crossed product* $\tilde{S}$ *(domain of the fibration) associated to* $G: C_1^{\cdot} \to Cat$ *acts on* S_0, *the action being* $\tilde{\kappa}'$:

$$((h,f,s),z) \mapsto h(fz) \quad \textit{iff} \quad sz \textit{ is defined in } F(\alpha(f)).$$

This gives a 1-1 correspondence between: the species of structures $F: C_1^{\cdot} \to \mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ *over* G, *the actions of* $\tilde{S}$, *and the functors* $\tilde{S} \to Set$.

Δ. The verification is trivial. But it may also be deduced from the fact that $\tilde{S}$ is the lax colimit of G (Comment 440.2). The data of F corresponds to the data of the lax cocone $d: G \Rightarrow Set$ in CAT, where $d(f)$ for $f: e \to e'$ in C_1 is the diagram

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & Set & \\ G(e') \arrow[ur] & & G(e) \arrow[ul] \arrow[ll, "G(f)"] \arrow[ul, phantom, shift right=6, "\Leftarrow"] \end{tikzcd}$$

associated to the covariant map $F(f): F(e) \to F(e')$. Such a lax cocone has a unique factor $D: \tilde{S} \to Set$ which gives the action of $\tilde{S}$. ∇

490.2 + *Distructures.*

Species of structures dominated by covariant maps were introduced in [28] under the name: categories of acting categories. The motivating examples were generalizations of the sheaf of differential operators acting on the sheaf of C^{∞}-real valued functions or on the sheaf of Schwartz's distributions. They led to a categorical definition of distributions (cf. Comment 470.3), through the more ubiquitous notion of distructure, which also englobes Mikusinski's operators [152], Sato's hyperfunctions [157], Aronszajn's functional completion [104] ; in the examples used in [28], the species of structures are further enriched in the category of topological vector spaces.

491.1 + *Couples of acting categories and distributors.*

When $G: C^{\cdot} \to Cat$ is the constant functor on $\bar{C}^{\perp}$, the double category associated to G is the square category $C^{\cdot} \blacksquare \bar{C}^{\perp}$ (cf. /117/), and the domain of the associated fibration is just the product category

491.1 ... $\bar{C}^{\perp} \times C^{\cdot}$. So *a couple of acting categories may also be characterized as a species of structures over a square product* (Theorem page 490), *or as a functor* $D: \bar{C}^{\perp} \times C^{\cdot} \to Set$ (Comment 490.1).

This last characterization expresses that: *a couple of acting categories «is» a* Bénabou's *distributor* (or Lawvere's profunctor) from $(\bar{C}^{\perp})^{op}$ to $C^{\cdot}$.

The proposition points out Σ as an atlas (in the sense of /75/) from $\bar{C}^{\perp}$ to $C^{\cdot}$ in the category $H^{\cdot}$, called the *join category for the functor* $D: \bar{C}^{\perp} \times C^{\cdot} \to Set$. The composite $D' \otimes D$ of the distributors:

$$D: (\bar{C}^{\perp})^{op} \dashrightarrow C^{\cdot}, \quad D': C^{\cdot op} \dashrightarrow C_1$$

corresponds to the composite of the associated atlases Σ and Σ_1 in the pushout category K:

$$\begin{tikzcd} K & H_D \arrow[l] \\ H_{D'} \arrow[u] & C^{\cdot} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

where H_D and $H_{D'}$ are the join categories for D and D' (cf. [7]).

491.2+ *Indexed limits.*

Bénabou used this example to give a criterium for representability.

A functor $A: C \to Set$ is representable iff C is a reflective subcategory of the join category H_A for the functor

$$C \times \{a\} \approx C \xrightarrow{A} Set.$$

Moreover the limit of A is the value at a of the Kan extension of A along the insertion $C \hookrightarrow H_A$. (Cf. [5].)

This result is generalized by Street as follows [92]: Suppose that $J: C \to Cat$ is a functor; the join category for

$$C \times \{a\} \approx C \xrightarrow{J} Cat \longrightarrow Set$$

becomes a 2-category H_J : if $F: C \to K$ is a functor, its *J-indexed limit* is the value at a of the Kan extension of F along $C \hookrightarrow H_J$ (when it exists). In fact, Street takes 2-functors for J and F.

491.2 ... Indexed limits may be used to generalize sketches: an *indexed 2-sketch* is the data of a 2-category S and of 2-functors

$$J : \mathrm{C} \to \mathit{Cat} \quad \text{and} \quad F : H_J \to \mathrm{S},$$

where H_J is the join category. A model in a 2-category B is a 2-functor $\phi : \mathrm{S} \to \mathrm{B}$ such that ϕF be the Kan extension of its restriction to C along $\mathrm{C} \hookrightarrow H_J$ for each J.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B} & \mathrm{S} \arrow[l, "\phi"'] & \mathrm{C} \arrow[l] \arrow[d, "\iota"] \\ & & H_J \arrow[ul, "F"] \end{tikzcd}$$

Usual sketches correspond to constant functors J.

491.3. $H^{\cdot}$ is called the *join of* $(p, \bar{p})$,

492.1. Most often dominated categories satisfy more precise axioms, so that they are enriched categories in a monoidal or closed category (cf. Comment 699.1).

493.1. Cf. Comment 490.2 and [29] (Part II).

493.2. The main results of this section are given in / 66 / to which we refer for comments; several evident propositions have been added: this section and the following one were primarily intended for undergraduate students. This difference of level between parts (some taken back from lecture notes, others from research papers) was one of the difficulties which hindered a good estimation of the book / 122 /. An other problem arose from the technicity of most results in it, the lack of concrete examples, and the awkward way some notions (such as reflections here, products and pullbacks in the next section) are introduced; this came from the desire to show the genesis of Charles's ideas, rather than to write a comprehensive book on category theory.

496.1. R. isomorphisme i.o. équivalence.

This construction is to be compared with the definition of expansions (cf. / 79 /).

496.2. R. un isomorphisme i.o. une équivalence.

498.1. Cf. Chapter IV / 122 /. The main results generalize to limits.

498.2. Later on, $\mathfrak{M}_0$ has to be a universe.

499.1. $\bar{p}$ is $\hat{\pi}$-compatible iff it *lifts* the $\hat{\pi}$-products, while it is compatible with $\mathcal{I}$-products iff it *preserves* them.

500.1. R. $\hat{\pi}_2$-compatible i.o. compatible avec les produits finis .

500.2. $(s)_{i \in I}$ is written for $(s_i)_{i \in I}$ where $s_i = s$ for each i in I .

503.1. R. produits fibrés i.o. produits .

506.1. This definition implies that $(F, H^{\cdot}_{Y})$ is a $\bar{p}$-admissible couple in the sense of /79/, when $\bar{p}$ is amnestic, i.e., when $(F, \bar{p})$ belongs to the class $\mathcal{S}_0$ defined hereafter.

506.2. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .

This theorem is a corollary of the first theorem of /79/. Cf. also Theorem 11-V /122/.

507.1. R. isomorphisme i.o. équivalence .

508.1. R. isomorphisme i.o. équivalence .

This theorem is equivalent to say that the functor $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ which maps $(F, C, \bar{q})$ onto $(F, \bar{q}')$, where $\bar{q}'$ is the restriction of $\bar{q}$ to C, has a right adjoint. It is a corollary of the Expansion Theorem of /79/, since $H^{\cdot}$ is a $\hat{F}$-expansion of C for a class $\hat{F}$ such that $\hat{F} \cap C$ is formed of isomorphisms iff $C^{\cdot}$ is a coreflective subcategory of $H^{\cdot}$ and $\hat{F}$ is equal to $E(H^{\cdot}, C)$. Cf. also Theorem 12-V /122/.

508.2. This condition means that F_1 is formed of q-surjections. Cf. /79/ and Theorem 12-V /122/.

509.1. Proofs are given in Propositions 13, 22, 15 and 16-V /122/.

509.2. In all this section it is necessary that $\mathfrak{M}_0$ be a universe, for the constructed extension to remain in it. Notice that the theorem is an immediate consequence of the preservation of limits by right adjoints.

509.3. More simply, C is a full subcategory of $K^{\cdot}$ and K is the subcategory of $K^{\cdot}$ closed by isomorphisms generated by C.

510.1. Cf. Theorem 14 and Proposition 22-V /122/.

510.2. Add où $\check{q}_i = (F_i, a(\bar{p}_i), \bar{q}_i)$ pour $i = 1, 2$.

510.3. Cf. Theorem 14 and Proposition 23-V /122/.

510.4. Cf. Theorem 16-V and Corollary /122/.

511.1. Cf. Theorem 17-V /122/.

511.2. Cf. Proposition 24-V /122/.

512.1. Cf. Proposition 18-IV and Corollary /122/.

A concrete functor $p: C \to Set$ lifting isomorphisms *admits atoms if* C *has a final object* 1 *which is a generator and* p *is equivalent to* $Hom(1,-): C \to Set$.

512.2. A $\mathcal{H}$-space of structures is a p-species of structures whose fibres are «structured». It is difficult to define the analogue notion when $\mathcal{H}$ is not concrete: Given an internal action of an internal category C on an object S of $\mathcal{H}_0$, the «points of C_0» may only be defined as the morphisms $e: 1 \to C_0$ from a final object of $\mathcal{H}$, so that the fibre over e should be the pullback

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "proj"'] & S_e \arrow[l] \arrow[d] \\ C_0 & 1 \arrow[l, "e"] \end{tikzcd}$$

if it exists. But those «points of C_0» don't correspond to the «concrete points» (elements of $q(C_0)$) when $q: \mathcal{H} \to Set$ is a concrete functor not associated to a generator (e.g. if $\mathcal{H}$ is Cat).

512.3. Add *si* $\mathcal{H}$ *est à produits fibrés préservés par* q.

The fibre $H(e)$ is the pullback:

$$\begin{tikzcd} \sigma \arrow[d, "\pi'"'] & H(e) \arrow[l] \arrow[d] \\ s_0 & \bar{a} \arrow[l, "\ulcorner e \urcorner"] \end{tikzcd}$$

512.4. These conditions mean that $(C^{\bullet}, C^{\perp})$ is a 2-category whose 2-cells act as their source morphism. Indeed, if $\pi'^{-1}(e)$ defines a subcategory of $S^{\perp}$ for each object e of $C^{\bullet}$, we have

$$e = \pi'(a^{\perp}(z)) = a^{\perp}(\pi'(z)) \quad \text{where} \quad e = \pi'(z),$$

whence $e \in C_0^{\perp}$. Then fz is defined for any 2-cell $f: e \Rightarrow e'$, and

$$fz = (f \perp a^{\perp}(f))\,(\beta^{\perp}(z) \perp z) = f\,\beta^{\perp}(z) \perp a^{\perp}(f)\,z = a^{\perp}(f) z,$$

because $f\beta^{\perp}(z)$ is an identity.

513.1+ *Internal fibrations and fibrations in a 2-category.*

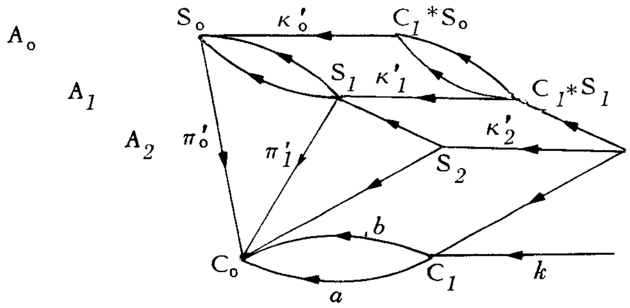
$\mathcal{H}$-spaces of morphisms were introduced to «internalize» species of morphisms looked at as categories acting on a category. However, as for spaces of structures, their definition mingles «points» and «structures», so that it does not transpose well in the «non-concrete» case.

More generally, a *p-species of morphisms* is the data of two p-structured categories (C, s) and (S, σ), and of an action κ' of C on S, such that $\hat{\eta} = ((C, s), \sigma, \kappa')$ is a p-species of structures. If p lifts canonical pullbacks and is associated to a final generator, each fibre is also structured by an appropriate pullback, and we find back p-spaces of morphisms.

PROPOSITION A. *A p-species of morphisms identifies with an internal category in the category of p-species of structures over (C, s).*

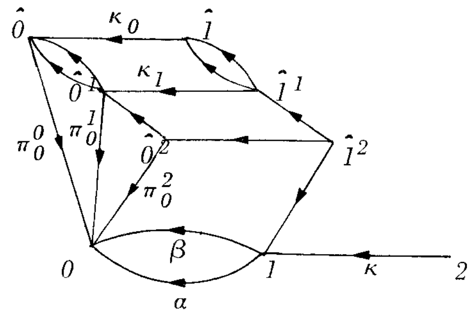
Indeed, its object of morphisms is $\hat{\eta}$ and its object of objects is the restriction of the action of (C, s) on the object of objects σ_0 of (S, σ).

Similarly, let $\mathcal{H}$ be a category admitting pullbacks and C an internal category in $\mathcal{H}$; a *species of morphisms in* $\mathcal{H}$ over C is defined as being a category A in the category $\mathcal{H}^C$ of internal discrete fibrations in $\mathcal{H}$. It is entirely determined by the functor $\pi': S \to C$ in $\mathcal{H}$ which «glues» the objects of objects of A_0, A_1, A_2 and by the action κ'_1 of C on S_1.



From this, the *sketch of species of morphisms* is easily drawn (cf. Horrent [140]).

513.1 ...



To a species of morphisms A in $\mathcal{H}$ is associated an internal fibration $\tilde{\pi}$ in $\mathcal{H}$ (cf. Comment 475.1); the object of morphisms $\tilde{\Sigma}_1$ of the domain $\tilde{\Sigma}$ of $\tilde{\pi}$ (the «crossed product category») is the pullback

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[d, "\alpha"'] & \tilde{\Sigma}_1 \arrow[l] \arrow[d, "\tilde{\pi}'_1"] \\ S_0 & C_1 * S_0 \arrow[l, "\kappa'_0"] \end{tikzcd}$$

while the sub-category Σ of $\tilde{\Sigma}$ formed by the «canonical splitting» has for its object of morphisms the pullback

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[d, "\pi'_0"'] & \Sigma_1 \arrow[l] \arrow[d] \\ C_0 & C_1 \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

(thus generalizing the theorem page 513). More precisely:

PROPOSITION B. *The category of species of morphisms in $\mathcal{H}$ is equivalent to the category Split $(\mathcal{H})$ of internal fibrations in $\mathcal{H}$.*
(Cf. Johnstone [56], Exercices 2 (5-6), where the definition of an internal fibration is given in a different, but equivalent, form than in Comment 475.1.)

Let *Split* be the category of all discrete fibrations, $\alpha^{\boxplus}$ and $\beta^{\boxplus}$ the horizontal source and target functors $Split \hookrightarrow \boxminus Cat \to Cat$ and p_1 the functor $Split \hookrightarrow \boxminus Cat \xrightarrow{\boxminus p\mathcal{F}} \boxminus Set$, where $p\mathcal{F} : Cat \to Set : g \mapsto g_1$. To the fibration $\tilde{\pi}$ in $\mathcal{H}$ corresponds the functor $F : \mathcal{H}^{op} \to Split$ such that

513.1 ... $\alpha^{\boxplus} F : \mathcal{H}^{op} \to Cat$ and $\beta^{\boxplus} F : \mathcal{H}^{op} \to Cat$

are the functors associated (cf. / 113 /, II) to the internal categories $\tilde{\Sigma}$ and C, where $\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma} \to$ C, and $p_1 F : \mathcal{H}^{op} \to \boxminus Set$ «is» the natural transformation $\mathcal{H}(-, \tilde{\pi}_1)$. From theorems on sketched structures:

PROPOSITION C. *Split($\mathcal{H}$) is equivalent to the category of functors $F : \mathcal{H}^{op} \to Split$ such that $p_1 F = \mathcal{H}(-, h)$ for some h in $\mathcal{H}$.*

This result implies that internal fibrations in $\mathcal{H}$ are the same as *fibrations in the 2-category* $Cat(\mathcal{H})$ of categories in $\mathcal{H}$. Indeed, if D is a 2-category and D_1 its category of 1-morphisms, a 1-morphism *d is a fibration in* D if D(- , *d*) «is» the natural transformation

$$D_1^{op} \xrightarrow{F} Split \longrightarrow \boxminus\, Cat$$

(cf. Bourn [111], Gray [133], Street [161]). If D is representable and if $\Box : D_1 \to Cat(D_1)$ is the functor associated to the representation (Gray [39]), then *d is a fibration in* D *iff* $\Box d$ *is an internal fibration in* D_1, or, when D = *Cat($\mathcal{H}$), iff d is a fibration in* $\mathcal{H}$.

Fibrations in a 2-category have been studied by several authors as a tool for developing a 2-categorical setting playing the same role vz. *Cat* as topoi do vz. *Set* (cosmoi of Street [159, 160], ditopoi of Bourn [111]), and we refer to them for more details.

514.1 + The theorem indicated in Comment 490.1 may be «internalized»: There is a $\mathcal{H}$-space of structures $((\tilde{\Sigma}, \tilde{\sigma}), \sigma, \tilde{\kappa}')$, where $(\tilde{\Sigma}, \tilde{\sigma})$ is the crossed product associated to (μ, G) on page 513.

The analogue «non-concrete» internal result for $\mathcal{H}$ any category admitting pullbacks is *the equivalence between the categories* $(\mathcal{H}^{C})^{A}$ and $\mathcal{H}^{\tilde{\Sigma}}$, where A is a category in $\mathcal{H}^{C}$ (or species of morphisms in $\mathcal{H}$) and $\tilde{\Sigma}$ the domain of the associated fibration in $\mathcal{H}$ (cf. Johnstone [56], Exercices 2 (7)).

515.1. $\mathcal{V}$ is the category of linear maps between vector spaces over variable fields.

516.1. $\tilde{p}_i^!$ is not a faithful functor, so the fibres have to be disjuncted for having a species of morphisms.

ON / 105 / : CATÉGORIES STRUCTURÉES ET CATÉGORIES DIFFÉRENTIABLES.

This paper collects results from / 109, 101, 104/ to which we refer for further comments.

519.1. R. des i.o. de .

519.2. $Hom(e', e)$ is the set of morphisms $e \to e'$ (in this order!).

520.1. Cf. Comment 699.1.

520.2. Cf. / 119/, Appendix, and Comment 699.1 for the comparison between enriched categories and internal categories.

523.1. The proof uses the general existence theorem for adjoints / 100/.

524.1. Algebraic structures is taken in the sense of «projectively sketchable» structures / 93, 106/.

524.2. The $\bar{\delta}^r$-groupoids are what Ngo Van Qué called differentiable groupoids [80]. To englobe this theory in the frame of structured categories was one of the motivations of / 107 /, where several «universal» extensions of a concrete functor into a functor lifting some initial or final structures are given. Recently the problem of initial completion (lifting all the small limits) of a concrete functor has been extensively studied (cf. Part IV).

524.3. R. a i.o. s .

525.1. For the «non-concrete» analogue construction, cf. / 104, 113/.

525.2. R. $(K_s,)^{\cdot}_0$ i.o. $(K_s,)^{\cdot}$.
In fact, $R(\sigma)^{op}$ is the crossed product associated to the species of morphisms whose fibres are the dual categories $(K_s,)^{op}$ (cf. Comment 696.1).

525.3. $R(s''', s') \times R(s', s'')$ has to be replaced by its intersection with the set of composable pairs of $R(\sigma)^{\cdot}$. Cf. / 104/ for all the results of this section.

526.1. Cf. Theorem 10 / 104/.

527.1. R. $S(\sigma)^{\cdot}$ i.o. $S^{\cdot}$.

527.2. In the non-Banach case, the definition of differentiable manifolds is taken from [125].

527.3. a and b are asked to be submersions for their pullback to exist. In fact, Dubuc has shown this condition has a real meaning in the setting of Synthetic Differential Geometry.

528.1. The Banach condition is required to have the implicit function Theorem on which the proof lies.

528.2. R. V i.o. V .

528.3. R. $(C_p^r)^*$ i.o. C_p^r .

529.1. R. κ'' i.o. K'' .

529.2. R. σ i.o. γ .

Differentiable species of morphisms (and their associated crossed products) are considered in / 103 /, and not in the given reference.

529.3. R. des catégories i.o. de catégories .

ON / 91/ : COHOMOLOGIE À VALEURS DANS UNE CATÉGORIE DOMINÉE.

This paper was written for the «Colloque de Topologie Algébrique», Bruxelles 1964, where some parts of it were exposed.

535.1. This category is studied in /64/ .

536.1. A natural transformation $t: F \to F'$ from K to H is identified with the functor $\Phi: K \to \boxminus H$:

$$\begin{tikzcd} e' \\ e \arrow[u, "f"] \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd} {} & {} \arrow[l, "t(e')"'] \\ {} \arrow[u, "F'(f)"] & {} \arrow[l, "t(e)"] \arrow[u, "F(f)"'] \end{tikzcd}$$

538.1. R. groupes abéliens i.o. groupes .

539.1. p_Y is well faithful iff p is amnestic.

539.2. R. $R_g(H^\cdot)$ i.o. $R_g(H)$.

540.1. This technical refinement of the notion of a generated sub-morphism / 100 / was suggested by the situation (used later on to define cohomology groupoids) of the subgroupoid of a category A generated by a subset M of A, where the pullback alluded to represents the intersection of M with the groupoid of all isomorphisms of A .

541.1. R. sous-morphisme i.o. sous-morhisme .

542.1. This notion is studied in / 100 /, to which we refer for comments.

543.1. R. si, $a(g) \in C'$ i.o. si, .

548.1. This paper has not been written.

549.1. R. $J \cap H'$ i.o. J (twice).

550.1. So p lifts isomorphisms.

551.1. This condition was introduced in / 55 / to describe categories of fractions; it generalizes the Ore condition for a semi-group to be embeddable in a group. (For some history on categories of fractions, cf. Comment 163.3.) It's natural the «same» conditions arise for calculating categories of fractions or quotient categories by a sub-category G : in the first case, the morphisms of G are to become isomorphisms, in the second one, objects, which is similar up to equivalence.

551.2. In other words, $\mathcal{C}^d$ is a reflective sub-category of $\mathcal{C}$. Informally, the morphisms of a proper sub-category may be universally transformed into epimorphisms.

553.1. $(H^\cdot, C)$ is an object of $\mathcal{C}'$ (resp. of $\mathcal{C}''$) iff C admits a calculus of right (resp. left) fractions in the sense of Gabriel-Zisman [35]. The theorem asserts that such a class C may be transformed in a set $\tilde{C}$ of regular (= epi + mono) morphisms of $\tilde{H}$. It follows that $H[C^{-1}]$ is equivalent to $\tilde{H}[\tilde{C}^{-1}]$, hence it is sufficient to consider categories of fractions by classes of regular morphisms.

556.1. Hence: any sub-category G of a category H may be «universally» identified with its objects, leading to the category $N(H^\cdot / \bar{\rho})$ which is the quasi-quotient category of H by G in the sense of / 100 / (I). Cf. Comment 170.1 for some history about quotient categories.

558.1. R.)). i.o.). .

559.1. R. $H^\cdot * H^\cdot$ i.o. $H^\cdot * H$.

559.2. R. $\bar{f}'^{i}_{j}$ i.o. $\bar{f}'^{i}_{i}$.

560.1. R. k'^{j-1} i.o. k'^{j} .

562.1. Φ' exists thanks to the universal property of $\hat{\sigma}$ (since $K^\cdot_0$ is contained in $R(K^\cdot)$).

563.1. R. t'_1 i.o. t' .

565.1. For this corollary, cf. Higgins [49].

568.1. This definition is laxified in /84, 102/ : $\bar{Z}^n(E,K)$ is only a p-sub-structure of $\bar{C}^n(E,K)$ generated by $Z^n(E,K)$ and $\bar{H}^n(E,K)$ is a quasi-quotient structure of $\bar{Z}^n(E,K)$ by $\bar{B}^n(E,K)$. Existence Theorems for this «quasi-cohomology» are proved in /84, 102/.

569.1. The amnesticity of a homomorphisms functor is used here.

569.2. This problem has not yet been studied. Even if $H = \mathfrak{H}$, this notion does not seem to compare with the exact sequences defined above.

570.1 ¶ Add et $\mathfrak{H}'$ pleine.

If $\mathfrak{H}'$ is not full, $\bar{B}^n$ might not take its values in it. If $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$ and p lifts pullbacks, the last condition of the theorem is always fulfilled (cf. Corollary 2, Proposition 1 Appendix /102/).

573.1. R. ϕ_i i.o. ϕ_1.

The proof comes from the fact that there exists a functor

$$\bar{\bar{\mathfrak{F}}} \times \mathfrak{F} \to \mathfrak{F} : ((\hat{S}^{\cdot}, \hat{S}^{1}), S^{\cdot}) \mapsto (\hat{S}^{\cdot}.\mathfrak{F}.S^{\cdot})^{1};$$

it is a restriction of the internal *Hom* functor on the category of all n-fold categories, with variable n (cf. /117, 119/).

574.1. R. $\mathfrak{M}$ i.o. $\mathfrak{F}$.

579.1. R. le corollaire du i.o. le.

579.2 ¶ $Z^n_{C^{\cdot}}(G,K)$ is not closed by ρ. To prove the theorem, we notice that the intersection of $Z^n_{C^{\cdot}}(G,K)$ with each class modulo $\bar{\rho}$ is a class modulo the relation giving the quotient by $B^n_{C^{\cdot}}(G,K)$.

579.3 + The precise definitions are given in /74/.

Enrichments of $\mathfrak{A}_{C^{\cdot}}$ *and of* $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A}$ is a sub-category of, and equivalent to, the category $DCat$ of diagrams in Cat (i.e., of Cat-valued functors). This category is a cofibration over Cat, the fibre over C being the category Cat^C which is equivalent to $\mathfrak{A}_C$. More precisely, $DCat$ is the dual of the crossed product associated to the action

$$(\Phi, r) \mapsto r.\Phi \quad \text{of } Cat^{op} \text{ on } \bigcup_C (Cat^C)^{op}$$

(but $\mathfrak{A}$ is not closed for this action, since the fibres of $F.\Phi$ may

579.3 ... not be disjunct.

If the fibres of a fibration are «coherently» dominated (or enriched) so is the fibration (cf. Horrent [140]). To the data of a functor q from a sub-category of $\mathfrak{A}$ to $\mathfrak{A}(\bar{p}_{\mathcal{F}})$, the method of Theorem 9 associates partial dominations on the fibres Cat^C, as well as on $\mathfrak{A}_C$. The (partial) domination D defined in Theorem 7 is deduced from these dominations.

When q is the «center» functor, the associated to D cohomology is an «abelian» cohomology; the other example for q is not intricate enough for leading to good non-abelian cohomologies, e.g. for englobing Giraud's theory [36]. So it would be interesting to seek other convenient functors q, which amounts to define canonical double categories on the fibres of a fibration.

Now there is another kind of domination on Cat^C, since it is a cartesian closed category (cf. Foltz [33]); the internal Hom maps (F, F') on the «functor category» F'^F (with the notations of Paré-Schumacher [82]). The composite of this internal Hom with the «crossed product» functor which maps a functor $C \to Cat$ on the domain of the associated fibration, is a natural enrichment of $\mathfrak{A}_C$ in Cat (which was not known in 1964, when this paper was written). Whence an enrichment of $\mathfrak{A}$ which might be worth studying with a view on applications in cohomology.

580.1. R. $\gamma, \eta \circ \Phi)$ i.o. $\eta \circ \Phi)$.

580.2. The species η is supposed onto C for its associated functor F toward the category of non-void sets to have C as its domain. But everything goes well if η and $\hat{\eta}$ are only strong species of structures (Comment 23.1), and *Set*-valued functors taking the value $\emptyset$ are allowed.

581.1. This proposition is simplified in /122/, end of Chapter IV: there exists a 1-1 correspondence between $\mathcal{B}$ and the class of quintets $(\mathfrak{M}, F, \Psi, \hat{F}, \Phi)$, which defines an isomorphism from $\mathcal{B}$ onto a dual sub-category of the vertical (i.o. horizontal, here) category of quintets (= category of squares of the 2-category *Cat*).

581.2. The notation $F \circ \Phi$ is confusing, since it is generally used to denote the usual composition of functors.

582.1+ Remark 1, page 580, may be precised as follows: $\mathfrak{B}$ is a general fibration over Cat^{op}, whose fibre over C is $\mathfrak{A}_C$; it admits a cleavage defined by the maps

$$(\eta \circ \Phi, \Phi, \gamma, \eta), \text{ where } \gamma(e, z) = z$$

(this cleavage is not normal, since $(\eta \circ \Phi) \circ \Phi'$ is only isomorphic to $\eta \circ (\Phi . \Phi')$). The consideration of those «change of base» maps (in a more precise enriched case) was motivated by the theory of induced vector bundles (cf. /50, 77/).

582.2. Same remark as in Comment 581.1.

583.1. R. $\alpha(\Phi)$ i.o. $\hat{C}$.

583.2. R. $\mathfrak{Z}^{\Phi(e)}$ i.o. $\mathfrak{Z}^{e}$.

585.1. $\bar{\Phi}$ is the «change of base along Φ» functor.

585.2. R. $\mathfrak{A}$ i.o. $\mathfrak{B}$.

588.1+ $\mathfrak{B}(p_{\mathfrak{F}})$ is equivalent to the crossed product associated to the action of Cat^{op} on $\underset{C}{\cup} Cat^{C}$ (Comment 579.3). Its domination D_* is deduced from the «coherent» dominations on Cat^{C} given by Theorem 9. A comparison with the properties of $\mathfrak{A}$ indicated in Comment 579.3 exhibits the duality between covariant and contravariant maps.

$\mathfrak{B}(p_{\mathfrak{F}})$ is also a general fibration over Cat^{op}, with $\mathfrak{A}_C$ as its fibre over C and with a non-normal cleavage defined by the «change of base» morphisms (as $\mathfrak{B}$ is, cf. Comment 582.1). The functor $\hat{H}^n$ is obtained by gluing together the functors $\bar{H}^n_C(\hat{q}\text{-}, \text{-})$.

588.2. R. Corollaire du Théorème 9 i.o. proposition 11 .

590.1. R. $\mathfrak{F}$ i.o. $C^{\bullet}$. For more recent results, cf. comments on /77/.

590.2. Add 2116 .

ON /93/: INTRODUCTION TO THE THEORY OF STRUCTURED CATEGORIES.

This paper was written during our six-month stay in the U.S.A. (February to August 1966), while Charles was Visiting Professor at the Kansas University at Lawrence. The text was typed and multigraphed as a technical report of this university. For inclusion in this volume, it has been recomposed on Varityper, without any modification.

591.1 + *Typical functors.*

In the late fifties, Charles defined type and typical functors for giving a construction of structures on sets which makes «categorical» Bourbaki's one [12] (to the formulation of which he had much participated); in /52/ this problem led him to introduce the 2-category *Cat* of natural transformations (in his rigourous terminology which names a category by its morphisms i.o. its objects). The *type functors* are the functors $Set \to Set$ obtained from the power-set functor $\mathcal{P}$ by iterated products and well-ordered limits; more precisely (cf. Application 1, page 119 / 102/) they are the objects of the closed by products and well-ordered colimits sub-category of Set^{Set} generated by the singleton natural transformation $Id \to \mathcal{P}$. Typical functors are sub-functors of restrictions of type functors. Cf. Blanc's Thesis [108] for a development of these ideas.

592.1. In fact, *Top* fulfills the listed property: the set of maps from M' to the topological space T may be equipped with the product topology $T^{M'}$. So *Top* becomes a monoidal closed category for the Hom functor which associates $T^{\underline{T}'}$ to (T', T) if $\underline{T}'$ is the set underlying T'. The tensor product $T \otimes T'$ is the product set $\underline{T} \times \underline{T}'$ equipped with the «asterix topology», which is the finest topology making continuous the maps

$$-\times\{x'\}: T \to T\otimes T' \quad \text{and} \quad \{x\}\times -: T' \to T\otimes T'$$

for each $x \in \underline{T}$, $x' \in \underline{T}'$ (cf. Foltz [129], Borceux [109]). But *Top* is not cartesian closed, though Greve [134] has proved *Top* admits as many monoidal closed structures as there are functors $Top \to Set$.

593.1 + *Some motivations.*

This paper was written just after Charles wrote his report on Bénabou's Thesis [107] on algebraic theories. As it is said in the text,

593.1 ... Bénabou includes categories in his theory by viewing them as families of structures on their Hom sets; then such a view was prevalent among categoricians, and it led to the Eilenberg-Kelly's enriched categories (and all their variants); but we were not convinced by it, though occasionally using dominated categories (which are some kind of enrichment). Indeed, Charles felt that a category is a structure on the class of its morphisms, idea which originated from his conception of topological and differentiable categories for Differential Geometry and his development of structured categories in the early sixties (cf. Comments 24.1 and 55.2). The desire of assessing this «internal vision» (which has been largely recognized later on) motivated the theory of sketches given here, which provides an appropriate setting for elementary algebraic structures, generalized (i.e. defined by partial compositions) algebraic structures (e.g. categories) and even most of the usual topological structures, if sketches are understood in the sense of this paper (which was narrowed in /98, 106, 115/, cf. Comment 599.1).

593.2. The «sketch of topologies» (A. Burroni [18]) distinguishes both cones and large cocones.

594.1. The term «logical» is ill-suited; theoretical would be more adapted. Indeed, the «smallest» sketches constitute an elementary definition of structures, while types do not; e.g. the sketch of categories is finite, while its type is the infinite simplicial category.

594.2. Ideas are studied by Lair [145]. We'll come back to this question in Part IV, along with sketched structures.

The construction of a «good» idea is exactly what the coherence problems studied by Kelly and Mac Lane [143] amount to.

597.1. R. graph with $K \in \mathfrak{M}_0$ i.o. graph .

598.1. This definition creates some difficulties later on. The examples suggest to take for μ_I a sub-sketch of μ on a (non-stable) sub-neocategory $U_I^{\perp}$ of $U^{\cdot}$ and for A the graph of a relation on the reflection of $U_I^{\perp}$ category L, so that $U^{\cdot}$ be the quasi-quotient of L by A.

598.2. $\nu(U^{\cdot})$ is a class of cones.

599.1 + *Sketched structures.*

The realizations or (in a more modern language) *models* of a sketch μ in a sketch on *Set* are called *sketched structures.* The categories of sketched structures include:

- the *locally presentable categories* of Gabriel-Ulmer [132], obtained when sketches are restricted to cone-bearing neocategories (in the terminology of /115/), also called catégories marquées by Chevalley.
- the *localisable categories* of Diers [122] which correspond to sketches in which the distinguished datas are cones and cocones (cf. Example 2).
- the categories of continuous functors in Freyd-Kelly's sense [131], which correspond to sketches in which cylinders are distinguished. Such sketches are actually studied by Guitart and Lair (cf. [135]), who look at cylinders as internal formulas.

In later papers /98, 106, 115/ the term sketch means a cone-and-cocone-bearing neocategory, and a sketch is universally embedded in its prototype (in which the cones become limit-cones) and in its type (which is a complete category).

In particular, a category H is a prototype when it is equipped with all its limit-cones. A model of μ in this prototype is called an *internal μ-structure in H.* Many results of this paper would have been simplified if categories of internal μ-structures had been considered i.o. of categories of models in a sketch on H with fewer distinguished cones. However the more flexible approach used here leads to theorems still valid for «concrete» models of μ, with respect to a concrete functor $p: H \to Set$, in which only canonical lifted limit-cones are to be used.

599.2. This definition should take Comment 598.1 into account.

600.1. For $\mathfrak{R}_{K^{\cdot}}$, this property comes from the equivalence

$$(U^2)^K \approx (U^K)^2$$

(where we use the more usual exponential notation).

603.1. $p_\lambda(\bar{\mu})$ is the restriction to $\mathcal{H}(\bar{\mu}, \mu, \mu_1)$ of the product, for $i \in L$, of the «evaluation at i» functors $H^U \to H$, where $U = \sigma(t)(\mu_1)$.

603.2. Monomorphic family is the usual term.

606.1. Cf. Comment 186.1.

610.1. Cf. Comment 182.2, where the condition that (v_1, v_2) became a monomorphic pair (resp. a sub-product) is expressed by requiring some cones to be sent on limit-cones.

612.1. Here is an illustration of Comment 598.1: it would be more natural to consider $\mu\mathfrak{N}$" as defined by the sub-sketch $\mu\mathcal{G}\mathfrak{N}$ and the relation

$$((a, v_1), (b, v_2)), \quad ((b, v_1), (b, k)), \quad ((a, v_2), (a, k))$$

on the free category on $U\mathcal{G}\mathfrak{N}$ (for why choose $a.v_1$ rather than $b.v_2$ as it is done here, for instance?).

620.1. Cf. Comment 197.1, where two slightly different sketches of neo-categories (= multiplicative graphs) are described: only the composites $j_m . i_m$ are singled out, not their factors.

621.1. A quadruple of $(H^\bullet; H^\bullet)$ is just a non-commutative square of $H^\bullet$.

623.1. Comment 598.1 also applies here.

627.1. New illustration of Comment 598.1.

633.1. The sketches of quasi-categories and of categories have been simplified later on (cf. Comments 266.1 and 55.2) by expressing the associativity axiom more symetrically; then the sketch of categories becomes the dual of a sub-category of the simplicial category (cf. /113/). The $(H^\bullet, R_g(H^\bullet), \hat{V}H^\bullet)$-(quasi-)categories, where $\hat{V}H^\bullet$ is the class of all pullbacks, reduce to the internal (quasi-)categories in $H^\bullet$; they are studied in /113/.

637.1. This axiom is unuseful (as it is proved in Proposition 5), because a category in which each morphism has a right inverse is a groupoid.

637.2. Here again is an application of Comment 598.1.

640.1. The axiom $I.I = u$ is used for the first time; but it is not necessary (cf. Comment 637.1 and the final Remark of Section 6).

641.1. This sentence is unuseful if $I.I = u$ is omitted (Comment 637.1).

642.1. This lemma says that the morphisms of a groupoid are epimorphisms (cf. Remark page 55).

644.1. p_u^*, is the functor $Hom(u', -): H^\cdot \to Set$ (in the usual notation).

651.1. This result generalizes for sketched structures /106/. The technicity of the proof comes from the use of only «some» pullbacks (cf. Comment 599.1).

652.1. This technical section is intended to prove that the structured multiplicative classes, graphs, categories,... studied in preceding papers /63, 66, 100/ are particular cases of the «internal» notions defined here, when adequate choices of limits are made.

653.1. In these comments I use well-faithful, which is the exact translation of the French term («bien fidèle») i.o. right faithful.

656.1. p is ν-compatible iff it lifts canonical pullbacks /77/.

657.1. $\mathcal{K}(H^\cdot, R_g(H^\cdot), \hat{V}H^\cdot)$ is the category of internal μ-structures in H (cf. Comment 599.1).

661.1. The definitions given here and in /100/ are identical. They correspond to the models in Set of the sketch σ_{mc} of multiplicative classes (Comment 182.2) and of the sketch σ'_{Neo} of neocategories (Comment 197.1).

662.1. $\mathcal{H}(H^\cdot)$ is the category of internal $\mathcal{H}$-structures in $H^\cdot$.

663.1. η is the Yoneda embedding:

$$H^\cdot \longrightarrow H^\cdot_{\mathfrak{A}} \hookrightarrow \mathfrak{A} = Set^{H^*}.$$

663.2. This comes from the Yoneda Lemma.

664.1. With the exponential notation: $(\mathfrak{M}^{H^*})^U \approx (\mathfrak{M}^U)^{H^*}$ (cf. /113/, Section II).

664.2. Natural transformations to $K^\cdot$ are looked at as functors to $\boxminus K^\cdot$.

664.3. An identical natural transformation such as $G'(e)$ is identified with a functor; hence $G'(e)(x)$ is a map, while $G(x)(e)$ is a (degenerated) square of maps.

667.1. If $H^\cdot$ admits pullbacks, the class has not to be shrinked.

669.1. $\hat{H}^\cdot$ may be constructed by a single induction; but it is very large. (Cf. final Remark.)

669.2. Here is used the preservation of limits by Yoneda embedding.

The notation G' is unfortunate, since it had a very different meaning in the preceding theorem.

671.1. As soon as $G(u)$ is representable, so is $G(u_0)$ because $G(u_0)$ is an equalizer of $(G(i.a), G(u))$ (cf. /113/). Hence a $H^{\cdot}$-category on (e, e_0) is the same as a generalized $H^{\cdot}$-category on e if $H^{\cdot}$ admits equalizers or pullbacks. /113/.

671.2. $\tilde{H}^{\cdot}$ may also be constructed by a single induction.

672.1. The «universal pullback completion» of $H^{\cdot}$, i.e., its reflection in the category of admitting pullbacks categories and of pullback preserving functors, is not equivalent to a sub-category of $\mathcal{A} = Set^{H^*}$ (cf. /102, 107/). So $\tilde{H}^{\cdot}$ is only the «smallest» pullback-closed sub-category of $\mathcal{A}$ containing $H_{\mathcal{A}}$.

If $H^{\cdot}$ does not admit pullbacks, the category of internal categories S in $\tilde{H}^{\cdot}$ (or in $\hat{H}^{\cdot}$) is not equivalent to $\mathbb{K}(\tilde{H}^{\cdot}, \mathcal{A}^{\iota}, V\tilde{H}^{\cdot})$, since the insertion morphism $S_0 \hookrightarrow S_1$ of objects into morphisms might not belong to $\mathcal{A}^{\iota}$.

ON /104/ : CATÉGORIES STRUCTURÉES GÉNÉRALISÉES.

Sections 1, 2, 3 collect results which are contained in preceding papers. A simplified version of Section 4 is given in the Synopsis.

677.1. Generalized structured categories are now called internal categories (and widely used!).

677.2. This «species of morphisms» gives rise to the fibration or indexed category associated to an internal category; the crossed product is the domain of this fibration.

677.3. In other words, it is a K-category in the cartesian closed category K domain of q (cf. Comment 699.1).

678.1. This section is developed in Part III-1, e.g. in /109/ which gives the final version on structured categories.

678.2. Cf. Comment 221.2.

679.1. In older papers, the term p-structured sub-category of $(C^{\cdot}, s)$ was used only when its object of morphisms is a sub-structure of s.

682.1. For ordered categories, cf. /63, 67/ and the Guide /86/ which summarizes the long series of papers devoted to them.

684.1. Cf. /92, 100/.

685.1. This theorem is generalized in /100/, Theorem 3-4.

686.1. $U\mathfrak{F}$ is the dual of a sub-category of the simplicial category (cf. /113/); it simplifies the sketch of categories described in /93/.

687.1. The data of μ is equivalent to make a choice of pullbacks on $H^{\cdot}$.

687.2. In other words, $\{a, b, i, k\}$ defines an idea of the sketch of categories (cf. Proposition 1-5 /93/).

688.1. Cf. Proposition 2.5 /93/ and /113/.

689.1. $\mathfrak{F}(H^{\cdot})$ is the category of internal categories in $H^{\cdot}$.

691.1. Cf. Proposition 4.8 /93/ and /113/.

694.1. The results of this section are proved more functorially in /113/.

696.1 ¶ $P(F)$ is the dual of the crossed product associated to the action κ' of H^* on the dual of $K^{\bullet}$, not on $K^{\bullet}$.

696.2. This just means that $D: H^{\cdot} \times H^* \to \hat{H}^{\cdot}$ is a functor whose composite with q gives the Hom functor of $H^{\cdot}$. Here again, $Hom(s, s')$ is the set of morphisms $s' \to s$ and not the opposite (more usual) way.

699.1 + *Discretely structured, enriched and internal categories.*

Suppose $q: \hat{H}^{\cdot} \to Set$ is equivalent to the functor associated with a final object I generator of $\hat{H}^{\cdot}$ (i.e., q admits atoms). As $\hat{H}^{\cdot}$ is a cartesian category, we may consider $\hat{H}$-categories (in the sense of Eilenberg-Kelly [31], called relative categories by Bénabou [6]). If $(H^{\cdot}, D_0)$ is a discretely q-structured category, there is an «identity» morphism $I \to D_0(s, s)$ taking the value s for each object s of $H^{\cdot}$, so that we have a $\hat{H}$-category H with $H^{\cdot}$ as its underlying category and $\mathrm{H}(s', s) = D_0(s', s)$ for each s'; the faithfulness of q and the fact that $H^{\cdot}$ is a category imply that the coherence axioms are satisfied. Conversely, a $\hat{H}$-category A gives way to a discretely q-structured category $(A, \mathrm{A}(-,-))$, where A is its underlying category. So in this case, the notions of $\hat{H}$-categories, discretely q-structured categories and strongly q-dominated categories coincide.

699.1 ... If the final object of $\hat{H}^{\cdot}$ is not a generator, then a discretely q-structured category may not determine a $\hat{H}$-category nor a strongly dominated one. An instance is given by the faithful functor $p\mathcal{J}: Cat \to Set$: a Cat-category is a 2-category $(C^{\cdot}, C^{\perp})$; it defines a discretely $p\mathcal{J}$-structured category $(C^{\cdot}, Hom_{C^{\cdot}}(-,-)^{\perp})$ which is strongly $p\mathcal{J}$-dominated iff, for any 2-cells x, y, z, z',

$$z'.(y \perp x).z = (z'.y.x) \perp (z'.x.z).$$

(It is a very strong condition which almost amounts to say that $C^{\perp}$ is discrete.) This comes from the fact that the «underlying functor» to consider should be the non-faithful functor $Hom(1,-): Cat \to Set$.

The Remark page 699 extends to $\hat{H}$-categories, where $\hat{H}$ is any cartesian category with commuting coproducts in Penon's sense [83], i.e., satisfying the conditions 1 and 2 of this remark. Indeed, we have proved in the Appendix of / 119/ that in this case an analogue construction (which is just a Kan extension, cf. Synopsis) gives a functor $\hat{H}\text{-}Cat \to Cat(\hat{H})$ which admits a right adjoint.

701.1 + R. q-dominée i.o. q-structurée. The first assertion is precised:

The data of the $\bar{D}(s'', s')$ *give a polyspan* $\bar{D}$ *in* $\hat{H}^{\cdot}$, *indexed by* $H_0^{\cdot}$ (in the sense of Bénabou [6], recalled in the Synopsis). Indeed, its source and target are deduced from the factorizations

$$a'(s'', s') = (\bar{D}(s'', s') \xrightarrow{a_{s''s'}} \bar{D}(s') \xrightarrow{[Id, \pi, Id]} \bar{D}(s', s')),$$

$$b'(s'', s') = (\bar{D}(s'', s') \xrightarrow{b_{s''s'}} \bar{D}(s'') \xrightarrow{[Id, \pi, Id]} \bar{D}(s'', s'')),$$

where $\bar{D}(s')$ denotes the sub-structure of $D(s, s')$ equivalent to $D(s_0, s')$ on the set

$$\{ m: s' \to s \mid m \in K_0^{\bullet} \},$$

$b_{s''s'}$ is a sub-morphism of the projection $\hat{p}_1$ of the product and $a_{s''s'}$ a sub-morphism of the composite $D(\hat{a}', s').\hat{p}_3$. Moreover, the domain $\bar{D}(s''', s'', s')$ of the morphism $k'(s''', s'', s')$ constructed in Theorem 9 is the pullback of $a_{s'''s''}$, $b_{s''s'}$, which gives the multiplication of the polyad.

701.1 ... The second assertion of the Theorem means that P *underlies a* $\hat{H}$-category (cf. Synopsis), i.e., a strongly q-dominated category since q admits atoms (Comment 699.1).

In fact, this theorem is valid for more general fibrations than the «small» ones [82] arising from an internal category (cf. Synopsis).

703.1 + *Cartesian closed categories in Topology.*

Quasi-topologies, generally called *limit-spaces* or convergence spaces, were studied by Kowalsky [144] and Fischer [128]. Before them Choquet had introduced pseudo-topologies, i.e., quasi-topologies in which a filter converges as soon as all the ultrafilters containing it converge; in [117], he also defines the quasi-topology of local convergence on the set of continuous maps $T \to T'$, which reduces to the compact-open topology if T is a locally compact space. It is the fundamental tool, since it equips the category of quasi-topologies with a cartesian closed structure. This property (which had not yet a name!) helped us for developing a differential calculus in (non-normed) topological vector spaces along the lines of the normed case [125]; an analogue idea is adopted by Bücher-Frölicher [115] (who write pseudo-topology i.o. quasi-topology), Keller [142], Simonnet [158]. It was also fruitful in the theory of prolongations of topological categories /92/. Moreover, the category of quasi-topologies is «almost a topos»; precisely, it is a quasi-topos in Penon's sense [153].

From the late sixties, many authors were concerned with finding a «good» cartesian closed category for making Topology. Some of them favored the view of replacing *Top* by a «large enough» cartesian closed subcategory, e.g. the category of compactly generated spaces. Others tried to embed *Top* in a «small enough» cartesian closed category, as the category of quasi-topologies, of pseudo-topologies, or of Antoine spaces (which is the smallest one [148]). Lately, much larger categories have been considered to include also uniform spaces. Moreover axiomatic constructions have been given, and general «topological functors» have been thoroughly treated. For more details and literature

703.1. ...on this subject, cf. Herrlich's paper [138].

Another idea for obtaining good categories of topological spaces is developed in shape theory, following Borsuk [110], Mardesič [150],... : a category of topological spaces is embedded in a full subcategory of its category of pro-objects (which is its free completion for filtered limits); thus objects are the same but there are more morphisms.

ON /113/ : ÉTUDE DES CATÉGORIES DANS UNE CATÉGORIE.

The first draft of this paper was multigraphed in 1972 as lecture notes from a «Cours de troisième cycle» at the University Paris VII. Slightly revised versions were distributed to research students in the three following years. Most results (except those of Section IV) are taken back in /115/. The text presented here is the final version we had prepared for publication in the «Esquisses Mathématiques» (which did not concretize, because of material problems); the main modifications with respect to the first version are pointed out in these comments.

The style of this paper is more standard than in the older papers; only elementary category theory is supposed known, and no references are given.

708.1 + Most topologists consider Δ as «the» simplicial category, but for geometric reasons, they name its objects

$$0, 1, \dots, n, \dots \quad \text{i.o.} \quad 1, 2, \dots, n+1, \dots .$$

This convention is also adequate for the sketch of categories (cf. Comment 710.2), so we have used it in these comments.

Mac Lane [74] calls $\bar{\Delta}$ the simplicial category; its interest comes from the fact that, equipped with the ordinal sum, it becomes a 2-category which is entirely generated by the two morphisms

$$0 \longrightarrow 1 \longleftarrow 2 .$$

Monads are the 2-functors from $\bar{\Delta}$ to *Cat*, and they are determined by their values on these two morphisms, which satisfy the well-known equalities.

709.1. Cf. Gabriel-Zisman [35] and May [151].

710.1. $\hat{U}$ is the category which underlies the sketch of non-associative quasi-categories /93/.

710.2. Cf. /93, 104/, where it is named a generalized structured category. The term internal category is more widely used. $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$ are called the *objects of objects, of morphisms, of composable pairs* of the internal category F, and usually denoted by F_0, F_1, F_2, whence the utility of changing the name of objects of Δ (Comment 708.1). The morphisms $F(\alpha)$, $F(\beta)$ and $F(\kappa)$ are the *domain, codomain, and composition morphisms of* F. These conventions are adopted through out the Comments of Part III.

711.1 + *Colimits in the simplicial category.*

The generating relations for Δ imply that, for each integer n :

- σ_i^n is an absolute coequalizer of the pairs

$$(n+1, \delta_i^n \sigma_i^n) \quad \text{and} \quad (n+1, \delta_{i+1}^n \sigma_i^n);$$

-

$$\begin{tikzcd}
n & n+1 \arrow[l, "\sigma_i^n"'] \\
n+1 \arrow[u, "\sigma_j^n"] & n+2 \arrow[l, "\sigma_i^{n+1}"] \arrow[u, "\sigma_{j+1}^{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

is an absolute pushout.

Proposition 1 only makes explicit these properties in the dual subcategory U_F, for $n = 1, 2, 3$. In the initial version of the paper, it figured as a Lemma in Section III, just before it was used.

713.1. This proposition means that U is an idea of the sketch of categories and of the sketch of non-associative quasi-categories (cf. Proposition 1.5 /93/ and, for the corollary, Proposition 3 / 104/).

715.1. This proposition (which figured as a Lemma in Section IV of the primitive version) means that U'' is another idea of the sketch of categories. It precises Proposition 3.5 /93/.

715.2. So the full sub-monoid of Δ^* with object 4 is also an idea of the sketch of categories.

717.1. This result may be deduced from Proposition 3 applied to $\boxminus H$.

719.1. For this proposition and its corollary, cf. Proposition 2.5 /93/ and Proposition 4 / 104/ .

722.1. Cf. Propositions 4.8/93/ and 6 / 104/ .

726.1. Cf. Cordier [118] and Eilenberg-Kelly [31].

727.1. Charles was always afraid by these isomorphisms, saying «ça me fait tourner la tête», and, on the version he used to prepare his lectures he wrote in the margin : Très difficile.

728.1. The proof is shorter than in the first version.

733.1. This proposition strengthens Proposition 4.9 /93/, where H admits pullbacks and both $p_1 . G$ and $p_2 . G$ are supposed to be representable (as in the initial Grothendieck's definition [42]).

735.1 + *Indexed categories.*

A functor $G: H^{op} \to Cat$ may be considered as an indexed category (with the terminology of Paré-Schumacher [82]) if it is replaced by its associated fibration. This indexed category is said *small* if G is a structure of category on an object of H, i.e., if G corresponds to an internal category in H. In this way, the theory of internal categories is englobed in the theory of indexed categories.

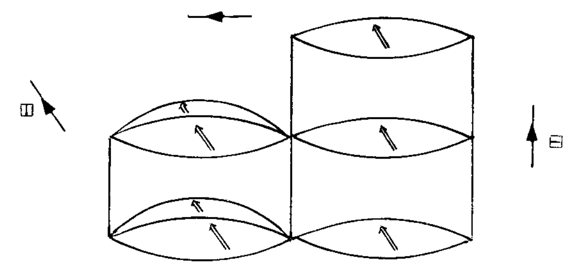
Indexed categories (under different names) have been considered by several authors, following the lead of Lawvere [65] and Benabou [19]. In particular, Penon has studied the «locally internal categories» over a topos [154], and Paré-Schumacher develop their theory up to an adjoint functor Theorem. They are an important tool for uniting internal categories in H and functors toward H.

736.1. Similar results for structured categories (= «concrete» internal categories) are given in / 109/ (Propositions 7.2 and 8.2).

738.1. This construction of $\hat{d}(F)$ is given in / 104/ where it is called the species of morphisms associated to F.

740.1. The square category was so constructed in / 109/ (Section 4) for structured categories, and the other results of this Section III also generalize / 109/ .

745.1. $(Q^{\boxminus}, Q^{\boxplus}, Q^{\cdot})$ is the 3-category of *cylinders of Cat :*



whence the structure of 2-category deduced from the second and third compositions on the set of functors $H^{op} \to Q^{\boxminus}$ (cf. /63, 117/).

746.1. Gray indicates this result in [39].

750.1. Let $G: H^{op} \to Cat$ be the functor $(= \hat{d}(F)$ in Section II) associated to H. For each object e of H, the set of morphisms $h: e \to s$ which factor through f defines a sub-category $G'(e)$ of $G(e)$, hence a sub-functor $G': H^{op} \to Cat$ of G. As this set may be identified to $s'.H.e$ the functor $p_2 . G'$ is representable by s', and G' is the functor associated to a sub-category F' of F in H. This provides another proof.

751.1. Another proof: Identifying t with a category in $\boxminus H$, we see that $t(1)$, $t(3)$ and $t(4)$ are also p-monomorphisms, since they are constructed by limits from $t(1)$ (Proposition 1.1). It follows that t is a p^{U_F}-monomorphism such that pt is a p_2-monomorphism; whence, t is a p_2^H-monomorphism, for the omission functor:

$$p_2^H = (H^{U_F} \xrightarrow{p^{U_F}} \mathfrak{M}^{U_F} \xrightarrow{p_2} \mathfrak{M}): t \mapsto t(2).$$

As $\bar{p}_{\mathfrak{F}}$ is a restriction of p_2^H to a full sub-category, t is still a $\bar{p}_{\mathfrak{F}}$-monomorphism.

751.2. Cf. / 100 /.

752.1. The implication $2' \Rightarrow 2$ is not so evident.

756.1. This criterium is Theorem 1.2 / 100 /. In the first part of his course, Charles gave this existence theorem (under the form of / 108 /); this is the reason why it is not recalled here.

757.1 + *Categories of internal categories.*

Several papers are devoted to the theory of internal categories in

757.1 ... H. For instance, Vaugelade [97] gets several properties of the category $Cat(H)$ by linking the theories of internal categories and of distributors. In his dissertation [141], Johnstone is mainly concerned with the case H is a topos.

If H is cartesian closed, so is $Cat(H)$. More generally monoidal closed structures are constructed on it, when H is a monoidal closed category (cf. /115/ and Comment 331.3).

The 2-categorical point of view has been initiated and well developed by Gray [39, 40]. Bourn-Penon [112] characterize the finitely complete 2-categories which are exacly comonadic on a 2-category $Cat(H)$ by two simple properties («reducible 2-categories»). In [111], Bourn proves $Cat(H)$ is a ditopos, when H is a topos.

In relation with his theory of cosmoi, Street [161] studies the existence and nature of internal full sub-categories.

The associated sheaf theorem (and its application to the existence of inductive limits in $Cat(H)$) is also valid when H is a cocomplete category in which countable well-ordered colimits are universal; indeed, it's a consequence of Foltz's associated sheaf Theorem [33] for sketched structures.

ON /94/ : TRENDS TOWARD UNITY IN MATHEMATICS.

This paper, which gives a fair view of Charles's thinking about Mathematics, was read before an audience made of Faculty members, students and their families, at the University of Kansas. It has aroused some interest among mathematicians, and it has been translated in several languages, e.g. Bulgarian, Czechoslovak, Portuguese, Spanish.

759.1. Charles already teached that Mathematics is an Art in his first year as a Professor at the Lycée de Rabat in 1928. Fourty years later, in a Paris bus he fortuitly met one of his ancient pupils, who recognized him and recalled him this sentence.

760.1. Bergson was a philosopher Charles had very much liked, but he was disappointed by Bergson's view of Mathematics when he re-read him in the sixties.

760.2. Charles was greatly impressed by Eudoxe's theory of ratios.

760.3. We had thoroughly studied Archimedes's works when Charles was preparing his lecture /56/ for the Commemoration of Archimedes's 2.000th anniversary.

761.1. This conception of Geometry was a central theme for Charles, and it motivated his theory of covariant maps and contravariant maps /47, 122, 91/. Even in his last lectures (at Amiens, in 1978) on History of Mathematics, he much insisted on this point.

762.1. We had long discussions about Cantor's works in the sixties, when Charles revised the French translation of the correspondence between Cantor and Dedekind (in which Cantor's theory is unfolded) for the re-edition of J. Cavaillès's Thesis /140/.

763.1. Here is an allusion to the theory of species of structures (or discrete fibrations) Charles undertook in the fifties and developed up to its present form in the early sixties.

764.1. Sub-structures and quotient structures are introduced and extensively used in the papers of Part III.

764.2. This (daring enough in 1966) prediction seems justified by the large amount of papers which are now concerned with the study of such classes of functors, e.g., topological functors (in Herrlich's sense) and their generalizations (Wischnewsky, ...), monadic functors, monoidal and closed categories, ...

764.3. The «bulldozer of Physics» is taken back from Queneau [155] who gives a more pragmatist view of Mathematics.

765.1. This sentence is not pure rhetoric: Charles really believed it, and it illuminated all his life.

BIBLIOGRAPHY

The numbers up to 102 refer to the Bibliography at the end of Part III-1, the abbreviations of which are also used here.

103. M. ANDRE, Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative, *LN* 32 (1967).

104. S. ARONSZAJN, Functional spaces and functional completions, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble VI (1955-56).

105. N. BAROUDI, *Sur l'homologie des catégories*, Thèse 3[e] cycle, Paris, 1967.

106. M. BARR & J. BECK, Homology and standard constructions, *LN* 80 (1969).

107. J. BENABOU, Structures algébriques dans les catégories, *CTGD* X-1 (1968).

108. G. BLANC, Foncteurs types et structures, *Esquisses Math.* 14 (1971).

109. F. BORCEUX, La théorie de Gelfand comme exemple d'adjonction relative, *Rapport Inst. Math. U.C. Louvain* 21 (1972).

110. K. BORSUK, Concerning the notion of the shape of compacta, *Proc. Intern. Symp. on Topo. and Apll.*, Belgrade 1969, 98-104.

111. D. BOURN, Ditopos ou une approche axiomatique de *Cat*, *Publ. U.E.R. Math. Lille* 40 (1975) and 85 (1976).

112. D. BOURN & J. PENON, *2-catégories réductibles*, Multigraphed Amiens 1977.

113. R. BROWN & P. J. HIGGINS, Sur les complexes croisés, ω-groupoïdes et T-complexes, *CRAS* 285 (1977), 997-999.

114. R. BROWN & P. J. HIGGINS, The equivalence of ω-groupoids and cubical T-complexes, *CTGD* XXII-3 (1981).

115. W. BÜCHER & A. FRÖLICHER, Calculus in vector spaces without norm, *LN* 30 (1966).

116. E. BURRONI, Catégories discrètement structurées; triples, *Esquisses Math.* 4 (1970).

117. G. CHOQUET, Convergences, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 23 (1947-48), 57.

118. J.-M. CORDIER, Catégories auto-dominées, *Esquisses Math.* 15 (1971).

119. P. DEDECKER, Le foncteur *Hom* non abélien. Application de la notion de poulpe, *CRAS* 258 (1964), 1117-1120.

120, R. DEHEUVELS, Homologie des ensembles ordonnés, *Bull. S.M.F.* 90 (1962).

121. A. DELEANU & P. HILTON, Borsuk shape and Grothendieck categories of pro-objects, *Math. Proc. Cambridge* 79 (1976), 473-482.

122. Y. DIERS, *Catégories localisables*, Thèse Un. Paris VI, 1977.

123. J. DUSKIN, Higher dimensional torsors and the cohomology of topoi: the abelian theory, *LN* 753 (1977), 255-279.

124. J. DUSKIN, *Notes on 2-dimensional hypergroupoids*, Multigraphed, 1977.

125. A. EHRESMANN (-Bastiani), Applications différentiables et variétés de dimension infinie, *J. Anal. Math. Jérusalem*, XIII (1964), 1-114.

126. A. EHRESMANN, Sur les distributions vectorielles, *Labo. Auto. Théor. Caen* 1963.

127. M. EVRARD, *Homotopie des complexes simpliciaux et cubiques*, Multigraphed Un. Paris VII, 1976.
128. H.R. FISCHER, Limesraüme, *Math. Ann.* 137 (1959), 269-303.
129. F. FOLTZ, Produit tensoriel généralisé, *CTGD* X-3 (1968), 269-303.
130. J. FRENKEL, Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, *Bull. S.M.F.* 85 (1957), 135.
131. P.J. FREYD & G.M. KELLY, Categories of continuous functors I, *J. Pure Appl. Algebra* 2 (1972), 169-191.
132. P. GABRIEL & F. ULMER, Lokal präsentierbare Kategorien, *LN* 221 (1971).
133. J.W. GRAY, The categorical comprehension scheme, *LN* 99 (1969), 242-312.
134. G. GREVE, An extension theorem for monoidal closed topological categories, *Seminarberichte* Fernuniv. Hagen 7 (1980), 107-120.
135. R. GUITART, Qu'est-ce que la logique dans une catégorie? *CTGD* XXII-4 (1981).
136. A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, *Comm. Math. Helv.* 32-4 (1958).
137. A. HANNA, On the homology theory of categories: I: *J. f. reine u. ang. Math.* 248 (1971), 133-146; II: Multigraphed, Amer. Univ. Beirut, 1971.
138. H. HERRLICH, Some topological theorems which fail to be true, *LN* 540 (1975).
139. G. HOFF, On the cohomology of categories, *Rend. di Mate. Roma* 7 (1974).
140. J.-J. HORRENT, Sur les espèces de morphismes, *Esquisses Math.* 18 (1972).
141. P.T. JOHNSTONE, *Some aspects of internal category theory in an elementary topos*, Dissertation Univ. Cambridge, 1976.
142. H.H. KELLER, Differential calculus in locally convex spaces, *LN* 417 (1974).
143. M. KELLY & S. MAC LANE, Closed coherences for a natural transformation, *LN* 281 (1972), 1-28.
144. J.J. KOWALSKY, Limesraüme und Komplettierung, *Math. Nachr.* 12 (1954).
145. C. LAIR, Idées et maquettes de structures algébriques, *CTGD* XII-1 (1971).
146. R. LAVENDHOMME & J.R. ROISIN, Note on non-abelian cohomology, *LN* 753 (1977), 534-541.
147. A. MACHADO, Quasi-topologie algébrique, *Esquisses Math.* 10 (1971).
148. A. MACHADO, Espaces d'Antoine et pseudo-topologies, *CTGD* XIV-3 (1973).
149. S. MAC LANE, *Homology*, Springer, 1963.
150. S. MARDESIČ, Pro-categories and shape theory, *LN* 540 (1975), 425-434.
151. J.P. MAY, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, 1967.
152. J.G. MIKUSINSKI, *Operatorenrechnung*, VEB Deutsch. V. Wiss., 1957.
153. J. PENON, Sur les quasi-topos, *CTGD* XVIII-2 (1977), 181-218.
154. J. PENON, Catégories localement internes, *CRAS* 276 (1973), 237-240.
155. R. QUENEAU, *Bords, Mathématiciens, Précurseurs, Encyclopédistes*, Hermann Paris, 1963.
156. J. ROOS, Sur les foncteurs dérivés de *lim*, *CRAS* 252 (1961), 3702.
157. M. SATO, Theory of hyperfunctions, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* I-8 (1959), 139-193.

158. M. SIMONNET, Calcul différentiel dans les espaces vectoriels quasi-topologiques, *Esquisses Math.* 24 (1976).

159. R. STREET, Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category, *LN* 420 (1974), 104- 133.

160. R. STREET, Cosmoi of internal categories, *Sydney category Seminar Report* (1978).

161. R. STREET, Fibrations in bicategories, *CTGD* XXI- 2 (1980), 111- 160.

162. R. STREET, Comprehensive construction of colimits, *Macquarie Un. Report* (1978).

163. SWIERCZKOWSKI, Triads in the homology of categories, *LN* 137 (1970).

SYNOPSIS

INTRODUCTION

In the fifties and early sixties, concrete problems in Differential Geometry, Topology and Analysis led Charles to the study of fibrations under their various aspects, which is the central theme of this Part III. We are going to summarize the main results in a modern terminology and a slightly more general setting (e.g. for Sections 4, 5 and 6).

H denotes any category. It is said *concrete* when it is equipped with a concrete (= faithful and amnestic) functor $p: H \to Set$. Though all the papers except /93, 104, 113/ are concerned with this concrete case (which is suggested by the applications), the Comments show that many results extend to the «non-concrete» case (which has been more commonly used in the last years) and we'll give them so.

As a (much used) abbreviation, we say that a functor $p: H \to Set$ (category of «small» sets) *satisfies condition* ζ if there exists a functor $P: \hat{H} \to \hat{Set}$ (category of «large» sets) such that:

- p is the restriction of P to $\overset{-1}{P}(Set)$; the classes of objects H_0 and Set_0 belong to $\hat{Set}$;

- P is sub-generating, i.e., if S is an object of $\hat{H}$ and A a small sub-set of $P(S)$, there exists a smallest P-sub-structure S' of S whose image $P(S')$ is small and contains A;

- P is ζ-sub-generating for the small ordinal ζ, which means /113/ that moreover P lifts colimits of ζ-sequences of small P-sub-structures of S into P-sub-structures of S.

(This condition allows to apply the general Existence of Adjoint Theorem 1.2 /100/.)

1. ENRICHED SPECIES OR SYSTEMS OF STRUCTURES. FIBRATIONS.

The results summarized in this section were suggested by problems in Differential Geometry (germs of category actions) and in Analysis (optimization problems, universal definitions of generalized functions); cf. Comments 470.3, 474.5, 490.2.

a) Dominated species of structures /77, 91/.

If C is a category and $k: C*S \to S$ an action of C on a set S, then S is called a (strong) *species of structures over* C. It corresponds to a functor $F: C \to Set$ whose fibres $F(e)$ are disjunct and admit S as their union and to a discrete fibration (called hypermorphism functor by Charles) $\pi: C*S \to C$. This gives equivalences from the category $\mathcal{A}_C$ of species of structures over C toward Set^C and toward the category of discrete fibrations over C (Comment 25.1).

Let $p: H \to Set$ be any given functor. The *p-dominated species of structures* are the functors $F: C \to H$ such that the fibres of $p.F$ be disjunct. They are the objects of:

- the category $\mathcal{A}(p)$ whose morphisms are the *p-dominated covariant* maps; $\mathcal{A}(p)$ is a sub-category of the category DH of diagrams of H, and is equivalent to DH if p is concrete and lifts isomorphisms;

- the category $\mathcal{B}(p)$ whose morphisms are the *p-dominated contravariant maps* /91/.

The «dual character» of $\mathcal{A}(p)$ and $\mathcal{B}(p)$ is exhibited in Comments 579.3 and 588.1.

b) Species of morphisms and fibrations /70, 77/.

If p is the forgetful functor $p_1: Cat \to Set$ which maps a category C on the set C_1 of its morphisms, a p_1-dominated species of structures is called a *species of morphisms*; it's just a functor $G: C \to Cat$ whose fibres $G(e)$ are disjunct. It corresponds to an action k of the category C on the category Σ coproduct of the fibres.

By analogy with the case Σ and C are groups, Charles defines the *crossed product category* $\bar{\Sigma}$ whose set of morphisms is the pullback:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_1 \arrow[d, "domain"'] & \bar{\Sigma}_1 \arrow[l] \arrow[d] \\
\Sigma_0 & C * \Sigma_0 \arrow[l, "k_0"]
\end{tikzcd}$$

(k_0 is the restriction of the action k to the objects of Σ). The projection $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \to C$ is a fibration with a normal cleavage given by $C * \Sigma_0 \hookrightarrow \tilde{\Sigma}$. Universal characterizations of $\tilde{\Sigma}$ are known (Comment 440.2), e. g., it is the lax colimit of G [133].

The correspondence $G \mapsto \tilde{\pi}$ extends into an equivalence from $\mathfrak{A}(p_1)$ to the category *Split* of (split) fibrations, and into an equivalence from Cat^C to the category $Split_C$ of fibrations over C, which is a reflective sub-category of Cat/C (Comment 440.2 and [133]).

c) Actions of fibrations and distributors /77/.

We denote by $\mathfrak{A}$ the category $\mathfrak{A}(Set)$ of «covariant maps», by

$$p_s: \mathfrak{A} \to Set \quad \text{and} \quad b: \mathfrak{A} \to Cat$$

the functors which map a species of structures on its set of structures and on its base (or acting) category respectively.

A p_s-dominated species of structures $F: C \to \mathfrak{A}$ with $G = b.F$ gives rise to :

- a discrete fibration over the coproduct of the categories $G(e)$,
- an action of the crossed product $\tilde{\Sigma}$ associated to $G: C \to Cat$, on the union S of the $p_s F(e)$ and therefore to a functor $\tilde{\Sigma} \to Set$.

(Cf. /77/ and Comment 490.1.)

If G is the constant functor on a category C', the data of F reduces to a *couple of categories* (C, C') *acting on* S with commuting actions, and, as $\tilde{\Sigma}$ is then the product $C' \times C$, it corresponds to a functor $C' \times C \to Set$, i. e., to a distributor from C'^{op} to C. Moreover, F is determined by the «join category» which admits C'^{op} and C as sub-categories and S as the set of morphisms from C' to C. If $C' = 1$, this join category may be used to define indexed limits. (Comments 491.1 and 491.2.)

d) Partial actions and Kan extensions /87/.

Partial actions of a category C are called *systems of structures* over C. They correspond to *well-faithful functors* (or «partial discrete fibrations»), which are the functors $q: K \to C$ such that K_1 is a sub-set of the pullback

$$\begin{tikzcd} K_0 \arrow[d, "q_0"'] & \arrow[l] \arrow[d] \\ C_0 & C_1 \arrow[l, "domain"] \end{tikzcd}$$

The following notion of H-functors is introduced in /87/ to enrich them.

Let H be a regularly ordered category $(H, <)$, i.e., an internal category in the category of posets satisfying some conditions /63, 87/. H is embedded in the 2-category $\mathrm{H_p}$ of its «partial morphisms» whose 1-morphisms $e \to e'$ are the pairs $(h: \hat{e} \to e', e)$ with $\hat{e} < e$, and there is a 2-cell

$$(h, e) \Rightarrow (h_1, e_1) \quad \text{iff} \quad e = e_1 \text{ and } h < h_1 : \hat{e}_1 \to e'.$$

A unitary lax functor $F: C \to \mathrm{H_p}$ is a H-*functor* (/87/ and Comment 467.1) and a lax colimit of F a H-*colimit*. The existence of H-colimits is proved if H is completely regular and H cocomplete (Comment 468.1), or if there exists a functor $p: H \to Set$ satisfying condition 1 for a lifting limits functor $P: \hat{H} \to \hat{Set}$ /87/. Functors may be replaced by neofunctors.

If H is the category Set with its «restriction» order and if C is a neocategory, the category of H-neofunctors from C with disjunct fibres is isomorphic to the category $\mathfrak{A}'_C$ of systems of structures over C, and is equivalent to the category of well-faithful neofunctors with codomain C. More generally, suppose $\mathrm{H} = (H, <)$ and $p: H \to Set$ is a concrete functor. A H-neofunctor F such that the fibres $p.F(e)$ are disjunct is called a *p-dominated system of structures*. $\mathfrak{A}'(p)_C$ denotes the category of p-dominated systems of structures over C.

The (generalized) *Kan extension Theorem* /87/ asserts that, if there exists H-colimits, the category $\mathfrak{A}(p)_C$ of p-dominated species of structures over a category C is a reflective sub-category of $\mathfrak{A}'(p)_C$. As corollaries :

- The category of discrete fibrations is a reflective sub-category of the category of well-faithful functors.
- A species of structures over a sub-category of C may be universally extended into a (strong) species of structures over C. (Comment 470.1.)

2. COHOMOLOGY OF CATEGORIES AND FIBRATIONS.

The cohomology of a category with values in a species of morphisms was devised to unite the cohomology with values in a sheaf of groupoids (which is used in the theory of foliations) and the cohomology of groups as it is done in Mac Lane [149].

a) First cohomology of a fibration /70/.

Let $G: C \to Cat$ be a functor and $\tilde{\pi}: \tilde{\Sigma} \to C$ its associated fibration. Crossed homomorphisms are defined as for modules on a group, and they correspond to the sections of $\tilde{\pi}$; they are the objects of the lax limit L of G; whence the *first cohomology set* of G, which is the set of components of the groupoid L_γ of isomorphisms of L (Comment 441.4).

If only crossed homomorphisms with values in the centers of the fibres are taken, their classes may be composed and they form the *first groupoid of central cohomology of* G.

To define higher order cohomology, Charles set up the following general frame, first introduced in a particular case in /74/.

b) Cohomology with values in an enriched category /74, 91/.

The problem of cohomology is decomposed in three parts:

1° Let H be a category equipped with an ideal J (so that $J.H.J \subset J$). The category $\mathcal{K}(H, J)$ *of complexes* has for objects the sequences

$$K = (K_n, \partial_n : K_{n+1} \to K_n)_n \quad \text{where } \partial_n . \partial_{n+1} \in J \text{ for each } n.$$

There are functors C^n, Z^n, $B^n: \mathcal{K}(H, J)^{op} \times H \to Set$ such that

$$C^n(K, -) = Hom(K_n, -), \quad Z^n(K, E) = \{ f: K_n \to E \mid f.\partial_n \in J \},$$
$$B^n(K, E) = \text{image of } Hom(\partial_{n-1}, E)$$

for each E in H_0; they are called the *n-cochains, n-cocycles* and *n-coboundaries functors.*

2° Let $p: \mathcal{H} \to Set$ be a concrete functor and $\mathcal{J}$ an ideal of $\mathcal{H}$. A *short* $(p, \mathcal{J})$*-exact sequence* is a path (h', h) of $\mathcal{H}$ such that h is a p-monomorphism (or initial lift of a monomorphism), h' a p-epimorphism and h' is the smallest k such that $k.h \in \mathcal{J}$. The functor p *admits* $(\mathcal{H}', \mathcal{J})$*-exact* *sequences*, where $\mathcal{H}'$ is a sub-category of $\mathcal{H}$, if, for each p-monomorphism h with domain in $\mathcal{H}'$, there exists a short $(p, \mathcal{J})$-exact sequence (h', h).

In particular, short (p_1, J_{Cat})-exact sequences, where J_{Cat} is the ideal of Cat formed of the object-valued functors, are isomorphic to the data of a category A, a sub-category B and the quotient category A/B of A by B. If B is a proper sub-category (or admits a calculus of fractions, cf. Comments 551.1, 553.1), then A/B exists and explicit constructions are given /80, 91/. It follows that p_1 admits (Gpd, J_{Cat})-exact sequences where Gpd is the category of groupoids.

3° Suppose $D: H^{op} \times H' \to \mathcal{H}$ is a «partial domination» of H, i.e., H' is a sub-category of H and $p.D$ is a restriction of the Hom functor of H. A *n-th cohomology functor for* $(\mathcal{H}', J, D, \mathcal{J})$ is a functor

$$\hat{H}^n: \mathcal{K}(H, J)^{op} \times H' \to \mathcal{H}$$

such that there exist functors $\hat{Z}^n$, $\hat{B}^n: \mathcal{K}(H, J)^{op} \times H' \to \mathcal{H}$ satisfying:

- $\hat{Z}^n(K, E)$ is a p-sub-structure of $D(K_n, E)$ on $Z^n(K, E)$;
- $\hat{B}^n(K, E)$ is a $(\mathcal{H}', p)$-sub-structure of $D(K_n, E)$ generated by $B^n(K, E)$ and there is a $(p, \mathcal{J})$-exact sequence

$$\hat{B}^n(K, E) \hookrightarrow \hat{Z}^n(K, E) \to \hat{H}^n(K, E).$$

If S is a category and $R: S \to \mathcal{K}(H, J)$ a functor, the composite $\hat{H}^n(S-, -): S^{op} \times H' \to \mathcal{H}$ is a *cohomology functor for* S *to* $(\mathcal{H}', J, D, \mathcal{J})$.

Cohomology functors are constructed in /74, 91/ in the case where $\mathcal{H} = Cat$, $\mathcal{H}' = Gpd$, $\mathcal{J} = J_{Cat}$, H is one of the categories $\mathfrak{A}(p_1)$, $\mathfrak{A}(p_1)_C$ or $\mathfrak{B}(p_1)$ (Section 1) and the partial domination D is deduced from the data of a functor q from a sub-category of H to the category Cat_2 of double categories. For instance, if q sends a species of morphisms G on its (double) center, the corresponding cohomology functors are called *central cohomology functors*, denoted by $\hat{H}^n_c$.

In /84/, the more general «quasi-cohomology» functors are defined and proved to exist if p satisfies condition 1 for a lifting limits functor.

c) Cohomology of a category /73/.

A «resolution functor» $R: Cat \to \mathcal{K}(\mathfrak{A}(p_1), J_{\mathfrak{A}})$ is constructed as follows. Let C be a category; the «projection functor» $Ab^C \to Set/C_0$ admits an adjoint; $R(C)_n$ is the free object generated by the map

$$b_n : \sigma_n \to C_0 : (f_n, \dots, f_1) \mapsto \beta(f_n),$$

where σ_n is the set of n-simplices of C (= functors $n \to C$). Whence the central cohomology groupoids $\hat{H}^n_c(R(C), G)$, for $G : C \to Cat$.

If G takes its values in Ab, this groupoid is also the cohomology groupoid with values in G associated to the final object of Ab^C by the comonad on Ab^C corresponding to the above adjunction (Comment 450.3).

Various interpretations of this central cohomology have been given. E.g. if G is equal to its center, the domain of its fibration $\tilde{\bar{\pi}} : \tilde{\Sigma} \to C$ is a 2-category for the second composition :

$$(z', f, e) + (z, f, e) = (z'+z, f, e),$$

and the 2-cocycles (or factor-sets) «are» the lax unitary functors $C \to \tilde{\Sigma}$ sections of $\tilde{\bar{\pi}}$. (Cf. Comment 450.6.)

3. INTERNAL CATEGORIES.

Reflections on the way for defining a category as an algebraic structure on its set of morphisms led (Comment 593.1) to the theory of sketched structures /93/ and in particular of internal categories (said generalized structured in /104/) while only «concrete» internal categories are studied in Part III-1. The main results are gathered in /113/, which uses about standard terminology.

a) The category of internal categories /93, 104, 113/.

The sketch of categories is the dual U_F of the sub-category of the simplicial category with objects $0, 1, 2, 3$, equipped with two distinguished cones (cf. /113/, where n is denoted by $n+1$).

An *(internal) category in* H is a model of this sketch, i.e., a functor $K : U_F \to H$ sending the two cones on pullbacks. It is entirely determined by a diagram (its «idea»):

$$\begin{tikzcd} K_0 & K_1 \arrow[l, bend right, "dom"'] \arrow[l, bend left, "cod"] & K_2 \arrow[l, "comp"'] \end{tikzcd}$$

where K_2 is the pullback of the domain and codomain morphisms, and the identity and associativity axioms are satisfied.

The category *Cat(H)* of categories in H is the category of 1-morphims of a 2-category Cat*(H)* whose 2-cells are the internal natural transformations. If H admits pullbacks, the functors in H «are» the categories in H^2.

Cat is identified to a sub-category of (and equivalent to) *Cat(Set)*. We denote $p_i : Cat \to Set$ the evaluation at i functors, for $i = 0, 1, 2, 3$.

If $p : H \to Set$ is a concrete functor lifting canonical pullbacks, the *p-structured categories* (Part III-1 and / 104, 105 /) are the internal categories K mapped by p on an ordinary category pK. Then Cat*(H)* is equivalent to the 2-category of p-structured categories defined in / 109 /.

b) Associated structure of category / 93, 104, 113 /.

If K is a category in H, for each object E of H, the image of K by $Hom(E, -) : H \to Set$ gives a category $Hom(E, \mathrm{K})$ on $Hom(E, \mathrm{K}_1)$; whence a species of morphisms $Hom(-,\mathrm{K}) : H^{op} \to Cat$, and its associated fibration over H^{op}, called a «small» fibration (Comment 735.1).

There is so defined an «insertion» $Cat(H) \hookrightarrow Split_{H^{op}}$, and an equivalence from $Cat(H)$ to the sub-category L of $Cat^{H^{op}}$ whose objects are the functors $G : H^{op} \to Cat$ such that $p_i . G$ is representable for $i = 0, 1, 2, 3$. In fact, G is an object of L (called a structure of category on the representation of $p_1 . G$) as soon as

- one of the functors $p_i . G$, $i = 1, 2$ or 3, is representable, if H admits pullbacks,
- $p_3 . G$ is representable, if H admits equalizers.

This equivalence is used in / 113 / to show that:

- $Cat(H)$ admits the same limits as H.
- If H admits pullbacks, the 2-category Cat*(H)* is representable, a representation of K being its internal category of squares.

c) Internal sub-categories and universal problems / 113 /.

Suppose that $p : H \to Set$ is a functor satisfying condition ω for

$P: \hat{H} \to \hat{Set}$. Then, if $\hat{K}$ is a category in $\hat{H}$, any small subset of $P(\hat{K}_1)$ generates a small sub-category of $\hat{K}$ in $\hat{H}$.

If P lifts limits, this result and the existence of adjoint Theorem 1.2 /100/ imply:

- $Cat(H)$ is a reflective sub-category of H^{U_F} («associated sheaf»),
- $Cat(H)$ admits the same colimits as H,
- The category of groupoids in H is reflective in $Cat(H)$ /84/.

For other properties of $Cat(H)$, cf. Comment 757.1.

4. INTERNAL FIBRATIONS.

Charles introduced (concrete) internal species of structures to unite his theories of fibre bundles (as some topological or differentiable species of structures /50/) and of local structures /39, 47/.

a) Internal discrete fibrations /59, 60, 89/.

A *discrete fibration in H* is an internal functor $q: K \to C$ such that

$$\begin{tikzcd} K_0 \arrow[d, "q_0"'] & K_1 \arrow[l] \arrow[d, "q_1"] \\ C_0 & C_1 \arrow[l, "dom"] \end{tikzcd}$$

is a pullback. It is determined by: the category C in H, the projection $q_0: K_0 \to C_0$ and the «internal action» $cod: K_1 \to K_0$, which satisfy the unitarity and associativity axioms. This data is called an *internal species of structures* or (more recently [56]) an *internal diagram over* C. By construction the category H^C of internal diagrams over C is equivalent to the category $dFib(H)_C$ of discrete fibrations over C in H (Comment 475.1).

If $p: H \to Set$ is a concrete functor, an internal diagram in H sent by p on an ordinary species of structures is called a *p-species of structures*. The category $\mathfrak{A}/p/$ of p-species of structures and p-covariant maps is equivalent to the category of «concrete» internal discrete fibrations (called p-structured hypermorphisms functors in /60/) and, if p lifts canonical pullbacks, to the category $\mathfrak{A}/H/$ of internal diagrams in H. Limits in $\mathfrak{A}/p/$ and p-sub-species of structures are characterized in /60/.

b) Species of structures in Cat /59/.

If p is the forgetful functor $p_1 : Cat \to Set$, a p_1-species of structures is called a *Cat*-species of structures. Among them are noted:

- The species of structures over a double category C, which are the *Cat*-species whose associated p_1-discrete fibration $q: \mathrm{K} \to \mathrm{C}$ is, also, a p_1-discrete fibration if the two compositions of K and C are exchanged. They correspond to a pair of commuting actions of each category of 1-morphisms of C on the same set.

- The *Cat*-species of structures over a discrete double category (C, C^{dis}), which correspond to the species of morphisms $G: C \to Cat$. If $\Pi : \Gamma \to C$ is the associated p_1-discrete fibration, the first category of Γ is the domain $C * \Sigma$ of the discrete fibration associated to $p_1 . G$ and its second category is a sub-category of $C^{dis} \times \Sigma$.

- The *Cat*-species of structures over such a double category Γ, which correspond to the p_s-dominated species of structures $F: C \to \mathfrak{A}$ such that $b . F = G$ (Section 1).

c) Internal Kan extension theorems /89, 90/.

The equivalent categories of *internal systems of structures* (or partial neocategory actions) and of internal *well-faithful neofunctors in H* are similarly defined as categories of sketched structures (Comment 475.1).

Let $p : H \to Set$ be a concrete functor. The «concrete» internal systems of structures and well-faithful neofunctors are called *p-systems of structures* and *p-structured well-faithful neofunctors* /89, 90/. They are the objects of the categories $\mathfrak{A}'/p/$ and $\mathfrak{N}_b/p/$.

The *internal (Kan) extension Theorem* asserts that, if p satisfies condition ζ for some lifting limits functor P, then $\mathfrak{A}/p/$ is reflective in $\mathfrak{A}'/p/$. It is deduced from the existence of adjoint Theorem 1.2 /100/ and the construction of generated internal sub-species of structures. For application to the existence of Π_f in $Cat(H)$, cf. Comment 478.3.

This theorem is a particular case of the Quasi-expansion Theorem /90/ which universally extends the pair (q, q') of a p-structured functor q and a sub-functor into a *p-structured functor with hypermorphisms* (q_1, q_1')

so that q'_1 is a p-structured discrete fibration whose morphisms are final lifts with respect to q_1. As the sketch of functors with hypermorphisms is easily drawn, this result transposes when H is any category admitting pullbacks (cf. Comment 478.3 and Section 5).

d) Internal fibrations /90, 77/.

Let H be a category admitting pullbacks. The internal functors with hypermorphisms (q, q') in which q and q' have the same codomain reduce to the *internal fibrations in* H, which are also the fibrations in the 2-category Cat(H) (Comment 513.1). The quasi-expansion theorem implies that the category $Split(H)_{\mathrm{C}}$ of internal fibrations over the category C in H is a reflective sub-category of $Cat(H)/\mathrm{C}$, the reflection of q being the projection $(q, \mathrm{C}) \to \mathrm{C}$ from the internal comma category (Comment 478.3).

$Split(H)_{\mathrm{C}}$ is equivalent to the category $Cat(H^{\mathrm{C}})$ of categories in the category H^{C} of discrete fibrations over C in H. A category A in H^{C} is called a *species of morphisms in* H; there is associated the internal fibration $\bar{\bar{\pi}} : \bar{\bar{\Sigma}} \to \mathrm{C}$ whose domain $\bar{\bar{\Sigma}}$ is the internal crossed product, defined by the same pullback as in the case $H = Set$ (where a species of morphisms $G: C \to Cat$ may be seen as a category A in Cat^C with $A_1 = p_1 . G$). $(H^{\mathrm{C}})^{\mathrm{A}}$ is equivalent to $H^{\bar{\bar{\Sigma}}}$ (Comment 514.1 and [56]), which internalizes the notion of action of a fibration (Section 1-c).

If $p: H \to Set$ is a concrete functor lifting pullbacks, the «concrete» internal species of morphisms in which each fibre becomes a p-structured category are called *p-spaces of morphisms* in /77/, where the preceding results are given for them. If p is associated to a final generator (it's said that p admits atoms), the category of p-spaces of morphisms over the p-structured category C is equivalent to $Cat(H^{\mathrm{C}})$.

5. INTERNAL LIFTING AND EXPANSION THEOREMS.

The results of /79, 89, 90, 95/ are united, simplified, and slightly generalized in this section (which will be developed elsewhere).

H denotes a category admitting pullbacks.

a) Internal final lifting functors.

An (internal) *pointed functor in* H is the data $(q, \hat{l}, l)$ of an internal functor $q: \hat{C} \to C$ and a commutative square

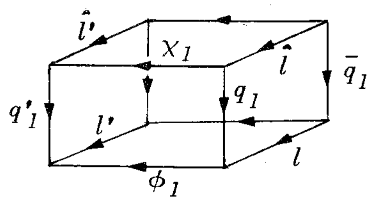
$$\begin{tikzcd} \hat{C}_1 \arrow[d, "q_1"'] & \hat{F}_1 \arrow[l, "\hat{l}"'] \arrow[d, "\bar{q}_1"] \\ C_1 & F_1 \arrow[l, "l"] \end{tikzcd}$$

of H with l and $\hat{l}$ monomorphisms.

The pointed functors in H are the objects of the category $PF(H)$ whose morphisms $(\chi, \phi): (q, \hat{l}, l) \to (\hat{q}', \hat{l}', l')$ are the squares

$$\begin{tikzcd} \hat{C}' \arrow[d, "q'"'] & \hat{C} \arrow[l, "\chi"'] \arrow[d, "q"] \\ C' & C \arrow[l, "\phi"] \end{tikzcd}$$

of $Cat(H)$ such that there exists a cube



An (internal) *final lifting functor in* H is a pointed functor $(q, \hat{l}, l)$ in H such that:

- $\bar{q}_1$ defines a discrete neofibration $\bar{q}: \hat{F} \to F$ in H (Comment 475.1), and a sub-neofunctor of q ;

$$\begin{tikzcd} \hat{a} \vee \hat{a}.\hat{l} \arrow[d, "q_1 \vee q_1.\hat{l}"'] & \hat{a} \vee \hat{b}.\hat{l} \arrow[l, "{[\hat{k}, pr_2]}"'] \arrow[d, "q_1 \vee q_1.\hat{l}"] \\ a \vee a & C_2 \arrow[l, "{[k, pr_2]}"] \end{tikzcd}$$

is a pullback, where a, b, k (resp. $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{k}$) are the domain, codomain and composition of C (resp. $\hat{C}$), $\vee$ denotes pullbacks, and $[\ ,\ ]$ factors through pullbacks. (This «says internally» that $\hat{F}_1$ is formed of q-surjections, i.e., of final lifts for q ; cf. Comment 476.1.)

The final lifting functors in H are the objects of the full sub-category $FL(H)$ of $PF(H)$, which admits as a sub-category the category $FH(H)$ of *functors with hypermorphisms in* H (Comment 476.1), whose objects are the $(q, \hat{l}, l)$ where q is a discrete fibration in H and $\hat{F}_0 = \hat{C}_0$.

The categories $Split(H)$ of fibrations in H and $dFib(H)$ of discrete fibrations in H are identified to the full sub-categories of $FL(H)$ with objects $(q, \hat{l}, C_1)$ and $(q, \hat{C}_1, C_1)$ respectively.

K denotes either FL, FH, $Split$ or $dFib$, and $K(H)_{C,l}$ where C is an internal category in H, is the sub-category of $K(H)$ formed of the morphisms $(\chi, Id_C): (q, \hat{l}, l) \to (q, \hat{l}', l)$.

PROPOSITION A. *A pointed functor* $(q, \hat{l}, l)$ *in* H, *where* $q: \hat{C} \to C$, *admits a reflection into* $K(H)$ *iff it admits a reflection into* $K(H')_{C,l}$.

Δ. It is proved as in Comment 477.2. ∇

b) Lifting Theorems /90/.

Given a pointed functor $(q, \hat{F} \hookrightarrow \hat{C}, F \hookrightarrow C)$, is it possible to extend it into a functor in which the elements of F lift into final lifts and the elements of $\hat{F}$ become such distinguished lifts, and this, in the «internal» case? Or: is $FL(H)$ a reflective sub-category of $PF(H)$? Such is the «lifting problem» which generalizes the «expansion problem» of /90/.

THEOREM 1 (*Free lifting Theorem*). *A pointed functor* $(q, \hat{C}_0 \hookrightarrow \hat{C}_1, l)$ *in* H *admits a reflection* (Q, m, l) *into* $FL(H)$ *such that* Q *is a restriction of the projection* $(q, C) \to C$ *of the internal comma category* (q, C).

Δ. It is proved as in Comment 478.2. The object of morphisms of the domain D of Q is the pullback

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[d, "l\vee q_1"'] & & D_1 \arrow[ll, "a.l\vee b.q_1"'] \arrow[dd] \\
C_2 \arrow[d, "k"'] & & \\
C_1 & C_2 \arrow[l, "k"] & a\vee b.l \arrow[l, "Id\vee l"]
\end{tikzcd}$$

(which internally represents the set of $(h, f', f, \hat{h})$ such that $f, f' \in F$, $\hat{h} \in \hat{C}$, $h \in C$ and $h.f = f'.q(\hat{h})$). ∇

COROLLARY 1 *(Gray). Split(H) is a reflective sub-category of* $Cat(H)^2$ *the reflection of* $q: \hat{C} \to C$ *being the projection* $Q: (q, C) \to C$.

COROLLARY 2 /89/. *The functor* $dFib(H)_C \to H/C_0$ *which maps a discrete fibration* $q: \hat{C} \to C$ *on its restriction* q_0 *admits an adjoint.*

Δ. The morphism $\pi: S \to C_0$ generates the projection $Q: (q, C) \to C$ where q is the intemal functor $S^{dis} \xrightarrow{\pi} C_0^{dis} \hookrightarrow C$. ∇

Let $(j, Id_C): (q, \hat{C}_0 \hookrightarrow \hat{C}_1, l) \to (Q, m, l)$ be the $FL(H)$-reflector constructed in the theorem. There is an intemal sub-category G of the domain D of Q whose object of morphisms is the pullback

$$\begin{tikzcd}
\hat{C}_0 \vee b.l \arrow[d, "pr_2"'] & & G_1 \arrow[ll] \arrow[d] \\
C_1 & C_2 \arrow[l, "k"] & a.l \vee b.q_1.\hat{l} \arrow[l, "l \vee q_1.\hat{l}"]
\end{tikzcd}$$

(which «represents» the set of $(e', f, f.h, h)$ with $h \in \hat{F}_1$, $f \in F_1$).

PROPOSITION B. $(q, \hat{l}, l)$ *admits a reflection* $(q', \hat{l}', l)$ *into* $FL(H)$ *iff there exists a smallest morphism* $(\chi, Id_C): (Q, m, l) \to (q', \hat{l}', l)$ *of* $FL(H)$ *such that* $\chi_1 . (G_1 \hookrightarrow D_1)$ *factors through* $\hat{C}'_0 \hookrightarrow \hat{C}'_1$.

Δ. If $H = Set$, Comment 478.5 proves that χ satisfies this condition when $(\chi . j, Id_C): (q, \hat{l}, l) \to (q', \hat{l}', l)$ is a morphism; the converse follows from the relation, for each f in $\hat{F}_1$:

$$\chi . j(f) = \chi\big(q(f) \square\, f\big) = \chi\big(q(f) \boxed{\in G}\, f\big) = \chi\big(q(f) \square\big) \in \hat{F}'.$$

For any H, this proof may be intemalized using pullbacks, or the result deduced from above via the insertion $FL(H) \hookrightarrow FL^{H^{op}}$. ∇

c) The concrete case /90/.

Let $p: H \to Set$ be a concrete functor. $PF(p)$ is the category of «concrete» pointed functors, for which l and $\hat{l}$ are p-monomorphisms over insertions. $K(p)$ is similarly defined from $K(H)$. The Expansion Theorem of /90/ is included in the following

THEOREM 2 *(Lifting Theorem). If* p *satisfies condition* ζ *for a lifting* *limits functor P, then $K(p)$ is a reflective sub-category of $PF(p)$ and $K(H)$ a reflective sub-category of $PF(H)$.*

Δ. $PF(H)$ and $K(H)$ are the categories of models in H of easily drawn sketches. So general results on sketched structures /106/ imply that the forgetful functor $K(P) \to \hat{Set}$ mapping $(q, \hat{l}, l)$ on $P(\hat{C}_1) \times P(C_1)$ is sub-generating (same proof as in Comment 477.1) and lifts limits; whence Theorem 1.2 / 100/ gives the assertion. ∇

COROLLARY 1 /90/. *Let $U: PF(p) \to PF$ $(= PF(Set))$ be the forgetful functor. If p has a maximal section Z, then $(q, \hat{l}, l)$ admits a reflection into $K(p)$ which is mapped by U on the reflection of $U(q, \hat{l}, l)$ into K.*

Δ. This comes from the lemmas: For each projective sketch σ, the functor $p^\sigma : H^\sigma \to Set^\sigma$ has a maximal section Z^σ. - If Z' is a maximal section of $U: \hat{A} \to A$ and $U': \hat{A}' \to A'$ a restriction of U such that $Z'(A')$ is included in $\hat{A}'$, then a reflector into $\hat{A}'$ is mapped by U on a reflector into A' (cf. proof Comment 478.5). ∇

COROLLARY 2 /89/. *With the hypotheses of Theorem 2, $\mathfrak{A}/p/$ is a reflective sub-category of $\mathfrak{A}'/p/$.*

d) Internal quasi-expansions / 95/.

The final lifting functor in H universally extending a pointed functor also satisfies a co-universal condition, which precises the Quasi-expansion Theorem of / 95/.

If $i: B \to A$ is a functor in H and $l: F_1 \to A_1$ a monomorphism, we say that A is a *l-quasi-expansion of i* if (A, l, l) is a reflection in $FL(H)$ of (i, i^*l, l), where $i^*l: i_1 \vee l \to B_1$ is the projection of the pullback.

In particular, if H is concrete and if A is a F_1-quasi-expansion of B in the sense of / 95/ (e.g., if B is a final sub-category of A and if F_1 is A_1, cf. Comment 479.2), it follows from Proposition B that A is also a $(F_1 \hookrightarrow A_1)$-quasi-expansion of $B \hookrightarrow A$.

An *expansive functor in H* is a data $(q, \hat{l}, l, i)$, where $(q, \hat{l}, l)$ is a pointed functor in H, and the domain $\hat{C}$ of q is a l-quasi-expansion of

i. Whence the category $EF(H)$ of expansive functors in H and its forgetful functor R to $PF(H)$ which sends $(q, \hat{l}, l, i)$ on $(q.i, i^*\hat{l}, l)$.

THEOREM 3 *(Expansion Theorem). Let* $(j, Id_C): (q, \hat{l}, l) \to (q', \hat{l}', l)$ *be a reflector into* $FL(H)$. *Then* $(q', \hat{l}', l, j)$ *is a R-cofree object associated to* $(q, \hat{l}, l)$, *and the coliberty morphism is defined by* $(Id_{\hat{C}}, Id_C)$.

Δ. 1° $(q', \hat{l}', l, j)$ is an expansive functor. Indeed, it is sufficient to prove that a morphism $(\phi, Id_{\hat{C}}): (j, j^*\hat{l}', \hat{l}') \to (q'', \hat{l}'', \hat{l}')$ to $FL(H)$ factors uniquely through $(j, Id_{\hat{C}})$. As $(q'', \hat{l}'', \hat{l}')$ and $(q', \hat{l}', l)$ are objects of $FL(H)$, so is $(q'.q'', \hat{l}'', l)$, and $(\phi, Id_C): (q, \hat{l}, l) \to (q'.q'', \hat{l}'', l)$ is a morphism to $FL(H)$ which factors through the reflector into a $(\bar{\phi}, Id_C)$ such that $\bar{\phi}.j = \phi$. Then $(\bar{\phi}, Id_{\hat{C}})$ is the required factor of (ϕ, Id_C).

2° Let $(q''', \hat{l}''', l''', i)$ be an expansive functor and

$$(\psi', \psi): (q'''.i,\ i^*\hat{l}''', l''') \to (q, \hat{l}, l) \quad \text{in } PF(H).$$

The morphism $(j.\psi', \psi.q'''): (i, i^*\hat{l}''', \hat{l}''') \to (q', \hat{l}', l)$ factors through the reflector $(i, Id_{\hat{C}'''})$ into $(\bar{\psi}, \psi.q''')$. Then

$$(\bar{\psi}, \psi): (q''', \hat{l}''', l''', i) \to (q', \hat{l}', l, j)$$

is the unique morphism with $(Id_{\hat{C}}, Id_C).R(\bar{\psi}, \psi) = (\psi', \psi)$. ∇

For instance, if $(F, \hat{F})$ is a q-admissible pair in the case $H = Set$ then the expansion of q constructed in /79/ is both the universal final lifting functor and the co-universal expansive functor extending $(q, \hat{F}, F)$.

6. POLYSPANS AND ENRICHED FIBRATIONS.

In /104/, the quasi-topological category of local sections of a topological category is deduced from the study of enrichments of the small fibration associated to an internal category. We extend the construction of such enrichments to other fibrations thanks to the Bénabou's polyspans [6].

H denotes a category which admits pullbacks.

a) Polyspans.

Let Λ be a set and $(\Lambda \times \Lambda)^o$ the groupoid of pairs. A Λ-*polyspan* in H is a lax functor from $(\Lambda \times \Lambda)^o$ to the bicategory $SpanH$ of spans.

This definition is equivalent to the following one. Let $\pi_\Lambda: l\Lambda \to U_F$

be the discrete fibration associated to the model $U_F \to Set$ of the sketch of categories σ_{Cat} which defines $(\Lambda \times \Lambda)^{o}$; the *sketch of Λ-polyspans* σ_Λ is $l\Lambda$ equipped with the cones canonically lifted along π_Λ from the two cones of σ_{Cat}. Then a Λ-polyspan is a model $\Pi : l\Lambda \to H$ of σ_Λ, and it is entirely by the diagram

$$\begin{tikzcd}
\Pi(\lambda'') & & \\
& \Pi(\lambda'',\lambda') \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
\Pi(\lambda') & \text{PB} & \Pi(\lambda'',\lambda',\lambda) \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[ddl, "k_{\lambda''\lambda'\lambda}"] \\
& \Pi(\lambda',\lambda) \arrow[ul, "b_{\lambda'\lambda}"'] \arrow[dl, "a_{\lambda'\lambda}"] & \\
\Pi(\lambda) \arrow[dr, "i_\lambda"'] & \Pi(\lambda'',\lambda) & \\
& \Pi(\lambda,\lambda) &
\end{tikzcd}$$

where $\lambda, \lambda', \lambda'' \in \Lambda$, $a_{\lambda'\lambda} = \Pi(\alpha, (\lambda', \lambda))$, $b_{\lambda'\lambda} = \Pi(\beta, (\lambda', \lambda))$, and $k_{\lambda''\lambda'\lambda} = \Pi(\kappa, (\lambda'', \lambda', \lambda))$ are the *source, target* and *multiplication of* Π which satisfy an identity and associativity axioms.

EXAMPLES. 1° The 1-polyspans «are» the internal categories.

2° If H is cartesian, a H-category A is an A_0-polyspan Π such that $\Pi(\lambda)$ is the final object I for each $\lambda \in A_0$. (Their sketch, given in [116], has suggested the definition of σ_Λ.)

3° Let $\mathcal{C}^r$ be the category of r-differentiable manifolds. The $\mathcal{C}_0^{r+k}$-polyspan $J^{k,r}$ in $\mathcal{C}^r$ «of k-jets» is defined by:

$J^{k,r}(V) = V$ looked at as an r-manifold,

$J^{k,r}(V', V) =$ r-manifold of k-jets from V to V',

$k_{V''V'V}: J^{k,r}(V'', V') * J^{k,r}(V', V) \to J^{k,r}(V'', V) =$ composition of jets.

b) Universal constructions of polyspans.

PROPOSITION A. *If H is cartesian, if Π is a Λ-polyspan in H and if $(j_\gamma : \Omega(\gamma) \to \Pi(\lambda_\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$ is a family of morphisms of H, then there exists a Γ-polyspan Ω in H such that $\Omega(\gamma', \gamma)$ is the pullback*

$$\begin{tikzcd}
\Omega(\gamma') \times \Omega(\gamma) \arrow[d, "j_{\gamma'} \times j_\gamma"'] & \Omega(\gamma', \gamma) \arrow[l] \arrow[d] \\
\Pi(\lambda_{\gamma'}) \times \Pi(\lambda_\gamma) & \Pi(\lambda_{\gamma'}, \lambda_\gamma) \arrow[l, "{[a_{\lambda_{\gamma'}\lambda_\gamma}, b_{\lambda_{\gamma'}\lambda_\gamma}]}"']
\end{tikzcd}$$

Δ. Ω will be a «relative» right Kan extension along $\iota : \Gamma \hookrightarrow l\Gamma$.

1° The map $\Gamma \to \Lambda : \gamma \mapsto \lambda_\gamma$ extends into a functor $\tilde{\lambda} : l\Gamma \to l\Lambda$, and the given family defines a natural transformation

$$j : \omega \to \Pi . \tilde{\lambda} . \iota \,, \quad \text{where} \quad \omega(\gamma) = \Omega(\gamma) \quad \text{for each} \quad \gamma \in \Gamma .$$

As H is cartesian, the functor $H^\iota : H^{l\Gamma} \to H^\Gamma$ has a right adjoint R such that $R(\omega')$, for $\omega' : \Gamma \to H$, maps the object η on the finite product of

$$\{ \omega'(\gamma_\mu) \mid \eta \to \gamma_\mu \ \text{ in } l\Gamma \} .$$

2° If $g : A \to B$ is a functor, g' a right adjoint of g and A admits pullbacks, then the «localized» functor $g_a : A/a \to B/g(a)$ has a right adjoint for each object a of A. It follows from 1 that the «restriction» functor $-\iota : H^{l\Gamma}/\Pi.\tilde{\lambda} \to H^\Gamma/\Pi.\tilde{\lambda}.\iota$ has a right adjoint. In particular, $j : \omega \to \Pi.\tilde{\lambda}.\iota$ generates the cofree object $j' : \Omega \to \Pi.\tilde{\lambda}$ such that

$$\begin{tikzcd}
R(\Pi.\tilde{\lambda}.\iota) \arrow[d, "can."'] & R(\omega) \arrow[l, "R(j)"'] \arrow[d] \\
\Pi.\tilde{\lambda} & \Omega \arrow[l, "j'"]
\end{tikzcd}$$

is a pullback in $H^{l\Gamma}$. The commutation of products and pullbacks implies that Ω is a Γ-polyspan. ∇

In particular, if I is the final object of H, the polyspan deduced from Π and from the family $(I \to \Pi(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda)$ is a H-category A_Π. If Π is an internal category in H (i.e., if $\Lambda = 1$), this gives a functor c from $Cat(H)$ to H-Cat (constructed in /119/, Appendix).

PROPOSITION B. *Let H be a cartesian category with commuting coproducts (in Penon's sense [83]). If Π is a Λ-polyspan and $(\Lambda_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ a partition of Λ, there exists a Γ-polyspan Ω such that* $\Omega(\gamma) = \{\Pi(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_\gamma\}$.

Δ. The map $\rho : \Lambda \to \Gamma$ defined by the partition extends into a functor $\tilde{\rho} : l\Lambda \to l\Gamma$; there exists a pointwise left Kan extension Ω of Π along $\tilde{\rho}$ and the universality of coproducts in H implies Ω is a polyspan. ∇

COROLLARY /119/. *The functor $c : Cat(H) \to H$-Cat admits an adjoint.*

Δ. If A is a H-category looked at as a A_0-polyspan in H, the polyspan associated to the partition $\{A_0\}$ is a 1-polyspan, therefore a category C in H (constructed in /104/); C_0 is the coproduct of A_0 copies of I and C_1 is the coproduct of $\{A(\lambda',\lambda) \mid (\lambda',\lambda) \in A_0^2\}$. This category is the c-free object generated by A (Proposition B /119/ and Comment 699.1).

c) Polyspan associated to an enriched species of morphisms /104/.

If V is a monoidal category and B a V-category, we have defined the category of V-species of structures over B in Comment 26.2. A category in this category is called a V-*species of morphisms.*

In particular, let V be a cartesian category; a V-species of morphisms G over the V-category B is the data of a category $G(\eta)$ in V (the «fibre») and of an internal functor $k^{\eta'\eta}: B(\eta',\eta) \times G(\eta) \to G(\eta')$ (the «action») for each $\eta, \eta' \in B_0$, satisfying some coherence axioms.

PROPOSITION B. *To the* V-*species of morphisms* G *over* B *is associated a* B_0-*polyad* Π in V *and a* V-*functor* $\bar{\pi}: \bar{\Sigma} \to B$.

Δ. We have $\Pi(\eta) = G(\eta)$, $\Pi(\eta',\eta)$ is the pullback

$$\begin{tikzcd}
G(\eta')_1 \times B(\eta',\eta) \times G(\eta)_0 \arrow[d, "dom \times k_0^{\eta'\eta}"'] & \Pi(\eta',\eta) \arrow[l, "pr"'] \arrow[d] \\
G(\eta')_0 \times G(\eta')_0 & G(\eta')_0 \arrow[l, "diagonal"]
\end{tikzcd}$$

the source, target and multiplication are defined as in Theorem 9 /104/ and Comment 701.1. $\bar{\Sigma}$ is the V-category associated to this polyad in b, so that $\bar{\Sigma}_0 = \cup\{Hom(I, G(\eta)_1) \mid \eta \in B_0\}$. The «V-fibration» $\bar{\pi}$ is defined by:

$$\bar{\pi}(\eta',\eta) = \bar{\Sigma}(\eta',\eta) \xrightarrow{pr} \Pi(\eta',\eta) \xrightarrow{pr} G(\eta')_1 \times B(\eta',\eta) \times G(\eta)_0 \xrightarrow{pr} B(\eta',\eta)$$

APPLICATION. Let V be a concrete cartesian category with I as its generator, and $D: H^{op} \times H \to V$ a strong domination of H (hence D «is» a V-category in H, Comment 699.1) such that $D(e,-)$ preserves pullbacks for each object e of H. To a category C in H there is associated the V-species of morphisms G over D whose fibre $G(e)$ is the category $D(e, C)$ in V and the action $k_1^{e'e}: D(e', e) \times D(e, C_1) \to D(e', C_1)$ is the multiplication of D. The polyad in V and the V-fibration above associated to G are those constructed in Theorems 8, 9 /104/.

INDEX DU VOLUME III-2

Les références renvoient indifféremment au mot français et/ou anglais.

Pour les notions définies dans /93/, voir aussi l'index page 675.

TABLE DES MATIERES DU VOLUME III-I

TABLE DES MATIERES

Le second nombre renvoie à la page correspondante des « Comments ».

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME III-2

Le second nombre renvoie à la page correspondante des «Comments».