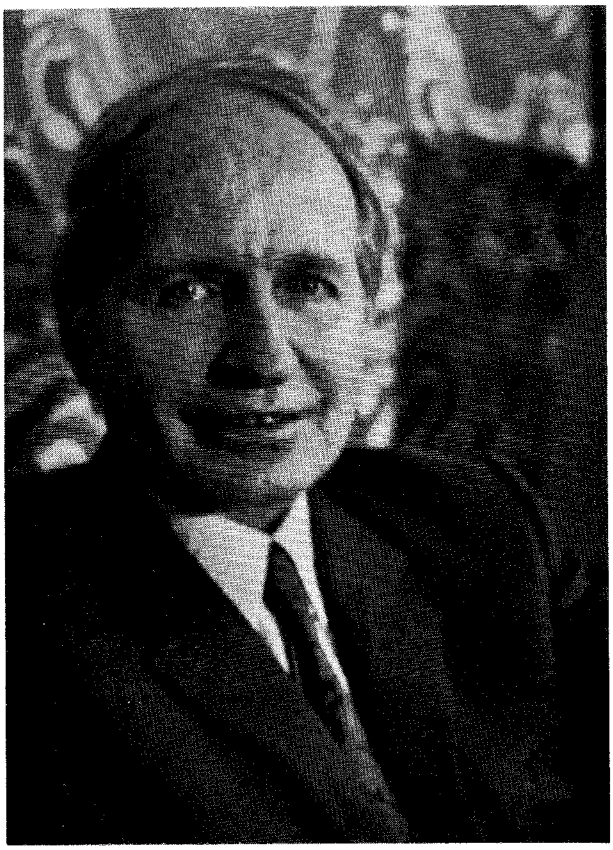
Charles Ehresmann
œuvres complètes et commentées

CATÉGORIES STRUCTURÉES ET QUOTIENTS

PARTIE III - 1 commentée par Andrée CHARLES EHRESMANN
AMIENS 1980



CHARLES EHRESMANN

19 Avril 1905 - 22 Septembre 1979

«... Le mathématicien est engagé dans la poursuite d'un rêve sans fin, mais la traduction de ce rêve en formules précises exige un effort extraordinaire. Chaque problème résolu pose de nouvelles questions de plus en plus nombreuses... Mais qui d'entre nous ne se surprend pas quelquefois à se poser la question dangereuse: à quoi bon tout cet effort? On a dit que les Mathématiques sont «le bulldozer de la Physique». Bien que personne ne puisse douter de l'efficacité des Mathématiques dans les applications pratiques, je ne crois pas qu'un mathématicien voie dans cette efficacité la justification de ses efforts car le vrai but de son rêve perpétuel est de comprendre la structure de toute chose».

Extrait du discours fait par Charles EHRESMANN
en 1967, pour remercier l'Université de Bologna
de l'avoir nommé *Docteur Honoris Causa.*

LISTE DES PUBLICATIONS DE CHARLES EHRESMANN

1. TRAVAUX DE RECHERCHE.

1. Les invariants intégraux et la topologie de l'espace projectif réglé, *C. R. A. S. Paris* 194 (1932), 2004-2006.
2. Sur la topologie de certaines variétés algébriques, *C. R. A. S. Paris* 196 (1933), 152-154.
3. Un théorème relatif aux espaces localement projectifs et sa généralisation, *C. R. A. S. Paris* 196 (1933), 1354-1356.
4. Sur la topologie de certains espaces homogènes, *Ann. of Math.* 35 (1934), 396-443. (Thèse Paris 1934.)
5. Groupes d'homologie, *Séminaire de Math.* Paris, III-B (1935), 1-25.
6. Sur les espaces localement homogènes, *Enseignement Math.* 35 (1936), 317-333.
7. Sur la notion d'espace complet en Géométrie différentielle, *C. R. A. S. Paris* 202 (1936), 2033-2035.
8. Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles, *J. de Math.* XVI (1937), 69-100.
9. Les groupes de Lie à r paramètres, *Séminaire de Math.* Paris, IV E et F (1937), 1-61.
10. Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan, *C. R. A. S. Paris* 205 (1938), 1433-1436.
11. Sur les congruences paratactiques et les parallélismes dans les espaces projectifs, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 153-155.
12. Sur la variété des génératrices planes d'une quadrique réelle et sur la topologie du groupe orthogonal à n variables, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 321-323.
13. Sur la topologie des groupes simples clos, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 1263-1265.
14. Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés, *C. R. A. S. Paris* 212 (1941), 945-948 (avec J. FELDBAU).
15. Espaces fibré associés, *C. R. A. S. Paris* 213 (1941), 762-764.

16. Espaces fibrés de structures comparables, *C. R. A. S. Paris* 214 (1942), 144-147.

17. Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 216 (1943), 628-630.

18. Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement, *Bull. Soc. Math. France* 72, Paris (1944), 27-54.

19. Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrables dans une variété continuement différentiable, *C. R. A. S. Paris* 218 (1944), 955-956 (avec G. REEB).

20. Sur la théorie des espaces fibrés, *Coll. Intern. Topo. algébrique Paris,* C.N.R.S. (1947), 3-15.

21. Sur les sections d'un champ d'éléments de contact dans une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 224 (1947), 444-445.

22. Sur les espaces fibrés différentiables, *C. R. A. S. Paris* 224 (1947), 1611-1612.

23. Sur les variétés plongées dans une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 226 (1948), 1879-1881.

24. Sur les formes différentielles extérieures de degré 2, *C. R. A. S. Paris,* 227 (1948), 420-421 (avec P. LIBERMANN).

25. Sur les extensions de groupes topologiques, *C. R. A. S. Paris* 228 (1949), 1551-1553 (avec L. CALABI).

26. Sur le problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques, *C. R. A. S. Paris* 229 (1949), 697-699 (avec P. LIBERMANN).

27. Sur la notion de connexion infinitésimale dans un espace fibré et sur les espaces à connexion de Cartan, Congrès d'Innsbruck, *Nach. Oest. Math. Gesellschaft* (1949), 22.

28. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Coll. de Topo.* Bruxelles, C.B.R.M. (1950), 29-55.

29. Sur les variétés presque complexes, *Proc. Intern. Cong. of Math.* Harvard (1950), Vol. 2, 412-419 (et *Séminaire Bourbaki* 1950).

30. Sur la théorie des variétés feuilletées, *Rend. Mat. e Appl.* Ser. V, X-1-2 Rome (1951), 64-83.

31. Sur les structures presque hermitiennes isotropes, *C. R. A. S. Paris* 232 (1951), 1281-1283 (avec P. LIBERMANN).

32. Les prolongements d'une variété différentiable, *Atti IV Cong. Un. mat. Italiana*, Taormina Ott. (1951), 1-9.

33. Les prolongements d'une variété différentiable, I: Calcul des jets, prolongement principal, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 598-600.

34. Les prolongements d'une variété différentiable, II: L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 777-779.

35. Les prolongements d'une variété différentiable, III: Transitivité des prolongements, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 1081-1083.

36. Structures locales et structures infinitésimales, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 587-589.

37. Les prolongements d'une variété différentiable, IV: Eléments de contact et éléments d'enveloppe, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 1028-1030.

38. Les prolongements d'une variété différentiable, V: Covariants différentiels, et prolongements d'une structure infinitésimale, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 1424-1425.

39. Structures locales, *Ann. di Mat.* (1954), 133-142. (Multigraphié Rome et Strasbourg, 1952.)

40. Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, *Coll. Intern. Géom. Diff. Strasbourg*, C.N.R.S. (1953), 97-110.

41. Extension du calcul des jets aux jets non holonomes, *C. R. A. S. Paris* 239 (1954), 1762-1764.

42. Sur les structures infinitésimales régulières & Sur les pseudogroupes de transformations de Lie, *Proc. Int. Cong.* Amsterdam (1954), II, 478-479.

43. Applications de la notion de jet non holonome, *C. R. A. S. Paris* 240, (1955), 397-399.

44. Les prolongements d'un espace fibré différentiable, *C. R. A. S. Paris* (1955), 1755-1757.

45. Sur les espaces feuilletés: théorème de stabilité, *C. R. A. S. Paris* 243 (1956), 344-346 (avec SHIH WEISHU).

46. Sur les connexions d'ordre supérieur, *Atti V Cong. Un. Mat. Italiana* Pavia-Torino (1956), 326-328.

47. Gattungen von Lokalen Strukturen, *Jahres. d. Deutschen Math.* 60-2 (1957), 49-77. (Traduit en français dans *CTGD* [1] III, 1961.)

48. Sur les pseudogroupes de Lie de type fini, *C. R. A. S. Paris* 246 (1958), 360-362.

49. Sur les appuis d'une pyramide convexe et sur les polyèdres convexes sans sommet, *C. R. A. S. Paris* 249 (1959), 2695-2697 (avec A. EHRESMANN).

50. Catégories topologiques et catégories différentiables, *Coll. Géom. Diff. Globale* Bruxelles, C.B.R.M. (1959), 137-150.

1) *CTGD* se lit «*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*».

51. Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie, *Rev. Un. Mat. Argent.* 19, Buenos-Aires (1960), 48.

52. Catégorie des foncteurs types, *Rev. Un. Mat. Argentina* XX (1960), 194-209.

53. Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier* X, Grenoble (1960), 307-336.

54. Structures feuilletées, *Proc.* 5^{th} *Can. Math. Cong., Montréal* (1961), 109-172.

55. Elargissements de catégories, *CTGD* III (1961), 25-73.

56. Archimède et la Science moderne, *Celeb. Archimedee*, Syracuse (1961), 25-37.

57. Catégories doubles et catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963) 1198-1201.

58. Catégorie double des quintettes; applications covariantes, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 1891-1894.

59. Catégories structurées d'opérateurs, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 2080-2083.

60. Sous-structures et applications $\mathcal{K}$-covariantes, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 2280-2283.

61. Structures quotient et catégories quotient, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 5031-5034.

62. Complétion des catégories ordonnées, *C. R. A. S. Paris* 257 (1963), 4110-4113.

63. Catégories structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 80, Paris (1963), 349-426.

64. Quintettes et applications covariantes, *CTGD* V (1963), 1-22.

65. Catégories structurées quotient, *CTGD* V (1963), 1-4.

66. Structures quotient, *Comm. Math. Helv.* 38 (1963), 219-283.

67. Teilstrukturen und Faktorstrukturen, *Jahrestagung Deutschen Math. Ver.* Frankfurt (1963), 1.

68. Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Inst. Fourier* XIII-2, Grenoble (1963), 1-60.

69. Sous-structures et catégories ordonnées, *Fund. Math.* LIV (1964), 211-228.

70. Produit croisé de catégories, *C. R. A. S. Paris* 258 (1964), 2461-2464.

71. Complétion des catégories sous-prélocales, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 701-704.

72. Expansion d'homomorphismes en foncteurs, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 1372-1375.

73. Cohomologie sur une catégorie, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 1683-1686.

74. Sur une notion générale de cohomologie, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 2050-2053.

75. Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, *Ann. Inst. Fourier* XIV 1, Grenoble (1964), 205-268.

76. Complétion des catégories ordonnées, *Ann. Inst. Fourier* XIV-2, Grenoble (1964), 89-144.

77. Catégories et Structures, Extraits, *CTGD* VI (1964), 1-31.

78. Prolongements des catégories différentiables, *CTGD* VI (1964), 1-8.

79. Expansion générale des foncteurs, *C. R. A. S. Paris* 260 (1965), 30-33.

80. Catégorie quotient d'une catégorie par une sous-catégorie, *C. R. A. S. Paris* 260 (1965), 2116-2119.

81. *Catégories quasi-topologiques et leurs prolongements*, Université Paris (1965), 1-15.

82. Quasi-surjections et structures quasi-quotient, *C. R. A. S. Paris* 261 (1965), 1577-1580.

83. Quasi-catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 261 (1965), 1932-1935.

84. Groupoïdes structurés quasi-quotient et quasi-cohomologie, *C. R. A. S.* 261 (1965), 4583-4586.

85. Espèces de structures sous-inductives, *CTGD* VII (1965), 1-42.

86. Guide des catégories ordonnées, *CTGD* VII (1965), 43-49.

87. Expansion des systèmes de structures dominés, *C. R. A. S. Paris* 262 (1966), 8-11.

88. Adjonction de limites aux catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 263 (1966), 655-658.

89. Quasi-élargissement d'un système de structures structuré, *C. R. A. S.* 263 (1966), 762-765.

90. 1^er théorème d'expansion structurée, *C. R. A. S. Paris* 263 (1966), 863-866.

91. Cohomologie à valeurs dans une catégorie dominée, *Coll. Topo. algébrique* Bruxelles, C. B. R. M. (1966), 21-80.

92. Catégories topologiques I, II, III, *Indig. Math.* 28-1 (1966), 133-175.

93. On the definition of structured categories, *Technical Report* 10, Un. of Kansas, Lawrence (1966), 96 pages.

94. Trends toward unity in Mathematics, *CTGD* VIII (1966), 1-7.

95. 2^e théorème d'expansion structurée, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 5-8.

96. Théorème de quasi-expansion régulière, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 56-59.

97. Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 273-276.

98. Sur les structures algébriques, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 840-843.

99. Adjonction de limites à un foncteur fidèle ou à une catégorie, *C. R. A. S. Paris* 265 (1967), 296-299.

100. Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), 293-363.

101. Propriétés infinitésimales des catégories différentiables, *CTGD* IX-1 (1967), 1-9.

102. Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *CTGD* IX-1-2 (1967), 33-180.

103. Sur les catégories différentiables, *Atti Conv. Int. Geom. Diff.* Bologna (1967), 31-40.

104. Catégories structurées généralisées, *CTGD* X-1 (1968), 139-168.

105. Catégories structurées et catégories différentiables, *Revue Roumaine Math. Pures et Appl.* 7, XIII (1968), 967-977.

106. Esquisses et types de structures algébriques, *Bul. Inst. Polit. Iaşi* XIV-1-2 (1968), 1-14.

107. Prolongements universels d'un foncteur par adjonction de limites, *Dissertationes Math.* LXIV, Varsovie (1969), 1-72.

108. Construction de structures libres, *Lecture Notes in Math.* 92, Springer (1969), 74-104.

109. Catégories de foncteurs structurés, *CTGD* XI-3 (1969), 329-383 (avec A. EHRESMANN).

110. Elargissement complet d'un foncteur local, *CTGD* XI-4 (1969), 405-420.

111. *Espaces fibrés et variétés différentiables*, Univ. Paris VII (1969), 1-44 (avec A. EHRESMANN).

112. Catégories de foncteurs structurés, *Coll. E. Cartan*, Un. Paris VII (1970) 1 page.

113. *Etude des catégories dans une catégorie*, Univ. Paris VII (1972), 1-45 (avec A. EHRESMANN).

114. *Sur le prolongement d'un prototype dans un type*, Univ. Paris VII (1972), 1-12 (avec A. EHRESMANN).

115. Categories of sketched structures, *CTGD* XIII-2 (1972), 105-214 (avec A. EHRESMANN).

116. Categories in differential Geometry, Résumés Coll. Amiens 1973, *CTGD* XIV-2 (1973), 175-177.

117. Multiple functors, I: Limits relative to double categories, *CTGD* XV-3 (1974), 215-292 (avec A. EHRESMANN).

118. Tensor products of topological ringoids, *CTGD* XIX-1 (1978), 87-112 (avec A. EHRESMANN).

119. Multiple functors, II: The monoidal closed category of multiple categories, *CTGD* XIX-3 (1978), 295-334 (avec A. EHRESMANN).

120. Multiple functors, III: The cartesian closed category Cat_n, *CTGD* XIX-4 (1978), 387-444 (avec A. EHRESMANN).

121. Multiple functors, IV: Monoidal closed structures on Cat_n, *CTGD* XX-1 (1979), 59-104 (avec A. EHRESMANN).

2. LIVRES.

122. *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965, 375 pages.

123. *Algèbre* (Maîtrise de Math. C3), C.D.U. Paris, 1968, 168 pages.

3. COURS MULTIGRAPHIES.

124. *Cinématique*, Univ. Strasbourg (à Clermont-Ferrand), 1942.

125. *Espaces fibrés et structures infinitésimales*, 1er chapitre, Univ. Rio de Janeiro, 1952, 24 pages.

126. *Catégories différentiables et Géométrie différentielle*, Chapitres I et II, Sém. Soc. Can. Math., Montréal, 1961, 118 pages.

127. *Cours de Topologie algébrique*, Univ. Paris VII, 1970, 84 pages (avec A. EHRESMANN).

128. *Topologie algébrique*, Univ. Amiens, 1975, 150 pages (avec A. EHRESMANN).

129. *Histoire et Fondements des Mathématiques* (3 chapitres), Univ. Amiens 1977-1978 (avec A. EHRESMANN).

4. DIVERS.

130. Analyse de l'ouvrage de Seifert & Threlfall: «Lehrbuch der Topologie», *Enseignement Math.* 34 (1935), 404.

131. Analyse de l'ouvrage de Alexandroff & Hopf: «Topologie I», *Enseign. Math.* 35 (1936), 403.

132. Analyse de l'ouvrage de Schouten & Struik: «Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie», *Bull. Sc. Math.* 60 (1936), 129-131.

133. Revue critique des thèses de J. Cavaillès: Méthode axiomatique et formalisme, *Revue Philosophique* 131 (1941), 81-86.

134. Analyse de l'ouvrage d'E. Cartan: «Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques», *Bull. Sc. Math.* 70, Paris (1946), 117-122.

135. Analyse de l'ouvrage d'E. Cartan: «Leçons sur la théorie des espaces de Riemann», *Bull. Sc. Math.* 70, Paris (1946), 149-151.

136. *Travaux scientifiques de C. Ehresmann*, Univ. Strasbourg, 1955, 1-19.

137. Rapport sommaire sur les travaux de M. A. Lichnerowicz, *Atti V Cong. Un. Mat. Italiana* Pavia-Torino (1956), 21-26.

138. Topologie algébrique, *Formulaire de Math. à l'usage des Physiciens et Ingénieurs*, C.N.R.S. (1962), 202-220 (avec G. REEB).

139. Déjà vingt ans ..., *CTGD* XVIII-4 (1977), 431-432 (avec A. EHRESMANN).

5. EDITION DE TRAVAUX.

140. Edition de l'ouvrage posthume de J. Cavaillès: Sur la logique et la théorie de la Science, P.U.F., 1947, 1[e] édition (avec G. CANGUILHEM).

141. Edition du Colloque de Géométrie Différentielle de Strasbourg 1953, *Coll. Intern. C. N. R. S.* (1953), 1-198 (avec A. LICHNEROWICZ).

142. Edition des Résumés du Colloque sur l'Algèbre des catégories Amiens 1973, *CTGD* XIV-2 (1973), 153-223 (avec A. EHRESMANN).

143. Edition des Résumés du 2[e] Colloque sur l'Algèbre des Catégories, Amiens 1975, *CTGD* XVI-3 (1975), 217-340 (avec A. EHRESMANN).

144. Edition des Résumés des Journées T.A.C. de Chantilly, *CTGD* XVI-4 (1975), 425-442 (avec A. EHRESMANN).

145. Publication des:
. *Receuils d'exposés du Colloque de Topologie de Strasbourg*: 1951, 1952 et 1954.
. *CTGD*, Volumes 1 à 20, depuis 1957 (avec A. EHRESMANN).
. *Esquisses Mathématiques*, Volumes 1 à 30, depuis 1970, Paris-Amiens (avec A. EHRESMANN).

A. C. E.

Reproduit de:
Cahiers de Topologie
et Géométrie Différentielle,
Volume XX-3 (1979), pages 221-228.

INTRODUCTION

Charles EHRESMANN s'est intéressé à des domaines très variés des Mathématiques. Il a profondément influencé le développement de la Topologie Algébrique, de la Géométrie Différentielle et de la Théorie des Catégories. Ses travaux (de 1932 à 1979, plus de 2.500 pages) sont souvent passés dans le domaine commun, mais beaucoup ne sont plus accessibles matériellement. C'est pourquoi, depuis plusieurs années, nous avions l'intention, Charles et moi, de publier ses œuvres complètes.

Pour ne pas faire seulement un travail de compilation, nous voulions profiter de cette occasion pour mettre en évidence la genèse des idées et les motivations, pour améliorer certains résultats, pour relier les articles entre eux et avec ceux d'autres auteurs, pour indiquer les développements ultérieurs et, éventuellement, des voies non encore exploitées.

Désirant être indépendants et n'engager que notre propre responsabilité (Charles a toujours été très individualiste), nous comptions éditer ces «*Oeuvres complètes et commentées*» sous forme de Suppléments à notre périodique «*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*». C'est pour réaliser ce projet tel qu'il avait été conçu que j'ai décidé, après le décès de Charles, d'entreprendre seule (contrairement à l'usage) cette publication. Je remercie tous ceux qui m'aident, par leur soutien moral ou leur souscription, à mener à bien ce travail dans cet esprit, comme l'avait souhaité Charles.

PLAN GENERAL.

Il est très difficile de classer les œuvres de Charles. L'ordre chronologique est loin d'être satisfaisant (ainsi les travaux de Géométrie Différentielle s'échelonnent de 1939 à 1973); une division par matières laisse à désirer, beaucoup d'articles contenant des parties très différentes.

Le plan adopté (sans doute peu convaincant) tient compte à la fois de la date de parution et du sujet. Il comporte quatre grandes parties:

I. *Topologie et Géométrie Différentielle.*

II. *Structures locales et catégories ordonnées.*

III. *Catégories internes et Fibrations.*

IV. *Esquisses. Complétions. Enrichissements.*

Chaque partie, divisée en deux volumes, contient :

- La liste des publications de Charles et une courte biographie de la période correspondant en gros à la partie,
- Les travaux originaux, reproduits par procédé photographique (et je remercie tous ceux qui m'ont accordé leurs droits de reproduction) ou recomposés lorsque la présentation n'était pas assez nette ;
- Des commentaires fragmentés (en anglais) avec renvois aux textes, suivis d'un Synopsis guidant dans la lecture des articles et commentaires ;
- Une bibliographie relative aux commentaires et un index dans chaque volume ; parfois des documents annexes éclairant tel ou tel point.

SUR LA PARTIE III.

Elle regroupe les premiers textes purement catégoriques. Moins connus que les travaux plus anciens sur la Topologie et la Géométrie Différentielle qui font aujourd'hui partie intégrante du folklore, ces articles sont plus difficiles à trouver que les publications récentes dont des tirés à part sont encore disponibles. C'est une des raisons qui m'ont poussée à les publier en premier. Par ailleurs, Charles m'ayant fait participer à son travail à cette époque, il m'était facile de retracer la genèse des idées et d'en expliquer les motivations.

Ces écrits, nettement en avance sur leur temps (ce qui, joint à des notations peu orthodoxes, a sans doute un peu diminué leur audience) annoncent les développements ultérieurs de la Théorie des Catégories et surtout la théorie des structures internes à une catégorie, dont la richesse s'est révélée avec l'étude des topos. Bien des passages restent d'actualité.

La partie III contient au total une trentaine d'articles publiés entre 1963 et 1972, sur : les catégories structurées et les catégories internes ; les sous-structures et structures quotients et leurs généralisations ; les fibrations scindées et leurs applications en cohomologie non abélienne ; les théorèmes d'extensions de foncteurs et de foncteurs internes.

Andrée CHARLES EHRESMANN

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui nous ont aidés et réconfortés :

- Mes collègues d'Amiens qui ont si chaleureusement accueilli Charles après sa retraite et lui ont permis de poursuivre son travail d'enseignant jusqu'à la fin.

- Les anciens élèves de mon mari qui nous ont témoigné leur attachement, en particulier Melle P. LIBERMANN et M. G. REEB, qui ont eu l'idée de lancer une «souscription confidentielle» dont je remercie les généreux souscripteurs.

- Les membres présents et passés de notre équipe «Théorie et Applications des Catégories», et plus particulièrement MM. M. CHARTRELLE et D. TANRE, sur qui j'ai toujours pu compter.

- M. G. CHOQUET, en qui j'ai sans cesse trouvé un appui compréhensif et efficace.

- Les médecins de l'Hôpital d'Amiens qui m'ont permis de ne jamais quitter mon mari, et surtout le Dr J.-F. de FREMONT qui m'a appris à le soigner et m'a soutenue et stimulée dans bien des moments difficiles.

- Le Dr F. de la SIMONE, et plus encore le Dr J.-P. VANBREMEERSCH qui, après s'être occupés de mon mari avec dévouement, ont rendu possible la réalisation de ce livre grâce à leur patient soutien moral, à leurs conseils judicieux, à leurs encouragements et à l'intérêt constant qu'ils ont porté à mon travail depuis des mois.

- Enfin, Michèle GIRY qui, depuis le début de la maladie de Charles, a eu pour nous les attentions d'une fille et qui m'a assistée de mille façons.

A. C. E.,
Amiens, Avril 1980

DE 1963 A 1970

C'est une des périodes de création et de publication les plus intenses de Charles : plus de 1.400 pages en 7 ans, sans compter ses deux livres *Catégories et Structures* (Dunod, 1965) et *Algèbre* (C.D.U., 1968). Si ses articles sont toujours denses et souvent abstraits, les démonstrations sont complètes et les théories développées à fond, jusqu'aux résultats fins (à la différence des textes d'avant les années soixantes où, comme le souligne Haefliger dans la *Gazette des Mathématiciens* (n° 13, 1980, 27-35) seule une esquisse est donnée).

Ses travaux les plus récents, il les expose dans ses cours à l'Université de Paris (où il est Professeur depuis 1955); jusqu'en 1967 il enseigne uniquement en troisième cycle ; ensuite, sous la pression de certains collègues, il demande à faire le cours de Maîtrise «Algèbre et Géométrie» (C 3), où d'ailleurs il utilise largement les catégories, et où il éveille l'intérêt de plusieurs étudiants pour la recherche.

Ses élèves sont de plus en plus nombreux : il dirige une dizaine de thèses de Doctorat d'Etat (Nguyen Dinh Ngoc, Ver Eecke, Houdebine, Joubert, de Barros, Bénabou, Kumpera, Ibisch, Stavroulakis, S. Legrand), plusieurs thèses d'Université ou de troisième cycle, et il initie de jeunes chercheurs, tels Coppey et Foltz, puis A. et F. Burroni, Guitart, Lair.

Il accueille aussi régulièrement des étrangers dans son Séminaire «*Catégories, Topologie et Géométrie Différentielle*», à l'Institut Henri Poincaré ; il est co-organisateur de deux rencontres internationales : le Colloque du C.N.R.S. sur les structures feuilletées, Grenoble 1964, et les Journées Mathématiques sur l'algèbre des catégories, Paris-Dijon 1967.

Il va lui-même faire des séries de conférences ou assister à des colloques dans divers pays européens : Allemagne, Hollande, Hongrie, Italie, Pologne, Roumanie, ... Par contre, alors qu'il avait passé une grande partie des dix années précédentes en longs séjours à l'étranger, notre seul grand voyage pendant cette période a pour but le centre des Etats-Unis, où il est «Visiting Professor» à l'Université de Kansas à Lawrence, de Février à Août 1966. Nous en profitons pour parcourir les Etats-Unis en autocar, de Salt Lake City à New-York, et d'Omaha à Oklahoma, en traversant les si belles Montagnes Rocheuses (Ouray, Durango, Denver,...) où nous goûtons une de nos très rares périodes de vacances.

Le dernier voyage à l'étranger de sa vie a lieu en Hollande, fin 1968 (où, après ses conférences à Leyden, nous avons longuement admiré à La Haye son tableau préféré, « *Vue de Delft* » de Vermeer). En effet, par la suite Charles est attiré par une vie tranquille, à peu près exclusivement consacrée au travail, dans notre appartement de la Place d'Italie à Paris, puis à Amiens; par ailleurs, les *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle* (devenus périodiques en 1967 et édités par Dunod de 1967 à 1971) absorbent de plus en plus de notre temps. Aussi finit-il par refuser (souvent après de longues hésitations) toutes les invitations qu'il reçoit pourtant avec beaucoup de plaisir.

Parmi ses activités officielles pendant ces sept années :

- Président de la Société Mathématique de France en 1965, il est assez content de bousculer la tradition en obtenant que la liste de candidats présentée par le Conseil pour son renouvellement annuel comporte moins de noms que de postes à pourvoir afin de laisser plus d'initiative aux électeurs.
- Vice-Président du Comité National Français des Mathématiciens, il cherche des crédits pour la participation française au Congrès International de Moscou et il commence les démarches pour que Nice soit choisie comme lieu du Congrès International de 1970.

Enfin l'Académie des Sciences de Paris lui décerne le Prix Petit d'Ormoy en 1965, et l'Université de Bologna le nomme «Docteur *Honoris Causa*» en 1967.

A. C. E.

Les articles originaux faisant l'objet de cette Partie III-1 sont reproduits (par procédé photographique) dans les pages 1 à 336. Les numéros ajoutés dans les marges extérieures renvoyent aux Commentaires qui suivent (cf. page 337).

C. R. Acad. Sc., t. 256, p. 1198-1201. Séance du 4 février 1963. Groupe 1

/57/

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Catégories doubles et catégories structurées.* Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Jean Leray.

Définition des catégories structurées; cas plus particulier des catégories doubles, lesquelles admettent pour catégorie quotient une catégorie de quatuors. 1

1. CATÉGORIES DOUBLES :

Définition. — Nous appellerons *catégorie double* une classe $\mathcal{C}$ munie de deux lois de composition, notées . et $\perp$, vérifiant les conditions :

1. $(\mathcal{C}, .)$ est une catégorie, notée $\mathcal{C}^{\cdot}$; les unités à droite et à gauche de $f \in \mathcal{C}^{\cdot}$ seront notées $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ respectivement, la classe des unités, $\mathcal{C}^{\cdot}_0$;

2. $(\mathcal{C}, \perp)$ est une catégorie, notée $\mathcal{C}^{\perp}$; les unités de $f \in \mathcal{C}^{\perp}$ seront notées $\alpha^{\perp}(f)$ et $\beta^{\perp}(f)$, la classe des unités, $C^{\perp}_0$;

3. Les applications α et β (resp. $\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$) sont des foncteurs de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$ (resp. de $\mathcal{C}^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$);

4. Axiome de permutabilité : Si les composés $k.h$, $g.f$, $k \perp g$ et $h \perp f$ sont définis, on a

$$(k.h) \perp (g.f) = (k \perp g).(h \perp f).$$ 2

Soit $\mathcal{C}$ une classe munie de deux lois de composition . et $\perp$ vérifiant les axiomes 1 et 2; considérons les axiomes suivants :

3'. $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ (resp. $C^{\perp}_0$) est stable relativement à $\perp$ (resp. à .);

4'. Si les composés $k.h$, $g.f$, $k \perp g$ et $h \perp f$ sont définis, alors $(k.h)\perp(g.f)$ et $(k \perp g).(h \perp f)$ sont définis et égaux.

5. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a

$$\alpha(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\alpha(f)), \qquad \beta(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\beta(f));$$
$$\alpha(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\alpha(f)), \qquad \alpha^{\perp}(\beta(f)) = \beta(\alpha^{\perp}(f)).$$ 3

PROPOSITION. — *Pour que* $(\mathcal{C}, ., \perp)$ *soit une catégorie double, il faut et il suffit que les conditions* 1, 2, 3', 4', 5 *soient vérifiées. Dans ce cas,* $\mathcal{C}_0$ *(resp.* $\mathcal{C}^{\cdot}_0$*) est une sous-catégorie de* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *(resp.* $\mathcal{C}^{\perp}$*).* 4

Une *sous-catégorie double* d'une catégorie double $\mathcal{C}$ est une sous-classe $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ qui est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot}$ et de $\mathcal{C}^{\perp}$; alors C' est une catégorie double pour les lois de compositions induites par . et $\perp$. 5

Définition. — Soit $\mathcal{C}$ une catégorie double; on appelle *idéal à gauche* (resp. *à droite*) de $\mathcal{C}^{\perp}$ une sous-catégorie $I^{\perp}$ de $\mathcal{C}^{\perp}$ telle qu'on ait $\mathcal{C}.I^{\perp} = I^{\perp}$ (resp. $I^{\perp}.\mathcal{C} = I^{\perp}$), où $\mathcal{C}.I^{\perp}$ (resp. $I^{\perp}.\mathcal{C}$) est la classe des composés $f.g$ (resp. $g.f$), $g \in I^{\perp}$ et $f \in \mathcal{C}$. On définit de même un idéal de $\mathcal{C}^{\cdot}$. 6

Proposition. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie double; un idéal $I^{\perp}$ à gauche de $\mathcal{C}^{\perp}$ est une espèce de structures* [1] *au-dessus de $\mathcal{C}^{\cdot}$ pour la loi de composition : $(f, g) \to f.g$ si, et seulement si, $f.g$ est défini, où $f \in \mathcal{C}$ et $g \in I^{\perp}$. La caté-*
1 *gorie $\mathcal{E}(I^{\perp})$ des hypermorphismes* [1] *correspondante est une catégorie double pour les lois de composition :*

$$(f', g').(f, g) = (f'.f, g)$$

si, et seulement si, $g' = f.g$ et

$$(f', g') \perp (f, g) = (f' \perp f, g' \perp g)$$

si, et seulement si, $f' \perp f$ et $g' \perp g$ sont définis.

2. Catégories doubles de quatuors. — Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux catégories ayant même classe d'unités Δ. Soit $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$ la classe des quadruplets : (g_2, g_1, f_1, f_2), où $f_i \in \mathcal{C}_i$, $g_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, 2$, tels que :

$$\alpha(f_1) = \alpha(f_2); \qquad \alpha(g_1) = \beta(f_2); \qquad \beta(f_1) = \alpha(g_2); \qquad \beta(g_1) = \beta(g_2).$$

Sur $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$, on définit les deux lois de composition :

Multiplication *longitudinale* :

$$(g'_2, g'_1, f'_1, f'_2) \boxed{\,|\,} (g_2, g_1, f_1, f_2) = (g'_2, g'_1 g_1, f'_1 f_1, f_2)$$

si, et seulement si, $f'_2 = g_2$;

Multiplication *latérale* :

$$(g'_2, g'_1, f'_1, f'_2) \boxminus (g_2, g_1, f_1, f_2) = (g'_2 g_2, g'_1, f_1, f'_2 f_2)$$

si, et seulement si, $f'_1 = g_1$.

Proposition. — $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$ *est une catégorie double pour les multiplications longitudinale et latérale.*

Supposons $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$; rappelons [1] qu'un *quatuor* de $\mathcal{C}$ est un élément $(g_2, g_1, f_1, f_2) \in \square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ tel que $g_1 f_2 = g_2 f_1$.

Corollaire. — *La classe $\square\mathcal{C}$ des quatuors de $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie double de $\square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$.*

Théorème. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie double; alors $\mathcal{C}^{\cdot}$ admet pour catégorie*
2 *quotient* [1] *la catégorie longitudinale $\boxed{\,|\,}(\mathcal{C}^{\cdot}_0, \mathcal{C}^{\perp}_0)$, où $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ (resp. $\mathcal{C}^{\perp}_0$) est munie de sa structure de sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$ (resp. $\mathcal{C}^{\cdot}$).*

3. Foncteurs vers une catégorie double. — Soient Γ une catégorie et $\mathcal{C}$ une catégorie double; soit $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, \Gamma)$ la classe des foncteurs de Γ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$.

Proposition. — $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, \Gamma)$ *est une catégorie pour la loi de composition $(\Phi', \Phi) \to \Phi' \perp \Phi$, où $(\Phi' \perp \Phi)(f) = \Phi'(f) \perp \Phi(f)$ si, et seulement si, $\Phi'(f) \perp \Phi(f)$ est défini pour tout $f \in \mathcal{C}$.*

Définition. — Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ deux catégories doubles; on appelle *foncteur double* de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_1$ une application Φ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}_1$ telle que Φ soit un foncteur de $\mathcal{C}^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}_1^{\cdot}$ et un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $\mathcal{C}_1^{\perp}$. La classe des foncteurs doubles de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_1$ sera notée $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C})$.

PROPOSITION. — *$\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C})$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot})$ et* 1¶
de $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})$; munie des deux lois de composition induites, $\mathcal{F}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C})$ est une catégorie double.

PROPOSITION. — *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories; la catégorie longitudinale $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ des transformations naturelles* ([2]) *entre foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ s'identifie à la catégorie $\mathcal{F}(\boxminus\mathcal{C}', \mathcal{C})$, en identifiant la transformation naturelle $(\varphi', \tau, \varphi)$ au foncteur Φ tel que*

$$\Phi(f) = (\varphi'(f), \tau(\beta(f)), \tau(\alpha(f)), \varphi(f))$$

pour tout $f\in\mathcal{C}$.

Par suite, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double, un foncteur Φ d'une
catégorie Γ vers $C^{\cdot}$ peut être considéré comme une transformation natu- 2
relle généralisée de $\alpha^{\perp}\Phi$ vers $\beta^{\perp}\Phi$. Nous verrons une autre généralisation des transformations naturelles (catégorie double des quintettes) dans une publication suivante.

4. CATÉGORIES STRUCTURÉES. — Soit $\mathcal{M}_0$ une classe de classes, contenant avec X toutes ses parties, avec X et X′ le produit $X\times X'$; soit $\mathcal{M}$ la catégorie de toutes les applications de X vers Y, où $X\in\mathcal{M}_0$ et $Y\in\mathcal{M}_0$.
Soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes ([1]), $\mathcal{S}$ contenant le 3
groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$; soit $\mathcal{H}_0$ la classe des unités de $\mathcal{H}$: on identifie $h\in\mathcal{H}$ avec $(\beta^{\mathcal{H}}(h), p(h), \alpha^{\mathcal{H}}(h))$.

Définition. — On appelle *catégorie structurée dans $\mathcal{H}$* un couple $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$, 4
où $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une structure de catégorie sur $\mathcal{C}\in\mathcal{M}_0$, $s\in\mathcal{H}_0$ et $p(s)=\mathcal{C}$, vérifiant les conditions suivantes :

1° Il existe $s_0\in\mathcal{H}_0$ tel que :

$$p(s_0)=\mathcal{C}_0^{\cdot}, \qquad (s, i_{\mathcal{C}_0^{\cdot}}, s_0)\in\mathcal{H}, \qquad (s_0, \alpha, s)\in\mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad (s_0, \beta, s)\in\mathcal{H},$$

où $i_{\mathcal{C}_0^{\cdot}}$ est l'injection canonique de $\mathcal{C}_0^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}$, α et β, les applications source et but dans $\mathcal{C}^{\cdot}$.

2° Il existe un produit $s\times s$ dans $\mathcal{H}$, tel que $p(s\times s)=\mathcal{C}\times\mathcal{C}$; si K est la sous-classe de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ formée des couples composables, il existe $s'\in\mathcal{H}_0$ tel que

$$p(s') = K \qquad \text{et} \qquad (s\times s, i_K, s')\in\mathcal{H}.$$

3° κ désignant l'application $(g, f)\to g.f$ de K dans $\mathcal{C}$, la relation
$(s\times s, i_K, s')\in\mathcal{H}$ entraîne $(s, \kappa, s')\in\mathcal{H}$. 5+

Exemple. — Une catégorie structurée dans $\tilde{\mathcal{T}}$, où $\tilde{\mathcal{T}}$ est la catégorie des topologies, est une catégorie topologique ([3]).

THÉORÈME. — *Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *soit une catégorie double, il faut et il suffit que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *soit une catégorie structurée dans la catégorie* $\mathcal{F}$ *des foncteurs d'une catégorie vers une autre; dans ce cas,* $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\cdot})$ *est aussi une catégorie structurée dans* $\mathcal{F}$ (la structure sur $\mathcal{C}^{\cdot}$ est $\mathcal{C}^{\perp}$).

(*) Séance du 28 janvier 1963.

(1) *Espèces de structures locales; élargissements de catégories*, Séminaire Top. et Géo. Diff. (Ehresmann), III, Paris, 1961; *Jahres. Deutsch. Math. Ver.*, 60, 1957, p. 49.

(2) *Catégorie des foncteurs types. Rev. Un. Mat. Argentina*, 20, 1960, p. 194.

(3) *Catégories topologiques et catégories différentiables*, Coll. Géo. Diff. Glo., Bruxelles, C.B.R.M., 1959, p. 137.

163.439. — Imp. GAUTHIER-VILLARS & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc., t. 256, p. 1891-1894. Séance du 25 février 1963. Groupe 1

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Catégorie double des quintettes; applications covariantes.* Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Jean Leray.

Étude de la catégorie double des quintettes dont la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs est une sous-catégorie. Applications covariantes entre espèces de structures dominées par une catégorie. 1

Cette Note fait suite à la Note (¹) dont nous reprenons la terminologie et les notations.

1. CATÉGORIE DOUBLE DES QUINTETTES. — Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\square\mathcal{C} = \left(\boxed{\,|\,}\mathcal{C}, \boxminus\mathcal{C}\right)$ la catégorie double des quatuors correspondante; nous désignerons par $\alpha^{\boxed{|}}$ et $\beta^{\boxed{|}}$ (resp. par $\alpha^{\boxminus}$ et $\beta^{\boxminus}$) les applications source et but dans la catégorie longitudinale $\boxed{\,|\,}\mathcal{C}$ (resp. latérale $\boxminus\mathcal{C}$). La classe des unités de $\mathcal{C}$ sera notée $\mathcal{C}_0$.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories, F un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. F détermine un foncteur double de $\square\mathcal{C}$ vers $\square\mathcal{C}'$; ce foncteur double, que nous désignerons par $\square$F, associe à $(g_2, g_1, f_1, f_2) \in \square\mathcal{C}$ le quatuor

$$(\mathrm{F}(g_2), \mathrm{F}(g_1), \mathrm{F}(f_1), \mathrm{F}(f_2)) \in \square\mathcal{C}'.$$

Soient $\boldsymbol{\mathcal{F}}_0$ une classe de catégories et $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ la catégorie des foncteurs F de $\mathcal{C} = \alpha(\mathrm{F})$ vers $\mathcal{C}' = \beta(\mathrm{F})$, où $\mathcal{C} \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_0$ et $\mathcal{C}' \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_0$, munie de la loi de composition :

$$(\mathrm{F}', \mathrm{F}) \to \mathrm{F}'\mathrm{F} \quad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha(\mathrm{F}') = \beta(\mathrm{F}),$$

F′F étant le foncteur composé :

$$\mathrm{F}'\mathrm{F}(f) = \mathrm{F}'(\mathrm{F}(f)) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C};$$

nous identifierons la classe des unités de $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ avec $\boldsymbol{\mathcal{F}}_0$. Soit $\mathfrak{N}$ la classe de tous les foncteurs Ψ tels que

$$\alpha(\Psi) \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_0 \quad \text{et} \quad \beta(\Psi) = \boxminus\mathcal{C}', \qquad \text{où} \quad \mathcal{C}' \in \boldsymbol{\mathcal{F}}_0;$$

cette classe s'identifie à la classe des transformations naturelles entre foncteurs appartenant à $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ (¹).

Soit $(\boldsymbol{\mathcal{F}}, q, \boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ une catégorie d'homomorphismes (²).

DÉFINITION. — On appelle quintette de $(\boldsymbol{\mathcal{F}}, q, \boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ un quintuplet $(\mathrm{F}', \Phi', \Psi, \Phi, \mathrm{F})$ tel que

$$(\mathrm{F}', \Phi', \Phi, \mathrm{F}) \in \square(\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}), \qquad \Psi \in \mathfrak{N},$$
$$\alpha^{\boxed{|}}\Psi = q(\Phi'\mathrm{F}) \qquad \text{et} \qquad \beta^{\boxed{|}}\Psi = q(\mathrm{F}'\Phi).$$

La classe des quintettes de $(\boldsymbol{\mathcal{F}}, q, \boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$ sera notée $\mathrm{Q}(\boldsymbol{\mathcal{F}}, q, \boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{\mathcal{S}})$, ou seulement $\mathrm{Q}(\boldsymbol{\mathcal{H}})$.

Nous poserons :

$$Q(\mathcal{F}, \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}) = Q(\mathcal{F}) \qquad \text{et} \qquad Q(\mathcal{F}, q, \mathcal{S}, \mathcal{S}) = Q(\mathcal{S}).$$

Théorème. — $Q(\mathcal{H})$ *est une catégorie double pour les multiplications longitudinale et latérale suivantes :*

$$(F'_1, \Phi'_1, \Psi_1, \Phi_1, F_1) \cdot (F', \Phi', \Psi, \Phi, F) = (F'_1, \Phi'_1\Phi', \Psi', \Phi_1\Phi, F),$$

où

$$\Psi' = \Psi_1 q(\Phi) \boxed{\mid} (\square\, q(\Phi'_1))\, \Psi$$

si, et seulement si, $F' = F_1$;

$$(F'_1, \Phi'_1, \Psi_1, \Phi_1, F_1) \times (F', \Phi', \Psi, \Phi, F) = (F'_1 F', \Phi'_1, \Psi'', \Phi, F_1 F),$$

où

$$\Psi'' = \square\, q(F'_1)\, \Psi \boxed{\mid} \Psi_1 q(F)$$

si, et seulement si, $\Phi' = \Phi_1$.

$\mathcal{H}$ s'identifie à la classe des unités de la catégorie longitudinale $Q^{\cdot}(\mathcal{H})$
1 [resp. latérale $Q^{\times}(\mathcal{H})$].

Proposition. — *L'application* $\bar{q}$ *qui associe au quintette* $(F', \Phi', \Psi, \Phi, F)$ *le quintette* $(q(F'), q(\Phi'), \Psi, q(\Phi), q(F))$ *est un foncteur double de* $Q(\mathcal{H})$
2¶ *vers* $Q(\mathcal{F})$. *De plus,* $(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), \bar{q}, Q^{\cdot}(\mathcal{H}), Q^{\cdot}(\mathcal{S}))$ *est une catégorie d'homomorphismes ainsi que* $(Q^{\times}(\mathcal{F}), \bar{q}, Q^{\times}(\mathcal{H}), Q^{\times}(\mathcal{S}))$.

2. Sous-catégories et idéaux de $Q(\mathcal{H})$. — Soit $\mathfrak{N}(\mathcal{H})$ la sous-classe $\mathcal{H}_0 \times Q(\mathcal{H}) \times \mathcal{H}_0$ de $Q(\mathcal{H})$ formée des quintettes T tels que

$$\alpha^{\times}(T) = \alpha(F) \in \mathcal{H}_0 \qquad \text{et} \qquad \beta^{\times}(T) = \beta(F) \in \mathcal{H}_0.$$

3 $\mathfrak{N}$ s'identifie à $\mathfrak{N}(\mathcal{F})$ en identifiant $\Psi \in \mathfrak{N}$, avec $\left(\beta^{\boxed{\mid}}\Psi, \mathcal{C}', \Psi, \mathcal{C}, \alpha^{\boxed{\mid}}, \Psi\right)$, où

$$\mathcal{C} = \alpha(\Psi) \qquad \text{et} \qquad \beta(\Psi) = \boxminus\, \mathcal{C}'.$$

Soient $H \in \mathcal{H}_0$, $\mathfrak{N}_H(\mathcal{H})$ la sous-classe $H \times Q(\mathcal{H}) \times H$ de $Q(\mathcal{H})$ formée des T tels que $\alpha^{\times}(T) = \beta^{\times}(T) = H$, et $\mathfrak{N}_H(\mathcal{H}).H$ la sous-classe de $\mathfrak{N}_H(\mathcal{H})$ formée des T tels que $\alpha^{\cdot}(T) = H$.

Proposition. — $\mathfrak{N}(\mathcal{H})$ *est une sous-catégorie double de* $Q(\mathcal{H})$; $\mathfrak{N}_H(\mathcal{H})$ *est une sous-catégorie double de* $\mathfrak{N}(\mathcal{H})$ *admettant* H *comme seul objet pour la multiplication latérale,* $\mathfrak{N}_H(\mathcal{H}).H$ *est un idéal à gauche de* $\mathfrak{N}_H^{\times}(\mathcal{H})$.

En particulier, soit $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_0$; alors la catégorie double $\mathfrak{N}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$ s'identifie à la classe des transformations naturelles entre foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$, munie des multiplications longitudinale et latérale considérées dans [3].

Proposition. — *L'idéal* $\mathfrak{N}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}).\mathcal{C}$ *s'identifie à la catégorie* $\mathcal{F}_{\nu}(\mathcal{C})$ *des*
4 *foncteurs naturalisés de* $\mathcal{C}$; *la catégorie des hypermorphismes correspondante* [1] *s'identifie à la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs naturalisés* [3].

Soit $\mathcal{H}_0 \times Q(\mathcal{H})$ la sous-classe de $Q(\mathcal{H})$ formée des quintettes T tels que $\beta^{\times}(T) \in \mathcal{H}_0$; soit $H \times Q(\mathcal{H})$ la sous-classe de $Q(\mathcal{H})$ formée des T tels que $\beta^{\times}(T) = H$.

Proposition. — $\mathcal{H}_0 \times \mathrm{Q}(\mathcal{H})$ *et* $\mathrm{H} \times \mathrm{Q}(\mathcal{H})$ *sont des idéaux à droite de* $\mathrm{Q}^{\cdot}(\mathcal{H})$.

3. Espèces de structures dominées par une catégorie. — Soient $\mathcal{M}_0$ une classe de classes et $\mathcal{M}$ une sous-catégorie, admettant $\mathcal{M}_0$ pour classe d'objets, de la catégorie des applications de E dans E′, où $\mathrm{E} \in \mathcal{M}_0$ et $\mathrm{E}' \in \mathcal{M}_0$. Supposons $\mathcal{M} \in \mathcal{F}_0$. A un foncteur F de $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_0$ vers $\mathcal{M}$ correspond canoniquement l'espèce de structures sur $\mathcal{C}$ dont les éléments sont les couples (e, z), où $e \in \mathcal{C}_0$ et $z \in \mathrm{F}(e)$, l'opération de $\mathcal{C}$ sur la classe de ces couples étant définie par :

$$(f, (e, z)) \to (\beta(f), \mathrm{F}(f)(z)) \quad \text{si, et seulement si,} \quad e = \alpha(f), \quad f \in \mathcal{C}.$$

Soit $\mathfrak{S}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ la classe des espèces de structures ainsi définies.

Proposition. — *La catégorie* $\mathcal{M} \times \mathrm{Q}(\mathcal{F})$ *s'identifie à une sous-catégorie de la catégorie des applications covariantes* (²) *entre espèces de structures appartenant à* $\mathfrak{S}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, *en identifiant* $(\mathrm{F}', \mathcal{M}, \Psi, \Phi, \mathrm{F})$ *à l'application covariante* (Φ, φ) *telle que*

$$\varphi(e, z) = (\Phi(e), \alpha^{\boxminus}\Psi(z)) \quad \textit{pour tout} \quad e \in \alpha(\mathrm{F})_0 \quad \textit{et} \quad z \in \mathrm{F}(e).$$

Définition. — Soient $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_0$, $\mathcal{K} \in \mathcal{F}_0$, p un foncteur de $\mathcal{K}$ vers $\mathcal{M}$ et F un foncteur d'une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{K}$; on dira que $(\mathcal{C}, \mathrm{F})$ est une *espèce de structures dominée par* $(\mathcal{K}, p)$ si l'on a :

(S) Supposons $e \in \alpha(\mathrm{F})_0$, $e' \in \alpha(\mathrm{F})_0$ et $e \neq e'$; alors

$$p\mathrm{F}(e) \cap p\mathrm{F}(e') = \emptyset.$$

Dans ce cas, $(\mathcal{C}, p\mathrm{F})$ est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$.

Nous supposons désormais que $\mathcal{F}_0$ contient, avec $\mathcal{C}$, les sous-catégories de $\mathcal{C}$.

Définition. — On appelle *application covariante* de l'espèce de structures $(\mathcal{C}, \mathrm{F})$ dominée par $(\mathcal{K}, p)$ vers l'espèce de structures $(\mathcal{C}', \mathrm{F}')$ dominée par $(\mathcal{K}', p')$ un couple $(\overline{\Phi}, \mathrm{T})$, où

$$\mathrm{T} = (\mathrm{F}', \Phi', \Psi, \Phi, \mathrm{F}) \in \mathrm{Q}(\mathcal{F})$$

et $\overline{\Phi}$ est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ dont la restriction à $\alpha(\mathrm{F})$ est Φ.

Cette définition entraîne que l'application 1¶

$$p\mathrm{F}(f) \to p'\Phi'\mathrm{F}(f),$$

où $f \in \alpha(\mathrm{F})$, est un foncteur Φ'' de la sous-catégorie $p\mathrm{F}(\alpha(\mathrm{F}))$ de $\mathcal{M}$ [image de la catégorie $\alpha(\mathrm{F})$ par l'application $p\mathrm{F}$] vers la catégorie $p'\mathrm{F}'(\alpha(\mathrm{F}'))$ et que

$$\mathrm{T}' = (p'\mathrm{F}', \Phi'', \square p'\Psi, \Phi, p\mathrm{F}) \in \mathrm{Q}(\mathcal{F}).$$

Proposition. — *La classe des applications covariantes entre espèces de structures dominées est une catégorie pour la loi de composition :*

$$((\overline{\Phi}_1, \mathrm{T}_1), (\overline{\Phi}, \mathrm{T})) \to (\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}, \mathrm{T}_1 . \mathrm{T})$$

si, et seulement si,

$$\alpha(\overline{\Phi}_1) = \beta(\overline{\Phi}) \qquad \textit{et} \qquad \alpha^{\bullet}(T_1) = \beta^{\bullet}(T);$$

elle admet pour sous-catégorie la classe des applications covariantes entre espèces de structures dominées par $(\mathcal{K}, p)$ *telles que* $\beta^{\times}(T) = \mathcal{K}$.

Si $\mathcal{K}$ est une catégorie de foncteurs et si, pour tout $k \in \mathcal{K}$, $p(k)$ est le foncteur k considéré comme simple application, une espèce de structures $(\mathcal{C}, F)$ dominée par $(\mathcal{K}, p)$ est une *espèce de morphismes*. Soit Γ la catégorie des hypermorphismes correspondant à l'espèce de structures définie par F et soit π le foncteur projection : $(f, h) \to f$ de Γ vers $\mathcal{C}$, où $f \in \mathcal{C}$ et $h \in F(e)$, $e = \alpha(f)$. Soit $\alpha^{\perp}\Gamma$ la sous-catégorie de Γ formée des couples (f, z), où $z \in (F(e))_0$. Soit $\Gamma_0^{\bullet}$ la classe des unités (e, h) de Γ munie de la loi de composition :

$$((e', h'), (e, h)) \to (e, h' \perp h)$$

si, et seulement si, $e = e'$ et si h et h' admettent $h' \perp h$ pour composé dans la catégorie $F(e)$.

On identifiera $(e, h) \in \Gamma_0^{\bullet}$ avec h.

Proposition. — Γ *s'identifie à la sous-catégorie double de* $\square(\Gamma_0^{\bullet}, \alpha^{\perp}\Gamma)$ *formée des quadruplets* (h', g', g, h) *tels que*

$$\pi(g) = \pi(g') \qquad \textit{et} \qquad h' = F(\pi(g))(h).$$

1+ $(f, h) \in \Gamma$ s'identifie à

$$(F(f)(h), (f, \beta^{\perp}(h)), (f, \alpha^{\perp}(h)), h).$$

(*) Séance du 11 février 1963.

(1) *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 1198.

(2) *Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle* (Ehresmann), III, Paris, 1961.

(3) *Rev. Un. Mat. Argentina*, 20, 1960, p. 194.

163.442. — Imp. Gauthier-Villars & C^ie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc., t. 256, p. 5031-5034. Séance du 10 juin 1963. Groupe 1

/61/

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Structures quotient et catégories quotient.*
Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Paul Montel.

Suite à une série de Notes antérieures (1). On définit la notion de structure quotient dans une catégorie d'homomorphismes et on l'applique en particulier au cas des catégories quotient.

1. $(\mathcal{K}', p)$-INJECTIONS ET $(\mathcal{K}', p)$-SURJECTIONS. — Soient $\mathcal{K}$ et $\mathcal{H}$ deux catégories, $(\mathcal{K}, p, \mathcal{H})$ un foncteur (covariant) de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{K}$. Nous désignerons par $\mathcal{K}^\star$ la catégorie duale de $\mathcal{K}$, par $p^\star$ le foncteur $(\mathcal{K}^\star, p, \mathcal{H}^\star)$. Soit $\mathcal{K}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{K}$.

DÉFINITION. — On dira que $j \in \mathcal{H}$ est une $(\mathcal{K}', p)$-injection (2) si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° On a $p(j) \in \mathcal{K}'$.

2° Pour tout $\overline{g} \in \mathcal{H}$ tel que

$$\beta(g) = \beta(j) \quad \text{et} \quad p(\overline{g}) = p(j)\cdot g',$$

où $g' \in \mathcal{K}$, il existe un et un seul $\overline{g}' \in \mathcal{H}$ tel que

$$\overline{g} = j\cdot\overline{g}' \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = g'.$$

On dira que $j^\star \in \mathcal{H}$ est une $(\mathcal{K}', p)$-*surjection* si $j^\star$ est une $(\mathcal{K}'^\star, p^\star)$-injection.

PROPOSITION. — *La classe $\mathcal{H}^s(\mathcal{K}', p)$ des $(\mathcal{K}', p)$-surjections est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ contenant tout élément inversible j de $\mathcal{H}$ tel que $p(j) \in \mathcal{K}'$.*

THÉORÈME. — *Soient $j^\star$ et $j'^\star$ deux $(\mathcal{K}', p)$-surjections telles que $\alpha(j^\star) = \alpha(j'^\star) = S$. S'il existe $f' \in \mathcal{K}'$, avec*

$$f'\cdot p(j^\star) = p(j'^\star),$$

alors il existe un et un seul $j''^\star \in \mathcal{H}^s(\mathcal{K}', p)$ tel que

$$p(j''^\star) = f' \quad \text{et} \quad j''^\star\cdot j^\star = j'^\star.$$

Si f' est inversible, $j''^\star$ est aussi inversible.

Soit $(\mathcal{H}, q, \mathcal{L})$ un foncteur et $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$.

PROPOSITION (Transitivité des surjections). — *Soit $J \in \mathcal{L}$ tel que $q(J) \in \mathcal{H}^s(\mathcal{K}', p) \cap \mathcal{H}'$. On a*

$$J \in \mathcal{L}^s(\mathcal{K}', pq) \quad \textit{si, et seulement si,} \quad J \in \mathcal{L}^s(\mathcal{H}', q).$$

2. SOUS-STRUCTURES ET STRUCTURES QUOTIENT. — Soit $(\mathcal{K}, p, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes (3), où $\mathcal{H}_\gamma$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{K}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{K}$.

Les conditions

$$j^\star \in \mathcal{H}^s(\mathcal{K}', p), \qquad j'^\star \in \mathcal{H}^s(\mathcal{K}', p),$$
$$\alpha(j^\star) = \alpha(j'^\star) \quad \text{et} \quad p(j^\star) = p(j'^\star)$$

entraînent : $j^\star = j'^\star$.

Définition. — Si les éléments de $\mathcal{K}'$ sont des épimorphismes, nous dirons que $S^\star$ est une *structure quotient de* S *relativement à* $(\mathcal{K}', p)$ s'il existe une $(\mathcal{K}', p)$-surjection $j^\star$ telle que $\alpha(j^\star) = S$ et $\beta(j^\star) = S^\star$. Par dualité,
1 on définit la notion de *sous-structure* [2].

Soit $\mathcal{M}_0$ une classe de classes contenant avec une classe toutes ses
2¶ sous-classes, avec deux classes leur produit. Soit $\mathcal{M}$ la catégorie de toutes les applications (M', f, M), où $M \in \mathcal{M}_0$ et $M' \in \mathcal{M}_0$. Soit $\mathcal{M}^s$ la sous-catégorie de $\mathcal{M}$ formée de toutes les surjections. Soit $\mathcal{M}^i$ la sous-catégorie de $\mathcal{M}$ formée des injections canoniques (M', i, M) de $M \subset M'$ dans M'. Soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes. Si $S^\star$ est une structure quotient (resp. une sous-structure) de S relativement à $(\mathcal{M}^s, p)$ [resp. à $(\mathcal{M}^i, p)$], nous dirons seulement que $S^\star$ est une structure quotient (resp. une sous-structure) de S.

Exemples. — 1° Soit $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$ la catégorie d'homomorphismes telle que $\tilde{\mathcal{T}}$ soit la catégorie des applications continues entre topologies sur des classes de $\mathcal{M}$. Une structure quotient de S est un espace topologique quotient de S.

2° Soit $\mathcal{H}$ une catégorie et $\mathcal{H}_1$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}$. Soit $\overline{\mathcal{H}}_1$ la sous-catégorie de $\mathcal{H}$ engendrée par $\overset{-1}{\beta}(\mathcal{H}_1)$. Soit Z le foncteur constant de $\overline{\mathcal{H}}_1$ sur la catégorie réduite à une seule unité a. Une (a, Z)-surjection j
3¶ sera appelée $\mathcal{H}_1$-*projection.* Pour que $j \in \mathcal{H}$ soit une $\mathcal{H}_1$-projection, il faut et il suffit que $\beta(j) \in \mathcal{H}_1$ et que, pour tout $g \in \mathcal{H}$ tel que $\alpha(g) = \alpha(j)$ et $\beta(g) \in \mathcal{H}_1$, il existe un et un seul $g' \in \mathcal{H}_1$ tel que $g'.j = g$.

3° Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des foncteurs $(\overline{\mathcal{C}}^\cdot, \Phi, \mathcal{C}^\cdot)$, où $\mathcal{C} \in \mathcal{M}_0$ et $\overline{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_0$; soit $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_\gamma)$ la catégorie d'homomorphismes correspondante [1]. Une sous-structure de $\mathcal{C}^\cdot$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^\cdot$; une structure quotient de $\mathcal{C}^\cdot$ sera appelée *catégorie quotient* de $\mathcal{C}^\cdot$. Pour que $\tilde{\mathcal{C}}^\cdot$ soit une catégorie quotient de $\mathcal{C}^\cdot$, il faut et il suffit qu'il existe un foncteur $(\tilde{\mathcal{C}}^\cdot, \Psi^\cdot, \mathcal{C}^\cdot)$ tel que : 1° $\Psi^\cdot(\mathcal{C}) = \tilde{\mathcal{C}}$; 2° si $(\mathcal{S}^\cdot, \Phi, \mathcal{C}^\cdot)$ est un foncteur et si l'on a $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \Psi^\cdot$, alors $(\mathcal{S}^\cdot, \tilde{\Phi}, \tilde{\mathcal{C}}^\cdot)$ est un foncteur.

Si, de plus, $\tilde{\mathcal{C}}$ est la classe $\mathcal{C}/\rho$ quotient de $\mathcal{C}$ par la relation d'équivalence ρ correspondante :

$$f \sim f' \quad \text{si, et seulement si,} \quad \Psi^\cdot(f) = \Psi^\cdot(f'),$$

on dira que $\tilde{\mathcal{C}}^\cdot$ est la *catégorie quotient de* $\mathcal{C}^\cdot$ *par* ρ. Toute catégorie quotient
4 de $\mathcal{C}^\cdot$ est équivalente à une catégorie quotient de $\mathcal{C}^\cdot$ par une relation d'équivalence.

4° Soit U le foncteur de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{M}$ défini par

$$(\overline{\mathcal{C}}^\cdot, \Phi, \mathcal{C}^\cdot) \to (\overline{\mathcal{C}}^\cdot_0, \Phi_0, \mathcal{C}^\cdot_0),$$

où Φ_0 est la restriction de Φ à la classe $\mathcal{C}^\cdot_0$ des unités de $\mathcal{C}^\cdot$. $(\mathcal{C}^\cdot, \Psi^\cdot, \overline{\mathcal{C}}^\cdot)$ est une $(\mathcal{M}^s, U)$-injection si, et seulement si, l'application $f \to (\beta(f), \Psi^\cdot(f), \alpha(f))$,
5 où $f \in \overline{\mathcal{C}}$, est une équivalence de $\overline{\mathcal{C}}^\cdot$ sur la catégorie induite [3] $\Psi^{\cdot\bullet}_0(\mathcal{C}^\cdot)$.

3. Étude des catégories quotient. — Soit $\mathcal{G}_0$ la classe dont un élément $G^{\cdot}$ est une classe $G \in \mathcal{M}_0$ munie d'une loi de composition partiellement définie et vérifiant la condition :

(*e*) Tout $f \in G$ admet une et une seule unité à droite $\alpha(f)$ [resp. à gauche $\beta(f)$]. Si $g.f$ est défini, on a

$$\alpha(g) = \beta(f); \qquad \alpha(g.f) = \alpha(f) \qquad \text{et} \qquad \beta(g.f) = \beta(g).$$

La classe des unités de $G^{\cdot}$ sera notée $G^{\cdot}_0$. On associera à $G^{\cdot}$ le graphe orienté $[G^{\cdot}]$ dont les flèches sont les éléments f de G différents d'une unité, les sommets de f étant $\alpha(f)$ et $\beta(f)$.

Définition. — Un élément $G^{\cdot}$ de $\mathcal{G}_0$ sera appelé *graphe multiplicatif.*

Soit $\mathcal{G}$ la catégorie des triplets $(G^{\cdot}_1, \gamma, G^{\cdot})$, où $G^{\cdot} \in \mathcal{G}_0$, $G^{\cdot}_1 \in \mathcal{G}_0$, $(G_1, \gamma, G) \in \mathcal{M}$, tels que :

1° $\gamma(g.f) = \gamma(g).\gamma(f)$ si $g.f$ est défini;

2° $\gamma(G^{\cdot}_0) \subset (G_1)^{\cdot}_0$.

Soit $p_{\mathcal{G}}$ l'application

$$(G^{\cdot}_1, \gamma, G^{\cdot}) \to (G_1, \gamma, G)$$ 1

de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{M}$, et $\mathcal{G}_\gamma$ le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{G}$. $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{G}}, \mathcal{G}, \mathcal{G}_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes et $\mathcal{F}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{G}$.

La construction d'une catégorie à l'aide de générateurs et de relations (⁴) permet d'énoncer :

Proposition. — *Pour tout* $G^{\cdot} \in \mathcal{G}_0$, *il existe une* $\mathcal{F}$*-projection canonique* $(\tilde{G}^{\cdot}, \tilde{\gamma}, G^{\cdot}) \in \mathcal{G}$, *où* $\tilde{G}^{\cdot}$ *est une catégorie quotient de la catégorie libre des chemins* (⁴) *de* $[G^{\cdot}]$.

Soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie; soit ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$, compatible avec la loi de composition, c'est-à-dire telle que les conditions :

$$g.f \text{ et } g'.f' \text{ sont définis}, \qquad f \sim f' \quad \text{et} \quad g \sim g'$$

entraînent : $g.f \sim g'.f'$. Soit $\mathcal{C}/\rho$ la classe des classes d'équivalence $\tilde{f} = f$ modulo ρ, où $f \in \mathcal{C}$. Soit $(\mathcal{C}/\rho)^{\cdot}$ la classe $\mathcal{C}/\rho$ munie de la loi de composition, appelée *loi de composition quotient*, définie par

$$(\tilde{g}, \tilde{f}) \to (g'.f') \text{ modulo } \rho$$

si, et seulement si, il existe $g' \in \tilde{g}$ et $f' \in \tilde{f}$ tels que $g'.f'$ soit défini.

Supposons, de plus, que ρ vérifie la condition :

(*u*) Si $f \sim f'$, on a

$$\alpha(f) \sim \alpha(f') \qquad \text{et} \qquad \beta(f) \sim \beta(f').$$

Proposition. — *On a* $(\mathcal{C}/\rho)^{\cdot} \in \mathcal{G}_0$; *les unités à droite et à gauche de* $\tilde{f}$ *sont respectivement* $\widetilde{\alpha(f)}$ *et* $\widetilde{\beta(f)}$.

Soit $(\tilde{G}^{\cdot}, \tilde{\gamma}, (\mathcal{C}/\rho)^{\cdot})$ la $\mathcal{F}$-projection canonique associée à $(\mathcal{C}/\rho)^{\cdot}$.

Corollaire. — *Si $\tilde{\gamma}$ est une surjection, $\tilde{\mathrm{G}}^{\cdot}$ est une catégorie quotient de $\mathcal{C}^{\cdot}$.*

Théorème. — *Soient $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie et ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$. Pour qu'il existe une catégorie quotient $\tilde{\mathcal{C}}^{\cdot}$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$ par ρ, il faut et il suffit que ρ soit compatible avec la loi de composition et vérifie la condition* (u),
1 *et que $\tilde{\gamma}$ soit une bijection. Dans ce cas, $\tilde{\mathcal{C}}^{\cdot}$ est équivalente à $\tilde{\mathrm{G}}^{\cdot}$.*

Soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie et $\tilde{\mathcal{C}}^{\cdot}$ une catégorie quotient de $\mathcal{C}^{\cdot}$; soit ρ la relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ correspondante. En général, $(\mathcal{C}/\rho)^{\cdot}$ n'est pas une catégorie. Si $(\mathcal{C}/\rho)^{\cdot}$ est une catégorie, c'est-à-dire si $(\tilde{\mathrm{G}}^{\cdot}, \tilde{\gamma}, (\mathcal{C}/\rho)^{\cdot}) \in \mathcal{G}_{\cdot\cdot}$, nous dirons que $\tilde{\mathcal{C}}^{\cdot}$ est une *catégorie quotient de $\mathcal{C}^{\cdot}$ au sens strict* ([5]).

Proposition. — *Soient $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie et ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ compatible avec la loi de composition. Pour que $(\mathcal{C}/\rho)^{\cdot}$ soit une catégorie quotient de $\mathcal{C}^{\cdot}$ au sens strict, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1° $(\mathcal{C}/\rho)^{\cdot}$ *est une catégorie;*

2° *Pour tout $e \in \mathcal{C}^{\cdot}_{0}$, la classe $\tilde{e} = e$* modulo *ρ est une unité de $(\mathcal{C}/\rho)^{\cdot}$.*

Proposition. — *Soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ un groupoïde; soit ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ compatible avec la loi de composition. Pour que $(\mathcal{C}/\rho)^{\cdot}$ soit un groupoïde quotient de $\mathcal{C}^{\cdot}$ au sens strict, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}/\rho)^{\cdot}$ soit une catégorie.*

Les notions étudiées dans cette Note seront utilisées dans la théorie des
2 catégories structurées ([1]) et des ordres quotient.

(*) Séance du 5 juin 1963.

([1]) *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 1198, 1891, 2080 et 2280. Ces Notes sont développées dans *Catégories structurées* (act. polycopié; à l'impression dans *Ann. Éc. Norm. sup.*).

([2]) Nous considérons ici le cas des $(\mathcal{H}', p)$-surjections, la théorie des $(\mathcal{H}', p)$-injections étant étudiée dans *Sous-structures et catégories ordonnées* (act. polycopié; à l'impression dans *Fund. Math.*).

([3]) *Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle* (Ehresmann), III, Paris, 1961.

([4]) *Rev. Un. Mat. Argentina*, 20, 1960, p. 194; Maria Hasse, *Math. Nachrichten*, 22, Heft 5-6, Berlin, 1960.

([5]) Cette notion précise la notion considérée dans ([3]), p. 26, sous le nom de catégorie quotient.

(*Institut Henri Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie, Paris*, 5e.)

164253. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, p. 1577-1580 (18 août 1965). Groupe 1.

/82/

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Quasi-surjections et structures quasi-quotient.* Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Paul Montel.

Notion de quasi-surjection associée à un foncteur p, généralisant la notion de p-surjection. Cas particulier des structures quasi-quotient et théorème d'existence de structures quasi-quotient. Application à l'étude des catégories p-structurées quasi-quotient et au problème universel du plongement d'un graphe multiplicatif p-structuré dans une catégorie p-structurée.

Les notations sont celles de (1) (index terminologique et index des notations). Le signe $\sqsubset$ se lit « sous-structure ».

1. QUASI-SURJECTIONS. — Soient $p = (K^\cdot, \underline{p}, H^\cdot)$ un foncteur et K' une sous-classe de K telle que $p(H^\cdot_0) \subset K'$. Soit $\square\,(K', p)$ la classe des quadruplets (k, f', f, h) tels que

$$h \in H \quad \text{et} \quad (k, f', f, p(h)) \in \square\,(K^\cdot;\, K', K).$$

Soit $\boxminus\,(K', p)$ la catégorie obtenue en munissant $\square\,(K', p)$ de la loi de composition

$$((k_1, f'_1, f_1, h_1),\ (k, f', f, h)) \to (k_1 . k, f'_1, f, h_1 . h)$$

si, et seulement si, $f_1 = f'$ et $(h_1, h) \in H^\cdot \star H^\cdot$. En identifiant $h \in H$ avec $(p(h), \underline{p}\beta(h), \underline{p}\alpha(h), h)$, on identifie $H^\cdot$ à une sous-catégorie pleine de $\boxminus\,(K', p)$, et nous posons $M^\cdot = \boxminus\,(K', p)$. 1

DÉFINITION. — On dira que $j \in H$ est une (K', p)-*quasi-surjection* s'il existe un $(H, M^\cdot)$-projecteur (k, e, f, j). Une (K, p)-quasi-surjection est appelée une p-*quasi-surjection.*

THÉORÈME. — *Pour que* $j \in H$ *soit une* (K', p)-*surjection, il faut et il suffit que* $(e, e, p(j), j)$, *où* $e = \underline{p}\beta((j))$, *soit un* $(H, M^\cdot)$-*projecteur.*

COROLLAIRE 1. — *Soit* $j \in H$ *tel que* $p(j)$ *soit un épimorphisme de* $K^\cdot$. *Pour que* j *soit une* (K', p)-*surjection, il faut et il suffit que* j *soit une* (K', p)-*quasi-surjection.*

COROLLAIRE 2. — *Soit* (k, e, f, j) *un* $(H, M^\cdot)$-*projecteur. Pour qu'il existe une* p-*surjection* j' *telle que* $\alpha(j') = \alpha(j)$ *et* $p(j') = f$, *il faut (resp. faut et il suffit si* p_γ *est un foncteur d'hypermorphismes saturé) que* k *soit inversible dans* $K^\cdot$; *dans ce cas,* $\beta(j')$ *est isomorphe à* $\beta(j)$ *dans* $H^\cdot$.

2. STRUCTURES QUASI-QUOTIENT. — Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, H^\cdot)$ un foncteur, où $\mathcal{M}$ est une catégorie pleine d'applications. Si r est une relation d'équi-

valence sur C, nous désignons par $\tilde{r}$ la surjection canonique de C sur C/r. Soit $\mathcal{M}^q$ la classe de ces surjections canoniques. Posons $M^{\cdot} = \boxminus(\mathcal{M}^q, p)$.

Proposition. — *Si $(k, e, \tilde{r}, j)$ est un $(H, M^{\cdot})$-projecteur et si j est une p-surjection, alors $p(j)$ est une surjection.*

Soient H'' une sous-catégorie pleine de $H^{\cdot}$ et s une unité de $H^{\cdot}$. Soit r une relation sur $p(s)$ et soit r' la relation d'équivalence engendrée par r.

Définition. — On dira que s admet s' pour (H', p)-*structure quasi-quotient par r* s'il existe un $(H', M^{\cdot})$-projecteur $(k, e, \tilde{r}', j)$ tel que $s = \alpha(j)$ et $s' = \beta(j)$; dans ce cas, la relation d'équivalence r_j associée à $p(j)$ est appelée *relation d'équivalence p-compatible engendrée par r sur s*. Si, de plus, $p(j) = \tilde{r}_j$, on dit que s' est une (H', p)-*structure quotient faible de s par r.*

Exemple. — Pour que s' soit une $(H', H^{\cdot})$-projection de s, il faut et il suffit que s' soit une (H', p)-structure quasi-quotient de s par la relation identique.

Proposition. — *Si s' est une (H, p)-structure quotient faible de s par r, alors s' est une p-structure quotient de s par la relation d'équivalence p-compatible engendrée par r sur s.*

Exemple. — Si $C^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ et si r est une relation sur C, alors $C^{\cdot}$ admet pour $(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$-structure quasi-quotient par r la catégorie $N(C^{\cdot}/\bar{r})$, qui est la $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$-projection du graphe multiplicatif $C^{\cdot}/\bar{r}$ quotient de $C^{\cdot}$ par la relation d'équivalence $\bar{r}$ bicompatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par r.

3. Existence de structures quasi-quotient. — Soit $\hat{\mathcal{M}}$ une catégorie pleine d'applications et soit $P = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur. On dira que P est $\ulcorner$-*étalant* si, pour tout $s \in \hat{H}^{\cdot}_0$ et pour toute sous-classe non vide M de $P(s)$, il existe une P-sous-structure s' de s telle que $P(s') = M$.

Soit $X^{\cdot}$ une sous-catégorie de la catégorie $P^{\ulcorner}_i$ des P-monomorphismes et soit $H^{\cdot}$ une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^{\cdot}$.

Définition. — Soit $s \in \hat{H}^{\cdot}_0$ et soit $M \subset P(s)$. Soit $X(s, M)$ la classe des $j \in s.X.H^{\cdot}_0$ tels que $M \subset p(j)(A)$, où $A = p(\alpha(j))$. On dira que s' est une (X, H)-*sous-structure de s engendrée par* M s'il existe un élément $\hat{H}^{\cdot}$-minimal $\hat{j}$ de $X(s, M)$ tel que $\alpha(\hat{j}) = s'$.

Soit $\mathcal{M}$ une sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{M}}$ et soit $\overline{\mathcal{M}}$ la saturante de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$. On dira que P est $\ulcorner$-*engendrant pour* $(\mathcal{M}, X, H)$ si, pour tout $s \in X^{\cdot}_0$ et pour toute sous-classe $M \neq \emptyset$ de $P(s)$ telle que $M \in \overline{\mathcal{M}}_0$, il existe une (X, H)-sous-structure s' de s engendrée par M. Si P est $\ulcorner$-engendrant pour $(\mathcal{M}, P^{\ulcorner}_i, \overset{-1}{P}(\mathcal{M}))$, on dit qu'il est $\ulcorner$-*engendrant pour* $\mathcal{M}$.

Supposons que $\mathcal{M}_0$ et $\hat{\mathcal{M}}_0$ soient des univers et que $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$. Désignons par $\hat{\pi}$ l'application $\hat{\mathcal{M}}_0$-produit canonique dans $\hat{\mathcal{M}}$.

THÉORÈME. — *Supposons vérifiées les conditions :* P *est* $\hat{\pi}$*-compatible,* $X^{\cdot}$ *est stable par produits dans* $\hat{H}^{\cdot}$ *et* $\hat{H}^{\cdot}$ *admet un objet final* a *tel que* $a \in H \subset \overset{-1}{P}(\mathcal{M}) \in \mathcal{M}$; *on a* $p^{\ulcorner}_{i} \subset X$, *où* $p = (\mathcal{M}, \underline{p}^{\cdot}, H^{\cdot})$, *et* p *est résolvant à* 1
droite. Alors pour tout $s \in \overset{-1}{P}(\mathcal{M})_0$ *et pour toute relation* r *sur* $P(s)$, *il existe une* (H, P)*-structure quasi-quotient de* s *par* r, *si* P *est* $\ulcorner$*-engendrant pour* $(\mathcal{M}, X, H)$.

COROLLAIRE. — *Soit* P *un foncteur d'homomorphismes saturé* $\hat{\pi}$*-compatible et* $\ulcorner$*-étalant, et soit* $H = \overset{-1}{P}(\mathcal{M})$. *Si* $s \in H^{\cdot}_0$ *et si* r *est une relation sur* $P(s)$, *il existe une* (H, P)*-structure quotient faible de* s *par* r.

4. CATÉGORIES STRUCTURÉES QUASI-QUOTIENT. — Soient $P = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur d'homomorphismes saturé, résolvant à droite et $\hat{\pi}$-compatible. Supposons $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ et soit p la restriction de P à $H^{\cdot}$, où $H = \overset{-1}{P}(\mathcal{M})$. Nous supposons que $\hat{H}^{\cdot}$ admet un objet final $\bar{a}$ tel que $\bar{a} \in H$ et $P(\bar{a}) = \{a\}$.

Soit $\mathcal{K}'(p)_0$ la classe des couples $(C^{\cdot}, s)$ tels que

$$C^{\cdot} \in \mathcal{M}'_0, \quad s \in H^{\cdot}_0, \quad p(s) = C$$

et que $([C^{\cdot}], s)$ soit un graphe p-structuré (²). Soit $\mathcal{K}'(p)$ la catégorie dont les éléments sont les triplets $(\hat{C}^{\cdot}, h, C^{\cdot})$ tels que

$$h \in H, \qquad e = (C^{\cdot}, \alpha(h)) \in \mathcal{K}'(p)_0, \qquad e' = (\hat{C}^{\cdot}, \beta(h)) \in \mathcal{K}'(p)_0,$$

et que $p(h)$ définisse un néofoncteur de $C^{\cdot}$ vers $\hat{C}^{\cdot}$. Soit $\mathcal{F}(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}'(p)$ ayant pour unités les catégories $H^{\cdot}$-structurées (²). Soient $\hat{p}_{\mathcal{K}'}$ et $\hat{p}_{\mathcal{F}}$ les foncteurs projections canoniques de $\mathcal{K}'(p)$ et $\mathcal{F}(p)$ vers $\mathcal{M}$. On définit de même $\mathcal{K}'(P)$, $\mathcal{F}'(P)$, $\hat{P}_{\mathcal{K}'}$ et $\hat{P}_{\mathcal{F}}$. 2

DÉFINITION. — Soit $X_{\mathcal{F}}$ la classe des $\hat{P}_{\mathcal{F}}$-monomorphismes $\bar{j} = (\hat{C}^{\cdot}, j, C^{\cdot})$ tels que j soit un P-monomorphisme. On dit que P est $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$*-résolvant* si $\hat{P}_{\mathcal{F}}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $(\mathcal{M}, X_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}(p))$. 3

THÉORÈME. — *Soit* P *un foncteur* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$*-résolvant. Si* $e \in \mathcal{K}'(p)_0$ *et si* r *est une relation sur* $\hat{p}_{\mathcal{K}'}(e)$, *il existe une* $(\mathcal{F}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$*-structure quasi-quotient de* e *par* r. *En particulier,* $\mathcal{K}'(p)$ *est une catégorie à* $\mathcal{F}(p)$*-projections.*

COROLLAIRE. — *Si* P *est* $\ulcorner$*-étalant, si* $e \in \mathcal{K}'(p)_0$ *et si* r *est une relation sur* $\hat{p}_{\mathcal{K}'}(e)$, *il existe une* $(\mathcal{F}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$*-structure quasi-quotient de* e *par* r.

5. APPLICATIONS.

THÉORÈME. — *Soit* $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathcal{K}'(p)_0$. *Si* P *est* $\ulcorner$*-étalant, la* $(\mathcal{F}(p), \mathcal{K}'(p))$*-projection de* e *est de la forme* $(L[C^{\cdot}]^{\cdot}/r, \hat{s})$, *où* $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$ *est la catégorie libre des chemins du graphe* $[C^{\cdot}]$ *sous-jacent à* $C^{\cdot}$ *et où* r *est une relation d'équivalence dont la restriction à* $C^{\cdot}_0$ *est l'identité.*

Théorème. — *Supposons que* P *soit* $\ulcorner$*-engendrant pour* $\mathcal{M}$ *et vérifie la condition* (D) :

Si $s \in \mathrm{H}^{\cdot}_0$ *et si, pour tout entier* i, *on a*

$$s_i \ulcorner_{\mathrm{P}} s \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(s_i) \subset \mathrm{P}(s_{i+1}) \in \overline{\mathcal{M}},$$

il existe $\hat{s} \ulcorner_{\mathrm{P}} s$ *tel que* $\mathrm{P}(\hat{s}) = \bigcup \mathrm{P}(s_i)$.

Alors P *est* $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$*-résolvant.*

Le foncteur $p_{\mathcal{C}}$ (resp. p_{Ω}) projection de la catégorie $\mathcal{C}$ des applications continues (resp. Ω des applications ordonnées) vers $\mathcal{M}$ est $\ulcorner$-étalant. Le foncteur p^{ps} restriction de p_{Ω} à la catégorie des applications sous-inductives entre classes sous-préinductives ([2]), $p_{\mathcal{N}'}$ et $p_{\mathcal{F}}$ sont des restrictions de foncteurs $\ulcorner$-engendrants pour $\mathcal{M}$ et vérifient la condition (D). Par suite :

Théorème. — *Soit* $p = p_{\mathcal{C}}$, p_{Ω}, p^{ps}, $p_{\mathcal{F}}$ *ou* $p_{\mathcal{N}'}$. *Si* $e = (\mathrm{C}^{\cdot}, s) \in \mathcal{K}'(p)_0$ *et si* r *est une relation sur* C, *il existe une* $(\mathcal{K}'(p), \hat{p}_{\mathcal{F}})$*-structure quasi-quotient de* e *par* r. *Soit* $\mathcal{N}'(p)$ *la catégorie des morphismes entre graphes multiplicatifs* p*-structurés* ([2])*;* $\mathcal{K}'(p)$ *et* $\mathcal{N}'(p)$ *sont des catégories à* $\mathcal{F}(p)$*-projections* ([3]).

Corollaire 1. — *Soit* $(\mathrm{C}^{\cdot}, \mathrm{T}, \mathrm{T}')$ *un graphe multiplicatif topologique; la* $(\mathcal{F}(p_{\mathcal{C}}), \mathcal{N}'(p_{\mathcal{C}}))$*-projection de* $(\mathrm{C}^{\cdot}, \mathrm{T}, \mathrm{T}')$ *est de la forme* $(\mathrm{N}(\mathrm{C}^{\cdot}), \hat{\mathrm{T}})$,
1 *où* $\mathrm{N}(\mathrm{C}^{\cdot})$ *est la* $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$*-projection de* $\mathrm{C}^{\cdot}$.

Corollaire 2. — *Soit* $\hat{\mathcal{N}}'$ *la catégorie des néofoncteurs doubles et* $\hat{\mathcal{F}}$ *la sous-catégorie pleine de* $\hat{\mathcal{N}}'$ *formée des foncteurs doubles. Alors* $\hat{\mathcal{N}}'$ *est une catégorie à* $\hat{\mathcal{F}}$*-projections.*

(*) Séance du 2 août 1965.

(1) *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

(2) *Comm. Math. Helv.*, 17, 38, 1964, p. 219-283.

(3) Le cas où $p = p_{\Omega}$ généralise un théorème de S. Legrand (*Comptes rendus*, 260, 1965, p. 3255).

(Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5e.)

169985. — Imp. Gauthier-Villars & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 261, p. 1932-1935 (30 août 1965). Groupe 1.

ALGÈBRE HOMOLOGIQUE. — *Quasi-catégories structurées.*

Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Louis de Broglie.

Notion de quasi-catégorie p-structurée, généralisant celle de catégorie p-structurée; plongement « universel » d'un graphe dans une quasi-catégorie libre; la détermination des catégories p-structurées quasi-quotient d'un graphe multiplicatif structuré est ramenée à celle de structures quasi-quotient d'une quasi-catégorie structurée libre.

Cette Note fait suite à (1). Les notations sont celles de (1) et (2). Nous désignons par $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ deux catégories pleines d'applications telles que $\mathfrak{M}_0$ et $\hat{\mathfrak{M}}_0$ soient des univers et que $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$. Soit N l'ensemble des entiers ≥ 1.

1. QUASI-CATÉGORIES.

DÉFINITION. — On appelle *quasi-catégorie* un triplet $(C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ vérifiant les conditions :

1° $C^{\cdot}$ est une classe multiplicative et (C, β, α) un graphe orienté (2);

2° La classe $C^{\cdot}\star C^{\cdot}$ des couples composables de $C^{\cdot}$ est la classe produit fibré $\alpha \vee \beta$;

3° Si $(g, f) \in C^{\cdot}\star C^{\cdot}$, on a $\beta(g.f) = \beta(g)$ et $\alpha(g.f) = \alpha(f)$;

4° Si $(g, f) \in C^{\cdot}\star C^{\cdot}$ et $(h, g) \in C^{\cdot}\star C^{\cdot}$, alors $(h.g).f = h.(g.f)$.

Exemple. — Soit $[C] = (C, \beta, \alpha)$ un graphe orienté. Soit $\hat{L}[C]$ la classe de tous les chemins de $[C]$, dont les éléments sont les $x = (f_n, \ldots, f_1) \in C^n$ tels que

$$\alpha(f_{i+1}) = \beta(f_i) \quad \text{si} \quad 1 \leq i < n$$

(on identifie C à une sous-classe de $\hat{L}[C]$). Soient α' et β' les applications $x \to \alpha(f_1)$ et $x \to \beta(f_n)$ respectivement de $\hat{L}[C]$ sur la classe $[C]_0$ des sommets de $[C]$. Soit $\hat{L}[C]^{\cdot}$ la classe multiplicative dont la loi de composition est

$$((f'_m, \ldots, f'_1), (f_n, \ldots, f_1)) \to (f'_m, \ldots, f'_1, f_n, \ldots, f_1)$$

si, et seulement si, $\alpha(f'_1) = \beta(f_n)$. Alors $(\hat{L}[C]^{\cdot}, \beta', \alpha')$ est une quasi-catégorie, que nous notons $\hat{L}([C])$ et appelons *quasi-catégorie libre associée à* $[C]$.

Soit $D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ une quasi-catégorie; le graphe (C, β, α) est noté $[D]$. Pour que $C^{\cdot}$ soit une catégorie admettant α et β pour applications source et but, il faut et il suffit que $[D]_0$ soit formé d'unités de $C^{\cdot}$.

DÉFINITION. — On appelle *quasi-foncteur* un triplet (D_2, h, D_1) tel que $D_i = (C^{\cdot}_i, \beta_i, \alpha_i)$ soit une quasi-catégorie, où $i = 1, 2$, que $([D_2], h, [D_1])$ soit un homomorphisme entre graphes et $(C^{\cdot}_2, h, C^{\cdot}_1)$ un homomorphisme entre classes multiplicatives.

Soit $\mathcal{F}'_0$ la classe des quasi-catégories $(C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ telles que $C \in \mathcal{M}_0$. Soit $\mathcal{F}'$ la catégorie des quasi-foncteurs (D_2, h, D_1) pour lesquels $D_i \in \mathcal{F}'_0$; l'application $(D_2, h, D_1) \to (C_2, h, C_1)$, où $D_i = (C^{\cdot}_i, \beta_i, \alpha_i)$, définit un foncteur $p_{\mathcal{F}'}$ de $\mathcal{F}'$ vers $\mathcal{M}$. Nous identifions $\mathcal{F}'_0$ à la classe des unités de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}'$. Le foncteur $p_{\mathcal{F}'}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé, π-compatible et résolvant à droite. Les $p_{\mathcal{F}'}$-sous-structures de $D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \mathcal{F}'_0$, appelées *sous-quasi-catégories* de D, sont les triplets $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ tels que $\hat{C}^{\cdot}$ soit une sous-classe multiplicative stable de $C^{\cdot}$ et $(\hat{C}, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ un sous-graphe de [D].

Théorème. — *Soit* $D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \mathcal{F}'_0$ *et soit* $r(D)$ *la relation* (C, U, C) *telle que* U *soit la classe des couples*

$$(f.\alpha(f), f) \quad \textit{et} \quad (\beta(f).f, f), \qquad \textit{où} \quad f \in C.$$

Alors la classe multiplicative $C^{\cdot}/\bar{r}$, *quotient de* $C^{\cdot}$ *par la relation d'équivalence* $\bar{r}$ *compatible sur* $C^{\cdot}$ *engendrée par* $r(D)$, *est une catégorie, et c'est une* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-*projection de* D.

Corollaire 1. — *Si* [C] *est un graphe orienté,* $\hat{L}([C])$ *admet pour* $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$-*projection la catégorie libre* $L[C]^{\cdot}$ *des chemins (propres) de* [C].

Corollaire 2. — *Soit* $\hat{\mathcal{F}}'$ *la catégorie des quasi-foncteurs associée à* $\hat{\mathcal{M}}$ *et soit* $P_{\mathcal{F}'}$ *son foncteur projection vers* $\hat{\mathcal{M}}$. *Alors* $P_{\mathcal{F}'}$ *est* $\sqcap$-*engendrant pour* $\mathcal{M}$ *et vérifie la condition* (D) [1].

2. Quasi-catégories p-structurées. — Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ un foncteur
1 d'homomorphismes résolvant à droite et π-compatible. Soit $\mathcal{G}(p)$ la catégorie des morphismes entre graphes p-structurés [2] et soit $\hat{p}_{\mathcal{G}}$ son foncteur projection vers $\mathcal{M}$.

Définition. — On appelle *quasi-catégorie p-structurée* un couple (D, s), où $D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \mathcal{F}'_0$, où ([D], s) est un graphe p-structuré et $(C^{\cdot}, s)$ une classe multiplicative fortement p-structurée [3]. On appelle *quasi-foncteur p-structuré* un triplet (D_2, h, D_1) tel que

$$h \in H, \qquad (D_2, \underline{p(h)}, D_1) \in \mathcal{F}'$$

et que $(D_1, \alpha(h))$ et $(D_2, \beta(h))$ soient des quasi-catégories p-structurées.
Soit $\mathcal{F}'(p)_0$ la classe des quasi-catégories p-structurées.

Proposition. — *Soit* $([C], s) \in \mathcal{G}(p)_0$ *et* $n \in N$. *Il existe une p-sous-structure* $s^{\star n}$ *de* s^n *telle que* $p(s^{\star n})$ *soit la classe* $[C]^{\star n}$ *des chemins de* [C] *ayant n termes. Si* $(D, s) \in \mathcal{F}'(p)_0$ *et si* $[C] = [D]$, *il existe* $\bar{k}_n \in s.H.s^{\star n}$ *tel que* $p(\bar{k}_n)$ *soit l'application :*

2 $$(f_n, \ldots, f_1) \to f_n. \ldots .f_1. \qquad \textit{où} \quad (f_n, \ldots, f_1) \in [C]^{\star n}.$$

Soit $\mathcal{K}(p)$ la catégorie ayant pour éléments les $\bar{h} = (D_2, h, D_1)$, où

$$h \in H, \qquad (D_2, \underline{p(h)}, D_1) \in \mathcal{F}' \qquad \text{et} \qquad (([D_2], \beta(h)), h, ([D_1], \alpha(h))) \in \mathcal{G}(p).$$

Nous identifions $(D, s, D) \in \mathcal{K}(p)$ à (D, s), si $s \in H^{\cdot}_0$. Soit $\mathcal{F}'(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{K}(p)$ formée des quasi-foncteurs p-structurés. Soit $\hat{p}_{\mathcal{K}}$ le foncteur de $\mathcal{K}(p)$ vers $\mathcal{M}$ défini par $\bar{h} \to p(h)$, et soit $\hat{p}_{\mathcal{F}'}$ sa restriction à $\mathcal{F}'(p)$. On identifie la catégorie $\mathcal{F}(p)$ des foncteurs p-structurés à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}'(p)$.

Proposition. — *$\hat{p}_{\mathcal{K}}$ et $p_{\mathcal{F}'}$ sont des foncteurs d'homomorphismes π-compa-* 1
tibles résolvants à droite; si $\bar{j} = (D', j, D) \in \mathcal{K}(p)$ et si j est un p-monomorphisme, $\bar{j}$ est un $\hat{p}_{\mathcal{K}}$-monomorphisme.

3. Théorèmes de projections.

Définition. — Soient $K^{\cdot}$ une catégorie, K'' et K''' deux sous-catégories pleines de $K^{\cdot}$, et $K'' \subset K'$. On dira que j est un $(K'', K', K^{\cdot})$-*projecteur*, ou que $\beta(j)$ est une $(K'', K', K^{\cdot})$-*projection de* $\alpha(j) = e$, si $j \in K''_0 . K$ et si, pour tout $h \in K''_0 . K . e$, il existe un et un seul $h' \in K'$ tel que $h = h' . j$.

Soit Σ la classe des triplets $\bar{h} = (D, h, [C])$, où

$$D \in \mathcal{F}'_0 \quad \text{et} \quad (([D], \beta(h)), h, ([C], \alpha(h))) \in \mathcal{G}(p),$$

et soit $\hat{p}_{\Sigma} : \bar{h} \to p(h)$, si $\bar{h} \in \Sigma$. Soit $\mathcal{L}(p)$ la catégorie admettant $\mathcal{K}(p) \cup \mathcal{G}(p) \cup \Sigma$ pour classe sous-jacente, $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{K}(p)$ pour sous-catégories pleines et telle que l'application somme de $\hat{p}_{\mathcal{G}}$, de $\hat{p}_{\mathcal{K}}$ et de $\hat{p}_{\Sigma}$ définisse un foncteur fidèle $\hat{p}_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}(p)$ vers $\mathcal{M}$.

Théorème. — *Soit $e = ([C], s) \in \mathcal{G}(p)_0$. Si $(s^{\star n})_{n \in N}$ admet une p-somme $\hat{s}$* (i. e. *s'il existe une somme naturalisée $(\hat{s}, (v^n)_{n \in N})$ dans $H^{\cdot}$ vérifiant $p(v^n) \in \mathcal{M}^{\cdot}$), alors $(\hat{L}([C]), v^1, [C])$ est un $(\mathcal{F}'(p), \mathcal{K}(p), \mathcal{L}(p))$-projecteur de source e, de but $\hat{L}(e) = (\hat{L}([C]), \hat{s})$.*

Corollaire. — *Soit p l'un des foncteurs $p_{\mathcal{C}}$, p_{Ω}, p^{ps}, $p_{\mathcal{F}}$ ou $p_{\mathcal{M}'}$.*
Si $e \in \mathcal{G}(p)_0$, alors $\hat{L}(e)$ est une $(\mathcal{F}'(p), \mathcal{L}(p))$-projection de e. 2

Nous supposons désormais que p est la restriction d'un foncteur d'homomorphismes $P = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ résolvant à droite et $\hat{\pi}$-compatible et que $H = \overset{-1}{P}(\mathcal{M})$. Nous posons $\mathcal{U}(p) = \mathcal{F}'(p)$ ou $\mathcal{K}(p)$.

Théorème. — *Si* P *est $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$-résolvant* [*resp. si* P *est un foncteur d'homomorphismes saturé $\ulcorner$-étalant, resp. saturé $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$ et vérifiant la condition* (D)], *si $e \in \mathcal{U}(p)_0$ et si r est une relation sur $\hat{p}_{\mathcal{K}}(e)$, il existe une $(\mathcal{F}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}})$-structure quasi-quotient de e par r. En particulier, $\mathcal{U}(p)$ est une catégorie à $\mathcal{F}(p)$-projections.*

4. Catégories p-structurées quasi-quotient. — Soit $C^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0$; nous désignons par $\hat{r}(C^{\cdot})$ la relation $(\hat{L}[C], \hat{A}, \hat{L}[C])$, où $\hat{A}$ est la classe des couples

$$((g, f), g . f) \quad \text{tels que} \quad (g, f) \in C^{\cdot} \star C^{\cdot}.$$

Si $r = (C, B, C)$ est une relation, nous posons

1 $$r \cup \hat{r}(C^\cdot) = (\hat{L}[C], \hat{A} \cup B, L[C]).$$

2 THÉORÈME. — *Soient $e' = (C^\cdot, s) \in \mathcal{K}'(p)_0$, $e = ([C^\cdot], s)$ et $r^\cdot$ une relation sur* C. *S'il existe une $(\mathcal{F}'(p), \mathcal{K}(p), \mathcal{L}(p))$-projection $\hat{L}(e) = (\hat{L}([C]), \hat{s})$ de e, pour qu'il existe une $(\mathcal{F}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}})$-structure quasi-quotient $\hat{e}$ de e' par r, il faut et il suffit que $\hat{L}(e)$ admette $\hat{e}$ pour $(\mathcal{F}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}})$-structure quasi-quotient par $r \cup \hat{r}(C^\cdot)$.*

COROLLAIRE. — *Supposons que p soit un foncteur à p-sommes dénombrables. Si* P *est $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$-résolvant et si $e' = (C^\cdot, s) \in \mathcal{K}'(p)_0$, alors e' admet une $(\mathcal{F}(p), \mathcal{K}'(p))$-projection qui est une $(\mathcal{F}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}})$-structure quasi-quotient de $\hat{L}(e)$ par $\hat{r}(C^\cdot)$, où $e = ([C^\cdot], s)$. Toute catégorie p-structurée est une $(\mathcal{F}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}})$-structure quotient faible d'une quasi-catégorie p-structurée libre.*

THÉORÈME. — *Soit p un foncteur d'homomorphismes saturé $\ulcorner$-étalant et à sommes dénombrables (resp. soit $p = p_{\mathcal{N}'}$). Supposons $e' = (C^\cdot, s) \in \mathcal{K}'(p)_0$ et $e = ([C^\cdot], s)$. Soit $r = (C, A, C)$ une relation compatible avec α et β et telle que*

$$(x, y) \in A \cap C^\cdot_0 \times C^\cdot_0 \quad \textit{entraîne } x = y.$$

Alors e' admet une $(\mathcal{F}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$-structure quasi-quotient par r, qui est la $(\mathcal{F}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}})$-structure quotient faible de $\hat{L}(e)$ par $r \cup \hat{r}(C^\cdot)$.

COROLLAIRE. — *Si les conditions du théorème sont vérifiées et si $e' \in \mathcal{F}(p)_0$, il existe une $\hat{p}_{\mathcal{F}}$-structure quotient faible de e' par r.*

5. QUOTIENT D'UNE CATÉGORIE p-STRUCTURÉE PAR UNE SOUS-CATÉGORIE. — Soit J_p l'idéal de $\mathcal{F}(p)$ formé des foncteurs p-structurés tels
3 que le foncteur sous-jacent appartienne à l'idéal $J_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$. Si $C^\cdot$ est une catégorie et $G^\cdot$ une sous-catégorie de $C^\cdot$, posons $r_G = (C, A_G, C)$, où A_G est la classe des couples $(g, \alpha(g))$ tels que $g \in G$.

4 THÉORÈME. — *Soit $e = (C^\cdot, s) \in \mathcal{F}(p)_0$ et $e_1 = (G^\cdot, s_1)$ une $\hat{p}$-sous-*
5 *structure de e. Pour qu'il existe une $(J_p, \hat{p}_{\mathcal{F}})$-structure quotient $\hat{e}$ de e par e_1 (appelée* catégorie p-structurée quotient de e par $G^\cdot$*), il faut et il suffit que e admette $\hat{e}$ pour $\hat{p}_{\mathcal{F}}$-structure quotient faible par r_G.*

COROLLAIRE. — *Si $(C^\cdot, T)$ est une catégorie topologique et $G^\cdot$ une sous-*
6 *catégorie propre de $C^\cdot$, il existe une catégorie topologique quotient de $(C^\cdot, T)$ par $G^\cdot$.*

Les résultats précédents permettent d'étudier le problème de l'expan-
7 sion p-structurée d'un foncteur ou d'un néofoncteur p-structuré.

(*) Séance du 18 août 1965.
(1) *Comptes rendus*, 261, 1965, p. 1577.
(2) *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.
(3) *Comm. Math. Helv.*, 17, 38, 1964, p. 219-283.

(*Institut Henri Poincaré*, 11, *rue Pierre-Curie, Paris*, 5e.)

170077. — Imp. GAUTHIER-VILLARS & Cie, 55, Quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Imprimé en France.

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 80, 1963, p. 349 à 426.

CATÉGORIES STRUCTURÉES

PAR M. CHARLES EHRESMANN.

INTRODUCTION.

Cet article est la première partie d'un travail sur la notion de catégories structurées et d'espèces de structures structurées. Les principaux résultats sont résumés dans une série de Notes à l'Académie des Sciences [3 *e*].

Le premier paragraphe débute par un court rappel sur les notions d'espèces de structures et de catégories d'homomorphismes. Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{S}$ contienne le groupoïde des éléments inversibles de la catégorie $\mathcal{H}$ et que $\mathcal{C}$ soit, de plus, munie d'une structure de catégorie inductive. Nous définissons les sous-structures d'une structure de $\mathcal{H}$. Cette notion précise celle de sous-objet d'un objet d'une catégorie quelconque, en utilisant le fait que $\mathcal{H}$ est une catégorie d'homomorphismes et $\mathcal{C}$ une catégorie inductive; elle conduit à 1
munir $\mathcal{H}$ d'une structure de catégorie ordonnée, à laquelle se rattachent les principaux résultats de ce paragraphe.

Soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ une catégorie d'homomorphismes à produits finis, au-dessus d'une catégorie $\mathcal{M}$ d'applications; nous définissons au début du paragraphe II les catégories $\mathcal{H}$-structurées [ou plus précisément 2
$\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurées]. Ensuite nous donnons un certain nombre d'exemples : catégories topologiques et catégories différentiables [3 *b*]; catégories doubles qui interviennent en particulier dans la théorie des transformations naturelles entre foncteurs [3 *d*]; catégories structurées par des ordres, plus spécialement catégories et groupoïdes inductifs [3 *c*], etc. Ces exemples, que j'ai été amené à considérer dans l'étude des espaces

fibrés, des espaces feuilletés, des prolongements de variétés différentiables, des structures locales en général, sont à l'origine de ce travail. La fin du paragraphe II contient une série de théorèmes généraux :

Les foncteurs $\mathcal{H}$-structurés forment une catégorie d'homomorphismes au-dessus d'une catégorie de foncteurs, et au-dessus de $\mathcal{M}$; elle est à produits finis et résolvante à droite.

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie $\mathcal{H}$-structurée; si $\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot}$ et $\bar{s}$ une sous-structure de s telle que $p(\bar{s}) = \overline{\mathcal{C}}$, alors $(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s})$ est une catégorie $\mathcal{H}$-structurée.

Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\mathcal{H}$-structurée, les catégories des trios et des quatuors de $\mathcal{C}^{\cdot}$ sont des catégories $\mathcal{H}$-structurées.

Tous ces théorèmes utilisent l'hypothèse supplémentaire : $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$
1 est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite (c'est-à-dire $\mathcal{H}$ contient « assez » de sous-structures).

2 La deuxième partie de cet article (à paraître prochainement) contiendra la théorie des espèces de structures structurées; nous montrerons comment le procédé d'élargissement complet d'un groupoïde inductif peut être généralisé à des espèces de structures structurées. Ensuite nous donnerons des applications de toutes ces notions à des problèmes plus particuliers.

I. — Catégories d'homomorphismes et sous-structures.

1. Conventions. — Une catégorie sera en général représentée par le symbole désignant la classe support de la catégorie en y adjoignant en haut à droite le symbole de la loi de composition faisant de cette classe
3 une catégorie. Par exemple : $\mathcal{C}^{\perp}$, $\mathcal{C}_1^{\perp}$, $\overline{\mathcal{C}}^{\top}$ (resp. $\mathcal{C}^{\cdot}$, $\mathcal{C}_1^{\cdot}$, $\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}$), ..., désigneront les catégories obtenues en munissant la classe $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\overline{\mathcal{C}}$, ... de la loi de composition $\perp$ (resp. $.$). La classe des unités d'une catégorie sera désignée par le symbole représentant la catégorie, en y adjoignant en bas et à droite l'indice $_0$; par exemple : $\mathcal{C}_0^{\perp}$, $(\mathcal{C}_1^{\perp})_0$, $\overline{\mathcal{C}}_0^{\perp}$, ... Si une classe d'objets est associée naturellement à la catégorie (par exemple les classes dans une catégorie d'applications de classe dans classe), nous identifierons les unités
4 aux objets correspondants sans le mentionner.

Soit $\mathcal{C}^{\perp}$ une catégorie. Les applications source et but qui associent à un élément f de $\mathcal{C}^{\perp}$ son unité à droite et son unité à gauche respectivement seront notées $\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$. La classe des couples (g, f) tels que le composé $g \perp f$ soit défini [c'est-à-dire tels que $\alpha^{\perp}(g) = \beta^{\perp}(f)$] sera désignée par le symbole $\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; l'application

$$(g, f) \to g \perp f, \qquad \text{où} \quad (g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp},$$

par le symbole $\varkappa^{\perp}$.

Pour simplifier les notations et si aucune confusion n'est possible, nous représenterons une catégorie par le même symbole que la classe support; dans ce cas, il sera sous-entendu que la loi de composition est désignée par . ; ainsi on écrira $\mathcal{C}$ au lieu de $\mathcal{C}^{\cdot}_{.}$. De même, on écrira aussi $\mathcal{C}_0$, α et β au lieu de $\mathcal{C}^{\cdot}_0$, $\alpha^{\cdot}$ et $\beta^{\cdot}$.

Soient $\overline{\mathcal{C}}^{\perp}$ et $\mathcal{C}^{\perp}$ deux catégories; le mot foncteur signifiera toujours foncteur covariant. Un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $\overline{\mathcal{C}}^{\perp}$ sera désigné, soit par un triplet $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\perp})$, où F est l'application correspondante, soit par la seule lettre F. La restriction de F à la classe $\mathcal{C}^{\perp}_0$, considérée comme application de $\mathcal{C}^{\perp}_0$ dans $\overline{\mathcal{C}}^{\perp}_0$, sera notée F_0.

2. Rappel sur les espèces de structures [3 *a*]. — La notion d'espèce de structures étant essentielle dans cet article, nous allons en rappeler la définition et les principales propriétés.

Définition 1. — *On dit qu'une catégorie* $\mathcal{C}$ *est* une catégorie d'opérateurs *sur une classe* Σ_0 *si l'on a défini une loi de composition :* $(f, z) \to fz$ *pour certains couples* $(f, z) \in \mathcal{C} \times \Sigma_0$ *telle que* $fz \in \Sigma_0$ *et que les axiomes suivants soient vérifiés :*

(1) *Associativité : Si* $g(fz)$ *ou* $(g.f)z$ *est défini, ces deux éléments sont définis et égaux :*

$$g(fz) = (g.f)\,z;$$

(2) *Si* $g.f$ *et* fz *sont définis, alors* $g(fz)$ *est défini;*

(3) *Soit* $e \in \mathcal{C}_0$*; si* ez *est défini, on a* $ez = z$;

(4) *a. Pour tout* $z \in \Sigma_0$, *il existe au moins un* $f \in \mathcal{C}$ *tel que* fz *soit défini; b. Pour tout* $f \in \mathcal{C}$, *il existe au moins un* $z \in \Sigma_0$ *tel que* fz *soit défini.*

Ces axiomes entraînent que, pour tout $z \in \Sigma_0$, il existe un et un seul $e \in \mathcal{C}_0$ tel que ez soit défini; on obtient ainsi une application $p_0 : z \to e$ de Σ_0 dans $\mathcal{C}_0$; on dira que z est une *structure* sur $p_0(z)$.

Définition 2. — *Soient* Σ_0 *une classe et* $\mathcal{C}$ *une catégorie; on dit que* Σ_0 *est une* espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$ *si l'on s'est donné une sous-catégorie* $\mathcal{C}_1$ *de* $\mathcal{C}$ *qui soit une catégorie d'opérateurs sur* Σ_0*; soit* p_0 *l'application correspondante de* Σ_0 *dans* $\mathcal{C}_0$*; on dira aussi que* $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ est une espèce de structures. *Si, de plus,* $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$, *on dira que* $[\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0]$ *est* une espèce de structures sur $\mathcal{C}$.

Soit $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ une espèce de structures. Soit Σ la classe des couples $(f, z) \in \mathcal{C} \times \Sigma_0$ tels que fz soit défini, c'est-à-dire tels que $\alpha(f) = p_0(z)$. 1¶
Munie de la loi de composition :

$$(f', z').(f, z) = (f'.f, z) \quad \text{si, et seulement si,} \quad z' = fz,$$

Σ est une catégorie, appelée *catégorie des hypermorphismes associée* à l'espèce de structures $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$. La classe des unités de Σ s'identifie à Σ_0 en identifiant (e, z) à z. L'application p_0 se prolonge en un foncteur $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ vérifiant la propriété suivante :

(E) Pour tout $h \in \Sigma$ et tout $z \in \Sigma_0$ tel que

$$p_0(z) = p_0(\alpha(h)),$$

il existe un et un seul $h' \in \Sigma$ tel que

$$p(h') = p(h) \quad \text{et} \quad \alpha(h') = z.$$

L'espèce de structures $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ sera aussi désignée par le symbole $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$.

Inversement, soient $\mathcal{C}$ et Σ deux catégories. Soit $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ un foncteur vérifiant la condition (E); on dira que Σ est une *catégorie au-dessus de* $\mathcal{C}$ *relativement à* p. On montre [3 a] que $p(\Sigma)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et que l'application

$$h \to (p(h), \alpha(h))$$

permet d'identifier Σ à la catégorie des hypermorphismes associée à l'espèce de structures $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$ dans laquelle la loi de composition est définie par

$$(f, z) \to \beta(h)$$

si, et seulement si, il existe

$$h \in \Sigma, \quad f = p(h) \quad \text{et} \quad z = \alpha(h).$$

3. Espèces de structures dominées par une catégorie. — Nous désignerons par $\mathcal{M}_0$ une classe de classes contenant avec une classe toutes
1+ ses sous-classes. $\mathcal{M}_0$ s'identifie à la classe des unités de la catégorie $\mathcal{M}$ dont les éléments sont les triplets (M', f, M) tels que $M \in \mathcal{M}_0$, $M' \in \mathcal{M}_0$ et que f soit une surjection de M sur une sous-classe de M', la loi de composition étant définie par

$$(M'', f', M'_1) . (M', f, M) = (M'', f'f, M) \quad \text{si, et seulement si,} \quad M'_1 = M',$$

où $f'f$ désigne la surjection :

$$x \to f'(f(x)) \quad \text{pour tout } x \in M.$$

Si $\bar{f} = (M', f, M)$, nous noterons aussi $f(x)$ par $\bar{f}(x)$.

Soit $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ une espèce de structures telle que $\overset{-1}{p}(e)$ appartienne à $\mathcal{M}_0$ pour tout $e \in p_0(\Sigma_0)$. Soit

$$f \in p(\Sigma), \quad e = \alpha(f) \quad \text{et} \quad e' = \beta(f).$$

Posons

$$F(f) = (\overset{-1}{p}(e'), \bar{f}, \overset{-1}{p}(e)) \in \mathcal{M},$$

où

$$\tilde{f}(z) = fz \qquad \text{pour tout } z \text{ tel que } \quad p(z) = e;$$

$F(e)$ sera identifié avec $\overset{-1}{p}(e)$. Si f est un élément inversible de $p(\Sigma)$, l'application $\tilde{f}$ est une bijection de $F(e)$ sur $F(e')$. L'application $F : f \to F(f)$ pour tout $f \in p(\Sigma)$ est un foncteur de $\alpha(F) = p(\Sigma)$ vers $\mathcal{M}$ vérifiant l'axiome :

(A) Soient $e \in \alpha(F)_0$ et $e' \in \alpha(F)_0$; on a

$$F(e) \neq \emptyset \quad \text{(ensemble vide)};$$

si $e \neq e'$, on a

$$F(e) \cap F(e') = \emptyset.$$

De plus, le couple $(\mathcal{C}, F)$ détermine entièrement $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$.

Inversement, soit $(\mathcal{C}, F)$ un couple tel que F soit un foncteur d'une sous-catégorie $\alpha(F)$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{M}$ vérifiant l'axiome (A). On montre [3 *a*] que la classe Σ_0 réunion des classes $F(e)$, où $e \in \alpha(F)_0$, est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{C}$, dans laquelle la loi de composition est définie par

$$(f, z) \to F(f)\,(z) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad z \in F(\alpha(f)).$$

Nous dirons que $(\mathcal{C}, F)$ *est un couple définissant une espèce de structures*, à savoir l'espèce de structures Σ_0 ainsi construite.

Remarques. — 1° Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $\alpha(F)$ une sous-catégorie et $(\mathcal{M}, F, \alpha(F))$ un foncteur. Soit $\overline{F}$ le foncteur qui associe à $f \in \alpha(F)$ l'application

$$(\alpha(f), z) \to (\beta(f), F(f)\,(z)), \qquad \text{où} \quad z \in F(\alpha(f)).$$

Le couple $(\mathcal{C}, \overline{F})$ définit l'espèce de structures $(\mathcal{C}, p_0, \Sigma_0)$, où Σ_0 est la classe des couples (e, z) tels que $e \in \alpha(F)_0$ et $z \in F(e)$, et

$$p_0(e, z) = e.$$

2° Soit $(\mathcal{C}, F)$ un couple définissant une espèce de structures $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ tel que $\alpha(F)$ contienne $f \in \mathcal{C}$ si $\alpha(f) \in \alpha(F)$; ceci équivaut à dire qu'on s'est donné une loi de composition entre la catégorie $\mathcal{C}$ et la classe Σ_0 vérifiant les axiomes 1, 2, 3, 4 *a*, de la définition 1. On peut prolonger F en un foncteur $(\mathcal{M}, \overline{F}, \mathcal{C})$ défini par

$$\begin{array}{ll} \overline{F}(f) = F(f) & \text{pour tout } \ f \in \alpha(F), \\ \overline{F}(e) = \emptyset & \text{pour tout } \ e \in \mathcal{C}_0, \ \ e \notin \alpha(F)_0, \\ \overline{F}(f') = (\overline{F}(\beta(f')), \emptyset, \emptyset) & \text{pour tout } \ f' \notin \alpha(F). \end{array}$$

1+

3° Soit $\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}$ une catégorie; le triplet $[\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, \beta, \mathcal{C}]$ est une espèce de structures pour la loi de composition .; soit $e \in \mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}_0$; le triplet $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, \beta, \overset{-1}{\alpha}(e))$ est une sous-espèce de structures [3 *a*] de $[\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, \beta, \mathcal{C}]$. 2

Soient $(\mathcal{C}^{\cdot}, F_e)$ le couple définissant l'espèce de structures $(\mathcal{C}^{\cdot}, \beta, \overset{-1}{\alpha}(e))$ et $\overline{F}_e$ le foncteur associé à F_e par la remarque 2. Un foncteur $(\mathcal{M}, G, \mathcal{C}^{\cdot})$ est dit représentable [2] s'il existe un $e \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ tel que G et $\overline{F}_e$ se déduisent l'un de l'autre par une équivalence naturelle. A tout couple $(\mathcal{C}, F)$ définissant une espèce de structures $[\mathcal{C}, p, \Sigma]$, on peut associer un foncteur représentable $\overline{F}$ de la manière suivante :

Soit a un élément quelconque n'appartenant pas à $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}'_1$ la classe des couples (z, a), où $z \in \Sigma_0$. Soit $\mathcal{C}'$ la classe réunion de $\mathcal{C}$, $\{a\}$ et $\mathcal{C}'_1$. Cette classe est une catégorie pour la loi de composition

$$(\gamma', \gamma) \rightarrow \gamma' \cdot \gamma$$

si, et seulement si, une des conditions suivantes est vérifiée :

(1) $\gamma \in \mathcal{C}$, $\gamma' \in \mathcal{C}$, $\alpha(\gamma') = \beta(\gamma)$. Alors $\gamma' . \gamma$ est le composé de γ' et γ dans $\mathcal{C}$;

(2) $\gamma' \in \mathcal{C}$, $\gamma = (z, a)$, $z \in F(\alpha(\gamma'))$; alors

$$\gamma' \cdot \gamma = (\gamma' z, a);$$

(3) $\gamma' = (z, a)$ et $\gamma = a$; alors

$$\gamma' \cdot \gamma = (z, a).$$

1 La remarque 2 permet de prolonger F en un foncteur $(\mathcal{M}, \overline{F}, \mathcal{C}')$; ce foncteur $\overline{F}$, identique à $(\mathcal{M}, \overline{F}_a, \mathcal{C}')$, est représentable.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $(\mathcal{M}, \gamma, \mathcal{H})$ un foncteur.

DÉFINITION 3. — *On appellera* espèce de structures dominée par $(\gamma, \mathcal{H})$ *un couple* $(\mathcal{C}, F)$ *tel que* $(\mathcal{H}, F, \alpha(F))$ *soit un foncteur et que* $(\mathcal{C}, \gamma F)$ *définisse une espèce de structures; l'espèce de structures définie par* $(\mathcal{C}, \gamma F)$ *sera appelée* espèce de structures sous $(\mathcal{C}, F)$.

2+ Nous reviendrons plus tard sur la notion d'espèce de structures dominée par une catégorie (§ III et IV). Pour l'instant, nous allons seulement en indiquer des cas particuliers.

Soit $\mathcal{F}$ la catégorie de tous les foncteurs $(\overline{\mathcal{S}}, G, \mathcal{S}^{\cdot})$ tels que $(\overline{\mathcal{S}}, G, \mathcal{S}) \in \mathcal{M}$; soit $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ le foncteur défini par

$$p_{\mathcal{F}}: \ (\overline{\mathcal{S}}^{\cdot}, G, \mathcal{S}^{\cdot}) \rightarrow (\overline{\mathcal{S}}, G, \mathcal{S}).$$

DÉFINITION 4. — *Une espèce de structures dominée par* $(p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ *sera*
3+ *appelée* espèce de morphismes.

Soit $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ une espèce de structures. Considérons les conditions suivantes :

a. $(\mathcal{C}, p, \Sigma)$ est l'espèce de structures sous une espèce de morphismes $(\mathcal{C}, F)$.

b. b_1 : Pour tout $e \in p(\Sigma_0)$, la classe $\overset{-1}{p}(e)$ est munie d'une structure de catégorie $(\overset{-1}{p}(e))^{\perp}$, que nous noterons $\mathrm{F}(e)$;

b_2 : Soit $f \in p(\Sigma)$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f')$; alors $(\mathrm{F}(e'), \tilde{f}, \mathrm{F}(e))$ est un foncteur $\mathrm{F}(f)$.

c. c_1 : $(\Sigma_0)^{\perp}$ est une catégorie;

c_2 : Les conditions $(z', z) \in (\Sigma_0)^{\perp} \star (\Sigma_0)^{\perp}$ et $(f, z' \perp z) \in \Sigma$ entraînent

$$(f, z) \in \Sigma, \qquad (f, z') \in \Sigma \qquad \text{et} \qquad f(z' \perp z) = fz' \perp fz;$$

c_3 : Si $z_0 \in (\Sigma_0)^{\perp}_0$ et $(f, z_0) \in \Sigma$, on a

$$fz_0 \in (\Sigma_0)^{\perp}_0.$$

PROPOSITION 1. — *Les conditions a, b et c sont équivalentes.* 1

Démonstration. — Les conditions *a* et *b* sont équivalentes par définition. Si elles sont vérifiées, la catégorie $(\Sigma_0)^{\perp}$ somme des catégories $\mathrm{F}(e)$, où $e \in p(\Sigma_0)$, vérifie la condition *c*. Inversement, supposons la condition *c* vérifiée. Soient $z \in \Sigma_0$ et $z' \in \Sigma_0$. Si $z' \perp z$ est défini, $p(z' \perp z)(z' \perp z)$ est défini et, d'après c_2, on a

$$p(z' \perp z) = p(z') = p(z);$$

en particulier,

$$p(\alpha^{\perp}(z)) = p(\beta^{\perp}(z)) = p(z);$$

donc $\overset{-1}{p}(e)$ est une sous-catégorie de $(\Sigma_0)^{\perp}$ pour tout $e \in p(\Sigma_0)$. Soit $f \in p(\Sigma)$ tel que $\alpha(f) = e$; les conditions c_2 et c_3 signifient que l'application $\tilde{f}$ est un foncteur de $\overset{-1}{p}(e)$ vers $\overset{-1}{p}(\beta(f))$. Par suite, *b* est vérifié.

COROLLAIRE. — *Si l'on suppose les conditions c_1 et c_2 vérifiées et si $p(\Sigma)$ (resp. $\Sigma^{\perp}_0$) est un groupoïde, la condition c_3 est aussi satisfaite.*

Démonstration. — Les conditions $(f, z_0) \in \Sigma$ et $z_0 \in (\Sigma_0)^{\perp}_0$ entraînent

$$fz_0 = f(z_0 \perp z_0) = fz_0 \perp fz_0.$$

Si $(\Sigma_0)^{\perp}$ est un groupoïde, il en résulte $fz_0 \in (\Sigma_0)^{\perp}_0$. Supposons que $p(\Sigma)$ soit un groupoïde; de la suite d'égalités

$$f^{-1}(fz_0) = f^{-1}(fz_0 \perp \alpha^{\perp}(fz_0)) = (f^{-1}.f)\, z_0 \perp f^{-1}(\alpha^{\perp}(fz_0)) = f^{-1}(\alpha^{\perp}(fz_0))$$

on déduit

$$fz_0 = \alpha^{\perp}(fz_0) \in (\Sigma_0)^{\perp}_0,$$

donc c_3 est vérifié.

Soit A une classe munie d'une relation d'ordre $<$; la classe des couples (z', z), où $z < z'$, est une catégorie pour la loi de composition entre couples

$$(z'', z'_1) \perp (z', z) = (z'', z) \quad \text{si, et seulement si,} \quad z'_1 = z'.$$

Inversement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie telle que deux éléments f et f' de $\mathcal{C}$ ayant même ensemble d'unités dans $\mathcal{C}$ soient identiques, la donnée de $\mathcal{C}$ définit sur $\mathcal{C}_0$ la relation d'ordre :

$z < z'$ si, et seulement si, il existe $f \in \mathcal{C}$ tel que

$$z = \alpha(f) \quad \text{et} \quad z' = \beta(f).$$

Nous dirons que la catégorie $\mathcal{C}$ *définit* alors *un ordre* sur $\mathcal{C}_0$.

Soit Ω_0 la classe des classes ordonnées $(A, <)$, où $A \in \mathcal{M}_0$; soit $\tilde{\Omega}$ la catégorie des triplets $((A', <), h, (A, <))$, où

$$(A, <) \in \Omega_0, \qquad (A', <) \in \Omega_0$$

et où h est une application de A dans A' compatible avec les ordres de A et A'. Soit ω l'application

$$((A', <), h, (A, <)) \to (A', h, A);$$

$(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega})$ est un foncteur.

Définition 5. — *Une espèce de structures* $(\mathcal{C}, F)$ *dominée par* $(\omega, \tilde{\Omega})$ *sera appelée* espèce de structures ordonnée; *si de plus* $\mathcal{C}$ *définit un ordre sur* $\mathcal{C}_0$, *nous dirons que* $(\mathcal{C}, F)$ *est une* espèce de structures bi-ordonnée.

Soit $((\bar{A}, <), h, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$; soit $\mathcal{A}$ (resp. $\bar{\mathcal{A}}$) la catégorie de couples définissant l'ordre de A (resp. de $\bar{A}$); soit $\bar{h}$ l'application

$$(z', z) \to (h(z'), h(z)), \qquad \text{où} \quad (z', z) \in \mathcal{A};$$

$(\bar{\mathcal{A}}, \bar{h}, \mathcal{A})$ est un foncteur et l'application η :

$$((\bar{A}, <), h, (A, <)) \to (\bar{\mathcal{A}}, \bar{h}, \mathcal{A})$$

est une équivalence de $\tilde{\Omega}$ sur une sous-catégorie pleine $\hat{\Omega}$ de $\mathcal{F}$ dont les unités sont des catégories $\mathcal{S}$ définissant un ordre sur $\mathcal{S}_0$. L'application

$$(\mathcal{C}, F) \to (\mathcal{C}, (\mathcal{F}, \eta, \tilde{\Omega}) F),$$

où $(\mathcal{C}, F)$ est une espèce de structures ordonnée, est une bijection de la classe des espèces de structures ordonnées sur la classe des espèces de morphismes $(\mathcal{C}, \hat{F})$ telles que

$$\hat{F}(\alpha(\hat{F})) \subset \hat{\Omega} \subset \mathcal{F}.$$

4. Rappel sur les catégories d'homomorphismes.

Définition 6. — *Soient* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{H}$ *deux catégories; on dit* [3a] *que* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *est une* catégorie d'homomorphismes *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H})$ *est un foncteur;*

(2) *$\mathcal{S}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{H}_0$;*

(3) *$(\mathcal{C}, p', \mathcal{S})$ est une espèce de structures, où p' désigne la restriction de p à $\mathcal{S}$;*

(4) *Soient $h \in \mathcal{H}$ et $h' \in \mathcal{H}$; les relations*

$$\alpha(h) = \alpha(h'), \qquad \beta(h) = \beta(h') \qquad \text{et} \qquad p(h) = p(h')$$

entraînent $h = h'$.

Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes. Un élément h de $\mathcal{H}$ s'identifie, en vertu de la condition (4), à un triplet (S', f, S), où

$$S = \alpha(h) \in \mathcal{H}_0, \qquad S' = \beta(h) \in \mathcal{H}_0 \qquad \text{et} \qquad f = p(h) \in \mathcal{C}.$$

C'est le plus souvent sous la forme d'un tel triplet que nous représenterons un élément de $\mathcal{H}$. Remarquons que nous identifions ainsi $\mathcal{H}$ à une sous-catégorie de la catégorie induite $p_0^{\cdot}(\mathcal{C})$ dont les éléments sont les triplets (S', f, S) tels que

$$S \in \mathcal{H}_0, \qquad S' \in \mathcal{H}_0, \qquad f \in \mathcal{C}, \qquad \alpha(f) = p(S) \qquad \text{et} \qquad \beta(f) = p(S').$$

Un élément de $\mathcal{S}$ étant entièrement déterminé par la donnée de $\alpha(h)$ et de $p(h)$, nous le représenterons, soit sous la forme $(\beta(h), p(h), \alpha(h))$, soit sous la forme $(p(h), \alpha(h))$. Si $\mathcal{S}$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$, alors $\mathcal{H}$ est une espèce de structures au-dessus de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ pour la loi de composition

$$((f', \bar{f}), h) \rightarrow f'.h.\bar{f}^{-1}$$ 1

si, et seulement si,

$$\alpha(f) = \alpha(h) \quad \text{et} \quad \alpha(\bar{f}) = \beta(h), \qquad \text{où} \quad h \in \mathcal{H}, \qquad \bar{f} \in \mathcal{S}, \quad f' \in \mathcal{S}.$$

Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes; soient $\mathcal{S}_\gamma$ et $\mathcal{C}_\gamma$ les groupoïdes des éléments inversibles de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{C}$ respectivement. Si $p(\mathcal{S}_\gamma)$ est un sous-groupoïde saturé [3 *a*] de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire si les conditions

$$f \in \mathcal{C}_\gamma \quad \text{et} \quad \alpha(f) \in p(\mathcal{S}_\gamma) \qquad \text{entraînent} \quad f \in p(\mathcal{S}_\gamma),$$

nous dirons que $\mathcal{H}$ est *saturé au-dessus de $\mathcal{C}$*. 2+

En particulier, soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\mathcal{M}$ soit la catégorie définie au nº 2. Soit $h \in \mathcal{H}$; l'élément $p(h)$ est, par définition, une application $(p(\beta(h)), g, p(\alpha(h)))$, où g est une surjection. Comme la donnée de $\alpha(h)$, de $\beta(h)$ et de g détermine entièrement $p(h)$, nous représenterons simplement h par le triplet $(\beta(h), g, \alpha(h))$ [au lieu de $(\beta(h), p(h), \alpha(h))$]. Si h est tel que

$$p(\alpha(h)) \subset p(\beta(h))$$

et si $p(h)$ est l'injection canonique de $p(\alpha(h))$ dans $p(\beta(h))$ nous écrirons h sous la forme $(\beta(h), \iota, \alpha(h))$, c'est-à-dire ι désigne l'application identique de $p(\alpha(h))$. 3

Exemples. — 1° Soit $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F})$ le foncteur défini au n° 2; soit $\mathcal{F}_{\gamma}$ le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{F}$ (équivalences de foncteurs); $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\gamma})$ est une catégorie d'homomorphismes.

2° Soit $\mathcal{T}_0$ la classe des topologies (ou métatopologies avec la terminologie de [3 *b*]) sur les classes $M \in \mathcal{M}_0$; soit $\tilde{\mathcal{T}}$ la catégorie des applications continues (S', f, S) de S dans S', où S est une topologie sur la classe M et S' une topologie sur M'. Soit θ le foncteur

$$(S', f, S) \to (M', f, M).$$

Soit $\mathcal{T}$ le groupoïde des éléments inversibles de $\tilde{\mathcal{T}}$ (homéomorphismes); $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$ est une catégorie d'homomorphismes.

3° Soit $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega})$ le foncteur défini au n° 2; soit Ω le groupoïde des éléments inversibles de $\tilde{\Omega}$ (isomorphismes entre classes ordonnées); $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ est une catégorie d'homomorphismes.

4° A toute catégorie $\mathcal{C}$ correspond la catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$, où $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ désigne le foncteur identique de $\mathcal{C}$.

5. Sous-structures. — Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\mathcal{S}$ contienne le groupoïde Γ des éléments inversibles de $\mathcal{H}$.

Dans $\mathcal{H}_0$, considérons la relation

$$s \rho s' \quad \text{si, et seulement si,} \quad (s', p(s), s) \in \mathcal{H}.$$

Cette relation entraîne évidemment $p(s) = p(s')$.

1 Proposition 2. — *ρ est une relation d'ordre dans $\mathcal{H}_0$ et $(\mathcal{C}, p, \Gamma)$ est l'espèce de structures sous l'espèce de structures ordonnée $(\mathcal{C}, \mathrm{F})$ telle que*

$$\mathrm{F}(e) = (\overset{-1}{p}(e), \rho_e) \quad \textit{pour tout} \quad e \in \alpha(\mathrm{F})_0,$$

où ρ_e est la relation d'ordre induite par ρ sur $\overset{-1}{p}(e)$.

Démonstration. — Les conditions $s \rho s'$ et $s' \rho s''$ entraînent

$$(s'', p(s'), s') . (s', p(s), s) = (s'', p(s), s) \in \mathcal{H}, \qquad \text{d'où} \quad s \rho s''.$$

Supposons $s \rho s'$ et $s' \rho s$; on a

$$(s, p(s'), s') . (s', p(s), s) = (s, p(s), s) = s$$

et

$$(s', p(s), s) . (s, p(s'), s') = s';$$

par suite,

$$(s', p(s), s) \in \Gamma.$$

Comme $(\mathcal{C}, p, \Gamma)$ est une espèce de structures, des égalités

$$\alpha(s', p(s), s) = s \quad \text{et} \quad p(s', p(s), s) = p(s)$$

on déduit $(s', p(s), s) = s$; donc $s' = s$ et ρ est une relation d'ordre; la catégorie de couples définissant ρ s'identifie à la sous-catégorie $\mathcal{H}_\rho$ de $\mathcal{H}$ formée des éléments $(s', p(s), s)$ en identifiant (s', s) avec $(s', p(s), s)$. Les relations

$$(s', p(s), s) \in \mathcal{H}_\rho, \qquad f \in p(\Gamma) \qquad \text{et} \qquad \alpha(f) = p(s)$$

assurent l'existence de $(\bar{s}, f, s) \in \Gamma$ et de $(\bar{s}', f, s') \in \Gamma$; on a

$$(\bar{s}', f, s') \cdot (s', p(s), s) \cdot (s, f^{-1}, \bar{s}) = (\bar{s}', f.p(s).f^{-1}, \bar{s}) = (\bar{s}', p(\bar{s}), \bar{s}) \in \mathcal{H}.$$

Par conséquent, $p(\Gamma)$ opère sur $\mathcal{H}_\rho$, la loi de composition étant

$$(f, (s', p(s), s)) \to (\bar{s}', p(s), \bar{s}) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha(f) = p(s).$$

$(p(\Gamma), p, \mathcal{H}_\rho)$ est l'espèce de structures sous une espèce de morphismes et la proposition résulte de la fin du n° 2.

Supposons désormais que $\mathcal{C}$ soit une catégorie inductive (au sens du paragraphe II, n° 6, sens un peu plus général que celui défini dans [3 *c*]). Si $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$, le pseudo-produit dans $\mathcal{C}$ des éléments g et f qui est toujours défini (*voir* § II, prop. 22) sera désigné par gf. 1+

Considérons dans $\mathcal{H}_0$ la relation

$$s\,\bar{\rho}\,S \qquad \text{si, et seulement si,} \quad p(s) < p(S) \quad \text{et} \quad (S, p(S)\,p(s), s) \in \mathcal{H};$$

les relations induites par $\bar{\rho}$ et ρ sur $\overset{-1}{p}(e)$ sont identiques, pour tout $e \in p(\mathcal{H}_0)$. La relation $p(s) < p(S)$ entraîne

$$\alpha(p(S)\,p(s)) = p(s);$$

si, de plus, $(S, p(S)\,p(s), s) \in \mathcal{H}$, alors on a aussi

$$\beta(p(S)\,p(s)) = p(S).$$

Proposition 3. — *$\bar{\rho}$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{H}_0$; si $s\,\bar{\rho}\,S$, s est un sous-objet* [5] *de* S *dans* $\mathcal{H}$.

Démonstration. — Nous supposerons $s\,\bar{\rho}\,S$. Si, de plus, $S\,\bar{\rho}\,s$, alors

$$p(S) = p(s), \qquad \text{d'où} \qquad s\,\rho\,S \ \text{et}\ S\,\rho\,s,$$

c'est-à-dire $s = S$, d'après la proposition 2. Supposons $s'\,\bar{\rho}\,s$; des relations

$$k = (p(S)\,p(s)).(p(s)\,p(s')) < p(S)\,p(s'),$$
$$\alpha(k) = p(s') \qquad \text{et} \qquad \beta(k) = p(S)$$

résulte

$$k = p(S)\,p(s'), \qquad (S, p(S)\,p(s'), s') \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad s'\,\bar{\rho}\,S.$$

Soient $g = (s, g, S')$ et $g' = (s, g', S')$ tels que

$$(S, p(S)\,p(s), s).g = (S, p(S)\,p(s), s).\bar{g}'.$$

Des relations

$$(p(S)\,p(s)).g = (p(S)\,p(s)).g',$$

$$g \prec (p(S)\,p(s)).g, \qquad g' \prec (p(S)\,p(s)).g', \qquad \alpha(g) = \alpha(g'), \qquad \beta(g) = \beta(g')$$

on déduit $g = g'$. Par suite, $g = g'$, ce qui signifie que s est un sous-objet de S dans $\mathcal{H}$.

La notion de sous-structure que nous allons maintenant définir précise la notion de sous-objet d'une catégorie.

Définition 7. — *Soit* $S \in \mathcal{H}_0$; *on dira que* $s \in \mathcal{H}_0$ *est une* sous-structure de S dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$, *et l'on écrira* $s \underset{p}{\varkappa} S$, *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) *On a* $p(s) \prec p(S)$ *et* $(S, p(S)\,p(s), s) \in \mathcal{H}$;

(2) *Soit* $(S, g, S') \in \mathcal{H}$ *tel que*

$$\alpha(p(s)\,g) = \alpha(g) \qquad \text{et} \qquad \beta(p(s)\,g) = p(s).$$

Alors on a

$$(s, p(s)\,g, S') \in \mathcal{H}.$$

Si $s \underset{p}{\varkappa} S$, *on écrira aussi*

$$(S, p(S)\,p(s), s) = S \underset{p}{\varkappa} s$$

et l'on dira que $S \underset{p}{\varkappa} s$ *est une* p-injection. *Soit* $H_{\underset{p}{\varkappa}}$ *la classe des* p-*injections*.

Si aucune confusion n'est possible, on dira seulement que s est une sous-
1 structure de S dans $\mathcal{H}$ et l'on écrira $s \varkappa S$ et $S \varkappa s$ au lieu de $s \underset{p}{\varkappa} S$ et $S \underset{p}{\varkappa} s$.

Proposition 4. — *Soient* $s \in \mathcal{H}_0$ *et* $S \in \mathcal{H}_0$; *on a* $s \underset{p}{\varkappa} S$ *si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1′) $s \,\bar{\rho}\, S$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$;

(2′) *La condition* $(S, (p(S)\,p(s)).g', S') \in \mathcal{H}$ *entraîne* $(s, g', S') \in \mathcal{H}$.

Démonstration. — Supposons $s \underset{p}{\varkappa} S$; la condition (1) de la définition 7 signifie $s \,\bar{\rho}\, S$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Soit

$$(S, p(S)\,p(s).g', S') \in \mathcal{H}.$$

Montrons que les éléments g' et $g'_1 = p(s)\,(p(S)\,p(s).g')$ sont égaux. En effet, on a

$$p(s) \prec p(S)\,p(s), \qquad g' = p(s).g' \prec (p(S)\,p(s))\,g'$$

et

$$g' = p(s).g' \prec p(s)\,(p(S)\,p(s)\;g');$$

par ailleurs,

$$\alpha(g'_1) < \alpha(g') \quad \text{et} \quad \beta(g'_1) < p(s) = \beta(g'),$$

d'où

$$\alpha(g'_1) = \alpha(g') = p(S') \quad \text{et} \quad \beta(g'_1) = \beta(g') = p(s).$$

Puisque $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie inductive, les relations

$$g' < g'_1, \quad \alpha(g') = \alpha(g'_1) \quad \text{et} \quad \beta(g') = \beta(g'_1)$$

entraînent $g' = g'_1$. Il résulte alors de la condition (2) de la définition 7 qu'on a $(s, g', S') \in \mathcal{H}$, donc (2′) est vérifiée. Inversement, supposons les conditions (1′) et (2′) vérifiées; soit $(S, g, S') \in \mathcal{H}$ tel que

$$\alpha(p(s)g) = \alpha(g) \quad \text{et} \quad \beta(p(s)g) = p(s).$$

On obtient $g = (p(S)\,p(s)).(p(s)\,g)$, en utilisant les relations

$$(p(S)\,p(s)).(p(s)\,g) < g, \quad \alpha((p(S)\,p(s)).(p(s)\,g)) = \alpha(g)$$

et

$$\beta(g) = \beta((p(S)\,p(s)).(p(s)\,g)) = p(S).$$

De la condition (2′) on déduit donc

$$(s, p(s)g, S') \in \mathcal{H}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad s \underset{p}{\propto} S.$$

Exemples. — 1° Les sous-structures de S dans $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}, \mathfrak{T})$ sont les topologies induites par S sur les sous-classes de $\theta(S)$. Soit $\tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}_u$ la sous-catégorie de $\tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}$ formée des applications continues ouvertes d'un espace topologique dans un autre; soit θ_u la restriction de θ à $\tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}_u$; $(\mathcal{M}, \theta_u, \tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}_u, \mathfrak{T})$ est une catégorie d'homomorphismes. Les sous-structures de S dans $(\mathcal{M}, \theta_u, \tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}_u, \mathfrak{T})$ sont les topologies induites par S sur un ouvert de S, c'est-à-dire les éléments plus petits que S pour la relation d'ordre considérée dans [3 c] sur $\tilde{\tilde{\mathfrak{T}}}$.

2° Les sous-structures de $\mathcal{C}^{\perp}$ dans $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\gamma})$ sont les sous-catégories de $\mathcal{C}^{\perp}$ (*voir* § II, prop. 9).

3° Les sous-structures de $(A, <)$ dans $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ sont les sous-classes de A munies de l'ordre induit par $<$.

4° Dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$, on a

$$s \propto S \quad \text{si, et seulement si,} \quad s < S \text{ dans } \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \beta(Ss) = S.$$

Si les relations $s < S$ et $s \propto S$ sont équivalentes, $\mathcal{C}$ est une catégorie *inductive complètement régulière à droite.* Dans ce cas, la condition $s < \alpha(f)$ entraîne $\beta(fs) = \beta(f)$.

5° Si $s \underset{p}{\propto} S$, on a $p(s) \propto p(S)$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$.

Théorème 1. — *Dans $\mathcal{H}_0$ la relation $s \underset{p}{\propto} S$ est une relation d'ordre. Soient $s \in \mathcal{H}_0$, $s' \in \mathcal{H}_0$ et $S \in \mathcal{H}_0$; les conditions*

$$s \underset{p}{\propto} S, \qquad s' \underset{p}{\propto} S \quad (\textit{resp.}\ s' \bar{\rho} S)$$

et

$$p(s') \propto p(s) \quad \textit{dans}\ (\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

entraînent

$$s' \underset{p}{\propto} s \quad (\textit{resp.}\ s' \bar{\rho} s).$$

Démonstration. — $\bar{\rho}$ étant une relation d'ordre, si $s \propto S$ et $S \propto s$, on a $s = S$. Supposons $s_1 \propto s$ et $s \propto S$; alors $s_1 \bar{\rho} S$. Montrons que le couple (S, s_1) vérifie la condition (2′) de la proposition 4. Soit

$$\bar{g} = (S, p(S)\, p(s_1).g', S') \in \mathcal{H}.$$

Les éléments $p(S)\, p(s_1)$ et $(p(S)\, p(s)).(p(s)\, p(s_1))$ sont égaux, car ils sont majorés par $p(S)$, ont même source $p(s_1)$ et même but $p(S)$; par suite

$$\bar{g} = (S, (p(S)\, p(s)).(p(s)\, p(s_1).g'), S') \in \mathcal{H}$$

et, puisque $s \propto S$,

$$\bar{g}' = (s, (p(s)\, p(s_1)).g', S') \in \mathcal{H};$$

comme $s_1 \propto s$, il en résulte

1 $$(s_1, g', S) \in \mathcal{H}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad s_1 \propto S.$$

Supposons $s \propto S$, $s' \bar{\rho} S$ et $p(s') \propto p(s)$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$. On a

$$j = (S, p(S)\, p(s'), s') \in \mathcal{H};$$

des relations

$$p(s') < p(s) \qquad \text{et} \qquad \beta(p(s)\, p(s')) = p(s),$$

on déduit que les éléments $p(S)\, p(s')$ et $(p(S)\, p(s)).(p(s)\, p(s'))$ sont égaux, car ils sont majorés par $p(S)$, ont même source $p(s')$ et même but $p(S)$. Par conséquent,

$$j = (S, (p(S)\, p(s)).(p(s)\, p(s')), s')$$

et, en vertu de la proposition 4,

$$(s, p(s)\, p(s'), s') \in \mathcal{H}, \qquad \text{d'où} \qquad s' \bar{\rho} s.$$

Supposons, de plus, $s' \propto S$; soit

$$\bar{g}' = (s, p(s)\, p(s').g', S') \in \mathcal{H}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}\bar{g} = (S, p(S)\, p(s), s).\bar{g}' &= (S, (p(S)\, p(s)).(p(s)\, p(s')).g', S') \\ &= (S, (p(S)\, p(s')).g', S') \in \mathcal{H}.\end{aligned}$$

La proposition 4 entraîne donc

$$(s', g', \mathrm{S}') \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad s' \propto \mathrm{S}.$$

Corollaire 1. — *Les conditions* $s \underset{p}{\propto} \mathrm{S}$, $s' \underset{p}{\propto} \mathrm{S}$ *et* $p(s) = p(s')$ *entraînent* $s = s'$.

En effet, d'après le théorème 1, ces conditions entraînent

$$s \propto s' \quad \text{et} \quad s' \propto s, \qquad \text{d'où} \qquad s = s'.$$

Corollaire 2. — *Soit* $s \underset{p}{\propto} \mathrm{S}$; *alors, pour la relation* ρ, *s est le plus grand élément de la classe des structures* s' *telles qu'on ait*

$$s' \bar{\rho}\, \mathrm{S} \quad \textit{et} \quad p(s') = p(s).$$

Définition 8. — *Soient* $\bar{h} \in \mathcal{H}$ *et* $\bar{h}' \in \mathcal{H}$; *on dira que* $\bar{h}'$ *est* un sous-homomorphisme de $\bar{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$, *et l'on écrira* $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$ *ou* $\bar{h}' \propto \bar{h}$, *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\alpha(\bar{h}') \propto \alpha(\bar{h}), \qquad \beta(\bar{h}') \propto \beta(\bar{h}) \qquad \textit{et} \qquad p(\bar{h}') < p(\bar{h}).$$

Proposition 5. — *Dans* $\mathcal{H}$, *la relation* $\bar{h}' \propto \bar{h}$ *est une relation d'ordre vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Si* $\bar{h}' \propto \bar{h}$, $\alpha(\bar{h}') = \alpha(\bar{h})$ *et* $\beta(\bar{h}') = \beta(\bar{h})$, *alors* $\bar{h} = \bar{h}'$;

(2) $\bar{h}' \propto \bar{h}$ *entraîne* $p(\bar{h}') \propto p(\bar{h})$ *dans* $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$; *si de plus,* $p(\bar{h}) = p(\bar{h}')$, *alors* $\bar{h} = \bar{h}'$;

(3) *Les conditions* $(\bar{h}_1, \bar{h}) \in \mathcal{H} \star \mathcal{H}$, $(\bar{h}'_1, \bar{h}') \in \mathcal{H} \star \mathcal{H}$, $\bar{h}' \propto \bar{h}$ *et* $\bar{h}'_1 \propto \bar{h}_1$ *entraînent* $\bar{h}'_1 . \bar{h}' \propto \bar{h}_1 . \bar{h}$;

(4) *Les conditions :* $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$, $\bar{h}'' \underset{p}{\propto} \bar{h}$ *et* $p(\bar{h}'') \propto p(\bar{h}')$ *dans* $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$ *entraînent* $\bar{h}'' \underset{p}{\propto} \bar{h}'$.

Les conditions (1) et (3) signifient que $(\mathcal{H}, \propto)$ est une catégorie ordonnée (*voir* § II, définition 18). La condition (2) signifie que p appartient à $\tilde{\Omega}'$ (*voir* § II, nº 6), c'est-à-dire (§ IV) que $(\mathcal{H}, \propto)$ est une catégorie ordonnée 1
au-dessus de $(\mathcal{C}, <)$.

Corollaire. — *Si* $\mathcal{C}$ *est complètement régulière à droite et si pour tout* $s \in \mathcal{H}_0$ *la classe des éléments* $p(s')$, *où* $s' \underset{p}{\propto} s$, *est une sous-classe inductive de* $\mathcal{C}_0$, *alors* $(\mathcal{H}, \propto)$ *est une catégorie inductive au-dessus de* $(\mathcal{C}, <)$. 2¶

Proposition 6. — *Supposons*

$$\bar{h} \in \Gamma, \qquad \bar{h}' \in \Gamma, \qquad \alpha(\bar{h}') \underset{p}{\propto} \alpha(\bar{h}) \qquad \textit{et} \qquad p(\bar{h}') < p(\bar{h});$$

alors on a aussi $\beta(\bar{h}') \underset{p}{\propto} \beta(\bar{h})$ *et, par suite,* $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$.

Démonstration. — Soient

$$\bar{h} = (S_1, h, S) \in \Gamma \quad \text{et} \quad \bar{h}' = (s_1, h', s) \in \Gamma$$

tels que $h' < h$ et $j = (S, p(S)\, p(s), s) \in \mathcal{H}$; on a

1¶

$$p(\bar{h}.j.\bar{h}'^{-1}) = h.(p(S)\, p(s)).h'^{-1} < p(S_1)\, p(s_1),$$
$$\alpha(p(\bar{h}.j.\bar{h}'^{-1})) = p(s_1) \quad \text{et} \quad \beta(p(\bar{h}.j.\bar{h}'^{-1})) = p(S_1),$$

d'où

$$p(\bar{h}.j.\bar{h}'^{-1}) = p(S_1)\, p(s_1) \quad \text{et} \quad (S_1, p(S_1)\, p(s_1), s_1) \in \mathcal{H}.$$

Supposons, de plus, $s \propto S$; soit

$$\bar{g} = (S_1, (p(S_1)\, p(s_1)).g', S') \in \mathcal{H}.$$

Les éléments $h^{-1}.(p(S_1)\, p(s_1))$ et $(p(S)\, p(s)).h'^{-1}$ sont égaux, car ils sont majorés par h^{-1}, ont même source $p(s_1)$ et même but $p(S)$. Par suite,

$$\bar{h}^{-1}.\bar{g} = (S, (p(S)\, p(s)).(h'^{-1}.g'), S') \in \mathcal{H}$$

et il résulte de la proposition 4 qu'on a

$$\bar{g}' = (s, h'^{-1}.g', S') \in \mathcal{H};$$

par conséquent,

$$\bar{h}'.\bar{g}' = (s_1, g', S') \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad s_1 \propto S_1.$$

PROPOSITION 7. — *Soient*

$$\bar{h} = (s_1, h, s) \in \mathcal{H}, \quad s' \underset{p}{\propto} s \quad \textit{et} \quad s'_1 \underset{p}{\propto} s_1.$$

S'il existe $h' \in \mathcal{C}$ tel que

$$h' < h, \quad \alpha(h') = p(s') \quad \textit{et} \quad \beta(h') = p(s'_1),$$

on a

$$\bar{h}' = (s'_1, h', s') \in \mathcal{H} \quad \textit{et} \quad \bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}.$$

Si de plus $\bar{h}$ et h' sont inversibles, alors $\bar{h}' \in \Gamma$.

Démonstration. — On a

$$\bar{h}.\left(s \underset{p}{\propto} s'\right) = (s_1, h.(p(s)\, p(s')), s') \in \mathcal{H};$$

les éléments $h.(p(s)\, p(s'))$ et $p(s_1)\, p(s'_1).h'$ sont égaux, car ils sont majorés par h, ont même source $p(s')$ et même but $p(s_1)$; par suite,

$$\bar{h}.\left(s \underset{p}{\propto} s'\right) = (s_1, (p(s_1)\, p(s'_1)).h', s') \in \mathcal{H}$$

et, en vertu de la proposition 4, on trouve

$$\bar{h}' = (s'_1, h', s') \in \mathcal{H}.$$

Si, de plus, $\bar{h} \in \Gamma$ et h' est inversible, on a aussi $(s', h'^{-1}, s'_1) \in \mathcal{H}$, d'où

$$\bar{h}' \in \Gamma.$$

Soit $\square\!\square\,\mathcal{C}$ la catégorie longitudinale des quatuors de $\mathcal{C}$ (*voir* § II, n° 5), 1
c'est-à-dire la classe des quadruplets $(g_1, f_1, f, g) \in \mathcal{C}^4$ tels que $g_1 . f = f_1 . g$, munie de la multiplication

$$(g'_1, f'_1, f', g') \,\square\!\square\, (g_1, f_1, f, g) = (g'_1, f'_1 . f_1, f' . f, g)$$

si, et seulement si, $g' = g_1$.

Proposition 8. — *Soient*

$$h \in \mathcal{C}, \quad h' \in \mathcal{C}, \quad \alpha(h) = s, \quad \alpha(h') = s', \quad \beta(h) = s_1 \quad \textit{et} \quad \beta(h') = s'_1 ;$$

les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $h' \propto h$ *dans* $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$;

(2) $h' < h$ *dans* $\mathcal{C}$, $\beta(ss') = s$ *et* $\beta(s_1 s'_1) = s_1$;

(3) $s' < s$, $s'_1 < s_1$ *et* $(h, s_1 s'_1, ss', h') \in \square\!\square\,\mathcal{C}$.

En effet, les conditions (1) et (2) sont équivalentes d'après ce qui précède. Si (2) est vérifié, les éléments $h . ss'$ et $s_1 s'_1 . h'$ sont égaux, car ils sont majorés par h, ont même source s' et même but s_1; par suite, (3) est vérifié. Si la condition (3) est satisfaite, on a

$$s' \propto s \quad \text{et} \quad s'_1 \propto s_1 \qquad \text{puisque} \quad \beta(ss') = s \quad \text{et} \quad \beta(s_1 s'_1) = s_1.$$

De plus,

$$s'_1 < s_1 s'_1 \quad \text{et} \quad ss' < s, \qquad \text{d'où} \qquad h' < s_1 s'_1 . h' = h . ss' < h.$$

Si $h' \propto h$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$, nous désignerons par $h \boxed{\propto} h'$ le quatuor $(h, \beta(h)\,\beta(h'), \alpha(h)\,\alpha(h'), h')$. La classe $\mathcal{U}$ des quatuors $h \boxed{\propto} h'$ est une sous-catégorie de $\square\!\square\,\mathcal{C}$; soit $\mathcal{U}'$ la sous-catégorie de $\mathcal{U}$ formée des quatuors $h \boxed{\propto} h'$ tels que h' et h soient inversibles.

Soit $\square\!\square\,\mathcal{H}$ la catégorie longitudinale des quatuors de $\mathcal{H}$ et $\square p$ le foncteur

$$(g_1, f_1, f, g) \to (p(g_1), p(f_1), p(f), p(g)) \quad \text{de } \square\!\square\,\mathcal{H} \text{ vers } \square\!\square\,\mathcal{C};$$

$(\square\!\square\,\mathcal{C}, \square p, \square\!\square\,\mathcal{H}, \bar{\Gamma}')$ est une catégorie d'homomorphismes, où $\bar{\Gamma}'$ est le 2
groupoïde des éléments inversibles de $\square\!\square\,\mathcal{H}$. Pour qu'un quadruplet $\bar{G} = (\bar{g}_1, \bar{f}_1, \bar{f}, \bar{g})$ appartienne à $\square\!\square\,\mathcal{H}$, il faut et il suffit qu'on ait

$$\alpha(\bar{f}) = \alpha(\bar{g}), \qquad \beta(\bar{f}) = \alpha(\bar{g}_1), \qquad \alpha(\bar{f}_1) = \beta(\bar{g}) \qquad \text{et} \qquad \beta(\bar{f}_1) = \beta(\bar{g}_1)$$

et que $\square p(\bar{G})$ soit un quatuor; en effet, les éléments $\bar{g}_1 . \bar{f}$ et $\bar{f}_1 . \bar{g}$ sont alors égaux, puisqu'ils ont même image par p, même source et même but.

Soit $\overline{\mathfrak{U}}$ la sous-catégorie de $\square\mathcal{H}$ formée des quatuors

$$\overline{\mathrm{H}} = \left(\bar{h},\ s_1 \underset{p}{\infty} s'_1,\ s \underset{p}{\infty} s',\ \bar{h}'\right)$$

tels que $s' \underset{p}{\propto} s$ et $s'_1 \underset{p}{\propto} s_1$. Soit $\overline{\mathfrak{U}}'$ la sous-catégorie de $\overline{\mathfrak{U}}$ formée des quatuors de $\overline{\mathfrak{U}}$ tels que $\bar{h} \in \Gamma$ et $\bar{h}' \in \Gamma$.

Proposition 9. — *On a $\bar{h}' \propto \bar{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ si, et seulement si, il existe*

$$\overline{\mathrm{H}} = \left(\bar{h},\ \beta(\bar{h}) \underset{p}{\infty} \beta(\bar{h}'),\ \alpha(\bar{h}) \underset{p}{\infty} \alpha(\bar{h}'),\ \bar{h}'\right) \in \overline{\mathfrak{U}};$$

dans ce cas, $\square p(\overline{\mathrm{H}}) \in \mathfrak{U}$.

Démonstration. — Si $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$, on a

$$\alpha(\bar{h}') \propto \alpha(\bar{h}), \qquad \beta(\bar{h}') \propto \beta(\bar{h}) \qquad \text{et} \qquad p(\bar{h}') < p(\bar{h}),$$

par suite, $\square p(\overline{\mathrm{H}})$ est un quatuor et $\overline{\mathrm{H}} \in \overline{\mathfrak{U}}$. Inversement, si $\overline{\mathrm{H}} \in \overline{\mathfrak{U}}$, on trouve $\square p(\overline{\mathrm{H}}) \in \mathfrak{U}$ en vertu de la condition (3) de la proposition 8; il en résulte $p(\bar{h}') < p(\bar{h})$, donc $\bar{h}' \propto \bar{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.

Si $\bar{h}' \propto \bar{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$, le quatuor $\overline{\mathrm{H}}$ correspondant sera représenté par la notation $\bar{h} \boxed{\infty} \bar{h}'$. Dans $\mathcal{H}$ (resp. dans $\mathcal{C}$) on dira qu'un triplet (g_1, f_1, f) est *inclus dans un quatuor* s'il existe un quatuor (g_1, f_1, f, g). La proposition 7 est équivalente à :

Proposition 7 *bis*. — *Pour qu'un triplet*

$$\mathrm{T} = \left(\bar{h},\ s_1 \underset{p}{\infty} s'_1,\ s \underset{p}{\infty} s'\right), \qquad où \quad \bar{h} \in \mathcal{H},$$

soit inclus dans un quatuor $\overline{\mathrm{H}}$, *il faut et il suffit que*

$$s = \alpha(\bar{h}), \qquad s_1 = \beta(\bar{h})$$

et que

$$p^3(\mathrm{T}) = \left(p(\bar{h}),\ p(s_1)\,p(s'_1),\ p(s)\,p(s')\right)$$

soit inclus dans un quatuor H; *dans ce cas, on a* $\overline{\mathrm{H}} \in \overline{\mathfrak{U}}$ *et* $\mathrm{H} \in \mathfrak{U}$. *Si, de plus,* $\mathrm{H} \in \mathfrak{U}'$ *et* $\bar{h} \in \Gamma$, *alors* $\overline{\mathrm{H}} \in \overline{\mathfrak{U}}'$.

Si $\mathrm{T} = \left(\bar{h},\ s_1 \underset{p}{\infty} s'_1,\ s \underset{p}{\infty} s'\right)$ est inclus dans un quatuor, les quatuors $\overline{\mathrm{H}}$ et H dans lesquels sont inclus T et $p^3(\mathrm{T})$ sont uniques; par conséquent, on a

$$\mathrm{H} = p(\bar{h}) \boxed{\infty} h' \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{H}} = \bar{h} \underset{p}{\boxed{\infty}} \bar{h}',$$

où h' et $\bar{h}'$ sont déterminés par T. L'élément $\bar{h}'$ peut être considéré comme le composé de $\bar{h}$ par (s'_1, s'); ce composé sera noté $\bar{h} \underset{p}{\vdash} (s'_1, s')$ et appelé *p-restriction* de $\bar{h}$ à (s'_1, s').

Remarquons que le composé $\bar{h}'$ est aussi déterminé par la donnée du triplet $(\bar{h}, (p(s'_1), p(s')))$.

En particulier,

— si $s'_1 = \beta(\bar{h})$, $s' \propto \alpha(\bar{h})$, il existe une p-restriction $\bar{h} \underset{p}{\vdash} (s'_1, s')$ et

$$\bar{h} \underset{p}{\vdash} (s'_1, s') = \bar{h} . (s \underset{p}{\infty} s');$$

— si $s'_1 \propto \beta(\bar{h})$ et $s' = \alpha(\bar{h})$, il existe une p-restriction $\bar{h} \underset{p}{\vdash} (s'_1, s')$ si, et seulement si,

$$\alpha(p(s'_1)\, p(\bar{h})) = p(s') \qquad \text{et} \qquad \beta(p(s'_1)\, p(\bar{h})) = p(s'_1);$$

alors

$$\bar{h} \underset{p}{\vdash} (s'_1, s') = (s'_1, p(s'_1)\, p(\bar{h}), s').$$

Soit $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{H}_0$; soit p' la restriction de p à $\mathcal{H}'$. Supposons que $(\mathcal{C}, p', \mathcal{H}', \mathcal{H}' \cap \Gamma)$ soit une catégorie d'homomorphismes.

PROPOSITION 10. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(σ) $s \underset{p}{\propto} \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *entraîne* $s \underset{p'}{\propto} \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{C}, p', \mathcal{H}', \mathcal{H}' \cap \Gamma)$;

(σ_1) *On a* $\mathcal{H}' \underset{p}{\vdash} (\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}'$, *c'est-à-dire si* $\bar{h}' \in \mathcal{H}'$, *toute p-restriction de* $\bar{h}'$ *appartient à* $\mathcal{H}'$.

Démonstration. — Si (σ) est vérifié, la catégorie des p'-injections contient $\mathcal{H}_{\underset{p}{\propto}}$ et (σ_1) est vérifié. Inversement, supposons (σ_1) vérifié et soit $s \propto \mathrm{S}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Les relations $\mathrm{S} \in \mathcal{H}'$ et $s \underset{p}{\propto} \mathrm{S}$ entraînent

$$\mathrm{S} \underset{p}{\vdash} (\mathrm{S}, s) = (\mathrm{S}, p(\mathrm{S})\, p(s), s) \in \mathcal{H}'.$$

Soit $(\mathrm{S}, g, \mathrm{S}') \in \mathcal{H}'$ tel que

$$\alpha(p(s)\, g) = \alpha(g) \qquad \text{et} \qquad \beta(p(s)\, g) = p(s);$$

le composé $(\mathrm{S}, g, \mathrm{S}') \underset{p}{\vdash} (s, \mathrm{S}') = (s, p(s)\, g, \mathrm{S}')$ étant défini, il appartient à $\mathcal{H}'$. Par suite, on a $s \underset{p'}{\propto} \mathrm{S}$ dans $(\mathcal{C}, p', \mathcal{H}', \mathcal{H}' \cap \Gamma)$.

Nous verrons plus loin (§ II, théorème 16) que $\square\,\mathcal{C}$ est une catégorie inductive pour la relation d'ordre

$$(g'_1, f'_1, f', g') < (g_1, f_1, f, g)$$

si, et seulement si,

$$g' < g, \qquad g'_1 < g_1, \qquad f'_1 < f_1 \qquad \text{et} \qquad f' < f.$$

Dans le théorème suivant, nous poserons

$$[\bar{h}] = (\bar{h}, \beta(\bar{h}), \alpha(\bar{h}), \bar{h}) \in (\square\!\square\,\mathcal{H})_0 \qquad \text{pour tout} \quad \bar{h} \in \mathcal{H};$$

et

$$[h] = (h, \beta(h), \alpha(h), h) \in (\square\!\square\,\mathcal{C})_0, \qquad \text{pour tout} \quad h \in \mathcal{C}.$$

THÉORÈME 2. — *Les relations suivantes sont équivalentes :*

(1) *On a*

$$[\bar{h}'] \underset{\square p}{\propto} [\bar{h}] \qquad \textit{et} \qquad [\beta(\bar{h}')] \underset{\square p}{\propto} [\beta(\bar{h})] \quad \textit{dans}\ (\square\!\square\,\mathcal{C}, \square p, \square\!\square\,\mathcal{H}, \bar{\Gamma}');$$

(2) *$\bar{h}'$ est un sous-homomorphisme de $\bar{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.*

Démonstration. — Soient

$$\bar{h} = (s_1, h, s) \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad \bar{h}' = (s'_1, h', s') \in \mathcal{H}.$$

Supposons $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$; de la proposition 5, il résulte $h' \propto h$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$, d'où $(h, \beta(h)\beta(h'), \alpha(h)\alpha(h'), h') \in \mathcal{U}$; de plus, ce quatuor est le pseudo-produit $[h][h']$ dans $\square\!\square\,\mathcal{C}$. Comme le quadruplet $\left(\bar{h}, s_1 \underset{p}{\propto} s'_1, s \underset{p}{\propto} s', \bar{h}'\right)$ est un quatuor de $\mathcal{H}$ et admet $[h][h']$ pour image par $\square p$, on en déduit $[\bar{h}'] \bar{\rho} [\bar{h}]$ dans $(\square\!\square\,\mathcal{C}, \square p, \square\!\square\,\mathcal{H}, \bar{\Gamma}')$. Soit $\bar{G} = (\bar{h}, \bar{f}_1, \bar{f}, \bar{k}) \in \square\,\mathcal{H}$ tel que

$$\alpha([p(\bar{h}')] \square p(\bar{G})) = [p(\bar{k})] \qquad \text{et} \qquad \beta([p(\bar{h}')] \square p(\bar{G})) = [p(\bar{h}')] = [h'];$$

on a

$$\square p([\bar{h}']) = [p(\bar{h}')] \qquad \text{et} \qquad [p(\bar{h}')] \square p(\bar{G}) = (h', p(s'_1)\,p(\bar{f}_1), p(s')\,p(\bar{f}), p(\bar{k})),$$

d'où

$$\alpha(p(s')\,p(\bar{f})) = \alpha(p(\bar{f})) \qquad \text{et} \qquad \beta(p(s')\,p(\bar{f})) = p(s').$$

Il en résulte

$$\bar{f}' = (s', p(s')\,p(\bar{f}), \alpha(\bar{f})) \in \mathcal{H};$$

de même,

$$\bar{f}'_1 = (s'_1, p(s'_1)\,p(\bar{f}_1), \beta(\bar{f}_1)) \in \mathcal{H}.$$

Soit $\bar{G}' = (\bar{h}', \bar{f}'_1, \bar{f}', \bar{k})$; puisque la projection par $\square p$ de $\bar{G}'$ est le quatuor $[p(\bar{h}')] \square p(\bar{G})$, on a $\bar{G}' \in \square\,\mathcal{H}$. Par suite, $[\bar{h}'] \underset{\square p}{\propto} [\bar{h}]$. De plus, $s'_1 \underset{p}{\propto} s_1$ entraîne de même $[s'_1] \underset{\square p}{\propto} [s_1]$ et (1) est vérifié. — Inversement, supposons $[\bar{h}'] \propto [\bar{h}]$ dans $(\square\!\square\,\mathcal{C}, \square p, \square\!\square\,\mathcal{H}, \bar{\Gamma}')$. Alors, on a

$$h' < h \qquad \text{et} \qquad [h][h'] = (h, \beta(h)\beta(h'), \alpha(h)\alpha(h'), h');$$

on en déduit

$$(s, p(s)p(s'), s') \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (s_1, p(s_1)p(s'_1), s'_1) \in \mathcal{H}.$$

Soit

$$\bar{g} = (s, g, S') \in \mathcal{H}, \quad \text{où} \quad g = (p(s)p(s')).g'.$$

On a

$$\bar{G} = (\bar{h}, \bar{h}.\bar{g}, \bar{g}, S') \in \square\mathcal{H}$$

et

$$\square p(\bar{G}) = (h, h.g, g, p(S')) = [h][h'].(h', h'.g', g', p(S'));$$

il en résulte

$$(\bar{h}', \bar{h}'.\bar{g}', \bar{g}', S') \in \mathfrak{U}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad (s', g', S') \in \mathcal{H}.$$ 1

Ceci prouve que s' est une sous-structure de s dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Si, de plus, $[s'_1] \underset{\square p}{\propto} [s_1]$, on a de même $s'_1 \underset{p}{\propto} s_1$, donc $\bar{h}' \propto \bar{h}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.

Corollaire 1. — *Soient $\bar{h} \in \Gamma$ et $\bar{h}' \in \Gamma$. On a $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$ si, et seulement si, $[\bar{h}'] \underset{\square p}{\propto} [\bar{h}]$.*

En effet, si $[\bar{h}'] \underset{\square p}{\propto} [\bar{h}]$, la démonstration du théorème prouve qu'on a $\alpha(\bar{h}') \underset{p}{\propto} \alpha(\bar{h})$ et il résulte de la proposition 6 que $\bar{h}' \underset{p}{\propto} \bar{h}$.

Corollaire 2. — *$\mathfrak{U}$ est une sous-catégorie de la catégorie des $\square p$-injections.*

Définition 9. — *On dira que* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite *si l'axiome suivant est vérifié :*

(R) *Soient $h \in \mathcal{H}$ et $h' \in \mathcal{H}$ tels que*

$$\alpha(h) = \alpha(h') \quad \textit{et} \quad \beta(h) = \beta(h');$$

alors il existe

$$s \underset{p}{\propto} \alpha(h), \quad \textit{avec} \quad p(s) = \alpha(p(h) \cap p(h')).$$

*La sous-structure s de $\alpha(h)$ sera appelée p-*noyau *de (h, h').* 2

On définit de même la notion de catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *résolvante à gauche* en remplaçant dans cette définition α par β.

Exemples. — 1° $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\gamma})$ est résolvante à droite.

2° Si pour tout $e \in \mathcal{C}_0$ et tout $E \in \mathcal{C}_0$ tels que $e < E$, on a $\beta(Ee) = E$, alors $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$ est résolvante à droite et à gauche.

3° Si pour tout $S \in \mathcal{H}_0$ et pour tout $e < p(S)$ il existe $s \underset{p}{\propto} S$ tel que $p(s) = e$, alors $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est résolvante à droite et à gauche. Il en est ainsi en particulier pour $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ et $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$.

4° $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathfrak{T}}_m, \mathfrak{T})$ n'est pas résolvante à droite.

PROPOSITION 11. — *Si* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite et si* $e < \mathrm{E}$ *dans* $\mathcal{C}_0$ *entraîne* $\beta(\mathrm{E}e) = \mathrm{E}$, *les conditions*

$$h \in \mathcal{H}, \qquad h' \in \mathcal{H}, \qquad \alpha(h) = \alpha(h') \qquad et \qquad \beta(h) = \beta(h')$$

entraînent

$$h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) = h' \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s),$$

où s est le p-noyau de (h, h').

Démonstration. — Posons

$$p(h) \cap p(h') = f, \qquad e = \beta(f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E} = \beta(p(h));$$

on a

$$\mathrm{E}e.f < p(h) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}e.f < p(h'),$$

d'où

$$p(h) \cap p(h') = f < \mathrm{E}e.f < p(h) \cap p(h');$$

il en résulte $f = \mathrm{E}e.f$ et $\mathrm{E} = e$. Les éléments

$$f \text{ et } p(h)\,p(s) = p(h)\,p\big(\alpha(h) \underset{p}{\propto} s\big)$$

sont égaux, car ils sont majorés par $p(h)$, ont même source $p(s)$ et même but E. Donc $f = p(h)\,p(s)$. De même, $f = p(h')\,p(s)$. Comme

$$h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) = (\beta(h), p(h)\,p(s), s) = (\beta(h), f, s)$$

et

$$h' \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) = (\beta(h), f, s),$$

on a

$$h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) = h' \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s).$$

Nous supposerons de plus dans la suite que $\mathcal{H}$ est muni d'une relation d'ordre $<$ telle que $(\mathcal{H}, <)$ soit une catégorie inductive et que p soit une application inductive stricte de $(\mathcal{H}, <)$ dans $(\mathcal{C}, <)$, c'est-à-dire que $(\mathcal{H}, <)$
1 est une catégorie inductive au-dessus de $(\mathcal{C}, <)$ relativement à p (*voir* § IV).

THÉORÈME 3. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*c*) $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *est résolvante à droite et l'on a* $h' \underset{p}{\propto} h$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *si, et seulement si,* $h' < h$ *dans* $\mathcal{H}$.

(*c'*) *Soient* $s \in \mathcal{H}_0$ *et* $s' \in \mathcal{H}_0$; *on a* $s' \underset{p}{\propto} s$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *si, et seulement si,* $s' < s$ *dans* $\mathcal{H}$ *et dans ce cas* $\beta(ss') = s$; *de plus, les conditions*

$$h \in \mathcal{H}, \qquad h' \in \mathcal{H}, \qquad \alpha(h) = \alpha(h') \qquad et \qquad \beta(h) = \beta(h')$$

entraînent

$$p(h \cap h') = p(h) \cap p(h').$$

Démonstration. — Supposons la condition (*c*) vérifiée; alors on a

$$s' \propto s \quad \text{dans } (\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S}) \qquad \text{si, et seulement si,} \quad s' < s;$$

dans ce cas, $(s, p(s)\,p(s'), s')$ est un sous-homomorphisme de s, donc

$$(s, p(s)\,p(s'), s') = s \underset{p}{\infty} s' = ss' \qquad \text{et} \qquad \beta(ss') = s.$$

On en déduit que les conditions suivantes sont équivalentes :

(*a*) $h' < h$ dans $\mathcal{H}$;

(*b*) $\alpha(h') < \alpha(h)$, $\beta(h') < \beta(h)$ et $p(h) < p(h')$;

(*c*) $h' \propto h$ dans $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$.

Soient $h \in \mathcal{H}$ et $h' \in \mathcal{H}$ tels que

$$\alpha(h) = \alpha(h') \qquad \text{et} \qquad \beta(h) = \beta(h');$$

comme la catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$ est résolvante à droite et que $\alpha(h \cap h')$ est le $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}}$-noyau de (h, h'), on a

$$\beta(h \cap h') = \beta(h),$$

d'après la proposition 11; par conséquent, on a aussi

$$\beta(p(h) \cap p(h')) = p(\beta(h)).$$

Soit s le p-noyau de (h, h'); les éléments $p(h) \cap p(h')$ et $p(h)\,p(s)$ sont égaux car ils sont majorés par $p(h)$, ont même source $p(s)$ et même but $\beta(p(h))$; de même,

$$p(h) \cap p(h') = p(h')\,p(s).$$

Par suite,

$$h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) = (\beta(h), p(h)\,p(s), s) = (\beta(h), p(h) \cap p(h'), s) = h' \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s)$$

et

$$h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s) < h \cap h'.$$

Les relations

$$\alpha(h \cap h') < \alpha(h), \qquad s < \alpha(h) \qquad \text{et} \qquad p(\alpha(h \cap h')) = \alpha(p(h) \cap p(h')) = p(s)$$

entraînent

$$\alpha(h \cap h') < s.$$ 1

Donc

$$s = \alpha(h \cap h') \qquad \text{et} \qquad h \cap h' = h \underset{p}{\vdash} (\beta(h), s);$$

ainsi

$$p(h \cap h') = p(h) \cap p(h').$$

— Inversement supposons la condition (c') vérifiée; si $h' < h$, on a

$$\alpha(h') \propto \alpha(h), \qquad \beta(h') \propto \beta(h) \qquad \text{et} \qquad p(h') < p(h), \qquad \text{d'où} \qquad h' \underset{p}{\propto} h.$$

Soient h et h' deux éléments tels que

$$\alpha(h) = \alpha(h') \qquad \text{et} \qquad \beta(h) = \beta(h');$$

puisque

$$\alpha(h \cap h') < \alpha(h)$$

et

$$p(\alpha(h \cap h')) = \alpha(p(h \cap h')) = \alpha(p(h) \cap p(h')),$$

la catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est résolvante à droite. Supposons $h' \underset{p}{\propto} h$; posons

$$\alpha(h) = s, \qquad \alpha(h') = s', \qquad \beta(h) = s_1 \qquad \text{et} \qquad \beta(h') = s'_1.$$

Comme $s' \propto s$ et $s'_1 \propto s_1$, les éléments

$$hs' = h.ss' \qquad \text{et} \qquad s_1 h' = s_1 s'_1 . h'$$

ont même source s' et même but s_1. Démontrons qu'ils sont égaux; en effet,

$$p(hs') = p(h).p(ss') \qquad \text{et} \qquad p(s_1 h') = p(s_1 s'_1).p(h')$$

sont majorés par $p(h)$, et ont même source $p(s')$ et même but $p(s_1)$, donc $p(hs') = p(s_1 h')$. On en déduit $hs' = s_1 h'$, d'où

$$h' = s'_1 . h' < (s_1 s'_1) . h' = hs' < h.$$

Ainsi l'axiome (c) est vérifié.

Remarque. — Le théorème 3 est encore vrai (sans modification de la démonstration) en remplaçant l'hypothèse : $(\mathcal{H}, <)$ est une catégorie inductive, par l'hypothèse : $(\mathcal{H} <)$ est une catégorie ordonnée (§ II, n° 6)
1 dans laquelle deux éléments ont une intersection.

Exemple. — Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite telle que $\mathcal{H}_0$ soit une classe inductive [3 *a*] pour la relation $\propto$; si l'on munit $\mathcal{H}$ de la relation $\propto$, $\mathcal{H}$ devient une catégorie induc-
2¶ tive et la condition (c) du théorème 3 est vérifiée. Il en est ainsi dans les
3¶ catégories d'homomorphismes $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_\gamma)$ et $(\mathcal{M}, \theta_u, \tilde{\mathcal{T}}_u, \mathcal{T})$ lorsque $\mathcal{F}$ et $\tilde{\mathcal{T}}_u$ sont munis de leur relation d'ordre usuelle. Par contre, $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$ ne vérifie pas la condition (c).

Soit $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\overline{\mathcal{S}}$ contienne le groupoïde $\bar{\Gamma}$ des éléments inversibles de $\overline{\mathcal{H}}$ et que $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{S}})$ soit une espèce de superstructures [3 a] au-dessus de $(\mathcal{C}, p, \mathcal{S})$. Ces conditions entraînent que $(\mathcal{C}, p\,\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ est une catégorie d'homomorphismes. Un élément $\bar{h}$ de $\overline{\mathcal{H}}$ sera représenté, soit par le triplet $(\beta(\bar{h}), \bar{p}(\bar{h}), \alpha(\bar{h}))$, soit par le triplet $(\beta(\bar{h}), p\,\bar{p}(\bar{h}), \alpha(\bar{h}))$.

Remarquons que les conditions

$$s \in \overline{\mathcal{H}}_0, \qquad S \in \overline{\mathcal{H}}_0 \qquad \text{et} \qquad s \underset{p\bar{p}}{\propto} S$$

entraînent $\bar{p}(s)\,\bar{\rho}\,\bar{p}(S)$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ mais, en général, elles n'entraînent pas $\bar{p}(s) \underset{p}{\propto} \bar{p}(S)$.

Proposition 12. — *Soient* $s \in \overline{\mathcal{H}}_0$ *et* $S \in \overline{\mathcal{H}}_0$. *Les conditions*

$$s \underset{p\bar{p}}{\propto} S, \qquad \bar{p}(s) < \bar{p}(S) \qquad \textit{et} \qquad \beta(\bar{p}(S)\,\bar{p}(s)) = \bar{p}(S)$$

entraînent $s \underset{\bar{p}}{\propto} S$.

Démonstration. — Soit

$$\bar{j} = (S, p\,\bar{p}(S)\,p\,\bar{p}(s), s) \in \overline{\mathcal{H}};$$

on a

$$p\,\bar{p}(\bar{j}) = p(\bar{p}(S)\,\bar{p}(s)) = p\,\bar{p}(S)\,p\,\bar{p}(s),$$

car

$$p(\bar{p}(S)\,\bar{p}(s)) < p\,\bar{p}(S)\,p\,\bar{p}(s),$$
$$\alpha(\bar{p}(S)\,\bar{p}(s)) = \bar{p}(s) \qquad \text{et} \qquad \beta(\bar{p}(S)\,\bar{p}(s)) = \bar{p}(S).$$

Donc

$$\bar{p}(\bar{j}) = (\bar{p}(S), p\,\bar{p}(S)\,p\,\bar{p}(s), \bar{p}(s)) = \bar{p}(S)\,\bar{p}(s) \qquad \text{et} \qquad \bar{j} = (S, \bar{p}(S)\,\bar{p}(s), s).$$

Soit

$$\bar{g} = (S, \bar{p}(S)\,\bar{p}(s).g', S') \in \overline{\mathcal{H}}, \qquad \text{où} \quad g' \in \mathcal{H}.$$

On a

$$\bar{p}(\bar{g}) = (\bar{p}(S), p(\bar{p}(S)\,\bar{p}(s)).\,p(g'), \bar{p}(S')) = (\bar{p}(S), (p\,\bar{p}(S)\,p\,\bar{p}(s)).p(g'), \bar{p}(S')),$$

d'où

$$\bar{g} = (S, p\,\bar{p}(S)\,p\,\bar{p}(s).p(g'), S').$$

De la condition $s \underset{p\bar{p}}{\propto} S$ et de la proposition 4, il résulte

$$\bar{g}' = (s, p(g'), S') \in \overline{\mathcal{H}}.$$

Comme $g' = (\bar{p}(s), p(g'), \bar{p}(S'))$, on en déduit

$$\bar{p}(\bar{g}') = g' \qquad \text{et} \qquad \bar{g}' = (s, g', S') \in \overline{\mathcal{H}}.$$

Par suite, $s \underset{\bar{p}}{\propto} S$, d'après la proposition 4.

Corollaire 1. — *Les conditions*

$$h \in \overline{\mathcal{H}}, \quad h' \in \overline{\mathcal{H}}, \quad h' \underset{p\bar{p}}{\propto} h, \quad \bar{p}(h') < \bar{p}(h),$$
$$\beta(\bar{p}(\alpha(h)\,\alpha(h'))) = \bar{p}(\alpha(h)) \quad \textit{et} \quad \beta(\bar{p}(\beta(h)\,\beta(h'))) = \bar{p}(\beta(h))$$

entraînent $h' \underset{\bar{p}}{\propto} h$.

Corollaire 2. — *Supposons que p vérifie de plus la condition*

$$p(hs) = p(h)\,p(s) \quad \textit{lorsque} \quad s < \alpha(h).$$

Alors les conditions $s \underset{p\bar{p}}{\propto} \mathrm{S}$ *et* $\bar{p}(s) < \bar{p}(\mathrm{S})$ *entraînent* $s \underset{\bar{p}}{\propto} \mathrm{S}$.

En effet, de ces conditions il résulte

$$p(\bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s)) = p\bar{p}(\mathrm{S})\,p\bar{p}(s),$$
$$\alpha(p\bar{p}(\mathrm{S})\,p\bar{p}(s)) = p\bar{p}(s), \quad \beta(p\bar{p}(\mathrm{S})\,p\bar{p}(s)) = p\bar{p}(\mathrm{S}),$$

d'où

$$\bar{p}(\mathrm{S}) = \beta(\bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s))$$

puisque

$$\beta(\bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s)) < \bar{p}(\mathrm{S}) \quad \text{et} \quad p(\beta(\bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s))) = p\bar{p}(\mathrm{S}).$$

On est ainsi ramené aux hypothèses de la proposition 12.

Désormais, nous supposerons de plus que les conditions

$$h \in \mathcal{H}, \quad s \in \mathcal{H}_0 \quad \text{et} \quad s < \beta(h)$$

entraînent $p(sh) = p(s)\,p(h)$.

Proposition 13. — *Soient* $s \in \bar{\bar{\mathcal{H}}}_0$ *et* $\mathrm{S} \in \bar{\bar{\mathcal{H}}}_0$; *la relation* $s \underset{\bar{p}}{\propto} \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{H}, \bar{p}, \bar{\bar{\mathcal{H}}}, \bar{\mathcal{S}})$ *entraîne* $s \underset{pp}{\propto} \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \bar{\bar{\mathcal{H}}}, \bar{\mathcal{S}})$.

Démonstration. — Posons $\bar{j} = (\mathrm{S}, \bar{p}(\mathrm{S})\,\bar{p}(s), s) \in \bar{\bar{\mathcal{H}}}$; on a

$$\bar{j} = (\mathrm{S}, p\bar{p}(\mathrm{S})\,p\bar{\bar{p}}(s), s),$$

car on obtient l'égalité $p\bar{p}(\bar{j}) = p\bar{p}(\mathrm{S})\,p\bar{p}(s)$ en utilisant les relations

$$p\bar{p}(j) = p(p(\mathrm{S})\,\bar{p}(s)) < p\bar{p}(\mathrm{S})\,p\bar{p}(s),$$
$$pp(s) = \alpha(p\bar{p}(\bar{j})) < \alpha(pp(\mathrm{S})\,p\bar{p}(s)) < p\bar{p}(s)$$

et

$$p\bar{p}(\mathrm{S}) = \beta(p\bar{p}(\bar{j})) < \beta(pp(\mathrm{S})\,p\bar{p}(s)) < p\bar{p}(\mathrm{S}).$$

Soit $\bar{g} = (\mathrm{S}, g, \mathrm{S}') \in \bar{\bar{\mathcal{H}}}$, où $g \in \mathcal{C}$, tel que

$$\alpha(p\bar{p}(s)\,g) = \alpha(g) \quad \text{et} \quad \beta(p\bar{p}(s)\,g) = p\bar{p}(s).$$

Montrons qu'on a

$$(s, p\bar{p}(s)\,g, \mathrm{S}') \in \overline{\mathcal{H}}.$$

En effet, puisque $\bar{p}(s) < \bar{p}(\beta(\bar{g}))$, on a

$$p(\bar{p}(s)\,\bar{p}(\bar{g})) = pp(s)\,p\bar{p}(\bar{g}) = p\bar{p}(s)\,g;$$

des relations

$$\alpha(p(s)\,\bar{p}(\bar{g})) < \bar{p}(S'), \qquad \beta(\bar{p}(s)\,\bar{p}(\bar{g})) < \bar{p}(s),$$
$$p(\alpha(p(s)\,\bar{p}(\bar{g}))) = p(p(S')) \quad \text{et} \quad p(\beta(\bar{p}(s)\,\bar{p}(\bar{g}))) = p(\bar{p}(s)),$$

il résulte

$$\alpha(\bar{p}(s)\,\bar{p}(\bar{g})) = \bar{p}(S') \quad \text{et} \quad \beta(p(s)\,p(\bar{g})) = \bar{p}(s).$$

Comme $s \propto S$ dans $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$, on en déduit

$$(s, \bar{p}(s)\,p(g), S') = (s, p\bar{p}(s)\,g, S') \in \mathcal{H}.$$

Ceci prouve qu'on a $s \underset{p\bar{p}}{\propto} S$ dans $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$.

Corollaire 1. — *Les conditions $h \in \overline{\mathcal{H}}$, $h' \in \overline{\mathcal{H}}$ et $h' \underset{\bar{p}}{\propto} h$ entraînent $h' \underset{p\bar{p}}{\propto} h$.*

Corollaire 2. — *Si, pour tout $s \in \mathcal{H}_0$ et tout $S \in \mathcal{H}_0$ tels que $s < S$, on a $\beta(Ss) = S$, alors $s < S$ entraîne $s \propto S$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.*

En effet, ces conditions signifient qu'on a $s \propto S$ dans $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$ et le corollaire résulte de la proposition.

Corollaire 3. — *Si $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ est résolvante à droite et si la condition suivante est vérifiée :*

Pour $h \in \mathcal{H}$ et $h' \in \mathcal{H}$ tels que

$$\alpha(h) = \alpha(h') \quad et \quad \beta(h) = \beta(h'),$$

on a

$$p(h \cap h') = p(h) \cap p(h'),$$

alors $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ est résolvante à droite.

Démonstration. — Soient $\bar{h} \in \overline{\mathcal{H}}$ et $\bar{h}' \in \overline{\mathcal{H}}$ tels que $\alpha(\bar{h}) = \alpha(\bar{h}')$ et $\beta(\bar{h}) = \beta(\bar{h}')$; soit s le $\bar{p}$-noyau de $(\bar{h}, \bar{h}')$; d'après la proposition, on a $s \propto S$ dans $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$. Les relations

$$p(s) = \alpha(\bar{p}(h) \cap \bar{p}(\bar{h}')) \quad \text{et} \quad p(\bar{p}(\bar{h}) \cap \bar{p}(\bar{h}')) = p\bar{p}(\bar{h}) \cap p\bar{p}(\bar{h}')$$

entraînent $p\bar{p}(s) = \alpha(p\bar{p}(\bar{h}) \cap p\bar{p}(\bar{h}'))$, donc $(\bar{h}, \bar{h}')$ admet s pour $p\bar{p}$-noyau et $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ est résolvante à droite.

Corollaire 4. — *Supposons que $s\, \bar{\rho}\, S$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ entraîne $s < S$* dans *$\mathcal{H}_0$ et $\beta(Ss) = S$*; *alors $\bar{s} \underset{p\bar{p}}{\propto} \bar{S}$ dans $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ est équivalent à $\bar{s} \underset{\bar{p}}{\propto} \bar{S}$ dans $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$.*

En effet, $\bar{s} \underset{\bar{p}}{\propto} \bar{\mathrm{S}}$ entraîne $\bar{s} \underset{p\bar{p}}{\propto} \bar{\mathrm{S}}$ d'après la proposition 13. Supposons $\bar{s} \underset{p\bar{p}}{\propto} \bar{\mathrm{S}}$; comme

$$\bar{j} = (\bar{\mathrm{S}}, p\bar{p}(\bar{\mathrm{S}})p\bar{p}(\bar{s}), \bar{s}) \in \overline{\mathcal{H}},$$

on a

$$\bar{p}(\bar{j}) = (\bar{p}(\bar{\mathrm{S}}), p\bar{p}(\bar{\mathrm{S}})p\bar{p}(\bar{s}), \bar{p}(\bar{s})) \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad p\bar{p}(\bar{s}) < p\bar{p}(\bar{\mathrm{S}}),$$

d'où $\bar{p}(\bar{s}) \mathrel{\varrho} \bar{p}(\bar{\mathrm{S}})$. Par suite,

$$\bar{p}(\bar{s}) < \bar{p}(\bar{\mathrm{S}}) \ \text{ dans } \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad \beta(\bar{p}(\bar{\mathrm{S}})p(\bar{s})) = p(\bar{\mathrm{S}}).$$

La proposition 12 entraîne alors $\bar{s} \underset{\bar{p}}{\propto} \bar{\mathrm{S}}$.

Proposition 14. — *Supposons que* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *vérifie la condition* (c) *du théorème* 3 *et que* $s \mathrel{\varrho} \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ *entraîne* $s < \mathrm{S}$ *dans* $\mathcal{H}$; *alors* $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ *est résolvante à droite si, et seulement si,* $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ *est résolvante à droite.*

Démonstration. — Si $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ est résolvante à droite, $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ est résolvante à droite d'après le corollaire 3 de la proposition 13. Inversement, supposons que $(\mathcal{C}, p\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ soit résolvante à droite; soient $\bar{h} \in \overline{\mathcal{H}}$ et $\bar{h}' \in \overline{\mathcal{H}}$ tels que

$$\alpha(\bar{h}) = \alpha(\bar{h}') \qquad \text{et} \qquad \beta(\bar{h}) = \beta(\bar{h}');$$

soit $\bar{s}$ le $p\bar{p}$-noyau de $(\bar{h}, \bar{h}')$. D'après l'axiome (c), $s < \mathrm{S}$ dans $\mathcal{H}$ entraîne $s \propto \mathrm{S}$ dans $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$, donc $\beta(\mathrm{S}s) = \mathrm{S}$; du corollaire 4 de la proposition 13, il résulte qu'on a $\bar{s} \underset{\bar{p}}{\propto} \alpha(\bar{h})$. De plus, les relations

$$\bar{p}(\bar{s}) < \alpha(\bar{p}(\bar{h}) \cap \bar{p}(\bar{h}')), \qquad p(\bar{p}(\bar{h}) \cap \bar{p}(\bar{h}')) = p\bar{p}(\bar{h}) \cap p\bar{p}(\bar{h}')$$

et

$$p\bar{p}(\bar{s}) = \alpha(p\bar{p}(\bar{h}) \cap p\bar{p}(\bar{h}')) = p(\alpha(\bar{p}(\bar{h}) \cap \bar{p}(\bar{h}')))$$

entraînent $\bar{p}(\bar{s}) = \alpha(\bar{p}(\bar{h}) \cap \bar{p}(\bar{h}'))$. Donc $\bar{s}$ est le $\bar{p}$-noyau de $(\bar{h}, \bar{h}')$ et $(\mathcal{H}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{S}})$ est résolvante à droite.

Théorème 4. — *Supposons vérifiées les conditions suivantes :*

(1) $(\mathcal{C}, <)$ *est une catégorie* $(\mathcal{J}, \mathcal{J}', \mathcal{J}'')$*-structurée* (*voir* § II, n° 6) *complètement régulière à droite et le groupoïde* $\mathcal{C}_\gamma$ *des éléments inversibles de* $\mathcal{C}$ *est un groupoïde inductif* (§ II, n° 6).

(2) $(\mathcal{H}, <)$ *est complètement régulière à droite.*

(3) $\mathcal{H}$ *est saturé au-dessus de* $\mathcal{C}$ *et les conditions*

$$h \in \Gamma, \qquad h' \in \Gamma, \qquad \alpha(h') < \alpha(h) \qquad \text{et} \qquad p(h') < p(h)$$

entraînent $h' < h$.

Alors il existe une sous-catégorie $\mathcal{H}_u$ de $\mathcal{H}$ contenant Γ telle qu'on ait $s' < s$ dans $\mathcal{H}_0$ si, et seulement si, $s' \underset{p_u}{\propto} s$ dans $(\mathcal{C}, p_u, \mathcal{H}_u, \Gamma)$, où p_u est la restriction de p à $\mathcal{H}_u$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{H}_u$ la classe de tous les éléments $h \in \mathcal{H}$ vérifiant la condition suivante :

Soit $s \in \mathcal{H}_0$ et $s < \alpha(h)$; soit $p(h)^{>}.p(s)$ la classe de tous les éléments $g \in \mathcal{C}$ tels que $g < p(h)$ et $\alpha(g) = p(s)$. Posons

$$p(h) \mid p(s) = \bigcap (p(h)^{>}.p(s)).$$

Alors il existe $h \mid s \in \mathcal{H}$ tel que

$$h \mid s < h, \qquad \alpha(h \mid s) = s \qquad \text{et} \qquad p(h \mid s) = p(h) \mid p(s).$$ 1

Montrons que $\mathcal{H}_u$ contient Γ. En effet, supposons $h \in \Gamma$ et $s < \alpha(h)$. Soit $g \in \mathcal{C}_\gamma$ l'élément inversible induit par $p(h) \in \mathcal{C}_\gamma$ sur $p(s)$, dont l'existence est assurée par le fait que $\mathcal{C}_\gamma$ est un groupoïde inductif. Nous allons montrer : $g = p(h) \mid p(s)$. On a

$$p(h) \mid p(s) < g.$$

Soit $g' \in p(h)^{>}.p(s)$ tel que $g' < g$. Comme $g'.g^{-1} < \beta(g)$ et que $\mathcal{C}$ est complètement régulière à droite, on a

$$(\beta(g)\,\beta(g')).(g'.g^{-1}) = \beta(g) \qquad \text{et} \qquad (g'.g^{-1}).(\beta(g)\,\beta(g')) = \beta(g'),$$

d'où $g'.g^{-1} \in \mathcal{C}_\gamma$. Puisque $\mathcal{C}_\gamma$ est un groupoïde inductif, il en résulte

$$g'.g^{-1} \in \mathcal{C}_0, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \beta(g) = \beta(g');$$

en tenant compte des relations $g' < g$ et $\alpha(g) = \alpha(g')$, on trouve $g = g'$. 2¶
Ainsi $p(h) \mid p(s) = g$ et, en vertu de la condition (3), il existe

$$(s_1, g, s) \in \Gamma \qquad \text{et} \qquad (s_1, g, s) < h.$$

Donc

$$h \mid s = (s_1, g, s) \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad h \in \mathcal{H}_u.$$

Montrons que $\mathcal{H}_u$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$. Soient

$$h \in \mathcal{H}_u \quad \text{et} \quad h_1 \in \mathcal{H}_u \qquad \text{tels que} \quad \alpha(h_1) = \beta(h).$$

Soit $s < \alpha(h)$ et $s_1 = \beta(h \mid s)$; nous allons démontrer l'égalité

$$(h_1.h) \mid s = (h_1 \mid s_1).(h \mid s);$$

en effet, si $k < p(h_1.h)$ et $\alpha(k) = p(s)$, on a

$$k = g'_1.g', \qquad \text{où} \quad g'_1 < p(h_1) \quad \text{et} \quad g' < (h),$$ 3

puisque $(\mathcal{C}, <)$ est $(\mathcal{I}, \mathcal{I}', \mathcal{I}'')$-structurée. Comme $\alpha(g') = p(s)$, on a

$$p(h) \mid p(s) < g', \quad \text{d'où} \quad p(s_1) < \alpha(g'_1);$$

par conséquent,

$$p(h_1) \mid p(s_1) < g'_1 . (\alpha(g'_1)\, p(s_1)) \quad \text{et} \quad (p(h_1) \mid p(s_1)).(p(h) \mid p(s)) < k,$$

ce qui prouve

$$(p(h_1) \mid p(s_1)).(p(h) \mid p(s)) = \bigcap (p(h_1 . h)^{>} . p(s)).$$

On en déduit

$$(h_1 . h) \mid s = (h_1 \mid s_1).(h \mid s) \quad \text{et finalement} \quad h_1 . h \in \mathcal{H}_u.$$

De plus, $\mathcal{H}_u$ est saturé par induction dans $\mathcal{H}$, car les relations

$$h \in \mathcal{H}_u, \quad h' < h \quad \text{et} \quad s' < \alpha(h')$$

entraînent

$$s' < \alpha(h) \quad \text{et} \quad p(h \mid s') < p(h'.(\alpha(h')\, s')),$$

c'est-à-dire

1¶ $$h \mid s' < h'.(\alpha(h')\, s') < h', \quad \text{d'où} \quad h \mid s' = h' \mid s' \quad \text{et} \quad h' \in \mathcal{H}_u.$$

Il en résulte que si $h \in \mathcal{H}_u$ et $s'_1 < \beta(h)$, on a $s'_1 h \in \mathcal{H}_u$, donc

$$p_u(s'_1\, h) = p(s'_1\, h) = p_u(s'_1)\, p_u(h).$$

Par suite, on peut appliquer le corollaire 2 de la proposition 13 et l'on a :

$$s' < s \ \text{dans}\ \mathcal{H}_0 \quad \text{entraîne} \quad s' \underset{p_u}{\propto} s \ \text{dans}\ (\mathcal{C}, p_u, \mathcal{H}_u, \Gamma).$$

— Inversement, montrons que si $s' \underset{p_u}{\propto} s$, on a $s' < s$ dans $\mathcal{H}_0$. Posons

$$j = (s, p(s)\, p(s'), s') \in \mathcal{H}_u;$$

on a $p(s') \in p(j)^{>} . p(s')$; soit

$$g \in p(j)^{>} . p(s') \quad \text{tel que} \quad g < p(s').$$

En utilisant les relations

$$\alpha(g) = p(s'), \quad (p(s')\, \beta(g)).g = p(s') \quad \text{et} \quad g.(p(s')\, \beta(g)) = \beta(g),$$

on obtient $g = (p(s')\, \beta(g))^{-1}$ et, puisque $\mathcal{C}_\gamma$ est un groupoïde inductif,
2¶ $g = p(s')$. Par conséquent, $p(s') = p(j) \mid p(s')$ et il existe

$$j \mid s' = (s_1, p(s'), s') \in \mathcal{H}, \quad \text{avec} \quad s_1 < s \quad \text{et} \quad p(s_1) = p(s').$$

D'après ce qui précède, on a alors $s_1 \underset{p_u}{\propto} s$, donc $s' = s_1 < s$ en vertu du
3+ corollaire 1, th. 1.

Définition 10. — *Avec les notations du théorème 4, un élément de $\mathcal{H}_u$ sera appelé* homomorphisme p-ouvert.

Exemples. — 1° Dans la catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{M}, \theta, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$, un homomorphisme θ-ouvert est une application continue ouverte.

2° Dans $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_\gamma)$, un foncteur F est $p_{\mathcal{F}}$-ouvert si, et seulement si, $F(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie de $\beta(F)$ pour toute sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\alpha(F)$. En particulier, tout foncteur F tel que F_0 soit une injection est $p_{\mathcal{F}}$-ouvert. A l'aide de la décomposition canonique d'un foncteur (*voir* [3 *a*]) tout foncteur est donc le composé d'un foncteur ouvert et d'un 1
foncteur fidèle. Remarquons que la sous-catégorie $\mathcal{F}_u$ de $\mathcal{F}$ vérifie la condition (σ) de la proposition 10.

Cas particulier. — Dans ce qui suit intervient, le plus souvent, le cas d'une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$, où $\mathcal{M}$ est la catégorie d'applications construite au n° 5 et où Γ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{H}$. Nous supposerons $\mathcal{M}$ muni de la relation d'ordre

$$(E', f, E) < (E'_1, f_1, E_1)$$

si, et seulement si, $E \subset E_1$, $E' \subset E'_1$ et si f est une restriction de f_1.

Alors $\mathcal{M}$ est une catégorie inductive telle que $\beta(Ee) = E$ pour tout $e \in \mathcal{M}_0$, $E \in \mathcal{M}_0$ et $e < E$; par suite, les relations

$$e < E \quad \text{dans } \mathcal{M}_0 \qquad \text{et} \qquad e \propto E \quad \text{dans } (\mathcal{M}, \mathrm{Id}_{\mathcal{M}}, \mathcal{M}, \mathcal{M})$$

sont équivalentes.

Dans $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$, on a $s \mathrel{\bar{\underset{p}{\propto}}} S$ si, et seulement si,

$$p(s) \subset p(S) \qquad \text{et} \qquad (S, \iota, s) \in \mathcal{H}.$$

Pour que s soit une sous-structure de S dans $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) On a $p(s) \subset p(S)$ et $(S, \iota, s) \in \mathcal{H}$;

(2) Les conditions $(S, g, S') \in \mathcal{H}$ et $g(p(S)) \subset p(s)$ entraînent 2

$$(s, g, S') \in \mathcal{H}.$$

Proposition 15. — *Si $\mathcal{H}$ est saturé au-dessus de $\mathcal{M}$, alors $(p(\Gamma), p\beta, \mathcal{H}_\alpha)$ est une espèce de structures, où $\mathcal{H}_\alpha$ désigne la classe des p-injections.*

Démonstration. — Supposons

$$s \propto S, \qquad g \in p(\Gamma) \qquad \text{et} \qquad \alpha(g) = p(S);$$

puisque $p(\Gamma)$ est saturé dans $\mathcal{H}$, on a $g' \in p(\Gamma)$, où g' est la bijection induite par g sur $p(s)$; les relations $g' < g$ et $\alpha(g', s) = s \propto \alpha(g, S)$ entraînent $(g', s) \propto (g, S)$ d'après la proposition 6, donc

$$\beta(g', s) \underset{p}{\propto} \beta(g, S).$$

Des définitions, il résulte que $p(\Gamma)$ opère sur $\mathcal{H}_\alpha$ pour la loi de composition

$$\left(g, \mathrm{S} \underset{p}{\propto} s\right) \to \left(\beta(g, \mathrm{S}) \underset{p}{\propto} \beta(g', s)\right) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \alpha(g) = p(\mathrm{S}).$$

Soient

$$\bar{h} = (\mathrm{S}_1, h, \mathrm{S}) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \bar{h}' = (\mathrm{S}_1, h', \mathrm{S}) \in \mathcal{H};$$

pour qu'une sous-structure s de S soit le p-noyau de (h, h'), il faut et il suffit que $p(s)$ soit la classe formée des x tels que $h(x) = h'(x)$.

Proposition 16. — *Si* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ *est résolvante à droite,* Γ *opère sur la classe* $\mathcal{H}_n$ *des p-injections* $\mathrm{S} \underset{p}{\propto} s$ *telles que s soit le p-noyau d'un couple* (h, h'), *où* $\alpha(h) = \mathrm{S}$.

En effet, soit $(\mathrm{S}_1, g, \mathrm{S}) = \bar{g} \in \Gamma$ et s le p-noyau de (h, h'), où $\alpha(h) = \mathrm{S}$.
1 D'après l'axiome (R), le couple $(\bar{g}^{-1}.h, \bar{g}^{-1}.h')$ admet un p-noyau $s_1 \propto \mathrm{S}_1$; comme $p(s_1) = g(p(s))$, il résulte de la proposition 7 qu'on a

$$\bar{g}' = (s_1, g_\iota, s) \in \Gamma.$$

Ainsi Γ opère sur $\mathcal{H}_n$ par la loi de composition

$$(\bar{g}, \mathrm{S} \propto s) \to \mathrm{S}_1 \propto s_1 \quad \text{si, et seulement si,} \quad \mathrm{S} = \alpha(\bar{g}).$$

Nous munirons $\mathcal{F}$ de la relation d'ordre :

$(\mathrm{G}_1^{\perp}, \mathrm{F}, \mathrm{G}^{\perp}) < (\bar{\mathrm{G}}_1^{\perp}, \bar{\mathrm{F}}, \bar{\mathrm{G}}^{\perp})$ si, et seulement si, $\mathrm{G}^{\perp}$ (resp. $\mathrm{G}_1^{\perp}$) est une sous-catégorie de $\bar{\mathrm{G}}^{\perp}$ (resp. de $\bar{\mathrm{G}}_1^{\perp}$) et si F est une restriction de $\bar{\mathrm{F}}$.

2 Alors $\mathcal{F}$ est une catégorie inductive suprarégulière au-dessus de $\mathcal{M}$ relativement à $p_{\mathcal{F}}$ au sens de [3 c]. De plus, $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_\gamma)$ vérifie la condition (c) du théorème 3. Les trois conditions

$$\mathrm{G}^{\perp} \rho\, \bar{\mathrm{G}}^{\perp}, \quad \mathrm{G}^{\perp} \propto \bar{\mathrm{G}}^{\top} \quad \text{et} \quad \mathrm{G}^{\perp} < \bar{\mathrm{G}}^{\perp}$$

sont équivalentes (*voir* § II, prop. 9). Soit $(\mathcal{F}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Gamma})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\bar{\Gamma}$ soit le groupoïde des éléments inversibles de $\bar{\mathcal{H}}$. Du corollaire 2 de la proposition 12 et de la proposition 14, il résulte :

3 Proposition. — *Les conditions* $s \propto \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{F}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Gamma})$ *et* $s \propto \mathrm{S}$ *dans* $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Gamma})$ *sont équivalentes.* $(\mathcal{F}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Gamma})$ *est résolvante à droite si, et seulement si,* $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\Gamma})$ *est résolvante à droite.*

Remarque. — Soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ une catégorie d'homomorphismes. Pour que (S, ι, s) soit un monomorphisme strict [2] de $\mathcal{H}$, il suffit que s soit une sous-structure de S et qu'il existe une famille d'éléments $(\mathrm{S}', h_i, \mathrm{S})$, où $i \in \mathrm{I}$, telle que $p(s)$ soit la classe des x pour lesquels on a $h_i(x) = h_j(x)$, pour tout $i \in \mathrm{I}$ et $j \in \mathrm{I}$. Soient $h \in \mathcal{H}$ et $h' \in \mathcal{H}$; si (h, h')

admet un p-noyau s, alors s est un noyau de (h, h') dans $\mathcal{H}$ [2]. Si $\mathcal{H}$ est
saturé au-dessus de $\mathcal{M}$, pour tout monomorphisme strict (S, g, S') de $\mathcal{H}$ tel
que g soit injective, il existe une sous-structure s de S telle que $(s, \gamma, S') \in \Gamma$;
mais un noyau d'un couple (h, h') n'est pas toujours isomorphe à un p-noyau 1
de (h, h').

II. — Catégories structurées.

1. Catégories d'homomorphismes a produits finis. — Soit $\mathcal{M}_0$ une classe de classes contenant avec une classe toutes ses sous-classes, avec deux classes leur produit. Soit $\mathcal{M}$ la catégorie de toutes les applications de $M \in \mathcal{M}_0$ dans $M' \in \mathcal{M}_0$.

Définition 1. — *Nous dirons que* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ *est une catégorie d'homomorphismes* à produits finis *si* $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ *est une catégorie d'homomorphismes telle que* Γ *soit le groupoïde des éléments inversibles de* $\mathcal{H}$ *et que, pour tout couple* $(s_1, s_2) \in \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0$, *il existe une unité* $s_1 \times s_2$ *de* $\mathcal{H}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) $$p(s_1 \times s_2) = p(s_1) \times p(s_2).$$

(2) *Soit* p_i *la projection canonique de* $p(s_1) \times p(s_2)$ *sur* $p(s_i)$, *où* $i = 1, 2$:

$$p_i(x_1, x_2) = x_i \quad \textit{pour tout} \quad (x_1, x_2) \in p(s_1) \times p(s_2).$$

Alors on a

$$\overline{p}_i = (s_i, p_i, s_1 \times s_2) \in \mathcal{H}.$$

(3) *Les relations* $(s_i, h_i, s) \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, *entraînent*

$$(s_1 \times s_2, [h_1, h_2], s) \in \mathcal{H} \quad \textit{où} \quad [h_1, h_2](z) = (h_1(z), h_2(z)) \quad \textit{pour tout} \quad z \in p(s).$$

Ces conditions signifient que le couple (s_1, s_2) admet $(s_1 \times s_2; \overline{p}_1, \overline{p}_2)$ pour produit [4] dans $\mathcal{H}$.

Proposition 1. — *Le produit* $s_1 \times s_2$ *est complètement déterminé par les conditions de la définition.*

En effet si S est un autre produit de (s_1, s_2) vérifiant les conditions (1), (2) et (3), on a

$$(S, \gamma, s_1 \times s_2) \in \Gamma \quad \text{avec} \quad \gamma = p(s_1) \times p(s_2),$$

d'où $S = s_1 \times s_2$, puisque $(\mathcal{C}, p, \Gamma)$ est une espèce de structures.

Nous supposerons désormais que $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis.

Proposition 2. — *Soient* $\overline{f}_i = (s'_i, f_i, s_i) \in \mathcal{H}$, *où* $i = 1, 2$. *Alors on a*

$$(s'_1 \times s'_2, f_1 \times f_2, s_1 \times s_2) \in \mathcal{H},$$

avec

$$(f_1 \times f_2)\,(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)) \quad \textit{pour tout} \quad (x_1, x_2) \in p(s_1) \times p(s_2).$$

Avec les notations de la proposition 2, nous poserons

$$\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = (s'_1 \times s'_2,\, f_1 \times f_2,\, s_1 \times s_2).$$

Proposition 3. — *Les relations*

$$s'_1 \propto s_1 \quad \textit{et} \quad s'_2 \propto s_2, \qquad s_i \in \mathcal{H}_0, \qquad s'_i \in \mathcal{H}_0,$$

entraînent

$$s'_1 \times s'_2 \quad \propto \quad s_1 \times s_2.$$

En effet, on a

$$(s_1 \times s_2,\, \iota \times \iota,\, s'_1 \times s'_2) \in \mathcal{H};$$

soit $(s_1 \times s_2, g, \mathrm{S}) \in \mathcal{H}$ tel que $g(p(\mathrm{S})) \subset p(s'_1) \times p(s'_2)$. Comme $(s_i, p_i g, \mathrm{S}) \in \mathcal{H}$ et $p_i g(p(\mathrm{S})) \subset p(s'_i)$, où $i = 1, 2$, on a aussi $(s'_i, p_i g, \mathrm{S}) \in \mathcal{H}$, d'où

$$(s'_1 \times s'_2,\, [p_1 g, p_2 g],\, \mathrm{S}) = (s'_1 \times s'_2,\, g,\, \mathrm{S}) \in \mathcal{H}.$$

Donc

$$(s'_1 \times s'_2) \quad \propto \quad (s_1 \times s_2).$$

Proposition 4. — *Les applications*

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) \to \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 \qquad \textit{et} \qquad (\bar{f}_1, \bar{f}_2) \to \bar{f}_2 \times \bar{f}_1$$

sont deux foncteurs équivalents de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ *vers* $\mathcal{H}$. *Les applications*

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) \to (\bar{f}_1 \times \bar{f}_2) \times \bar{f}_3 \qquad \textit{et} \qquad (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) \to \bar{f}_1 \times (\bar{f}_2 \times \bar{f}_3)$$

sont deux foncteurs équivalents de $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ *vers* $\mathcal{H}$.

Ceci résulte des propriétés du foncteur-produit [3 *d*] dans $\mathcal{M}$:

$$(f_1, f_2) \to f_1 \times f_2.$$

La première équivalence associe à $(s_1, s_2) \in \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0$ le triplet $(s_2 \times s_1, \gamma, s_1 \times s_2)$ où $\gamma(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. La deuxième équivalence associe à (s_1, s_2, s_3) le triplet $(s_1 \times (s_2 \times s_3), \gamma', (s_1 \times s_2) \times s_3)$, où

$$\gamma'((x_1, x_2), x_3) = (x_1, (x_2, x_3)), \qquad x_i \in p(s_i).$$

1 Définition 2. — *On appellera* sous-catégorie de $\mathcal{H}$ stable par produit *une sous-catégorie* $\mathcal{H}'$ *de* $\mathcal{H}$ *telle que, si* $\bar{f}_i \in \mathcal{H}'$, *où* $i = 1, 2$, *on ait*

$$\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 \in \mathcal{H}'.$$

Remarquons que, même si Γ est contenu dans $\mathcal{H}'$, cette définition n'entraîne pas que $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}', \Gamma)$ soit une catégorie d'homomorphismes à produits finis.

Exemple. — Γ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ stable par produit, l'inverse de $f_1 \times f_2$, où $f_1 \in \Gamma$ et $f_2 \in \Gamma$, étant $(f_1^{-1} \times f_2^{-1})$.

2. Définition des catégories et groupoïdes structurés. — Nous désignerons encore par $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_\gamma)$ la catégorie d'homomorphismes (§ I, nº 3) dans laquelle $\mathcal{F}$ est la catégorie des foncteurs $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\perp})$ tels que $(\overline{\mathcal{C}}, \mathrm{F}, \mathcal{C}) \in \mathcal{M}$, et $p_{\mathcal{F}}$ le foncteur 1

$$(\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\perp}) \to (\overline{\mathcal{C}}, \mathrm{F}, \mathcal{C}).$$

Nous désignerons par $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ deux sous-catégories de $\mathcal{H}$ contenant Γ.

Définition 3. — *Nous appellerons* catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structurée] *un couple* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$, *où* $\mathcal{C}^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$, $s \in \mathcal{H}_0$ *et* $p(s) = \mathcal{C}$, *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) *Il existe* $s_0 \in \mathcal{H}_0$ *tel que* $p(s_0) = \mathcal{C}^{\cdot}_0$, $(s, \iota, s_0) \in \mathcal{H}$ *et* $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'$ [*resp.* $(s_0, \alpha, s) \in \mathcal{H}'$ *et* $(s_0, \beta, s) \in \mathcal{H}'$].

(2) *Soit* $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ *la classe des couples* $(f', f) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ *tels que* $f'.f$ *soit défini et* $\varkappa^{\cdot}$ *l'application* $(f', f) \to f'.f$, *où* $(f', f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$. *Il existe* $s' \underset{p}{\propto} s \times s$ *tel que* $p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ *et l'on a*

$$(s, \varkappa^{\cdot}, s') \in \mathcal{H}''.$$

En particulier une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$-structurée sera appelée *catégorie $\mathcal{H}$-structurée.* 2+

Proposition 5. — *Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *soit une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}, \mathcal{H}'')$-*structurée, il faut et il suffit que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *soit une catégorie* $\mathcal{H}((\mathcal{H}, \mathcal{H}), \mathcal{H}'')$-*structurée.*

En effet, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est $\mathcal{H}((\mathcal{H}, \mathcal{H}), \mathcal{H}'')$-structurée, on a

$$((s_0 \times s_0), [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}$$

par définition du produit dans $\mathcal{H}$. Inversement, la relation

$$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}$$

entraîne

$$(s_0, p_1[\beta, \alpha], s) = (s_0, \alpha, s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (s_0, \beta, s) \in \mathcal{H}.$$

Une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée [resp. $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structurée] est aussi une catégorie $\mathcal{H}$-structurée.

Proposition 6. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-] *structurée; l'élément* s_0 *défini par la condition* (1) *est une sous-structure de s; par suite il est unique.*

En effet, soit s_0 un élément vérifiant la condition (1). Soit $(s, g, S) \in \mathcal{H}$ tel que $g(p(s)) \subset \mathcal{C}^{\bullet}_0$. Alors on a

$$(s_0, \alpha, s).(s, g, S) = (s_0, \alpha g, S) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \alpha g(x) = g(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in p(S).$$

Donc

$$(s_0, g, S) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad s_0 \underset{p}{\propto} s.$$

Il résulte du corollaire du théorème 1 (§ I) que s_0 est unique.

Définition 4. — *Nous appellerons* groupoïde $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structuré [*resp.* groupoïde $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structuré] *un couple* $(G^{\bullet}, s)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

(1) $G^{\bullet}$ *est un groupoïde.*

(2) $(G^{\bullet}, s)$ *est une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-] *structurée.*

(3) *On a* $(s, j, s) \in \mathcal{H}$, *où* $j(g) = g^{-1}$ *pour tout* $g \in G$.

De la condition (3) résulte $(s, j, s) \in \Gamma$.

Définition 5. — *On appellera* foncteur $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structuré [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structuré] *un triplet* $((\mathcal{C}^{\bullet}_1, s_1), F, (\mathcal{C}^{\bullet}, s))$ *vérifiant les conditions suivantes :*

$(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *et* $(\mathcal{C}^{\bullet}_1, s_1)$ *sont des catégories* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-*structurées* [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-*structurées*].

On a

$$(\mathcal{C}^{\bullet}_1, F, \mathcal{C}^{\bullet}) \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad (s_1, F, s) \in \mathcal{H}.$$

Soit $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ la classe de toutes les catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurées et $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ la classe de tous les groupoïdes $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurés. Soit $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ la catégorie de tous les foncteurs structurés, dont la classe des unités est identifiée à $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$. Désignons par :

$\overline{p}$ l'application $((\mathcal{C}^{\bullet}_1, s_1), F, (\mathcal{C}^{\bullet}, s)) \to (\mathcal{C}^{\bullet}_1, F, \mathcal{C}^{\bullet})$ de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ dans $\mathcal{F}$;

$\overline{p}_{\mathcal{H}}$ l'application $((\mathcal{C}^{\bullet}_1, s_1), F, (\mathcal{C}^{\bullet}, s)) \to (s_1, F, s)$ de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ dans $\mathcal{H}$.

Soit $\overline{\Gamma}$ le groupoïde des éléments inversibles de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$. Appelons $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ (resp. $\overline{\Gamma}_{\mathcal{G}}$) la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ (resp. de $\overline{\Gamma}$) admettant $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ pour classe de ses unités.

On définit d'une manière analogue,

$$\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'') \quad [\text{resp. } \overline{\mathcal{G}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')]$$

dont le groupoïde des éléments inversibles sera noté $\overline{\Gamma}'$ (resp. $\overline{\Gamma}'_{\mathcal{G}}$).

En particulier, nous écrirons

$$\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = \overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}, \mathcal{H}), \mathcal{H}).$$

Remarque. — Les deux foncteurs p et $p_{\mathcal{F}}$ déterminent la catégorie induite $p^\star(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$, équivalente à $p^\star_{\mathcal{F}}(\mathcal{H}, p)$, dont les éléments (*voir* [3 *a*]) sont les couples $(\overline{\mathrm{F}}, \bar{h}) \in \mathcal{F} \times \mathcal{H}$ tels que $p_{\mathcal{F}}(\overline{\mathrm{F}}) = p(\bar{h})$. On peut identifier $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ à la sous-catégorie pleine de $p^\star(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$ ayant pour unités les catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurées. Nous allons démontrer que $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ est une sous-catégorie d'homomorphismes de la catégorie d'homomorphismes $p^\star(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$ au-dessus de $\mathcal{F}$. Un élément quelconque de $p^\star(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$ pourrait être appelé foncteur structuré dans $\mathcal{H}$, au sens vague.

THÉORÈME 1. — $(\mathcal{F}, \bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$ *est une catégorie d'homomorphismes dont* $(\mathcal{F}, \bar{p}, \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma}_{\mathcal{G}})$ *est une sous-catégorie d'homomorphismes.* 1

Démonstration. — Le seul point à démontrer est que les conditions

$$\overline{\mathrm{F}} = ((\mathcal{C}^\cdot_1, s_1), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^\cdot, s)) \in \overline{\Gamma} \quad \text{et} \quad (\mathcal{C}^\cdot, \bar{s}) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$$

entraînent l'existence de $(\mathcal{C}^\cdot_1, \bar{s}_1) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ tel que $(\bar{s}_1, \mathrm{F}, \bar{s}) \in \mathcal{H}$. Puisque $(\mathcal{M}, p, \Gamma)$ est une espèce de structures, il existe $(\bar{s}_1, \mathrm{F}, \bar{s}) \in \Gamma$. Montrons qu'on a $(\mathcal{C}^\cdot_1, \bar{s}_1) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$. Soient $s_0 \propto s$ et $s^1_0 \propto s_1$ tels que $p(s_0) = \mathcal{C}^\cdot_0$ et $p(s^1_0) = (\mathcal{C}^\cdot_1)_0$. D'après la proposition 6 (§ I), on a

$$(s^1_0, \mathrm{F}\iota, s_0) \in \Gamma \quad \text{et} \quad (s^1_0 \times s^1_0, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, s_0 \times s_0) \in \Gamma.$$

Il en résulte l'existence de $\bar{s}^1_0 \in \mathcal{H}_0$ tel que

$$p(\bar{s}^1_0) = (\mathcal{C}^\cdot_1)_0 \quad \text{et} \quad (\bar{s}^1_0, \mathrm{F}\iota, \bar{s}_0) \in \Gamma, \quad \text{où} \quad \bar{s}_0 \propto \bar{s} \quad \text{et} \quad p(\bar{s}_0) = \mathcal{C}^\cdot_0.$$

Alors $(\bar{s}^1_0 \times \bar{s}^1_0, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, \bar{s}_0 \times \bar{s}_0) \in \Gamma$ et, d'après la proposition 6 (§ I), $\bar{s}^1_0 \propto \bar{s}_1$. Comme $\mathcal{H}' \supset \Gamma$, on en déduit

$$(\bar{s}^1_0 \times \bar{s}^1_0, [\beta, \alpha], \bar{s}_1) = (\bar{s}^1_0 \times \bar{s}^1_0, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, \bar{s}_0 \times \bar{s}_0) . (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\beta, \alpha], \bar{s}) . (\bar{s}, \mathrm{F}^{-1}, \bar{s}_1) \in \mathcal{H}'.$$

Soient $s' \propto s \times s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^\cdot \star \mathcal{C}^\cdot$ et $s'_1 \propto s_1 \times s_1$ tel que $p(s'_1) = \mathcal{C}^\cdot_1 \star \mathcal{C}^\cdot_1$; en vertu de la proposition 7 (§ I), on a

$$(s'_1, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, s') \in \Gamma.$$

Soit $\bar{s}' \propto \bar{s} \times \bar{s}$ tel que $p(\bar{s}') = p(s')$; il existe

$$(\bar{s}'_1, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, \bar{s}') \in \Gamma, \quad \text{avec} \quad p(\bar{s}'_1) = p(s'_1)$$

et, d'après la proposition 6 (§ I), $\bar{s}'_1 \propto \bar{s}_1 \times \bar{s}_1$. Comme $\mathcal{H}''$ contient Γ :

$$(\bar{s}_1, \varkappa^\cdot_1, \bar{s}'_1) = (\bar{s}_1, \mathrm{F}, \bar{s}) . (\bar{s}, \varkappa^\cdot, \bar{s}') . (\bar{s}'_1, (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, \bar{s}')^{-1} \in \mathcal{H}''.$$

Donc

$$(\mathcal{C}^\cdot_1, \bar{s}_1) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0 \quad \text{et} \quad ((\mathcal{C}^\cdot_1, \bar{s}_1), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^\cdot, \bar{s})) \in \overline{\Gamma}.$$

Théorème 2. — $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \Gamma')$ *est une catégorie d'homomorphismes.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 1.

Théorème 3. — *Si $\mathcal{H}$ est saturé au-dessus de $\mathcal{M}$, alors $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$, $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\overline{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$ et $(\mathcal{H}, \overline{p}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$ sont des catégories d'homomorphismes.*

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1, après utilisation de la proposition 15 (§ I).

Définition 6. — *On appellera* sous-catégorie (*resp.* sous-groupoïde) $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structuré de $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ *une sous-structure de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *dans* $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$ [*resp. dans* $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma}_{\mathcal{G}})$]. *On définit de même une* sous-catégorie (*resp. un* sous-groupoïde) $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structuré.

Avant d'étudier les propriétés des catégories et groupoïdes structurés nous allons donner quelques exemples.

3. Premiers exemples. — I. Soit $(\mathcal{M}, 0, \tilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T})$ la catégorie d'homomorphismes définie au paragraphe I (n° 3).

Définition 7. — *Une catégorie (resp. un groupoïde) $\tilde{\mathcal{T}}$-structuré est appelé* catégorie (*resp.* groupoïde) topologique.

Cette définition coïncide avec celle de [3 *b*]. En effet, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie topologique au sens de [3 *b*], la condition (1) de la définition d'une catégorie $\tilde{\mathcal{T}}$-structurée est vérifiée en prenant pour s_0 la topologie induite sur $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ par la topologie donnée sur $\mathcal{C}$. De plus la condition (2) est vérifiée, s' étant la topologie induite par $s \times s$ sur $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$. Ainsi la définition d'une catégorie topologique peut encore s'exprimer sous la forme :

1° Les applications α et β sont des applications continues de s dans s.

2° L'application $\varkappa^{\cdot}$ est une application continue de s' dans s, où s' est
1+ la topologie induite par $s \times s$ sur $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$.

Nous verrons plus loin que la définition d'une catégorie $\mathcal{H}$-structurée peut toujours être ainsi simplifiée dans le cas où $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est résolvante à droite.

II. Soit $\tilde{\mathcal{C}}^r$ (resp. $\mathcal{C}^r_1$) la catégorie des applications r fois différentiables d'une variété r fois différentiable dans une autre (resp. sur une autre, de rang localement constant); $\tilde{\mathcal{C}}^r$ sera considéré comme catégorie d'homomorphismes
2 phismes au-dessus de $\tilde{\mathcal{E}}$.

DÉFINITION 8. — *Une catégorie (resp. un groupoïde)* $\tilde{\mathcal{C}}^r((\tilde{\mathcal{C}}_1^r, \mathcal{C}_1^r), \tilde{\mathcal{C}}^r)$*-structuré est appelé* catégorie (*resp.* groupoïde) *r* fois différentiable. 1
Cette définition coïncide avec celle de [3 *b*]. 2+

III. Soit $\mathcal{D}_0$ la classe des demi-groupes $D^{\perp}$ (c'est-à-dire D est une classe que nous supposerons appartenir à $\mathcal{M}_0$, munie d'une loi de composition $\perp$ associative). Soit $\mathcal{D}$ la classe des homomorphismes $(D_1^{\perp}, f, D^{\perp})$ entre demi-groupes, c'est-à-dire f est une application de D dans D_1 telle que

$$f(z' \perp z) = f(z') \perp f(z) \quad \text{quels que soient } z \text{ et } z' \in D.$$

$\mathcal{D}$ est une catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\mathcal{M}$ pour la projection $(D_1^{\perp}, f, D^{\perp}) \to (D_1, f, D)$.

Remarquons qu'on a $(D_1^{\perp}, \iota, D^{\perp}) \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, $D^{\perp}$ est un sous-demi-groupe de $D_1^{\perp}$ muni de la loi de composition induite par $\perp$.

PROPOSITION 7. — *Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \perp)$ *soit une catégorie* $\mathcal{D}$*-structurée il faut et il suffit que* $\perp$ *soit une loi de composition associative partout définie sur* $\mathcal{C}$ *et que l'application*

$$(g, f) \to g \perp f, \quad \text{où} \quad g \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad f \in \mathcal{C},$$

soit un foncteur de $\mathcal{C}^{\cdot} \times \mathcal{C}^{\cdot}$ *vers* $\mathcal{C}^{\cdot}$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, \perp)$ une catégorie $\mathcal{D}$-structurée; d'après la remarque précédente, $\mathcal{C}_0^{\cdot}$ est un sous-demi-groupe de $\mathcal{C}^{\perp}$, donc

$$e \perp e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot} \quad \text{si} \quad e \in \mathcal{C}_0^{\cdot} \quad \text{et} \quad e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}.$$

D'après la même remarque, les conditions $(g, f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ et $(g', f') \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ entraînent

$$(g' \perp g, f' \perp f) = ((g', f') \perp (g, f)) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot};$$

de plus, $\varkappa^{\cdot}$ étant un homomorphisme du demi-groupe $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ dans $\mathcal{C}^{\perp}$, on a

$$(g' \perp g) \cdot (f' \perp f) = (g' \cdot f') \perp (g \cdot f)$$

et les conditions de la proposition sont vérifiées. Inversement supposons ces conditions remplies; puisque $(g, f) \to g \perp f$ est un foncteur, on a

$$\alpha(g \perp f) = \alpha(g) \perp \alpha(f) \quad \text{et} \quad \beta(g \perp f) = \beta(g) \perp \beta(f);$$

les conditions $(g, f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ et $(g', f') \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ entraînent

$$(g' \cdot f') \perp (g \cdot f) = (g' \perp g) \cdot (f' \perp f).$$

Donc $(\mathcal{C}^{\cdot}, \perp)$ est $\mathcal{D}$-structurée.

IV. Dans l'exemple III, on peut remplacer $\mathcal{D}$ par la sous-catégorie $\mathcal{D}'$ (resp. $\mathcal{D}''$) de $\mathcal{D}$ formée des triplets $(D_1^{\perp}, f, D^{\perp})$ tels que $D^{\perp}$ et $D_1^{\perp}$ soient des demi-groupes admettant une unité $\imath$ (resp. un élément o tel que $z \perp o = o \perp z = o$ pour tout $z \in D$) et qu'on ait

$$f(\imath) = \imath \qquad [\text{resp. } f(o) = o].$$

Pour que $(\mathcal{C}^\cdot, \perp)$ soit $\mathcal{D}'$-(resp. $\mathcal{D}''$)-structurée il faut et il suffit que $(\mathcal{C}^\cdot, \perp)$
1+ soit une catégorie $\mathcal{D}$-structurée et que de plus :

$$\imath \in \mathcal{C}^\cdot_0 \qquad (\text{resp. } o \in \mathcal{C}^\cdot_0).$$

Une catégorie $\mathcal{D}'$-structurée est une catégorie avec multiplication strictement associative au sens de Benabou [1].

V. Soit G un demi-groupe. Soit [G] la catégorie définie de la façon suivante :

Une unité de [G] est un couple (Z, χ), où $Z \in \mathcal{M}_0$ et χ est une application de $G \times Z$ dans Z, c'est-à-dire une loi de composition externe sur Z, le composé $\chi(\gamma, z)$, où $\gamma \in G$ et $z \in Z$, étant noté $\gamma\chi z$. On suppose, de plus, vérifié l'axiome

(1) $$(\gamma'\gamma)\chi z = \gamma'\chi(\gamma\chi z), \quad \text{où } \gamma \in G, \quad \gamma' \in G \quad \text{et} \quad z \in Z.$$

Un morphisme de [G] est un triplet $((Z', \chi'), T, (Z, \chi))$, où $(Z, \chi) \in [G]_0$, $(Z', \chi') \in [G]_0$, $(Z', T, Z) \in \mathcal{M}$ et

$$\gamma\chi' T(z) = T(\gamma\chi z) \quad \text{pour tout } z \in Z \quad \text{et tout } \gamma \in G.$$

2 [G] est une catégorie d'homomorphismes au-dessus de $\mathcal{M}$ relativement à la projection

$$((Z', \chi'), T, (Z, \chi)) \to (Z', T, Z).$$

Soit [G, o] la sous-catégorie pleine de [G] ayant pour unités les couples (Z, χ) vérifiant l'axiome supplémentaire :

(2) Il existe $o \in Z$ tel que $\gamma\chi o = o$ pour tout $\gamma \in G$.

Si G admet une unité $\imath$, soit $[G, \imath]$ la sous-catégorie pleine de [G] ayant pour unités les couples (Z, χ) vérifiant la condition

(2') $\imath\chi z = z$ pour tout $z \in Z$.

Proposition 3. — *Soit $\mathcal{C}^\cdot$ une catégorie : pour que $(\mathcal{C}^\cdot, \chi)$ soit une catégorie [G]-structurée (resp. [G, o]-structurée, resp. $[G, \imath]$-structurée), il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

3 (1) $(\mathcal{C}^\cdot, \chi) \in [G]_0$ *(resp.* $(\mathcal{C}, \chi) \in [G, o]_0$, *resp.* $(\mathcal{C}^\cdot, \chi) \in [G, \imath]_0$).

(2) $(\gamma\chi\mathcal{C}^\cdot_0) \subset \mathcal{C}^\cdot_0$ *pour tout* $\gamma \in G$.

(3) *Si* $(g, f) \in \mathcal{C}^\cdot \star \mathcal{C}^\cdot$, *on a*

$$(\gamma\chi g, \gamma\chi f) \in \mathcal{C}^\cdot \star \mathcal{C}^\cdot \quad \text{pour tout } \gamma \in G$$

et

$$(\gamma\chi g)\cdot(\gamma\chi f) = \gamma\chi(g\cdot f).$$

Définition 9. — *Une catégorie* [G]*-structurée sera appelée* catégorie à demi-groupe G d'opérateurs. *Si* G *est un groupe, une catégorie* [G, 1]*-structurée sera appelée* catégorie à groupe G d'opérateurs.

Exemples. — 1° Soit $(\mathcal{C}^+, \chi)$ une catégorie à demi-groupe d'opérateurs G. Si $\mathcal{C}^+$ est un groupe abélien et si $\mathcal{C}^{\cdot} = G$ est commutatif, alors $(\mathcal{C}^+, \chi)$ est un anneau commutatif.

2° Soit E un espace topologique et G un groupe d'opérateurs sur E tel que, pour tout $\gamma \in G$, l'application

$$\tilde{\gamma} : \quad x \to \gamma x, \qquad \text{où} \quad x \in E,$$

soit un automorphisme de E. La catégorie des jets locaux des applications 1
continues de E dans E est alors une catégorie à groupe d'opérateurs G,
le composé $\gamma j^{\wedge}_x f$ étant $(j^{\wedge}_{x'} \tilde{\gamma})(j^{\wedge}_x f)(j^{\wedge}_x \tilde{\gamma})^{-1}$, où $x' = f(x)$. 2

4. Catégories doubles. — Soit $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\gamma})$ la catégorie d'homomorphismes définie au paragraphe I.

Définition 10. — *Une catégorie $\mathcal{F}$-structurée sera appelée* catégorie double.

Proposition 9. — *Soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie et $\mathcal{C}_1$ une sous-classe de $\mathcal{C}$. La relation $(\mathcal{C}^{\cdot}, \iota, \mathcal{C}_1^{\perp}) \in \mathcal{F}$ entraîne que $\mathcal{C}_1^{\perp}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot}$ munie de la loi de composition induite par celle de $\mathcal{C}^{\cdot}$.*

Démonstration. — Soient $f \in \mathcal{C}_1$ et $f' \in \mathcal{C}_1$; on a $\alpha^{\perp}(f) = \alpha^{\cdot}(f)$ et, si $f' \perp f$ est défini, $f' \perp f = f' . f$ puisque ι est un foncteur. Par suite, si $f' . f$ est défini, on aura

$$\alpha^{\perp}(f') = \alpha^{\cdot}(f') = \beta^{\cdot}(f) = \beta^{\perp}(f),$$

d'où $f' \perp f$ est défini et

$$f' \perp f = f' . f \in \mathcal{C}_1.$$

Corollaire. — *Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ soit une catégorie double, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) *$\mathcal{C}^{\perp}$ est une catégorie dont $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ est une sous-catégorie $(\mathcal{C}^{\cdot}_0)^{\perp}$.*

(2) *$\alpha^{\cdot}$ et $\beta^{\cdot}$ sont des foncteurs de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $(\mathcal{C}^{\cdot}_0)^{\perp}$.*

(3) *$\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ de $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$ et $\kappa^{\cdot}$ un foncteur de $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$.*

Rappelons que la loi de composition dans la catégorie-produit $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$ est définie par

$$((g', g), (f', f)) \to (g' \perp f', g \perp f)$$

si, et seulement si, $g \perp f$ et $g' \perp f'$ sont définis dans $\mathcal{C}^{\perp}$. Dans $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$, on a

$$\alpha^{\perp}(g', g) = (\alpha^{\perp}(g'), \alpha^{\perp}(g)) \qquad \text{et} \qquad \beta^{\perp}(g', g) = (\beta^{\perp}(g'), \beta^{\perp}(g)).$$

THÉORÈME 4. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *une catégorie double; alors* $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\cdot})$ *est aussi une catégorie double.*

Démonstration. — Soient $z^{\perp} \in \mathcal{C}_0^{\perp}$ et $z'^{\perp} \in \mathcal{C}_0^{\perp}$ tels que $(z'^{\perp}, z^{\perp}) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$. Puisque $(z'^{\perp}, z^{\perp})$ est une unité de $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ et que $\varkappa^{\cdot}$ est un foncteur de $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$, on a $z'^{\perp} . z^{\perp} \in \mathcal{C}_0^{\perp}$. Comme $\alpha^{\cdot}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $(\mathcal{C}_0^{\cdot})^{\perp}$, $\alpha^{\cdot}(z^{\perp}) \in \mathcal{C}_0^{\perp}$; de même $\beta^{\cdot}(z^{\perp}) \in \mathcal{C}_0^{\perp}$. Donc $\mathcal{C}_0^{\perp}$ est une sous-
1 catégorie $(\mathcal{C}_0^{\perp})$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$. Soient $(f', f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$; alors $(\alpha^{\perp}(f'), \alpha^{\perp}(f)) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ puisque $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$ et, $\varkappa^{\cdot}$ étant un foncteur, on a

$$\alpha^{\perp}(f') . \alpha^{\perp}(f) = \varkappa^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f'), \alpha^{\perp}(f)) = \varkappa^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f', f)) = \alpha^{\perp}(\varkappa^{\cdot}(f', f)) = \alpha^{\perp}(f' . f).$$

Si $z^{\cdot} \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$, on trouve $\alpha^{\perp}(z^{\cdot}) \in \mathcal{C}_0^{\cdot} \cap \mathcal{C}_0^{\perp}$ puisque $\mathcal{C}_0^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$; il en résulte que $\alpha^{\perp}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\cdot}$ vers $(\mathcal{C}_0^{\perp})^{\cdot}$; il en est de même pour $\beta^{\perp}$. Soit $\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ la classe des couples composables dans $\mathcal{C}^{\perp}$; soit $(g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; comme $\alpha^{\cdot}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $(\mathcal{C}_0^{\cdot})^{\perp}$, on a

$$\alpha^{\cdot}(g \perp f) = \alpha^{\cdot}(g) \perp \alpha^{\cdot}(f) \qquad \text{et} \qquad (\alpha^{\cdot}(g), \alpha^{\cdot}(f)) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}.$$

Supposons

$$(g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}, \qquad (g', f') \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}, \qquad (g', g) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot} \qquad \text{et} \qquad (f', f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}.$$

D'après la condition (3) du corollaire de la proposition 9, on a

$$(g', g) \perp (f', f) = (g' \perp f', g \perp f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$$

et

$$(g' \perp f') . (g \perp f) = (g' . g \perp f' . f).$$

On en déduit que $\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot} \times \mathcal{C}^{\cdot}$ et que l'appli-
2 cation $(g, f) \to g \perp f$, où $(g, f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ est un foncteur de $(\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp})$. vers $\mathcal{C}^{\cdot}$. Ceci prouve que $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\cdot})$ est une catégorie double.

PROPOSITION 10. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *est une catégorie double, on a*

$$\mathcal{C}_0^{\cdot} \cap \mathcal{C}_0^{\perp} = (\mathcal{C}_0^{\cdot})_0^{\perp} = (\mathcal{C}_0^{\perp})_0^{\cdot}.$$

En effet, soit $f \in \mathcal{C}$; puisque $\alpha^{\cdot}$ et $\beta^{\cdot}$ sont des foncteurs de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$, on a les relations

$$\alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f)); \qquad \alpha^{\cdot}(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f));$$
$$\beta^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\beta^{\cdot}(f)); \qquad \beta^{\cdot}(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\beta^{\cdot}(f)).$$

Par suite $(\mathcal{C}_0^{\cdot})_0^{\perp} = (\mathcal{C}_0^{\perp})_0^{\cdot}$. Si $z \in \mathcal{C}_0^{\perp} \cap \mathcal{C}_0^{\cdot}$, on trouve

$$z = \alpha^{\cdot}(z) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(z)) \in (\mathcal{C}_0^{\cdot})_0^{\perp}.$$

DÉFINITION 11. — *La classe* $(\mathcal{C}_0^{\cdot})_0^{\perp}$ *sera appelée* classe des sommets de *la*
3 *catégorie double* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *et désignée par le symbole* $\mathcal{C}_{00}$.

D'après ce qui précède, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double, les conditions suivantes sont vérifiées :

(*a*) $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie.

(*b*) $\mathcal{C}^{\perp}$ est une catégorie.

(*c*) $\alpha^{\cdot}$ et $\beta^{\cdot}$ (resp. $\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$) sont des foncteurs de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$ (resp. de $\mathcal{C}^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$).

(*d*) Axiome de permutabilité : Si les composés $(g'.g) \perp (f'.f)$ et $(g' \perp f').(g \perp f)$ sont définis, on a

$$(g'.g) \perp (f'.f) = (g' \perp f').(g \perp f).$$

(*e*) $\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ est une sous-catégorie $(\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp})^{\cdot}$ de $\mathcal{C}^{\cdot} \times \mathcal{C}^{\cdot}$ et l'application $\kappa^{\perp}$ est un foncteur de $(\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp})^{\cdot}$ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$.

(*f*) $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ de $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$ et l'application $\kappa^{\cdot}$ est un foncteur de $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$.

(*g*) $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ (resp. $\mathcal{C}^{\perp}_0$) est stable relativement à $\perp$ (resp. à .).

(*h*) Si les composés $g'.g$, $f'.f$, $g' \perp f'$ et $g \perp f$ sont définis, alors

$$(g'.g) \perp (f'.f) \quad \text{et} \quad (g' \perp f').(g \perp f)$$

sont définis et égaux.

(*i*) Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a

$$\alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f)); \qquad \beta^{\cdot}(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\beta^{\cdot}(f));$$
$$\alpha^{\cdot}(\beta^{\perp}(f)) = \beta^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f)); \qquad \beta^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\beta^{\cdot}(f)).$$

THÉORÈME 5. — *Soit $\mathcal{C}$ une classe munie de deux lois de composition . et $\perp$; pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ soit une catégorie double, il faut et il suffit que l'un des trois systèmes d'axiomes suivants soit vérifié :*

(1) (*a*), (*b*), (*c*), (*d*).

(2) (*a*), (*b*), (*e*), (*f*), (*i*).

(3) (*a*), (*b*), (*g*), (*h*), (*i*).

Démonstration. — Montrons que le système d'axiomes (1) entraîne que $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double. Soient $z^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et $z'^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$; si $z'^{\cdot} \perp z^{\cdot}$ est défini, comme $\alpha^{\cdot}$ est un foncteur, on a

$$\alpha^{\cdot}(z'^{\cdot} \perp z^{\cdot}) = \alpha^{\cdot}(z'^{\cdot}) \perp \alpha^{\cdot}(z^{\cdot}) = z'^{\cdot} \perp z^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0;$$

$\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$ étant des foncteurs, on a $\alpha^{\perp}(z^{\cdot}) \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et $\beta^{\perp}(z^{\cdot}) \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$; par conséquent, $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a $\alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f)) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f))$ puisque $\alpha^{\cdot}$ est un foncteur; de même les autres relations de l'axiome (*i*) sont aussi conséquence de l'axiome (*c*). Soit $(f', f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$; de (*i*) résulte

$$\alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f')) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(f')) = \alpha^{\perp}(\beta^{\cdot}(f)) = \beta^{\cdot}(\alpha^{\perp}(f))$$

et $(\alpha^{\perp}(f'),\ \alpha^{\perp}(f)) \in \mathcal{C}^{\cdot} \ast \mathcal{C}^{\cdot}$; d'une manière analogue, on trouve

$$(\beta^{\perp}(f'),\ \beta^{\perp}(f)) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}.$$

Soit $(g',\ g) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ tel que $(g',\ f') \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ et $(g,\ f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; d'après (c) :

$$\alpha^{\cdot}(g' \perp f') = \alpha^{\cdot}(g') \perp \alpha^{\cdot}(f') = \beta^{\cdot}(g) \perp \beta^{\cdot}(f) = \beta^{\cdot}(g \perp f),$$

donc $(g' \perp f',\ g \perp f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$. On en déduit que $\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp} \times \mathcal{C}^{\perp}$. Par ailleurs :

$$\alpha^{\perp}(g'.g) = \alpha^{\perp}(g').\alpha^{\perp}(g) = \beta^{\perp}(f').\beta^{\perp}(f) = \beta^{\perp}(f'.f)$$

entraîne $(g'.g,\ f'.f) \in \mathcal{C}^{\perp} \ast \mathcal{C}^{\perp}$ et, en vertu de (d), $\varkappa^{\cdot}$ est un foncteur de $(\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot})^{\perp}$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$. Par suite $(\mathcal{C}^{\cdot},\ \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double.

— Supposons le système d'axiomes (2) vérifié; si $z^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$, on a

$$\alpha^{\perp}(z^{\cdot}) = \alpha^{\cdot}(\alpha^{\perp}(z^{\cdot})) \in \mathcal{C}^{\cdot}_0;$$

1 si $z'^{\cdot} \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et si $(z'^{\cdot},\ z^{\cdot}) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$, le foncteur $\varkappa^{\cdot}$ applique l'unité $(z'^{\cdot},\ z^{\cdot})$ de $(\mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp})^{\cdot}$ sur $(z'^{\cdot} \perp z^{\cdot}) \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$; par conséquent $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$. Si $z^{\perp} \in \mathcal{C}^{\perp}_0$, on a

$$\alpha^{\cdot}(z^{\perp}) = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(z^{\perp})) \in \mathcal{C}^{\perp}_0.$$

Soit $(g,\ f) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; en vertu de (e), on a $(\alpha^{\cdot}(g),\ \alpha^{\cdot}(f)) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$ et

$$\alpha^{\cdot}(g \perp f) = \alpha^{\cdot}(\varkappa^{\perp}(g,\ f)) = \varkappa^{\perp}(\alpha^{\cdot}(g),\ \alpha^{\cdot}(f)) = \alpha^{\cdot}(g) \perp \alpha^{\cdot}(f),$$

c'est-à-dire $\alpha^{\cdot}$, et pour la même raison $\beta^{\cdot}$, sont des foncteurs de $\mathcal{C}^{\perp}$ vers $(\mathcal{C}^{\cdot}_0)^{\perp}$. En tenant compte de (f), ceci démontre que $(\mathcal{C}^{\cdot},\ \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double.

— Enfin, supposons vérifié le système d'axiomes (3). Soit $(g,\ f) \in \mathcal{C}^{\perp} \ast \mathcal{C}^{\perp}$; comme précédemment, on prouve que (i) entraîne $(\alpha^{\cdot}(g),\ \alpha^{\cdot}(f)) \in \mathcal{C}^{\perp} \star \mathcal{C}^{\perp}$; en vertu de (h), le composé $(g \perp f).(\alpha^{\cdot}(g) \perp \alpha^{\cdot}(f))$ est défini et, puisque $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ est stable relativement à $\perp$, on trouve

$$\alpha^{\cdot}(g) \perp \alpha^{\cdot}(f) = \alpha^{\cdot}(g \perp f).$$

On en déduit que l'axiome (c) est vérifié; de plus l'axiome (h) entraîne (d); donc le système d'axiomes (1) est vérifié et $(\mathcal{C}^{\cdot},\ \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double en vertu du début de la démonstration.

Remarque. — 1° Si tous les éléments $z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1$, où $z^{\cdot}_i \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ (resp. $z^{\perp}_2.z^{\perp}_1$, où $z^{\perp}_i \in \mathcal{C}^{\perp}_0$) sont réguliers [3 *a*] dans $\mathcal{C}^{\cdot}$ (resp. dans $\mathcal{C}^{\perp}$), les seuls axiomes (a), (b), (h), (i) entraînent que $(\mathcal{C}^{\cdot},\ \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double. En effet, de (h) et (i) résulte

$$(z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1).(z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1) = z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1,$$

d'où

$$\alpha^{\cdot}(z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1) = z^{\cdot}_2 \perp z^{\cdot}_1 \in \mathcal{C}^{\cdot}_0.$$

Ceci prouve que (g) est vérifié.

2° Bien que les lois de composition . et ⊥ aient des propriétés symétriques, il sera plus commode de supposer que la donnée de la catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ comprend aussi l'ordre dans lequel on considère les lois de composition; donc $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ signifie : $\mathcal{C}^{\cdot}$ est la catégorie qui est structurée dans $\mathcal{F}$ par $\mathcal{C}^{\perp}$.

Une *sous-catégorie double* de la catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une sous-classe $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{C}$, qui est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot}$ et une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$. Alors $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathcal{C}_1^{\perp})$ est une catégorie double.

Un foncteur $\mathcal{F}$-structuré sera appelé *foncteur double*. Par définition un foncteur double $\overline{\mathrm{F}} = ((\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathcal{C}_1^{\perp}), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}))$ est défini par une application F de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}_1$ telle que $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\cdot})$ et $(\mathcal{C}_1^{\perp}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\perp})$ soient des foncteurs. D'après le théorème 1, les foncteurs doubles forment une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{F}, \overline{p_{\mathcal{F}}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}_{\cdot})$, où

$$\overline{p_{\mathcal{F}}}(\overline{\mathrm{F}}) = (\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\cdot});$$

d'après le théorème 2, ils forment aussi une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{F}, \overline{p}'_{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}_{\cdot})$, où

$$\overline{p}'_{\mathcal{F}}(\mathrm{F}) = (\overline{p_{\mathcal{F}}})_{\mathcal{F}}(\overline{\mathrm{F}}) = (\mathcal{C}_1^{\perp}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\perp}).$$

Catégories doubles de quadruplets. — Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux catégories ayant même classe d'unités Δ. Soit $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$ la classe des quadruplets (f'_2, f'_1, f_1, f_2), où $f_i \in \mathcal{C}_i$, $f'_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, 2$,

$$\alpha(f_1) = \alpha(f_2); \qquad \alpha(f'_1) = \beta(f_2); \qquad \beta(f_1) = \alpha(f'_2); \qquad \beta(f'_1) = \beta(f'_2).$$

Sur $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$, on définit les deux lois de composition :

$$(\bar{f}'_2, \bar{f}'_1, \bar{f}_1, \bar{f}_2) \boxed{\vert} (f'_2, f'_1, f_1, f_2) = (\bar{f}'_2, \bar{f}'_1 . f'_1, \bar{f}_1 . f_1, f_2) \quad \text{si, et seulement si, } \bar{f}_2 = f'_2;$$
$$(\bar{f}'_2, \bar{f}'_1, \bar{f}_1, \bar{f}_2) \boxminus (f'_2, f'_1, f_1, f_2) = (\bar{f}'_2 . f'_2, \bar{f}'_1, f_1, \bar{f}_2 . f_2) \quad \text{si, et seulement si, } \bar{f}_1 = f'_1.$$

Définition 12. — *La première des lois de composition sur* $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$ *définie ci-dessus sera appelée* multiplication longitudinale, *la seconde,* multiplication latérale. 1

Proposition 11. — $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$, *munie des multiplications longitudinale et latérale, est une catégorie double.*

La catégorie longitudinale sera notée $\boxed{\vert}(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$, la catégorie latérale $\boxminus(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$; les applications source et but dans ces catégories seront désignées par $\alpha^{\boxed{\vert}}$ et $\beta^{\boxed{\vert}}$, resp. par $\alpha^{\boxminus}$ et $\beta^{\boxminus}$. La classe des sommets de la catégorie double $\square(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1)$ s'identifie à Δ.

Définition 13. — *Étant données deux catégories doubles* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ *et* $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathcal{C}_1^{\perp})$, *on dira que* $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mathcal{C}_1^{\perp})$ *est une* catégorie double quotient de $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$

s'il existe une relation d'équivalence ρ sur $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C}^{\cdot}_1$ (resp. $\mathcal{C}^{\perp}_1$) s'identifie
1 *à la catégorie quotient* [3 *e*] *de $\mathcal{C}^{\cdot}$ (resp. de $\mathcal{C}^{\perp}$) par ρ.*

En particulier, le résultat suivant résulte d'un théorème de [3 *a*]. Soit π un foncteur double d'une catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ sur une catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mathcal{C}^{\perp}_1)$. Soit ρ_π la relation d'équivalence définie sur $\mathcal{C}$ par

$$f \sim f' \quad \text{si, et seulement si} \quad \pi(f) = \pi(f').$$

Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mathcal{C}^{\perp}_1)$ s'identifie à la catégorie double quotient de $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ par ρ_π, il faut et il suffit que π vérifie les conditions :

(1) Si $g_1 . f_1$ est défini dans $\mathcal{C}^{\cdot}_1$, il existe $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$ tels que $g . f$ soit défini, $g_1 = \pi(g)$ et $f_1 = \pi(f)$.

(2) Si $g_1 \perp f_1$ est défini dans $\mathcal{C}^{\perp}_1$, il existe $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$ tels que $g \perp f$ soit défini, $g_1 = \pi(g)$ et $f_1 = \pi(f)$.

Théorème 6. — *Une catégorie double $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ admet pour catégorie double quotient une sous-catégorie de la catégorie double $\square(\mathcal{C}^{\cdot}_0, \mathcal{C}^{\perp}_0)$, où $\mathcal{C}^{\cdot}_0$ (resp. $\mathcal{C}^{\perp}_0$) est muni de sa structure de sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\perp}$ (resp. de $\mathcal{C}^{\cdot}$).*

En effet l'application

$$c : \ f \to (\beta^{\cdot}(f), \beta^{\perp}(f), \alpha^{\perp}(f), \alpha^{\cdot}(f))$$

est un foncteur double de $\mathcal{C}$ vers $\square(\mathcal{C}^{\cdot}_0, \mathcal{C}^{\perp}_0)$ vérifiant les conditions ci-dessus.

Définition 14. — *Avec les notations précédentes, l'élément $c(f)$ sera appelé* cadre de f dans $\mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Rappelons [3 *a*] qu'un *quatuor* de $\mathcal{C}$ est un quadruplet $(f'_2, f'_1, f_1, f_2) \in \square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ tel que

$$f'_2 . f_1 = f'_1 . f_2 .$$

Soit $\square\mathcal{C}$ la sous-classe de $\square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ formée des quatuors de $\mathcal{C}$.

Proposition 12. — *$\square\mathcal{C}$ est une sous-catégorie double de $\square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$.*

Soit $\overline{F} = (\mathcal{C}_1, F, \mathcal{C}) \in \mathcal{F}$; ce foncteur se prolonge en un foncteur double $\square\overline{F} = ((\boxed{|}\mathcal{C}_1, \boxminus\mathcal{C}_1), \square F, (\boxed{|}\mathcal{C}, \boxminus\mathcal{C}))$, où $\square F$ est l'application définie par

$$\square F(f'_2, f'_1, f_1, f_2) = (F(f'_2), F(f'_1), F(f_1), F(f_2)).$$

L'application $\square : \overline{\mathrm{F}} \to \square\, \overline{\mathrm{F}}$ est un foncteur de $\mathcal{F}$ vers $\overline{\mathcal{F}}$. Nous désignerons par $\boxbar$ (resp. $\boxminus$) le foncteur de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}$:

$$\overline{p_{\mathcal{F}}}.\square : \ \overline{\mathrm{F}} \to (\boxbar\, \mathcal{C}_1, \square\, \mathrm{F}, \boxbar\, \mathcal{C}) = \boxbar\, \overline{\mathrm{F}}$$

$$[\text{resp. } \overline{p'_{\mathcal{F}}}.\square : \ \overline{\mathrm{F}} \to (\boxminus\, \mathcal{C}_1, \square\, \mathrm{F}, \boxminus\, \mathcal{C}) = \boxminus\, \overline{\mathrm{F}}],$$

où $(\mathcal{C}_1, \mathrm{F}, \mathcal{C}) \in \mathcal{F}$. Pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_0$, soit $\varepsilon(\mathcal{C})$ l'équivalence de $\boxbar\, \mathcal{C}$ sur $\boxminus\, \mathcal{C}$ 1
définie par

$$(f'_2, f'_1, f_1, f_2) \to (f'_1, f'_2, f_2, f_1).$$

Nous désignerons par ε l'application $\mathcal{C} \to \varepsilon(\mathcal{C})$.

PROPOSITION 13. — *Avec les notations précédentes,* $(\boxminus, \varepsilon, \boxbar)$ *est une équivalence naturelle dans* $\mathcal{F}$.

Dans la construction précédente, on peut remplacer $\square\, \mathcal{C}$ par la catégorie double $\square(\mathcal{C}, \mathcal{C})$ et la proposition 13 serait encore valable.

Soient $\mathcal{C}^{\cdot}_1$ une catégorie et $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ une catégorie double; soit $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot}_1)$, la classe des foncteurs de $\mathcal{C}^{\cdot}_1$ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$.

PROPOSITION 14. — $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot}_1)$ *est une catégorie pour la loi de composition* $(\Phi', \Phi) \to \Phi' \perp \Phi$, *où* $\Phi' \perp \Phi(f) = \Phi'(f) \perp \Phi(f)$ *si, et seulement si,* $\Phi'(f) \perp \Phi(f)$ *est défini pour tout* $f \in \mathcal{C}_1$.

Cette proposition résulte de l'axiome de permutabilité; l'unité à droite de Φ est le foncteur $\alpha^{\perp}\Phi$, son unité à gauche, le foncteur $\beta^{\perp}\Phi$.

Remarque. — Si Φ est un foncteur double de $(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mathcal{C}^{\perp}_1)$ vers $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$, $\alpha^{\perp}\Phi$ n'est plus un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp}_1$ vers $\mathcal{C}^{\perp}$, donc la classe des foncteurs doubles de $(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mathcal{C}^{\perp}_1)$ vers $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ ne s'identifie pas à une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot}_1)$, contrairement à ce qui a été énoncé dans un corollaire de [3 *e*].

La définition d'une transformation naturelle $(\varphi', \tau, \varphi)$ d'un foncteur φ vers un foncteur φ' conduit immédiatement au théorème suivant (pour les notations, *voir* [3 *d*]) :

THÉORÈME 7. — *Soient* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux catégories; la catégorie longitudinale* $\mathcal{N}(\mathcal{C}', \mathcal{C})$ *des transformations naturelles entre foncteurs de* $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{C}'$ *s'identifie à la catégorie* $\mathcal{F}(\boxminus\, \mathcal{C}', \mathcal{C})$, *en identifiant la transformation naturelle* $(\varphi', \tau, \varphi)$ *au foncteur* $\Phi \in \mathcal{F}(\boxminus\, \mathcal{C}', \mathcal{C})$ *tel que*

$$\Phi(f) = (\varphi'(f), \tau(\beta(f)), \tau(\alpha(f)), \varphi(f)) \qquad \textit{pour tout} \quad f \in \mathcal{C}.$$

Inversement $\Phi \in \mathcal{F}(\boxminus \mathcal{C}', \mathcal{C})$ *s'identifie à la transformation naturelle* $(\varphi', \tau, \varphi)$, *où*

$$\varphi = \alpha^{\boxed{\text{I}}}\Phi, \qquad \varphi' = \beta^{\boxed{\text{I}}}\Phi$$

et

$$(\varphi'(e), \tau(e), \tau(e), \varphi(e)) = \Phi(e) \qquad \textit{pour tout} \quad e \in \mathcal{C}_0.$$

Ce théorème montre que si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double, un foncteur Φ d'une catégorie Γ vers $\mathcal{C}^{\cdot}$ peut être considéré comme une trans-
1+ formation naturelle généralisée de $\alpha^{\perp}\Phi$ vers $\beta^{\perp}\Phi$. Nous verrons plus loin (§ III) une autre généralisation de la notion de transformation naturelle, à savoir la notion de quintette [3 *e*].

5. Catégories n-uples. — D'après le théorème 2, la catégorie $\overline{\mathcal{F}}$ des foncteurs doubles est une catégorie d'homomorphismes $(\mathfrak{M}, p_{\mathcal{F}}\, \overline{p_{\mathcal{F}}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mathcal{F}}_{\cdot})$ au-dessus de $\mathfrak{M}$. Nous verrons au n° 7 que cette catégorie d'homomorphismes est résolvante à droite et à produits finis. Par suite, on peut définir des foncteurs $\overline{\mathcal{F}}$-structurés et plus généralement poser la définition :

Définition 15. — *Soit* $\mathcal{F}^{[n-1]}$ *la catégorie des foncteurs* $(n-1)$*-uples considérée comme catégorie d'homomorphismes au-dessus de* $\mathfrak{M}$. *Une catégorie* $\mathcal{F}^{[n-1]}$*-structurée sera appelée* catégorie n-uple, *un foncteur* $\mathcal{F}^{[n-1]}$*-structuré,* foncteur n-uple. *Une catégorie 2-uple est une catégorie double.*

D'après le théorème 13 et le corollaire 2 du théorème 14, si $\mathcal{F}^{[n-1]}$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite au-dessus de $\mathfrak{M}$, il en est de même pour $\mathcal{F}^{[n]} = \overline{\mathcal{F}^{[n-1]}} =$ catégorie des foncteurs $\mathcal{F}^{[n-1]}$-structurés, ce qui justifie la définition par récurrence. Du théorème 13, il résulte aussi que si $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ et $(\overline{\mathcal{C}}^{\top_i})_{i \leq n}$ sont des catégories n-uples, alors la classe $\mathcal{C} \times \overline{\mathcal{C}}$, munie des lois de composition $(\perp_i) \times (\top_i)$ où $i \leq n$, est une catégorie n-uple.

Théorème 8. — *Soit* $\mathcal{C}$ *une classe et soient* $\perp_i$, *où* $i \leq n$, *des lois de composition sur* $\mathcal{C}$ *telles que* $\mathcal{C}^{\perp_i}$ *soit une catégorie. Pour que* $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ *soit une catégorie n-uple, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) *Soient* α^i *et* β^i *les applications source et but dans* $\mathcal{C}^{\perp_i}$; *alors* α^i *et* β^i *sont des foncteurs de* $\mathcal{C}^{\perp_j}$ *vers* $\mathcal{C}^{\perp_j}$, *pour tout* $i \leq n$ *et tout* $j \leq n$, $j \neq i$.

(2) *Si les composés* $(g' \perp_i g) \perp_j (f' \perp_i f)$ *et* $(g' \perp_j f') \perp_i (g \perp_j f)$ *sont définis, on a*

2 $$(g' \perp_i g) \perp_j (f' \perp_i f) = (g' \perp_j f') \perp_i (g \perp_j f), \qquad \textit{où} \quad i \leq n \quad \textit{et} \quad j \leq n.$$

Démonstration. — Supposons le théorème démontré pour une catégorie m-uple, où $m \leq n-1$, et montrons-le pour une catégorie n-uple. Soit $(\mathcal{C}^{\perp_1}, (\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leq i \leq n})$ une catégorie n-uple. Par hypothèse α^1 est un foncteur $(n-1)$-uple. Soit $e^1 \in \mathcal{C}_0^{\perp_1}$; on a $\alpha^i(e^1) \in \mathcal{C}_0^{\perp_1}$, puisque $\mathcal{C}_0^{\perp_1}$ est par définition une sous-catégorie $(n-1)$-uple de la catégorie $(n-1)$-uple $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n}$. Supposons $g \perp_1 f$ défini; puisque la classe $\mathcal{C}^{\perp_i} \star \mathcal{C}^{\perp_i}$ des couples composables relativement à $\perp_i$ est une sous-catégorie $(n-1)$-uple de la catégorie-produit $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n} \times (\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n}$, le composé $(\alpha^i(g)) \perp_1 (\alpha^i(f))$ est défini; du fait que l'application

$$\varkappa^{\perp_1} : \quad (g, f) \to g \perp_1 f$$

est un foncteur $(n-1)$-uple, on déduit

$$\varkappa^{\perp_1}(\alpha^i(g), \alpha^i(f)) = \varkappa^{\perp_1}(\alpha^i(g, f)) = \alpha^i(g \perp_1 f),$$

d'où

$$\alpha^i(g) \perp_1 (\alpha^i(f)) = \alpha^i(g \perp_1 f).$$

Ceci prouve que α^i est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_1}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_1}$; par conséquent, la condition (1) du théorème est vérifiée. La condition (2) résulte de ce que $\varkappa^{\perp_1}$ est un foncteur $(n-1)$-uple. — Inversement supposons les conditions (1) et (2) du théorème vérifiées. Comme α^i est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_j}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_j}$, si $j \neq i$, on a

$$\alpha^i(\alpha^1(f)) = \alpha^1(\alpha^i(f)), \qquad \text{où} \quad f \in \mathcal{C},$$

et

$$\alpha^1(e^1 \perp_i e'^1) = e^1 \perp_i e'^1, \qquad \text{où} \quad e^1 \in \mathcal{C}_0^{\perp_1} \qquad \text{et} \quad e'^1 \in \mathcal{C}_0^{\perp_1};$$

donc $\mathcal{C}_0^{\perp_1}$ est une sous-catégorie $(n-1)$-uple de $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n}$. Nous allons démontrer que $(\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$ est une sous-catégorie $(n-1)$-uple de la catégorie $(n-1)$-uple produit $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n} \times (\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leqq i \leqq n}$. Supposons $(g, f) \in (\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$; puisque α^i est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_1}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_1}$, on a

$$\alpha^i(g \perp_1 f) = \alpha^i(g) \perp_1 \alpha^i(f),$$

donc $(\alpha^i(g), \alpha^i(f)) \in (\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$; de même $(\beta^i(g), \beta^i(f)) \in (\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$. Supposons de plus $(g', f') \in (\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$ tel que $g' \perp_i g$ et $f' \perp_i f$ soient définis pour tout $2 \leqq i \leqq n$. On trouve

$$\alpha^1(g' \perp_i g) = \alpha^1(g') \perp_i \alpha^1(g) = \beta^1(f') \perp_i \beta^1(f) = \beta^1(f' \perp_i f);$$

par conséquent

$$((g' \perp_i g), (f' \perp_i f)) \in (\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1}) \qquad \text{pour} \quad 2 \leqq i \leqq n$$

et $(\mathcal{C}^{\perp_1}) \star (\mathcal{C}^{\perp_1})$ est une sous-catégorie. Il ne reste qu'à montrer que $\varkappa^{\perp_1}$ est un foncteur $(n-1)$-uple. On a

$$\varkappa^{\perp_1}((g', f') \perp_i (g, f)) = (g' \perp_i g) \perp_1 (f' \perp_i f);$$

comme

$$\alpha^i(g'\perp_1 f') = \alpha^i(g')\perp_1\alpha^i(f') = \beta^i(g)\perp_1\beta^i(f) = \beta^i(g\perp_1 f),$$

le composé $(g'\perp_1 f')\perp_i(g\perp_1 f)$ est défini; la condition (2) entraîne

1 $$\varkappa^{\perp_1}((g',f')\perp_i(g,f)) = (g'\perp_i g)\perp_1(f'\perp_i f) = (g'\perp_1 f')\perp_i(g\perp_1 f) = \varkappa^{\perp_1}(g',f')\perp_i\varkappa^{\perp_1}(g,f).$$

Ceci démontre le théorème.

Soit $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i\leq n}$ une catégorie n-uple. Désignons par $\lambda^{i_1}\ldots\lambda^{i_p}$ un fonc-
2 teur $(n-p)$-uple tel que, pour tout $j\leq p$, on ait

$$1\leq i_j\leq n,\qquad i_j\neq i_{j'}\quad\text{si}\quad j\neq j'\quad\text{et}\quad \lambda^{i_j}=\alpha^{i_j}\quad\text{ou}\quad\beta^{i_j}.$$

Un tel foncteur est invariant par toute permutation de l'ensemble $(i_1,\ldots,i_p)$ en vertu de l'axiome de permutabilité [condition (2) du théorème 8]. L'image de $f\in\mathcal{C}$ par un tel foncteur $\lambda^{i_1}\ldots\lambda^{i_p}$ est appelée $(n-p)$-*face* de f. Les 0-faces seront appelées *sommets* de f; la classe des sommets de $\mathcal{C}$ est la classe $\bigcap_{i\leq n}\mathcal{C}_0^{\perp_i}$. Les 1-faces seront appelées *arêtes* de $\mathcal{C}$.

Remarques. — 1° Soit $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ une suite de foncteurs telle que
3 $\gamma_i=\alpha^i$, β^i ou Id, et $\gamma_i=\text{Id}$ pour exactement p indices i. Pour tout $f\in\mathcal{C}$, la famille $(\gamma_1\ldots\gamma_n(f))_{(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)}$ sera appelée $(n-p)$-*cadre* de f, noté $c_{n-p}(f)$. En particulier, les $(n-1)$-cadres forment une catégorie n-uple, la loi de composition $\perp_i$ pour tout $i\leq n$, étant définie par

$$c_{n-1}(f')\perp_i c_{n-1}(f) = c_{n-1}(f'\perp_i f)$$

4 si, et seulement si, $f'\perp_i f$ est défini. Cette catégorie n-uple est une catégorie n-uple quotient de $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i\leq n}$.

2° Soit $\mathcal{C}^{\perp}$ une catégorie. Par récurrence on peut définir une catégorie n-uple $(\mathcal{C}^{[n]})^{\perp_i}_{i\leq n}$ dans laquelle tout élément s'identifie à son 1-cadre :

$$(\mathcal{C}^{[1]})^{\perp_1}=\mathcal{C}^{\perp},$$
$$\mathcal{C}^{[n]}=\square\left((\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_1},\ (\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_1}\right);$$

par récurrence on montre que, pour tout $i\leq(n-1)$, il existe une bijec-
5+ tion ε_n^i de $\mathcal{C}^{[n]}$ sur $\square\left((\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_i},\ (\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_i}\right)$; la loi de composition $\perp_i$ sur $\mathcal{C}^{[n]}$ est l'image réciproque par ε_n^i de la multiplication longitudinale sur $\varepsilon_n^i(\mathcal{C}^{[n]})$. La loi de composition $\perp_n$ est définie par

$$(\bar h',\bar k',\bar k,\bar h)\perp(h',k',k,h) = (\bar h'\boxminus h',\ \bar k'\boxminus k',\ \bar k\boxminus k,\ \bar h\boxminus h)$$

si, et seulement si, $\bar h'\boxminus h'$, $\bar k'\boxminus k'$, $\bar k\boxminus k$ et $\bar h\boxminus h$ sont définis dans $\boxminus\left((\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_1},\ (\mathcal{C}^{[n-1]})^{\perp_1}\right)$. La catégorie n-uple $(\mathcal{C}^{[n]})^{\perp_i}_{i\leq n}$ admet pour sous-catégorie n-uple la classe $\mathcal{C}^{\boxed{n}}$ définie par récurrence par

$$\mathcal{C}^{\boxed{1}}=\mathcal{C}\qquad\text{et}\qquad\mathcal{C}^{\boxed{n}}=\square\left((\mathcal{C}^{\boxed{n-1}})^{\perp_1}\right).$$

En particulier

$$\mathcal{C}^{\boxed{2}} = \square\mathcal{C}.$$

3° Soient $\mathcal{C}_p = (\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq p}$ une catégorie p-uple et $\overline{\mathcal{C}}_n = (\overline{\mathcal{C}}^{\perp_i})_{i \leq n}$ une catégorie n-uple. La classe $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{C}}_n, \mathcal{C}_p)$ des foncteurs p-uples de $\mathcal{C}_p$ vers $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp_i})_{i \leq p}$ est une catégorie $(n-p)$-uple pour les lois de composition $\perp_j$, où $p < j \leq (n-1)$, définies par

$$(\Phi' \perp_j \Phi)(f) = (\Phi'(f) \perp_j \Phi(f))$$

si, et seulement si, $\Phi'(f) \perp_j \Phi(f)$ est défini pour tout $f \in \mathcal{C}$. En particulier, si $p = 1$, la classe des foncteurs de $\mathcal{C}^{\perp_1}$ vers $\overline{\mathcal{C}}^{\perp_1}$ est une catégorie $(n-1)$-uple. Si $p = (n-1)$, la classe des foncteurs $(n-1)$-uples de $\mathcal{C}_{n-1}$ vers $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp_i})_{i \leq n-1}$ est une catégorie. Un élément Φ de cette catégorie peut être considéré comme une *transformation naturelle généralisée du foncteur $(n-1)$-uple $\alpha^{\perp_n}\Phi$ vers le foncteur $(n-1)$-uple $\beta^{\perp_n}\Phi$.* 1

Proposition 15. — *Pour qu'une catégorie n-uple $(\mathcal{C}^{\perp_1}, (\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leq i \leq n})$ soit un groupoïde $\mathcal{F}^{[n-1]}$-structuré, il faut et il suffit que $\mathcal{C}^{\perp_1}$ soit un groupoïde.*

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire; montrons qu'elle est suffisante. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, nous désignerons par f^{-1} l'inverse de f dans le groupoïde $\mathcal{C}^{\perp_1}$. Il suffit de prouver que l'application $f \to f^{-1}$ est un foncteur $(n-1)$-uple de $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leq i \leq n}$ sur $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leq i \leq n}$. Puisque $\alpha^{\perp_i}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_1}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_1}$, on a

$$(z^i)^{-1} = (\alpha^{\perp_i}(z^i))^{-1} = \alpha^{\perp_i}((z^i)^{-1}) \in \mathcal{C}^{\perp_i}_0 \qquad \text{pour tout} \quad z^i \in \mathcal{C}^{\perp_i}_0,$$

où $2 \leq i \leq n$. Puisque $\varkappa^{\perp_i}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_1} \star \mathcal{C}^{\perp_1}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_1}$, on trouve

$$(g^{-1} \perp_i f^{-1}) = \varkappa^{\perp_i}(g^{-1}, f^{-1}) = \varkappa^{\perp_i}((g, f)^{-1}) = (\varkappa^{\perp_i}(g, f))^{-1} = (g \perp_i f)^{-1};$$

donc l'application $f \to f^{-1}$ est un foncteur de $\mathcal{C}^{\perp_i}$ vers $\mathcal{C}^{\perp_i}$ pour $2 \leq i \leq n$ et $(\mathcal{C}^{\perp_1}, (\mathcal{C}^{\perp_i})_{2 \leq i \leq n})$ est un groupoïde $\mathcal{F}^{[n-1]}$-structuré.

Définition 16. — *On appellera* groupoïde n-uple *une catégorie n-uple $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ telle que $\mathcal{C}^{\perp_i}$ soit un groupoïde pour tout $i \leq n$.*

En particulier, il résulte de la proposition 15 que si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est un groupoïde double, alors $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ et $(\mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C}^{\cdot})$ sont des groupoïdes $\mathcal{F}$-structurés. 2

6. Structures d'ordre sur une catégorie.

Définition 17. — *On dira qu'une catégorie n-uple* $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ définit un ordre n-uple [1] *si chacune des catégories* $\mathcal{C}^{\perp_i}$ *définit un ordre* $<_i$ sur *la classe de ses unités.*

Dans ce cas, la classe Δ des sommets de $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ est munie des n ordres induits par $<_i$. Remarquons que la donnée de Δ et des n ordres induits ne détermine pas $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$. En particulier, soit une classe munie de deux ordres $<_1$ et $<_2$; soit $\Delta_0^{\cdot}$ (resp. $\Delta_0^{\perp}$) la catégorie des couples (E, e), où $e <_1 E$ (resp. $e <_2 E$); la catégorie double $\square(\Delta_0^{\cdot}, \Delta_0^{\perp})$ est la plus grande catégorie double définissant un ordre double qui induit sur Δ les ordres $<_1$ et $<_2$; ceci signifie que toute catégorie double définissant un ordre double induisant les ordres $<_1$ et $<_2$ sur Δ s'identifie à une sous-catégorie double de $\square(\Delta_0^{\cdot}, \Delta_0^{\perp})$. Ce résultat peut se généraliser au cas où l'on se donne n ordres sur la classe Δ.

Proposition 16. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ *une catégorie n-uple vérifiant la condition : Deux éléments de* $\mathcal{C}$ *ayant le même ensemble de sommets sont identiques. Alors* $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i \leq n}$ *définit un ordre n-uple.*

En effet, la classe des sommets de $f \in \mathcal{C}$ est identique à la réunion des classes des sommets de $\alpha^{\perp_i} f$ et $\beta^{\perp_i} f$; par suite, si f et g ont même ensemble d'unités dans $\mathcal{C}^{\perp_i}$, ils ont aussi même ensemble de sommets et $f = g$.

1 Soit $\tilde{\Omega}$ la catégorie des homomorphismes entre classes ordonnées et $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ la catégorie d'homomorphismes considérée au paragraphe I. $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \Omega)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite. Le produit de $(A, <)$ avec $(A', <)$ est la classe ordonnée $(A \times A', <)$, dont l'ordre est l'ordre produit des ordres de A et de A'.

Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie et $(\mathcal{C}, <)$ est une classe ordonnée.

(2) $f' < f$ entraîne $\alpha(f') < \alpha(f)$ et $\beta(f') < \beta(f)$.

(3) Si l'on a $f' < f$, $g' < g$, et si $g.f$ et $g'.f'$ sont définis, alors $g'.f' < g.f$.

Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit un groupoïde $\tilde{\Omega}$-structuré, il faut de plus que :

(4) $f' < f$ entraîne $f'^{-1} < f^{-1}$.

Proposition 17. — *Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit une catégorie* $\tilde{\Omega}$*-structurée, il faut et il suffit qu'il existe une catégorie double* $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ *vérifiant les*

[1] La notion d'ordre n-uple est à rapprocher de celle de classe n fois ordonnée de Cantor [6].

conditions suivantes :

(1) *$\mathcal{C}^{\cdot}$ s'identifie à $(\mathcal{S}_0^{\perp})^{\cdot}$;*

(2) *$\mathcal{S}^{\perp}$ définit l'ordre $<$ sur $\mathcal{C}^{\cdot}$.*

Démonstration. — S'il existe une catégorie double $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\cdot\perp})$ vérifiant les conditions (1) et (2), posons $\mathcal{C}^{\cdot} = (\mathcal{S}_0^{\perp})^{\cdot}$ et munissons $\mathcal{C}^{\cdot}$ de la relation : $f' < f$ si, et seulement si, il existe $k \in \mathcal{S}$ tel que

$$f = \beta^{\perp}(k) \quad \text{et} \quad f' = \alpha^{\perp}(k).$$

Si $f' < f$, on a

$$\alpha^{\cdot}(f) = \beta^{\perp}(\alpha^{\cdot}(k)) \quad \text{et} \quad \alpha^{\cdot}(f') = \alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(k)), \quad \text{d'où} \quad \alpha^{\cdot}(f') < \alpha^{\cdot}(f);$$

de même $\beta^{\cdot}(f') < \beta^{\cdot}(f)$. Soit $g \in \mathcal{C}$ tel que $g.f$ soit défini; soit $g' \in \mathcal{C}$ tel que $g'.f'$ soit défini et qu'il existe $k_1 \in \mathcal{S}$ avec

$$g = \beta^{\perp}(k_1) \quad \text{et} \quad g' = \alpha^{\perp}(k_1);$$

puisque $\mathcal{S}^{\perp}$ définit un ordre sur $(\mathcal{S}_0^{\perp})$, les égalités

$$\alpha^{\perp}(\alpha^{\cdot}(k_1)) = \alpha^{\perp}(\beta^{\cdot}(k)) = \alpha^{\cdot}(g') \quad \text{et} \quad \beta^{\perp}(\alpha^{\cdot}(k_1)) = \beta^{\perp}(\beta^{\cdot}(k)) = \alpha^{\cdot}(g)$$

entraînent $\alpha^{\cdot}(k_1) = \beta^{\cdot}(k)$; par suite $k_1.k$ est défini et l'on obtient

$$g.f = \beta^{\perp}(k_1.k), \quad g'.f' = \alpha^{\perp}(k_1.k), \quad \text{donc} \quad g'.f' < g.f.$$

Ceci montre que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée. Inversement si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est $\tilde{\Omega}$-structurée, soit $\mathcal{O}$ la catégorie des couples (E, e), où $e \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$, $E \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et $e < E$. La classe $\mathcal{S}$ des quadruplets $((E_1, e_1), f, f', (E, e))$, où $f' < f$, $\alpha(f') = e$, $\beta(f') = e_1$, $\alpha(f) = E$, $\beta(f) = E_1$, forme une sous-catégorie double de $\square(\mathcal{O}, \mathcal{C}^{\cdot})$ vérifiant (1) et (2).

Soit $\tilde{\Omega}'$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des homomorphismes stricts, c'est-à-dire des triplets $((A', <), h, (A, <))$ tels que les relations $z' < z$ et $h(z') = h(z)$ entraînent $z = z'$.

DÉFINITION 18. — *Une catégorie* $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$*-structurée sera appelée* catégorie ordonnée; *un groupoïde* $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'), \tilde{\Omega})$*-structuré sera appelé* groupoïde strictement ordonné.

Pour qu'une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie ordonnée, il faut et il suffit que les conditions

$$f' < f, \quad \alpha(f') = \alpha(f) \quad \text{et} \quad \beta(f') = \beta(f)$$

entraînent $f' = f$. 1

PROPOSITION 18. — *Un groupoïde $\tilde{\Omega}$-structuré $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ est une catégorie ordonnée.*

En effet, soient $g \in \mathcal{C}$ et $g' \in \mathcal{C}$ tels que

$$g' < g, \qquad \alpha(g') = \alpha(g) \qquad \text{et} \qquad \beta(g') = \beta(g).$$

On a

$$\beta(g) = \beta(g') = g'.g'^{-1} < g.g'^{-1} < g.g^{-1} = \beta(g),$$
$$\alpha(g) = \alpha(g') = g'^{-1}.g' < g'^{-1}.g < g^{-1}.g = \alpha(g).$$

On en déduit

$$g.g'^{-1} = \beta(g) \qquad \text{et} \qquad g'^{-1}.g = \alpha(g).$$

Donc

$$g'^{-1} = g^{-1} \qquad \text{et} \qquad g = g'.$$

PROPOSITION 19. — *Pour qu'un groupoïde $\tilde{\Omega}$-structuré $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ soit un groupoïde strictement ordonné, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Pour tout $f \in \mathcal{C}$ et tout $e < \alpha(f)$, il existe au plus un $f' \in \mathcal{C}$ tel que $f' < f$ et $\alpha(f') = e$.

Pour que $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ soit un groupoïde strictement ordonné, il faut et il suffit qu'il existe une catégorie double $(\mathcal{S}^{\bullet}, \mathcal{S}^{\perp})$ vérifiant les conditions (1) et (2) de la proposition 17, que $\mathcal{C}^{\bullet}$ soit un groupoïde et qu'on ait :

(3) Les relations $k \in \mathcal{S}$, $k' \in \mathcal{S}$, $\beta^{\perp}(k) = \beta^{\perp}(k')$ et $\alpha^{\bullet}(k) = \alpha^{\bullet}(k')$ entraînent $k = k'$.

DÉFINITION 19. — *On appelle* catégorie (*resp.* groupoïde) fonctoriellement ordonné *une catégorie (resp. un groupoïde) $\mathcal{C}^{\bullet}$ muni d'une relation d'ordre vérifiant la condition :*

(1) *L'application qui associe à $f \in \mathcal{C}$ la classe des éléments $f' < f$ est un*
1 *foncteur généralisé* [3 *a*] *de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$.*

D'après une proposition de [3 *a*], un groupoïde fonctoriellement ordonné
2 est aussi un groupoïde strictement ordonné.

PROPOSITION 20. — *Pour que $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ soit un groupoïde fonctoriellement ordonné, il faut et il suffit que $\mathcal{C}^{\bullet}$ soit un groupoïde et qu'il existe une catégorie double $(\mathcal{S}^{\bullet}, \mathcal{S}^{\perp})$ vérifiant les conditions* (1) *et* (2) *de la proposition* 17 *ainsi que la condition :*

(3′) *Soient $f \in \mathcal{S}_0^{\perp}$ et $z \in \mathcal{S}_0^{\bullet}$ tels que $\alpha^{\bullet}(f^{\perp}) = \beta^{\perp}(z)$. Alors il existe un et un seul $k \in \mathcal{S}$ tel que*

$$\beta^{\perp}(k) = f \qquad et \qquad \alpha^{\bullet}(k) = z.$$

Démonstration. — Les conditions sont nécessaires en vertu de la proposition de [3 *a*] citée ci-dessus. Inversement supposons donnée une caté- 1
gorie double $(\mathcal{S}^{\cdot}, \mathcal{S}^{\perp})$ vérifiant les conditions (1), (2) et (3′); alors, d'après la proposition 18, $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est un groupoïde ordonné. En tenant compte des conditions (1) et (2), la condition (3′) signifie que si $f \in \mathcal{C}$, $e \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et $e < \alpha(f)$, il existe un et un seul $f' \in \mathcal{C}$ tel que $f' < f$ et $\alpha(f') = e$. En particulier, les relations

$$e \in \mathcal{C}^{\cdot}_0 \quad \text{et} \quad g < e \quad \text{entraînent} \quad \alpha(g) < e, \quad \text{d'où} \quad g = \alpha(g).$$

Soit $d < g.f$. Par hypothèse, il existe $k \in \mathcal{S}$ et $k' \in \mathcal{S}$ tels que

$$\alpha^{\cdot}(k) = (\alpha(f), \alpha(d)); \qquad \beta^{\perp}(k) = f; \qquad \beta^{\perp}(k') = g \quad \text{et} \quad \alpha^{\cdot}(k') = \beta^{\cdot}(k).$$

Il en résulte

$$d = (\alpha^{\perp}(k')).(\alpha^{\perp}(k)).$$

Soit $\tilde{\Omega}''$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des triplets $((A', <), h, (A, <))$ tels que h vérifie la condition :

Si $e' < h(z)$, il existe $z' < z$ avec $h(z') = e'$.

Proposition 21. — *Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit un groupoïde fonctoriellement ordonné, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit un groupoïde $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}' \cap \tilde{\Omega}'', \tilde{\Omega}' \cap \tilde{\Omega}''), \tilde{\Omega})$-structuré.*

Ceci résulte de la proposition 20.

Soit $\mathcal{I}_0$ la sous-classe de Ω_0 formée des classes inductives [3 *a*], c'est-à-dire des classes ordonnées $(A, <)$ telles que toute sous-classe majorée admette une borne supérieure, appelée *agrégat*. Soit $\mathcal{I}$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des applications inductives entre classes inductives [3 *a*], c'est-à-dire dont les éléments sont les triplets $((A', <), h, (A, <))$ tels que h vérifie les conditions :

(1) $z' < z$ et $z'' < z$ entraînent $h(z \cap z') = h(z) \cap h(z')$, où $z \cap z'$ désigne 2
la borne inférieure, ou *intersection*, de z et z' dans A.

(2) Soit C une sous-classe majorée dans A et soit $\cup$ C son agrégat dans A; on a

$$h(\cup C) = \cup h(C).$$

$(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{I}, \mathcal{I} \cap \Omega)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis résolvante à droite. Une sous-structure de $(A, <)$ dans $\mathcal{I}$ est une partie sous-inductive faible [3 *a*] de A. Toute sous-structure dans $\mathcal{I}$ étant 3
a fortiori une sous-structure dans $\tilde{\Omega}$, une catégorie $\mathcal{I}$-structurée est aussi $\tilde{\Omega}$-structurée.

Pour que $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ soit une catégorie $\mathcal{J}$-structurée, il faut et il suffit que $(\mathcal{C}, <)$ soit une classe inductive et que les conditions suivantes soient vérifiées :

(I_1) Les relations $f' < f$ et $f'' < f$ entraînent

$$\alpha(f' \cap f'') = \alpha(f') \cap \alpha(f''); \qquad \beta(f' \cap f'') = \beta(f') \cap \beta(f'').$$

(I_2) Les relations $f_i < f$, où $i \in I$, entraînent

$$\alpha\Big(\bigcup_{i\in I} f_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \alpha(f_i); \qquad \beta\Big(\bigcup_{i\in I} f_i\Big) = \bigcup_{i\in I} \beta(f_i).$$

(I_3) Les relations $g_i < g$, $f_i < f$, où $i \in I$, $(g_i, f_i) \in \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$ et $(g, f) \in \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$ entraînent

$$(g_i \cap g_j) \cdot (f_i \cap f_j) = (g_i \cdot f_i) \cap (g_j \cdot f_j),$$

$$\Big(\bigcup_{i\in I} g_i\Big) \cdot \Big(\bigcup_{i\in I} f_i\Big) = \bigcup_{i\in I} (g_i \cdot f_i).$$

Proposition 22. — *Soit $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ une catégorie $\mathcal{J}$-structurée; soient g et f deux éléments de $\mathcal{C}$; soit* H *la classe des éléments $g' . f'$ tels que $g' < g$ et $f' < f$. Alors la classe* H *admet un plus grand élément.*

Démonstration. — Soit $\langle g, f \rangle$ la classe des couples (g', f') tels que

$$g' \in \mathcal{C}, \quad f' \in \mathcal{C}, \quad g' < g, \quad f' < f \quad \text{et} \quad \alpha(g') = \beta(f').$$

Soit G la classe des g' tels qu'il existe $(g', f') \in \langle g, f \rangle$; soit F la classe des f' tels qu'il existe $(g', f') \in \langle g, f \rangle$. La classe $\alpha(G)$ est alors égale à la classe $\beta(F)$. D'après la condition (2), la classe G, majorée par g, admet un agrégat $\cup G < g$ tel que $\alpha(\cup G) = \cup\, \alpha(G)$. De même F admet un agrégat $\cup F < f$ tel que $\beta(\cup F) = \cup\, \beta(F)$. Par suite, $\alpha(\cup G) = \beta(\cup F)$ et $(\cup G).(\cup F)$ est défini; comme $(\cup G).(\cup F)$ appartient à H, on trouve $\cup H = (\cup G).(\cup F)$.

Définition 20. — *Avec les conditions de la proposition 22, le plus grand élément* $\cup$ H *de* H *sera noté gf et appelé* pseudo-produit de g et f.

Remarquons que la loi de composition $(g, f) \to gf$, partout définie, n'est pas forcément associative.

Proposition 23. — *Soit $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ une catégorie $\mathcal{J}$-structurée; le pseudo-produit $(g, f) \to gf$ vérifie les conditions suivantes :*

(1) *Soient $g \in \mathcal{C}$, $g' \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}$ et $f' \in \mathcal{C}$ tels que $g' < g$ et $f' < f$. Alors on a $g'f' < gf$.*

(2) *Soient $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$; on a*

$$\beta(gf) < \beta(g) \quad \text{et} \quad \alpha(gf) < \alpha(f).$$

(3) *Soient* $s \in \mathcal{C}_0$ *et* $S \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ *tels que* $s < S$; *on a*

$$\alpha(Ss) = s = \beta(sS).$$

En effet les conditions (1) et (2) résultent de la définition du pseudoproduit. Supposons $s < S$ dans $\mathcal{C}_0^{\cdot}$. On a $\alpha(Ss) < s$. De plus $s.s < Ss$, donc

$$s < \alpha(Ss) < s \quad \text{et} \quad s = \alpha(Ss).$$

De même

$$\beta(sS) = s.$$

En utilisant les sous-catégories $\tilde{\Omega}'$ et $\tilde{\Omega}''$ de $\tilde{\Omega}$ définies plus haut, posons

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J} \cap \tilde{\Omega}' \quad \text{et} \quad \mathcal{J}'' = \mathcal{J} \cap \tilde{\Omega}''.$$

Les éléments de $\mathcal{J}'$ sont les applications inductives strictes [3 *a*]. La sous-catégorie $\mathcal{J}'$ de $\mathcal{J}$ contient le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{J}$ et vérifie la condition (σ) de la proposition 10 (§ I), puisque toute restriction d'une application inductive stricte est une application inductive stricte. $\mathcal{J}''$ contient aussi $\mathcal{J} \cap \Omega$, mais $\mathcal{J}''$ ne vérifie pas la condition (σ). Les sous-catégories $\mathcal{J}'$ et $\mathcal{J}''$ de $\mathcal{J}$ sont stables par produit (mais ce ne sont pas des catégories d'homomorphismes à produits finis au-dessus de $\mathcal{M}$).

DÉFINITION 21. — *Une catégorie* $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J})$*-structurée sera appelée* catégorie inductive; *si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie inductive, un élément* f' *tel que* $f' < f$ *sera dit* induit par f.

THÉORÈME 9. — *Soit* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *une catégorie et* $(\mathcal{C}, <)$ *une classe inductive. Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit une catégorie inductive, il faut et il suffit que soient vérifiés les axiomes* (I_1) *et* (I_2) *ainsi que les axiomes :*

(I'_3) *Les conditions* $g' < g$, $f' < f$, $(g, f) \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ *et* $(g', f') \in \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$ *entraînent* $g'.f' < g.f$.

(I'_4) *Les conditions* $g' < g$, $\alpha(g') = \alpha(g)$ et $\beta(g') = \beta(g)$ *entraînent* $g' = g$.

Démonstration. — Les conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes, c'est-à-dire qu'elles entraînent l'axiome (I_3), dont nous reprenons les notations. Comme on a

$$\alpha(g_i \cap g_j) = \alpha(g_i) \cap \alpha(g_j) = \beta(f_i) \cap \beta(f_j),$$

le composé $h = (g_i \cap g_j).(f_i \cap f_j)$ est défini et, en vertu de (I'_3), on a

$$h < (g_i.f_i) \cap (g_j.f_j).$$

Puisque $g_i.f_i < g.f$ et $g_j.f_j < g.f$, en utilisant (I_1), on trouve

$$\alpha(g_i.f_i \cap g_j.f_j) = \alpha(f_i) \cap \alpha(f_j) = \alpha(f_i \cap f_j) = \alpha(h)$$

et

$$\beta(g_i.f_i \cap g_j.f_j) = \beta(g_i) \cap \beta(g_j) = \beta(g_i \cap g_j) = \beta(h).$$

De l'axiome (I'_5) on déduit alors

$$h = (g_i . f_i) \cap (g_j . f_j).$$

On démontre d'une manière analogue la deuxième relation de (I_3).

Corollaire 1. — *Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie inductive au sens de [3 c], il faut et il suffit que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie $\mathcal{I}(\mathcal{I}', \mathcal{I}'')$-structurée.*

En effet les conditions (I_1), (I_2), (I'_3) et (I'_4) signifient que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ vérifie tous les axiomes d'une catégorie inductive au sens de [3 c] à l'exception de l'axiome :

(I'_5) Si $k < g.f$, il existe $g' < g$ et $f' < f$ tels que $k = g'.f'$; l'axiome (I'_5)
1 est équivalent à la condition $((\mathcal{C}^{\cdot}, <), \varkappa^{\cdot}, (\mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}, <)) \in \mathcal{I}''$.

Corollaire 2. — *Dans une catégorie inductive au sens de [3 c], deux éléments quelconques ont un pseudo-produit et la loi de composition $(g, f) \to gf$ est associative.*

Remarque. — Dans la suite de cet article, nous verrons que les catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurées telles que $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ vérifient la condition (σ) de la proposition 10 (§ I) jouissent de nombreuses propriétés. C'est cette raison qui a motivé la nouvelle terminologie employée ici, car la classe des catégories inductives au sens de la définition 21 est plus stable pour certaines opérations que la classe des catégories inductives au sens de [3 c].

Proposition 24. — *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie inductive; soient $f \in \mathcal{C}$ et $f' \in \mathcal{C}$ tels que $f' < f$; alors on a*

$$f' = \beta(f')\,(f\alpha(f')) = (\beta(f')\,f)\,\alpha(f').$$

Démonstration. — En utilisant la proposition 23, on trouve

$$f' = f'.\alpha(f') < f\alpha(f'), \qquad f' = \beta(f').f' < \beta(f')\,(f\alpha(f')),$$
$$\alpha(\beta(f')\,(f\alpha(f'))) < \alpha(f\alpha(f')) < \alpha(f')$$

et

$$\beta(\beta(f')\,(f\alpha(f'))) < \beta(f').$$

Posons $f'' = \beta(f')\,(f\alpha(f'))$; comme $f' < f''$, on a

$$\alpha(f') < \alpha(f'') \quad \text{et} \quad \beta(f') < \beta(f'').$$

Il en résulte

$$\alpha(f') = \alpha(f'') \quad \text{et} \quad \beta(f') = \beta(f'').$$

Puisque $[\beta, \alpha]$ est une application inductive stricte, les relations

$$f' < f'', \qquad \alpha(f') = \alpha(f'') \quad \text{et} \quad \beta(f') = \beta(f'')$$

entraînent $f' = f''$. On montre de même l'égalité

$$f' = (\beta(f')f)\,\alpha(f').$$

Corollaire. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *une catégorie inductive; les conditions*

$$s \in \mathcal{C}_0^{\bullet}, \qquad S \in \mathcal{C}_0^{\bullet} \qquad \text{et} \qquad s < S$$

entraînent

$$s = s(Ss) = (sS)s.$$

Proposition 25. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *une catégorie inductive. Pour que* $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *soit une catégorie* $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J}'')$*-structurée, il faut et il suffit que le pseudo-produit* $(g, f) \to gf$ *soit associatif.*

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après le théorème 9 et son corollaire. Si elle est vérifiée, soit $k < g.f$; en vertu de la proposition 24, on a

$$k = \beta(k)\,(g.f)\,\alpha(k) = (\beta(k)g)\,(f\alpha(k)),$$

en utilisant l'associativité du pseudo-produit. De la définition du pseudo-produit, il résulte

$$k = (\cup G).(\cup F),$$

où G est une classe majorée par $(\beta(k)g)$ et F une classe majorée par $(f\alpha(k))$, donc $\cup\, G < g$ et $\cup\, F < f$. Ceci démontre que l'axiome (I_5') est vérifié.

Soit $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ une catégorie $\mathcal{J}$-structurée. Soit $\mathcal{C}'$ la classe des triplets (S', f, S) tels que

$$f \in \mathcal{C}, \qquad S \in \mathcal{C}_0^{\bullet}, \qquad S' \in \mathcal{C}_0^{\bullet}, \qquad \alpha(f) < S \qquad \text{et} \qquad \beta(f) < S'.$$

Munie de la loi de composition

$$(S'', f', S_1').(S', f, S) = (S'', f'.f, S)$$

si, et seulement si,

$$\alpha(f') = \beta(f) \qquad \text{et} \qquad S_1' = S',$$

$\mathcal{C}'$ est une catégorie; les unités de $\mathcal{C}'$ sont les triplets (S, e, S) où $e \in \mathcal{C}_0^{\bullet}$ et $e < S$. L'application $f \to (\beta(f), f, \alpha(f))$ identifie $\mathcal{C}$ à une sous-catégorie de $\mathcal{C}'$.

Proposition 26. — *Avec les notations précédentes* $(\mathcal{C}', <)$ *est une catégorie* $\mathcal{J}$*-structurée, la relation d'ordre étant définie par* $(S_1', f_1, S_1) < (S', f, S)$ *si, et seulement si,* $S_1' < S'$, $S_1 < S$ *et* $f_1 < f$. *Si* $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *est une catégorie inductive [resp.* $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J}'')$*-structurée],* $(\mathcal{C}', <)$ *est une catégorie inductive [resp.* $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J}'')$*-structurée].*

1 *Démonstration.* — Supposons $\bar{f}_i = (S_i', \bar{f}_i, S_i) < f = (S', f, S)$ pour tout $i \in I$; on a

2 $$\bigcup_{i\in I} \bar{f}_i = \left(\bigcup_{i\in I} S'_i, \bigcup_{i\in I} f_i, \bigcup_{i\in I} S_i\right) \quad \text{et} \quad \bar{f}_i \cap \bar{f}_j = (S'_i \cap S'_j, f_i \cap f_j, S_i \cap S_j),$$

d'où

$$\alpha\left(\bigcup_{i\in I} \bar{f}_i\right) = \bigcup_{i\in I} \alpha(\bar{f}_i) \quad \text{et} \quad \alpha(\bar{f}_i \cap \bar{f}_j) = \alpha(\bar{f}_i) \cap \alpha(\bar{f}_j),$$

$$\beta\left(\bigcup_{i\in I} \bar{f}_i\right) = \bigcup_{i\in I} \beta(\bar{f}_i) \quad \text{et} \quad \beta(\bar{f}_i \cap \bar{f}_j) = \beta(\bar{f}_i) \cap \beta(\bar{f}_j).$$

Ainsi les conditions (I_1) et (I_2) sont vérifiées. Soit

$$\bar{g}_i = (S''_i, g_i, S'_i) < \bar{g} = (S'', g, S')$$

tel que $\bar{g}_i . \bar{f}_i$ et $\bar{g} . \bar{f}$ soient définis; comme $g_i . f_i < g . f$, on a aussi $\bar{g}_i . \bar{f}_i < \bar{g} . \bar{f}$. Des relations

$$\bar{g}_i . \bar{f}_i = (S''_i, g_i . f_i, S_i),$$

on déduit

$$(\bar{g}_i . \bar{f}_i) \cap (\bar{g}_j . \bar{f}_j) = (S''_i \cap S''_j, (g_i \cap g_j) . (f_i \cap f_j), S_i \cap S_j) = (\bar{g}_i \cap \bar{g}_j) . (\bar{f}_i \cap \bar{f}_j)$$

et

$$\bigcup_{i\in I} (\bar{g}_i . \bar{f}_i) = \left(\bigcup_{i\in I} S''_i, \bigcup_{i\in I} (g_i . f_i), \bigcup_{i\in I} S_i\right) = \left(\bigcup_{i\in I} \bar{g}_i\right) . \left(\bigcup_{i\in I} \bar{f}_i\right).$$

3 Donc $(\mathcal{C}', <)$ est une catégorie $\mathcal{J}$-structurée. — Si $(\mathcal{C}, <)$ est une catégorie inductive, les conditions

$$\bar{f}_i < \bar{f}, \quad \alpha(\bar{f}_i) = \alpha(\bar{f}) \quad \text{et} \quad \beta(\bar{f}_i) = \beta(\bar{f})$$

entraînent

$$S_i = S, \quad S'_i = S' \quad \text{et} \quad f_i = f, \quad \text{d'où} \quad \bar{f}_i = \bar{f}.$$

Ainsi l'axiome (I'_1) est également vérifié dans $(\mathcal{C}', <)$. — Enfin si $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ est une catégorie $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J}'')$-structurée, soit

$$\bar{h} = (S''_1, h, S_1) < (S'', g, S') . (S', f, S);$$

comme

$$h = g' . f', \quad \text{où} \quad g' < g \quad \text{et} \quad f' < f,$$

on trouve

$$\bar{h} = (S''_1, g', \alpha(g')) . (\alpha(g'), f', S_1);$$

par suite, $(\mathcal{C}', <)$ est une catégorie $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J}'')$-structurée.

Corollaire. — *Si $(\mathcal{C}^\bullet, <)$ est un groupoïde $\mathcal{J}$-structuré, alors $(\mathcal{C}', <)$ est un groupoïde $\mathcal{J}$-structuré.*

En effet, la condition $(S'_1, f_1, S_1) < (S', f, S)$ entraîne

$$f_1^{-1} < f^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad (S_1, f_1^{-1}, S'_1) < (S, f^{-1}, S').$$

Définition 22. — *Avec les notations précédentes, la catégorie (resp. le groupoïde) $\mathcal{J}$-structuré $(\mathcal{C}', <)$ sera appelé* catégorie des homomorphismes locaux (*resp.* groupoïde des isomorphismes locaux) *associée à la catégorie (resp. au groupoïde) $\mathcal{J}$-structuré $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$.*

Remarque. — La classe $\mathcal{C}'$ peut aussi être munie de la loi de composition

$$(S''_1, f', S'_1) \perp (S', f, S) = (S'', f'f, S) \quad \text{si, et seulement si,} \quad S' = S'_1,$$

où $f'f$ désigne le pseudo-produit de f' et f dans $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$. Soit $<_{\perp}$ la relation d'ordre définie sur $\mathcal{C}'$ par

$$(S'_1, f_1, S_1) <_{\perp} (S', f, S) \quad \text{si, et seulement si,} \quad S' = S'_1, \quad S = S_1 \quad \text{et} \quad f' < f.$$

Une démonstration analogue à celle de la proposition 26 conduit à :

Proposition 26 *bis.* — *Si $(\mathcal{C}', <)$ est une catégorie $\mathcal{J}$-structurée, alors* 1¶
$\left((\mathcal{C}')^{\perp}, <_{\perp}\right)$ *est une catégorie $\mathcal{J}$-structurée.*

Toutefois, même si $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ est une catégorie inductive, $\left((\mathcal{C}')^{\perp}, <_{\perp}\right)$ n'est pas une catégorie $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J})$-structurée.

Soit $\mathcal{C}^{\bullet}$ un groupoïde. Rappelons (*voir* [3 *a*]) que $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ est un groupoïde inductif si $(\mathcal{C}, <)$ est une classe inductive et si $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ est un groupoïde fonctoriellement ordonné.

Théorème 10. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *est un groupoïde inductif.*

(2) $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *est un groupoïde $\mathcal{J}((\mathcal{J}' \cap \mathcal{J}'', \mathcal{J}' \cap \mathcal{J}''), \mathcal{J})$-structuré.*

(3) $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ *est un groupoïde $\mathcal{J}(\mathcal{J}, \mathcal{J}' \cap \mathcal{J}'')$-structuré.*

Démonstration. — Les conditions (1) et (2) sont équivalentes d'après la 2¶
proposition 21. Montrons l'équivalence des conditions (1) et (3). Un groupoïde inductif est une catégorie inductive au sens de [3 *c*]; du corollaire 1 du théorème 9, il résulte que $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ est une catégorie $\mathcal{J}(\mathcal{J}, \mathcal{J}'')$-structurée; comme $f' < f$ entraîne $f'^{-1} < f^{-1}$, $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ est aussi un groupoïde $\mathcal{J}(\mathcal{J}, \mathcal{J}'')$-structuré. De plus les relations

$$g' \cdot f' = g \cdot f, \qquad g' < g \qquad \text{et} \qquad f' < f$$

entraînent

$$\alpha(f) = \alpha(f') \qquad \text{et} \qquad \beta(g') = \beta(g),$$

et, en vertu de la proposition 20, $g' = g$ et $f' = f$. Ceci démontre que $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ est un groupoïde $\mathcal{J}(\mathcal{J}, \mathcal{J}' \cap \mathcal{J}'')$-structuré. Inversement, soit $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ un groupoïde $\mathcal{J}(\mathcal{J}, \mathcal{J}' \cap \mathcal{J}'')$-structuré. D'après la proposition 18 et le corol-

1 laire 2 du théorème 9, $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ est une catégorie inductive au sens de [3 *c*]. Il ne reste qu'à prouver que les conditions $g < e$ et $e \in \mathcal{C}^{\bullet}_0$ entraînent $g \in \mathcal{C}^{\bullet}_0$. En effet, on a

$$\alpha(g) < e \quad \text{et} \quad \beta(g) < e,$$

c'est-à-dire, en utilisant la condition (I_2) :

$$(\beta(g) \cap g) \cdot (g \cap \alpha(g)) = (\beta(g) \cdot g) \cap (g \cdot \alpha(g)) = \beta(g) \cdot g;$$

puisque l'application $\varkappa^{\bullet}$ appartient à $\mathcal{J}'$, il en résulte

$$g \cap \alpha(g) = g, \quad \text{d'où} \quad g < \alpha(g).$$

Des relations

$$g^{-1} \cdot g = \alpha(g) \cdot \alpha(g) \quad \text{et} \quad g^{-1} < \alpha(g),$$

on déduit, pour la même raison :

$$g = \alpha(g) \in \mathcal{C}^{\bullet}_0.$$

Remarques. — 1° Même si $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ est un groupoïde inductif, le groupoïde $(\mathcal{C}', <)$ des isomorphismes locaux associé n'est pas un groupoïde inductif; en effet, les conditions $e \in \mathcal{C}^{\bullet}_0$, $S \in \mathcal{C}^{\bullet}_0$ et $e < S$ entraînent $(e, e, S) < (S, S, S)$, bien que (e, e, S) ne soit pas une unité de $\mathcal{C}'$.

2° Pour qu'une catégorie inductive $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ soit fonctoriellement ordonnée (définition 19), il faut et il suffit que $(\mathcal{C}^{\bullet}, <)$ soit une catégorie $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J}'')$-structurée, que $(\mathcal{C}_\gamma, <)$, où $\mathcal{C}_\gamma$ est le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{C}^{\bullet}$, soit un groupoïde inductif et que $\mathcal{C}_\gamma$ soit saturé par
2 induction dans $\mathcal{C}$. Exemple : la catégorie des surjections.

7. Théorèmes généraux sur les catégories structurées. — Dans tout ce paragraphe, nous supposerons que la catégorie d'homomorphismes
3 à produits finis $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est résolvante à droite. $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ désignent deux sous-catégories de $\mathcal{H}$ contenant Γ.

Proposition 27. — *Pour que $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ soit une catégorie $\mathcal{H}$-structurée, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) *$\mathcal{C}^{\bullet}$ est une catégorie, $s \in \mathcal{H}_0$ et $p(s) = \mathcal{C}$.*

(2) *On a $(s, \alpha, s) \in \mathcal{H}$ et $(s, \beta, s) \in \mathcal{H}$.*

(3) *Les conditions $(s \times s, \iota, s') \in \mathcal{H}$ et $p(s') = \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$ entraînent*

$$(s, \varkappa^{\bullet}, s') \in \mathcal{H}.$$

Démonstration. — Ces conditions sont nécessaires; en effet si $s' \propto s \times s$ et $p(s') = \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$, soit $s'' \in \mathcal{H}_0$ tel que $p(s'') = \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$ et $(s \times s, \iota, s'') \in \mathcal{H}$. Par définition d'une sous-structure, on aura aussi $(s', \iota, s'') \in \mathcal{H}$, par suite, $(s, \varkappa^{\bullet}, s'') \in \mathcal{H}$. Montrons que les conditions sont suffisantes. D'après l'axiome (R), le couple $((s, \alpha, s), (s, \iota, s))$ admet un p-noyau $s_0 \propto s$ tel que $p(s_0)$ soit la classe des $f \in \mathcal{C}$ pour lesquels $f = \alpha(f)$, c'est-à-dire $p(s_0) = \mathcal{C}^{\bullet}_0$. Comme

$$\alpha(p(s)) = \mathcal{C}^{\bullet}_0 \quad \text{et} \quad \beta(p(s)) = \mathcal{C}^{\bullet}_0,$$

on a aussi

$$(s_0, \alpha, s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (s_0, \beta, s) \in \mathcal{H},$$

ce qui prouve que l'axiome (1) des catégories $\mathcal{H}$-structurées est vérifié. Soient p_1 et p_2 les projections canoniques de $p(s) \times p(s)$ sur $p(s)$; on a

$$(s, \alpha p_1, s \times s) = (s, \alpha, s) \,.\, (s, p_1, s \times s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad (s, \beta p_2, s \times s) \in \mathcal{H}.$$

L'axiome (R) assure que le couple $((s, \alpha p_1, s \times s), (s, \beta p_2, s \times s))$ admet un p-noyau $s' \propto s \times s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$. Donc $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ est une catégorie $\mathcal{H}$-structurée.

PROPOSITION 28. — *Supposons que $\mathcal{H}'$ vérifie la condition* (σ) (prop. 10, § I). *Pour que $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ soit une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-[resp. $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-] structurée, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

(1) *$\mathcal{C}^{\bullet}$ est une catégorie; on a $s \in \mathcal{H}_0$* et $p(s) = \mathcal{C}$.

(2) *On a $(s \times s, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'$ [resp. $(s, \alpha, s) \in \mathcal{H}'$* et $(s, \beta, s) \in \mathcal{H}'$].

(3) *Si $s' \propto s \times s$ et $p(s') = \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$, alors $(s, \varkappa, s') \in \mathcal{H}''$.*

Démonstration. — Supposons que $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ soit une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée. D'après la proposition 5, il existe $s_0 \propto s$ tel que 1

$$p(s_0) = \mathcal{C}^{\bullet}_0 \quad \text{et} \quad (s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'.$$

En vertu de la proposition 3, on a $s_0 \times s_0 \propto s \times s$ donc, à l'aide de (σ), on trouve $s_0 \times s_0 \propto s \times s$ dans $\mathcal{H}'$ et

$$(s \times s, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'.$$

Ainsi les conditions (1), (2) et (3) sont nécessaires. — Montrons qu'elles sont suffisantes. Un raisonnement analogue à celui de la proposition 27 montre que, dans $\mathcal{H}$, il existe

$$s_0 \propto s \quad \text{tel que} \quad p(s_0) = \mathcal{C}^{\bullet}_0$$

et

$$s' \propto s \times s \quad \text{tel que} \quad p(s') = \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}.$$

Par suite l'axiome (2) de la définition 3 est vérifié. De plus, comme $s_0 \times s_0 \propto s \times s$ dans $\mathcal{H}'$, on obtient, en utilisant la condition (2) :

$$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'.$$

Le cas $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structuré se traite d'une manière analogue.

Corollaire. — *Si $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ vérifient la condition* (σ), *pour que* ($\mathcal{C}^{\bullet}$, s) *soit un groupoïde $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structuré, il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions* (1) *et* (3) *de la proposition* 28 *ainsi que les conditions :*

(2′) *On a* $(s, \alpha, s) \in \mathcal{H}'$;

(4) *$\mathcal{C}^{\bullet}$ est un groupoïde et l'on a $(s, j, s) \in \mathcal{H}$, où j désigne l'application $f \to f^{-1}$, $f \in \mathcal{C}$.*

En effet, les conditions sont évidemment nécessaires. Inversement si elles sont vérifiées, on a

1 $$(s, \beta, s) = (s, \alpha, s).(s, j, s) \in \mathcal{H},$$

donc la condition (2) de la proposition est aussi vérifiée.

Proposition 29. — *Si $\mathcal{H}'$ est stable par produit et vérifie la condition* (σ), *alors $\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$ est une sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$.*

Démonstration. — Soit $s \in \mathcal{H}_0$. D'après l'axiome (R), le couple $((s, p_1, s \times s), (s, p_2, s \times s))$, où p_1 et p_2 sont les projections canoniques de $p(s) \times p(s)$ sur $p(s)$,
2 admet un p-noyau $s^1 \propto s \times s$ tel que $p(s^1)$ soit la diagonale Δ de $p(s) \times p(s)$. Supposons $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')_0$. Les relations

$$(s, \alpha, s) \in \mathcal{H}' \quad \text{et} \quad (s, \beta, s) \in \mathcal{H}'$$

entraînent

$$(s \times s, \beta \times \alpha, s \times s) \in \mathcal{H}'.$$

Puisque $\mathcal{H}'$ vérifie la condition (σ), on a

$$(s \times s, \iota, s^1) \in \mathcal{H}',$$

d'où

3 $$(s \times s, [\beta, \alpha], s^1) = (s \times s, (\beta \times \alpha).s \times s), (s \times s, \iota, s^1) \in \mathcal{H}'.$$

Par suite, $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée, ce qui démontre
4 la proposition, car $(s^1, [\iota, \iota], s) \in \Gamma$ (*voir* théorème 12).

Reprenons les notations définies au n° 2.

Théorème 11. — $(\mathcal{H}, \bar{p}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$ *et* $(\mathcal{H}, \bar{p}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}})$ *sont des catégories d'homomorphismes saturées au-dessus de $\mathcal{H}$.*

Démonstration. — Le seul point à démontrer est que les conditions

$$(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0 \quad \text{et} \quad (\bar{s}, \mathrm{F}, s) \in \Gamma$$

entraînent l'existence de $(\overline{\mathcal{C}^{\bullet}}, \bar{s})$ tel que

$$((\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s}), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\bullet}, s)) \in \bar{\Gamma}.$$

En effet, puisque $\mathcal{F}$ est saturé au-dessus de $\mathcal{M}$, il existe $\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}$ tel que

5 $$(\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \mathrm{F}, \mathcal{C}^{\bullet}) \in \bar{\mathrm{F}}_{\gamma}.$$

Soit $s_0 \propto s$ tel que $p(s_0) = \mathcal{C}^{\cdot}_0$. Comme s_0 est un p-noyau (démonstration de la proposition 28), d'après la proposition 16 (§ I), il existe

$$\bar{s}_0 \propto \bar{s} \quad \text{tel que} \quad (\bar{s}_0, \mathrm{F}\iota, s_0) \in \Gamma;$$

on a alors $p(\bar{s}_0) = \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}_0$. Comme $\mathcal{H}'$ contient Γ, on trouve

$$(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], \bar{s}) = (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, \mathrm{F}\iota \times \mathrm{F}\iota, s_0 \times s_0).(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s).(s, \mathrm{F}^{-1}, \bar{s}) \in \mathcal{H}',$$

où $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ désignent les applications source et but dans $\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}_0$. Soit $s' \propto s \times s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot}$. En utilisant la relation

$$(\bar{s} \times \bar{s}, \mathrm{F} \times \mathrm{F}, s \times s) \in \Gamma$$

la proposition 16 (§ I) assure l'existence de

$$\bar{s}' \propto \bar{s} \times \bar{s} \quad \text{tel que} \quad (\bar{s}', (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, s') \in \Gamma, \qquad \text{et} \qquad p(\bar{s}') = \bar{\mathcal{C}}^{\cdot} \star \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}.$$

Par conséquent :

$$(\bar{s}, \bar{\varkappa}^{\cdot}, \bar{s}') = (\bar{s}, \mathrm{F}, s).(s, \varkappa^{\cdot}, s').(\bar{s}', (\mathrm{F} \times \mathrm{F})\iota, s')^{-1} \in \mathcal{H}''.$$

Il en résulte

$$(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0 \qquad \text{et} \qquad ((\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'').$$

Si de plus on a $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$, on obtient

$$(\bar{s}, \bar{j}, \bar{s}) = (\bar{s}, \mathrm{F}, s).(s, j, s).(s, \mathrm{F}^{-1}, \bar{s}) \in \Gamma,$$

où j et $\bar{j}$ désignent resp. les applications $f \to f^{-1}$ dans $\mathcal{C}^{\cdot}$ et dans $\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}$. Donc

$$((\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'').$$

Corollaire. — $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$ *et* $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}})$ *sont des catégories d'homomorphismes.*

En effet, supposons vérifiées les conditions

$$((\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)) \in \bar{\Gamma} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{C}^{\perp}, s_1) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0.$$

Puisque $(\mathcal{M}, p, \Gamma)$ est une espèce de structures, il existe $\bar{s}_1 \in \mathcal{H}_0$ tel que

$$(\bar{s}_1, \mathrm{F}, s_1) \in \Gamma$$

et il résulte du théorème 11 qu'on a alors

$$((\bar{\mathcal{C}}^{\perp}, \bar{s}_1), \mathrm{F}, (\mathcal{C}^{\perp}, s_1)) \in \bar{\Gamma}.$$

Théorème 12 :

$$(\mathcal{H}, \bar{p}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}') \quad \text{et} \quad (\mathcal{H}, \bar{p}_{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{G}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}'_{\mathcal{G}})$$

sont des catégories d'homomorphismes saturées au-dessus de $\mathcal{H}$;

$$(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}') \quad \text{et} \quad (\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{G}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}'_{\mathcal{G}})$$

sont des catégories d'homomorphismes et $\mathcal{H}$ *s'identifie à une sous-catégorie pleine de* $\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$.

Démonstration. — La première partie du théorème se démontre d'une manière analogue au théorème 11. Soit $s \in \mathcal{H}_0$ et posons $\mathcal{C} = p(s)$. Munissons $\mathcal{C}$ de la loi de composition (triviale) :

$$(f', f) \to f'.f = f \quad \text{si, et seulement si,} \quad f' = f.$$

1 On a $(s, \alpha, s) \in \Gamma$, puisque $\alpha(f) = f$ pour tout $f \in \mathcal{C}$. D'après l'axiome (R). il existe $s' \propto s \times s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot} =$ diagonale Δ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Les relations

$$(s \times s, [\iota, \iota], s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad [\iota, \iota](\mathcal{C}) = \Delta \quad \text{entraînent} \quad (s', [\iota, \iota], s) \in \mathcal{H}.$$

2 Par ailleurs : $(s, p_1\iota, s') \in \mathcal{H}$, où p_1 est la projection de $p(s) \times p(s)$ sur $p(s)$, Des égalités

$$(s', [\iota, \iota], s).(s, p_1\iota, s') = s' \quad \text{et} \quad (s, p_1\iota, s').(s', [\iota, \iota], s) = s,$$

il résulte

$$(s, \alpha^{\cdot}, s') = (s, p_1\iota, s') \in \Gamma.$$

Donc $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\overline{\mathcal{H}}((\Gamma, \Gamma), \Gamma)$-structurée. Enfin l'application

$$(\bar{s}, g, s) \to ((p(\bar{s}), \bar{s}), g, (p(s), s))$$

3 est une équivalence de $\mathcal{H}$ sur une sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$.

Théorème 13. — *Si* $\mathcal{H}'$ *et* $\mathcal{H}''$ *sont des sous-catégories de* $\mathcal{H}$ *stables par produit, les catégories d'homomorphismes* $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$, $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}_{\mathcal{G}})$ *et* $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}')$ *sont des catégories d'homomorphismes à produits finis.*

Démonstration. — Comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ sont des catégories d'homomorphismes à produits finis au-dessus de $\mathcal{M}$, pour vérifier que $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, le seul point à démontrer est que les relations

$$(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0 \quad \text{et} \quad (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$$

entraînent

$$(\mathcal{C}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, s \times \bar{s}) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0.$$

D'après la proposition 3, on a

$$s_0 \times \bar{s}_0 \propto s \times \bar{s} \quad \text{et} \quad p(s_0 \times \bar{s}_0) = (\mathcal{C}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot})_0.$$

Puisque

$$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}' \qquad \text{et} \qquad (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], \bar{s}) \in \mathcal{H}',$$

on a aussi

$$((s_0 \times s_0) \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0), [\beta, \alpha] \times [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], s \times \bar{s}) \in \mathcal{H}'.$$

En vertu de la proposition 4 il existe

$$((s_0 \times \bar{s}_0) \times (s_0 \times \bar{s}_0), \gamma, (s_0 \times s_0) \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)) \in \Gamma,$$

avec

$$\gamma((f', f), (\bar{f}', \bar{f})) = ((f', \bar{f}'), (f, \bar{f}));$$

d'où

$$\begin{aligned} &((s_0 \times \bar{s}_0) \times (s_0 \times \bar{s}_0), \gamma([\beta, \alpha] \times [\bar{\beta}, \bar{\alpha}]), s \times \bar{s}) \\ &\quad = ((s_0 \times \bar{s}_0) \times (s_0 \times \bar{s}_0), [\beta \times \bar{\beta}, \alpha \times \bar{\alpha}], s \times \bar{s}) \in \mathcal{H}'. \end{aligned}$$

Par ailleurs, il existe $s'' \propto (s \times \bar{s}) \times (s \times \bar{s})$ tel que 1

$$p(s'') = (\mathcal{C}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}) \star (\mathcal{C}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}).$$

Des propositions 4 et 7 résultent

$$((s \times \bar{s}) \times (s \times \bar{s}), \gamma, (s \times s) \times (\bar{s} \times \bar{s})) \in \Gamma \qquad \text{et} \qquad (s'', \gamma\iota, s' \times \bar{s}') \in \Gamma;$$

$\mathcal{H}''$ étant stable par produit, des relations

$$(s, \varkappa^{\cdot}, s') \in \mathcal{H}'' \qquad \text{et} \qquad (\bar{s}, \bar{\varkappa}^{\cdot}, \bar{s}') \in \mathcal{H}'',$$

on déduit

$$(s \times \bar{s}, (\varkappa^{\cdot} \times \bar{\varkappa}^{\cdot})(\gamma\iota)^{-1}, s'') \in \mathcal{H}''.$$

Par suite, $(\mathcal{C}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, s \times s)$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée. 2

Remarque. — La démonstration de ce théorème se modifie aisément si l'on suppose que $\mathcal{H}$ est saturé au-dessus de $\mathfrak{M}$ au lieu de supposer que $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est résolvante à droite. En effet, dans ce cas, la proposition 15 (§ I) assure l'existence de $s'' \propto (s \times \bar{s}) \times (s \times \bar{s})$ tel que

$$p(s'') = (\mathcal{C}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}) \star (\mathcal{C}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}) \qquad \text{et} \qquad (s'', \gamma\iota, s' \times \bar{s}') \in \Gamma.$$

Ceci permet d'énoncer, en utilisant le théorème 3 :

THÉORÈME 13 *bis*. — *Si $\mathcal{H}$ est saturé au-dessus de $\mathfrak{M}$ et si $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ sont stables par produit, $(\mathfrak{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \bar{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \bar{\Gamma})$ et $(\mathfrak{M}, p_{\mathcal{F}}\bar{p}, \bar{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \bar{\Gamma}')$ sont des catégories d'homomorphismes à produits finis, même si $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ n'est pas résolvante à droite.*

THÉORÈME 14. — *Supposons que $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ vérifient la condition (σ). Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie (resp. un groupoïde) $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structuré. Soit $\bar{s} \propto s$ tel que $p(\bar{s})$ soit une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde) $\bar{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$.*

Alors $(\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s})$ *est une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde)* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ *structuré de* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$. *On peut remplacer dans cet énoncé* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ *par* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$.

Démonstration. — En utilisant la condition (σ) et la proposition 3, les relations

$$\bar{s} \propto s, \qquad (s \times s, [\beta, \alpha]\,\iota, \bar{s}) \in \mathcal{H}' \qquad \text{et} \qquad [\beta, \alpha](\overline{\mathcal{C}}) \subset \overline{\mathcal{C}} \times \overline{\mathcal{C}}$$

entraînent $\bar{s} \times \bar{s} \propto s \times s$ et

$$(\bar{s} \times \bar{s}, [\beta, \alpha]\,\iota, \bar{s}) = (\bar{s} \times \bar{s}, [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], \bar{s}) \in \mathcal{H}',$$

où $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ désignent les applications source et but dans $\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}$. Par ailleurs supposons

$$s' \propto s \times s, \qquad \bar{s}' \propto \bar{s} \times \bar{s}, \qquad p(s') = \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet} \qquad \text{et} \qquad p(\bar{s}') = \overline{\mathcal{C}}^{\bullet} \star \overline{\mathcal{C}}^{\bullet}.$$

D'après la proposition 3 et le théorème 1 (§ I), on a

$$\bar{s} \times \bar{s} \propto s \times s \qquad \text{et} \qquad \bar{s}' \propto s';$$

1 comme

$$(s, \varkappa^{\bullet}, \bar{s}') = (s, \varkappa^{\bullet}, s').(s', \iota, \bar{s}') \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad \varkappa^{\bullet}(p(\bar{s}')) \subset \overline{\mathcal{C}},$$

on trouve $(\bar{s}, \bar{\varkappa}^{\bullet}, \bar{s}') \in \mathcal{H}$, où $\bar{\varkappa}^{\bullet}$ est la restriction de $\varkappa^{\bullet}$ à $\overline{\mathcal{C}}^{\bullet} \star \overline{\mathcal{C}}^{\bullet}$. Donc $(\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s})$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée et

$$((\mathcal{C}^{\bullet}, s), \iota, (\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s})) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'').$$

Des relations

$$((\mathcal{C}^{\bullet}, s), g, (\mathcal{S}^{\bullet}, \sigma)) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'') \qquad \text{et} \qquad g(p(\sigma)) \subset \overline{\mathcal{C}},$$

on déduit

$$(\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, g, \mathcal{S}^{\bullet}) \in \mathcal{F} \qquad \text{et} \qquad (\bar{s}, g, \sigma) \in \mathcal{H},$$

d'où

$$((\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s}), g, (\mathcal{S}^{\bullet}, \sigma)) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'') \qquad \text{et} \qquad (\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s}) \underset{\bar{p}}{\propto} (\mathcal{C}^{\bullet}, s).$$

Même démonstration pour les catégories $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structurées.

Corollaire 1. — *Si* $\mathcal{H}'$ *et* $\mathcal{H}''$ *vérifient la condition* (σ), *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $(\overline{\mathcal{C}}^{\bullet}, \bar{s}) \underset{\bar{p}}{\propto} (\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *dans* $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ [*resp. dans* $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$] *et il existe* $\bar{s}^1 \underset{p}{\propto} s$ *tel que* $p(\bar{s}^1) = \overline{\mathcal{C}}$.

(2) $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$, $\overline{\mathcal{C}}$ *est une sous-catégorie (resp. un sous-groupoïde) de* $\mathcal{C}^{\bullet}$; $\bar{s} \underset{p}{\propto} s$ *dans* $\mathcal{H}$ *et* $p(\bar{s}) = \overline{\mathcal{C}}$.

En effet si la condition (1) est vérifiée, on a

$$(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \underset{\bar{p}}{\propto} (\mathcal{C}^{\cdot}, s) \qquad \text{et} \qquad (\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}^1) \underset{\bar{p}}{\propto} (\mathcal{C}, s),$$

donc

$$(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) = (\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}^1) \qquad \text{et} \qquad \bar{s} = \bar{s}^1.$$

Corollaire 2. — *Si $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ vérifient* (σ), *les catégories d'homomorphismes* $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$, $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \overline{\Gamma}')$, $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{G}}, \overline{\Gamma}_{\mathcal{G}})$, $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\overline{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$ *et* $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\overline{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}''), \overline{\Gamma}')$ *sont résolvantes à droite.*

Ce corollaire résulte du théorème 14, de la proposition 14 (§ I) et du fait que $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{\cdot})$ et $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ sont résolvantes à droite.

Remarques. — 1° En général, $(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \underset{\bar{p}}{\propto} (\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ n'entraîne pas $\bar{s} \underset{p}{\propto} s$. Il en est toutefois ainsi lorsque $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ vérifie la condition :

Si $(S, \iota, s') \in \mathcal{H}$, il existe $s \propto S$ tel que $p(s) = p(s')$.

En particulier $\mathcal{F}$, $\tilde{\mathcal{E}}$, $\mathcal{I}$ vérifient cette condition.

2° Dans le théorème 14, l'hypothèse : $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ vérifient (σ) est nécessaire. Par exemple, soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ un groupoïde inductif; un sous-groupoïde de $\mathcal{C}^{\cdot}$ qui est une sous-classe inductive faible de $(\mathcal{C}, <)$ peut ne pas être un sous-groupoïde inductif de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Une sous-structure de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ dans $\overline{\mathcal{I}}(\mathcal{I}, \mathcal{I}'')$ ou dans $\overline{\mathcal{I}}((\mathcal{I}' \cap \mathcal{I}'', \mathcal{I}' \cap \mathcal{I}''), \mathcal{I})$ est un sous-groupoïde $\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$ vérifiant les conditions :

(*a*) $\overline{\mathcal{C}}$ est une partie sous-inductive de $(\mathcal{C}, <)$; 1

(*b*) Si $f \in \overline{\mathcal{C}}$, $e \in \overline{\mathcal{C}}_0$, $e < \alpha(f)$, on a $fe \in \overline{\mathcal{C}}$.

3° D'après la proposition 14 (§ I), pour que $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, s_1)$ soit une sous-catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structurée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$, il faut et il suffit qu'on ait $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, s_1) \propto (\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ dans $(\mathcal{M}, p_{\mathcal{F}}\overline{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}''), \overline{\Gamma})$.

Dans la fin de ce numéro nous supposerons que $\mathcal{H}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ stable par produit et vérifiant la condition (σ).

La projection canonique d'une classe produit $e_1 \times e_2$ sur e_i sera notée p_i (ou éventuellement p_i' pour éviter des confusions), $i = 1, 2$.

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie $\mathcal{H}$-structurée. En utilisant l'axiome (R) et la proposition 4, on peut construire les éléments suivants :

(*a*) $s_\alpha \propto s_0 \times s$ tel que $p(s_\alpha)$ soit la classe des couples $(\alpha(f), f)$; on a

$$\gamma_\alpha = (s, p_2\iota, s_\alpha) = (s, p_2, s_0 \times s) \cdot (s_0 \times s, \iota, s_\alpha) \in \mathcal{H}$$

et

$$\bar{\gamma}_\alpha = (s_\alpha, \alpha \times \iota, s \times s) \cdot (s \times s, [\iota, \iota], s) \in \mathcal{H},$$

d'où

$$\bar{\gamma}_\alpha \cdot \gamma_\alpha = s_\alpha \qquad \text{et} \qquad \gamma_\alpha \cdot \bar{\gamma}_\alpha = s, \qquad \text{c'est-à-dire } \gamma_\alpha \in \Gamma.$$

(*b*) $s'_\alpha \propto s \times s_0$ tel que $p(s'_\alpha)$ soit la classe des couples $(f, \alpha(f))$; on a

$$\gamma'_\alpha = (s, p_1 \iota, s'_\alpha) \in \Gamma.$$

(*c*) $s_\beta \propto s_0 \times s$ (resp. $s'_\beta \propto s \times s_0$) tel que $p(s_\beta)$ [resp. $p(s'_\beta)$] soit la classe des couples $(\beta(f), f)$ [resp. $(f, \beta(f))$]; on a

$$\gamma_\beta = (s, p_2 \iota, s_\beta) \in \Gamma \qquad \text{et} \qquad \gamma'_\beta = (s, p_1 \iota, s'_\beta) \in \Gamma.$$

(*d*) $s_{\beta\alpha} \propto s_0 \times (s_0 \times s)$ tel que $p(s_{\beta\alpha})$ soit la classe des couples $(\beta(f), (\alpha(f), f))$; on a

$$\gamma_{\beta\alpha} = (s, p_2 p'_2 \iota, s_{\beta\alpha}) \in \Gamma.$$

Proposition 30. — *Soit $s \in \mathcal{H}_0$ et soit $\perp$ la loi de composition sur $p(s) \times p(s)$ définie par*

$$(x'', x'_1) \perp (x', x) = (x'', x) \qquad \textit{si, et seulement si,} \quad x'_1 = x'.$$

1 *Alors $((p(s) \times p(s))^\perp, s \times s)$ est un groupoïde $\mathcal{H}(\Gamma, \mathcal{H})$-structuré.*

Démonstration. — Posons $p(s) = \mathcal{C}$. La classe des unités de $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\perp$ s'identifie à la diagonale Δ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Soit $s_0 \propto s \times s$ tel que $p(s_0) = \Delta$; on a (*voir* démonstration du théorème 12) :

$$(s_0, [\iota, \iota], s) \in \Gamma,$$

d'où

$$(s_0 \times s_0, [\beta^\perp, \alpha^\perp], s \times s) = (s_0 \times s_0, [\iota, \iota] \times [\iota, \iota], s \times s) \in \Gamma.$$

Soit $s'^\perp \propto (s \times s) \times (s \times s)$, tel que

$$p(s'^\perp) = (\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\perp \star (\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\perp;$$

alors

$$(s \times s, \varkappa^\perp, s'^\perp) = (s \times s, [p_1 p'_1, p_2 p'_2] \iota, s'^\perp) \in \mathcal{H},$$

où p'_i sont les projections canoniques de $(s \times s) \times (s \times s)$ sur $s \times s$ et p_i les projections canoniques de $s \times s$ sur s, $i = 1, 2$. Donc

$$((\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\perp, s \times s) \in \overline{\mathcal{H}}(\Gamma, \mathcal{H}).$$

Enfin, il résulte de la proposition 4 qu'on a

$$(s \times s, j, s \times s) \in \Gamma, \qquad \text{où} \quad j(x', x) = (x, x').$$

Par suite, $((\mathcal{C} \times \mathcal{C})^\perp, s \times s)$ est un groupoïde $\mathcal{H}(\Gamma, \mathcal{H})$-structuré.

Théorème 15. — *Soient $(\mathcal{C}^\cdot, s)$ et $(\overline{\mathcal{C}}^\cdot, \bar{s})$ deux catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurées telles que $\mathcal{C}^\cdot_0 = \overline{\mathcal{C}}^\cdot_0$ et que les conditions $s_0 \propto s$ et $p(s_0) = \overline{\mathcal{C}}^\cdot_0$ entraînent*

$s_0 \propto \bar{s}$. *Alors il existe* $\square(s, \bar{s}) \in \mathcal{H}_0$ *tel que* $\big(\boxed{\,|\,}(\mathcal{C}^{\bullet}, \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}),\ \square(s, \bar{s})\big)$ *et* $\big(\boxed{-}(\mathcal{C}^{\bullet}, \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}),\ \square(s, \bar{s})\big)$ *soient des catégories* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$*-structurées.*

Démonstration. — Un quadruplet appartenant à $\square(\mathcal{C}^{\bullet}, \bar{\mathcal{C}}^{\bullet})$ est identifié à un élément $((f', \bar{f}'), (\bar{f}, f)) \in (\mathcal{C} \times \bar{\mathcal{C}}) \times (\bar{\mathcal{C}} \times \mathcal{C})$ tel que

$$((\beta(f'), \bar{\alpha}(\bar{f}')), (\bar{\beta}(\bar{f}), \alpha(f))) = ((\bar{\beta}(\bar{f}'), \beta(f)), (\alpha(f'), \bar{\alpha}(\bar{f}))),$$

où α et β (resp. $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$) désignent les applications source et but dans $\mathcal{C}^{\bullet}$ (resp. dans $\bar{\mathcal{C}}^{\bullet}$). D'après la proposition 4, on a

$$\bar{\gamma} = ((\bar{s} \times s) \times (s \times \bar{s}), \gamma, (s \times \bar{s}) \times (\bar{s} \times s)) \in \Gamma$$

et

$$\bar{\gamma}_0 = ((s_0 \times s_0) \times (s_0 \times s_0), \gamma_0, (s_0 \times s_0) \times (s_0 \times s_0)) \in \Gamma,$$

où

$$\gamma((f', \bar{f}'), (\bar{f}, f)) = ((\bar{f}', f), (f', \bar{f}));$$

l'axiome (R) assure que le couple $(\bar{h}', \bar{h})$, où

$$\bar{h} = ((s_0 \times s_0) \times (s_0 \times s_0), (\beta \times \bar{\alpha}) \times (\bar{\beta} \times \alpha), (s \times \bar{s}) \times (\bar{s} \times s))$$

et

$$\bar{h}' = ((s_0 \times s_0) \times (s_0 \times s_0), (\bar{\beta} \times \beta) \times (\alpha \times \bar{\alpha}), (\bar{s} \times s) \times (s \times \bar{s})).\bar{\gamma}$$

admet un p-noyau $\square(s, \bar{s})$ tel que $p(\square(s, \bar{s})) = \square(\mathcal{C}^{\bullet}, \bar{\mathcal{C}}^{\bullet})$. Du théorème 13, il résulte, $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})^{\perp}$ étant la catégorie considérée dans la proposition 30, que

$$\Sigma = ((\mathcal{C} \times \mathcal{C})^{\perp} \times (\bar{\mathcal{C}}^{\bullet} \times \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}), (s \times s) \times (\bar{s} \times \bar{s}))$$

est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurée. D'après la proposition 4, on a

$$\bar{\gamma}' = ((s \times s) \times (\bar{s} \times \bar{s}), \gamma', (s \times \bar{s}) \times (\bar{s} \times s)) \in \Gamma,$$

où

$$\gamma'((f', \bar{f}'), (\bar{f}, f)) = ((f', f), (\bar{f}', \bar{f})).$$

En vertu de la proposition 16 (§ I), il existe $S \propto (s \times s) \times (\bar{s} \times \bar{s})$ tel que

$$(S, \gamma'\iota, \square(s, \bar{s})) \in \Gamma.$$

On voit que $\gamma'\iota$ est une équivalence de $\boxed{\,|\,}(\mathcal{C}^{\bullet}, \bar{\mathcal{C}}^{\bullet})$ sur une sous-catégorie 1
de $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})^{\perp} \times (\bar{\mathcal{C}}^{\bullet} \times \bar{\mathcal{C}}^{\bullet})$. D'après le théorème 14, $(\gamma'(\boxed{\,|\,}(\mathcal{C}^{\bullet}, \bar{\mathcal{C}}^{\bullet})), S)$ est une sous-catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurée de Σ. Donc, en vertu du théorème 12, $(\boxed{\,|\,}(\mathcal{C}^{\bullet}, \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}), \square(s, \bar{s}))$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurée. Une démonstration analogue montre qu'on a aussi

$$(\boxed{-}(\mathcal{C}^{\bullet}, \bar{\mathcal{C}}^{\bullet}), \square(s, \bar{s})) \in \bar{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0.$$

THÉORÈME 16. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-[*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-]*structurée. Il existe* $\square s \in \mathcal{H}_0$ *tel que* $(\boxbar \mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$ *et* $(\boxminus \mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$ *soient des catégories* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-[*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-]*structurées. Si* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *appartient à* $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$ [*resp. à* $\overline{\mathcal{G}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})_0$], *il en est de même pour* $(\boxbar \mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$ *et* $(\boxminus \mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$.

1 *Démonstration.* — Supposons $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$. Un quatuor (h', f', f, h) appartenant à $\square \mathcal{C}^{\bullet}$ sera identifié à un élément $((h', f'), (f, h))$ de $\square(\mathcal{C}^{\bullet}, \mathcal{C}^{\bullet})$ tel que $h'.f = f'.h$. D'après la proposition 4, on a

$$((s \times s) \times (s \times s), \gamma, (s \times s) \times (s \times s)) \in \Gamma,$$

où

$$\gamma((h', f'), (f, h)) = ((h', f), (f', h)).$$

Soit $s' \propto s \times s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^{\bullet} \star \mathcal{C}^{\bullet}$; d'après la proposition 3, on a

$$s' \times s' \propto (s \times s) \times (s \times s);$$

de plus $s' \times s'$ est un p-noyau et la proposition 16 (§ I) assure l'existence de

$$(s' \times s', \gamma_1, S) \in \Gamma \quad \text{où} \quad \gamma_1 < \gamma.$$

En vertu de l'axiome (R), le couple $((s, \varkappa^{\bullet} p_1 \gamma_1, S), (s, \varkappa^{\bullet} p_2 \gamma_1, S))$ admet un p-noyau $\square s \propto \square(s, s)$ (*voir* théorème 15) tel que

$$p(\square s) = \square \mathcal{C}^{\bullet}.$$

Par conséquent il résulte du théorème 14 que

$$(\boxbar \mathcal{C}^{\bullet}, \square s) \quad \text{et} \quad (\boxminus \mathcal{C}^{\bullet}, \square s)$$

2 sont des catégories $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurées. Si de plus $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{G}}_0$, en désignant encore par j l'application $f \to f^{-1}$ dans $\mathcal{C}$, les relations

$$((s \times s) \times (s \times s), \gamma_2(\iota \times j) \times (j \times \iota)\iota, \square s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \gamma_2(\iota \times j) \times (j \times \iota)(\square \mathcal{C}^{\bullet}) \subset \square \mathcal{C}^{\bullet}$$

où

$$\gamma_2((h', f'), (f, h)) = ((h, f'), (f, h'))$$

entraînent $(\square s, \boxbar j, \square s) \in \Gamma$, où $\boxbar j$ désigne l'application $\overline{k} \to \overline{k}^{-1}$ dans $\boxbar \mathcal{C}^{\bullet}$. Ceci prouve $(\boxbar \mathcal{C}^{\bullet}, \square s) \in \overline{\mathcal{G}}_0$; on a de même $(\boxminus \mathcal{C}^{\bullet}, \square s) \in \overline{\mathcal{G}}_0$.

— Supposons $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})_0$; d'après ce qui précède, on a $(\boxbar \mathcal{C}^{\bullet}, \square s) \in \overline{\mathcal{H}}_0$. Soit $\boxbar s_0 \propto \square s$ tel que $p(\boxbar s_0) = (\boxbar \mathcal{C}^{\bullet})_0$. Soit μ l'application $h \to ((h, \beta(h)), (\alpha(h), h))$ de $\mathcal{C}$ sur $(\boxbar \mathcal{C}^{\bullet})_0$; les relations

$$\overline{\mu} = (\boxbar s_0, \mu, s) \equiv (\boxbar s_0, [[\iota, \beta], [\alpha, \iota]], s) \in \mathcal{H}$$

et

$$\overline{\mu}' = (s, \mu^{-1}, \boxbar s_0) = (s, p'_1 p_1 \iota, \boxbar s_0) \in \mathcal{H},$$

entraînent

$$\overline{\mu}.\overline{\mu}' = \boxed{\mid}\, s_0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\mu}'.\overline{\mu} = s, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{\mu} \in \Gamma.$$

Montrons qu'on a $\left(\boxed{\mid}\, s_0,\ \alpha^{\boxed{\mid}},\ \square s\right) \in \mathcal{H}'$. En effet, soit

$$\overline{a}_1 = ((s \times s) \times (s \times s),\ (\beta \times \iota) \times (\alpha \times \iota),\ (s \times s) \times (s \times s)) \in \mathcal{H}'.$$

Soit s_1 le p-noyau du couple

$$((s_0,\ \alpha p_2 p'_1 \iota,\ s'_\beta \times s_\alpha),\ (s_0,\ \beta p_2 p'_2 \iota,\ s'_\beta \times s_\alpha)). \qquad 1$$

Comme $p(\overline{a}_1)\,(\square \mathcal{C}^{\cdot}) \subset p(s_1)$, on a, en vertu de la proposition 10 (§ I),

$$\overline{a}'_1 = \overline{a}_1 \underset{p}{\vdash} (s_1,\ \square s) \in \mathcal{H}'.$$

Par ailleurs, on a

$$\overline{a}_2 = (s \times s_\alpha,\ \gamma'_\beta \times \iota,\ s'_\beta \times s_\alpha) \in \Gamma \qquad 2$$

et

$$\overline{a}_3 = (s_0 \times s,\ \alpha \times \iota,\ s \times s_\alpha) \in \mathcal{H}',$$

d'où $\overline{a}_3.\overline{a}_2 \in \mathcal{H}'$. Puisque $p(\overline{a}_3.\overline{a}_2)\,(p(s_1)) \subset p(s_{\beta\alpha})$, on trouve

$$\overline{a}'_2 = (\overline{a}_3.\overline{a}_2) \underset{p}{\vdash} (s_{\beta\alpha},\ s_1) \in \mathcal{H}'.$$

Finalement on obtient

$$\left(\boxed{\mid}\, s_0,\ \alpha^{\boxed{\mid}},\ \square s\right) = \overline{\mu}^{-1}.\overline{\gamma}_{\beta\alpha}.\overline{a}'_2.\overline{a}'_1 \in \mathcal{H}'.$$

De même on prouve $\left(\boxed{\mid}\, s_0,\ \beta^{\boxed{\mid}},\ \square s\right) \in \mathcal{H}'$. Donc 3

$$\left(\boxed{\mid}\, \mathcal{C}^{\cdot},\ \square s\right) \in \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}',\ \mathcal{H}'),\ \mathcal{H})_0.$$

Pour la même raison,

$$\left(\boxminus\, \mathcal{C}^{\cdot},\ \square s\right) \in \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}',\ \mathcal{H}'),\ \mathcal{H})_0.$$

COROLLAIRE. — *Il existe deux foncteurs* $\overline{\boxed{\mid}}$ *et* $\overline{\boxminus}$ *de la catégorie* $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}',\ \mathcal{H})$ $\left[\text{*resp.*}\ \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}',\ \mathcal{H}'),\ \mathcal{H}),\ \text{*resp.*}\ \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}',\ \mathcal{H}),\ \text{*resp.*}\ \overline{\mathcal{G}}((\mathcal{H}',\ \mathcal{H}'),\ \mathcal{H})\right]$ *vers elle-même et une équivalence naturelle* $\left(\overline{\boxminus},\ \overline{\varepsilon},\ \overline{\boxed{\mid}}\right)$ *se projetant par* $\overline{p}$ *sur l'équivalence naturelle* $\left(\boxminus,\ \varepsilon,\ \boxed{\mid}\right)$.

Démonstration. — Soit $((\overline{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \overline{s}),\ g,\ (\mathcal{C}^{\cdot},\ s)) \in \overline{\mathcal{H}}$; d'après le théorème 13, on a

$$((\overline{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \overline{s})^4,\ (g \times g) \times (g \times g),\ (\mathcal{C}^{\cdot},\ s)^4) \in \overline{\mathcal{H}},$$

d'où

$$((\overline{s} \times \overline{s}) \times (\overline{s} \times \overline{s}),\ ((g \times g) \times (g \times g))\,\iota,\ \square s) \in \mathcal{H}.$$

1 Comme $g^{1}(\square\mathcal{C}^{\cdot}) = (\square g)(\square\mathcal{C}^{\cdot}) \subset \square\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}$, il résulte de la définition de $\square s$ qu'on a

$$(\square\bar{s}, \square g, \square s)\in\bar{\mathcal{H}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \big((\boxbar\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \square\bar{s}), \square g, (\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)\big)\in\bar{\mathcal{H}}.$$

Comme $\boxbar$ est un foncteur de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{F}$, l'application $\overline{\boxbar}$:

$$\big((\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}), g, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)\big) \to \big((\boxbar\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \square\bar{s}), \square g, (\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)\big)$$

est un foncteur de $\bar{\mathcal{H}}$ vers $\bar{\mathcal{H}}$. De même l'application $\overline{\boxminus}$:

$$\big((\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}), g, (\mathcal{C}^{\cdot}, s)\big) \to \big((\boxminus\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \square\bar{s}), \square g, (\boxminus\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)\big)$$

est un foncteur de $\bar{\mathcal{H}}$ vers $\bar{\mathcal{H}}$.

Enfin, en vertu des propositions 4 et 7 (§ I), on trouve

$$((s\times s)\times(s\times s), \gamma, (s\times s)\times(s\times s))\in\Gamma,$$

où

$$\gamma((h', f'), (f, h)) = ((f', h'), (h, f))$$

et

$$\varepsilon(s) = (\square s, \gamma^{1}, \square s)\in\Gamma.$$

Par suite,

$$\bar{\varepsilon}(\mathcal{C}^{\cdot}, s) = \big((\boxminus\mathcal{C}^{\cdot}, \square s), \gamma^{1}, (\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)\big)\in\bar{\Gamma}$$

et $(\overline{\boxminus}, \bar{\varepsilon}, \overline{\boxbar})$ est une équivalence naturelle. De plus on a

$$\bar{p}(\bar{\varepsilon}(\mathcal{C}^{\cdot}, s)) = \varepsilon(\mathcal{C}^{\cdot}).$$

Remarque. — Avec les hypothèses du théorème 15, une démonstration analogue à la fin de la démonstration du théorème 16 permet de démontrer :

THÉORÈME 15 *bis*. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *et* $(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s})$ *sont des catégories* $\bar{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$*-structurées, alors il en est de même pour* $\big(\boxbar(\mathcal{C}^{\cdot}, \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}), \square(s, \bar{s})\big)$.

Exemples. — 1° Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie topologique, $(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ est une catégorie topologique.

2° Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie (resp. un groupoïde) ordonné, alors $(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ est une catégorie (resp. un groupoïde) ordonné. Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie inductive, $(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ est une catégorie inductive.

3° Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie double, $(\boxbar\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\square\perp}, \boxminus\mathcal{C}^{\cdot})$ est une catégorie triple, où $\mathcal{C}^{\square\perp}$ désigne la classe $\square\mathcal{C}^{\cdot}$ munie de sa structure de sous-catégorie de la catégorie-produit $(\mathcal{C}^{\perp})^{4}$. Plus généralement, si $(\mathcal{C}^{\perp_i})_{i\leq n}$ est une catégorie n-uple, alors $\left(\boxbar\, \mathcal{C}^{\perp_1}, \left(\mathcal{C}^{\square \perp_i}\right)_{2 \leq i \leq n}\right)$ est une catégorie n-uple et

$$\left(\boxbar\, \mathcal{C}^{\perp_1}, \left(\mathcal{C}^{\square \perp_i}\right)_{2 \leq i \leq n}, \boxminus\, \mathcal{C}^{\perp_1}\right)$$

est une catégorie $(n + 1)$-uple. En particulier, soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Par récurrence sur n, on construit la catégorie n-uple :

$$\mathcal{C}^{\boxed{n}} = \left(\mathcal{C}^{\boxed{n}\, \perp_i}\right)_{i \leq n}$$

définie par

$$\mathcal{C}^{\boxed{2}} = (\boxbar\, \mathcal{C}, \boxminus\, \mathcal{C}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^{\boxed{n+1}} = \left(\boxbar(\mathcal{C}^{\boxed{n}}), \left((\mathcal{C}^{\boxed{n}})^{\square \perp_i}\right)_{i \leq n}, \boxminus(\mathcal{C}^{\boxed{n}})\right).$$

On obtient les formules

$$\mathcal{C}^{\boxed{n+1}} = \left(\boxbar^n \mathcal{C}, \left((\square(\boxminus^{p-1} \mathcal{C}))^{\square^{n-p}, \boxminus}\right)_{1 \leq p \leq n}\right),$$

où

$$\boxbar^0 \mathcal{C} = \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \boxbar^n \mathcal{C} = \boxbar\left(\boxbar^{n-1} \mathcal{C}\right);$$

le symbole $\left(\square\left(\boxbar^{p-1} \mathcal{C}\right)\right)^{\square^{n-p} \boxminus}$ désigne, en accord avec les conventions posées ci-dessus, la classe $\square\left(\boxbar^{p-1} \mathcal{C}\right)$ munie de sa structure de sous-catégorie de la catégorie produit $\left(\boxminus\left(\boxbar^{p-1} \mathcal{C}\right)\right)^{n-p}$. La catégorie n-uple $\mathcal{C}^{\boxed{n}}$ est identique à la catégorie n-uple $\mathcal{C}^{\boxed{n}}$ construite dans la remarque finale du n° 5.

Rappelons que si $\mathcal{C}^{\bullet}$ est une catégorie, on appelle *catégorie des trios* de $\mathcal{C}$, notée $\sqsupset \mathcal{C}^{\bullet}$, la classe des triplets $((f', f), h) \in (\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \times \mathcal{C}$ tels que

$$\alpha(f) = \alpha(h) \quad \text{et} \quad \alpha(f') = \beta(h),$$

munie de la loi de composition $\sqsupset$:

$$((\bar{f}', \bar{f}), \bar{h}) \sqsupset ((f', f), h) = ((\bar{f}', f), \bar{h}.h) \quad \text{si, et seulement si,} \quad \bar{f} = f'.$$ 1

Théorème 17. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ *une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ - [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-]*structurée. Il existe* $\sqsupset s \in \mathcal{H}_0$ *tel que* $(\sqsupset \mathcal{C}^{\bullet}, \sqsupset s)$ *soit une catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ - [*resp.* $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-]*structurée; si* $(\mathcal{C}^{\bullet}, s) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$, *on a aussi* $(\sqsupset \mathcal{C}^{\bullet}, \sqsupset s) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$.

Démonstration. — En utilisant la proposition 4, on voit qu'on a

$$\bar{g} = (s \times s, \alpha p_2 \times \beta, (s \times s) \times s) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \bar{g}' = (s \times s, \pi(\alpha p_1 \times \alpha), (s \times s) \times s) \in \mathcal{H},$$

où $\pi(f_1, f_2) = (f_2, f_1)$. Comme $\sqsupset \mathcal{C}^{\bullet}$ est la classe des éléments $((f', f), h)$ tels que

$$p(\bar{g})((f', f), h) = (\alpha(f), \beta(h)) = p(\bar{g}')((f', f), h),$$

l'axiome (R) assure l'existence de $\sqsupset s \propto (s \times s) \times s$ avec $p(\sqsupset s) = \sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}$. Puisque $\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $(\mathcal{C} \times \mathcal{C})^{\perp} \times \mathcal{C}^{\cdot}$, il résulte du théorème 14 et de la proposition 30 que $(\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s)$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$-structurée. Si de plus $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$, pour la même raison on a aussi $(\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s) \in \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})_0$. Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-structurée, il existe $\sqsupset s_0 \propto \sqsupset s$ tel que

$$p(\sqsupset s_0) = (\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot})_0.$$

Montrons qu'on a $(\sqsupset s_0, \alpha^{\sqsupset}, \sqsupset s) \in \mathcal{H}'$. En utilisant les propositions 4 et 7 (§ I), on trouve

$$\overline{a}_1 = (s \times (s_0 \times s), \gamma, (s \times s_0) \times s) .$$
$$.((s \times s_0) \times s, \pi \times \iota, (s_0 \times s) \times s).((s_0 \times s) \times s, (\alpha \times \iota) \times \iota, (s \times s) \times s),$$

où

$$\gamma((f', e), h) = (f', (e, h));$$
$$\overline{a}_2 = (s \times s_0, \iota \times \alpha, s \times s).(s \times s, \iota \times \gamma_\beta, s \times s_\beta) \in \mathcal{H}'$$

et

1 $$\overline{a}_3 = ((s \times s) \times s_0, ([\iota, \iota] \times \iota)\, \iota, s'_\alpha) \underset{p}{\vdash} (\sqsupset s_0, s'_\alpha) \in \Gamma.$$

L'axiome (R) permet de construire $s_1 \propto s \times s_\beta$ tel que $p(s_1)$ soit la classe des triplets $(f, (\beta(h), h))$ pour lesquels $\alpha(f) = \alpha(h)$. Des relations

$$p(\overline{a}_1)(\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}) \subset p(s_1) \qquad \text{et} \qquad p(\overline{a}_2)(p(s_1)) \subset p(s'_\alpha),$$

on déduit à l'aide de la proposition 10 (§ I) :

$$\overline{a}'_1 = \overline{a}_1 \underset{p}{\vdash} (s_1, \sqsupset s) \in \mathcal{H}' \qquad \text{et} \qquad \overline{a}'_2 = \overline{a}_2 \underset{p}{\vdash} (s'_\alpha, s_1) \in \mathcal{H}'.$$

Il en résulte

$$(\sqsupset s_0, \alpha^{\sqsupset}, \sqsupset s) = a_3 . \overline{a}'_2 . \overline{a}'_1 \in \mathcal{H}' \qquad \text{et} \qquad (\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s) \in \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})_0.$$

Corollaire. — *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie $\mathcal{H}$-structurée; on a*

$$\overline{\tau} = ((\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s), \tau, (\boxminus \mathcal{C}^{\cdot}, \square s)) \in \overline{\mathcal{H}},$$

où

$$\tau((h', f'), (f, h)) = ((f', f), h).$$

Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ est un groupoïde $\mathcal{H}$-structuré, on a $\overline{\tau} \in \overline{\Gamma}$.

Démonstration. — En vertu des propositions 4 et 7 (§ I), on a

$$(\sqsupset s, \tau, \square s) = ((s \times s) \times s, \gamma'(p_2 \times \iota), (s \times s) \times (s \times s)) \underset{p}{\vdash} (\sqsupset s, \square s) \in \mathcal{H},$$

où

$$\gamma'(f', (f, h)) = ((f', f), h).$$

Montrons que si de plus $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in \overline{\mathcal{G}}_0$, on a aussi $(\square s, \tau^{-1}, \sqsupset s) \in \mathcal{H}$. En effet, d'après la proposition 4, on a

$$(s \times s, \pi, s \times s) \in \Gamma, \qquad \text{où} \quad \pi(f, h) = (h, f).$$

Soit

$$\bar{b}_1 = (s \times (s \times s), \iota \times (\iota \times j), s \times (s \times s)) . (s \times (s \times s), (\iota \times \pi)\, \gamma_1'^{-1}, (s \times s) \times s) \in \Gamma;$$

la proposition 16 (§ I) assure l'existence de $s_1 \propto s \times (s \times s)$ tel que

$$\bar{b}'_1 = \bar{b}_1 \underset{p}{\vdash} (s_1, \sqsupset s) \in \Gamma.$$

En vertu du théorème 1 (§ I), on a

$$s_1 \propto s \times s', \qquad \text{où} \quad p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} \star \mathcal{C}^{\cdot},$$

d'où

$$(s \times s, (\iota \times \varkappa^{\cdot})\, \iota, s_1) \in \mathcal{H};$$

comme $(\iota \times \varkappa^{\cdot})\, (p(s_1)) \subset p(s')$, on trouve

$$\bar{b}_2 = (s, \varkappa^{\cdot}, s') . (s', (\iota \times \varkappa^{\cdot})\, \iota, s_1) \in \mathcal{H}.$$

D'après la proposition 4, on a

$$\bar{\gamma}_1 = ((s \times s) \times (s \times s), \gamma_1, s \times ((s \times s) \times s)) \in \Gamma,$$

où

$$\gamma_1(h', ((f', f), h)) = ((h', f'), (f, h)).$$

Il en résulte

$$\bar{b}_3 = \bar{\gamma}_1 . (\bar{b}_2 . \bar{b}'_1 \times \sqsupset s). (\sqsupset s \times \sqsupset s, [\iota, \iota], \sqsupset s) \in \mathcal{H}$$ 1

et

$$p(\bar{b}_3)\, (\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}) = \tau^{-1}\, (\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}) \subset \square \mathcal{C}^{\cdot}.$$

Donc

$$\bar{b}_3 \underset{p}{\vdash} (\square s, \sqsupset s) = (\square s, \tau^{-1}, \sqsupset s) \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad (\sqsupset s, \tau, \square s) \in \Gamma.$$

Remarque. — En général si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ appartient à $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$ il n'en est pas de même pour $(\boxbar \mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ et $(\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s)$. Toutefois, si $\mathcal{H}''$ est une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ stable par produit, vérifiant la condition (σ) et contenant $\mathcal{H}'$, on a :

THÉORÈME 18. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *appartient à* $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')_0$, *il en est de même pour* $(\boxbar \mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$, $(\boxminus \mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ *et* $(\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s)$. 2¶

Remarque (ajoutée à la correction des épreuves) : Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ une catégorie $\mathcal{H}$-structurée et ρ une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$ telle qu'il existe uue catégorie quotient $\mathcal{C}^{\cdot}/\rho$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$. S'il existe une structure quotient $[3\,e]\, s/\rho$ de s par ρ dans $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$, en général $(\mathcal{C}^{\cdot}/\rho, s/\rho)$ n'est pas une catégorie $\mathcal{H}$ -structurée. C'est pourquoi nous avons été amenés à définir plus récemment la notion de catégorie faiblement $\mathcal{H}$ -structurée, stable par passage au quotient (voir *Structures quotient*, act. polycopié, Paris, à paraître dans *Comm. Mat. Helv.*).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Bénabou, *Catégories avec multiplication* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 256, 1963, p. 1887).

[2] Dieudonné et Grothendieck, *Éléments de Géométrie algébrique*, III, Institut des Hautes Études scientifiques, n° 11, 1961.

[3] C. Ehresmann :

a. Espèces de structures locales. Élargissements de catégories [1re partie : traduction de *Gattungen von lokalen Strukturen* (*Jahres. der Deutschen Math. Vereinigung*, t. 61, 1957)]; *Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle* (Ehresmann), Paris, III, 1961.

b. Catégories topologiques et catégories différentiables. Colloque de Géométrie différentielle globale, Bruxelles, C. B. R. M., 1959, p. 137.

c. Catégories inductives et pseudogroupes (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 10, 1960, p. 307).

d. Catégorie des foncteurs types (*Revista Unión Mate. Argentina*, vol. 20, 1960, p. 194).

e. C. R. Acad. Sc., t. 256, 1963, p. 1198, 1891, 2080, 2280 et 5031.

[4] P. J. Hilton, *Note on free and direct products in general categories* (*Bull. Soc. Math. Belgique*, t. 13, 1961).

[5] Kurosch, Liwschitz, Schulgeifer et Zalenko, *Zur Theorie der Kategorien*, Deutsch. Verlag Wissenschaften, Berlin, 1963.

[6] G. Cantor, *Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten*, Gesammelte Abhandlungen, Berlin, 1932, p. 423.

CATEGORIES STRUCTUREES *)

III. QUINTETTES ET APPLICATIONS COVARIANTES

par Charles EHRESMANN

1. Catégorie double des quintettes. 1

Les notations sont celles utilisées dans les paragraphes I et II. En particulier $\mathcal{M}_o$ est une classe de classes contenant avec une classe toutes ses sous-classes, avec deux classes, leur produit; $\mathcal{M}$ est la catégorie de toutes les applications (M', f, M) telles que $M \in \mathcal{M}_o$ et $M' \in \mathcal{M}_o$. Nous désignons encore par $\mathcal{F}_o$ la classe de toutes les catégories $\mathcal{C}^\perp$ dont la classe support $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{M}$, par $\mathcal{F}$ la catégorie de tous les foncteurs $(\overline{\mathcal{C}}^\perp, F, \mathcal{C}^\perp)$, où $\mathcal{C}^\perp \in \mathcal{F}_o$ et $\overline{\mathcal{C}}^\perp \in \mathcal{F}_o$, par $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{C}}^\perp, \mathcal{C}^\perp)$ la sous-classe de $\mathcal{F}$ formée des foncteurs $(\overline{\mathcal{C}}^\perp, F, \mathcal{C}^\perp)$.

Soit $\mathcal{C}^\perp \in \mathcal{F}_o$; nous représentons par $\boxbar\,\mathcal{C}^\perp$ et $\boxminus\,\mathcal{C}^\perp$ les catégories longitudinale et latérale des quatuors (voir II,5) de $\mathcal{C}^\perp$, par $\alpha^{\boxbar}, \beta^{\boxbar}, \alpha^{\boxminus}$ et $\beta^{\boxminus}$ les applications source et but dans chacune de ces catégories. L'application $\omega^{\boxbar} : f \to (f, \beta(f), \alpha(f), f)$, où $f \in \mathcal{C}$, définit un foncteur double de $(\mathcal{C}^o, \mathcal{C}^\perp)$ vers $(\boxbar\,\mathcal{C}^\perp, \boxminus\,\mathcal{C}^\perp)$ où o désigne la loi de composition (triviale) :

$$(f', f) \to f \qquad \text{si, et seulement si, } f' = f.$$

Nous noterons $\mu^{\boxbar}$ l'application inverse : $(f, \beta(f), \alpha(f), f) \to f$ qui définit un foncteur de $(\boxbar\,\mathcal{C}^\perp)^{\boxminus}_o$ sur $\mathcal{C}^\perp$. De même l'application $\omega^{\boxminus}: f \to (\beta(f), f, f, \alpha(f))$ définit un foncteur double de $(\mathcal{C}^\perp, \mathcal{C}^o)$ vers $(\boxbar\,\mathcal{C}^\perp, \boxminus\,\mathcal{C}^\perp)$ et nous désignerons par $\mu^{\boxminus}$ l'inverse

$$(\beta(f), f, f, \alpha(f)) \to f \qquad \text{de } (\boxminus\,\mathcal{C}^\perp)_o \text{ sur } \mathcal{C}.$$

De plus nous écrirons :

$$'\alpha^{\boxbar} = \mu^{\boxbar}\alpha^{\boxbar},\ '\beta^{\boxbar} = \mu^{\boxbar}\beta^{\boxbar},\ '\alpha^{\boxminus} = \mu^{\boxminus}\alpha^{\boxminus} \text{ et } '\beta^{\boxminus} = \mu^{\boxminus}\beta^{\boxminus}.$$

*) Voir Références.

Si $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, F, \mathcal{C}^{\perp}) \in \mathcal{F}$, rappelons (II, 5) que la restriction à $\square\mathcal{C}^{\perp}$ de l'application produit $F \times F \times F \times F$ définit un foncteur double :

$$((\boxbar\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\perp}), \square F, (\boxbar\mathcal{C}^{\perp}, \boxminus\mathcal{C}^{\perp})).$$

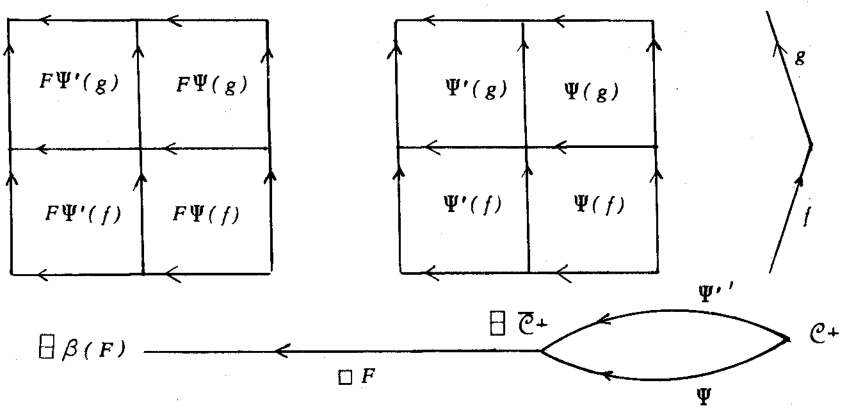
Soit $\overline{\mathcal{C}}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$. En vertu de la proposition 14,II, $\mathcal{F}(\boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une catégorie pour la loi de composition définie par :

$(\Psi', \Psi) \to \Psi'\boxbar\Psi$ si, et seulement si, $\Psi'(f)\boxbar\Psi(f)$ est défini pour tout $f \in \mathcal{C}$; alors $\Psi'\boxbar\Psi$ est le foncteur défini par : $f \to \Psi'(f)\boxbar\Psi(f)$.

$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})$ est une classe d'objets pour $\mathcal{F}(\boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})$, la bijection canonique sur $\mathcal{F}(\boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})_o$ étant :

$$F \to F^{\boxbar} = \square F . (\boxminus\mathcal{C}^{\perp}, \omega^{\boxbar}, \mathcal{C}^{\perp}).$$

Soit $\mathfrak{N}$ la classe de tous les foncteurs Ψ tels que $\beta(\Psi) = \boxminus\mathcal{C}^{\perp}$, où $\mathcal{C}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$. D'après le théorème 7,II, $\mathfrak{N}$ s'identifie à la classe des transformations naturelles entre foncteurs appartenant à $\mathcal{F}$, en identifiant Ψ avec $('\beta^{\boxbar}\Psi, \mu^{\boxminus}\Psi_o, '\alpha^{\boxbar}\Psi)$.



PROPOSITION 1. *$\mathcal{F}$ opère (resp. opère à droite) sur $\mathfrak{N}$ pour la loi de composition définie par :*

$(F, \Psi) \to F\Psi = \square F . \Psi$ si, et seulement si, $\beta(\Psi) = \boxminus\alpha(F)$.

(resp. $(\Psi, F) \to \Psi . F$ si, et seulement si, $\beta(F) = \alpha(\Psi)$).

L'espèce de structures (resp. l'espèce de structures à droite) correspondante (I, 7) est sous une espèce de morphismes (I, 3).

DEMONSTRATION. La première partie de la proposition est évidente. Munissons $\mathfrak{N}$ de
1 la structure de catégorie équivalente à la catégorie somme des catégories $\mathcal{F}(\boxminus\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \mathcal{C}^{\perp})$,

où $\mathcal{C}^{\perp} \in \mathcal{F}_0$ et $\overline{\mathcal{C}}^{\perp} \in \mathcal{F}_0$. Si le composé $F(\Psi' \square\square \Psi)$ est défini, on a :

$$\alpha(\Psi) = \alpha(\Psi') \quad \text{et} \quad \beta(\Psi) = \beta(\Psi') = \boxminus\, \alpha(F),$$

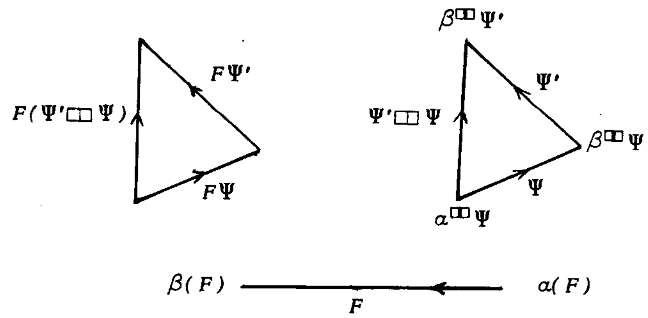
donc $F\Psi$ et $F\Psi'$ sont définis; de plus, on trouve :

$$F(\Psi' \square\square \Psi) = \square F \,.(\Psi' \square\square \Psi) = (\square F \,.\Psi') \square\square (\square F \,.\Psi) = F\Psi' \square\square F\Psi \,,$$

puisque $(\square\square\, \beta(F), \square F, \square\square\, \alpha(F)) \in \mathcal{F}$. Enfin, si Ψ est une unité de $\mathcal{N}$, $F\Psi = (\square F).\Psi$ est aussi une unité; par suite la condition c de I,5 est vérifiée, ce qui démontre la proposition. De même l'espèce de structures à droite $(\mathcal{F}, \alpha, \mathcal{N})$ est sous une espèce de morphismes puisque

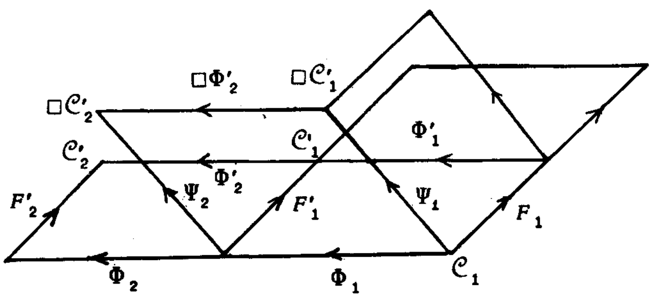
$$(\Psi' \square\square \Psi).F = (\Psi'.F) \square\square (\Psi.F)$$

par définition du composé $\Psi' \square\square \Psi$.



DEFINITION 1. *On appelle* quintette de $\mathcal{F}$ *un quintuplet* $(F', \Phi', \Psi, \Phi, F)$ *tel que* 1
$(F', \Phi', \Phi, F) \in \square(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ = *catégorie des quadruplets de* $(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ *(voir II,5)*, $\Psi \in \mathcal{N}$, $\alpha^{\square\square}\Psi = (\Phi'.F)^{\square\square}$ *et* $\beta^{\square\square}\Psi = (F'.\Phi)^{\square\square}$.

La classe des quintettes de $\mathcal{F}$ sera notée $Q(\mathcal{F})$.



PROPOSITION. *$Q(\mathcal{F})$ est une catégorie $Q^{\cdot}(\mathcal{F})$ pour la loi de composition (multipli-*
1 *cation longitudinale) suivante :*

$$(F'_2, \Phi'_2, \Psi_2, \Phi_2, F_2).(F'_1, \Phi'_1, \Psi_1, \Phi_1, F_1) = (F'_2, \Phi'_2.\Phi'_1, \Psi, \Phi_2.\Phi_1, F_1)$$

si, et seulement si, $F_2 = F'_1$, *où* $\Psi = (\Psi_2 . \Phi_1) \square\!\square (\Phi'_2 \Psi_1)$.

DEMONSTRATION. Soit $T_i = (F'_i, \Phi'_i, \Psi_i, \Phi_i, F_i) \in Q(\mathcal{F})$, où $i = 1, 2, 3$; posons $\chi(T_i) = (F'_i, \Phi'_i, \Phi_i, F_i) \in \square(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ et $\psi(T_i) = \Psi_i \in \mathcal{N}$. Si $T_3 . T_2$ et $T_2 . T_1$ sont définis, on a $F_3 = F'_2$ et $F_2 = F'_1$; par suite les composés $T = T_3.(T_2 . T_1)$ et $T' = (T_3 . T_2) . T_1$ sont aussi définis. Montrons que $T = T'$. D'après l'associativité de la multiplication longitudinale dans $\square\!\square(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ on a $\chi(T) = \chi(T')$, puisque par définition :

$$\chi(T_j . T_i) = \chi(T_j) \square\!\square \chi(T_i).$$

Par ailleurs, on trouve :

$$\psi(T) = \Psi_3 . (\Phi_2 . \Phi_1) \square\!\square \Phi'_3 (\Psi_2 . \Phi_1 \square\!\square \Phi'_2 \Psi_1)$$

et

$$\psi(T') = (\Psi_3 . \Phi_2 \square\!\square \Phi'_3 \Psi_2) . \Phi_1 \square\!\square (\Phi'_3 . \Phi'_2) \Psi_1 .$$

En utilisant l'associativité de la loi de composition $\square\!\square$ et la proposition 1, on a:

$$\psi(T) = (\Psi_3 . \Phi_2 . \Phi_1) \square\!\square \Phi'_3 (\Psi_2 . \Phi_1) \square\!\square (\Phi'_3 . \Phi'_2) \Psi_1 = \psi(T'),$$

d'où $T = T'$. Soit $F \in \mathcal{F}$. Alors $(F, \beta(F), F^{\square\!\square}, \alpha(F), F) = \overset{=}{F} \in Q(\mathcal{F})$. Si le composé

$$T = T_i . \overset{=}{F}$$

est défini, on a $F = F_i$, $\chi(T) = \chi(T_i)$ et $\psi(T) = \Psi_i \square\!\square F^{\square\!\square} = \Psi_i$. Il en résulte que $Q^{\cdot}(\mathcal{F})$ est une catégorie, l'unité à droite de T_i étant $\overset{=}{F}_i$. De plus $\mathcal{F}$ s'identifie à la classe des unités de $Q^{\cdot}(\mathcal{F})$ en identifiant $F \in \mathcal{F}$ à $\overset{=}{F}$.

COROLLAIRE. *Pour que $T = (F', \Phi', \Psi, \Phi, F) \in Q(\mathcal{F})$ soit inversible dans $Q^{\cdot}(\mathcal{F})$, il faut et il suffit que Φ et Φ' soient inversibles dans $\mathcal{F}$ et Ψ dans $\mathcal{N}$; l'inverse de T est alors :*

$$(F, \Phi'^{-1}, \Psi', \Phi^{-1}, F'), \qquad \text{où } \Psi' = \Phi'^{-1} \Psi^{-1} . \Phi^{-1}.$$

DEMONSTRATION. Soit $T_1 \in Q(\mathcal{F})$ tel que $T_1 . T = \overset{=}{F}$ et $T . T_1 = \overset{=}{F'}$; alors le quadruplet $\chi(T_1)$ est l'inverse de $\chi(T)$ dans $\square\!\square(\mathcal{F}, \mathcal{F})$; par suite $T_1 = (F, \Phi'^{-1}, \Psi_1, \Phi^{-1}, F')$ tel que :

$$(\Psi_1 . \Phi) \square\!\square (\Phi'^{-1} \Psi) = F^{\square\!\square} \text{ et } (\Psi . \Phi^{-1}) \square\!\square (\Phi' \Psi_1) = F'^{\square\!\square}.$$

De ces équations, on déduit :

$$\Psi_1 \square\!\square \Phi'^{-1} \Psi . \Phi^{-1} = F^{\square\!\square} . \Phi^{-1} = \beta^{\square\!\square} \Psi_1 ;$$

$$\Phi'^{-1}\Psi . \Phi^{-1} \square \Psi_1 = \alpha^{\square}\Psi_1 .$$

Donc Ψ_1 est l'inverse de $\Phi'^{-1}\Psi . \Phi^{-1}$ dans $\mathcal{H}$; il en résulte que Ψ est inversible dans $\mathcal{H}$ et que :

$$\Psi_1 = \Phi'^{-1}\Psi^{-1} . \Phi^{-1} .$$

PROPOSITION 3. *$Q(\mathcal{F})$ est une catégorie $Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F})$ pour la multiplication latérale* 1
définie par :

$$(F'_2 , \Phi'_2 , \Psi_2 , \Phi_2 , F_2) \blacklozenge (F'_1 , \Phi'_1 , \Psi_1 , \Phi_1 , F_1) = (F'_2 . F'_1 , \Phi'_2 , \Psi , \Phi_1 , F_2 . F_1)$$

$$\textit{si, et seulement si, } \Phi_2 = \Phi'_1 , \textit{ où } \Psi = F'_2 \Psi_1 \square \Psi_2 . F_1 .$$

La démonstration est analogue à celle de la proposition 2. $\mathcal{F}$ s'identifie encore à la classe des unités de $Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F})$, en identifiant Φ à $(\beta(\Phi), \Phi, \Phi^{\square}, \Phi, \alpha(\Phi))$, où $\Phi^{\square}$ est l'unité de $\mathcal{H}$ associée à Φ. Les éléments inversibles sont les quintettes tels que F, F' et Ψ soient inversibles dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ respectivement. L'inverse de $(F', \Phi', \Psi, \Phi, F)$ est $(F'^{-1}, \Phi, \Psi_1, \Phi', F^{-1})$, où $\Psi_1 = F'^{-1}\Psi^{-1} . F^{-1}$.

THEOREME 1. *$(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))$ est une catégorie double et l'application*

$$\chi : (F', \Phi', \Psi, \Phi, F) \to (F', \Phi', \Phi, F)$$

définit un foncteur double de $(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))$ vers $\square(\mathcal{F}, \mathcal{F})$.

DEMONSTRATION. Si $\overline{\overline{F}}$ et $\overline{\overline{F'}}$ sont deux unités de $Q^{\cdot}(\mathcal{F})$ et si $\overline{\overline{F'}} \blacklozenge \overline{\overline{F}}$ est défini, on a : $\alpha(F') = \beta(F)$ et :

$$\overline{\overline{F'}} \blacklozenge \overline{\overline{F}} = (F' . F , \beta(F'), (F' . F)^{\square}, \alpha(F), F' . F) = \overline{\overline{F' . F}} .$$

Ainsi $(Q^{\cdot}(\mathcal{F}))_0$ est stable relativement à $\blacklozenge$; de même $(Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))_0$ est stable relativement à la multiplication longitudinale. Soit :

$$T_i = (F'_i , \Phi'_i , \Psi_i , \Phi_i , F_i) \in Q(\mathcal{F}) \text{ et } \chi(T_i) = t_i .$$

On trouve facilement :

$$\alpha^{\cdot}(\alpha^{\blacklozenge}(T_i)) = \overline{\overline{\alpha(\Phi_i)}} = \overline{\overline{\alpha(F_i)}} = \alpha^{\blacklozenge}(\alpha^{\cdot}(T_i));$$
$$\beta^{\cdot}(\beta^{\blacklozenge}(T_i)) = \beta^{\blacklozenge}(\beta^{\cdot}(T_i)) = \overline{\overline{\beta(\Phi'_i)}};$$
$$\alpha^{\cdot}(\beta^{\blacklozenge}(T_i)) = \beta^{\blacklozenge}(\alpha^{\cdot}(T_i)) = \overline{\overline{\alpha(\Phi'_i)}};$$
$$\beta^{\cdot}(\alpha^{\blacklozenge}(T_i)) = \alpha^{\blacklozenge}(\beta^{\cdot}(T_i)) = \overline{\overline{\alpha(F'_i)}}.$$

En vertu du théorème 6, II, il reste seulement à démontrer que l'axiome de permutabilité est vérifié. En effet, supposons les composés $(T_4 \blacklozenge T_3)$, $(T_2 \blacklozenge T_1)$, $(T_4 . T_2)$ et $(T_3 . T_1)$ définis; alors on a :

$$\Phi_4 = \Phi'_3 , \ \Phi_2 = \Phi'_1 , \ F_4 = F'_2 \text{ et } F_3 = F'_1 ;$$

par suite $$F_4 . F_3 = F'_2 . F'_1 \text{ et } \Phi_4 . \Phi_2 = \Phi'_3 . \Phi'_1 .$$

Donc les composés :

$$T = (T_4 \blacklozenge T_3) . (T_2 \blacklozenge T_1) \qquad \text{et} \qquad T' = (T_4 . T_2) \blacklozenge (T_3 . T_1)$$

sont définis. Montrons qu'ils sont égaux. Puisque $\square(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ est une catégorie double pour les multiplications longitudinale et latérale, on a :

$$\chi(T) = (t_4 \boxminus t_3) \boxbar (t_2 \boxminus t_1) = (t_4 \boxbar t_2) \boxminus (t_3 \boxbar t_1) = \chi(T').$$

De plus :

$$\psi(T) = [(F'_4 \Psi_3 \boxbar \Psi_4 . F_3) . \Phi_1] \boxbar [\Phi'_4 (F'_2 \ \Psi_1 \boxbar \Psi_2 . F_1)] ,$$

$$\psi(T') = [F'_4 (\Psi_3 . \Phi_1 \boxbar \Phi'_3 \Psi_1] \boxbar [\Psi_4 . \Phi_2 \boxbar \Phi'_4 \Psi_2] . F_1 .$$

En utilisant l'associativité de $\boxbar$ et la proposition 1, on trouve :

$$\psi(T) = F'_4 \Psi_3 . \Phi_1 \boxbar \tilde{\Psi} \boxbar \Phi'_4 \Psi_2 . F_1$$

et $$\psi(T') = F'_4 \Psi_3 . \Phi_1 \boxbar \tilde{\Psi}' \boxbar \Phi'_4 \Psi_2 . F_1 ,$$

$$\tilde{\Psi} = \Psi_4 . (F'_1 . \Phi_1) \boxbar (\Phi'_4 . F_4) \Psi_1 \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Psi}' = (F'_4 . \Phi_4) \Psi_1 \boxbar \Psi_4 . (\Phi'_1 . F_1) .$$

Il suffit donc de prouver que $\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}'$. On obtient :

$$\alpha^{\boxbar} \tilde{\Psi} = (\Phi'_4 . F_4) \alpha^{\boxbar} \Psi_1 = (\Phi'_4 . F_4 . \Phi'_1 . F_1)^{\boxbar}$$

et $$\alpha^{\boxbar} \tilde{\Psi}' = (\alpha^{\boxbar} \Psi_4) . (\Phi'_1 . F_1) = (\Phi'_4 . F_4 . \Phi'_1 . F_1)^{\boxbar} = \alpha^{\boxbar} \tilde{\Psi} ;$$

de même $$\beta^{\boxbar} \tilde{\Psi} = (F'_4 . \Phi_4 . F'_1 . \Phi_1)^{\boxbar} = \beta^{\boxbar} \tilde{\Psi}' .$$

Prouvons que l'on a $\alpha^{\boxminus} \tilde{\Psi} = \alpha^{\boxminus} \tilde{\Psi}'$, ainsi que $\beta^{\boxminus} \tilde{\Psi} = \beta^{\boxminus} \tilde{\Psi}'$. Comme pour tout $f \in \alpha(F_1)$ on a $\alpha^{\boxminus} \tilde{\Psi}(f) = \tilde{\Psi}(\alpha(f))$, on voit que $\alpha^{\boxminus} \tilde{\Psi}$ et $\alpha^{\boxminus} \tilde{\Psi}'$ (resp. $\beta^{\boxminus} \tilde{\Psi}$ et $\beta^{\boxminus} \tilde{\Psi}'$) sont égaux si, et seulement si, $\tilde{\Psi}_o = \tilde{\Psi}'_o$. Si $g \in \mathcal{C}$, posons $\langle g^{\boxminus} \rangle = g$. Soit $e \in \alpha(F_1)_o$; on a :

$$\alpha \langle \Psi_1(e) \rangle = (\Phi'_1 . F_1)(e) \qquad \text{et} \qquad \beta \langle \Psi_1(e) \rangle = (F'_1 . \Phi_1)(e).$$

Comme $\Psi_4(\langle \Psi_1(e) \rangle)$ est un quatuor, on obtient :

$$\langle \Psi_4(F'_1 . \Phi_1(e)) \rangle . (\Phi'_4 . F_4)(\langle \Psi_1(e) \rangle) =$$

1 $$= (F'_4 . \Phi_4)(\langle \Psi_1(e) \rangle) . \langle \Psi_4(\Phi'_1 . F_1(e)) \rangle ;$$

c'est-à-dire $\tilde{\Psi}(e) = \tilde{\Psi}'(e)$. Par conséquent :

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}' , \ \psi(T) = \psi(T') \text{ et } T = T' .$$

Ceci démontre le théorème.

La classe des sommets de $(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))$ s'identifie à $\mathcal{F}_o$ en identifiant $(\alpha(F), \alpha(F), (\alpha(F))^{\boxbar}, \alpha(F), \alpha(F))$ avec $\alpha(F)$.

L'application $\nu : \Psi \to ({}'\beta^{\square\square}\Psi, \mathcal{C}, \Psi, \alpha(\Psi), {}'\alpha^{\square\square}\Psi)$, où $\beta(\Psi) = \boxminus \mathcal{C}$, est une bijection de $\mathfrak{N}$ sur la sous-classe $\mathcal{F}_o \blacklozenge Q(\mathcal{F}) \blacklozenge \mathcal{F}_o$ de $Q(\mathcal{F})$.

PROPOSITION 4. *ν définit sur $\mathfrak{N}$ une structure de catégorie double $(\mathfrak{N}^{\cdot}, \mathfrak{N}^{\blacklozenge})$, équivalente à une sous-catégorie double de $(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))$. Pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_o$, la classe des transformations naturelles entre foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ s'identifie à une sous-catégorie double $\mathfrak{N}(\mathcal{C})$ de $(\mathfrak{N}^{\cdot}, \mathfrak{N}^{\blacklozenge})$.*

DEMONSTRATION. $\mathfrak{N}^{\cdot}$ s'identifie à la catégorie somme des catégories $\mathcal{F}(\boxminus \mathcal{C}^{\perp}, \overline{\mathcal{C}}^{\perp})$, où $\mathcal{C}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$ et $\overline{\mathcal{C}}^{\perp} \in \mathcal{F}_o$. Dans $\mathfrak{N}^{\blacklozenge}$, la loi de composition est définie par :

$$\Psi_2 \blacklozenge \Psi_1 = ({}'\beta^{\square\square}\Psi_2)\Psi_1 \square\square \Psi_2 . ({}'\alpha^{\square\square}\Psi_1) \text{ si, et seulement si, } \boxminus\alpha(\Psi_1) = \beta(\Psi_2).$$

Par suite $\mathfrak{N}^{\blacklozenge}$ est équivalente à la catégorie latérale des transformations naturelles considérée dans [1]. Pour tout $\mathcal{C} \in \mathcal{F}_o$, la catégorie double $\mathfrak{N}(\mathcal{C})$ s'identifie à la catégorie des transformations naturelles entre foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$, munie des multiplications longitudinale et latérale définies dans [1]; $\mathfrak{N}^{\blacklozenge}(\mathcal{C})$ admet $\mathcal{C}$ pour seule unité.

2. Catégorie induite de la catégorie des quintettes. 1+

Dans la fin de ce paragraphe, nous désignerons par $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ une catégorie d'homomorphismes à produits finis résolvante à droite, par $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$ contenant le groupoïde Γ des éléments inversibles de $\mathcal{H}$, stable par produit dans $\mathcal{H}$ (définition 3, II), et vérifiant la condition (σ) de la proposition 10, I. Soient $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}), \overline{\Gamma})$ et $(\mathcal{F}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}), \overline{\Gamma}')$ les catégories d'homomorphismes au-dessus de $\mathcal{F}$ formées de foncteurs $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$- structurés et $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$- structurés respectivement; nous savons (II, 2 et 7) que ces catégories d'homomorphismes sont à produits finis.

Pour simplifier les notations, nous utiliserons le symbole $[\mathcal{H}]$, qui pourra être lu soit partout $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, soit partout $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$; de même $[\overline{\mathcal{H}}]$ signifiera soit $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H})$, soit $\overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$.

Rappelons [2] que, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mu_1, \mathcal{C}_1^{\cdot})$ et $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mu_2, \mathcal{C}_2^{\cdot})$ sont des foncteurs, la classe des couples $(f_1, f_2) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ tels que $\mu_1(f_1) = \mu_2(f_2)$ est une sous-catégorie de la catégorie produit $\mathcal{C}_1^{\cdot} \times \mathcal{C}_2^{\cdot}$, appelée *catégorie induite de* $\mathcal{C}_1^{\cdot}$ *par* (μ_2, μ_1), 2
et désignée par $\mu_2^*(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mu_1)$. Soient p_i les projections canoniques de $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ sur $\mathcal{C}_i$. Rappelons ([3] et proposition 31, [2]) que si $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mu_i, \mathcal{C}_i^{\cdot}, \mathcal{S}_i^{\cdot})$ est une catégorie d'homomorphismes et $\mathcal{S}_i^{\cdot}$ le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{C}_i^{\cdot}$, où $i = 1, 2$,
alors $(\mathcal{C}_i^{\cdot}, p_i\iota, \mu_2^*(\mathcal{C}_1^{\cdot}, \mu_1), \mu_2^*(\mathcal{S}_1^{\cdot}, \mu_1))$ est une catégorie d'homomorphismes. 3

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}^{\cdot}_1 \times \mathcal{C}^{\cdot}_2 \arrow[dll, "p_1"'] \arrow[ddl, "p_2"] \\
\mathcal{C}^{\cdot}_1 \arrow[d, "\mu_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1)"] & \cdot \arrow[l] \arrow[d] \arrow[ur, "\iota"] & \\
\cdot & \mathcal{C}^{\cdot}_2 \arrow[l, "\mu_2"] &
\end{tikzcd}$$

1 Nous reviendrons au § V sur la théorie des catégories structurées induites (cf. [2]); nous démontrerons seulement ici le théorème suivant dont nous aurons besoin.

THEOREME 2. *Soient* $\overline{\mu}_i = ((\mathcal{C}^{\cdot}, s), \mu_i, (\mathcal{C}^{\cdot}_i, s_i)) \in [\overline{\mathcal{H}}]$, *où* $i = 1, 2$. *Il existe une sous-structure* σ *de* $s_1 \times s_2$ *dans* $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ *telle que* $(\mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1), \sigma)$ *soit une sous-catégorie* $[\mathcal{H}]$*-structurée de* $(\mathcal{C}^{\cdot}_1 \times \mathcal{C}^{\cdot}_2, s_1 \times s_2)$; *on appelle* $(\mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1), \sigma)$, *catégorie structurée induite par* $(\overline{\mu}_2, \overline{\mu}_1)$, *notée aussi* $\overline{\mu}_2 \vee \overline{\mu}_1$. *De plus, on a :* $((\mathcal{C}^{\cdot}_i, s_i), p_i \iota, \overline{\mu}_2 \vee \overline{\mu}_1) \in [\overline{\mathcal{H}}]$.

DEMONSTRATION. Puisque $(\mathfrak{M}, p, \mathcal{H}, \Gamma)$ est résolvante à droite, le couple :

$$((s, \mu_1 p_1, s_1 \times s_2), (s, \mu_2 p_2, s_1 \times s_2))$$

admet un p-noyau σ tel que $p(\sigma) = \mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1)$. D'après le théorème 13, II, on a

2 $(\mathcal{C}^{\cdot}_1 \times \mathcal{C}^{\cdot}_2, s_1 \times s_2) \in [\overline{\mathcal{H}}]_o$, et il résulte du théorème 14, II, que $(\mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1), \sigma)$ est une sous-catégorie $[\mathcal{H}]$- structurée de la catégorie $[\mathcal{H}]$- structurée $(\mathcal{C}^{\cdot}_1 \times \mathcal{C}^{\cdot}_2, s_1 \times s_2)$.

COROLLAIRE. *Si* $\overline{\mu}_i = ((\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp}), \mu_i, (\mathcal{C}^{\cdot}_i, \mathcal{C}^{\perp}_i))$, *où* $i = 1, 2$, *sont des foncteurs doubles,* $\overline{\mu}_2 \vee \overline{\mu}_1 = (\mu^*_2(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1), \mu^*_2(\mathcal{C}^{\perp}_1, \mu_1))$ *est une catégorie double et* $((\mathcal{C}^{\cdot}_i, \mathcal{C}^{\perp}_i), p_i \iota, \overline{\mu}_2 \vee \overline{\mu}_1)$ *est un foncteur double.*

Soit $(\mathcal{K}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\mathcal{S}$ soit le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{L}$. Pour abréger, écrivons $\mathcal{L}_\wedge$ pour $(\mathcal{L}, \mathcal{L})$.

Soit $(\boxminus\mathcal{L})_\gamma$ le groupoïde des éléments inversibles de la catégorie longitudinale $\boxminus\mathcal{L}$, dont les éléments sont les quatuors (h', f', f, h) tels que $f \in \mathcal{S}$ et $f' \in \mathcal{S}$. Soit $(\boxminus\mathcal{L})_\gamma$ le groupoïde des éléments inversibles de la catégorie latérale $\boxminus\mathcal{L}$, dont les éléments sont les quatuors (h', f', f, h) tels que $h \in \mathcal{S}$ et $h' \in \mathcal{S}$.

PROPOSITION 5. $(\boxminus\mathcal{K}_\wedge, \square q, \boxminus\mathcal{L}_\wedge, (\boxminus\mathcal{L})_\gamma)$ *et* $(\boxminus\mathcal{K}_\wedge, \square q, \boxminus\mathcal{L}_\wedge, (\boxminus\mathcal{L})_\gamma)$ *sont des catégories d'homomorphismes.*

DEMONSTRATION. Soient $T = (h', f', f, h) \in \square\mathcal{L}_\wedge$ et $\overline{T} = (\overline{h}', \overline{f}', \overline{f}, \overline{h}) \in \square\mathcal{L}_\wedge$. Les conditions : $\alpha^{\boxminus}(T) = \alpha^{\boxminus}(\overline{T})$, $\beta^{\boxminus}(T) = \beta^{\boxminus}(\overline{T})$ et $\square q(T) = \square q(\overline{T})$ entraînent :

$$h = \overline{h}, \quad h' = \overline{h}', \quad q(f) = q(\overline{f}) \quad \text{et} \quad q(f') = q(\overline{f}').$$

Comme $\alpha(f) = \alpha(\overline{f}) = \alpha(h)$ et $\beta(f) = \beta(\overline{f}) = \alpha(h')$, il en résulte $f = \overline{f}$, puisque $(\mathcal{K}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes; de même $f' = \overline{f'}$, d'où $T = \overline{T}$. Supposons $T \in (\square\mathcal{L})_\gamma$ et $\overline{T} \in (\square\mathcal{L})_\gamma$ tels que :

$$\alpha^{\square}(T) = \alpha^{\square}(\overline{T}) \qquad \text{et} \qquad \square q(T) = \square q(\overline{T});$$

on a : $\quad h = \overline{h},\ \alpha(f) = \alpha(\overline{f}) \qquad$ et $\qquad q(f) = q(\overline{f})$,

donc $f = \overline{f}$, car $f \in \mathcal{S}$; de même $f' = \overline{f'}$. Les éléments f et f' étant inversibles, on en déduit :

$$h' = f'.h.f^{-1} = \overline{f'}.\overline{h}.\overline{f}^{-1} = \overline{h'},$$

et par suite $T = \overline{T}$. Enfin si $T \in (\square\mathcal{L})_\gamma$ et si $\overline{h} \in \mathcal{L}$ est tel que $q(h) = q(\overline{h})$, il existe $\overline{f} \in \mathcal{S}$ tel que :

$$q(f) = q(\overline{f}) \qquad \text{et} \qquad \alpha(\overline{f}) = \alpha(\overline{h})$$

et il existe $\overline{f'} \in \mathcal{S}$ tel que :

$$q(f') = q(\overline{f'}) \qquad \text{et} \qquad \alpha(\overline{f'}) = \beta(\overline{h});$$

on en déduit $(\overline{f'}.\overline{h}.\overline{f}^{-1}, \overline{f'}, \overline{f}, \overline{h}) \in (\square\mathcal{L})_\gamma$. Ceci montre que $(\square\mathcal{K}_\wedge, \square q, \square\mathcal{L}_\wedge, (\square\mathcal{L})_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes. Une démonstration, analogue, prouve que $(\boxminus\mathcal{K}_\wedge, \square q, \boxminus\mathcal{L}_\wedge, (\boxminus\mathcal{L})_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes.

Soit $(\mathcal{F}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes telle que $\mathcal{S}$ soit le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{L}$.

DEFINITION 2. *On appelle* quintette de $(\mathcal{F}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ *un élément de la catégorie induite* $\chi^*(\square\mathcal{L}_\wedge, \square q)$ *de* $\square\mathcal{L}_\wedge$ *par* $(\chi, \square q)$, *où* χ *est le foncteur canonique de* $Q^{\cdot}(\mathcal{F})$ *vers* $\square\mathcal{F}_\wedge$ *(théorème 1).*

Un quintette de $(\mathcal{F}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$ est donc un couple :

$$((F', \Phi', \Phi, F), (q(F'), q(\Phi'), \Psi, q(\Phi), q(F))),$$

où $(F', \Phi', \Phi, F) \in \square\mathcal{L}_\wedge$, $\Psi \in \mathcal{N}$, $'\alpha^{\square}\Psi = q(\Phi'.F)$ et $'\beta^{\square}(\Psi) = q(F'.\Phi)$. Nous désignerons ce quintette par la notation abrégée : $(F', \Phi', \Psi, \Phi, F)$.

Soit $Q(\mathcal{F}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$, ou plus simplement $Q(\mathcal{L})$, la classe des quintettes de $(\mathcal{F}, q, \mathcal{L}, \mathcal{S})$. Soit $\overline{q}$ la projection canonique :

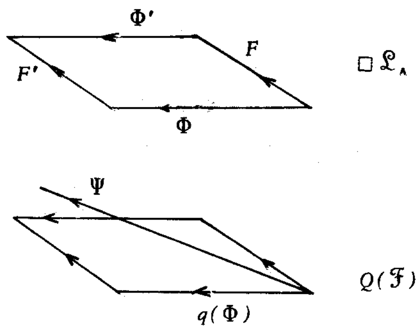
$$(F', \Phi', \Psi, \Phi, F) \to (q(F'), q(\Phi'), \Psi, q(\Phi), q(F))$$

de $Q(\mathcal{L})$ vers $Q(\mathcal{F})$. Soit $\overline{\chi}$ la projection canonique :

$$(F', \Phi', \Psi, \Phi, F) \to (F', \Phi', \Phi, F).$$

On a $(\square q)\overline{\chi} = \chi\,\overline{q}$.

$$\begin{tikzcd}
Q(\mathcal{F}) \arrow[d, "\chi"'] & Q(\mathcal{L}) \arrow[l, "\bar{q}"'] \arrow[d, "\bar{\chi}"] \\
\square \mathcal{F}_\wedge & \square \mathcal{L}_\wedge \arrow[l, "\square q"]
\end{tikzcd}$$



THEOREME 3. *$Q(\mathcal{L})$ est munie d'une structure de catégorie double $(Q^{\cdot}(\mathcal{L}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{L}))$ induite par* $[((\square\square\mathcal{F}_\wedge, \boxminus\mathcal{F}_\wedge), \chi, (Q^{\cdot}(\mathcal{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}))), ((\square\square\mathcal{F}_\wedge, \boxminus\mathcal{F}_\wedge), \square q, (\square\square\mathcal{L}_\wedge, \boxminus\mathcal{L}_\wedge))]$. *Les applications $\bar{q}$ et $\bar{\chi}$ définissent des foncteurs doubles.*

En effet, χ et $\square q$ définissant deux foncteurs doubles, le théorème 3 résulte des théorèmes 1 et 2. Les lois de compositions sur $Q(\mathcal{L})$, appelées resp. *multiplication longitudinale et multiplication latérale,* sont définies de la manière suivante :

$$(F'_2, \Phi'_2, \Psi_2, \Phi_2, F_2).(F'_1, \Phi'_1, \Psi_1, \Phi_1, F_1) = (F'_2, \Phi'_2.\Phi'_1, \Psi, \Phi_2.\Phi_1, F_1)$$

si, et seulement si, $F_2 = F'_1$, où : $\Psi = \Psi_2 . q(\Phi_1) \square\square\, q(\Phi'_2)\Psi_1$;

$$(F'_2, \Phi'_2, \Psi_2, \Phi_2, F_2) \blacklozenge (F'_1, \Phi'_1, \Psi_1, \Phi_1, F_1) = (F'_2 . F'_1, \Phi'_2, \Psi, \Phi_1, F_2 . F_1)$$

si, et seulement si, $\Phi_2 = \Phi'_1$, où : $\Psi = q(F'_2)\Psi_1 \square\square \Psi_2 . q(F_1)$.

Pour que $T = (F', \Phi', \Psi, \Phi, F) \in Q(\mathcal{L})$ soit inversible dans $Q^{\cdot}(\mathcal{L})$ (resp. $Q^{\blacklozenge}(\mathcal{L})$), il faut et il suffit que $\Phi \in \mathcal{S}$, $\Phi' \in \mathcal{S}$ (resp. $F \in \mathcal{S}$, $F' \in \mathcal{S}$) et que Ψ soit inversible dans $\mathcal{N}$.

COROLLAIRE. *$(Q^{\cdot}(\mathcal{F}), \bar{q}, Q^{\cdot}(\mathcal{L}), \Sigma_1)$ et $(Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F}), \bar{q}, Q^{\blacklozenge}(\mathcal{L}), \Sigma_2)$ sont des catégories d'homomorphismes, où Σ_1 (resp. Σ_2) est la classe des quintettes $(F', \Phi', \Psi, \Phi, F)$ tels que $\Phi' \in \mathcal{S}$ et $\Phi \in \mathcal{S}$ (resp. $F' \in \mathcal{S}$ et $F \in \mathcal{S}$) et $(F', \Phi', \Phi, F) \in \square\mathcal{L}$.*

Ce corollaire résulte de la proposition 5 et du résultat avant le théorème 2.

Identifions $\mathcal{L}_o$ à la classe des sommets de $(Q^{\cdot}(\mathcal{L}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{L}))$.

Soit $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ la sous-classe $\mathcal{L}_o \blacklozenge Q(\mathcal{L}) \blacklozenge \mathcal{L}_o$ de $Q(\mathcal{L})$ formée des quintettes T tels que $\alpha^{\blacklozenge}(T) \in \mathcal{L}_o$ et $\beta^{\blacklozenge}(T) \in \mathcal{L}_o$, c'est-à-dire de la forme $(F', \beta(F), \Psi_o, \alpha(F), F)$.

PROPOSITION 6. *$\mathcal{N}(\mathcal{L})$ est une sous-catégorie double de $(Q^{\cdot}(\mathcal{L}), Q^{\blacklozenge}(\mathcal{L}))$. Pour tout $L \in \mathcal{L}_o$, $\mathcal{N}(\mathcal{L})$ admet pour sous-catégorie double la classe $L \blacklozenge Q(\mathcal{L}) \blacklozenge L$ des quintettes T tels que $\alpha^{\blacklozenge}(T) = L = \beta^{\blacklozenge}(T)$.*

$\mathcal{N}(\mathcal{L})$ s'identifie à la catégorie double induite par :

1¶ $$((\square\mathcal{F}_\wedge, \chi, \nu(\mathcal{N})), (\square\mathcal{F}_\wedge, \square q, (\square\square\mathcal{L}_\wedge)_o)).$$

3. Quintettes structurés.

Soit $(\overline{\overline{\boxminus}}, \overline{\varepsilon}, \overline{\square\square})$ l'équivalence naturelle entre foncteurs de $[\mathcal{H}]$ vers $[\mathcal{H}]$ construite au § II, corollaire du théorème 16, telle que : $\overline{\square\square}(\mathcal{C}^{\cdot}, s) = (\square\square\,\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ et $\overline{\overline{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s) = (\boxminus\,\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ pour tout $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in [\mathcal{H}]_o$. Rappelons que l'on a :

$$(s, \mu^{\square\square}, \square\square\, s_o) \in \Gamma, \quad \text{où } \square\square\, s_o \propto \square s$$

et
$$(s, \mu^{\boxminus}, \boxminus\, s_o) \in \Gamma, \quad \text{où } \boxminus\, s_o \propto \square s.$$

Nous poserons :
$$'\overline{\alpha}^{\square\square} = ((\mathcal{C}^{\cdot}, s), '\alpha^{\square\square}, \overline{\overline{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s))$$

et
$$'\overline{\beta}^{\square\square} = ((\mathcal{C}^{\cdot}, s), '\beta^{\square\square}, \overline{\overline{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s)).$$

DEFINITION 3. *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in [\mathcal{H}]_o$ *; un foncteur* $[\mathcal{H}]$*-structuré* $\overline{\Psi}$ *tel que* $\beta(\overline{\Psi}) = \overline{\overline{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *sera appelé* transformation naturelle $[\mathcal{H}]$- structurée de $'\overline{\alpha}^{\square\square}.\overline{\Psi}$ vers $'\overline{\beta}^{\square\square}.\overline{\Psi}$.

Nous désignerons par $\overline{\mathcal{N}}([\mathcal{H}])$ la classe des transformations naturelles $[\mathcal{H}]$-structurées. Si $\overline{\Psi} \in \overline{\mathcal{N}}([\mathcal{H}])$, nous représenterons $\overline{\Psi}$ soit par le triplet $(\overline{\overline{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s), \Psi, (\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \overline{s}))$, soit par le triplet $(\overline{\overline{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s), \psi, (\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \overline{s}))$ où $\Psi = \overline{p}(\overline{\Psi}) = (\boxminus\,\mathcal{C}^{\cdot}, \psi, \overline{\mathcal{C}}^{\cdot}) \in \mathcal{N}(\mathcal{F})$ et $\psi = p_{\mathcal{F}}(\Psi)$, en désignant encore par $p_{\mathcal{F}}$ le foncteur 1
canonique de $\mathcal{F}$ vers $\mathcal{M}$.

PROPOSITION 7. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) On a : $(\overline{\overline{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot}, s), \psi, (\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \overline{s})) \in \overline{\mathcal{N}}([\mathcal{H}])$.

2) On a : $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) \in [\mathcal{H}]_o$, $(\overline{\mathcal{C}}^{\cdot}, \overline{s}) \in [\mathcal{H}]_o$, $(\boxminus\,\mathcal{C}^{\cdot}, \psi, \overline{\mathcal{C}}^{\cdot}) \in \mathcal{F}$, $(s, '\alpha^{\square\square}\psi, \overline{s}) \in \mathcal{H}$, $(s, '\beta^{\square\square}\psi, \overline{s}) \in \mathcal{H}$ *et* $(s, \mu^{\boxminus}\psi_o, \overline{s}_o) \in \mathcal{H}$.

DEMONSTRATION : Supposons la condition 1 vérifiée; on a :

$$(\boxminus\,\mathcal{C}^{\cdot}, \psi, \overline{\mathcal{C}}^{\cdot}) \in \mathcal{F},$$

$$(s, \mu^{\square\square}, \square\square\, s_o).(\square\square\, s_o, \alpha^{\square\square}, \square s).(\square s, \psi, \overline{s}) = (s, '\alpha^{\square\square}\psi, \overline{s}) \in \mathcal{H}$$

et, de même,
$$(s, '\beta^{\square\square}\psi, \overline{s}) \in \mathcal{H}.$$

Puisque: $(\square s, \psi_o, \overline{s}_o) = (\square s, \psi, \overline{s}).(\overline{s}, \iota, \overline{s}_o) \in \mathcal{H}$ et $\psi_o(p(\overline{s}_o)) \subset p(\boxminus\, s_o)$,

$$(\boxminus\, s_o, \psi_o, \overline{s}_o) \in \mathcal{H}, \text{ d'où } (s, \mu^{\boxminus}\psi_o, \overline{s}_o) \in \mathcal{H}.$$

Inversement supposons la condition 2 vérifiée. Pour tout $f \in \mathcal{C}$, on a :

$$\psi(f) = ('\beta^{\square\square}\psi(f), \mu^{\boxminus}\psi_o(\beta(f)), \mu^{\boxminus}\psi_o(\alpha(f)), '\alpha^{\square\square}\psi(f)),$$

de sorte que ψ se décompose sous la forme :

$$\psi = [['\beta^{\square\square}\psi, \mu^{\boxminus}\psi_o\beta], [\mu^{\boxminus}\psi_o\alpha, '\alpha^{\square\square}\psi]];$$

comme
$$(s, \mu^{\boxminus}\psi_o, \overline{s}_o).(\overline{s}_o, \alpha, \overline{s}) = (s, \mu^{\boxminus}\psi_o\alpha, \overline{s}) \in \mathcal{H}, \ (s, \mu^{\boxminus}\psi_o\beta, \overline{s}) \in \mathcal{H},$$

$$(s,\ '\alpha^{\square\!\square}\psi,\ \bar{s}) \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad (s,\ '\beta^{\square\!\square}\psi,\ \bar{s}) \in \mathcal{H},$$

on trouve : $\quad ((s \times s) \times (s \times s),\ \psi,\ s) \in \mathcal{H}.$

En tenant compte des relations :

$$\square s \propto (s \times s) \times (s \times s) \qquad \text{et} \qquad \psi(\bar{\mathcal{C}}) \subset \boxminus\mathcal{C},$$

il en résulte $(\square s,\ \psi,\ \bar{s}) \in \mathcal{H}$, donc $(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ \psi,\ (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \bar{s})) \in \mathcal{N}([\bar{\mathcal{H}}])$.

Soient $(\mathcal{C}^{\cdot},\ s) \in [\bar{\mathcal{H}}]_o$ et $(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \bar{s}) \in [\bar{\mathcal{H}}]_o$. Nous désignerons par $\mathcal{N}((\mathcal{C}^{\cdot},\ s),(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \bar{s}))$ la sous-classe de $\mathcal{N}([\bar{\mathcal{H}}])$ formée des transformations naturelles $[\mathcal{H}]$-structurées de la forme $(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ \Psi,\ (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \bar{s}))$.

PROPOSITION 8. *$\bar{p}(\mathcal{N}((\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \bar{s})))$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\boxminus\mathcal{C}^{\cdot},\ \bar{\mathcal{C}}^{\cdot})$.*

DEMONSTRATION. Soient $\bar{\Psi}_i = (\boxminus(\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ \Psi_i,\ (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \bar{s})) \in \mathcal{N}((\mathcal{C}^{\cdot},\ s),(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \bar{s}))$, où $i = 1,\ 2$. En utilisant la relation :

$$(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ \alpha^{\square\!\square},\bar{\boxminus}(\mathcal{C}^{\cdot},\ s)) \in [\bar{\mathcal{H}}],$$

on trouve :

$$(\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ \alpha^{\square\!\square}\Psi_i,(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\bar{s})) = (\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ \alpha^{\square\!\square},\bar{\boxminus}(\mathcal{C}^{\cdot},\ s)).\bar{\Psi}_i \in \mathcal{N}((\mathcal{C}^{\cdot},\ s),(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\bar{s})) .$$

De même : $\quad (\bar{\bar{\boxminus}}(\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ \beta^{\square\!\square}\Psi_i,(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\bar{s})) \in \mathcal{N}((\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \bar{s}))$.

Supposons que $\Psi_2 \square\!\square \Psi_1$ soit défini dans $\mathcal{F}(\boxminus\mathcal{C}^{\cdot},\bar{\mathcal{C}}^{\cdot})$; puisque $(s,\ \mu^{\boxminus}(\Psi_i)_o,\ \bar{s}_o) \in \mathcal{H}$, on a :

$$(s \times s,\ [\mu^{\boxminus}(\Psi_2)_o,\ \mu^{\boxminus}(\Psi_1)_o],\bar{s}_o) \in \mathcal{H};$$

soit $s' \propto s$ tel que $p(s') = \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$. La relation :

$$[\mu^{\boxminus}(\Psi_2)_o,\mu^{\boxminus}(\Psi_1)_o](\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}_o) \subset \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$$

entraîne $(s',\ [\mu^{\boxminus}(\Psi_2)_o,\ \mu^{\boxminus}(\Psi_1)_o],\ \bar{s}_o) \in \mathcal{H}$ et :

$$(s,\ \kappa^{\cdot},\ s').(s',\ [\mu^{\boxminus}(\Psi_2)_o,\mu^{\boxminus}(\Psi_1)_o],\bar{s}_o) = (s,\ \mu^{\boxminus}(\Psi_2 \square\!\square \Psi_1)_o,\bar{s}_o) \in \mathcal{H};$$

comme : $\quad (\mathcal{C}^{\cdot},\ '\beta^{\square\!\square},\boxminus\mathcal{C}^{\cdot}).(\Psi_2 \square\!\square \Psi_1) = (\mathcal{C}^{\cdot},\ '\beta^{\square\!\square},\boxminus\mathcal{C}^{\cdot}).\Psi_2$

et $\quad (\mathcal{C}^{\cdot},\ '\alpha^{\square\!\square},\boxminus\mathcal{C}^{\cdot}).(\Psi_2 \square\!\square \Psi_1) = (\mathcal{C}^{\cdot},\ '\alpha^{\square\!\square},\boxminus\mathcal{C}^{\cdot}).\Psi_1,$

on déduit de la proposition 7 :

$$(\bar{\boxminus}(\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ \Psi_2 \square\!\square \Psi_1,(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\bar{s})) \in \mathcal{N}([\bar{\mathcal{H}}]).$$

Donc $\bar{p}(\mathcal{N}((\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \bar{s})))$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\boxminus\mathcal{C}^{\cdot},\bar{\mathcal{C}}^{\cdot})$.

COROLLAIRE. *$\mathcal{N}([\bar{\mathcal{H}}])$ est une catégorie pour la loi de composition définie par :*

$$(\bar{\Psi}_1,\ \bar{\Psi}) \to \bar{\Psi}_1 \square\!\square \bar{\Psi} = (\bar{\boxminus}(\mathcal{C}^{\cdot},\ s),\ \bar{p}(\bar{\Psi}_1) \square\!\square \bar{p}(\bar{\Psi}),\ (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot},\ \bar{s}))$$

si, et seulement si, $'\bar{\alpha}^{\square\!\square}.\bar{\Psi}_1 = '\bar{\beta}^{\square\!\square}.\bar{\Psi}$.

La classe des unités de $\bar{\mathcal{H}}([\mathcal{H}])$ s'identifie à $[\mathcal{H}]$ en identifiant les unités à droite et à gauche de $\bar{\Psi} = (\bar{\bar{\boxminus}}\,(\mathcal{C}^{\cdot}, s), \psi, (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$ à $((\mathcal{C}^{\cdot}, s), {}'\alpha^{\square\square}\psi, (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$ et à $((\mathcal{C}^{\cdot}, s), {}'\beta^{\square\square}\psi, (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$ respectivement.

PROPOSITION 9. *$[\mathcal{H}]$ est une catégorie d'opérateurs (resp. à droite) sur $\bar{\mathcal{H}}([\mathcal{H}])$, pour la loi de composition :*

$$(F, \bar{\Psi}) \to \bar{\bar{\boxminus}}\, F.\bar{\Psi} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \beta(\bar{\Psi}) = \bar{\bar{\boxminus}}\,\alpha(F)$$

$$(\textit{resp.}\ (\bar{\Psi}, F) \to \bar{\Psi}.F \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \alpha(\bar{\Psi}) = \beta(F));$$

l'espèce de structures (resp. structures à droite) ainsi définie est sous une espèce de morphismes.

Cette proposition se démontre comme la proposition 2. La catégorie dont les éléments $\bar{\Psi}$ sont les structures composables avec F est la catégorie somme des catégories $\bar{\mathcal{H}}((\mathcal{C}^{\cdot}, s), (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$, où $(\mathcal{C}^{\cdot}, s) = \alpha(F)$ et $(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) \in [\mathcal{H}]_0$. (Resp. la catégorie dont les éléments sont les $\bar{\Psi}$ composables à droite avec F est la catégorie somme des catégories $\bar{\mathcal{H}}((\mathcal{C}^{\cdot}, s), (\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}))$, où $(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, \bar{s}) = \beta(F)$.)

Soit $Q([\mathcal{H}])$ la classe des quintettes de $(\mathcal{F}, \bar{p}, [\mathcal{H}], \bar{\Gamma})$.

DEFINITION 4. *On appellera* quintette $[\mathcal{H}]$ - structuré *un quintuplet $(F', \Phi', \bar{\Psi}, \Phi, F)$ tel que $\bar{\Psi} \in \bar{\mathcal{H}}(\beta(\Phi'), \alpha(\Phi))$ et*

$$(F', \Phi', \bar{p}(\bar{\Psi}), \Phi, F) \in Q([\mathcal{H}]).$$

Soit $\bar{Q}([\mathcal{H}])$ la classe des quintettes $[\mathcal{H}]$ - structurés.

PROPOSITION 10. *On a $\bar{T} = (F', \Phi', \bar{\Psi}, \Phi, F) \in \bar{Q}([\mathcal{H}])$ si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\bar{\Psi} \in \bar{\mathcal{H}}(\beta(\Phi'), \alpha(\Phi)), (F', \Phi', \Phi, F) \in \square([\mathcal{H}], [\mathcal{H}]),$$

$${}'\bar{\alpha}^{\square\square}.\bar{\Psi} = \Phi'.F \qquad \textit{et} \qquad {}'\bar{\beta}^{\square\square}.\bar{\Psi} = F'.\Phi.$$

En effet, si $\bar{T} \in \bar{Q}([\mathcal{H}])$, on a : ${}'\alpha^{\square\square}\bar{p}(\bar{\Psi}) = \bar{p}(\Phi'.F)$ et $\alpha(\bar{\Psi}) = \alpha(F)$, d'où : ${}'\bar{\alpha}^{\square\square}.\bar{\Psi} = (\beta(\Phi'), {}'\alpha^{\square\square}\bar{p}(\bar{\Psi}), \alpha(\bar{\Psi})) = \Phi'.F$; de même on trouve : ${}'\bar{\beta}^{\square\square}.\bar{\Psi} = F'.\Phi$. La réciproque est évidente.

THEOREME 4. *$\bar{Q}([\mathcal{H}])$ est une catégorie double équivalente à une sous-catégorie* 1
double de $(Q^{\cdot}([\mathcal{H}]), Q^{\blacklozenge}([\mathcal{H}]))$.

DEMONSTRATION. Soit $\tilde{q}$ l'application :

$$\bar{T}_i = (F'_i, \Phi'_i, \bar{\Psi}_i, \Phi_i, F_i) \to (F'_i, \Phi'_i, \bar{p}(\bar{\Psi}_i), \Phi_i, F_i)$$

de $\bar{Q}([\mathcal{H}])$ dans $Q([\mathcal{H}])$. L'égalité : $\tilde{q}(\bar{T}_i) = \tilde{q}(\bar{T}_j)$ entraîne :

$$\bar{p}(\bar{\Psi}_i) = \bar{p}(\bar{\Psi}_j),\ \alpha(\bar{\Psi}_i) = \alpha(\bar{\Psi}_j) \text{ et } \beta(\bar{\Psi}_i) = \beta(\bar{\Psi}_j) = \bar{\bar{\boxminus}}\,\beta(\Phi'_j),$$

d'où $\overline{T}_i = \overline{T}_j$; ainsi $\tilde{q}$ est une injection. On a :

1 $$\alpha^{\bullet}(\tilde{q}(\overline{T}_i)) = (F_i, F_i, F_i^{\square\!\square}, F_i, F_i).$$

Si $\tilde{q}(\overline{T}_2).\tilde{q}(\overline{T}_1)$ est défini dans $Q^{\bullet}([\mathcal{H}])$, on obtient :

$$\tilde{q}(\overline{T}_2).\tilde{q}(\overline{T}_1) = (F'_2, \Phi'_2.\Phi'_1, \Psi, \Phi_2.\Phi_1, F_1),$$

$$\text{où } \Psi = \overline{p}(\overline{\Psi}_2).\overline{p}(\Phi_1) \square\!\square (\overline{p}(\Phi'_2)\overline{p}(\overline{\Psi}_1)).$$

Il résulte des propositions 8 et 9 que l'on a :

$$\overline{\Psi} = \overline{\Psi}_2.\Phi_1 \square\!\square \Phi'_2 \overline{\Psi}_1 \in \overline{\mathcal{H}}([\mathcal{H}])$$

et, comme $\Psi = \overline{p}(\overline{\Psi})$, on trouve : $\tilde{q}(\overline{T}_2).\tilde{q}(\overline{T}_1) \in \tilde{q}(\overline{Q}([\mathcal{H}]))$. Par suite $\tilde{q}(\overline{Q}([\mathcal{H}]))$ est une sous-catégorie de $Q^{\blacklozenge}([\mathcal{H}])$. On montre de même que $\tilde{q}(\overline{Q}([\mathcal{H}]))$ est une sous-catégorie de $Q^{\bullet}([\mathcal{H}])$. Ceci permet de définir sur $\overline{Q}([\mathcal{H}])$ une structure de catégorie

2 double telle que $\tilde{q}$ devienne une équivalence double sur $\tilde{q}(\overline{Q}[\mathcal{H}])$.

4. Applications covariantes.

3 Soient $\eta = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{S})$ et $\eta' = (\mathcal{C}', \pi', \mathcal{S}')$ deux espèces de structures. Rappelons la définition suivante :

DEFINITION 5. *On appelle* application covariante de η vers η' *un couple* $(\varphi, \overline{\varphi}_o)$ *tel que* $(\mathcal{C}', \varphi, \mathcal{C})$ *soit un foncteur et que* $\overline{\varphi}_o$ *soit une application de* $\mathcal{S}_o$ *dans* $\mathcal{S}'_o$ *vérifiant la condition :*

$$\overline{\varphi}_o(fz) = \varphi(f)\overline{\varphi}_o(z) \text{ si } z \in \mathcal{S}_o, f \in \mathcal{C} \text{ et } \pi(z) = \alpha(f).$$

L'application covariante $(\varphi, \overline{\varphi}_o)$ sera aussi représentée par :

$$(\eta', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta).$$

Rappelons [3] que si $(\eta', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta)$ est une application covariante l'application $\overline{\varphi}: (f, z) \to (\varphi(f), \overline{\varphi}_o(z))$, où $(f, z) \in \mathcal{S}$, est un foncteur de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}'$ qui est un relèvement de φ relativement à (π, π'), c'est-à-dire que l'on a : $\pi'.\overline{\varphi} = \varphi.\pi$.

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{F}$ les catégories déjà considérées. Soit $\mathcal{M}'_o$ une classe de classes contenant avec une classe toutes ses sous-classes. Supposons que la catégorie $\mathcal{M}'$ de

4 toutes les applications (M', f, M), où $M' \in \mathcal{M}'_o$ et $M \in \mathcal{M}'_o$, appartienne à $\mathcal{F}$ c'est-à-dire que la classe $\mathcal{M}'$ appartienne à $\mathcal{M}_o$. Soit $\mathcal{Q}(\mathcal{M}')_o$ la classe des espèces de structures $\eta = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{S})$ telles que $\mathcal{C} \in \mathcal{F}$ et $\pi^{-1}(e) \in \mathcal{M}'_o$ pour tout $e \in \pi(\mathcal{S}_o)$. Soit $\mathcal{Q}(\mathcal{M}')$ la classe de toutes les applications covariantes entre espèces de structures appartenant à $\mathcal{Q}(\mathcal{M}')_o$. Alors (voir [3]) $\mathcal{Q}(\mathcal{M}')$ est une catégorie pour la loi de composition :

$$(\eta'_1, (\varphi_1, \overline{\varphi}^1_o), \eta_1).(\eta', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta) = (\eta'_1, (\varphi_1.\varphi, \overline{\varphi}^1_o.\overline{\varphi}_o), \eta)$$

si, et seulement si, $\eta_1 = \eta'$.

Nous identifierons $\mathcal{A}(\mathcal{M}')_o$ à la classe des unités de $\mathcal{A}(\mathcal{M}')$ en identifiant η avec $(\eta, (Id_{\mathcal{C}}, Id_{\mathcal{S}_o}), \eta)$.

Rappelons que $(\mathcal{C}, F)$ est un couple définissant une espèce de structures $\eta \in \mathcal{A}(\mathcal{M}')$ si F est un foncteur d'une sous-catégorie de la catégorie $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{M}'$ tel que :

$$F(e) \neq \emptyset \text{ pour tout } e \in \alpha(F)_o \qquad \text{et} \qquad F(e) \cap F(e') = \emptyset \text{ si } e \neq e'.$$

THEOREME 5. *$\mathcal{A}(\mathcal{M}')$ est une catégorie équivalente à une sous-catégorie $\mathcal{A}'(\mathcal{M}')$ de la* 1
catégorie produit $\mathcal{F} \times Q^{\cdot}(\mathcal{F})$.

DEMONSTRATION. Supposons $(\eta', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta) \in \mathcal{A}(\mathcal{M}')$. Soient $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$ les couples définissant η et η' respectivement. Soit Φ la restriction de φ à $\alpha(F)$ et, pour tout $e \in \alpha(F)_o$, soit $\tau(e)$ la restriction de $\bar{\varphi}_o$ à $F(e)$. Alors l'application :

$$f \to (F'.\Phi(f), \tau(\beta(f)), \tau(\alpha(f)), F(f)), \qquad \text{où } f \in \alpha(F),$$

définit un foncteur Ψ de $\alpha(F)$ vers $\boxminus\mathcal{M}'$ et on a :

$$(F', \mathcal{M}', \Psi, \Phi, F) \in Q(\mathcal{F}),$$

en identifiant $\mathcal{M}'$ au foncteur identique de $\mathcal{M}'$. Inversement soit $\tilde{\mathcal{A}}'(\mathcal{M}')$ la sous-classe de $Q(\mathcal{F})$ formée des $(F', \mathcal{M}', \Psi, \Phi, F)$ tels que $(\alpha(F), F)$ et $(\alpha(F'), F')$ définissent des espèces de structures; $\tilde{\mathcal{A}}'(\mathcal{M}')$ est une sous-catégorie de $Q^{\cdot}(\mathcal{F})$. Soit $\mathcal{A}'(\mathcal{M}')$ la sous-catégorie de $\mathcal{F} \times Q^{\cdot}(\mathcal{F})$ formée des couples (φ, T) tels que $T = (F', \mathcal{M}', \Psi, \Phi, F) \in \tilde{\mathcal{A}}'(\mathcal{M}')$ et que Φ soit une restriction de $\varphi \in \mathcal{F}$. Soit $(\varphi, T) \in \mathcal{A}'(\mathcal{M}')$; soient $a(\mathcal{C}, F) = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{S})$ et $a(\mathcal{C}', F') = (\mathcal{C}', \pi', \mathcal{S}')$ les espèces de structures définies par $(\alpha(\varphi), F)$ et $(\beta(\varphi), F')$ respectivement. Pour tout $e \in \alpha(F)_o$, $\mu^{\boxminus}\Psi_o(e)$ est une application de $F(e)$ dans $F'\Phi(e)$; comme :

$$(F'\Phi(f), \mu^{\boxminus}\Psi_o(e'), \mu^{\boxminus}\Psi_o(e), F(f)), \qquad \text{où } f \in \alpha(F), e = \alpha(f), e' = \beta(f),$$

est un quatuor de $\mathcal{M}'$, on a, pour tout $z \in F(e)$:

$$\mu^{\boxminus}\Psi_o(e')(F(f)(z)) = F'\Phi(f)(\mu^{\boxminus}\Psi_o(e)(z)),$$

c'est-à-dire
$$\mu^{\boxminus}\Psi_o(e')(fz) = \Phi(f)(\mu^{\boxminus}\Psi_o(e)(z)),$$

en utilisant les lois de composition dans $a(\mathcal{C}, F)$ et $a(\mathcal{C}', F')$. Par suite, si $\bar{\varphi}_o$ désigne l'application de $\mathcal{S}_o$ dans $\mathcal{S}'_o$ définie par :

$$\bar{\varphi}_o(z) = \mu^{\boxminus}\Psi_o(\pi(z))(z) \qquad \text{pour tout } z \in \mathcal{S}_o,$$

$(a(\mathcal{C}', F'), (\varphi, \bar{\varphi}_o), a(\mathcal{C}, F))$ est une application covariante. Ceci montre que l'application

$$a : (\varphi, T) \to (a(\mathcal{C}', F'), (\varphi, \bar{\varphi}_o), a(\mathcal{C}, F))$$

est une bijection de $\mathcal{A}'(\mathcal{M}')$ sur $\mathcal{A}(\mathcal{M}')$. De plus, si $(\varphi_1, T_1) \in \mathcal{A}'(\mathcal{M}')$, $\alpha(\varphi_1) = \beta(\varphi)$

$\alpha^{\cdot}(T_1) = \beta^{\cdot}(T)$, on a :

$$(\varphi_1, T_1).(\varphi, T) = (\varphi_1.\varphi, T_1.T)$$

et $a(\varphi_1.\varphi, T_1.T) = a(\varphi_1, T_1).a(\varphi, T)$ dans $\mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$. On en déduit que a est une
1 équivalence de $\mathfrak{A}'(\mathfrak{M}')$ sur $\mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$.

2 Comme $\mathcal{F}$ est équivalente à une sous-catégorie de $Q^{\blacklozenge}(\mathcal{F})$, la catégorie $\mathcal{F}$ opère sur la classe des quintettes T tels que $\beta^{\blacklozenge}(T)$ soit une catégorie, relativement à la loi de composition :

$$(\lambda, T) \to \lambda T = \overline{\overline{\lambda}} \blacklozenge T.$$

3+ Soit $(\mathfrak{M}', \gamma, \mathcal{K}) \in \mathcal{F}$. Supposons que $\mathcal{K}'$ et $\mathcal{K}''$ soient deux sous-catégories de $\mathcal{K}$ et désignons par γ' et γ'' les restrictions de γ à $\mathcal{K}'$ et à $\mathcal{K}''$ respectivement. Rappelons (§ I) que $(\mathcal{C}, F)$ est une espèce de structures dominée par $(\gamma, \mathcal{K})$ si, et seulement si, $(\mathcal{C}, \gamma F)$ est un couple définissant une espèce de structures.

DEFINITION 6. *Soient $(\mathcal{C}', F')$ une espèce de structures dominée par $(\gamma', \mathcal{K}')$ et $(\mathcal{C}'', F'')$ une espèce de structures dominée par $(\gamma'', \mathcal{K}'')$. On appelle* application covariante de *$(\mathcal{C}', F')$* vers *$(\mathcal{C}'', F'')$* relativement à *$(\gamma, \mathcal{K})$ un couple (φ, T) vérifiant les conditions suivantes :*

1) $\varphi \in \mathcal{F}$, $\alpha(\varphi) = \mathcal{C}'$ et $\beta(\varphi) = \mathcal{C}''$.

2) $T = (\iota F'', \mathcal{K}, \Psi, \Phi, \iota F') \in Q(\mathcal{F})$ et Φ est une restriction de φ.

PROPOSITION 10 : *Soit $(\varphi, T) = (\varphi, (\iota F'', \mathcal{K}, \Psi, \Phi, \iota F'))$ une application covariante entre espèces de structures dominées; soient $\eta' = (\mathcal{C}', \pi', \mathcal{S}')$ et η'' les espèces de structures sous $(\alpha(\varphi), F')$ et $(\beta(\varphi), F'')$ respectivement. Alors on a*

$$(\eta'', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta') \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}'),$$

où $\overline{\varphi}_o(z) = \gamma(\mu^{\boxminus}\Psi_o(e))(z)$ pour tout $z \in \mathcal{S}'_o$, où $e = \pi(z)$.

En effet, on a $(\varphi, \gamma T) \in \mathfrak{A}'(\mathfrak{M}')$, d'où, en vertu du théorème 5 :

$$(\eta'', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta') = a(\varphi, \gamma T) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}').$$

L'application covariante $(\eta'', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta') \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}')$ sera appelée *application covariante sous (φ, T).*

Soit $\mathfrak{A}'(\gamma, \mathcal{K})_o$ la classe des espèces de structures dominées par $(\gamma', \mathcal{K}')$, relativement à $(\gamma, \mathcal{K})$, où γ' est une restriction quelconque de γ.

PROPOSITION 11. *La classe $\mathfrak{A}'(\gamma, \mathcal{K})$ des applications covariantes entre espèces de*
4 *structures dominées appartenant à $\mathfrak{A}'(\gamma, \mathcal{K})_o$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F} \times Q^{\cdot}(\mathcal{F})$ et l'application :*

$$(\varphi, T) \to (\varphi, \gamma T), \qquad \text{où } (\varphi, T) \in \mathcal{A}'(\gamma, \mathbb{K}),$$

définit un foncteur de $\mathcal{A}'(\gamma, \mathbb{K})$ *vers* $\mathcal{A}'(\mathcal{M}')$.

COROLLAIRE. *Soient* $(\mathcal{M}', \gamma, \mathbb{K}) \in \mathcal{F}$ *et* $(\mathbb{K}, \lambda, \mathcal{L}) \in \mathcal{F}$. *L'application :*

$$(\varphi, T) \to (\varphi, \lambda T), \qquad \text{où } (\varphi, T) \in \mathcal{A}'(\gamma\lambda, \mathcal{L}),$$

est un foncteur de $\mathcal{A}'(\gamma\lambda, \mathcal{L})$ *vers* $\mathcal{A}'(\gamma, \mathbb{K})$.

CAS PARTICULIERS.

I) Soit $(\mathcal{M}', \gamma, \mathbb{K}, \mathbb{K}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes. Soient $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$ deux espèces de structures dominées par $(\gamma, \mathbb{K})$, η et η' les espèces de structures sous-jacentes. Pour que $(\eta', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta)$ soit une application covariante sous une application covariante (φ, T) entre espèces de structures dominées $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F)$, il faut et il suffit que, pour tout $e \in \alpha(F)_o$, on ait :

$$(F'\varphi(e), \bar{\varphi}_o / e, F(e)) \in \mathbb{K},$$

où $\bar{\varphi}_o / e$ désigne la restriction de $\bar{\varphi}_o$ à $\gamma F(e)$.

Exemples. 1) Soient $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$ deux espèces de morphismes. Pour qu'une application covariante $(\eta', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta)$ soit sous une application covariante entre $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$, il faut et il suffit que pour tout $e \in \alpha(F)_o$, $\bar{\varphi}_o / e$ soit un foncteur de $F(e)$ vers $F'\varphi(e)$.

2) Soient $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$ deux espèces de structures ordonnées (§ I, n° 2). Pour que $(\eta', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta)$ soit une application covariante sous une application covariante entre $(\mathcal{C}, F)$ et $(\mathcal{C}', F')$, il faut et il suffit que, pour tout $e \in \alpha(F)_o$, $\bar{\varphi}_o / e$ soit un homomorphisme de la classe ordonnée $F(e)$ vers la classe ordonnée $F'\varphi(e)$.

II) Nous avons défini la notion d'application covariante entre espèces de structures dominées par $(\gamma', \mathbb{K}')$ et par $(\gamma'', \mathbb{K}'')$ respectivement dans le seul cas où $\mathbb{K}'$ et $\mathbb{K}''$ sont des sous-catégories d'une même catégorie. On peut se ramener à cette situation lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

Soit $(\mathcal{M}', \lambda, \mathcal{L}) \in \mathcal{F}$. Soient $(\mathcal{L}, \mu', \mathbb{K}')$ et $(\mathcal{L}, \mu'', \mathbb{K}'')$ deux espèces de structures telles que $\mathbb{K}' \cap \mathbb{K}'' = \emptyset$. La construction utilisée dans [4] (n° 3) permet d'obtenir une catégorie $\mathbb{K}$ telle qu'on ait : 1

1) $\mathbb{K}'$ et $\mathbb{K}''$ sont des sous-catégories de $\mathbb{K}$.

2) $\mathbb{K}$ est la classe réunion de $\mathbb{K}'$, $\mathbb{K}''$ et de la classe des triplets (s'', f, s'), où $s' \in \mathbb{K}'_o$, $s'' \in \mathbb{K}''_o$, $f \in \mathcal{L}$, $\alpha(f) = \mu'(s')$ et $\beta(f) = \mu''(s'')$.

3) On a $(\mathcal{L}, \mu, \mathbb{K}) \in \mathcal{F}$, où μ admet μ' et μ'' pour restrictions à $\mathbb{K}'$ et à $\mathbb{K}''$ respectivement et $\mu(s'', f, s') = f$.

Soient $(\mathcal{C}', F')$ et $(\mathcal{C}'', F'')$ deux espèces de structures dominées par $(\lambda\mu', \mathbb{K}')$ et par $(\lambda\mu'', \mathcal{K}'')$ respectivement. La donnée d'une application covariante entre $(\mathcal{C}', F')$ et $(\mathcal{C}'', F'')$ relativement à $(\lambda\mu, \mathcal{K})$ équivaut à la donnée de $(\mathcal{C}', F')$, de $(\mathcal{C}'', F'')$ et d'une application covariante de $(\mathcal{C}', \mu' F')$ vers $(\mathcal{C}'', \mu'' F'')$ relativement à $(\lambda, \mathcal{L})$.

5. Applications covariantes naturalisées.

Soit $\mathcal{K}$ une catégorie appartenant à $\mathcal{F}_o$.

Si Σ est une sous-catégorie de $\mathcal{K}$, nous posons $\iota_\Sigma = (\mathcal{K}, \iota, \Sigma) \in \mathcal{F}$. La bijection δ :

$$(\iota_{\Sigma'}, \mathcal{K}, \Psi, \Phi, \iota_\Sigma) \to (\Phi, \mu^{\boxminus} \Psi_o)$$

identifie la sous-catégorie de $\mathcal{Q}^{\cdot}(\mathcal{F})$ formée des quintettes de la forme $(\iota_{\Sigma'}, \mathcal{K}, \Psi, \Phi, \iota_\Sigma)$ à la classe $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$ des couples (Φ, τ) tels que $\Phi \in \mathcal{F}$ et $(\iota_{\Sigma'}.\Phi, \tau, \iota_\Sigma) \in \mathcal{N}$, où $\Sigma = \alpha(\Phi)$ et $\Sigma' = \beta(\Phi)$.

DEFINITION 7. *$(\Phi, \tau) \in \mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$ sera appelé* foncteur $\mathcal{K}$-naturalisé de $\alpha(\Phi)$ vers $\beta(\Phi)$.

La bijection δ définit sur $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$ une structure de catégorie $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})^{\cdot}$, dont la loi de composition s'écrit :

$(\Phi', \tau').(\Phi, \tau) = (\Phi'.\Phi, \tau'\Phi.\tau)$ si, et seulement si, $\alpha(\Phi') = \beta(\Phi)$,

où $\tau'\Phi.\tau$ désigne l'application : $e \to \tau'\Phi(e).\tau(e), e \in \alpha(\Phi)_o$.

$\mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})^{\cdot}$ contient comme sous-catégorie la classe $\mathcal{F}_\nu[\mathcal{K}]$ des foncteurs naturalisés [1], dont les éléments sont les $(\Phi, \tau) \in \mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$ tels que $\alpha(\Phi) = \beta(\Phi) = \mathcal{K}$.

Soit $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})^{\cdot}$ formée des couples (Φ, τ) tels que $\alpha(\Phi) = \Sigma$ et $\beta(\Phi) = \Sigma'$ soient des catégories réduites à la classe de leurs unités. Nous identifierons $(\Phi, \tau) \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})$ au couple $((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau)$, où $(\Sigma', \varphi, \Sigma)$ est la simple application $p_{\mathcal{F}}(\Phi)$.

DEFINITION 8. *$((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau) \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})$ sera appelé* application $\mathcal{K}$-naturalisée de Σ vers Σ'.

Pour que l'on ait $((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau) \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) Σ et Σ' sont deux sous-classes de $\mathcal{K}_o$ et $(\Sigma', \varphi, \Sigma) \in \mathcal{M}$.

2) τ est une application de Σ dans $\mathcal{K}$ telle que :

$$\alpha(\tau(z)) = z \text{ et } \beta(\tau(z)) = \varphi(z) \text{ pour tout } z \in \Sigma.$$

La bijection $\zeta : ((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau) \to (\Sigma', \tau(\Sigma))$ identifie $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})$ à la classe des couples (Σ', M) vérifiant les conditions :

1) Σ' est une sous-classe de $\mathcal{K}_o$.

2) M est une sous-classe de $\mathcal{K}$ telle que la restriction α / M de α à M soit une bijec-

tion de M sur $\alpha(M) = \Sigma$ et on a $\Sigma' \subset \beta(M)$.
On a : $\zeta^{-1}(\Sigma', M) = ((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau)$, où $\tau = (\alpha/M)^{-1}$ et $\varphi = \beta\tau$. L'image par ζ de la catégorie $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot$ est la catégorie $\zeta(\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K}))^\cdot$ dont la loi de composition s'écrit :

$$(\Sigma'', M').(\Sigma', M) = (\Sigma'', M'.M) \text{ si, et seulement si, } \Sigma' = \alpha(M').$$

Nous désignerons par κ le foncteur de $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot$ vers $\mathcal{M}'$ défini par :

$$((\Sigma', \varphi, \Sigma), \tau) \to (\Sigma', \varphi, \Sigma).$$

Soit $(\mathcal{C}, F)$ un couple définissant une espèce de structures $\eta = (\mathcal{C}, \pi, \mathcal{S})$ appartenant à $\mathcal{Q}(\mathcal{M}')$ et telle que $\mathcal{S}$ s'identifie à une sous-catégorie de $\mathcal{K}$.

PROPOSITION 12. *On peut associer à $(\mathcal{C}, F)$ une espèce de structures dominée par $(\kappa, \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot)$, notée $(\mathcal{C}, \overline{F})$, telle que η soit l'espèce de structures sous $(\mathcal{C}, \overline{F})$.*

DEMONSTRATION. Soit $f \in \alpha(F)$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. Désignons par $\hat{f}$ l'application : $z \to (f, z)$ de $F(e)$ dans $\mathcal{K}$ et posons :

$$\overline{F}(f) = (F(f), \hat{f}) \in \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K}).$$

Soit $g \in \alpha(F)$ tel que $\alpha(g) = \beta(f)$ et $\beta(g) = e''$. Pour tout $z \in F(e)$, on a : $(\widehat{g.f})(z) = (g.f, z)$ et :

$$(g.f, z) = (g, fz).(f, z) = \hat{g}(fz).\hat{f}(z) = \hat{g}F(f)(z).\hat{f}(z),$$

d'où
$$\widehat{g.f} = \hat{g}F(f).\hat{f}.$$

Il en résulte :

$$\overline{F}(g.f) = (F(g.f), \widehat{g.f}) = (F(g).F(f), \hat{g}F(f).\hat{f}) = \overline{F}(g).\overline{F}(f).$$

Ainsi l'application : $f \to \overline{F}(f)$ définit un foncteur $\overline{F}$ de $\alpha(F)$ vers $\mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot$. Par suite $(\mathcal{C}, \overline{F})$ est une espèce de structures dominée par $(\kappa, \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot)$ et η est l'espèce de structures sous $(\mathcal{C}, \overline{F})$, car $\kappa\overline{F}(f) = F(f)$ pour tout $f \in \alpha(F)$.

Soient $(\mathcal{C}', F')$ et $(\mathcal{C}'', F'')$ deux couples définissant des espèces de structures $\eta' = (\mathcal{C}', \pi', \mathcal{S}')$ et $\eta'' = (\mathcal{C}'', \pi'', \mathcal{S}'')$ appartenant à $\mathcal{Q}(\mathcal{M}')$ et telles que $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ soient identifiées à des sous-catégories de $\mathcal{K}$. Soient $(\mathcal{C}', \overline{F}')$ et $(\mathcal{C}'', \overline{F}'')$ les espèces de structures dominées par $(\kappa, \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot)$ correspondantes. Si

$$(\eta'', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta') \in \mathcal{Q}(\mathcal{M}'),$$

nous désignons par $\overline{\overline{\varphi}}$ le foncteur de $\mathcal{S}'$ vers $\mathcal{S}''$ prolongeant $\overline{\varphi}_o$ tel que $(\pi', \varphi, \overline{\overline{\varphi}}, \pi)$ soit un quatuor de foncteurs.

PROPOSITION 13. *Il existe une bijection canonique c de la classe des applications covariantes de $(\mathcal{C}', \overline{F}')$ vers $(\mathcal{C}'', \overline{F}'')$ relativement à $(\kappa, \mathcal{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot)$ sur la classe des couples :*

$$((\eta'', (\varphi, \overline{\varphi}_o), \eta'), (\overline{\overline{\varphi}}, \tau)) \in \mathcal{Q}(\mathcal{M}') \times \mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$$

tels que $\bar{\varphi}$ *soit le foncteur prolongeant* $\bar{\varphi}_o$.

DEMONSTRATION. Soit $(\varphi, T) = (\varphi, (\bar{F}'', \mathcal{K}, \bar{\Psi}, \Phi, \bar{F}')) \in \mathfrak{A}'(\kappa, \mathfrak{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot)$. Soit $(\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta')$ l'application covariante sous (φ, T). Pour tout $e \in \alpha(F')_o$ on a :

$$\bar{\Psi}(e) = (\bar{\varphi}_o / e, \tau_e)^{\boxminus} \in \Box\, \mathfrak{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot,$$

où τ_e est une application de $F'(e)$ dans $\mathcal{K}$ telle que :

$$\alpha(\tau_e(z)) = z \qquad \text{et} \qquad \beta(\tau_e(z)) = \bar{\varphi}_o(z) \text{ pour tout } z \in F'(e).$$

Soit $f \in \alpha(F')$, $\alpha(f) = e$ et $\beta(f) = e'$. La relation :

$$\bar{\Psi}(f) = (\bar{F}''.\Phi(f), \mu^{\boxminus}\bar{\Psi}(e'), \mu^{\boxminus}\bar{\Psi}(e), \bar{F}'(f)) \in \Box\, \mathfrak{M}_\nu(\mathcal{K})^\cdot$$

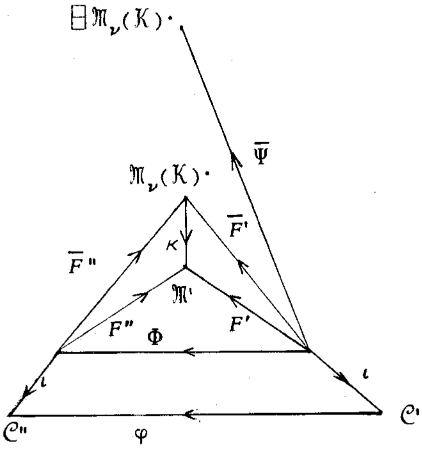
entraîne :

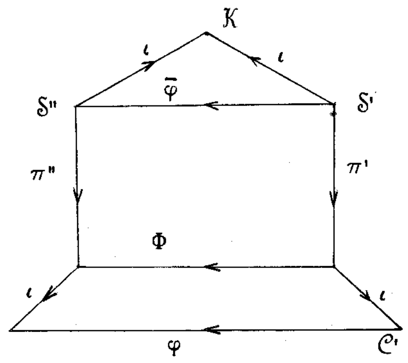
$$\bar{\varphi}(f, z).\tau_e(z) = \tau_{e'}(fz).(f, z) \text{ pour tout } z \in F(e);$$

donc on obtient $(\bar{\varphi}, \tau) \in \mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$, en désignant par τ l'application :

$$z \to \tau_{\pi(z)}(z), \text{ pour tout } z \in \mathcal{S}'_o,$$

et c est la bijection : $(\varphi, T) \to ((\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta'), (\bar{\varphi}, \tau))$.





DEFINITION 9. *Un couple* $((\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta'), (\bar{\varphi}, \tau)) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{M}') \times \mathcal{F}_\nu(\mathcal{K})$ *tel que* $\bar{\varphi}$ *soit le foncteur prolongeant* $\bar{\varphi}_o$, *sera appelé* application covariante $\mathcal{K}$-naturalisée de η' vers η'' .

Soit $((\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta'), (\bar{\varphi}, \tau))$ une application covariante $\mathcal{K}$-naturalisée. Alors $\pi'(\mathcal{S}')$ est une catégorie d'opérateurs sur la classe $\tau(\mathcal{S}')$ relativement à la loi de composition :

$$(f, \tau(z)) \to \tau(fz) \text{ si, et seulement si, } \pi'(z) = \alpha(f).$$

L'application :

$$(f, \tau(z)) \to (\bar{\varphi}(f, z), \tau(fz), \tau(z), (f, z))$$

définit une équivalence de la catégorie des hypermorphismes associée à cette espèce de structures sur une sous-catégorie de $\boxminus \mathbb{K}$. 1

$$\begin{tikzcd}
\bar{\varphi}_o(fz) & & fz \arrow[ll, "\tau(fz)"'] \\
\bar{\varphi}_o(z) \arrow[u] & & z \arrow[ll, "\tau(z)"] \arrow[u, "(f, z)"']
\end{tikzcd} \qquad \square \mathbb{K}$$

Cas particulier. Une application covariante $(\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta')$ s'identifie trivialement à l'application covariante naturalisée :

$$((\eta'', (\varphi, \bar{\varphi}_o), \eta'), (\bar{\varphi}, \tau)),$$

où $\tau(z) = (\bar{\varphi}_o(z), z)$ pour tout $z \in \mathcal{S}'_o$.

Références.

*)Cet article est la 3ème partie de l'article "Catégories structurées" dont les parties I et II sont à l'impression dans Ann. Ec. Norm. Sup., 1963 (et multigraphiées, Paris, Avril 1963). Nous reprenons ici les notations et la terminologie de ce travail. Les résultats du présent texte ont été résumés dans C.R.A.S., 256, 1963, p. 1891.

[1] Catégorie des foncteurs types, Revista Un. Mate. Argentina, XX, 1960.

[2] Structures quotient, Comm, Mat. Helv. (sous-presse); multigraphié, Paris, Juin 1963.

[3] Elargissements de catégories, Sém. Top. et Géo. diff. (Ehresmann) III, Paris, 1961 et chap. I, cours de Montréal, 1961 .

[4] Structures feuilletées, Proc. Can. Math. Congress, 1961 .

TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Juin 1963

/65/

CATEGORIES STRUCTUREES QUOTIENT

par Charles EHRESMANN

Cette Note réunit les principaux résultats concernant le passage au quotient dans les catégories structurées ; leur démonstration, assez longue, est exposée dans le mémoire «Structures quotient» partie II, *Comm. Math. Helv.* (et 1
multigraphié, Paris 1963). Les notations sont celles de [1]; en particulier $\mathcal{K}_\gamma$ désigne le groupoïde des éléments inversibles d'une catégorie $\mathcal{K}$.

Soit $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite à produits finis [1] et saturée au-dessus de $\mathcal{M}$ (i. e. $p(\mathcal{H}_\gamma)$ est une sous-catégorie saturée de $\mathcal{M}$). Soit $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ deux sous-catégories de $\mathcal{H}$ contenant $\mathcal{H}_\gamma$; les restrictions de p à $\mathcal{H}'$ et à $\mathcal{H}''$ sont désignées par p' et p''.

Soit $\mathcal{N}'_0$ la classe des graphes multiplicatifs [1] $G^{\cdot}$ tels que $G \in \mathcal{M}_0$. Si $G^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0$, nous désignons par :

$G^{\cdot} * G^{\cdot}$ la classe des couples composables $(g', g) \in G \times G$,

$G^{\cdot}_\alpha$ la classe des couples $(g, \alpha(g))$, où $g \in G$,

γ_α la bijection $g \to (g, \alpha(g))$ de G sur $G^{\cdot}_\alpha$.

Soit $\mathcal{N}'$ la catégorie des homomorphismes entre graphes multiplicatifs (appelée $\mathcal{G}$ dans [1]) dont les éléments sont les triplets $(G'^{\cdot}, f, G^{\cdot})$ tels que

$$G^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0,\ G'^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0,\ (G', f, G) \in \mathcal{M},\ f(G^{\cdot}_0) \subset G'^{\cdot}_0,\ f(G^{\cdot} * G^{\cdot}) \subset G'^{\cdot} * G'^{\cdot},$$ 2

$$f(g' \cdot g) = f(g') \cdot f(g) \quad \text{si } (g', g) \in G^{\cdot} * G^{\cdot}.$$

Soit $p_{\mathcal{N}'}$ le foncteur de $\mathcal{N}'$ vers $\mathcal{M}$ défini par $(G'^{\cdot}, f, G^{\cdot}) \to (G', f, G)$.

DEFINITION. On appellera *graphe multiplicatif* $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-*structuré* (resp. *fortement* $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-*structuré*) un triplet $(G^{\cdot}, s, s')$ vérifiant les conditions : [2]

1° $G^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0$, $s \in \mathcal{H}_0$, $s' \in \mathcal{H}_0$, $p(s) = G$ et

$p(s') = G^{\cdot} * G^{\cdot}$ (resp. $p(s') = G^{\cdot} * G^{\cdot}$ et $s' \leftharpoondown s \times s$).

2° Il existe $s_\alpha \leftharpoondown s'$ tel que $p(s_\alpha) = G^{\cdot}_\alpha$ et $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in \mathcal{H}_\gamma$. 4¶

1) CRAS Paris 256 (1963), 1198, 1891, 5031. Ces Notes résument les articles (multigraphiés Paris, Avril-Juin 1963) sous presse : Catégories structurées, Ann. ENS, Sous-structures et catégories ordonnées, Fund. Math., Structures quotient, Comm. Math. Helv. 3

2) Le symbole $\leftharpoondown$ (resp. $\longrightarrow\!\!<$) se lit sous-structure (resp. structure quotient) de.

3° On a $(s, \kappa(G^{\cdot}), s') \in \mathcal{H}''$, où $\kappa(G^{\cdot})$ est la loi de composition de $G^{\cdot}$.

4° Il existe $s_0 \in \mathcal{H}_0$ tel que $(s, \iota, s_0) \in \mathcal{H}$, $p(s_0) = G_0^{\cdot}$ et
$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \mathcal{H}'$, où $[\beta, \alpha](f) = (\beta(f), \alpha(f))$, $f \in G$.

La donnée du couple $(G^{\cdot}, s')$ (resp. ou $(G^{\cdot}, s)$) définit entièrement le graphe multiplicatif $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structuré (resp. fortement $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$- structuré) $(G^{\cdot}, s, s')$. La condition 4 entraîne $s_0 \mathrel{\ulcorner\!\!-} s$.

DEFINITION. On dit que $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\mathcal{H}(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-*s tructurée si* $C^{\cdot}$ est une catégorie et si $(C^{\cdot}, s)$ est un graphe multiplicatif fortement $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$-structuré (voir [1]).

On abrège $(p, \mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ en $/./$. Soit $\mathcal{N}'/./_0$ (resp. $\bar{\mathcal{N}}'/./_0$) la classe des graphes multiplicatifs $/./$-structurés (resp. fortement $/./$-structurés).

DEFINITION. On appellera *homomorphisme* $/./$*-structuré* (resp. *fortement* $/./$*-structuré*) un triplet $\tilde{\Phi} = ((\hat{G}^{\cdot}, \hat{s}, \hat{s}'), \Phi, (G^{\cdot}, s, s'))$ tel que :

1° $(G^{\cdot}, s, s')$ et $(\hat{G}^{\cdot}, \hat{s}, \hat{s}')$ sont dans $\mathcal{N}/./_0$ (resp. dans $\bar{\mathcal{N}}/./_0$).

2° $\hat{p}_{\mathcal{M}}(\tilde{\Phi}) = (\hat{G}, \Phi, G) \in \mathcal{M}$, $\hat{p}_{\mathcal{N}'}(\tilde{\Phi}) = (\hat{G}^{\cdot}, \Phi, G^{\cdot}) \in \mathcal{N}'$ et
1 $(\hat{s}', \Phi * \Phi, s') \in \mathcal{H}$, où $\Phi * \Phi$ = restriction de $\Phi \times \Phi$ à $G^{\cdot} * G^{\cdot}$.

Ces conditions entraînent $\hat{p}_{\mathcal{H}}(\tilde{\Phi}) = (\hat{s}, \Phi, s) \in \mathcal{H}$.

2 THEOREME. *Soit $\mathcal{N}'/./$ (resp. $\bar{\mathcal{N}}'/./$) la classe des foncteurs $/./$-structurés (resp. fortement $/./$-structurés). Alors $(\mathcal{M}, \hat{p}_{\mathcal{M}}, \hat{\mathcal{N}}', \hat{\mathcal{N}}'_{\gamma})$, $(\mathcal{N}', \hat{p}_{\mathcal{N}'}, \hat{\mathcal{N}}', \hat{\mathcal{N}}'_{\gamma})$ et $(\mathcal{H}, \hat{p}_{\mathcal{H}}, \hat{\mathcal{N}}', \hat{\mathcal{N}}'_{\gamma})$ sont des catégories d'homomorphismes, où $\hat{\mathcal{N}}'$ peut être lu soit $\mathcal{N}'/./$, soit $\bar{\mathcal{N}}'/./$. Si $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ sont des sous-catégories de $\mathcal{H}$ stables par produits, $(\mathcal{M}, \hat{p}_{\mathcal{M}}, \hat{\mathcal{N}}', \hat{\mathcal{N}}'_{\gamma})$ est à produits finis.*

Supposons que la sous-catégorie $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ vérifie la condition (σ) (voir Proposition 10.1 [1]) :

S' p-sous-structure de S entraîne S' p'-sous-structure de S.

THEOREME. *Supposons que $\mathcal{H}''$ vérifie aussi la condition (σ). Soit $(G^{\cdot}, s, s')$ un élément de $\hat{\mathcal{N}}'_0$. Les conditions*

$\hat{G}^{\cdot}$ *sous-graphe multiplicatif de* $G^{\cdot}$, $\hat{s}' \mathrel{\ulcorner\!\!-} s'$ *et* $p(\hat{s}') = \hat{G}^{\cdot} * \hat{G}^{\cdot}$

assurent l'existence d'une $\hat{p}_{\mathcal{M}}$-sous-structure $(\hat{G}^{\cdot}, \hat{s}, \hat{s}')$ de $(G^{\cdot}, s, s')$. De plus $(\mathcal{M}, \hat{p}_{\mathcal{M}}, \hat{\mathcal{N}}', \hat{\mathcal{N}}'_{\gamma})$ est résolvante à droite.

COROLLAIRE. *Supposons de plus $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}''$ stables par produits. Si on a*

$$((G^{\cdot}, s), g_i, (G_i^{\cdot}, s_i)) \in \bar{\mathcal{N}}'/./,$$

où $i = 1, 2$, *il existe* $(g_2^*(G_1^{\cdot}, g_1), \sigma) \in \bar{\mathfrak{N}}'/./_0$ *avec* $\sigma \vdash s_1 \times s_2$.

Si r est une relation d'équivalence sur la classe G, nous désignerons par $\hat{r}$ la projection canonique $x \mapsto x$ *modulo* r de G sur G/r.

THEOREME. *Soit* $(G^{\cdot}, s, s') \in \mathfrak{N}'(p, \mathfrak{H}, \mathfrak{H})_0$ *et* r *une relation d'équivalence bicompatible sur* $G^{\cdot}$ [1]. *Si* $(\hat{s}', \hat{r} * \hat{r}, s')$ *est une* $(\mathfrak{M}^{\Delta}, p)$*-surjection, il existe un* $s/r \prec s$ *et* $(G^{\cdot}/r, s/r, \hat{s}')$ *est un graphe multiplicatif* $(p, \mathfrak{H}, \mathfrak{H})$*-structuré quotient de* $(G^{\cdot}, s, s')$ *par* r.

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie et r une équivalence sur C telle qu'il existe une catégorie quotient strict $C^{\cdot}/r$. Soit $r * r$ (resp. r_0) l'équivalence induite par l'équivalence produit $r \times r$ sur $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ (resp. par r sur $C_0^{\cdot}$).

THEOREME. *Soit* $(C^{\cdot}, s)$ *une catégorie* $\mathfrak{H}$*-structurée et* $(\hat{s}', \hat{r} * \hat{r}, s')$ *une* $(\mathfrak{M}^{\Delta}, p)$*-surjection. Si les relations* $(\bar{\bar{s}}, \iota, \hat{s}') \in \mathfrak{H}$ *et* $p(\bar{\bar{s}}') = (C^{\cdot}/r) * (C^{\cdot}/r)$ *entraînent* $\hat{s}' = \bar{\bar{s}}'$, *alors il existe* $s/r \prec s$ *et* $(C^{\cdot}/r, s/r)$ *est une catégorie* $\mathfrak{H}$*-structurée quotient de* $(C^{\cdot}, s)$ *par* r.

COROLLAIRE 1. *Soit* $(C^{\cdot}, C^{\circ})$ *une catégorie double* [1]. *Si* $(C^{\cdot} * C^{\cdot})^{\circ}$ *admet une catégorie quotient (resp. quotient strict) par* $r * r$, *alors il existe une catégorie double* $(C^{\cdot}/r, (C/r)^{\circ})$ *(resp.* $(C^{\cdot}/r, C^{\circ}/r)$*) quotient par* r *de* $(C^{\cdot}, C^{\circ})$.

COROLLAIRE 2. *Soit* $(C^{\cdot}, s)$ *une catégorie topologique* [1]*; supposons* $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ *saturé pour* $r \times r$ *(resp. supposons* r *fermée) et* s *séparée. Si* $s \times s / r \times r$ *est homéomorphe à* $s/r \times s/r$ *(par exemple si* r *est ouverte), alors* $(C^{\cdot}/r, s/r)$ *est une catégorie topologique quotient de* $(C^{\cdot}, s)$. 1¶

Soit $\tilde{\Omega}$ la catégorie des homomorphismes $((M', <), f, (M, <))$ entre ensembles ordonnés tels que $(M', f, M) \in \mathfrak{M}$. Nous utilisons les sous-catégories formées des $((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}$ où, si $x, x', x'' \in M$, $y \in M'$, on a :

- $\tilde{\Omega}'$: si $x' < x$ et $f(x') = f(x)$, alors $x' = x$,
- $\tilde{\Omega}''$: si $y < f(x)$, il existe $x' < x$ tel que $f(x') = y$.
- $\mathfrak{J}\mathfrak{p}^{\Delta}$: $(M, <)$ et $(M', <)$ sont des classes sous-préinductives [1,3] et
$$f(x' \cap x'') = f(x') \cap f(x'') \quad \text{si } x' < x,\ x'' < x.$$
- $\mathfrak{J}^{\Delta}$: $((M', <), f, (M, <)) \in \mathfrak{J}\mathfrak{p}^{\Delta}$, $(M, <)$ et $(M', <)$ sont des classes inductives et, si C est une partie de M ayant un x-agrégat :
$$f(\overset{x}{\cup} C) = \overset{y}{\cup} f(C), \quad \text{avec } y = f(x).$$
- $\mathfrak{J}$: $((M', <), f, (M, <)) \in \mathfrak{J}^{\Delta}$, $(M, <)$ et $(M', <)$ inductives [3].

3) Elargissements de catégories, Topologie et Géom. Diff. III (1961).

On pose : $\mathfrak{J}''^{p\vartriangle} = \mathfrak{J}^{p\vartriangle} \cap \tilde{\Omega}''$, $\mathfrak{J}''^{\vartriangle} = \mathfrak{J}^{\vartriangle} \cap \tilde{\Omega}''$ et $\mathfrak{J}'' = \mathfrak{J} \cap \tilde{\Omega}''$.

Une catégorie $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$-structurée est dite *ordonnée* [1]; une catégorie ordonnée qui est aussi $\mathfrak{J}^{p\vartriangle}$- (resp. $\mathfrak{J}^{\vartriangle}$-, resp. $\mathfrak{J}$-)structurée est dite *sous-préinductive* (resp. *sous-inductive*, resp. *inductive*) [1].

THEOREME. *Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie ordonnée. Si on a $(\hat{s}', \hat{r} * \hat{r}, s') \in \tilde{\Omega}''$ et si la condition suivante est vérifiée :*

(a) Les conditions $E, e, e' \in C^{\cdot}_0$, $e < E$, $e' < E$ et $\hat{r}_0(e) = \hat{r}_0(e')$ entraînent $e = e'$,

alors il existe une catégorie ordonnée $(C^{\cdot}/r, s/r)$ quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par r.

THEOREME. *Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive); si $(\hat{s}', \hat{r} * \hat{r}, s') \in \mathfrak{J}''^{p\vartriangle}$ (resp. $\in \mathfrak{J}''^{\vartriangle}$, resp. $\in \mathfrak{J}''$) et si (a) est vérifiée, alors il existe $s/r \prec s$ et $(C^{\cdot}/r, s/r)$ est une catégorie sous-préinductive, resp. sous-inductive, resp. inductive) quotient de $(C^{\cdot}, s)$. On peut remplacer dans ce théorème le mot catégorie par le mot groupoïde* (voir [3] pour la définition d'un groupoïde sous-préinductif,...).

Soit $(M, <) \in \tilde{\Omega}_0$. On dit qu'une équivalence r sur M *est compatible sur* $(M, <)$ si la relation définie par :

1 $$\hat{r}(x) < \hat{r}(y) \quad \text{ssi} \quad \text{il existe } x' \sim x, \ y' \sim y,$$

est une relation d'ordre sur M/r. On dit que $((M', <), f, (M, <)) \in \mathfrak{J}^{p\vartriangle}$ (resp. $\in \mathfrak{J}^{\vartriangle}$) *vérifie la condition* (q^{ps}) (resp. (q^s)) si les conditions $y \in M'$ et $y_i < y$, pour tout $i \in I$, où I est un ensemble fini (resp. quelconque) entraînent qu'il existe $x \in M$ et $x_i < x$ tels que $f(x) = y$ et $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in I$.

THEOREME. *Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie ordonnée (resp. sous-préinductive, resp. sous-inductive, resp. inductive). Supposons $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ saturée pour $r \times r$. Si r est compatible sur s (resp. si $(s/r, \hat{r}, s)$ vérifie la condition (q^{ps}), (resp. (q^s), resp. (q^s))), $r * r$ est compatible sur s'; si de plus (a) est vérifiée, alors $(C^{\cdot}/r, s/r)$ est une catégorie ordonnée (resp. sous-préinductive, resp. sous-inductive, resp. inductive) quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par r.*

FUNDAMENTA
MATHEMATICAE
LIV (1964)

/69/

Sous-structures et catégories ordonnées

par

Ch. Ehresmann (Paris)

Introduction. Dans [1], nous avons défini la notion de sous-structure d'une structure dans une catégorie d'homomorphismes $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ lorsque $\mathcal{C}$ est munie d'une structure de catégorie inductive. Ici, nous allons généraliser cette notion, en définissant les $(\mathcal{C}', p)$-injections, où $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H})$ est un foncteur de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{C}$, et $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie 1
de $\mathcal{C}$. En particulier, nous verrons que les résultats de [1a], § I, sont valables en remplaçant la catégorie inductive $(\mathcal{C}, <)$ par une catégorie ordonnée. Ensuite, nous définissons les catégories sous-préinductives et sous-inductives et étudions les propriétés du pseudo-produit. 2

Pour les définitions de catégories d'homomorphismes et d'espèces de structures, nous renvoyons à [1] et à [2]; pour la définition et les propriétés des catégories structurées, à [1a], § II.

Une structure de catégorie sur une classe $\mathcal{C}$ sera encore désignée par $\mathcal{C}^{\cdot}$ (ou simplement par $\mathcal{C}$). Soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie. Le composé de deux éléments g et f de $\mathcal{C}$, s'il est défini, est désigné par $g \cdot f$. Les applications source et but dans $\mathcal{C}^{\cdot}$ sont notées α et β. La classe des unités de $\mathcal{C}^{\cdot}$ (ou une classe d'objets) est représentée par le symbole $\mathcal{C}_0^{\cdot}$; le groupoïde des éléments inversibles de $\mathcal{C}^{\cdot}$ est noté $\mathcal{C}_\gamma$.

1. Rappel sur les quatuors. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit $\square\mathcal{C}$ la classe des quatuors de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire [1] des quadruplets (g', f', f, g), où $g \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{C}$, $f' \in \mathcal{C}$ et $g' \in \mathcal{C}$, tels que les composés $f' \cdot g$ et $g' \cdot f$ soient définis et égaux.

Rappelons [1] que $\square\mathcal{C}$ est une catégorie double $(\boxbar\mathcal{C}, \boxminus\mathcal{C})$ pour les multiplications longitudinale et latérale suivantes:

$$(\bar{g}', \bar{f}', \bar{f}, \bar{g}) \boxbar (g', f', f, g) = (\bar{g}', \bar{f}' \cdot f', \bar{f} \cdot f, g) \quad \text{si, et seulement si, } \bar{g} = g';$$

$$(\bar{g}', \bar{f}', \bar{f}, \bar{g}) \boxminus (g', f', f, g) = (\bar{g}' \cdot g', \bar{f}', f, \bar{g} \cdot g) \quad \text{si, et seulement si, } \bar{f} = f'.$$

Soit $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$; nous désignerons par $\square(\mathcal{C}; \mathcal{C}')$ la sous-classe de $\square\mathcal{C}$ formée des quatuors (g', f', f, g) tels que $f \in \mathcal{C}'$ et $f' \in \mathcal{C}'$; c'est une sous-catégorie double $(\boxbar(\mathcal{C}; \mathcal{C}'), \boxminus(\mathcal{C}; \mathcal{C}'))$ de $(\boxbar\mathcal{C}, \boxminus\mathcal{C})$. Soit $\square(\mathcal{C}'; \mathcal{C})$ la classe des quatuors tels que $g \in \mathcal{C}'$, $g' \in \mathcal{C}'$. 3

Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes. Alors $(\boxplus\mathcal{C}, \Box p, \boxplus\mathcal{H}, \boxplus(\mathcal{H}; \mathcal{S}_\gamma))$ et $(\boxminus\mathcal{C}, \Box p, \boxminus\mathcal{H}, \boxminus(\mathcal{S}_\gamma; \mathcal{H}))$ sont des catégories d'homomorphismes, où $\Box p$ désigne le foncteur (double)

$$(g', f', f, g) \to (p(g'), p(f'), p(f), p(g)) .$$

Pour qu'un quadruplet G d'éléments de $\mathcal{H}$, (k', h', h, k), appartienne à $\Box\mathcal{H}$, il faut et il suffit que:

$$\alpha(h) = \alpha(k), \quad \beta(h) = \alpha(k'); \quad \alpha(h') = \beta(k), \quad \beta(h') = \beta(k')$$

et que l'on ait $(p(k'), p(h'), p(h), p(k)) \in \Box\mathcal{C}$. Par suite le quatuor G pourra aussi être écrit sous l'une des formes suivantes:

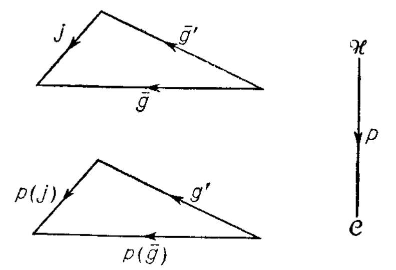
$$(k', \Box p(G), k) \quad \text{ou} \quad (k', p(h'), p(h), k) .$$

2. $(\mathcal{C}', p)$**-injections.** Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ deux catégories et $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H})$
1 un foncteur. Soit $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$.

DÉFINITION 1. On appellera $(\mathcal{C}', p)$-*injection* un élément j de $\mathcal{H}$ vérifiant les conditions suivantes:

(i) $p(j) \in \mathcal{C}'$.

(ii) Pour tout $\bar{g} \in \mathcal{H}$ tel que $\beta(\bar{g}) = \beta(j)$ et $p(\bar{g}) = p(j) \cdot g'$, où $g' \in \mathcal{C}$, il existe $\bar{g}' \in \mathcal{H}$ tel que $\bar{g} = j \cdot \bar{g}'$ et $p(\bar{g}') = g'$.



Remarquons que l'élément $\bar{g}'$ dont la condition (ii) assure l'existence peut ne pas être unique.

EXEMPLES. 1. Si $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$ est la catégorie des couples (s', s), où $s \in \mathcal{H}_0$ et $s' \in \mathcal{H}_0$, et si p est le foncteur $[\beta, \alpha]$, alors j est une $(\mathcal{C}, [\beta, \alpha])$ injection si, et seulement si, j admet un inverse à droite dans $\mathcal{H}$.

2. Si $\mathcal{C}'$ est la catégorie des monomorphismes stricts de $\mathcal{C}$ [3], les $(\mathcal{C}', p)$-injections sont les monomorphismes stricts de $\mathcal{H}$ dont l'image par p est un monomorphisme strict de $\mathcal{C}$, si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ est une catégorie d'homomorphismes.

PROPOSITION 1. *La classe $\mathcal{H}_{\prec(\mathcal{C}',p)}$ (notée aussi $\mathcal{H}_\prec$) des $(\mathcal{C}', p)$-injections est une sous-catégorie de la catégorie $p^{-1}(\mathcal{C}')$.*

Démonstration. Si $j \in \mathcal{H}_\prec$, on a évidemment $\alpha(j) \in \mathcal{H}_\prec$ et $\beta(j) \in \mathcal{H}_\prec$. Soient $j \in \mathcal{H}_\prec$ et $j' \in \mathcal{H}_\prec$ tels que $j'' = j' \cdot j$ soit défini. Alors $p(j'')$ appartient à $\mathcal{C}'$. Soit $\bar{g} \in \mathcal{H}$ tel que $\beta(\bar{g}) = \beta(j'')$ et $p(\bar{g}) = p(j'') \cdot g''$. Comme $j' \in \mathcal{H}_\prec$ et $p(\bar{g}) = p(j') \cdot (p(j) \cdot g'')$, il existe $\bar{g}' \in \mathcal{H}$ tel que:

$$\bar{g} = j' \cdot \bar{g}' \quad \text{et} \quad p(\bar{g}') = p(j) \cdot g'' .$$

Puisque $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$, il existe $\bar g'' \in \mathcal{H}$ tel que:

$$\bar g' = j \cdot \bar g'' \quad \text{et} \quad p(\bar g'') = g'' .$$

Par suite:

$$\bar g = j' \cdot j \cdot \bar g'' = j'' \cdot \bar g'' \quad \text{et} \quad j' \in \mathcal{H}_{\precsim} .$$

Dans la fin de ce paragraphe, nous poserons:

$$\mathcal{U} = \boxbar(\mathcal{C};\mathcal{C}') \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{U}} = \boxbar(\mathcal{H};\mathcal{H}_{\precsim}) .$$

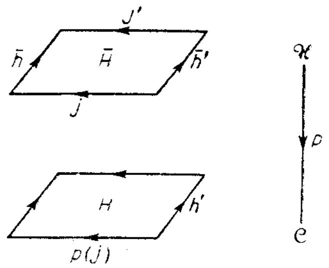
Définition 2: On dira que $\bar h' \in \mathcal{H}$ est un $(\mathcal{C}', p)$*-sous-homomorphisme* de $\bar h \in \mathcal{H}$, et on écrira $\bar h' \precsim_{(\mathcal{C}',p)} \bar h$, ou $\bar h' \precsim \bar h$, s'il existe

$$(\bar h, j', j, \bar h') \in \overline{\mathcal{U}} .$$

En particulier si $s \in \mathcal{H}_0$ et $S \in \mathcal{H}_0$, on a:

$s \precsim S$ si, et seulement si, il existe $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$ tel que $\alpha(j) = s$, $\beta(j) = S$.

Si $\bar h' \precsim \bar h$, on a aussi $\alpha(\bar h') \precsim \alpha(\bar h)$ et $\beta(\bar h') \precsim \beta(\bar h)$.



Proposition 2. *Soient* $\bar h \in \mathcal{H}$, $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$ *et* $j' \in \mathcal{H}_{\precsim}$ *tels que:*

$$\alpha(\bar h) = \beta(j) \quad \text{et} \quad \beta(\bar h) = \beta(j') .$$

S'il existe $H = (p(\bar h), p(j'), p(j), h') \in \mathcal{U}$, *alors il existe*

$$\bar H = (\bar h, j', j, \bar h') \in \overline{\mathcal{U}} \quad \text{tel que} \quad \square p(\bar H) = H .$$

En effet les conditions: $j' \in \mathcal{H}_{\precsim}$ et

$$p(\bar h \cdot j) = p(\bar h) \cdot p(j) = p(j') \cdot h'$$

assurent l'existence de $\bar h' \in \mathcal{H}$ tel que $p(\bar h') = h'$ et $j' \cdot \bar h' = \bar h \cdot j$.

Proposition 3. *Soient* $\bar h \in \mathcal{H}_{\gamma}$ *et* $\bar h' \in \mathcal{H}_{\gamma}$. *S'il existe* $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$ *tel que* $\alpha(j) = \alpha(\bar h')$, $\beta(j) = \alpha(\bar h)$ *et* $(p(\bar h), f', p(j), p(\bar h')) \in \mathcal{U}$, *alors on a:* $\bar h \cdot j \cdot \bar h'^{-1} \in \mathcal{H}_{\precsim}$ *et* $\bar h' \precsim_{(\mathcal{C}',p)} \bar h$.

Démonstration. Posons $j' = \bar h \cdot j \cdot \bar h'^{-1}$. On a $p(j') = f' \in \mathcal{C}'$. Soit $\bar g \in \mathcal{H}$ tel que $\beta(\bar g) = \beta(j')$ et $p(\bar g) = p(j') \cdot g'$. Comme

$$p(\bar h^{-1} \cdot \bar g) = p(\bar h)^{-1} \cdot p(j') \cdot g' = p(j) \cdot p((\bar h'^{-1}) \cdot g') \qquad 1$$

et que $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$, il existe $\bar g_1' \in \mathcal{H}$ tel que:

$$\bar h^{-1} \cdot \bar g = j \cdot \bar g_1' \quad \text{et} \quad p(\bar g_1') = p(\bar h'^{-1}) \cdot g' .$$

Posons $\bar g' = \bar h' \cdot \bar g_1'$. On trouve: $p(\bar g') = g'$ et:

$$\bar g = (\bar h \cdot j) \cdot \bar g_1' = (j' \cdot \bar h') \cdot (\bar h'^{-1} \cdot \bar g') = j' \cdot \bar g' .$$

Donc $j' \in \mathcal{H}_{\precsim}$; par suite $(\bar h, j', j, \bar h') \in \overline{\mathcal{U}}$ et $\bar h' \precsim \bar h$.

Dans la fin de ce paragraphe, nous supposons que $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes. Un élément h de $\mathcal{H}$ sera représenté par le triplet $(\beta(h), p(h), \alpha(h))$.

Pour que $j \in \mathcal{H}$ soit une $(\mathcal{C}', p)$-injection, il faut et il suffit que

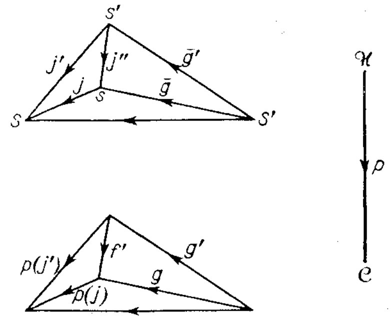
(i) $p(j) \in \mathcal{C}'$.

(ii) La condition:

$$\bar{g} = (\beta(j), p(j) \cdot g', S') \in \mathcal{H} \quad \text{entraîne:} \quad \bar{g}' = (\alpha(j), g', S') \in \mathcal{H}.$$

Remarque. Les conditions: $j \in \mathcal{H}_\smile$ et $p(j) \in \mathcal{C}_\gamma$ entraînent $j \in \mathcal{H}_\gamma$. En effet, de la relation: $\beta(j) = (\beta(j), p(j) \cdot p(j)^{-1}, \beta(j)) \in \mathcal{H}$, il résulte: $j' = (\alpha(j), p(j)^{-1}, \beta(j)) \in \mathcal{H}$. Comme $j' \cdot j = \alpha(j)$ et $j \cdot j' = \beta(j)$, on en déduit $j' = j^{-1}$ et $j \in \mathcal{H}_\gamma$.

Proposition 4. *Soient j et j' deux $(\mathcal{C}', p)$-injections telles que $\beta(j) = \beta(j') = S$. S'il existe $f' \in \mathcal{C}'$ avec $p(j) \cdot f' = p(j')$, alors $j'' = (\alpha(j), f', \alpha(j'))$ est une $(\mathcal{C}', p)$-injection et $j \cdot j'' = j'$.*



Démonstration. Posons $s = \alpha(j)$ et $s' = \alpha(j')$. La relation:

$$j' = (S, p(j) \cdot f', s') \in \mathcal{H} \quad \text{entraîne} \quad j'' = (s, f', s') \in \mathcal{H}$$

puisque $j \in \mathcal{H}_\smile$. Supposons $\bar{g} = (s, p(j'') \cdot g', S') \in \mathcal{H}$. On a:

$$j \cdot \bar{g} = (S, p(j) \cdot f' \cdot g', S') = (S, p(j') \cdot g', S') \in \mathcal{H}$$

et, comme $j' \in \mathcal{H}_\smile$, on obtient:

$$(s', g', S') \in \mathcal{H}, \quad \text{donc} \quad j \in \mathcal{H}_\smile.$$

Corollaire. *Si $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{H}_\gamma$, les conditions:*

$$j \in \mathcal{H}_\smile, \quad j' \in \mathcal{H}_\smile, \quad \beta(j) = \beta(j') \quad \textit{et} \quad p(j) = p(j')$$

entraînent: $j = j'$.

Démonstration. Ces conditions entraînent, d'après la proposition 4: $(s, p(s), s') \in \mathcal{H}_{\precsim}$ et, de la remarque précédant la proposition 4, on déduit $(s, p(s), s') \in \mathcal{H}_\gamma$, donc $s = (s, p(s), s') = s'$, puisque $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}_\gamma)$ est une espèce de structures.

Remarque. Si $\mathcal{C}'$ contient des éléments f tels que $\alpha(f) = \beta(f)$, il peut exister des $(\mathcal{C}', p)$-injections j telles que $\alpha(j) = \beta(j)$.

PROPOSITION 5: *Les conditions*:

$$j \in \mathcal{H}_{\precsim}, \quad j' \in \mathcal{H}_{\precsim}, \quad \overline{h} = (\beta(j'), h, \beta(j)) \in \mathcal{H} \quad \textit{et} \quad (h, p(j'), p(j), h') \in \mathcal{H}$$

entraînent: $\overline{h}' = (\alpha(j'), h', \alpha(j)) \in \mathcal{H}$ *et* $\overline{h}' \precsim \overline{h}$. *Si de plus on a* $\overline{h} \in \mathcal{H}_\gamma$ *et* $h' \in \mathcal{C}_\gamma$, *alors* $\overline{h}' \in \mathcal{H}_\gamma$.

En effet, d'après la proposition 2, on a $\overline{h}' \in \mathcal{H}$. Si de plus $\overline{h} \in \mathcal{H}_\gamma$ et $h' \in \mathcal{C}_\gamma$, on a aussi:

$$(h^{-1}, p(j), p(j'), h'^{-1}) \in \mathcal{H}, \quad \text{donc:} \quad \overline{h}'_1 = (\alpha(j), h'^{-1}, \alpha(j')) \in \mathcal{H}\,.$$

Comme $\overline{h}'_1 \cdot \overline{h}' = \alpha(j)$ et $\overline{h}' \cdot \overline{h}'_1 = \alpha(j')$, on obtient $\overline{h}' \in \mathcal{H}_\gamma$.

Dans le théorème suivant, nous posons:

$$[\overline{h}] = (\overline{h}, \beta(\overline{h}), \alpha(\overline{h}), \overline{h}) \in (\boxplus\mathcal{H})_0, \quad \text{où} \quad \overline{h} \in \mathcal{H}\,.$$
$$[h] = (h, \beta(h), \alpha(h), h) \in (\boxplus\mathcal{C})_0, \quad \text{où} \quad h \in \mathcal{C}\,.$$

THÉORÈME 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes, où* $\overline{h} \in \mathcal{H}$ *et* $\overline{h}' \in \mathcal{H}$:

(i) $\overline{h}' \precsim_{(\mathcal{C}', p)} \overline{h}$.

(ii) *Il existe* $(\overline{h}, j', j, \overline{h}') \in (\boxplus\mathcal{H})_{\precsim(\mathcal{U}, \square p)}$ *tel que l'on ait*

$$(\beta(\overline{h}), j', j', \beta(\overline{h}')) \in (\boxplus\mathcal{H})_{\precsim(\mathcal{U}, \square p)}\,.$$

Démonstration. Soient $\overline{h} = (S_1, h, S)$ et $\overline{h}' = (s_1, h', s)$. Supposons $\overline{h}' \precsim \overline{h}$. Par définition, il existe $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$ et $j' \in \mathcal{H}_{\precsim}$ tels que

$$J = (\overline{h}, j', j, \overline{h}') \in \square\mathcal{H} \quad \text{et} \quad \square p(J) \in \mathcal{H}\,.$$

Soit $\overline{G} = (\overline{h}, \square p(J) \cdot G', \overline{k}) \in \square\mathcal{H}$, où $G' = (h', g'_1, g', p(\overline{k})) \in \square\mathcal{C}$. Comme 1

$$\overline{G} = (\overline{h}, p(j') \cdot g'_1, p(j) \cdot g', \overline{k})\,,$$

on a $(S, p(j) \cdot g', \alpha(\overline{k})) \in \mathcal{H}$ et $(S_1, p(j') \cdot g'_1, \beta(\overline{k})) \in \mathcal{H}$. Les conditions: $j \in \mathcal{H}_{\precsim}$ et $j' \in \mathcal{H}_{\precsim}$ entraînent:

$$\overline{g}' = (s, g', \alpha(k)) \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \overline{g}'_1 = (s_1, g'_1, \beta(\overline{k})) \in \mathcal{H}\,.$$ 2

Puisque $G' \in \square\mathcal{C}$, on en déduit:

$$\overline{G}' = (\overline{h}', \overline{g}'_1, \overline{g}', \overline{k}) \in \square\mathcal{H}, \quad \text{d'où} \quad [\overline{h}'] \precsim [\overline{h}]\,.$$

Inversement supposons $[\bar{h}'] \lesssim [\bar{h}]$; c'est-à-dire il existe une $(\mathcal{U}, \Box p)$-injection $J = (\bar{h}, j', j, \bar{h}')$. Alors $p(j) \in \mathcal{C}'$ et $p(j') \in \mathcal{C}'$. Supposons:

$$\bar{g} = \big(\alpha(\bar{h}), p(j)\cdot g', S'\big) \in \mathcal{H}\,.$$

Des relations:

$$\bar{G} = (\bar{h}, \bar{h}\cdot\bar{g}, \bar{g}, S') \in \Box\mathcal{H}$$

et

$$\Box p(\bar{G}) = \big(h, h\cdot p(j)\cdot g', p(j)\cdot g', p(S')\big) = \big(\Box p(J)\big) \boxminus \big(h', h'\cdot g', g', p(S')\big)\,,$$

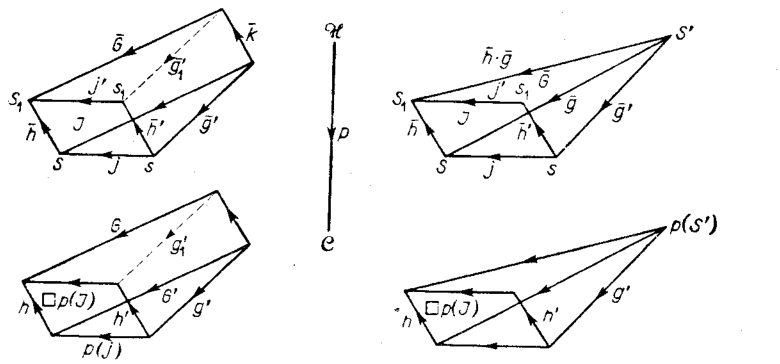
il résulte:

$$(\bar{h}', h'\cdot g', g', S') \in \Box\mathcal{H}\,.$$

Par suite:

$$(s, g', S') \in \mathcal{H} \qquad \text{et} \qquad j \in \mathcal{H}_{\lesssim}\,.$$

Si de plus $\big(\beta(\bar{h}), j', j', \beta(\bar{h})\big) \in (\boxminus\mathcal{H})_{\lesssim(\mathcal{U},\Box p)}$, on a de même $j' \in \mathcal{H}_{\lesssim}$ et par conséquent $\bar{h}' \lesssim_{(\mathcal{C}',p)} \bar{h}$.



Corollaire. *$s \lesssim_{(\mathcal{C}',p)} S$ est équivalent à $[s] \lesssim_{(\mathcal{U},\Box p)} [S]$, où $s \in \mathcal{H}_0$ et $S \in \mathcal{H}_0$.*

3. Transitivité. Soient $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H})$ et $(\mathcal{H}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}})$ deux foncteurs. Soient $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$.

Proposition 6. *Si $\bar{j} \in \overline{\mathcal{H}}$ est une $(\mathcal{H}', \overline{p})$-injection et si $\overline{p}(\bar{j})$ est une $(\mathcal{C}', p)$-injection, alors $\bar{j}$ est une $(\mathcal{C}', p\overline{p})$-injection.*

Démonstration. Soit $\bar{g} \in \overline{\mathcal{H}}$ tel que $\beta(\bar{g}) = \beta(\bar{j})$ et $p\overline{p}(\bar{g}) = p\overline{p}(\bar{j})\cdot g'$. Comme $\beta\big(\overline{p}(\bar{g})\big) = \beta\big(\overline{p}(\bar{j})\big)$ et $\overline{p}(\bar{j}) \in \mathcal{H}_{\lesssim(\mathcal{C}',p)}$, il existe $g_1' \in \mathcal{H}$ tel que $\overline{p}(\bar{g}) = \overline{p}(\bar{j})\cdot g_1'$ et $p(g_1') = g'$. Puisque $\bar{j}$ est une $(\mathcal{H}', \overline{p})$-injection, il existe $\bar{g}' \in \overline{\mathcal{H}}$ tel que:

$$\bar{g} = \bar{j}\cdot\bar{g}' \qquad \text{et} \qquad \overline{p}(\bar{g}) = g_1', \qquad \text{d'où} \qquad p\overline{p}(\bar{g}') = g'\,.$$

Donc $\bar{j}$ est une $(\mathcal{C}', p\overline{p})$-injection.

PROPOSITION 7. *Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes et si $\bar{j} \in \overline{\mathcal{H}}$ est une $(\mathcal{C}', p\bar{p})$-injection telle que $\bar{p}(\bar{j}) \in \mathcal{H}'$, alors $\bar{j}$ est une $(\mathcal{H}', \bar{p})$-injection.*

Démonstration. Soit $\bar{g} \in \overline{\mathcal{H}}$ tel que $\beta(\bar{g}) = \beta(\bar{j})$ et $\bar{p}(\bar{g}) = \bar{p}(\bar{j}) \cdot g'$. Puisque $p\bar{p}(\bar{g}) = p\bar{p}(\bar{j}) \cdot p(g')$ et $\bar{j} \in \mathcal{H}_{\prec(\mathcal{C}', p\bar{p})}$, il existe $\bar{g}' \in \overline{\mathcal{H}}$ tel que:

$$\bar{g} = \bar{j} \cdot \bar{g}' \quad \text{et} \quad p\bar{p}(\bar{g}') = p(g') .$$

Comme $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ est une catégorie d'homomorphismes, les relations:

$$p\big(\bar{p}(\bar{g}')\big) = p(g'), \qquad \alpha(g') = \alpha\big(\bar{p}(\bar{g}')\big) \qquad \text{et} \qquad \beta(g') = \alpha\big(\bar{p}(\bar{j})\big) = \beta\big(\bar{p}(\bar{g}')\big)$$

entraînent: $\bar{p}(\bar{g}') = g'$. Par suite $\bar{j}$ est une $(\mathcal{H}', \bar{p})$-injection.

Remarquons que les conditions de la proposition 7 n'entraînent pas forcément que $\bar{p}(\bar{j})$ est une $(\mathcal{C}', p)$-injection.

4. Catégories ordonnées. Soit $\mathcal{M}_0$ une classe de classes contenant, avec une classe, toutes ses sous-classes, avec deux classes, leur produit. Soit $\mathcal{M}$ la catégorie de toutes les applications (M', F, M), où $M \in \mathcal{M}_0$ et $M' \in \mathcal{M}_0$.

Soit $\widetilde{\Omega}_0$ la classe de toutes les classes ordonnées $(M, <)$, où $M \in \mathcal{M}_0$, et soit $\widetilde{\Omega}$ la catégorie de tous les homomorphismes entre classes ordonnées appartenant à $\widetilde{\Omega}_0$. Soit Ω le groupoïde des éléments inversibles de $\widetilde{\Omega}$. Soit ω l'application:

$$\big((M', <), F, (M, <)\big) \to (M', F, M)$$

de $\widetilde{\Omega}$ dans $\mathcal{M}$. On sait [1] que $(\mathcal{M}, \omega, \widetilde{\Omega}, \Omega)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis [1], résolvante à droite [1].

Soit $\widetilde{\Omega}'$ la sous-catégorie de $\widetilde{\Omega}$ formée des homomorphismes stricts, c'est-à-dire [1] des homomorphismes $\big((M', <), F, (M, <)\big)$ tels que: Si $F(x) = F(x')$ et $x' < x$, où $x \in M$ et $x' \in M$, alors on a $x = x'$.

Soit $\widetilde{\Omega}'_1$ la sous-catégorie de $\widetilde{\Omega}'$ formée des homomorphismes stricts $\big((M', <), F, (M, <)\big)$ tels que, pour tout $x \in M$, la restriction de F à la classe des éléments $x' < x$ soit une application biunivoque. 1

Rappelons qu'une catégorie $\widetilde{\Omega}(\widetilde{\Omega}', \widetilde{\Omega})$-structurée est appelée [1] une *catégorie ordonnée*. En remplaçant $\widetilde{\Omega}'$ par $\widetilde{\Omega}'_1$, nous poserons:

DÉFINITION 3. Une catégorie $\widetilde{\Omega}(\widetilde{\Omega}'_1, \widetilde{\Omega})$-structurée sera appelée *catégorie s-ordonnée.*

Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie ordonnée (resp. s-ordonnée), il faut et il suffit que soient vérifiés les axiomes (O_1), (O_2), (O_3) et (O_0) (resp. (O_1), (O_2), (O'_3) et (O_0) [1]:)

(O_0) *$\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie et $(\mathcal{C}, <) \in \widetilde{\Omega}_0$.*

(O_1) *$f' < f$ entraîne $\alpha(f') < \alpha(f)$ et $\beta(f') < \beta(f)$.*

(O_2) *Si* $f'_2 \cdot f'_1$ *et* $f_2 \cdot f_1$ *sont définis et si* $f'_1 < f_1$ *et* $f'_2 < f_2$, *alors:*

$$f'_2 \cdot f'_1 < f_2 \cdot f_1 .$$

(O_3) *Si on a:* $f' < f$, $\alpha(f') = \alpha(f)$ *et* $\beta(f') = \beta(f)$, *alors* $f' = f$.

(O'_3) *Si on a:* $f' < f$, $f'' < f$, $\alpha(f') = \alpha(f'')$ *et* $\beta(f') = \beta(f'')$, *alors* $f' = f''$.

THÉORÈME 2. *Soit* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *une catégorie ordonnée. La classe des* $j \in \mathcal{C}$ *tels que* $\alpha(j) < j < \beta(j)$ *est une sous-catégorie* $\mathcal{C}_{\prec}$ *de* $\mathcal{C}$ *qui définit un ordre sur* $\mathcal{C}_0$. *Si* $j \in \mathcal{C}_{\prec}$, *nous écrirons:* $j = \beta(j) \succ \alpha(j)$. *On a:* $(h, \beta(h) \succ \beta(h'), \alpha(h) \succ \alpha(h'), h') \in \square(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec})$ *si, et seulement si,* $h' < h$, $\alpha(h) \succ \alpha(h') \in \mathcal{C}_{\prec}$ *et* $\beta(h) \succ \beta(h') \in \mathcal{C}_{\prec}$.

Démonstration. Soient j et j' deux éléments de $\mathcal{C}$ tels que:

$$\alpha(j) < j < \beta(j) \quad \text{et} \quad \alpha(j') < j' < \beta(j') .$$

Si $\alpha(j) = \alpha(j') = e$ et $\beta(j) = \beta(j') = E$, on a, d'après (O_2):

$$j' = j' \cdot e < E \cdot j = j \quad \text{et} \quad j = j \cdot e < E \cdot j' = j' ,$$

d'où $j = j'$. Nous poserons: $j = E \succ e \in \mathcal{C}_{\prec}$. Pour tout $e \in \mathcal{C}^\cdot_0$, on a $e \succ e \in \mathcal{C}_{\prec}$. Les conditions:

$$(E \succ e) \in \mathcal{C}_{\prec} \quad \text{et} \quad (e \succ e') \in \mathcal{C}_{\prec}$$

entraînent, en vertu de (O_2):

$$e' = e' \cdot e' < e \cdot (e \succ e') < (E \succ e) \cdot (e \succ e') < E \cdot E = E .$$

Par suite on trouve:

$$(E \succ e) \cdot (e \succ e') = (E \succ e') \in \mathcal{C}_{\prec} .$$

Soit $k = (h, e_1 \succ e'_1, e \succ e', h') \in \square(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec})$. En utilisant ($O_2$), on a:

$$h' = e'_1 \cdot h' < (e_1 \succ e'_1) \cdot h' = h \cdot (e \succ e') < h \cdot e = h .$$

Inversement les conditions:

$$h' < h, \quad j = \alpha(h) \succ \alpha(h') \quad \text{et} \quad j' = \beta(h) \succ \beta(h')$$

entraînent, d'après (O_2):

1 $$j' \cdot h' < \beta(h) \cdot h \quad \text{et} \quad j' \cdot h' = (j' \cdot h') \alpha(h') < h \cdot j .$$

Il résulte alors de (O_3) que $j' \cdot h' = h \cdot j$, c'est-à-dire: $(h, j', j, h') \in \square(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec})$.

2 COROLLAIRE 1. *Si* $(\mathcal{C}', <)$ *est s-ordonnée,* $\mathcal{H} = \square(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec})$ *vérifie l'axiome:*

(u) *Si* $k = (h, e_1 \succ e'_1, e \succ e', h') \in \mathcal{H}$ *et* $k' = (h, e_1 \succ e'_1, e \succ e', h'') \in \mathcal{H}$, *on a:* $h' = h''$, *et par suite* $k = k'$.

COROLLAIRE 2. *Soit* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *une catégorie ordonnée. Si* $\boxplus \mathcal{C}$ *est munie de sa structure de catégorie ordonnée* [1], *pour l'ordre induit par la classe ordonnée produit* $(\mathcal{C}^4, <)$, *on a:* $\boxplus(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\prec}) = \boxplus(\mathcal{C})_{\prec}$.

Définition 4. Nous dirons qu'une catégorie ordonnée $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est *complètement régulière à droite* si, pour tout couple (E, e), où $e \in \mathcal{C}_0^\cdot$, $E \in \mathcal{C}_0^\cdot$ et $e < E$, il existe $E \succsim e \in \mathcal{C}_{\precsim}$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Soit $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{C}$ qui définit un ordre sur $\mathcal{C}_0$. Désignons par $<$ la relation sur $\mathcal{C}$ définie par: $f' < f$ si, 1
et seulement si, il existe $(f', j', j, f) \in \square(\mathcal{C}; \mathcal{C}')$.

Proposition 8. *Avec les notations précédentes,* $(\mathcal{C}, <)$ *est une catégorie ordonnée complètement régulière à droite: pour que* $(\mathcal{C}, <)$ *soit s-ordonnée, il faut et il suffit que* $\mathcal{H} = \boxplus(\mathcal{C}; \mathcal{C}')$ *vérifie l'axiome* (u).

Définition 5. Nous dirons que $(\mathcal{H}^\cdot, <)$ est *une catégorie ordonnées* 2
au-dessus de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *relativement à* p si les conditions suivantes sont vérifiées:

(i) $(\mathcal{H}^\cdot, <)$ *et* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *sont des catégories ordonnées.*

(ii) $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{H}_\gamma)$ *est une catégorie d'homomorphismes, où* $\mathcal{H}_\gamma$ *est le groupoïde des éléments inversibles de* $\mathcal{H}$.

(iii) *On a:* $\big((\mathcal{C}, <), p, (\mathcal{H}, <)\big) \in \widetilde{\Omega}'$.

5. Catégorie d'homomorphismes au-dessus d'une catégorie ordonnée. Soit $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ une catégorie d'homomorphismes. Supposons que $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ soit une catégorie ordonnée et soit $\mathcal{C}_{\precsim}$ la sous-catégorie de $\mathcal{C}$ construite ci-dessus. Nous poserons: $\mathcal{H} = \boxplus(\mathcal{C}; \mathcal{C}_{\precsim})$.

Soit j une $(\mathcal{C}_{\precsim}, p)$-injection, $s = \alpha(j)$ et $S = \beta(j)$. On a:

$$p(j) = \big(p(S) \succsim p(s)\big) \in \mathcal{C}_{\precsim}.$$

Par suite j est entièrement déterminé par la donnée du couple (S, s). Nous poserons: $j = S \succsim_p s$. En particulier si $s = S$, alors $S \succsim_p s = s$.

Définition 6. Avec les notations précédentes, nous dirons que $S \succsim_p s$ est *une p-injection*, ou que s est *une sous-structure de S dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$. Nous écrirons aussi dans ce cas: $s \precsim S$. Si $\bar{h}'$ est un $(\mathcal{C}_{\precsim}, p)$-sous-homomorphisme de $\bar{h}$, nous dirons aussi que $\bar{h}'$ est *un sous-homomorphisme de $\bar{h}$* et nous poserons: $\bar{h}' \precsim_p \bar{h}$, ou $\bar{h}' \precsim h$. 3

Exemple. Dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$, on a: $e \precsim E$ si, et seulement si, il existe $E \succsim e \in \mathcal{C}_{\precsim}$. Ainsi les catégories $\mathcal{C}_{\precsim}$ et $\mathcal{C}_{\precsim(\mathcal{C}_{\precsim}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})}$ sont identiques. On a: $f' \precsim f$ si, et seulement si,

$$\alpha(f') \precsim \alpha(f), \quad \beta(f') \precsim \beta(f) \quad \text{et} \quad f' < f.$$

Les relations $f' < f$ et $f' \precsim f$ sont donc les mêmes si, et seulement si, $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est complètement régulière à droite.

Proposition 9. *La condition:* $\bar{h}' \precsim_p \bar{h}$ *entraîne* $p(\bar{h}') \precsim p(\bar{h})$ *dans* $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$. *Les conditions*:

$$\bar{h}' \precsim_p \bar{h}, \quad \bar{h}'' \precsim_p \bar{h} \quad \textit{et} \quad p(\bar{h}'') \precsim p(\bar{h}') \quad \textit{dans} \quad (\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$$

entraînent:

$$\bar{h}'' \precsim_p \bar{h}'.$$

Démonstration. Soient $\bar{h} = (S_1, h, S) \in \mathcal{H}$ et $\bar{h}' = (s_1', h', s') \in \mathcal{H}$ tels que $\bar{h}' \precsim \bar{h}$. Comme on a:

$$\Box p(\bar{h}, S_1 \succ s_1', S \succ s', \bar{h}') \in \mathcal{H},$$

on obtient $p(\bar{h}') \precsim p(\bar{h})$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$. Soit $\bar{h}'' = (s_1'', h'', s'') \in \mathcal{H}$ tel que: $\bar{h}'' \precsim \bar{h}$ et $p(\bar{h}'') \precsim p(\bar{h}')$ dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_\mathcal{C}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$. Les relations: $p(S \succ s') \in \mathcal{C}_\prec$, $p(S \succ s'') \in \mathcal{C}_\prec$ et $p(s') \succ p(s'') \in \mathcal{C}_\prec$ entraînent:

$$p(S \succ s') \cdot \big(p(s') \succ p(s'')\big) = p(S \succ s''),$$

car $\mathcal{C}_\prec$ est une catégorie définissant un ordre sur la classe de ses unités. En utilisant la proposition 4, on en déduit:

$$s'' \precsim s' \quad \text{et, de même} \quad s_1'' \precsim s_1'.$$

Enfin, puisque $p(\bar{h}'') \precsim p(\bar{h}')$, on a:

$$\Box p(\bar{h}', s_1' \succ s_1'', s' \succ s'', \bar{h}'') \in \mathcal{H};$$

par suite $(\bar{h}', s_1' \succ s_1'', s' \succ s'', \bar{h}'') \in \Box \mathcal{H}$ et $\bar{h}'' \precsim \bar{h}'$.

Corollaire. *Si $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{H}_\gamma$, les conditions:*

$$\bar{h}' \precsim_p \bar{h}, \quad \bar{h}'' \precsim_p \bar{h} \quad \text{et} \quad p(\bar{h}') = p(\bar{h}'')$$

entraînent:

$$\bar{h}' = \bar{h}''.$$

En effet, ces conditions entraînent:

$$j' = \alpha(\bar{h}) \succ \alpha(\bar{h}') \in \mathcal{H}_\prec, \quad j'' = \alpha(\bar{h}) \succ \alpha(\bar{h}'') \in \mathcal{H}_\prec \quad \text{et} \quad p(j') = p(j'').$$

Donc $j' = j''$, en vertu du corollaire de la proposition 4, c'est-à-dire $\alpha(\bar{h}') = \alpha(\bar{h}'')$. De même, $\beta(\bar{h}') = \beta(\bar{h}'')$. Par suite $\bar{h}' = \bar{h}''$.

Théorème 3. *Si $\mathcal{S}$ contient $\mathcal{H}_\gamma$, $(\mathcal{H}, \precsim_p)$ est une catégorie ordonnée complètement régulière à droite, au-dessus de $(\mathcal{C}, <)$ relativement à p; de plus on a:*

$$\bar{h}' \precsim_p \bar{h} \ \textit{si, et seulement si,} \ \alpha(\bar{h}') \precsim_p \alpha(\bar{h}), \beta(\bar{h}') \precsim_p \beta(\bar{h}) \ \textit{et} \ p(\bar{h}') < p(\bar{h}).$$

Démonstration. Supposons $s \precsim S$ et $S \precsim s$, où $s \in \mathcal{H}_0$ et $S \in \mathcal{H}_0$. On a:

$$p(S) \succ p(s) \in \mathcal{C}_\prec \quad \text{et} \quad p(s) \succ p(S) \in \mathcal{C}_\prec,$$

d'où $p(s) = p(S)$ et, d'après le corollaire de la proposition 9, $s = S$. Il en résulte que la relation: $s \precsim S$ est une relation d'ordre dans $\mathcal{H}_0$ et, d'après la proposition 8, $(\mathcal{H}, \precsim_p)$ est une catégorie ordonnée complètement régulière à droite. Le corollaire de la proposition 9 signifie:

$$\big((\mathcal{C}, <), p, (\mathcal{H}, \precsim_p)\big) \in \tilde{\Omega}_1'.$$

Enfin, pour que l'on ait $\overline{h}' \prec_p \overline{h}$, il faut et il suffit que l'on ait:

$$\alpha(\overline{h}') \prec_p \alpha(\overline{h}), \qquad \beta(\overline{h}') \prec_p \beta(\overline{h}),$$

et

$$\Box p\big(\overline{h}, \alpha(\overline{h}) \succ \alpha(\overline{h}'), \beta(\overline{h}) \succ \beta(\overline{h}'), \overline{h}'\big) \in \mathcal{U}.$$

On déduit du théorème 2 que ces conditions sont équivalentes à:

$$\alpha(\overline{h}') \prec_p \alpha(\overline{h}), \qquad \beta(\overline{h}') \prec_p \beta(\overline{h}) \qquad \text{et} \qquad p(\overline{h}') < p(\overline{h}).$$

COROLLAIRE. *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie s-ordonnée et si* $\mathcal{S}$ *contient* $\mathcal{H}_\gamma$, *alors* $(\mathcal{H}, \prec_p)$ *est une catégorie s-ordonnée.*

Les propositions 3 et 5 et le théorème 1 s'énoncent maintenant:

PROPOSITION 3'. *Les conditions*:

$$\overline{h} \in \mathcal{H}_\gamma, \qquad \overline{h}' \in \mathcal{H}_\gamma, \qquad \alpha(\overline{h}') \prec_p \alpha(\overline{h}) \qquad \textit{et} \qquad p(\overline{h}') < p(\overline{h})$$

entraînent

$$\overline{h}' \prec_p \overline{h},$$

PROPOSITION 5'. *Soient* $\overline{h} = (S_1, h, S) \in \mathcal{H}$, $s \prec S$ *et* $s_1 \prec S_1$. *S'il existe* $h' < h$ *tel que* $\alpha(h') = p(s)$ *et* $\beta(h') = p(s_1)$, *on a*: $\overline{h}' = (s_1, h', s) \in \mathcal{H}$. *Si de plus* $\overline{h} \in \mathcal{H}_\gamma$ *et* $h' \in \mathcal{C}_\gamma$, *alors* $\overline{h}' \in \mathcal{H}_\gamma$.

THÉORÈME 1'. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) $\overline{h}' \prec \overline{h}$ *dans* $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$.

(ii) $[\overline{h}'] \prec [\overline{h}]$ *et* $[\beta(\overline{h}')] \prec [\beta(\overline{h})]$ *dans* $\big(\boxplus\mathcal{C}, \Box p, \boxplus\mathcal{H}, \boxplus(\mathcal{H}; \mathcal{S}_\gamma)\big)$, *la catégorie* $\boxplus\mathcal{C}$ *étant munie de sa structure de catégorie ordonnée.*

Soit de plus $(\mathcal{H}, \overline{p}, \overline{\mathcal{H}}, \overline{\mathcal{S}})$ une catégorie d'homomorphismes. Nous supposons $\mathcal{H}$ muni de sa structure de catégorie ordonnée $(\mathcal{H}, \prec)$. Des propositions 6 et 7, il résulte:

COROLLAIRE. *Soient* $\overline{s} \in \overline{\mathcal{H}}_0$ *et* $\overline{S} \in \overline{\mathcal{H}}_0$. *On a* $\overline{s} \prec_{\overline{p}} \overline{S}$ *si, et seulement si*, $\overline{s} \prec_{p\overline{p}} \overline{S}$ *et* $\overline{p}(\overline{s}) \prec_p \overline{p}(\overline{S})$. 1+

6. Catégories sous-préinductives et sous-inductives. Soit $(\mathcal{M}, \omega, \widetilde{\Omega}, \Omega)$ la catégorie d'homomorphismes construite au n° 3.

Soit $\mathcal{J}_0^{ps}$ la sous-classe de $\widetilde{\Omega}_0$ formée des classes *sous-préinductives*, c'est-à-dire [2] des classes ordonnées $(A, <) \in \widetilde{\Omega}_0$ dans lesquelles est vérifié l'axiome:

Soient $x \in A$, $x' \in A$ et $x'' \in A$ tels que $x' < x$ et $x'' < x$. Alors les éléments x' et x'' admettent une borne inférieure $x' \cap x''$, appelée leur *intersection*.

Soit $\mathcal{J}^{ps}$ la sous-catégorie de $\widetilde{\Omega}$ formée des applications *sous-inductives* entre classes sous-préinductives, dont les éléments sont donc [2] les triplets $\big((A', <), F, (A, <)\big)$ tels que 2

$$(A, <) \in \mathcal{J}_0^{ps}, \qquad (A', <) \in \mathcal{J}_0^{ps} \qquad \text{et } F \text{ vérifie l'axiome:}$$

Soient $x \in A$, $x' \in A$, $x'' \in A$ tels que $x' < x$ et $x'' < x$. Alors on a:

$$F(x' \frown x'') = F(x') \frown F(x'') .$$

$(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J}^{ps}, \mathcal{J}^{ps} \frown \Omega)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite [1]. $\mathcal{M}$ étant munie de sa structure usuelle de catégorie ordonnée (et même inductive), une sous-structure de $(A, <)$ dans cette catégorie d'homomorphismes est une sous-classe sous-pré-inductive de A, c'est-à-dire une sous-classe A' de A, munie de l'ordre induit par $<$, et telle que les conditions:

$$x' \in A', \quad x'' \in A', \quad x \in A', \quad x' < x \quad \text{et} \quad x'' < x$$

entraînent:

$$x' \frown x'' \in A' .$$

Nous poserons: $\mathcal{J}'^{ps} = \mathcal{J}^{ps} \frown \widetilde{\Omega}'$; on a aussi $\mathcal{J}'^{ps} = \mathcal{J}^{ps} \frown \widetilde{\Omega}'_1$; en effet, si $((A', <), F, (A, <)) \in \mathcal{J}'^{ps}$ et si on a: $x' < x$, $x'' < x$ et $F(x') = F(x'')$, alors $F(x' \frown x'') = F(x') = F(x'')$, d'où $x' \frown x'' = x' = x''$ [2].

Définition 7. Une catégorie $\mathcal{J}^{ps}(\mathcal{G}'^{ps}, \mathcal{G}^{ps})$-structurée sera appelée *catégorie sous-préinductive.*

Une catégorie sous-préinductive est aussi s-ordonnée.

Théorème 4. *Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit une catégorie sous-préinductive, il faut et il suffit que soient vérifiés les axiomes suivants:*

(1) $\mathcal{C}^{\cdot}$ *est une catégorie,* $(\mathcal{C}, <)$ *est une classe sous-préinductive et les axiomes* (O_2) *et* (O_3) *sont vérifiés.*

(I^{ps}) *Les conditions:* $f' < f$ *et* $f'' < f$ *entraînent:*

$$\alpha(f' \frown f'') = \alpha(f') \frown \alpha(f'') \quad \text{et} \quad \beta(f' \frown f'') = \beta(f') \frown \beta(f'') .$$

Démonstration. Les conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. Soient $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$, $e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ et $e'' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ tels que $e' < e$ et $e'' < e$. En vertu de (I^{ps}), on a:

$$\alpha(e' \frown e'') = \alpha(e') \frown \alpha(e'') = e' \frown e'' \in \mathcal{C}_0^{\cdot} .$$

Donc $\mathcal{C}_0^{\cdot}$ est une sous-classe sous-préinductive de $(\mathcal{C}, <)$. Soit $\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$ la classe des couples (g, f) composables. Les conditions:

$$(g, f) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}, \quad (g', f') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}, \quad (g'', f'') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot},$$
$$(g', f') < (g, f) \quad \text{et} \quad (g'', f'') < (g, f)$$

dans la classe sous-préinductive produit $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, <)$ entraînent:

$$g' < g, \quad g'' < g, \quad f' < f \quad \text{et} \quad f'' < f .$$

Par suite de (I^{ps}), il en résulte:

$$\alpha(f' \frown f'') = \alpha(f') \frown \alpha(f''); \quad \beta(g' \frown g'') = \beta(g') \frown \beta(g'') ;$$
$$\alpha(g' \frown g'') = \alpha(g') \frown \alpha(g'') = \beta(f') \frown \beta(f'') = \beta(f' \frown f''),$$

d'où $(g' \cap g'', f' \cap f'') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$. Ainsi $\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$ est une sous-classe sous-préinductive de $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, <)$. En vertu de (O_2), on a:

$$k = (g' \cap g'') \cdot (f' \cap f'') < g' \cdot f' \cap g'' \cdot f'' = k' ;$$

$$g' \cdot f' < g \cdot f \quad \text{et} \quad g'' \cdot f'' < g \cdot f ,$$

d'où

$$\alpha(k') = \alpha(f') \cap \alpha(f'') \quad \text{et} \quad \beta(k') = \beta(g') \cap \beta(g'') .$$

Puisque $\alpha(k) = \alpha(k')$ et $\beta(k) = \beta(k')$, on trouve $k = k'$, on utilisant l'axiome (O_3). Ceci prouve que l'application:

$$\varkappa \colon (g, f) \to g \cdot f$$

est une application sous-inductive de $(\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}, <)$ dans $(\mathcal{C}, <)$. Par conséquent, $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie sous-préinductive.

PROPOSITION 10. *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie sous-préinductive; soient $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ et $e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$. Si e et e' admettent une intersection $e \cap e'$ dans $\mathcal{C}$, alors on a $e \cap e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$.*

Démonstration. Posons $h = e \cap e'$. On a $\alpha(h) < e \cap e' = h$ et $\beta(h) < h$. Les conditions:

$$u \in \mathcal{C}_0^{\cdot}, \quad u < e \quad \text{et} \quad u < e'$$

entraînent:

$$u < \alpha(h) \quad \text{et} \quad u < \beta(h) .$$

Par suite e et e' admettent $\alpha(h)$ et $\beta(h)$ pour intersection dans $\mathcal{C}_0^{\cdot}$; il en résulte: $\alpha(h) = \beta(h)$ et, en utilisant l'axiome (O_3):

$$h = \alpha(h) \in \mathcal{C}_0 .$$

DÉFINITION 8. Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie sous-préinductive. Soient $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$. Soit $\langle g, f \rangle$ la classe des couples (g', f') tels que $g' < g$, $f' < f$, et que $g' \cdot f'$ soit défini. Si la classe $\varkappa(\langle g, f \rangle)$ des composés $g' \cdot f'$, où $(g', f') \in \langle g, f \rangle$, admet un plus grand élément, nous le noterons gf et l'appellerons *pseudo-produit de g et f.*

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie sous-préinductive. Le pseudo-produit a les propriétés suivantes:

(i) Soient $g_1 < g$ et $f_1 < f$. Si $g_1 f_1$ et gf sont définis, on a $g_1 f_1 < gf$.

(ii) Si gf est défini, on a $\alpha(gf) < \alpha(f)$ et $\beta(gf) < \beta(g)$.

(iii) Soient $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$, $E \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ et $e < E$. Si Ee (resp. eE) est défini, on a:

$$\alpha(Ee) = e \quad (\text{resp. } \beta(eE) = e) .$$

PROPOSITION 11. *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie sous-préinductive. Soient $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$. Si la classe $\varkappa(\langle g, f \rangle)$ est majorée dans $\mathcal{C}$ et s'il existe $(g', f') \in \langle g, f \rangle$ tel que $\beta(g') = \beta(g)$ et $\alpha(f') = \alpha(f)$, alors $g' \cdot f' = gf$.*

Démonstration. Soit $(g'', f'') \in \langle g, f \rangle$. Comme $g' \cdot f'$ et $g'' \cdot f''$ sont majorés dans $\mathcal{C}$, l'intersection:

$$k = g' \cdot f' \cap g'' \cdot f''$$

est définie et, en vertu de l'axiome (I^{ps}), on a:

$$\alpha(k) = \alpha(f') \cap \alpha(f'') = \alpha(f'') < \alpha(f)$$

et

$$\beta(k) = \beta(g') \cap \beta(g'') = \beta(g'') < \beta(g) .$$

Par suite

$$g'' \cdot f'' = k < g' \cdot f' ,$$

d'où $g' \cdot f' = gf$.

Corollaire 1. *Soit $f \in \mathcal{C}$; si $e \precsim \alpha(f)$ (dans $(\mathcal{C}, \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \mathcal{C})$), alors fe est défini et on a $\alpha(fe) = e$ et $\beta(fe) = \beta(f)$. Si $f' \precsim f$ on a:*

$$f' = \beta(f')\big(f\alpha(f')\big) .$$

Démonstration. La classe $\varkappa(\langle f, e \rangle)$ est majorée par f et $\langle f, e \rangle$ contient $(f, \alpha(f) \succsim e)$. Donc $f \cdot \big(\alpha(f) \succsim e\big) = fe$. Supposons $f' \precsim f$; alors on a

$$f\alpha(f') = f \cdot \big(\alpha(f) \succsim \alpha(f')\big) .$$

Comme la classe $\varkappa\big(\langle \beta(f'), f\alpha(f') \rangle\big)$ est majorée par f et que $\langle \beta(f'), f\alpha(f') \rangle$ contient $\big(\beta(f'), f'\big)$, on trouve: $f' = \beta(f')\big(f\alpha(f')\big)$.

Corollaire 2. *Soient $e \in \mathcal{C}_0$ et $E \in \mathcal{C}_0$. On a: $e \precsim E$ si, et seulement si, $e < E$, Ee est défini et $\beta(Ee) = E$. La relation $e \precsim E$ entraîne $Ee = E \succsim e$.*

En effet, si $e < E$, si Ee est défini et si $\beta(Ee) = E$, on a: $Ee = E \succsim e$ puisque $e = \alpha(Ee)$. Inversement si $E \succsim e \in \mathcal{C}_{\precsim}$, on a $E \succsim e = Ee$ en vertu du corollaire 1.

Corollaire 3. *Si $(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, h_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes, la condition $s \precsim_p S$ entraîne: $p(S \succsim_p s) = p(S)p(s)$; la condition $h' \precsim_p h$ en-*
1 *traîne: $p(h') = p\big(\beta(h')\big)p(h)p\big(\alpha(h')\big)$.*

Soit $\mathcal{J}_0^s$ la sous-classe de $\mathcal{J}_0^{ps}$ formée des classes sous-inductives, c'est-à-dire [2] des classes ordonnées $(A, <) \in \widetilde{\Omega}_0$ dans lesquelles est vérifié l'axiome suivant:

Toute sous-classe A' de A majorée dans $(A, <)$ admet une borne inférieure $\bigcap A'$, appelée son *intersection*.

Si $(A, <)$ est une classe sous-inductive et si A' est une sous-classe de A majorée par $x \in A$, la classe des majorants x' de A' tels que $x' < x$ admet un plus grand élément, appelé sous-agrégat [2] de A' et noté $\overset{x}{\bigcup} A'$.

2 Soit $\mathcal{J}^s$ la sous-catégorie de $\mathcal{J}^{ps}$ formée des applications inductives entre classes sous-inductives, dont les éléments sont [2] les triplets $\big((B, <), F, (A, <)\big) \in \mathcal{J}^{ps}$ tels que:

$$(A, <) \in \mathcal{J}_0^s, \quad (B, <) \in \mathcal{J}_0^s \quad \text{et que } F \text{ vérifie l'axiome:}$$

Les conditions: $A' \subset A$ et A' majoré par x dans $(A, <)$ entraînent:

$$F(\overset{x}{\bigcup} A') = \overset{y}{\bigcup} F(A'), \quad \text{où} \quad y = F(x).$$

$\mathcal{J}^s$ contient comme sous-catégorie pleine la catégorie $\mathcal{J}$ (voir [1a]) des applications inductives entre classes inductives. Pour que $(A, <)$ appartienne à $\mathcal{J}_0$, il faut et il suffit que $(A, <) \in \mathcal{J}^{ps}$ et que, pour toute sous-classe A' de A majorée dans $(A, <)$, tous les sous-agrégats de A' soient égaux; le sous-agrégat unique de A' est noté $\bigcup A'$ et appelé agrégat de A'.

$(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J}^s, \mathcal{J}^s \cap \Omega)$ et $(\mathcal{M}, \omega, \mathcal{J}, \mathcal{J} \cap \Omega)$ sont des catégories d'homomorphismes à produits finis, résolvantes à droite.

Soit $(A', <) \in \mathcal{J}^s$; une sous-structure de $(A, <)$ dans $(\mathfrak{M}, \omega, \mathcal{J}^s, \mathcal{J}^s \cap \Omega)$ 1
est une sous-classe sous-inductive faible de $(A, <)$, c'est-à-dire une sous-classe A' de A, munie de l'ordre induit par $<$ et telle que: Si A'' est une sous-classe de A' majorée par $x' \in A'$, on a: $\overset{x'}{\bigcup} A'' \in A'$.

Nous poserons: $\mathcal{J}'^s = \mathcal{J}^s \cap \tilde{\Omega}'$ et $\mathcal{J}' = \mathcal{J} \cap \tilde{\Omega}'$.

DÉFINITION 9. Une catégorie $\mathcal{J}^s(\mathcal{J}'^s, \mathcal{J}^s)$-structurée sera appelée *catégorie sous-inductive.*

Rappelons [1a] qu'une catégorie $\mathcal{J}(\mathcal{J}', \mathcal{J})$-structurée est une catégorie inductive. Une catégorie inductive est aussi une catégorie sous-inductive. Une catégorie sous-inductive est aussi une catégorie sous-préinductive et par suite une catégorie ordonnée.

THÉORÈME 5. *Pour qu'une catégorie sous-préinductive* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *soit sous-inductive, il faut et il suffit que* $(\mathcal{C}, <)$ *soit une classe sous-inductive et que l'axiome suivant soit vérifié*:

(I^s) *Les conditions* $f_i < f$, *où* $f_i \in \mathcal{C}$, $i \in I$, $f \in \mathcal{C}$, *entraînent*:

$$\alpha(\overset{f}{\bigcup_{i \in I}} f_i) = \overset{\alpha(f)}{\bigcup_{i \in I}} \alpha(f_i) \quad \text{et} \quad \beta(\overset{f}{\bigcup_{i \in I}} f_i) = \overset{\beta(f)}{\bigcup_{i \in I}} \beta(f_i).$$

Démonstration. Les conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. En effet, soient:

$(g_i, f_i) \in \mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot$, $(g, f) \in \mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot$ et $(g_i, f_i) < (g, f)$ dans $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}, <)$,

où $i \in I$. Puisque $g_i < g$ et $f_i < f$ pour tout $i \in I$, on a:

$$\alpha(\overset{g}{\bigcup_{i \in I}} g_i) = \overset{\alpha(g)}{\bigcup_{i \in I}} \alpha(g_i) = \overset{\beta(f)}{\bigcup_{i \in I}} \beta(f_i) = \beta(\overset{f}{\bigcup_{i \in I}} f_i),$$

$$\alpha(\overset{f}{\bigcup_{i \in I}} f_i) = \overset{\alpha(f)}{\bigcup_{i \in I}} \alpha(f_i) \quad \text{et} \quad \beta(\overset{g}{\bigcup_{i \in I}} g_i) = \overset{\beta(g)}{\bigcup_{i \in I}} \beta(g_i).$$

Par suite $(\overset{g}{\bigcup_{i \in I}} g_i, \overset{f}{\bigcup_{i \in I}} f_i) \in \mathcal{C}^{\cdot} \ast \mathcal{C}^{\cdot}$. De plus:

1 $$g_i \cdot f_i < \overset{g}{\bigcup_{i \in I}} g_i \cdot \overset{f}{\bigcup_{i \in I}} f_i = k, \qquad \text{d'où} \qquad k_i = \overset{g \cdot f}{\bigcup_{i \in I}} g_i \cdot f_i < k .$$

Il en résulte: $\alpha(k') = \alpha(k)$ et $\beta(k') = \beta(k)$, donc $k' = k$. Ceci prouve que
2 $((\mathcal{C}, <), \varkappa(\mathcal{C}^{\cdot} \ast \mathcal{C}^{\cdot}, <)) \in \mathcal{J}^s$.

Proposition 12. *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie sous-inductive. Soient $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$. S'il existe $h \in \mathcal{C}$ tel que: $\alpha(g) < h$ et $\beta(f) < h$, alors le pseudo-produit gf est défini.*

Démonstration. Soit G' (resp. F') la classe des éléments g' (resp. f') tels qu'il existe $(g', f') \in \langle g, f \rangle$. Soit $\bar{g}' = \overset{g}{\bigcup} G'$ et $\bar{f}' = \overset{f}{\bigcup} F'$. En utilisant l'axiome (I^s), on obtient:

$$\alpha(\bar{g}') = \overset{\alpha(g)}{\bigcup} \alpha(G') = \overset{h}{\bigcup} \alpha(G') = \overset{\beta(f)}{\bigcup} \beta(F') = \beta(\bar{f}') ;$$

comme $\bar{g}' < g$ et $\bar{f}' < f$, il en résulte:

$$(\bar{g}', \bar{f}') \in \langle g, f \rangle, \qquad \text{donc} \qquad \bar{g}' \cdot \bar{f}' = gf .$$

Corollaire. *Les conditions $f \in \mathcal{C}$, $e < \alpha(f)$ et $e' < \beta(f)$ entraînent que les pseudo-produits $e'f$ et fe sont définis.*

Proposition 13. *Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie sous-inductive complètement régulière à droite, les conditions:*

$$f \in \mathcal{C}, \qquad e \in \mathcal{C}_0^{\cdot} \qquad \text{et} \qquad e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}, \qquad e < \alpha(f) \qquad \textit{et} \qquad e' < \beta(f)$$

entraînent:

$$\alpha(fe) = e \qquad \textit{et} \qquad \beta(e'f) = e' .$$

Démonstration. D'après le corollaire 1 de la proposition 11, on a:

$$\alpha(fe) = e \qquad \text{et} \qquad \beta(fe) = \beta(f) .$$

Soit $e'' = \beta(e'f)$; comme $e'' < e'$, on a:

$$e'e'' < e' \qquad \text{et} \qquad e'f < f, \qquad \text{d'où} \qquad (e'e'', e'f) \in \langle e', f \rangle .$$

Par suite: $(e'e'') \cdot (e'f) < e'f$. Puisque $e'' \lessdot e'$, on obtient: $\beta(e'e'') = e'$. Il en résulte $e' < e''$, donc $e' = e'' = \beta(e'f)$.

En particulier, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie inductive au sens de [4] et complètement régulière à droite, la proposition 13 signifie que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est aussi une catégorie inductive régulière (au sens de [4]).

Appliqués au cas où $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie inductive, les résultats du § 5 redonnent les résultats de [1a], § I.

Soient $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $(\mathcal{H}^{\cdot}, <)$ deux catégories sous-inductives. Soient $\mathcal{H}_{\lessdot}$ et $\mathcal{C}_{\lessdot}$ les sous-catégories de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{C}$ resp. associées aux relations d'ordre (théorème 2). Nous supposerons que $(\mathcal{H}, <)$ est une catégorie ordonnée au-dessus de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ relativement à p et que l'axiome suivant est vérifié:

Soient $\bar{h} \in \mathcal{H}$ et $s \in \mathcal{H}_0$ tels que $s < \beta(\bar{h})$. On a: $p(s\bar{h}) = p(s)p(\bar{h})$.

PROPOSITION 14. *Si* $\bar{h}' \prec \bar{h}$ *dans* $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$, *on a:* $\bar{h}' \prec_p \bar{h}$.

Démonstration. Supposons $s \prec S$ dans $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$. On a:

$$p(S \succ s) \in \mathcal{C}_{\prec}\,.$$

Soit $\bar{g} \in \mathcal{H}$ tel que $\beta(\bar{g}) = S$ et $p(\bar{g}) = p(S \succ s) \cdot g'$, où $g' \in \mathcal{C}$. Comme $(\beta(g'), g') \in \langle p(s), p(\bar{g}) \rangle$, il résulte de la proposition 11 que $g' = p(s)p(\bar{g})$. Par suite $p(s\bar{g}) = g'$. Les relations:

$$\beta(s\bar{g}) < s, \qquad \alpha(s\bar{g}) < \alpha(\bar{g})\,,$$

$$p(\beta(s\bar{g})) = \beta(g') = p(s) \qquad \text{et} \qquad p(\alpha(s\bar{g})) = \alpha(g') = p(\alpha(\bar{g}))$$

entraînent $\beta(s\bar{g}) = s$ et $\alpha(s\bar{g}) = \alpha(\bar{g})$, d'où $\bar{g} = (S \succ s) \cdot s\bar{g}$. On en déduit $s \prec_p S$. Si $\bar{h}' \prec_p \bar{h}$, dans $(\mathcal{H}, \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}, \mathcal{H}, \mathcal{H})$, on obtient, d'après ce qui précède:

$$\alpha(\bar{h}') \prec_p \alpha(\bar{h}), \qquad \beta(\bar{h}') \prec_p \beta(\bar{h})\,.$$

Par conséquent $\bar{h}' \prec_p \bar{h}$, puisque $p(\bar{h}') < p(\bar{h})$.

COROLLAIRE. *Soit* $(\mathcal{H}, \bar{p}, \bar{\mathcal{H}})$ *un foncteur. Si* $\bar{j}$ *est une* $(\mathcal{H}_{\prec}, \bar{p})$*-injection, alors* $\bar{j}$ *est une* $(\mathcal{C}_{\prec}, p\bar{p})$*-injection.*

En effet, on a $\bar{p}(\bar{j}) \in \mathcal{H}_{\prec}$, d'où $\bar{p}(\alpha(\bar{j})) \prec_p \bar{p}(\beta(\bar{j}))$, d'après la proposition 14. Le corollaire résulte alors de la proposition 6.

Remarque. Si $(\mathcal{H}, <)$ est complètement régulière à droite, la condition $\bar{h}' < \bar{h}$ entraîne $\bar{h}' \prec_p \bar{h}$, d'après la proposition 14. Toutefois il existe généralement des sous-homomorphismes $\bar{h}' \prec_p \bar{h}$ qui ne sont pas majorés par $\bar{h}$ dans $(\mathcal{H}, <)$. Il en est ainsi dans la catégorie $\tilde{\mathcal{T}}$ des applications continues entre espaces topologiques, considérée comme catégorie d'homomorphismes au-dessus de la catégorie des applications de classe dans classe, lorsque $\tilde{\mathcal{T}}$ est munie de sa structure usuelle de catégorie inductive ($T' < T$ si, et seulement si, T' est la topologie induite par T sur un ouvert de T). Pour une discussion de cette question, voir [1a], théorèmes 3 et 4, § I.

Bibliographie

[1] a) *Catégories structurées,* Ann. Ecole Normale Supérieure (à l'impression).

b) *Catégories doubles et catégories structurées.* Comptes-Rendus 256 (1963), p. 1198.

c) *Catégorie double des quintettes; applications covariantes,* Comptes-Rendus 256 (1963), p. 1891.

d) *Catégories structurées d'opérateurs*, Comptes-Rendus 256 (1963), p. 2080.

e) *Sous-structures et applications $\mathcal{K}$-covariantes*, Comptes-Rendus 256 (1963), p. 2280.

[2] *Espèces de structures locales, Elargissements de catégories, Séminaire Topologie et Géo. Différentielle* (Ehresmann), Paris, III, 1961.

[3] Grothendieck, *Notes polycopiées.*

[4] *Catégories inductives et pseudo-groupes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. X (1960), p. 307.

Reçu par la Rédaction le 13. 5. 1963

/66/

Structures quotient

par Charles Ehresmann

A Georges de Rham, en hommage amical à l'occasion de son 60e anniversaire

Introduction

Dans la première partie, dont les résultats ont été résumés dans [0], sont d'abord définies et étudiées les notions générales de structure quotient et de sous-structure. La suite est consacrée à l'étude des catégories d'homomorphismes formées des homomorphismes entre classes multiplicatives, entre graphes orientés et entre graphes multiplicatifs. Ceci permet de donner une définition précise des catégories quotient et catégories quotient strict, ainsi que leurs propriétés.

Dans la deuxième partie sont définis et étudiés les classes multiplicatives structurées, les graphes structurés et les graphes multiplicatifs structurés, qui interviennent dans la théorie des catégories structurées. Le dernier paragraphe contient les principaux théorèmes de l'article, concernant les catégories structurées quotient, dont la démonstration utilise tous les résultats précédents.

Ce mémoire est lié aux articles [1] et [2] et reprend les mêmes conventions, en particulier les suivantes:

Une structure de catégorie sur une classe C sera encore désignée par $C^{\cdot}$ (ou simplement par C). Soit $C^{\cdot}$ une catégorie. Le composé de deux éléments g et f de C, s'il est défini, est désigné par $g \cdot f$. Les applications source et but dans C sont notées α et β. La classe des unités de $C^{\cdot}$ (ou une classe d'objets) est représentée par le symbole $C_0^{\cdot}$; le groupoïde des éléments inversibles de $C^{\cdot}$ est noté C_γ.

Soit C une catégorie. Soit $\square C$ la classe des quatuors de C, c'est-à-dire [3] des quadruplets (g', f', f, g), où $g \in C$, $f \in C$, $f' \in C$ et $g' \in C$, tels que les composés $f' \cdot g$ et $g' \cdot f$ soient définis et égaux. Rappelons [2] que $\square C$ est une catégorie double $(\square\square C, \overset{\square}{\underset{\square}{}} C)$ pour les multiplications longitudinale et latérale.

Soit (C, p, H) un foncteur (le mot foncteur signifie toujours foncteur covariant); ce foncteur sera parfois représenté par p seulement. La restriction de p à $C_0^{\cdot}$ est notée p_0. Soit $\square p$ le foncteur de $\square\square H$ vers $\square\square C$ défini par:

$$(\square p)\,(g', f', f, g) = (p(g'), p(f'), p(f), p(g)) \,.$$

La catégorie duale de la catégorie C est notée C^* et considérée comme ayant la même classe support que C. Si (C, p, H) est un foncteur, nous désignons par p^* le foncteur (C^*, p, H^*).

Soit (C, p, H, S) une catégorie d'homomorphismes [3]. Un élément $\bar{h}$ de H est souvent identifié au triplet $(\beta(\bar{h}), p(\bar{h}), \alpha(\bar{h}))$. Rappelons [2] que (C, p, H, S) est saturé au-dessus de C (ou que H est saturé au-dessus de C) si les conditions:

$$h \in C_\gamma, \ s \in H_0 \text{ et } p(s) = \alpha(h)$$

1 assurent l'existence de $\bar{h} \in H$ tel que $\alpha(\bar{h}) = s$ et $p(\bar{h}) = h$. Si S n'est pas explicitement défini, il est sous-entendu que $S = H_\gamma$. Pour simplifier les notations nous remplacerons parfois l'une des lettres du symbole (C, p, H, S) par un point, si aucune confusion n'est possible. Ainsi $(C, p, H, .)$ signifiera (C, p, H, H_γ).

Pour simplifier le texte, nous faisons de plus la convention suivante: Soit (C, p, H) un foncteur; soit H' une sous-catégorie de H; quand aucune confusion n'est possible, nous désignerons par (C, p, H') le foncteur de H' vers C défini par la restriction de p à H'.

Table des matières

I. Structures quotient

1. (K', p)-injections et (K', p)-surjections.

Soient (K, p, H) un foncteur et K' une sous-catégorie de K. Soit p^* le foncteur (K^*, p, H^*).

Définition 1: *On appellera* (K', p)-injection faible (*resp.* (K', p)-injection) *un élément* $j \in H$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) $p(j) \in K'$.
2) *Les conditions:* $\overline{g} \in H$, $\beta(\overline{g}) = \beta(j)$ *et* $p(\overline{g}) = p(j) \cdot g'$ *entraînent l'existence d'un (resp. d'un et d'un seul)* $\overline{g}' \in H$ *tel que* $p(\overline{g}') = g'$ *et* $\overline{g} = j \cdot \overline{g}'$.

On dira que $j^* \in H$ *est une* (K', p)-surjection faible (*resp.* (K', p)-surjection) *si* j^* *est une* (K'^*, p^*)*-injection faible (resp. injection).*

Ainsi $j^* \in H$ est une (K', p)-surjection faible (resp. surjection) si, et seulement si:

1*) $p(j^*) \in K'$;
2*) Les conditions $\overline{g} \in H$, $\alpha(\overline{g}) = \alpha(j^*)$ et $p(\overline{g}) = g' \cdot p(j^*)$ entraînent l'existence (resp. l'existence et l'unicité) de $\overline{g}' \in H$ tel que:

1+ $$p(\overline{g}') = g' \quad \text{et} \quad \overline{g} = \overline{g}' \cdot j^* .$$

Remarque: La notion de (K', p)-injection faible est définie dans [1] sous le nom de (K', p)-injection; comme nous aurons essentiellement à considérer des (K', p)-injections (au sens de la définition 1), il semble préférable de modifier ainsi la terminologie.

Cas particuliers: 1. Si (K, p, H, S) est une catégorie d'homomorphismes, les notions de (K', p)-injection et (K', p)-injection faible sont identiques; en effet, si j est une (K', p)-injection, l'élément $\overline{g}'$ dont l'existence est assurée par la condition 2 est entièrement déterminé par la donnée du triplet $(\alpha(j), g', \alpha(\overline{g}))$, donc unique. 2. Si j est une (K', p)-surjection (resp. une (K', p)-injection) et si $p(j)$ est un épimorphisme (resp. un monomorphisme) dans K, alors j est un épimorphisme (resp. monomorphisme) dans la catégorie H.

Nous désignerons par $H^i(K', p)$ et $H^s(K', p)$ resp. les classes des (K', p)-injections et des (K', p)-surjections. Nous énoncerons les résultats pour les (K', p)-surjections; par dualité on pourra obtenir des propositions analogues pour les (K', p)-injections.

Pour que $j \in H$ soit une (K', p)-surjection, il faut et il suffit que j soit une (K', p)-surjection faible et que les conditions:

$$\overline{g}' \cdot j = \overline{g}'_1 \cdot j \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = p(\overline{g}'_1)$$

entraînent $\overline{g}' = \overline{g}'_1$.

Proposition 1: *$H^s(K', p)$ est une sous-catégorie de H contenant tout élément $f \in H_\gamma$ tel que $p(f) \in K'$.*

Démonstration: Tout $f \in H_\gamma$ tel que $p(f) \in K'$ vérifie la condition 2* pour $j^* = f$. Soit $j \in H^s(K', p)$; on a évidemment $\alpha(j) \in H^s(K', p)$ et $\beta(j) \in H^s(K', p)$. Soit $j' \in H^s(K', p)$ tel que $\alpha(j') = \beta(j)$. D'après la proposition duale de la proposition 1 de [1], $j' \cdot j$ est une surjection faible. Supposons que l'on ait:

$$\overline{g}' \cdot (j' \cdot j) = \overline{g}_1' \cdot (j' \cdot j) \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = p(\overline{g}_1') .$$

Les conditions:

$$(\overline{g}' \cdot j') \cdot j = (\overline{g}_1' \cdot j') \cdot j \quad \text{et} \quad p(\overline{g}' \cdot j') = p(\overline{g}_1' \cdot j')$$

entraînent $\overline{g}' \cdot j' = \overline{g}_1' \cdot j'$, puisque j est une (K', p)-surjection. Les relations:

$$\overline{g}' \cdot j' = \overline{g}_1' \cdot j' \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = p(\overline{g}_1')$$

entraînent alors $\overline{g}' = \overline{g}_1'$; donc $j' \cdot j \in H^s(K', p)$.

Théorème 1: *Soient $j \in H^s(K', p)$ et $j' \in H^s(K', p)$ tels que $\alpha(j) = \alpha(j')$. Soit $f \in K'$ tel que: $f \cdot p(j) = p(j')$. Alors il existe un et un seul $j'' \in H^s(K', p)$ vérifiant les conditions:*

$$p(j'') = f \quad \textit{et} \quad j'' \cdot j = j' .$$

Si f est inversible dans K', j'' est inversible dans H.

Démonstration: Les relations:

$$j \in H^s(K', p) , \quad \alpha(j) = \alpha(j') \quad \text{et} \quad p(j') = f \cdot p(j)$$

entraînent l'existence d'un élément unique j'' tel que:

$$p(j'') = f \quad \text{et} \quad j'' \cdot j = j' .$$

Montrons que j'' est une (K', p)-surjection. Soit $\overline{g} \in H$ tel que

$$\alpha(\overline{g}) = \alpha(j'') = \beta(j) \quad \text{et} \quad p(\overline{g}) = g' \cdot f .$$

Comme $j' \in H^s(K', p)$ et que l'on a:

$$p(\overline{g} \cdot j) = g' \cdot f \cdot p(j) = g' \cdot p(j') ,$$

il existe un et un seul $\overline{g}' \in H$ pour lequel:

$$p(\overline{g}') = g' \quad \text{et} \quad \overline{g}' \cdot j' = \overline{g} \cdot j = (\overline{g}' \cdot j'') \cdot j .$$

Comme $p(\overline{g}' \cdot j'') = p(\overline{g})$, il en résulte $\overline{g}' \cdot j'' = \overline{g}$. Les conditions:

$$\overline{g}' \cdot j'' = \overline{g}_1' \cdot j'' \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = p(\overline{g}_1')$$

entraînent $\overline{g}' \cdot j' = \overline{g}_1' \cdot j'$, d'où $\overline{g}' = \overline{g}_1'$, et par suite $j'' \in H^s(K', p)$. –

Supposons $f \in K'_\gamma$. Il existe aussi $j''_1 \in H^s(K', p)$ tel que:

$$p(j''_1) = f^{-1} \quad \text{et} \quad j''_1 \cdot j' = j .$$

Les relations:

$$(j''_1 \cdot j'') \cdot j = j''_1 \cdot j' = j \quad \text{et} \quad p(j''_1 \cdot j'') = \alpha(f) = p(\beta(j))$$

entraînent: $j''_1 \cdot j'' = \alpha(j'')$. De même on montre $j'' \cdot j''_1 = \beta(j'')$. On en déduit $j'' = (j''_1)^{-1} \in H_\gamma$.

Corollaire: *Les conditions:* $j \in H^s(K', p)$, $j' \in H^s(K', p)$,

$$\alpha(j) = \alpha(j') \quad \text{\it et} \quad p(j) = p(j')$$

entraînent $j' = \gamma \cdot j$, *où* $\gamma \in H_\gamma$.

En effet, d'après le théorème, il existe $j'' \in H_\gamma$ tel que:

$$p(j'') = p(\beta(j)) \quad \text{et} \quad j'' \cdot j = j' .$$

Nous désignerons par U la catégorie longitudinale $\square\square(K; K')$ dont les éléments sont les quatuors [2, 3] $(g', f', f, g) \in \square K$ tels que $f \in K'$ et $f' \in K'$. De même:

$$\bar{U}^s = \square\square(H; H^s(K', p)) \quad \text{et} \quad \bar{U}^i = \square\square(H; H^i(K', p)) .$$

Définition 2: *On dira que* $\bar{h}' \in H$ *est un* (K', p)-homomorphisme quotient (*resp.* sous-homomorphisme) de $\bar{h} \in H$ *s'il existe* $(\bar{h}', j', j, \bar{h}) \in \bar{U}^s$ (*resp.* $(\bar{h}, j', j, \bar{h}') \in \bar{U}^i$); *on écrira alors:*

$$\bar{h}' \overset{(K', p)}{\longrightarrow\!\!<} \bar{h} \quad \text{\it ou} \quad \bar{h}' \longrightarrow\!\!< \bar{h} \quad (\text{\it resp.}\ \bar{h}' \underset{(K', p)}{<} \bar{h} \quad \text{\it ou} \quad \bar{h}' < \bar{h}) .$$

Proposition 2: *Soient* $\bar{h} \in H$, $j \in H^s(K', p)$ *et* $j' \in H^s(K', p)$ *tels que:* $\alpha(\bar{h}) = \alpha(j)$ *et* $\beta(\bar{h}) = \alpha(j')$. *S'il existe:*

$$H = (h', p(j'), p(j), p(\bar{h})) \in U ,$$

alors il existe un et un seul $\bar{H} = (\bar{h}', j', j, \bar{h}) \in \bar{U}^s$ *tel que*

$$\square p(\bar{H}) = H .$$

Si de plus $\bar{h} \in H_\gamma$ *et* $h' \in K_\gamma$, *on a:* $\bar{h}' \in H_\gamma$.

En effet, les conditions $j \in H^s(K', p)$ et $p(j' \cdot \bar{h}) = h' \cdot p(j)$ assurent l'existence et l'unicité de $\bar{h}' \in H$ tel que $\bar{h}' \cdot j = j' \cdot \bar{h}$. – Supposons $\bar{h} \in H_\gamma$ et $h' \in K_\gamma$; on a aussi $(h'^{-1}, p(j), p(j'), p(\bar{h}^{-1})) \in U$; donc il existe $\bar{h}'_1 \in H$ tel
1 que $p(\bar{h}'_1) = h'^{-1}$ et $(\bar{h}'_1, j, j', \bar{h}^{-1}) \in \bar{U}^s$. On en déduit:

$$(\bar{h}' \cdot \bar{h}'_1) \cdot j' = \bar{h}' \cdot j \cdot \bar{h}^{-1} = j' \cdot \bar{h} \cdot \bar{h}^{-1} = j',$$

donc $\bar{h}' \cdot \bar{h}'_1 = \beta(j') = \beta(\bar{h}')$, puisque $j' \in H^s(K', p)$ et $p(\bar{h}' \cdot \bar{h}'_1) = p(\beta(j'))$. De même on obtient $\bar{h}'_1 \cdot \bar{h}' = \alpha(\bar{h}')$; d'où $\bar{h}' = (\bar{h}'_1)^{-1} \in H_\gamma$.

Proposition 3: *Soient* $\overline{h} \in H_\gamma$ *et* $\overline{h}' \in H_\gamma$. *S'il existe* $j \in H^s(K', p)$ *tel que:* $(p(\overline{h}'), f', p(j), p(\overline{h})) \in U$, $\alpha(j) = \alpha(\overline{h})$ *et* $\beta(j) = \alpha(\overline{h}')$, *alors on a:*

$$j' = \overline{h}' \cdot j \cdot \overline{h}^{-1} \in H^s(K', p) \text{ et } \overline{h}' \overset{(K',p)}{\prec} \overline{h} .$$

En effet, d'après la proposition duale de la proposition 3 de [1], j' est une 1
(K', p)-surjection faible. Les conditions:

$$\overline{g}' \in H, \overline{g}_1' \in H, \ \overline{g}' \cdot j' = \overline{g}_1' \cdot j' \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = p(\overline{g}_1')$$

entraînent: $(\overline{g}' \cdot \overline{h}') \cdot j = (\overline{g}_1' \cdot j') \cdot \overline{h} = (\overline{g}_1' \cdot \overline{h}') \cdot j$, d'où $\overline{g}' = \overline{g}_1'$, puisque $j \in H^s(K', p)$ et $\overline{h}' \in H_\gamma$.

Proposition 4: *Soient* $j \in H$ *une* (K', p)*-surjection faible,* $(\overline{h}', j, \overline{f}, \overline{h}) \in \square H$, 2
et $\overline{k} \in H$ *tel que* $\overline{k} \cdot \overline{h} = \alpha(\overline{h})$. *Si* $f = p(\overline{f})$ *est un épimorphisme et s'il existe* $(k', f, p(j), p(\overline{k})) \in U$, *alors* $\overline{f}$ *est une* (K', p)*-surjection faible.*

Démonstration: Puisque f est un épimorphisme, les égalités:

$$k' \cdot p(\overline{h}') \cdot f = k' \cdot p(j \cdot \overline{h}) = f \cdot p(\overline{k}) \cdot p(\overline{h}) = f$$

entraînent

$$k' \cdot p(\overline{h}') = \beta(k') .$$

Les conditions: j est une (K', p)-surjection faible, $\alpha(j) = \alpha(\overline{k})$ et $p(\overline{f} \cdot \overline{k}) = k' \cdot p(j)$ assurent l'existence de $\overline{k}' \in H$ tel que:

$$p(\overline{k}') = k' \quad \text{et} \quad \overline{f} \cdot \overline{k} = \overline{k}' \cdot j .$$

Soit $\overline{g} \in H$ tel que:

$$\alpha(\overline{g}) = \alpha(\overline{f}) \quad \text{et} \quad g = p(\overline{g}) = g' \cdot f .$$

Comme on a:

$$p(\overline{g} \cdot \overline{k}) = g' \cdot f \cdot p(\overline{k}) = g' \cdot k' \cdot p(j) ,$$

il existe un $\overline{g}'' \in H$ tel que $p(\overline{g}'') = g' \cdot k'$ et $\overline{g} \cdot \overline{k} = \overline{g}'' \cdot j$.
Posons: $\overline{g}' = \overline{g}'' \cdot \overline{h}'$. On obtient:

$$p(\overline{g}') = g' \cdot k' \cdot p(\overline{h}') = g'$$

et

$$\overline{g} = \overline{g} \cdot \overline{k} \cdot \overline{h} = \overline{g}'' \cdot j \cdot \overline{h} = \overline{g}'' \cdot \overline{h}' \cdot \overline{f} = \overline{g}' \cdot \overline{f} .$$

Donc $\overline{f}$ est une (K', p)-surjection faible.

Remarque: Même si on suppose de plus dans la proposition 4 que j est une (K', p)-surjection, il n'en résulte pas que $\overline{f}$ soit une surjection (sauf évidemment dans le cas où $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes).

Soient $(H, \overline{p}, L)$ un foncteur et H' une sous-catégorie de H.

Théorème 2 *(transitivité des surjections)*: *Soit* $\bar{j} \in L$ *tel que* $\bar{p}(\bar{j}) \in H^s(K', p)$. *On a* $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$ *si, et seulement si,* $\bar{j} \in L^s(K', p\bar{p})$ et $\bar{p}(\bar{j}) \in H'$.

Démonstration: Supposons $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$. D'après la proposition duale de la proposition 6 de [1], $\bar{j}$ est une $(K', p\bar{p})$-surjection faible. Les conditions: $\bar{h}' \cdot \bar{j} = \bar{h}'_1 \cdot \bar{j}$ et $p\bar{p}(\bar{h}') = p\bar{p}(\bar{h}'_1)$ entraînent $\bar{p}(\bar{h}') = \bar{p}(\bar{h}'_1)$ puisque $\bar{p}(\bar{j}) \in H^s(K', p)$; par suite $\bar{h}'_1 = \bar{h}'$, car $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$. – Inversement supposons $\bar{j} \in L^s(K', p\bar{p})$. Soit $\bar{h} \in L$ tel que $\alpha(\bar{h}) = \alpha(\bar{j})$ et $\bar{p}(\bar{h}) = h' \cdot \bar{p}(\bar{j})$, où $h' \in H$. On a:

$$p\bar{p}(\bar{h}) = p(h') \cdot p\bar{p}(\bar{j})$$

et, comme $\bar{j} \in L^s(K', p\bar{p})$, il existe un et un seul $\bar{h}' \in L$ tel que:

$$\bar{h} = \bar{h}' \cdot \bar{j} \quad \text{et} \quad p\bar{p}(\bar{h}') = p(h') .$$

Des relations: $\bar{p}(\bar{j}) \in H^s(K', p)$, et $\bar{p}(\bar{h}') \cdot \bar{p}(\bar{j}) = \bar{p}(\bar{h}) = h' \cdot \bar{p}(\bar{j})$, il résulte $\bar{p}(\bar{h}') = h'$. Les conditions:

$$\bar{h}'_1 \cdot \bar{j} = \bar{h}' \cdot \bar{j} \quad \text{et} \quad \bar{p}(\bar{h}'_1) = \bar{p}(\bar{h}') = h'$$

1+ entraînent $p\bar{p}(\bar{h}'_1) = p\bar{p}(\bar{h}')$, et par suite $\bar{h}'_1 = \bar{h}'$; donc $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$.

Soient $(K, \varkappa, \bar{K})$ un foncteur, $\varkappa^*(H, p)$ la catégorie induite (voir n° 4 et
2 [3]) de H par $(\varkappa, p)$ et η le foncteur canonique:

$$(g, \bar{g}) \to p(g) = \varkappa(\bar{g}) \quad \text{de} \quad \varkappa^*(H, p) \text{ vers } K.$$

Proposition 5: *Les conditions:* $j \in H^s(K', p)$, $\bar{j} \in \bar{K}^s(K', \varkappa)$ *et* $p(j) = \varkappa(\bar{j})$ *entraînent que* $(j, \bar{j})$ *est une* (K', η)*-surjection.*

Nous verrons des exemples dans lesquels $(j, \bar{j})$ est une (K', η)-surjection sans que j (resp. $\bar{j}$) soit une (K', p) (resp. $(K', \varkappa)$)-surjection.

Remarque: Les conditions $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$ et $\bar{j} \in L^s(H', p\bar{p})$ n'entraînent pas $\bar{p}(\bar{j}) \in H^s(K', p)$.

2. Cas particuliers

I) Sous-structures et structures quotient:

Soit (K, p, H, H_γ) une catégorie d'homomorphismes; soit K' une sous-catégorie de K.

Pour que $j \in H$ soit une (K', p)-surjection, il faut et il suffit que $p(j) \in K'$ et que les conditions:

$$g' \in K \quad \text{et} \quad (S, g' \cdot p(j), \alpha(j)) \in H$$

entraînent:

$$(S, g', \beta(j)) \in H .$$

Proposition 6: *Les conditions:* $j \in H^s(K', p)$, $j' \in H^s(K', p)$, $\alpha(j) = \alpha(j')$ *et* $p(j) = p(j')$ *entraînent* $j = j'$. *Si* $\bar{f} = (s^*, f, s) \in H$, $f \in K'$, *et s'il existe* $\bar{f}' \in H$ *tel que* $\bar{f} \cdot \bar{f}' = s^*$, *alors on a* $\bar{f} \in H^s(K', p)$.

En effet, la première partie de la proposition résulte du théorème 1. Supposons $\bar{g} = (s', g' \cdot f, s) \in H$; posons $\bar{g}' = \bar{g} \cdot \bar{f}'$. On a:

$$p(\bar{g}') = g' \cdot f \cdot f' = g' \quad \text{et} \quad p(\bar{g}' \cdot \bar{f}) = g' \cdot f = p(\bar{g}),$$

d'où $\bar{g} = \bar{g}' \cdot \bar{f}$ et $\bar{f} \in H^s(K', p)$.

Définition 3: *Si* K' *est formé d'épimorphismes, on dira que* S^* *est une* **structure** quotient de S relativement à (K', p) *s'il existe une* (K', p)*-surjection* j *telle que* $\alpha(j) = S$ *et* $\beta(j) = S^*$. *Par dualité, on définit de même la notion de* sous-structure S^* de S relativement à (K', p), *si* K' *est formé de monomorphismes.*

Ainsi S^* est une sous-structure de S s'il existe une (K', p)-injection j telle que $\alpha(j) = S^*$ et $\beta(j) = S$.

Si S^* est une structure quotient (resp. une sous-structure) de S relativement à (K', p), alors S^* est un objet quotient (resp. un sous-objet) [7] de S dans la catégorie H. Mais un objet quotient de S dans H peut ne pas être une structure quotient de S.

Proposition 7: *Soient* $(H, \bar{p}, L)$ *un foncteur et* H' *une sous-catégorie de* H; *les conditions:*

$$\bar{j} \in L^s(K', p\bar{p}) \quad \text{et} \quad \bar{p}(\bar{j}) \in H'$$ 1

entraînent $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$.

En effet, reprenons les notations de la 2e partie de la démonstration du théorème 2; puisque $(K, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes, les éléments h' et $\bar{p}(\bar{h}')$ sont égaux, car ils ont la même image $p\bar{p}(\bar{h}')$, même source $\beta(\bar{p}(\bar{j}))$ et même but $\beta(\bar{p}(\bar{h}))$. La fin de cette démonstration s'applique alors et démontre la proposition 7.

II) C'-projections et C'-éjections:

Soient C une catégorie et C' une sous-catégorie pleine de C. Soit Θ la catégorie formée d'une seule flèche z et de deux unités distinctes $\alpha(z)$ et $\beta(z)$. Soit $\bar{C}'$ la sous-catégorie de C formée des $f \in C$ tels que $f \in C'$ ou $\alpha(f) \notin C'$. Soit Z le foncteur de $\bar{C}'$ vers Θ défini par:

$$\begin{cases} Z(f) = \beta(z) & \text{si} \quad f \in C'\,; \\ Z(f) = \alpha(z) & \text{si} \quad \alpha(f) \notin C'_0 \quad \text{et} \quad \beta(f) \notin C'_0\,; \\ Z(f) = z & \text{si} \quad \alpha(f) \notin C'_0 \quad \text{et} \quad \beta(f) \in C'_0\,. \end{cases}$$

Définition 4: *Si j est une (Θ, Z)-surjection telle que $Z(j) \neq \alpha(z)$, on dira que j est un* C'-projecteur *dans* C *et $\beta(j)$ sera appelé* C'-projection de $\alpha(j)$ dans C. *Si $h' \in C'$ est un (Θ, Z)-homomorphisme quotient de h, on dira que h' est* une C'-projection de h dans C. *Par dualité on définit les* C'-éjecteurs *et* C'-éjections dans C.

Pour que $S \in C'_0$ soit une C'-projection de $S \in C_0$, il faut et il suffit qu'il existe $j \in C$ tel que $\alpha(j) = S$, $\beta(j) = S$, et que les conditions:

$$g \in C, \ \beta(g) \in C' \quad \text{et} \quad \alpha(g) = \alpha(j)$$

assurent l'existence d'un et d'un seul $g' \in C'$ tel que $g = g' \cdot j$.

1+ **Proposition 8:** *Soient C'' une sous-catégorie pleine de C' et j' un C'-projecteur dans C. Si j'' est un C''-projecteur dans C' tel que $j'' \cdot j'$ soit défini, $j'' \cdot j'$ est un C''-projecteur dans C. Si j''_1 est un C''-projecteur dans C tel que $\alpha(j''_1) = \alpha(j')$, il existe un C''-projecteur j'_1 dans C' tel que $j''_1 = j'_1 \cdot j'$.*

Démonstration: Soient j' et j'' deux projecteurs tels que $\alpha(j') = S$, $\beta(j') = \alpha(j'') = S'$ et $\beta(j'') = S''$. Si $g \in C$, $\beta(g) \in C''$ et $\alpha(g) = S$ il existe un et un seul g' tel que $g = g' \cdot j'$ et un et un seul g'' tel que $g' = g'' \cdot j''$, d'où $g = g'' \cdot (j'' \cdot j')$. De plus la relation:

$$g = g'' \cdot (j'' \cdot j') = g''_1 \cdot (j'' \cdot j')$$

entraîne $g'' \cdot j'' = g''_1 \cdot j''$, et par suite $g''_1 = g''$. Ainsi $j'' \cdot j'$ est un C''-projecteur dans C. – Soit j''_1 un C''-projecteur tel que $\alpha(j''_1) = S$ et $\beta(j''_1) = S''_1$. Comme j' est un C'-projecteur, il existe un et un seul j'_1 tel que $j'_1 \cdot j' = j''_1$.
2 Supposons $f \in C'$, $\alpha(f) = S'$ et $\beta(f) \in C''$. Puisque j''_1 est un C''-projecteur, il existe un et un seul f'' tel que $f \cdot j' = f'' \cdot j''_1 = f'' \cdot j'_1 \cdot j'$. Il en résulte $f = f'' \cdot j'_1$, et j'_1 est un C''-projecteur dans C'.

Soit (K, p, H) un foncteur; soit K' une sous-catégorie de K. Soit V la catégorie des quadruplets $(h', j', j, \bar{h}) \in K \times H \times H \times H$ tels que:

$$p(j') \in K', \ p(j) \in K' \quad \text{et} \quad (h', p(j'), p(j), p(\bar{h})) \in \square K,$$

munie de la loi de composition:

$$(h'_1, j'_1, j_1, \bar{h}_1) \cdot (h', j', j, \bar{h}) = (h'_1 \cdot h', j'_1, j, \bar{h}_1 \cdot h)$$

si, et seulement si, $j_1 = j'$.

H s'identifie à la sous-catégorie pleine de V ayant pour unités les quadruplets $(p(s), s, s, s)$, en identifiant $\bar{h} \in H$ avec:

3 $$<\bar{h}> = (p(\bar{h}), \beta(\bar{h}), \alpha(\bar{h}), h).$$

Proposition 9: *$j \in H$ est une (K', p)-surjection si, et seulement si, $J = (p(\beta(j)), \beta(j), j, j)$ est un H-projecteur dans V.*

Démonstration: Supposons $j \in H^s(K', p)$ et soit $(h', s, j, \bar{h}) \in V$; comme $\alpha(\bar{h}) = \alpha(j)$ et $p(\bar{h}) = h' \cdot p(j)$, il existe un et un seul $\bar{h}' \in H$ tel que $p(\bar{h}') = h'$ et $\bar{h} = \bar{h}' \cdot j$; par suite on a:

$$(h', s, \beta(j), \bar{h}') = <\bar{h}'> \text{ et } (h', s, j, \bar{h}) = <\bar{h}'> \cdot J\,,$$

donc J est un H-projecteur dans V. – Inversement soit J un H-projecteur dans V. Les conditions: $\bar{h} \in H$, $\alpha(\bar{h}) = \alpha(j)$ et $p(\bar{h}) = h' \cdot p(j)$ entraînent $(h', \beta(\bar{h}), j, \bar{h}) \in V$; par conséquent il existe un et un seul $\bar{h}' \in H$ tel que $<\bar{h}'> \cdot J = (h', \beta(\bar{h}), j, \bar{h})$. Il en résulte $p(\bar{h}') = h'$ et $\bar{h}' \cdot j = \bar{h}$, d'où $j \in H^s(K', p)$.

Exemples: 1. – Soit U la catégorie formée des applications uniformément continues entre espaces uniformes séparés; soit U' la sous-catégorie pleine de U ayant pour unités les espaces uniformes complets. Tout $E \in U_0$ admet pour U'-projection le complété $\bar{E}$ de E.

2. – Les produits tensoriels et les puissances extérieures d'espaces vectoriels (ou vectoriels topologiques) peuvent être interprétés comme des projections dans des catégories convenables.

3. – Soit $G(I^p)$ la catégorie des foncteurs $\frown$-inductifs entre groupoïdes prélocaux; un élément de $G(I^p)$ est un triplet

$$((S_1^{\cdot}, <), \Phi, (S^{\cdot}, <))\,,$$

tel que $(S_1^{\cdot}, \Phi, S^{\cdot})$ soit un foncteur, que $(S^{\cdot}, <)$ et $(S_1^{\cdot}, <)$ soient des groupoïdes prélocaux [3] et que l'on ait:

$$\Phi(f \frown f') = \Phi(f) \frown \Phi(f') \text{ pour tout } f \in S,\ f' \in S;$$
$$\Phi(\bigcup_{i \in I} f_i) = \bigcup_{i \in I} \Phi(f_i) \qquad \text{si } f_i \in S \text{ et si } \bigcup_{i \in I} f_i \text{ existe.}$$

Soit $G'(I^p)$ la sous-catégorie pleine de $G(I^p)$ ayant pour objets les groupoïdes locaux complets [3]. 1+

Théorème 3: *Tout $(S^{\cdot}, <) \in G(I^p)_0$ admet pour $G'(I^p)$-projection le groupoïde local $(\bar{S}^{\cdot}, <)$ dont les éléments sont les classes complètes de S.*

En effet, d'après le théorème de complétion [3], $\bar{S}^{\cdot}$ est un groupoïde local complet. Soit $\bar{\Psi}$ le foncteur ($\frown$-inductif) canonique de $S^{\cdot}$ dans $\bar{S}^{\cdot}$. Soit Φ un foncteur $\frown$-inductif de $(S^\cdot, <)$ dans un groupoïde local complet $(\Sigma^\cdot, <)$. Soit $F \in \bar{S}$; puisque deux éléments de F sont compatibles et que Φ est compatible avec les intersections finies, la classe $\Phi(F)$ est compatible [3] dans Σ, donc admet un agrégat $\Phi'(F)$. Si $F' \in \bar{S}$, la classe $F \frown F'$ est engendrée par les éléments $f \frown f'$, où $f \in F$ et $f' \in F'$; en utilisant l'axiome de distributivité, on trouve:

$$\Phi'(F) \frown \Phi'(F') = (\smile \Phi(F)) \frown (\smile \Phi(F')) = \smile (\Phi(f) \frown \Phi(f')) =$$
$$= \smile \Phi(f \frown f') = \Phi'(F \frown F').$$

Donc l'application $F \to \Phi'(F)$ définit un foncteur $\frown$-inductif tel que $\Phi = \Phi' \cdot \bar{\Psi}$. Le théorème 3 en résulte.

Soit $G''(I^p)$ la sous-catégorie pleine de $G(I^p)$ ayant pour objets les groupoïdes locaux.

Théorème 4: *Tout* $(S^\cdot, <) \in G(I^p)_0$ *admet pour* $G''(I^p)$*-projection le sous-pseudogroupe faible* $\check{S}^\cdot$ *de* $\bar{S}^\cdot$ *engendré par* S.

En effet, d'après [3], $\check{S}^\cdot$ est un groupoïde local. Soit $\check{\Psi}$ le foncteur $\frown$-inductif canonique de $S^\cdot$ dans $\check{S}^\cdot$. Soit Φ un foncteur $\frown$-inductif de $(S^\cdot, <)$ dans un groupoïde local $(\Sigma^\cdot, <)$. Si $F \in \check{S}$, la classe F est majorée par f dans S; par suite la classe $\Phi(F)$ est majorée par $\Phi(f)$ dans Σ, donc admet un agrégat $\Phi'(F)$ dans Σ. Comme Φ est $\frown$-inductif, l'application: $F \to \Phi'(F)$ définit un foncteur $\frown$-inductif Φ' de $\check{S}^\cdot$ vers $\Sigma^\cdot$ tel que $\Phi = \Phi' \cdot \check{\Psi}$. Le théorème en résulte.

Soit $G'_r(I^p)$ la sous-catégorie pleine de $G(I^p)$ ayant pour objets les groupoïdes locaux relativement complets [3].

Théorème 5: *Tout* $(S^\cdot, <) \in G(I^p)_0$ *admet pour* $G'_r(I^p)$*-projection le sous-groupoïde plein* $\hat{S}^\cdot$ *de* $\bar{S}^\cdot$ *ayant* $S_0^\cdot$ *pour classe de ses unités.*

En effet, d'après la proposition 8 et le théorème 4 il suffit de montrer que la $G''(I^p)$-projection de $(S^\cdot, <)$ admet une $G'_r(I^p)$-projection; nous pouvons donc supposer $(S^\cdot, <)$ local. D'après [3], $\hat{S}^\cdot$ est un groupoïde local relativement complet. Soit $\hat{\Psi}$ le foncteur $\frown$-inductif canonique de $S^\cdot$ dans $\hat{S}^\cdot$. Soit Φ un foncteur $\frown$-inductif de $S^\cdot$ dans un groupoïde local relativement complet $\Sigma^\cdot$. Soit $F \in \hat{S}$; puisque $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont majorés dans $S_0^\cdot$, $\Phi(\alpha(F))$ et $\Phi(\beta(F))$ sont majorés dans Σ; de plus, $\Phi(F)$ est compatible, car Φ est $\frown$-inductif; par suite $\Phi(F)$ engendre une sous-classe relativement complète [3] de Σ et $\Phi(F)$ admet un agrégat $\Phi'(F)$ dans Σ. L'application $F \to \Phi'(F)$ définit un foncteur $\frown$-inductif Φ' et $\Phi = \Phi' \cdot \hat{\Psi}$.

III) Injections et surjections au-dessus d'une catégorie d'applications:

Nous désignerons par M_0 une classe de classes contenant avec une classe M toutes ses sous-classes, avec deux classes, leur classe produit. Soit M la catégorie de toutes les applications (M', f, M), de $M \in \mathsf{M}_0$ dans $M' \in \mathsf{M}_0$. Soit M^i la sous-catégorie de M formée des applications (M, ι, M'), où M' est une sous-classe de M et ι l'injection canonique de M' dans M. 1+

Soit M^s la sous-catégorie de M formée des surjections. Soit $(M', \varphi, M) \in \mathsf{M}^s$; nous appellerons *relation d'équivalence associée* à (M', φ, M) la relation d'équivalence ϱ_φ sur M définie par:

$$m \sim m' \quad \text{si, et seulement si,} \quad \varphi(m) = \varphi(m') .$$

On a évidemment: $(M', \varphi, M) = \gamma \,.\, (M/_{\varrho_\varphi}, \tilde{\varrho}_\varphi, M)$, où $\tilde{\varrho}_\varphi$ est la surjection canonique de M sur la classe quotient M/ϱ_φ et γ, la bijection: $m \bmod \varrho_\varphi \to \varphi(m)$. Soit M^q la sous-classe de M^s formée des surjections canoniques $(M/\varrho, \tilde{\varrho}, M)$, où ϱ est une relation d'équivalence sur M.

Soit M^ϱ la catégorie dont les éléments sont les triplets $\Phi = (\varrho_{\overline{M}}, \varphi, \varrho_M)$, où ϱ_M et $\varrho_{\overline{M}}$ sont des relations d'équivalence sur M et $\overline{M}$ resp. et $\mu(\Phi) = (\overline{M}, \varphi, M) \in \mathsf{M}$ est une application compatible avec ϱ_M et $\varrho_{\overline{M}}$. Soit i_M la relation d'équivalence $x \sim x$ sur M. La catégorie M s'identifie à la sous-catégorie pleine de M^ϱ ayant les relations i_M pour objets. Tout $\varrho_M \in \mathsf{M}^\varrho$ admet M/ϱ pour M-projection dans M^ϱ. De plus $(\mathsf{M}, \mu, \mathsf{M}^\varrho, .)$ est une catégorie d'homomorphismes. 2

Si $(\mathsf{M}, p, \mathsf{H})$ est un foncteur, une (M^s, p)-surjection (resp. une (M^i, p)-injection) sera appelée *p-surjection* (resp. *p-injection*). Si h' est un (M^s, p)-homomorphisme quotient (resp. un (M^i, p)-sous-homomorphisme) de h, on dira que h' est un *p-homomorphisme quotient* (resp. un *p-sous-homomorphisme*) de h et on écrira: 3

$$h' \xrightarrow{p}\!\!< h \quad (\text{resp. } h' \underset{p}{<} h) .$$

La relation: $h' \xrightarrow{p}\!\!< h$ est une relation de préordre dans H, d'après la proposition 1 (voir aussi [2]).

Soit $(\mathsf{M}, p, \mathsf{H}, \mathsf{H}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes; une structure quotient (resp. une sous-structure) S^* de S relativement à (M^s, p) (resp. à (M^i, p)) sera appelée *p-structure quotient* (resp. *p-sous-structure*) de S, ou structure quotient (resp. sous-structure) de S dans $(\mathsf{M}, p, \mathsf{H}, .)$. Une (M^s, p)-surjection j telle que $p(j) \in \mathsf{M}^q$ est uniquement déterminée par la donnée de $\alpha(j)$ et de $\beta(j)$, ou par la donnée de $\alpha(j)$ et de la relation d'équivalence ϱ sur $p(\alpha(j))$ associée à $p(j)$. Toute p-surjection φ est de la forme

$\varphi = \gamma \cdot j$, où $\gamma \in H_\gamma$, $j \in H^s(M^s, p)$ et $p(j) \in M^q$, si H est saturé au-dessus de M.

Définition 5: *Soient $S \in H_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur $p(S)$. Nous dirons que S^* est la* structure quotient de S par ϱ *si on a* $(S^*, \tilde{\varrho}, S) \in H^s(M^s, p)$ *et si $\tilde{\varrho}$ est la surjection canonique de $p(S)$ sur $p(S)/\varrho$; dans ce cas, nous poserons $S^* = S/\varrho$.*

1 Tout $\varrho_M \in M^\varrho$ admet M/ϱ pour structure quotient par ϱ dans $(M, \mu, M^\varrho, .)$. H s'identifie à la sous-catégorie pleine de la catégorie induite $\mu^*(H, p)$ (voir nº 4 et [3]) ayant pour unités les couples $(s, p(s))$. Soient $\tilde{p}$ et $\tilde{\mu}$ les projections canoniques de $\mu^*(H, p)$ vers M^ϱ et H resp.

Proposition 10: *Pour que S/ϱ soit une structure quotient de S par la relation d'équivalence ϱ dans $(M, p, H, .)$, il faut et il suffit que S/ϱ soit une H-projection de (S, ϱ) dans $\mu^*(H, p)$ et que $p(S/\varrho) = p(S)/\varrho$.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 9.

Soient $s_i \in H_0$, $i = 1, 2$. Nous dirons qu'il existe un produit $s_1 \times s_2$ dans H tel que $p(s_1 \times s_2) = p(s_1) \times p(s_2)$, si on a $\overline{p}_i = (s_i, p_i, s_1 \times s_2) \in H$ où p_i désigne la projection canonique de $p(s_1) \times p(s_2)$ sur $p(s_i)$, et si $(s_1 \times s_2;$
2 $p_1, p_2)$ est un produit dans H de s_1 et s_2 (voir [6]). Ces conditions déterminent $s_1 \times s_2$ d'une manière unique (proposition 2, II, [2]).

Théorème 6: *Supposons $(M, p, H, .)$ résolvante à droite* [2] *(resp. saturée au-dessus de M). Soient $s \in H_0$ et $s' \in H_0$ tels qu'il existe des produits $s \times s$ et $s' \times s'$ dans H, pour lesquels $p(s \times s) = p(s) \times p(s)$ et $p(s' \times s') = p(s') \times \times p(s')$. Alors on a $s \underset{p}{<} s'$ si, et seulement si, $s \times s \underset{p}{<} s' \times s'$. Si ϱ est une relation d'équivalence sur $p(s)$ admettant $(p(s'), \tilde{\varrho}, p(s))$ pour surjection canonique associée, et si on a $(s' \times s', \tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho}, s \times s) \in H^s(M^s, p)$, alors $s' = s/\varrho \xrightarrow{p}\!\!< s$.*

Démonstration: La condition $s < s'$ entraîne $s \times s < s' \times s'$ d'après la proposition 3, II, [2]. – Supposons $(M, p, H, .)$ résolvante à droite; le couple
3 $((s, p_2, s \times s), (s, p_1, s \times s))$, où p_i désignent les projections canoniques de $p(s \times s)$ sur $p(s)$, admet un p-noyau s_δ tel que $p(s_\delta) = \Delta =$ diagonale de $p(s \times s)$. De la démonstration du théorème 12, II [2], il résulte que l'on a: $\gamma_\delta = (s_\delta, [\iota, \iota], s) \in H_\gamma$, où $[\iota, \iota](x) = (x, x)$. – Supposons H saturé au-dessus de M; alors il existe

$$\gamma_\delta = (s_\delta, [\iota, \iota], s) \in H_\gamma,$$

et on a:

$$(s \times s, \iota, s_\delta) = (s \times s, [\iota, \iota], s) \cdot \gamma_\delta^{-1} \in H, \ (s_\delta, [\iota, \iota]\, p_1, s \times s) \in H.$$

Comme
$$(s_\delta, [\iota, \iota]\, p_1, s \times s) . (s \times s, \iota, s_\delta) = s_\delta ,$$
la proposition duale de la proposition 6 assure $s_\delta \prec s \times s$. – Soient donc $s_\delta \prec s \times s$ et $s'_\delta \prec s' \times s'$ tels que $p(s_\delta) = \Delta$ et $p(s'_\delta) = \Delta'$. Si on a $s \times s \prec s' \times s'$, les conditions:
$$s_\delta \prec s \times s \prec s' \times s' , \quad s'_\delta \prec s' \times s' \quad \text{et} \quad \Delta \subset \Delta'$$
entraînent $s_\delta \prec s'_\delta$, en utilisant le théorème dual du théorème 1. – Soit ϱ 1
une relation d'équivalence sur $p(s)$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Les relations:
$$s_\delta \prec s \times s, \; s'_\delta \prec s' \times s' \quad \text{et} \quad \tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho}\,(\Delta) \subset \Delta'$$
assurent l'existence de $(s'_\delta, \tilde{\varrho}_\delta, s_\delta) \prec (s' \times s', \tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho}, s \times s)$. On a:
$\bar{k} = \gamma_\delta \cdot (s, p_1, s \times s) \in H,\; \bar{k} \cdot (s \times s, \iota, s_\delta) = s_\delta$ et $\tilde{\varrho}_\delta\, p(\bar{k}) = ([\iota, \iota]\, p'_1)\, (\tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho})$,
d'où, en utilisant la proposition 4, $(s'_\delta, \tilde{\varrho}_\delta, s_\delta) \in H^s(M^s, p)$. Par suite:
$$(s', \tilde{\varrho}, s) = \gamma'^{-1}_\delta \cdot (s'_\delta, \tilde{\varrho}_\delta, s_\delta) \cdot \gamma_\delta \in H^s(M^s, p) \quad \text{et} \quad s' = s/\varrho .$$

Remarque: Avec les notations du théorème 6, la condition $s' \longrightarrow\!\!\!\!< s$ n'entraîne pas $s' \times s' \longrightarrow\!\!\!\!< s \times s$, comme le montre le cas $H = \tilde{T}$. Si on a: 2
$s' \longrightarrow\!\!\!\!< s$ et s'il existe $S \longrightarrow\!\!\!\!< s \times s,\, p(S) = p(s' \times s')$, alors $(s' \times s', \iota, S) \in H$.

Exemples: 1) Soit $\tilde{T}$ la catégorie des applications continues (S', f, S) où S et S' sont des topologies sur des classes $\theta(S)$ et $\theta(S')$ appartenant à M_0 et f une application de $\theta(S)$ dans $\theta(S')$. Soit $(M, \theta, \tilde{T}, T)$ la catégorie d'homomorphismes correspondante, où T est le groupoïde des homéomorphismes appartenant à $\tilde{T}$. Une structure quotient de S dans $(M, \theta, \tilde{T}, T)$ est une topologie quotient de S; une sous-structure de S est une topologie induite par S sur une sous-classe de $\theta(S)$. Pour que j soit une (M, θ)-injection, il faut et il suffit que $\alpha(j)$ soit homéomorphe à la topologie image réciproque de $\beta(j)$ par $\theta(j)$.
2) Soit F la catégorie des foncteurs $(\bar{C}^\cdot, \Phi, C^\cdot)$ tels que:
$$p_F(\bar{C}^\cdot, \Phi, C^\cdot) = (\bar{C}, \Phi, C) \in M .$$
(M, p_F, F, F_γ) est une catégorie d'homomorphismes à produits finis et résolvante à droite [2]. Soit $C^\cdot \in F_0$; une sous-structure de la catégorie $C^\cdot$ est une sous-catégorie de $C^\cdot$ (proposition 9, II, [2]). Une structure quotient de $C^\cdot$ sera appelée *catégorie quotient de* $C^\cdot$, une structure quotient de $C^\cdot$ par la relation d'équivalence ϱ, *catégorie quotient de* $C^\cdot$ *par* ϱ. Nous reviendrons plus loin sur cet exemple (n° 3).

3. Graphes multiplicatifs et catégories quotient

I) Classes multiplicatives:

Définition 6: *On appellera* classe multiplicative $M^{\cdot}$ *le couple formé d'une classe M et d'une loi de composition, partiellement définie sur M. On appellera* homomorphisme de la classe multiplicative $M^{\cdot}$ vers la classe multiplicative $M_1^{\perp}$ *un triplet $(M_1^{\perp}, \Phi, M^{\cdot})$ tel que Φ soit une application de M dans M_1 vérifiant la condition:*
(Q) *Si $g \cdot f$ est défini, alors $\Phi(g) \perp \Phi(f)$ est défini et on a:*

$$\Phi(g) \perp \Phi(f) = \Phi(g \cdot f).$$

Soit N la catégorie dont les éléments sont les homomorphismes entre classes multiplicatives $(M_1^{\perp}, \Phi, M^{\cdot})$ tels que:

$$p_N(M_1^{\perp}, \Phi, M^{\cdot}) = (M_1, \Phi, M) \in M .$$

N contient F comme sous-catégorie.

Si $M^{\cdot} \in N_0$ et si $M_1 \subset M$, on désignera par $M_1^{\cdot}$ la classe multiplicative dont la loi de composition, appelée *loi de composition induite* par $M^{\cdot}$, est définie par:

$(g, f) \to g \cdot f$ si, et seulement si, $g \cdot f$ est défini dans $M^{\cdot}$ et si on a $g \cdot f \in M_1$.

Proposition 11: (M, p_N, N, N_γ) *est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite et saturée au-dessus de M. Pour que $M_1^{\perp}$ soit une p_N-sous-structure de $M^{\cdot} \in N_0$, il faut et il suffit que l'on ait: $M_1 \subset M$ et $M_1^{\perp} = M_1^{\cdot}$.*

1 En effet, la première partie résulte des définitions. Si $M \subset M$, on a évidemment $M_1^{\cdot} < M^{\cdot}$. Inversement si $M_1^{\perp} < M^{\cdot}$, on a aussi $M_1^{\cdot} < M^{\cdot}$, donc $M_1^{\perp} = M_1^{\cdot}$ en vertu de la proposition 6.

Définition 7: *Soit $M^{\cdot} \in N_0$; nous dirons que ϱ est une relation d'équivalence compatible sur $M^{\cdot}$ si ϱ est une relation d'équivalence sur M telle que les conditions:*

$$g \cdot f \text{ et } g' \cdot f' \text{ sont définis; on a } f \sim f' \text{ et } g \sim g'$$

entraînent:

$$g \cdot f \sim g' \cdot f' .$$

Si ϱ est une relation d'équivalence compatible sur $M^{\cdot}$, la classe M/ϱ des classes d'équivalence modulo ϱ peut être munie de la loi de composition, appelée *loi de composition quotient*, définie par:

$$(g \bmod \varrho , f \bmod \varrho) \to (g' \cdot f') \bmod \varrho$$

si, et seulement si, il existe $g' \sim g$ et $f' \sim f$ tels que $g' \cdot f'$ soit défini. Nous désignerons par $M^{\cdot}/\varrho$ la classe multiplicative $(M/\varrho)^{\cdot}$.

Proposition 12: *Soient $M^{\cdot} \in \mathsf{N}_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur M. Pour que $M^{\cdot}$ admette $(M/\varrho)^{\perp}$ pour p_{N}-structure quotient par ϱ, il faut et il suffit que ϱ soit compatible sur $M^{\cdot}$ et que $(M/\varrho)^{\perp} = M^{\cdot}/\varrho$.*

En effet, les conditions sont évidemment suffisantes. Inversement si $(M/\varrho)^{\perp}$ est une p_{N}-structure quotient de $M^{\cdot}$, comme $M^{\cdot}/\varrho$ est aussi une p_{N}-structure quotient de $M^{\cdot}$, il résulte de la proposition 6 que l'on a $(M/\varrho)^{\perp} = M^{\cdot}/\varrho$.

Corollaire: *Pour que $(M_1^{\perp}, \Phi, M^{\cdot}) = \overline{\Phi}$ soit une p_{N}-surjection, il faut et il suffit que $\Phi(M) = M_1$ et que l'on ait*

$$\overline{\Phi} = \bar{\gamma} \cdot (M^{\cdot}/\varrho_{\Phi},\ \tilde{\varrho}_{\Phi},\ M^{\cdot}) \quad \textit{avec} \quad \bar{\gamma} \in \mathsf{N}_{\gamma},$$

en désignant par ϱ_{Φ} la relation d'équivalence associée à Φ.

Remarque: Soient $M^{\cdot} \in \mathsf{N}_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur M. Soit $\bar{\varrho}$ la relation d'équivalence sur M, intersection des relations d'équivalence ϱ' compatibles sur $M^{\cdot}$ et telles que $f \sim f' \bmod \varrho$ entraîne $f \sim f' \bmod \varrho'$. Alors $M^{\cdot}/\bar{\varrho}$ peut être appelée *classe multiplicative* quotient de $M^{\cdot}$ par ϱ.

II) Graphes orientés:

Soit $[G] = (G, \beta, \alpha)$ un graphe orienté; rappelons [5] qu'alors G est une 1
classe, α et β, deux rétractions de G sur une sous-classe $[G]_0$ de G; un élément de $[G]_0$ est appelé sommet de $[G]$; une flèche de $[G]$ est un élément f de G tel que $f \neq \alpha(f)$; les sommets $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ sont appelés source et but de f resp.

Soit G la catégorie des morphismes de graphes, formée des triplets $\overline{\Phi} = ((G', \beta', \alpha'), \Phi, (G, \beta, \alpha))$ tels que:

(G, β, α) et (G', β', α') sont deux graphes orientés,

$$p_{\mathsf{G}}(\overline{\Phi}) = (G', \Phi, G) \in \mathsf{M},$$

$$\Phi \circ \alpha = \alpha' \circ \Phi \quad \text{et} \quad \Phi \circ \beta = \beta' \circ \Phi.$$

La classe des unités de G sera identifiée à la classe G_0 des graphes orientés $[G]$ tels que $G \in \mathsf{M}_0$.

$(\mathsf{M}, p_{\mathsf{G}}, \mathsf{G}, \mathsf{G}_{\gamma})$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite [2]. Une sous-structure de $[G]$ est un *sous-graphe* de $[G]$, c'est-à-dire un graphe (G', β', α'), où G' est une sous-classe de G contenant avec une flèche sa source et son but, α' et β' étant les restrictions de α et β à G'.

Proposition 13: *Soit G^s la sous-catégorie de G formée des Ψ tels que $p_{\mathsf{G}}(\Psi) \in \mathsf{M}^s$; alors G^s est la catégorie des p_{G}-surjections.*

Corollaire: *Soient* $(G, \beta, \alpha) \in G_0$ *et* ϱ *une relation d'équivalence sur* G. *Pour que* $[G]$ *admette une structure quotient par* ϱ *il faut et il suffit que* ϱ *soit compatible avec* α *et* β, *c'est-à-dire que* $f \sim f'$ *entraîne* $\alpha(f) \sim \alpha(f')$ *et* $\beta(f) \sim \sim \beta(f')$.

Si $C^\cdot$ est une catégorie, le triplet (C, β, α) est un graphe orienté, noté $[C^\cdot]$. Soit p_{GF} l'application:

$$(\bar{C}^\cdot, \varphi, C^\cdot) \to ((\bar{C}, \beta, \alpha), \varphi, (C, \beta, \alpha))$$

de F dans G; (G, p_{GF}, F, F_γ) est une catégorie d'homomorphismes.

Proposition 14: $\bar{C}^\cdot \in F_0$ *est une structure quotient de* $C^\cdot$ *relativement à* (G^s, p_{GF}) *si, et seulement si,* $\bar{C}^\cdot$ *est une catégorie quotient de* $C^\cdot$.

Ceci résulte du théorème 2 et de la proposition 13.

Soit L la catégorie réunion de $F \cup G$ avec la classe des triplets $(C^\cdot, \Phi, [G])$ tels que $((C, \beta, \alpha), \Phi, [G]) \in G$, la loi de composition étant définie par:

$$\begin{cases} (\bar{C}^\cdot, \Phi', C^\cdot) \cdot (C^\cdot, \Phi, C_1^\cdot) = (\bar{C}^\cdot, \Phi'\Phi, C_1^\cdot) \ ; \\ (\bar{C}^\cdot, \Phi', C^\cdot) \cdot (C^\cdot, \Phi, [G]) = (\bar{C}^\cdot, \Phi'\Phi, [G]) \ ; \\ (\bar{C}^\cdot, \Phi', [G]) \cdot ([G], \Phi, [G_1]) = (\bar{C}^\cdot, \Phi'\Phi, [G_1]) \ ; \\ ([\bar{G}], \Phi', [G]) \cdot ([G], \Phi, [G_1]) = ([\bar{G}], \Phi'\Phi, [G_1]) \, . \end{cases}$$

F est une sous-catégorie pleine de L.

1 **Proposition 15:** *Il existe un foncteur naturalisé* (L, λ) *dans* L *tel que pour tout* $\bar{\Phi} \in L$, $L(\bar{\Phi})$ *soit une* F*-projection de* $\bar{\Phi}$ *dans* L *et que, pour tout* $[G] \in G_0$, $L([G])$ *soit la catégorie libre* $L[G]$ *des chemins de* $[G]$.

Démonstration: Rappelons la construction de la catégorie libre $L[G]$ des chemins de $[G]$ (voir [4]): $L[G]$ a pour éléments les sommets de $[G]$ et les chemins de $[G]$, c'est-à-dire les suites finies $(f_n, \ldots, f_1)$, où $f_i \in G$, $f_i \notin [G]_0$ et $\alpha(f_{i+1}) = \beta(f_i)$ pour tout $i < n$. La loi de composition est définie par:

$$\begin{cases} (g_m, \ldots, g_1) \cdot (f_n, \ldots, f_1) = (g_m, \ldots, g_1, f_n, \ldots, f_1) & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{si, et seulement si, } \alpha(g_1) = \beta(f_n) \ ; \\ (f_n, \ldots, f_1) \cdot e = (f_n, \ldots, f_1) \ \text{si, et seulement si, } e = \alpha(f_1) \\ e' \cdot (f_n, \ldots, f_1) = (f_n, \ldots, f_1) \ \text{si, et seulement si, } e' = \beta(f_n) \\ e \cdot e' = e \qquad \text{si, et seulement si, } e' = e \in [G]_0 \, . \end{cases}$$

On a: $\lambda([G]) = (L[G], \iota, [G]) \in L$. Soit $\bar{\Phi} = (C^\cdot, \Phi, [G]) \in L$; alors

$$\bar{\Phi} = (C^\cdot, L(\Phi), L[G]) \cdot \lambda([G]) \, ,$$

où $L(\Phi)$ désigne l'application définie par:

$$L(\Phi)\,(e) = \Phi(e) \quad \text{si} \quad e \in [G]_0\,;$$

et
$$L(\Phi)\,(f_n, \ldots, f_1) = \Phi(f_n) \cdot \ldots \cdot \Phi(f_1)\,.$$

Donc $\lambda([G])$ est un F-projecteur dans L et $L(\overline{\Phi}) = (\mathsf{C}^{\cdot}, L(\Phi), L[G])$ est une F-projection de $\overline{\Phi}$. D'après la proposition 2, il existe une et une seule F-projection $L(\overline{\Phi}_1)$ de $\overline{\Phi}_1 = ([\overline{G}], \Phi_1, [G]) \in \mathsf{G}$ de la forme $(L[\overline{G}], L(\Phi_1), L[G])$; l'application $L(\Phi_1)$ associe à $(f_n, \ldots, f_1)$ le chemin $(\Phi_1(f_n), \ldots, \Phi_1(f_1))$. On définit ainsi un foncteur L de L vers F en posant de plus $L(\overline{\Phi}_2) = \Phi_2$, si $\overline{\Phi}_2 \in \mathsf{F}$; le foncteur L est naturalisé [4] par l'application λ: 1

$$[G] \to \lambda([G]) \quad \text{et} \quad \mathsf{C}^{\cdot} \to Id_{\mathsf{C}} = \text{foncteur identité de } \mathsf{C}^{\cdot}\,.$$

Corollaire 1: *Si $(\mathsf{C}^{\cdot}, \Phi, L[G])$ est une p_{F}-surjection, $(\mathsf{C}^{\cdot}, \Phi\,\iota, [G])$ est une $p_{\mathsf{F}}L$-surjection.*

Ceci résulte du théorème 2, puisque $(L[G], \iota, [G]) \in \mathsf{L}$ est une (F, L)-surjection.

Corollaire 2: *Soient $\mathsf{C}_i^{\cdot}$ une catégorie et B_i un sous-graphe de $[\mathsf{C}_i^{\cdot}]$ tel que $\mathsf{C}_i^{\cdot}$ soit la sous-catégorie de $C_i^{\cdot}$ engendrée par B_i, où $i = 1, 2$. Tout foncteur $\overline{\Phi} = (\mathsf{C}_2^{\cdot}, \Phi, \mathsf{C}_1^{\cdot})$ pour lequel $\Phi(\mathsf{B}_1) \subset \mathsf{B}_2$ est un foncteur quotient de $L(\overline{\Psi})$, où $\overline{\Psi} = ([\mathsf{B}_2], \Phi\,\iota, [\mathsf{B}_1])$.* 2

En effet, posons: $j_i = (\mathsf{C}_i^{\cdot}, \iota, [\mathsf{B}_i])$; on a $L(j_i) \in \mathsf{L}$. Comme la restriction de $L(j_i)$ à $L[\mathsf{B}_i]_0$ est une bijection sur $(\mathsf{C}_i^{\cdot})_0$, il résulte de la proposition 23 (voir aussi [3]) que $\mathsf{C}_i^{\cdot}$ est une catégorie quotient de $L[\mathsf{B}_i]$. – Le quatuor $(j_2, \overline{\Phi}, \overline{\Psi}, j_1)$ étant appliqué par le foncteur $\square L$ sur le quatuor $(L(j_2), \overline{\Phi}, L(\overline{\Psi}), L(j_1))$, où $L(j_i)$ est une p_{F}-surjection, on a $\overline{\Phi} \prec L(\overline{\Psi})$. 3

Soit $[G] \in \mathsf{G}_0$; supposons donnée une relation ϱ sur la catégorie libre $L[G]$. Soit $\bar{\varrho}$ la relation d'équivalence sur $L[G]$ intersection des relations d'équivalence ϱ' compatibles avec les applications source et but et la loi de composition de $L[G]$ et telles que si $(f', f) \in \varrho$, alors $f' \sim f$ modulo ϱ'.

Définition 8: *Avec les notations précédentes, si $L[G]$ admet une catégorie quotient $\mathsf{C}^{\cdot}$ par $\bar{\varrho}$, nous dirons que $\mathsf{C}^{\cdot}$ est la catégorie engendrée par le système de générateurs $[G]$ et la relation ϱ (ou les relations élémentaires $(\varrho_i)_{i \in I}$, où ϱ_i est un couple (f_i, f_i') et ϱ la classe des couples (f_i, f_i'), $i \in I$).*

En particulier, si ϱ vérifie la condition: $(e, e') \in \varrho$, $e \in [G]_0$ et $e' \in [G]_0$ entraînent $e = e'$, alors la classe d'équivalence e modulo $\bar{\varrho}$ est réduite à e pour tout $e \in [G]_0$; par suite il existe une catégorie quotient de $L[G]$ par $\bar{\varrho}$, qui admet $[G]_0$ pour classe d'objets. 4¶

Applications: 1. – Groupoïdes libres:

Soit L' la sous-catégorie pleine de L dont les unités sont les graphes orientés et les groupoïdes. Soit $F' = F \cap L'$.

Proposition 16: *Tout graphe orienté* $[G]$ *admet pour* F'*-projection le groupoïde libre* $\Gamma[G]$.

1

Démonstration: Soit γ une bijection de $G - [G]_0$ sur une classe G' telle que $G \cap G' = \varnothing$. Soit $(\tilde{G}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ le graphe orienté dans lequel on a:

$$\tilde{G} = G \cup G'; \; \tilde{\alpha}(f) = \alpha(f), \; \tilde{\beta}(f) = \beta(f), \; \tilde{\alpha}(\gamma(f)) = \beta(f) \text{ et } \tilde{\beta}(\gamma(f)) = \alpha(f)$$

pour tout $f \in G$. Soit ϱ_1 la relation sur $L[\tilde{G}]$ définie par:

$$(\gamma(f) \cdot f, \; \alpha(f)) \in \varrho_1 \text{ et } (f \cdot \gamma(f), \; \beta(f)) \in \varrho_1$$

pour tout $f \in G$. Il existe une catégorie $\Gamma[G]$ quotient de $L[\tilde{G}]$ par ϱ, engendrée par le système de générateurs $[\tilde{G}]$ et par la relation ϱ_1. L'élément $\tilde{\varrho}(f) = f \bmod \varrho$ de $\Gamma[G]$ admet pour inverse $\tilde{\varrho}(\gamma(f))$. Par suite $\Gamma[G]$ est un groupoïde, appelé [5] groupoïde libre sur $[G]$. On a: $(\Gamma[G], \tilde{\varrho}\,\iota, [G]) = \Psi \in L'$. Tout élément $\Phi = (S^{\cdot}, \varphi, [G])$ de L' se prolonge d'une manière unique en $\tilde{\Phi} = (S^{\cdot}, \tilde{\varphi}, [\tilde{G}]) \in L'$, en posant:

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f) \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(\gamma(f)) = (\varphi(f))^{-1}$$

pour tout $f \in G$. D'après la proposition 15, on a:

$$\tilde{\Phi} = L(\tilde{\Phi}) \cdot (L[\tilde{G}], \iota, [\tilde{G}]).$$

Par ailleurs, la relation: $(w, w') \in \varrho_1$ entraîne:

$$p_F(L(\tilde{\Phi}))\,(w) = \tilde{\varphi}(w) = \tilde{\varphi}(w') = p_F(L(\tilde{\Phi}))\,(w');$$

donc il existe une application unique $\tilde{\varphi}'$ telle que:

$$p_F(L(\tilde{\Phi})) = \tilde{\varphi}' \circ \tilde{\varrho}.$$

Puisque $\Gamma[G]$ est une catégorie quotient de $L[\tilde{G}]$, on en déduit:

$$\tilde{\Phi}' = (S^{\cdot}, \tilde{\varphi}', \Gamma[G]) \in L' \quad \text{et} \quad \Phi = \tilde{\Phi}' \cdot \Psi.$$

Par conséquent, $\Gamma[G]$ est une F'-projection de $[G]$.

2. – Rappelons les définitions suivantes (voir [3]): Soit $C^{\cdot}$ une catégorie; soit $R(C^{\cdot})$ la classe des éléments réguliers de $C^{\cdot}$ (c'est-à-dire des éléments qui sont
2 à la fois un épimorphisme et un monomorphisme). On dit que $C^{\cdot}$ est *parfaite* si on a $R(C^{\cdot}) = C^{\cdot}_{\gamma}$. On dit que $C^{\cdot}$ *vérifie la condition* (P) si, pour tout $f \in R(C^{\cdot})$ et tout $h \in C$ avec $\beta(f) = \beta(h)$, il existe $(h, f, f', h') \in \square(C^{\cdot}; R(C^{\cdot}))$, l'élément h' étant un épimorphisme si $h \in R(C^{\cdot})$.

On dit que $\bar{C}^\cdot$ est un *perfectionnement* de $C^\cdot$ si $\bar{C}^\cdot$ est une catégorie parfaite, telle que $C^\cdot < \bar{C}^\cdot$ et que, pour tout $\bar{h} \in \bar{C}$, il existe $(\bar{h}, f', f, h) \in \square \bar{C}^\cdot$, avec $f \in C \cap R(\bar{C}^\cdot)$, $f' \in C \cap R(\bar{C}^\cdot)$ et $h \in C$. 1

Soit $\tilde{F}$ la sous-catégorie de F ayant pour éléments toutes les catégories et les foncteurs $(\bar{C}^\cdot, \Phi, C^\cdot)$ tels que $\Phi(R(C^\cdot)) \subset \bar{C}^\cdot_\gamma$. Soit $\tilde{F}^p$ la sous-catégorie 2
pleine de $\tilde{F}$ ayant pour objets les catégories parfaites.

Proposition 17: *Toute catégorie* $C^\cdot \in \tilde{F}_0$ *admet une* $\tilde{F}^p$*-projection* $P[C^\cdot]$ *dans* $\tilde{F}$.

Cette proposition est démontrée dans [5]; $P[C^\cdot]$ est une catégorie quotient de la catégorie libre des chemins du graphe $[\tilde{G}] \cup [C - G_1]$, où G_1 est la classe des éléments réguliers de $C^\cdot$ non inversibles et $[\tilde{G}]$ le graphe construit dans la proposition 16, où $G = G_1 \cup \alpha(G_1) \cup \beta(G_1)$.

Corollaire: *Pour que* $P[C^\cdot]$ *soit un perfectionnement de* $C^\cdot$, *il faut et il suffit que* $C^\cdot$ *vérifie la condition* (P).

Démonstration: Si $P[C^\cdot]$ est un perfectionnement de $C^\cdot$, alors $C^\cdot$ vérifie la condition (P) en vertu du théorème de perfectionnement d'une catégorie (voir [3], p. 73). – Si $C^\cdot$ vérifie (P), $C^\cdot$ admet [3] un perfectionnement $\bar{C}^\cdot$ qui est la catégorie quotient de la catégorie des trios (f', f, h) de $C^\cdot$, tels que $f \in R(C^\cdot)$ et $f' \in R(C^\cdot)$, par la relation d'équivalence ϱ:

$$(f', f, h) \sim (g', g, k) \text{ si, et seulement si, } f \cdot \varphi = g \cdot \psi, \text{ où } \varphi \in R(C^\cdot) \text{ et } \psi \in R(C^\cdot), \text{ entraîne } f' \cdot h \cdot \varphi = g' \cdot k \cdot \psi.$$

Soit $(S^\cdot, \Phi, C^\cdot) \in F$, où $S^\cdot \in \tilde{F}^p$; soit Φ' l'application:

$$(f', f, h) \bmod \varrho \to \Phi(f') \cdot \Phi(h) \cdot \Phi(f)^{-1};$$

on trouve $(S^\cdot, \Phi', \bar{C}^\cdot) \in \tilde{F}^p$. Par suite $\bar{C}^\cdot$ est une $\tilde{F}^p$-projection de $C^\cdot$ dans $\tilde{F}$, c'est-à-dire est équivalente à $P[C^\cdot]$. 3+

III) Graphes multiplicatifs:

Nous allons maintenant construire une sous-catégorie de la catégorie N des homomorphismes entre classes multiplicatives.

Définition 9: *On appellera* graphe multiplicatif *une classe multiplicative* $G^\cdot$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) *Tout* $f \in G$ *admet une et une seule unité à droite* $\alpha(f)$, *appelée source de* f *(resp. à gauche* $\beta(f)$ *appelée but de* f*)*. 4

2) *Si* $g \cdot f$ *est défini, on a:* $\alpha(g) = \beta(f)$, $\alpha(g \cdot f) = \alpha(f)$ *et* $\beta(g \cdot f) = \beta(g)$.

La classe des unités du graphe multiplicatif $G^{\cdot}$ sera notée $G_0^{\cdot}$. Si η est une bijection d'une classe A sur $G_0^{\cdot}$, un élément de A sera appelé *objet* de $G^{\cdot}$ et généralement identifié à $\eta(A)$. Soit $G^{\cdot} * G^{\cdot}$ la classe des couples (g, f) tels que $g \cdot f$ soit défini.

1+

Exemple: Une catégorie est un graphe multiplicatif. Pour qu'un graphe multiplicatif $G^{\cdot}$ soit une catégorie, il faut et il suffit que les axiomes suivants soient vérifiés:

1) Si $h \cdot (g \cdot f)$ et $(h \cdot g) \cdot f$ sont définis, ces composés sont égaux,
2) Si $\alpha(g) = \beta(f)$, alors le composé $g \cdot f$ est défini.

Définition 10: *On appelle* homomorphisme du graphe multiplicatif $G^{\cdot}$ vers le graphe multiplicatif $\overline{G}^{\cdot}$ *un triplet* $(\overline{G}^{\cdot}, \Phi, G^{\cdot})$ *tel que:*

1) $(\overline{G}^{\cdot}, \Phi, G^{\cdot})$ *est un homomorphisme de classes multiplicatives*;
2) *On a:* $\Phi(G_0^{\cdot}) \subset \overline{G}_0^{\cdot}$.

Soit N' la sous-catégorie de N formée des homomorphismes entre graphes multiplicatifs.

Proposition 18: *N' est une sous-catégorie pleine de la catégorie induite $p_G^*(N, p_N)$ de N par (p_G, p_N); F est une sous-catégorie pleine de N'.*

Démonstration: Soit $G^{\cdot} \in N_0'$; le triplet (G, β, α) est un graphe ayant $G_0^{\cdot}$ pour classe de ses sommets. Posons $p_{GN}(G^{\cdot}) = (G, \beta, \alpha) = [G^{\cdot}]$ et

$$p_{GN}(\overline{G}^{\cdot}, \Phi, G^{\cdot}) = ([\overline{G}^{\cdot}], \Phi, [G^{\cdot}]), \text{ si } (\overline{G}^{\cdot}, \Phi, G^{\cdot}) \in N'.$$

2 On a $([\overline{G}^{\cdot}], \Phi, [G^{\cdot}]) \in G$. Soit $f \in G$; comme $f \cdot \alpha(f)$ est défini, le composé
3 $\Phi(f) . \Phi(\alpha(f))$ est aussi défini; puisque $\Phi(\alpha(f)) \in \overline{G}_0^{\cdot}$ et que $\alpha(\Phi(f))$ est unique, on a: $\alpha(\Phi(f)) = \Phi(\alpha(f))$. De même on trouve $\beta(\Phi(f)) = \Phi(\beta(f))$; par suite $p_{GN}(\overline{G}^{\cdot}, \Phi, G^{\cdot}) \in G$. La proposition résulte alors des définitions.

Nous désignerons par p_{GN} le foncteur canonique de N' vers G. Remarquons que p_{GN} admet un foncteur section π tel que $\pi(G, \beta, \alpha)$ soit le graphe multiplicatif $G^{\cdot}$ dans lequel la loi de composition est définie par:

$$f \cdot \alpha(f) = f \quad \text{et} \quad \beta(f) \cdot f = f \text{ pour tout } f \in G.$$

Proposition 19: *Tout $\overline{\Phi} \in N'$ admet une F-projection $\nu(\overline{\Phi})$ dans N' telle que*
4 *$(\nu, \tilde{\nu})$ soit un foncteur naturalisé dans N'* (voir [4]).

Démonstration: Soit $G^{\cdot} \in N_0'$; désignons par $\nu(G^{\cdot})$ la catégorie $L[G^{\cdot}]/\overline{\varrho}$ engendrée par le système de générateurs $[G^{\cdot}]$ et la relation ϱ:

$$((g, f), g \cdot f) \in \varrho \text{ si, et seulement si, } (g, f) \in G^{\cdot} * G^{\cdot}.$$

Posons $\tilde{\nu}(G^\cdot)(f) = f \bmod \bar{\varrho}$, pour tout $f \in G$. On a: $(\nu(G^\cdot), \tilde{\nu}(G^\cdot), G^\cdot) \in \mathsf{N}'$. Soit $\mathsf{C}^\cdot \in \mathsf{F}_0$ et supposons $\bar{\Phi} = (\mathsf{C}^\cdot, \Phi, G^\cdot) \in \mathsf{N}'$. Alors $L(\bar{\Phi}) = (\mathsf{C}^\cdot, L(\Phi), L[G^\cdot]) \in \mathsf{F}$ et, comme $L(\Phi)$ est compatible avec ϱ, il existe Φ' tel que:

$$L(\Phi) = \Phi' \,\tilde{\bar{\varrho}} \quad \text{et} \quad (\mathsf{C}^\cdot, \Phi', \nu(G^\cdot)) \in \mathsf{F}\,.$$

De plus on obtient:

$$\Phi = L(\Phi)\,\iota = \Phi' \,\tilde{\bar{\varrho}}\, \iota = \Phi'\, \tilde{\nu}(G^\cdot)\,,$$

d'où

$$\bar{\Phi} = (\mathsf{C}^\cdot, \Phi', \nu(G^\cdot)) \cdot (\nu(G^\cdot), \tilde{\nu}(G^\cdot), G^\cdot)\,.$$

Donc $\nu(G^\cdot)$ est une F-projection de $G^\cdot$ dans N'. En vertu de la proposition 2, il existe un homomorphisme quotient de $L([\bar{G}^\cdot], \Psi, [G^\cdot])$, noté $\nu(\bar{G}^\cdot, \Psi, G^\cdot) = (\nu(\bar{G}^\cdot), \nu(\Psi), \nu(G^\cdot))$, pour tout $(\bar{G}^\cdot, \Psi, G^\cdot) \in \mathsf{N}'$. On définit ainsi un foncteur ν de N' vers F, qui est naturalisé par l'application $\tilde{\nu}$:

$$G^\cdot \to (\nu(G^\cdot), \tilde{\nu}(G^\cdot), G^\cdot)\,.$$

Soit $(\mathsf{M}, p'_{\mathsf{N}}, \mathsf{N}', \mathsf{N}'_\nu)$ la catégorie d'homomorphismes dans laquelle p'_{N} est la restriction de p_{N} à N'.

Proposition 20: *Pour que $G_1^\perp$ soit une p'_{N}-sous-structure de $G^\cdot \in \mathsf{N}'_0$, il faut et il suffit que $G_1^\perp$ soit une sous-classe multiplicative de $G^\cdot$ et que $p_{\mathsf{GN}}(G_1^\perp)$ soit un sous-graphe de $p_{\mathsf{GN}}(G^\cdot)$.*

Démonstration: Si les conditions sont vérifiées, pour tout $f \in G_1$, on a $\alpha(f) \in G_1$ et $\beta(f) \in G_1$ et f admet $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ pour unités à droite et à gauche dans $G_1^\perp$. Par suite $G_1^\perp$ est un graphe multiplicatif; puisque $G_1^\perp$ est une sous-structure de $G^\cdot$ dans $p_{\mathsf{G}}^*(\mathsf{N}, p_{\mathsf{N}})$ d'après la proposition 5, $G_1^\perp$ est aussi une sous-structure de $G^\cdot$ dans la sous-catégorie pleine N' de $p_{\mathsf{G}}^*(\mathsf{N}, p_{\mathsf{N}})$. – Inversement, soit $G_1^\perp$ une p'_{N}-sous-structure de $G^\cdot$; comme $(G^\cdot, \iota, G_1^\perp) \in \mathsf{N}'$, on a, pour tout $f \in G_1 : \alpha(f) = \iota(\alpha^\perp(f)) \in G_1$; de même $\beta(f) \in G_1$ et $[G_1^\perp]$ est un sous-graphe de $[G^\cdot]$. On en déduit que $G_1^\cdot$ est aussi un graphe multiplicatif, donc une p'_{N}-sous-structure de $G^\cdot$ en vertu du début de la démonstration. L'unicité de la sous-structure de $G^\cdot$ sur G_1 entraîne $G_1^\cdot = G_1^\perp$.

Définition 11: *Soient $G^\cdot \in \mathsf{N}'_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur G; on dira que ϱ est* bicompatible *sur $G^\cdot$ si ϱ est compatible sur la classe multiplicative $G^\cdot$* 1
et compatible avec α et β.

Proposition 21: *Soient $G^\cdot \in \mathsf{N}'_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur G. Pour que $G^\cdot$ admette une p'_{N}-structure quotient $\bar{G}^\perp$ par ϱ, il faut et il suffit que ϱ soit bicompatible sur $G^\cdot$; dans ce cas, on a: $\bar{G}^\perp = G^\cdot/\varrho$.*

Démonstration: Supposons ϱ bicompatible sur $G^\cdot$ et soit $\tilde{\varrho}$ l'application $f \to f \bmod \varrho$ de G sur G/ϱ. Montrons que la classe multiplicative $G^\cdot/\varrho$, qui est la p_N-structure quotient de $G^\cdot$ par ϱ, est un graphe multiplicatif. Soit $f \in G$; puisque $f \cdot \alpha(f)$ est défini, $\tilde{\varrho}(f) \cdot \tilde{\varrho}(\alpha(f))$ est défini et égal à $\tilde{\varrho}(f)$. Si $\tilde{\varrho}(g) \cdot \tilde{\varrho}(\alpha(f))$ est aussi défini, il existe $g' \sim g$ et $h \sim \alpha(f)$ tels que $g' \cdot h$ soit défini; on a alors

$$\beta(h) \sim \alpha(f) \quad \text{et} \quad \alpha(g') = \beta(h).$$

Comme

$$\tilde{\varrho}(g) \cdot \tilde{\varrho}(\alpha(f)) = \tilde{\varrho}(g' \cdot \alpha(g')) = \tilde{\varrho}(g'),$$

$\tilde{\varrho}(\alpha(f))$ est une unité à droite de $\tilde{\varrho}(f)$. Soit $\tilde{\varrho}(k)$ une autre unité de $G^\cdot/\varrho$ telle que $\tilde{\varrho}(f) \cdot \tilde{\varrho}(k)$ soit défini; il existe $f' \sim f$ et $k' \sim k$ tels que $f' \cdot k'$ soit défini; la relation $\alpha(f') = \beta(k')$ entraînant $\beta(k') \sim \alpha(f)$, on a:

$$\tilde{\varrho}(k) = \tilde{\varrho}(\beta(k') \cdot k') = \tilde{\varrho}(\alpha(f)) \cdot \tilde{\varrho}(k) = \tilde{\varrho}(\alpha(f)).$$

Donc $\tilde{\varrho}(\alpha(f))$ est la seule unité à droite de $\tilde{\varrho}(f)$; de même $\tilde{\varrho}(f)$ admet $\tilde{\varrho}(\beta(f))$ pour seule unité à gauche. On en déduit que $G^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif. Par ailleurs $[G^\cdot/\varrho]$ est le graphe quotient de $[G^\cdot]$ par ϱ. Il en résulte que $G^\cdot/\varrho$ est une structure quotient de $G^\cdot$ dans $p_G^*(N, p_N)$ et, N' étant une sous-catégorie pleine de $p_G^*(N, p_N)$, $G^\cdot/\varrho$ est la p'_N-structure quotient de $G^\cdot$ par ϱ. – Inversement supposons que $\bar{G}^\perp$ soit la p'_N-structure quotient de $G^\cdot$ par ϱ. La relation: $(\bar{G}^\perp, \tilde{\varrho}, G^\cdot) \in N'$ signifie que ϱ est bicompatible sur $G^\cdot$ et, d'après le début de la démonstration, $G^\cdot/\varrho$ est une p'_N-structure quotient de $G^\cdot$ par ϱ. On déduit donc de la proposition 6 que $G^\cdot/\varrho = \bar{G}^\perp$.

Corollaire: *$j \in N'$ est une p'_N-surjection si, et seulement si, j est une p_N-surjection et si $p_{GN}(j)$ est une p_G-surjection.*

IV) Catégories quotient et catégories quotient strict

Proposition 22: *Soient $C^\cdot$ une catégorie et ϱ une relation d'équivalence bicompatible sur $C^\cdot$; alors $C^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif; $\nu(C^\cdot/\varrho)$ est une catégorie quotient de $C^\cdot$ si $\tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)$ est une surjection de $C^\cdot/\varrho$ sur $\nu(C^\cdot/\varrho)$.*

Démonstration: D'après la proposition 21, $C^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif quotient de $C^\cdot$ par ϱ et on a $(C^\cdot/\varrho, \tilde{\varrho}, C^\cdot) \in N'$, où $\tilde{\varrho}(f) = f \bmod \varrho$ pour tout $f \in C$. Soit $\nu(C^\cdot/\varrho)$ la F-projection de $C^\cdot/\varrho$, qui existe d'après la proposition 19; on a

$$\bar{\Psi} = (\nu(C^\cdot/\varrho), \tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)\,\tilde{\varrho}, C^\cdot) = \tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho) \cdot (C^\cdot/\varrho, \tilde{\varrho}, C^\cdot) \in F.$$

Soit $\bar{\Phi} = (S^\cdot, \Phi, C^\cdot) \in F$ tel que $\Phi = \Phi'\,\tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)\,\tilde{\varrho}$. Puisque $C^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif quotient de $C^{\cdot}$, on a:

$$\overline{\Phi}' = (S^{\cdot}, \Phi' \tilde{\nu}(C^{\cdot}/\varrho), C^{\cdot}/\varrho) \in N';$$

d'après la proposition 19, il existe $\nu(\overline{\Phi}') \in F$ tel que

$$\overline{\Phi}' = \nu(\overline{\Phi}') \cdot \tilde{\nu}(C^{\cdot}/\varrho) \text{ et par suite } \overline{\Phi} = \overline{\Phi}' \cdot (C^{\cdot}/\varrho, \tilde{\varrho}, C^{\cdot}) = \nu(\overline{\Phi}') \cdot \overline{\Psi}.$$

Si $\tilde{\nu}(C^{\cdot}/\varrho)$ est une surjection, l'égalité $\Phi = p_F(\nu(\overline{\Phi}'))\, \tilde{\nu}(C^{\cdot}/\varrho)\, \tilde{\varrho} = \Phi' \tilde{\nu}(C^{\cdot}/\varrho)\, \tilde{\varrho}$ entraîne $\Phi' = p_F(\nu(\overline{\Phi}'))$, donc $\overline{\Psi}$ est une p_F-surjection. Inversement si $(\nu(C^{\cdot}/\varrho), \tilde{\nu}(C^{\cdot}/\varrho)\tilde{\varrho}, C^{\cdot}) \in F^s(M^s, p_F)$, l'application $\tilde{\nu}(C^{\cdot}/\varrho)$ est évidemment une surjection sur $\nu(C^{\cdot}/\varrho)$.

Remarque: La démonstration précédente prouve que tout foncteur $\overline{\Phi}$ se décompose d'une manière canonique en le produit de deux foncteurs $\nu(\overline{\Phi}') \cdot \overline{\Psi}$, l'application $\nu(\overline{\Phi}')_0$ étant une injection, mais $\overline{\Psi}$ n'est pas une (M, p_F)-surjection, car $p_F(\nu(\overline{\Phi}'))$ et Φ' peuvent être différents. En particulier tout foncteur $(S^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot})$ se décompose d'une manière canonique en le produit de foncteurs $(S^{\cdot}, \Phi_1, \nu(C^{\cdot}/\varrho_\Phi)) \cdot (\nu(C^{\cdot}/\varrho_\Phi), \tilde{\nu}(C^{\cdot}/\varrho_\Phi)\, \tilde{\varrho}_\Phi, C^{\cdot})$, où ϱ_Φ est la relation d'équivalence associée à Φ. 1

Théorème 7: *Soient $C^{\cdot}$ une catégorie et ϱ une relation d'équivalence sur C. Pour que $\overline{C}^{\cdot}$ soit une catégorie quotient de $C^{\cdot}$ par ϱ, il faut et il suffit que ϱ soit bicompatible sur $C^{\cdot}$ et que $\tilde{\nu}(C^{\cdot}/\varrho)$ soit une bijection de $C^{\cdot}/\varrho$ sur $\nu(C^{\cdot}/\varrho)$; dans ce cas $\overline{C}^{\cdot}$ est équivalente à $\nu(C^{\cdot}/\varrho)$.* 2

Démonstration: Si les conditions sont vérifiées, $\nu(C^{\cdot}/\varrho)$ est une catégorie quotient de $C^{\cdot}$ d'après la 2[e] partie de la proposition 22, et la bijection $\tilde{\nu}(C^{\cdot}/\varrho)$ définit sur $C^{\cdot}/\varrho$ une structure de catégorie équivalente à $\nu(C^{\cdot}/\varrho)$; par suite $C^{\cdot}$ 2
admet une catégorie quotient par ϱ. – Inversement supposons que $C^{\cdot}$ admette $\overline{C}^{\cdot}$ pour catégorie quotient par ϱ. Comme $(\overline{C}^{\cdot}, \tilde{\varrho}, C^{\cdot}) \in F$, où $\tilde{\varrho}(f) = f \bmod \varrho$ pour tout $f \in C$, la relation d'équivalence ϱ est bicompatible sur $C^{\cdot}$ et il résulte de la proposition 21 que $C^{\cdot}/\varrho$ est le graphe multiplicatif quotient de $C^{\cdot}$ par ϱ; par conséquent on a $(\overline{C}^{\cdot}, \iota, C^{\cdot}/\varrho) \in N'$. Soient $S^{\cdot} \in F_0$ et $(S^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot}/\varrho) \in N'$. La relation: $(S^{\cdot}, \Phi\tilde{\varrho}, C^{\cdot}) \in F$ entraîne $(S^{\cdot}, \Phi, \overline{C}^{\cdot}) \in F$, puisque $\overline{C}^{\cdot} \longrightarrow\!\!< C^{\cdot}$. Il en résulte:

$$(S^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot}/\varrho) = (S^{\cdot}, \Phi, \overline{C}^{\cdot}) \cdot (\overline{C}^{\cdot}, \iota, C^{\cdot}/\varrho);$$

donc $\overline{C}^{\cdot}$ est une F-projection de $C^{\cdot}/\varrho$ et, en vertu de la proposition 6, $\overline{C}^{\cdot}$ est une catégorie équivalente à $\nu(C^{\cdot}/\varrho)$. 2

Corollaire: *Pour que* $(\bar{C}^{\cdot}, \Psi, C^{\cdot}) \in F$ *soit une* p_F*-surjection, il faut et il suffit*
1 *que* $\Psi(C) = \bar{C}^{\cdot}$ *et que* $\bar{C}$ *soit une* F*-projection de* $C^{\cdot}/\varrho_\Psi$, *où* ϱ_Ψ *est la relation d'équivalence associée à* Ψ.

En effet ϱ_Ψ est bicompatible sur $C^{\cdot}$ et le corollaire résulte du théorème 7.

Si $(\bar{C}^{\cdot}, \Psi, C^{\cdot})$ est une p_F-surjection, il n'en résulte pas que $(\bar{C}^{\cdot}, \Psi, C^{\cdot})$ soit une p'_N-surjection.

Définition 12: *Soient* $C^{\cdot}$ *et* $\bar{C}^{\cdot}$ *deux catégories; on dira que* $\bar{C}^{\cdot}$ *est une* catégorie quotient strict *de* $C^{\cdot}$ *(resp. de* $C^{\cdot}$ *par* ϱ*) si* $\bar{C}^{\cdot}$ *est une catégorie quotient de* $C^{\cdot}$ *(resp. de* $C^{\cdot}$ *par* ϱ*) et si* $\bar{C}^{\cdot}$ *est une* p'_N*-structure quotient de* $C^{\cdot}$.

Proposition 23: *Soient* $C^{\cdot}$ *une catégorie et* ϱ *une relation d'équivalence sur* C. *Pour qu'il existe une catégorie* $\bar{C}^{\cdot}$ *quotient strict de* $C^{\cdot}$ *par* ϱ, *il faut et il suffit que* ϱ *soit compatible sur* $C^{\cdot}$ *et que l'on ait* $(C^{\cdot}/\varrho, \tilde{\varrho}, C^{\cdot}) \in F$, *où* $\tilde{\varrho}(f) = f \bmod \varrho$, *pour tout* $f \in C$. *Dans ce cas, on a* $\bar{C}^{\cdot} = C^{\cdot}/\varrho$.

Démonstration: Soit $\bar{C}^{\cdot}$ une catégorie quotient strict de $C^{\cdot}$ par ϱ. Puisque $\bar{C}^{\cdot}$ est une p'_N-structure quotient de $C^{\cdot}$, d'après la proposition 21 ϱ est bicompatible sur $C^{\cdot}$ et on a $\bar{C}^{\cdot} = C^{\cdot}/\varrho$, donc $(C^{\cdot}/\varrho, \tilde{\varrho}, C^{\cdot}) \in F$. – Inversement si $(C^{\cdot}/\varrho, \tilde{\varrho}, C^{\cdot}) \in F$, alors ϱ est bicompatible sur $C^{\cdot}$ et $C^{\cdot}/\varrho$ est une p'_N-structure quotient de $C^{\cdot}$; puisque $C^{\cdot}/\varrho$ est une catégorie et que F est une sous-catégorie pleine de N', $C^{\cdot}/\varrho$ est une catégorie quotient strict de $C^{\cdot}$.

Corollaire: *Pour qu'une catégorie* $C^{\cdot}$ *admette une catégorie quotient strict par* ϱ, *il faut et il suffit que* ϱ *soit bicompatible sur* $C^{\cdot}$ *et que* $C^{\cdot}/\varrho$ *soit une catégorie.*

Soient $C^{\cdot}$ une catégorie et ϱ une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$. Alors $C^{\cdot}/\varrho$ est un graphe multiplicatif et pour que $C^{\cdot}/\varrho$ soit une catégorie, il faut et il suffit que de plus soient vérifiées les conditions suivantes (voir exemple III):

1) Si $\tilde{\varrho}(h) \cdot (\tilde{\varrho}(g) \cdot \tilde{\varrho}(f))$ et $(\tilde{\varrho}(h) \cdot \tilde{\varrho}(g)) \cdot \tilde{\varrho}(f)$ sont définis, ils sont égaux.

2) Si $\alpha(\tilde{\varrho}(g)) = \beta(\tilde{\varrho}(f))$, alors $\tilde{\varrho}(g) \cdot \tilde{\varrho}(f)$ est défini, c'est-à-dire: si $g \in C$, $f \in C$ et $\alpha(g) \sim \beta(f)$, il existe $g' \sim g$ et $f' \sim f$ tels que $g' \cdot f'$ soit défini.

Par suite on obtient les critères suivants pour que $C^{\cdot}$ admette une catégorie quotient strict:

Proposition 24: *Pour que* $(\bar{C}^{\cdot}, \Psi, C^{\cdot}) \in F$ *soit une* p_F*-surjection, définissant* $\bar{C}^{\cdot}$ *comme catégorie quotient strict de* $C^{\cdot}$, *il faut et il suffit que* $\Psi(C) = \bar{C}$ *et que, si* $\Psi(\alpha(g)) = \Psi(\beta(f))$, *il existe* $g' \in C$ *et* $f' \in C$ *tels que*

$$\Psi(g') = \Psi(g), \ \Psi(f') = \Psi(f) \ \text{ et } \ \alpha(g') = \beta(f').$$

En effet, ces conditions signifient que $C^{\cdot}/\varrho_\Psi$ est une catégorie, où ϱ_Ψ est la relation d'équivalence correspondant à Ψ. (Cette proposition se trouve dans [3].)

Proposition 25: *Si ϱ est une relation d'équivalence bicompatible sur la catégorie $C^{\cdot}$ vérifiant l'une des conditions:*
Si $e \in C_0^{\cdot}$, $f \in C$ et $e \sim \alpha(f)$ (resp. $e \sim \beta(f)$), il existe $f' \sim f$ tel que $e = \alpha(f')$ (resp. $e = \beta(f')$),
alors $C^{\cdot}/\varrho$ est une catégorie quotient strict de $C^{\cdot}$.
Cette proposition est démontrée dans [3].

Corollaire: *Si ϱ est une relation d'équivalence compatible sur la catégorie $C^{\cdot}$ vérifiant la condition:*
Si $f \sim f'$, alors $\alpha(f) = \alpha(f')$ et $\beta(f) = \beta(f')$,
$C^{\cdot}/\varrho$ est une catégorie quotient strict de $C^{\cdot}$.

Exemples: 1) Une catégorie quotient peut ne pas être une catégorie quotient strict comme le montre l'exemple suivant: Soit $C^{\cdot}$ la catégorie formée de 9 unités et de 9 morphismes $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1', a_2', a_4'$, chaque unité étant adjacente à deux morphismes différents exactement. Les seuls composés entre deux éléments différents d'une unité sont:

$$a_2 \cdot a_1 = a_3;\ a_4 \cdot a_1' = a_5 \quad \text{et} \quad a_6 \cdot a_4' = a_2'.$$

Soit ϱ la plus petite relation d'équivalence sur $C^{\cdot}$ compatible avec α et β et telle que l'on ait:

$$a_1 \sim a_1';\ a_2 \sim a_2' \quad \text{et} \quad a_4 \sim a_4'.$$

Alors $C^{\cdot}$ admet une catégorie quotient par ϱ, qui n'est pas une catégorie quotient strict par ϱ, puisque le composé $\tilde{\varrho}(a_6) \cdot \tilde{\varrho}(a_5)$ est défini et égal à $\tilde{\varrho}(a_3)$.

2) Soient $C^{\cdot}$ une catégorie et ϱ une relation d'équivalence sur C. La condition: il existe $((C/\varrho)^{\perp}, \tilde{\varrho}, C^{\cdot}) \in F$ n'entraîne pas que $(C/\varrho)^{\perp}$ soit une catégorie quotient de $C^{\cdot}$, comme le montre l'exemple suivant: $C^{\cdot}$ est formé de 6 unités et de 3 morphismes f_1, f_2, f_3, le composé de deux éléments n'étant défini que si l'un des éléments au moins est une unité. Soit ϱ la relation d'équivalence sur C engendrée par: $\alpha(f_1) \sim \alpha(f_3)$, $\beta(f_2) \sim \beta(f_3)$ et $\alpha(f_2) \sim \beta(f_1)$. Alors C/ϱ devient une catégorie pour la loi de composition:

$$h' \perp h = h' \cdot h \quad \text{si} \quad h' \cdot h \text{ est défini dans } C^{\cdot}/\varrho;$$

et

$$\tilde{\varrho}(f_2) \perp \tilde{\varrho}(f_1) = \tilde{\varrho}(f_3).$$

Mais $(C/\varrho)^{\perp}$ n'est pas une catégorie quotient de $C^{\cdot}$.

3) Soit $C^{\cdot}$ une catégorie. Une relation d'équivalence ϱ sur C peut être compatible sur la classe multiplicative $C^{\cdot}$ et telle que $C^{\cdot}/\varrho$ soit une catégorie sans que $C^{\cdot}$ admette une catégorie quotient par ϱ. Par exemple, soit $C^{\cdot}$ une catégorie ayant deux unités distinctes e et e' et un seul morphisme f tel que: $f \cdot f = f$ et $\alpha(f) = e'$. Soit ϱ la relation d'équivalence engendrée par $e \sim f$, e non équivalent à e'. Alors $C^{\cdot}/\varrho$ est une catégorie formée d'une unité $\tilde{\varrho}(e')$ et

d'un élément idempotent $\tilde{e}$ tel que $\alpha(\tilde{e}) = \tilde{\varrho}(e')$. Mais $C^\cdot/\varrho$ n'est pas une catégorie quotient de $C^\cdot$. Toutefois on a:

Proposition 26: *Soient $C^\cdot$ un groupoïde et ϱ une relation d'équivalence compatible sur $C^\cdot$ et telle que $C^\cdot/\varrho$ soit une catégorie. Alors $C^\cdot/\varrho$ est un groupoïde* [1] *quotient strict de $C^\cdot$.*

Démonstration: Pour tout $f \in C$, posons:

$$\tilde{f} = \tilde{\varrho}(f) = f \text{ modulo } \varrho .$$

Les relations: $g \in C$ et $\tilde{g} \in (C^\cdot/\varrho)_0$, entraînent:

$$\tilde{g} = \tilde{g} \cdot (\widetilde{\alpha(g)}) = \widetilde{\alpha(g)}, \quad \text{d'où } g \sim \alpha(g) .$$

De même $\beta(g) \sim g$. – Montrons que si $e \in C_0^\cdot$, on a: $\tilde{e} \in (C^\cdot/\varrho)_0$. En effet, de l'égalité $e \cdot e = e$, on déduit $\tilde{e} \cdot \tilde{e} = \tilde{e}$, donc $\alpha(\tilde{e}) = \beta(\tilde{e})$. Posons $\tilde{\mu} = \alpha(\tilde{e})$. Puisque $\tilde{\mu} \cdot \tilde{e}$ est défini, il existe $f \sim e$ et $g \in \tilde{\mu}$ tels que $\alpha(g) = \beta(f)$; comme $\tilde{\mu} \in (C^\cdot/\varrho)_0$, d'après le début de la démonstration on a $\beta(f) \in \tilde{\mu}$. Posons $\tilde{e}' = \widetilde{f^{-1}}$. A partir de l'égalité $f \cdot f^{-1} = \beta(f)$, on obtient $\tilde{e} \cdot \tilde{e}' = \tilde{\mu}$. Par suite:

$$\tilde{e} = \tilde{e} \cdot \tilde{\mu} = \tilde{e} \cdot \tilde{e} \cdot \tilde{e}' = \tilde{e} \cdot \tilde{e}' = \tilde{\mu} .$$

Il en résulte: $\tilde{e} \in (C^\cdot/\varrho)_0$ et $(C^\cdot/\varrho, \tilde{\varrho}, C^\cdot) \in F$. Par conséquent $C^\cdot/\varrho$ est un groupoïde, qui est une catégorie quotient strict de $C^\cdot$, en vertu de la proposition 23.

1+

V) Relations d'ordre quotient

Soit $\tilde{\Omega}$ la catégorie des homomorphismes entre classes ordonnées (voir [2]) et $(M, \omega, \tilde{\Omega}, .)$ la catégorie d'homomorphismes correspondante; soit $\hat{\omega}$ l'équivalence de $\tilde{\Omega}$ sur la sous-catégorie pleine de F ayant pour objets les catégories de couples définissant un ordre sur la classe de leurs unités. Si $\hat{\omega}(\tilde{g})$ est une p_F-surjection, $\tilde{g}$ est une ω-surjection. Mais il existe des ω-surjections $\tilde{g}$ telles que $\hat{\omega}(\tilde{g})$ ne soit pas une p_F-surjection.

Soit $\tilde{\Omega}'$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des homomorphismes stricts ([1] et [2]), c'est-à-dire des triplets $((\bar{A}, <), g, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$ tels que les conditions: $x' < x$ et $g(x') = g(x)$ entraînent $x' = x$.

Soit $\tilde{\Omega}''$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des triplets $((\bar{A}, <), g, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$ tels que, pour tout $x \in A$ et tout $z < g(x)$, il existe $x' < x$ avec $g(x') = z$.

$\tilde{\Omega}'$ et $\tilde{\Omega}''$ sont des sous-catégories saturées de $\tilde{\Omega}$. Soient ω' et ω'' les restrictions de ω à $\tilde{\Omega}'$ et à $\tilde{\Omega}''$ resp.

[1] Pour une proposition analogue, voir [8].

Définition 13: *On dira qu'une relation d'équivalence ϱ sur A est* compatible sur $(A, <) \in \tilde{\Omega}_0$ *si la relation définie par:*
$\tilde{\varrho}(x) < \tilde{\varrho}(y)$ *si, et seulement si, il existe* $x' \sim x$ *et* $y' \sim y$ *tels que* $x' < y'$ *est une relation d'ordre sur* A/ϱ.

Proposition 27: *Si ϱ est une relation d'ordre compatible sur $(A, <) \in \tilde{\Omega}_0$, alors $(A/\varrho, <)$ est une ω-structure quotient de $(A, <)$. Si de plus il existe $\overline{\varphi} = ((A', <), \varphi' \cdot \tilde{\varrho}, (A, <)) \in \tilde{\Omega}'$, alors $(A/\varrho, <)$ est une ω'-structure quotient de $(A, <)$.*

Démonstration: On a $((A/\varrho, <), \tilde{\varrho}, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$. Soit $\overline{\varphi} = ((A', <), \varphi' \cdot \tilde{\varrho}, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$. Soient $x \in A/\varrho$ et $x' < x$. Il existe $y \in A$ et $y' < y$ tels que $\tilde{\varrho}(y) = x$ et $\tilde{\varrho}(y') = x'$, donc $\varphi'(x') = \varphi' \cdot \tilde{\varrho}(y') < \varphi' \cdot \tilde{\varrho}(y) = \varphi'(x)$ et on trouve $\overline{\varphi}' = ((A', <), \varphi', (A/\varrho, <)) \in \tilde{\Omega}$. Ainsi $(A/\varrho, <)$ est une ω-structure quotient de $(A, <)$. – Supposons de plus $\overline{\varphi} \in \tilde{\Omega}'$ et $\varphi'(x') = \varphi'(x)$; on en déduit $y' = y$, d'où $x' = x$ et $\overline{\varphi}' \in \tilde{\Omega}'$. – Enfin les conditions $y' < y$ et $y' \sim y$ entraînent $\varphi' \cdot \tilde{\varrho}(y') = \varphi' \cdot \tilde{\varrho}(y)$, et par suite $y' = y$. Ainsi $((A/\varrho, <), \tilde{\varrho}, (A, <)) \in \tilde{\Omega}'$ et $(A/\varrho, <)$ est une ω'-structure quotient.

Définition 14: *On dira que $\overline{g} \in \tilde{\Omega}$ est une ω*-surjection stricte, *ou que $\beta(\overline{g})$* est une structure d'ordre quotient strict de $\alpha(\overline{g})$, *si la catégorie $\hat{\omega}(\beta(\overline{g}))$ est une catégorie quotient strict de $\hat{\omega}(\alpha(\overline{g}))$.*

Proposition 28: *Pour que $\overline{g} = ((\overline{A}, <), g, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$ soit une ω-surjection stricte, il faut et il suffit que $g(A) = \overline{A}$ et que les conditions:*

$$x \in \overline{A}, \ x' < x \quad \text{et} \quad x'' < x'$$

entraînent qu'il existe $y \in A$, $y' < y$ et $y'' < y'$ tels que $g(y) = x$, $g(y') = x'$ et $g(y'') = x''$. Si $\overline{g}$ est une ω-surjection stricte et si $\overline{g} \in \tilde{\Omega}'$, alors $\overline{g}$ est une ω'-surjection. Si $\overline{g} \in \tilde{\Omega}''$ et $g(A) = \overline{A}$, $\overline{g}$ est une ω-surjection stricte et une ω''-surjection.

Démonstration: La première partie de la proposition résulte de la proposition 24. – Si $\overline{g} \in \tilde{\Omega}'$ et si $\overline{g}$ est une ω-surjection stricte, la relation d'équivalence ϱ_g associée est compatible sur $\alpha(\overline{g})$ et $\overline{g}$ est une ω'-surjection, en vertu de la proposition 27. – Soit $\overline{g} \in \tilde{\Omega}''$ et $g(A) = \overline{A}$; il résulte des définitions que la condition de l'énoncé est vérifiée, par suite $\overline{g}$ est une ω-surjection. Supposons $\overline{\varphi} = ((A', <), \varphi' \cdot g, (A, <)) \in \tilde{\Omega}''$. Soit $x \in \overline{A}$ et $z < \varphi'(x)$; il existe $y \in A$ et $y' < y$ tels que

$$g(y) = x, \ \varphi' \cdot g(y) = \varphi'(x) \quad \text{et} \quad \varphi' \cdot g(y') = z .$$

Par suite $x' = g(y') < x$ et $\varphi'(x') = z$, d'où $((A', <), \varphi', (\overline{A}, <)) \in \tilde{\Omega}''$, et $\overline{g}$ est une ω''-surjection.

Soient I^{ps}, I^s et I les catégories des applications sous-inductives entre classes sous-préinductives, des applications inductives entre classes sous-inductives et des applications inductives entre classes inductives (voir [1], [2] et [3]). Soient ω^{ps}, ω^s, ω^i, ω'^{ps}, ω'^s, ω'^i, ω''^{ps}, ω''^s et ω''^i les restrictions de ω à I^{ps}, I^s, I, $I'^{ps} = I^{ps} \cap \tilde{\Omega}'$, $I'^s = \tilde{\Omega}' \cap I^s$, $I' = I \cap \tilde{\Omega}'$, $I''^{ps} = I^{ps} \cap \tilde{\Omega}''$, $I''^s = I^s \cap \tilde{\Omega}''$ et $I'' = I \cap \tilde{\Omega}''$ resp.

Proposition 29: *Supposons* $\bar{g} = ((\bar{A}, <), g, (A, <)) \in I^{ps}$ *et* $g(A) = \bar{A}$. *Si on a la propriété suivante:*

(q^{ps}) *Les conditions* $x \in \bar{A}$, $x' < x$ *et* $x'' < x$ *entraînent qu'il existe* $y \in A$,

$$y' < y \ \text{ et } \ y'' < y \ \text{ tels que } g(y) = x,\ g(y') = x' \ \text{ et } \ g(y'') = x'',$$

alors $\bar{g}$ *est une* ω^{ps}*-surjection stricte.*

Démonstration: L'axiome (q^{ps}) entraîne que la relation d'équivalence ϱ_g associée à g est compatible sur $(A, <)$; par suite g est une ω-surjection stricte, d'après la proposition 27. Soit $\bar{\varphi} = ((A', <), \varphi' \cdot g, (A, <)) \in I^{ps}$. Soient $x' \in \bar{A}$, $x' < x$ et $x'' < x$; en vertu de (q^{ps}), on a:

$$\varphi'(x' \cap x'') = \varphi' \cdot g(y' \cap y'') = \varphi' \cdot g(y') \cap \varphi' \cdot g(y'') = \varphi'(x') \cap \varphi'(x''),$$

d'où $((A', <), \varphi', (\bar{A}, <)) \in I^{ps}$ et $\bar{g}$ est une ω^{ps}-surjection.

Corollaire: *Si* $\bar{g} \in I''^{ps}$ *et* $\omega(\bar{g}) \in M^s$, *alors* $\bar{g}$ *est une* ω^{ps}*-surjection et une* ω''^{ps}*-surjection.*

Proposition 30: *Soit* $\bar{g} = ((\bar{A}, <), g, (A, <)) \in I^s$ *(resp.* $\in I$*) et* $g(A) = \bar{A}$. *Supposons l'axiome suivant vérifié:*

(q^s) *Les conditions* $x \in \bar{A}$ *et* $x_i < x$, $i \in I$ *entraînent qu'il existe* $y \in A$ *et* $y_i < y$ *tels que* $g(y) = x$ *et* $g(y_i) = x_i$, *pour tout* $i \in I$.

Alors $\bar{g}$ *est une* ω^s*(resp.* ω^i*)-surjection stricte.*

Démonstration: D'après la proposition 29, $\bar{g}$ est une ω^{ps}-surjection stricte. Soit $\bar{\varphi} = ((A', <), \varphi' \cdot g, (A, <)) \in I^s$; en reprenant les notations de (q^s) on trouve:

$$\varphi'(\overset{x}{\underset{i \in I}{\cup}} x_i) = \varphi'(\overset{x}{\underset{i \in I}{\cup}} g(y_i)) = \varphi'(g(\overset{y}{\underset{i \in I}{\cup}} y_i)) = \overset{\varphi'(x)}{\underset{i \in I}{\cup}} \varphi'(x_i),$$

d'où $((A', <), \varphi', (\bar{A}, <)) \in I^s$ et $\bar{g}$ est une ω^s-surjection. Si $\bar{g} \in I$, $\bar{g}$ est une ω^i-surjection, car I est une sous-catégorie pleine de I^s.

Corollaire: *Si* $\bar{g} \in I''^s$ *(resp.* $\in I''$*) et* $\omega(\bar{g}) \in M^s$, *alors* $\bar{g}$ *est une* ω^s*- (resp.* ω^i*-) surjection et une* ω''^s*- (resp.* ω''^i*-) surjection.*

4. Graphes multiplicatifs induits

Théorème 8: *Soient* $\bar{\varkappa}_i = (G^{\cdot}, \varkappa_i, G^{\cdot}_i) \in \boldsymbol{N}$, *où* $i = 1, 2$. *Il existe une* $p_{\boldsymbol{N}}$*-sous-structure* $\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$ *de* $G^{\cdot}_1 \times G^{\cdot}_2$ *telle que:*

$$K = (\bar{\varkappa}_2, \bar{\varkappa}_1, \overline{p_1 \iota}, \overline{p_2 \iota}) \in \square \boldsymbol{N},$$

où $\overline{p_i \iota}$ *désigne la restriction à* $\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$ *de la projection canonique* $\bar{p}_i$ *de* $G^{\cdot}_1 \times G^{\cdot}_2$ *sur* $G^{\cdot}_1$. *Si de plus on a* $\bar{\varkappa}_i \in \boldsymbol{N}'$ *(resp.* $\in \boldsymbol{F}$*), alors* $K \in \square \boldsymbol{N}'$ *(resp.* $K \in \square \boldsymbol{F}$*).* 1

Démonstration: Soit $\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$ la classe des couples (g_1, g_2) tels que $\varkappa_1(g_1) = \varkappa_2(g_2)$. Si $(g_1, g_2) \in \bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$ et si $(g'_1, g'_2) \in \bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$, les composés $g'_i \cdot g_i$ étant supposés définis, $i = 1, 2$, on a:

$$\varkappa_1(g'_1 \cdot g_1) = \varkappa_1(g'_1) \cdot \varkappa_1(g_1) = \varkappa_2(g'_2 \cdot g_2), \text{ d'où } (g'_1 \cdot g_1, g'_2 \cdot g_2) \in \bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1).$$

Par suite $\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$ est une sous-classe stable pour la loi de composition de $G^{\cdot}_1 \times G^{\cdot}_2$; la première partie du théorème en résulte. – Si $\bar{\varkappa}_i \in \boldsymbol{N}'$ et si $(g_1, g_2) \in \bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$, on trouve:

$$\varkappa_1(\alpha(g_1)) = \alpha(\varkappa_1(g_1)) = \alpha(\varkappa_2(g_2)) = \varkappa_2(\alpha(g_2)),$$

d'où $(\alpha(g_1), \alpha(g_2)) \in \bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$; de même $(\beta(g_2), \beta(g_1)) \in \bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \varkappa_1)$. On en déduit que $\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \varkappa_1)$ est un graphe multiplicatif, qui est une sous-structure du graphe multiplicatif $G^{\cdot}_1 \times G^{\cdot}_2$ d'après la proposition 20. Enfin, si $\bar{\varkappa}_i \in \boldsymbol{F}$, puisque $\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$ est stable pour $\cdot$, $\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$ est une sous-catégorie de $G^{\cdot}_1 \times G^{\cdot}_2$, ce qui prouve le théorème 8.

Corollaire: *Si* $K' = (\bar{\varkappa}_1, \bar{\varkappa}_2, \bar{\varkappa}'_2, \bar{\varkappa}'_1) \in \square \boldsymbol{N}'$, *il existe un élément et un seul* $(\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1), \pi, \alpha(\bar{\varkappa}'_1)) = \bar{\pi} \in \boldsymbol{N}'$ *tel que* $\overline{p_i \iota} \cdot \bar{\pi} = \bar{\varkappa}'_i$. 2

Démonstration: D'après la définition du produit $\Pi = \alpha(\bar{\varkappa}_1) \times \alpha(\bar{\varkappa}_2)$, il existe $[\bar{\varkappa}'_1, \bar{\varkappa}'_2] = (\Pi, [\varkappa'_1, \varkappa'_2], \alpha(\bar{\varkappa}'_1)) \in \boldsymbol{N}'$ tel que $\bar{p}_i \cdot [\bar{\varkappa}'_1, \bar{\varkappa}'_2] = \bar{\varkappa}'_i$, $i = 1, 2$. La relation: $K' \in \square \boldsymbol{N}'$ signifie: $[\varkappa'_1, \varkappa'_2](\alpha(\bar{\varkappa}'_i)) \subset \bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$. Puisque $\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$ est une $p'_{\boldsymbol{N}}$-sous-structure de Π, il en résulte:

$$\bar{\pi} = (\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1), [\varkappa'_1, \varkappa'_2], \alpha(\bar{\varkappa}'_1)) \in \boldsymbol{N}' \quad \text{et} \quad (\overline{p_i \iota}) \cdot \bar{\pi} = \bar{\varkappa}'_i.$$

Définition 15: *Soient* $\bar{\varkappa}_i \in \boldsymbol{N}$ *(resp.* $\in \boldsymbol{N}'$*) tels que* $\beta(\bar{\varkappa}_1) = \beta(\bar{\varkappa}_2)$; $\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$ (théorème 8) *sera appelé* classe multiplicative (*resp.* graphe multiplicatif) induit *de* $G^{\cdot}_1 = \alpha(\bar{\varkappa}_1)$ *par* $(\bar{\varkappa}_2, \bar{\varkappa}_1)$.

Si $\bar{\varkappa}_i \in \boldsymbol{F}$, la catégorie $\bar{\varkappa}^*_2(G^{\cdot}_1, \bar{\varkappa}_1)$ est la catégorie induite de $G^{\cdot}_1$ par $(\bar{\varkappa}_2, \bar{\varkappa}_1)$, au sens de [3].

Soit A une classe. Nous désignerons par $(A \times A)^{\perp}$ la catégorie obtenue en munissant la classe produit $A \times A$ de la loi de composition entre couples:

$$(u'', u'_1) \perp (u', u) = (u'', u) \text{ si, et seulement si, } u'_1 = u'.$$

Soient $G^{\cdot} \in N'$ et $\overline{a}_0 = (G_0^{\cdot}, a_0, A) \in M$. On a:

$\overline{[\beta, \alpha]} = ((G_0^{\cdot} \times G_0^{\cdot})^{\perp}, [\beta, \alpha], G^{\cdot}) \in N'$, où $[\beta, \alpha](f) = (\beta(f), \alpha(f))$

et
$$\overline{a}_0 \times \overline{a}_0 = ((G_0^{\cdot} \times G_0^{\cdot})^{\perp}, a_0 \times a_0, (A \times A)^{\perp}) \in N'.$$

Définition 16: *Avec les notations précédentes, le graphe multiplicatif*
$$(\overline{a}_0 \times \overline{a}_0)^*(G^{\cdot}, \overline{[\beta, \alpha]})$$
induit de $G^{\cdot}$ *par* $(\overline{a}_0 \times \overline{a}_0, \overline{[\beta, \alpha]})$ *est appelé* graphe multiplicatif induit *de* $G^{\cdot}$ *par* a_0 *et noté* $a_0^*(G^{\cdot})$.

Un élément du graphe multiplicatif $a_0^*(G^{\cdot})$ est un triplet $(f, (u', u))$ où $f \in G$, $u \in A$ et $u' \in A$, tel que:
$$a_0(u) = \alpha(f) \quad \text{et} \quad a_0(u') = \beta(f).$$
L'application $[a_0, \delta]^{-1}$: $(a_0(u), (u, u)) \to u$ est une bijection de $(a_0^*(G^{\cdot}))_0$ sur A; ainsi A est une classe d'objets de $a_0^*(G^{\cdot})$. Nous poserons:
$$\tilde{a} = (G^{\cdot}, p_1, a_0^*(G^{\cdot})), \text{ où } p_1(f, (u', u)) = f.$$

Cas particulier: Si $G^{\cdot}$ est une catégorie, $a_0^*(G^{\cdot})$ est la catégorie induite de $G^{\cdot}$ par a_0, au sens de [3].

L'application U:
$$(G^{\cdot}, \Phi, \overline{G}^{\cdot}) \to (G_0^{\cdot}, \Phi_0, \overline{G}_0^{\cdot}), \text{ où } (G^{\cdot}, \Phi, \overline{G}^{\cdot}) \in N',$$
définit un foncteur $\overline{U} = (M, U, N')$. Soit U_F la restriction de U à F et $\overline{U_F} = (M, U_F, F)$.

Théorème 9: *Pour que* $\overline{\Psi} = (G^{\cdot}, \Psi, \overline{G}^{\cdot}) \in N'$ *soit une* $(M, \overline{U})$*-injection, il faut et il suffit que l'on ait:*
$$\overline{\Psi} = (G^{\cdot}, \tilde{\Psi}, \Psi_0^*(G^{\cdot})) \cdot \overline{\gamma}, \text{ avec } \overline{\gamma} = (\Psi_0^*(G^{\cdot}), \gamma, \overline{G}^{\cdot}) \in N'_{\gamma}.$$
1 *Dans ce cas* $\gamma(f) = (\Psi(f), (\beta(f), \alpha(f)))$, *pour tout* $f \in G$.

Démonstration: Montrons que $(G^{\cdot}, \tilde{\Psi}, \Psi_0^*(G^{\cdot}))$ est une $(M, \overline{U})$-injection. En effet, soit $\overline{\Phi} = (G^{\cdot}, \Phi, \Gamma^{\cdot}) \in N'$ tel que $\Phi_0 = \tilde{\Psi}_0 \Phi'_0$. Comme:

$\overline{\chi} = ((\overline{G}_0^{\cdot} \times \overline{G}_0^{\cdot})^{\perp}, \chi, \Gamma^{\cdot}) = ((\overline{G}_0^{\cdot} \times \overline{G}_0^{\cdot})^{\perp}, ([\Psi_0, \delta]^{-1}\Phi'_0 \times [\Psi_0, \delta]^{-1}\Phi'_0)[\beta, \alpha], \Gamma^{\cdot}) \in N'$,

on a:
$$(\overline{[\beta, \alpha]}, \overline{\Psi}_0 \times \overline{\Psi}_0, \overline{\Phi}, \overline{\chi}) \in \square N'$$
et il résulte du corollaire du théorème 8 que $\overline{\Phi}$ se décompose d'une manière unique sous la forme: $\overline{\Phi} = \tilde{\Psi} \cdot \overline{\Phi}'$, avec:
$$\overline{\Phi}' = (\Psi_0^*(G^{\cdot}), \Phi', \Gamma^{\cdot}) \in N',$$

l'application Φ' associant à $f \in \Gamma$ le triplet $(\Phi(f), (e', e))$, dans lequel e et e' sont définis par les relations:

$$(\Psi_0(e), (e, e)) = \Phi'_0(\alpha(f)) \text{ et } (\Psi_0(e'), (e', e')) = \Phi'_0(\beta(f)) .$$

Par suite $\widetilde{\Psi}$ est une $(M, \overline{U})$-injection. – Inversement soit

$$\overline{\Psi} = (G^{\cdot}, \Psi, \overline{G^{\cdot}}) \in N'$$

une $(M, \overline{U})$-injection. D'après ce qui précède, $(G^{\cdot}, \widetilde{\Psi}, \Psi_0^*(G^{\cdot}))$ est aussi une $(M, \overline{U})$-injection. Puisque $(\Psi_0^*(G^{\cdot})_0, \gamma_0, \overline{G_0^{\cdot}}) \in M_\gamma$, où $\gamma_0 = [\Psi_0, \delta]$, il existe, en vertu du théorème 1, un élément

$$\bar{\gamma} = (\Psi_0^*(G^{\cdot}), \gamma, \overline{G^{\cdot}}) \in N'_\gamma \text{ tel que } \overline{\Psi} = \widetilde{\Psi} \cdot \bar{\gamma} .$$

Corollaire: *Pour que* $\overline{\Psi} = (C^{\cdot}, \Psi, \overline{C^{\cdot}}) \in F$ *soit une* $(M, \overline{U}_F)$*-injection, il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\overline{\Psi} = (C^{\cdot}, \widetilde{\Psi}, \Psi_0^*(C^{\cdot})) \cdot \bar{\gamma} , \text{ où } \bar{\gamma} \in F_\gamma .$$

Démonstration: D'après le théorème 8, $\Psi_0^*(C^{\cdot}) \in F_0$. Puisque F est une sous-catégorie pleine de N', la condition est suffisante en vertu du théorème. Une démonstration analogue à la fin de celle du théorème montre que la condition est aussi nécessaire.

Proposition 31: *Soient* $(C, \varkappa_i, C_i, .)$, *où* $i = 1, 2$, *des catégories d'homomorphismes;* $(C_i, \overline{p_i\iota}, \varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1)), .)$ *est une catégorie d'homomorphismes. Si* 1
C_1 *est saturée au-dessus de* C, *alors* $\varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1)$ *est saturée au-dessus de* C_2 *et* $(C, \varkappa_i \overline{p_i\iota}, \varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1), .)$ *est une catégorie d'homomorphismes.*

Démonstration: La première partie de la proposition est démontrée dans [3]. Supposons C_1 saturée au-dessus de C. Soient $(s_1, s_2) \in \varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1)_0$ et $\varphi_2 = (s'_2, \varphi, s_2) \in (C_2)_\gamma$; on a $(\varkappa_2(s'_2), \varphi, \varkappa_2(s_2)) \in C_\gamma$ et, puisque $\varkappa_2(s_2) = \varkappa_1(s_1)$, il existe $\varphi_1 = (s'_1, \varphi, s_1) \in C_1$; par suite (φ_1, φ_2) appartient à $\varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1)$ et $\varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1)$ est saturée au-dessus de C_2. Il en résulte que $(C, ., \varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1), .)$ est une catégorie d'homomorphismes, ce qui démontre la proposition.

II. Graphes multiplicatifs structurés

1. Classes multiplicatives structurées

Soit (M, p_N, N, N_γ) la catégorie d'homomorphismes considérée au nº 3, I.

Soit $(\overline{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot) \in N$; nous désignerons par $\varphi * \varphi$ la restriction de l'application $\varphi \times \varphi$ à $G^\cdot * G^\cdot$. Soit $\varkappa(G^\cdot)$ l'application:

$$(g, f) \to g \cdot f \quad \text{où} \quad (g, f) \in G^\cdot * G^\cdot .$$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous écrirons $\varkappa^\cdot$ au lieu de $\varkappa(G^\cdot)$.

1 L'application: $(\overline{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot) \to (\varkappa(\overline{G}^\cdot), \varphi, \varphi * \varphi, \varkappa(G^\cdot))$ définit une équivalence $\varkappa$ de N sur une sous-catégorie de $\square\square M$.

Soit (M, p, H) un foncteur. Dans tout ce paragraphe, nous identifierons $(\square\square H)_0$ (resp. $(\square\square M)_0$) avec H (resp. M).

Définition 1: *Une unité de la catégorie induite* $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ *sera appelée* classe multiplicative p-structurée; *un morphisme de* $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ *sera appelé* morphisme entre classes multiplicatives p-structurées.

Une classe multiplicative p-structurée est donc un couple $(G^\cdot, K)$ où $G^\cdot \in N_0$, $K \in H$ et $p(K) = (G, \varkappa(G^\cdot), G^\cdot * G^\cdot)$. Un morphisme entre classes multiplicatives p-structurées s'identifie à un quadruplet:

$$\overline{\Phi} = ((\overline{G}^\cdot, \overline{K}), \Phi, \Phi', (G^\cdot, K))$$

vérifiant les conditions suivantes:

$(G^\cdot, K)$ et $(\overline{G}^\cdot, \overline{K})$ sont des classes multiplicatives p-structurées:

$$(\overline{K}, \Phi, \Phi', K) \in \square H; (\overline{G}^\cdot, p(\Phi), G^\cdot) \in N \quad \text{et} \quad p(\Phi') = p(\Phi) * p(\Phi) .$$

1 Remarquons que l'application: $\overline{\Phi} \to (\overline{K}, \Phi, \Phi', K)$ est une équivalence de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ sur une sous-catégorie de $\square\square H$. Nous poserons:

$$\breve{p}_M(\overline{\Phi}) = p(\Phi) \in M; \ \breve{p}_N(\overline{\Phi}) = (\overline{G}^\cdot, p(\Phi), G^\cdot) \in N; \ \breve{p}_H(\overline{\Phi}) = \Phi \in H .$$

Définition 2: *Nous dirons que la classe multiplicative p-structurée* $(G^\cdot, K)$ *est* fortement p-structurée *si la condition suivante est vérifiée: Soit* $s = \beta(K)$; *il existe un produit* $s \times s$ *dans* H *tel que* $p(s \times s) = G \times G$, *et* $\alpha(K)$ *est une p-sous-structure de* $s \times s$.

Nous désignerons par $\overline{N}(p)$ la sous-catégorie pleine de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ ayant pour unités les classes multiplicatives fortement p-structurées.

Supposons désormais que $(M, p, H, .)$ soit une catégorie d'homomorphismes. Une classe multiplicative p-structurée $(G^\cdot, K)$ est entièrement déterminée par la donnée de $s = \beta(K)$, de $s' = \alpha(K)$ et de la loi de composition $\varkappa(G^\cdot) = p(K)$; elle sera représentée par le triplet $(G^\cdot, s, s')$.

Proposition 1: *$\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ s'identifie à la catégorie des triplets*

$$\bar{\Phi} = ((\bar{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}'), \varphi, (G^\cdot, s, s'))$$

vérifiant les conditions suivantes: $(\bar{G}^\cdot, (\bar{s}, \varkappa(\bar{G}^\cdot), \bar{s}'))$ et $(G^\cdot, (s, \varkappa(G^\cdot), s'))$ sont des classes multiplicatives p-structurées; $(\bar{G}, \varphi, G) \in M$; $(\bar{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot) \in N$; $(\bar{s}, \varphi, s) \in H$ et $(\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \in H$.

Nous poserons:

$$\breve{p}_M(\bar{\Phi}) = (\bar{G}, \varphi, G);\ \breve{p}_N(\bar{\Phi}) = (\bar{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot);\ \breve{p}_H(\bar{\Phi}) = (\bar{s}, \varphi, s)\,.$$

Proposition 2: *$\bar{N}(p)_0$ s'identifie à la classe des couples $(G^\cdot, s)$ vérifiant les conditions suivantes:*

1) *On a $G^\cdot \in N_0$, $s \in H_0$ et $p(s) = G$.*

2) *Il existe un produit $s \times s$ dans H tel que $p(s \times s) = G \times G$ et il existe une p-sous-structure s' de $s \times s$ telle que $p(s') = G^\cdot * G^\cdot$.*

3) *On a $(s, \varkappa(G^\cdot), s') \in H$.*

$\bar{N}(p)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $p^*(N, p_N)$ ayant $\bar{N}(p)_0$ pour classe d'objets.

Démonstration: Supposons que $(G^\cdot, s)$ vérifie les conditions 1, 2 et 3. Puisque $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes, $s \times s$ et s' sont uniquement déterminés par la condition 2 et $(G^\cdot, s)$ s'identifie à: $(G^\cdot, (s, \varkappa(G^\cdot), s')) \in \bar{N}(p)_0$. – Soit $\bar{\Phi} = ((\bar{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot), (\bar{s}, \varphi, s))$ un élément quelconque de la catégorie induite $p^*(N, p_N)$; si $(G^\cdot, s) \in \bar{N}(p)_0$ et $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}) \in \bar{N}(p)_0$, on a $(\bar{s} \times \bar{s}, \varphi \times \varphi, s \times s) \in H$, par définition du produit; comme $s' \prec s \times s$, $\bar{s}' \prec \bar{s} \times \bar{s}$ et $(\varphi * \varphi)\ (G^\cdot * G^\cdot) \subset \bar{G}^\cdot * \bar{G}^\cdot$, on trouve:

$$\Phi' = (\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \in H, \text{ donc } (\bar{K}, \Phi, \Phi', K) \in \square H, \text{ où } \Phi = (\bar{s}, \varphi, s)\,,$$

$K = (s, \varkappa(G^\cdot), s')$, et $\bar{K} = (\bar{s}, \varkappa(\bar{G}^\cdot), \bar{s}')$. Par suite on peut identifier $\bar{\Phi}$ avec $((\bar{G}^\cdot, \bar{s}), \varphi, (G^\cdot, s)) \in \bar{N}(p)$.

Nous ferons toujours les identifications dont les propositions 1 et 2 assurent l'existence.

Théorème 1: *$(N, \breve{p}_N, \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes. Si H est saturé au-dessus de M, alors $(H, \breve{p}_H, \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de H.*

Démonstration: Montrons que les conditions: $\bar{\Phi} = ((\bar{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}'), \varphi, (G^\cdot, s, s')) \in (\varkappa^*(\square\square H, \square p))_\gamma$ et $(G^\cdot, s_1, s_1') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ entraînent l'existence de $\bar{\Phi}_1 = ((\bar{G}^\cdot, \bar{s}_1, \bar{s}_1'), \varphi, (G^\cdot, s_1, s_1')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)$. En effet, puisque (M, p, H_γ) est une espèce de structures, les relations

$(\bar{G}, \varphi, G) \in M_\gamma$, $(\bar{\bar{G}}^{\cdot} * \bar{\bar{G}}^{\cdot}, \varphi * \varphi, G^{\cdot} * G^{\cdot}) \in M_\gamma$, $p(s_1) = p(s)$ et $p(s_1') = p(s')$ assurent qu'il existe

$$\Phi_1 = (\bar{s}_1, \varphi, s_1) \in H_\gamma \quad \text{et} \quad \Phi_1' = (\bar{s}_1', \varphi * \varphi, s_1') \in H_\gamma .$$

On a $(\bar{\bar{K}}_1, \Phi_1, \Phi_1', K_1) \in \Box H$, où $K_1 = (s_1, \varkappa(G^{\cdot}), s_1')$ et $\bar{\bar{K}}_1 = \Phi_1 \cdot K_1 \cdot \Phi_1'^{-1}$. Comme $(\varkappa(\bar{\bar{G}}^{\cdot}), \varphi, \varphi * \varphi, \varkappa(G^{\cdot})) \in \Box M$ et $\Box p(\bar{\bar{K}}_1, \Phi_1, \Phi_1', K_1) \in \Box M$, il en résulte $(\varkappa(\bar{\bar{G}}^{\cdot}), \varphi, \varphi * \varphi, \varkappa(G^{\cdot})) = \Box p(\bar{\bar{K}}_1, \Phi_1, \Phi_1', K_1)$, d'où $(\bar{s}_1, \varkappa(\bar{\bar{G}}^{\cdot}), \bar{s}_1') = \bar{\bar{K}}_1$ et $\bar{\Phi}_1 = ((\bar{\bar{G}}_1^{\cdot}, s_1, \bar{s}_1'), \varphi, (G^{\cdot}, s_1, s_1')) \in \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)$. On en déduit que $(N, ., \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes. – Supposons H saturé au-dessus de M. Soient

$$\Phi = (\bar{s}, \varphi, s) \in H_\gamma \quad \text{et} \quad (G^{\cdot}, s, s') \in \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)_0 .$$

Puisque $(\bar{G}, \varphi, G) \in M_\gamma$, il existe $(\bar{\bar{G}}^{\cdot}, \varphi, G^{\cdot}) \in N_\gamma$ et on a

$$(\bar{\bar{G}}^{\cdot} * \bar{\bar{G}}^{\cdot}, \varphi * \varphi, G^{\cdot} * G^{\cdot}) \in M_\gamma .$$

H étant saturé au-dessus de M, il existe $\Phi' = (\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \in H_\gamma$ et on obtient

$$(\bar{s}, \varkappa(\bar{\bar{G}}^{\cdot}), \bar{s}') = \Phi \cdot (s, \varkappa(G^{\cdot}), s') \cdot (\Phi')^{-1} \in H .$$

Par conséquent $(\bar{\bar{G}}^{\cdot}, \bar{s}, \bar{s}') \in \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)$, et $(H, ., \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de H.

Corollaire: *Si H est saturé au-dessus de M, alors $(M, \grave{p}_M, \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de M.*

En effet, $\grave{p}_M = p\grave{p}_H$ et, puisque $(H, \grave{p}_H, ., .)$ et $(M, p, H, .)$ sont saturées, $(M, \grave{p}_M, \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée.

Théorème 2: *Si $(M, p, H, .)$ est saturée au-dessus de M (resp. est à produits finis), $\bar{\bar{N}}(p)$ est une sous-catégorie saturée de $\varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)$.*

Démonstration: Soient $(G^{\cdot}, s) \in \bar{\bar{N}}(p)_0$ et

$$\bar{\bar{\Phi}} = ((\bar{\bar{G}}^{\cdot}, \bar{s}, s'), \varphi, (G^{\cdot}, s, s')) \in (\varkappa^*(\Box\Box H, \Box p))_\gamma .$$

On a $s \times s \in H_0$, $(\bar{s}, \varphi, s) \in H_\gamma$ et $(\bar{\bar{G}} \times \bar{\bar{G}}, \varphi \times \varphi, G \times G) \in M_\gamma$.
Si $(M, ., H, .)$ est à produits finis, il existe $\bar{s} \times \bar{s}$ et on a

$$(\bar{s} \times \bar{s}, \varphi \times \varphi, s \times s) \in H_\gamma .$$

Si H est saturé au-dessus de M, il existe $(\bar{\bar{S}}, \varphi \times \varphi, s \times s) \in H_\gamma$; montrons
1 qu'alors $\bar{\bar{S}} = \bar{s} \times \bar{s}$ dans H. En effet, soient $(s, p_i, s \times s)$, où $i = 1, 2$, les projections canoniques de $s \times s$ sur s, p_i' la projection canonique de $\bar{\bar{G}} \times \bar{\bar{G}}$ sur $\bar{G}$. On trouve:

$$(\bar{s}, p_i', \bar{\bar{S}}) = (\bar{s}, \varphi, s) \cdot (s, p_i, s \times s) \cdot (s \times s, (\varphi \times \varphi)^{-1}, \bar{\bar{S}}) \in H .$$

Par ailleurs, si $\bar{f}_i = (\bar{s}, f_i, \sigma) \in H$, $i = 1, 2$, on a:

$$(s \times s, [\varphi^{-1} f_1, \varphi^{-1} f_2], \sigma) \in H,$$

d'où $(\bar{S}, [\bar{f}_1, \bar{f}_2], \sigma) = (\bar{S}, \varphi \times \varphi, s \times s) . (s \times s, [\varphi^{-1} f_1, \varphi^{-1} f_2], \sigma) \in H$.
On en déduit $\bar{S} = \bar{s} \times \bar{s}$. – Enfin les conditions:

$$s' \prec s \times s, (\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \in H_\gamma \quad \text{et} \quad (\bar{s} \times \bar{s}, \varphi \times \varphi, s \times s) \in H_\gamma$$

entraînent $\bar{s}' \prec \bar{s} \times \bar{s}$ en vertu de la proposition 3, I. Donc $(\bar{G}^{\cdot}, \bar{s}, \bar{s}') \in \bar{N}(p)_0$ et $\bar{N}(p)$ est une sous-catégorie saturée de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$.

Corollaire: *Si $(M, p, H, .)$ est à produits finis (resp. est saturée au-dessus de M), $(N, \tilde{p}_N, \bar{N}(p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes. Si H est saturé au-dessus de M, $(H, \tilde{p}_H, N(p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de H et $(M, \tilde{p}_M, \bar{N}(p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de M.*

Ce corollaire résulte des théorèmes 1 et 2.

Théorème 3: *Soit $(M, p, H, .)$ une catégorie d'homomorphismes à produits finis, saturée au-dessus de M. Alors $(M, \tilde{p}_M, \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$ et $(M, \tilde{p}_M, \bar{N}(p), .)$ sont des catégories d'homomorphismes à produits finis.*

Démonstration: Soients $(G_i, s_i, s_i') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$, où $i = 1, 2$. On a: 1
$G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot} \in N_0$ et $K_1 \times K_2 = (s_1 \times s_2, \varkappa(G_1^{\cdot}) \times \varkappa(G_2^{\cdot}), s_1' \times s_2') \in H$.
Soit π la bijection de $(G_1 \times G_1) \times (G_2 \times G_2)$ sur $(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2)$ définie par $\pi((g_1', g_1), (g_2', g_2)) = ((g_1', g_2'), (g_1, g_2))$; soit π' la restriction de π à $p(s_1' \times s_2') = (G_1^{\cdot} * G_1^{\cdot}) \times (G_2^{\cdot} * G_2^{\cdot})$. Il existe $(S', \pi', s_1' \times s_2') \in H_\gamma$, car H est saturé au-dessus de M; on a: $p(S') = (G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}) * (G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot})$ et

$$(s_1 \times s_2, \varkappa(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}), S') = (K_1 \times K_2) \cdot (S', \pi', s_1' \times s_2')^{-1} \in H,$$

donc $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$. – Supposons de plus $(G_i^{\cdot}, s_i) \in \bar{N}(p)_0$. D'après la proposition 3, II [2], on a $s_1' \times s_2' \prec (s_1 \times s_1) \times (s_2 \times s_2)$; en vertu de la proposition 4, II, [2]

$$((s_1 \times s_2) \times (s_1 \times s_2), \pi, (s_1 \times s_1) \times (s_2 \times s_2)) \in H_\gamma,$$

d'où $S' \prec (s_1 \times s_2) \times (s_1 \times s_2)$, d'après la proposition 3, I. Donc $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2) \in \bar{N}(p)_0$. – Démontrons que $(M, ., \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$ est une catégorie à produits finis, dans laquelle $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') = (G_1^{\cdot}, s_1, s_1') \times$ $\times (G_2^{\cdot}, s_2, s_2')$. Soit p_i (resp. p_i') la projection canonique de $G_1 \times G_2$ sur G_i (resp. de $p(s_1' \times s_2')$ sur $p(s_i')$); les relations: $(G_i^{\cdot}, p_i, G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}) \in N$, $(s_i, p_i, s_1 \times s_2) \in H$ et

$$(s_i', p_i * p_i, S') = (s_i', p_i', s_1' \times s_2') . (s_1' \times s_2', \pi', S') \in H$$

entraînent $((G_i^{\cdot}, s_i, s_i'), p_i, (G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)$. – Enfin soient

$$\Phi_i = ((G_i^{\cdot}, s_i, s_i'), \varphi_i, (\bar{G}^{\cdot}, \bar{s}, \bar{s}')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p);$$

comme $(M, ., H, .)$ et $(M, ., N, .)$ sont à produits finis, on a: $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, [\varphi_1, \varphi_2], \bar{G}^{\cdot}) \in N$; $(s_1 \times s_2, [\varphi_1, \varphi_2], \bar{s}) \in H$; $\Psi = (s_1' \times s_2', [\varphi_1 * \varphi_1, \varphi_2 * \varphi_2], \bar{s}') \in H$, où $[\varphi_1, \varphi_2](f) = (\varphi_1(f), \varphi_2(f))$. On trouve:

$$(S', [\varphi_1, \varphi_2] * [\varphi_1, \varphi_2], \bar{s}') = (S', \pi', s_1' \times s_2').\Psi \in H,$$

et par suite $[\Phi_1, \Phi_2] = ((G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S'), [\varphi_1, \varphi_2], (\bar{G}^{\cdot}, \bar{s}, \bar{s}')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)$.

Théorème 4: *Soit* $(G^{\cdot}, s, s') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ *(resp.* $\in \bar{N}(p)_0$*); si* $G_1^{\cdot}$ *est une sous-classe multiplicative de* $G^{\cdot}$ *et si* s_1 *et* s_1' *sont des* p*-sous-structures de* s *et* s' *resp. telles que* $p(s_1) = G_1$ *et* $p(s_1') = G_1^{\cdot} * G_1^{\cdot}$, *alors* $(G_1^{\cdot}, s_1, s_1')$ *est une sous-structure de* $(G^{\cdot}, s, s')$ *dans* $(M, ., \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$ *(resp. dans* $(M, ., \bar{N}(p), .)$*)*.

Démonstration: D'après la proposition 11, I, $G_1^{\cdot}$ est une p_N-sous-structure de $G^{\cdot}$. D'après la proposition 2, I, les conditions: $s_1 \underset{p}{<} s$, $s_1' \underset{p}{<} s'$ et $\varkappa(G^{\cdot})\ (G_1^{\cdot} * G_1^{\cdot}) \subset G_1$ entraînent:

$$(s_1, \varkappa(G_1), s_1') \underset{p}{<} (s, \varkappa(G^{\cdot}), s'),$$

d'où

$(G_1^{\cdot}, s_1, s_1') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ et $((G^{\cdot}, s, s'), \iota, (G_1^{\cdot}, s_1, s_1')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)$.

Soit $\Phi = ((G^{\cdot}, s, s'), \varphi, (\bar{G}^{\cdot}, \bar{s}, \bar{s}')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)$ tel que $\varphi(\bar{G}) \subset G_1$; on a alors $(\varphi * \varphi)(\bar{G}^{\cdot} * \bar{G}^{\cdot}) \subset G_1^{\cdot} * G_1^{\cdot}$; des relations:

$$G_1^{\cdot} \underset{p_N}{<} G^{\cdot}, \quad s_1 \underset{p}{<} s \quad \text{et} \quad s_1' \underset{p}{<} s'$$

on déduit: $(G_1^{\cdot}, \varphi, \bar{G}^{\cdot}) \in N$; $(s_1, \varphi, \bar{s}) \in H$ et $(s_1', \varphi * \varphi, \bar{s}') \in H$, donc

$$((G_1^{\cdot}, s_1, s_1'), \varphi', (\bar{G}^{\cdot}, \bar{s}, \bar{s}')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p) \quad \text{et} \quad (G_1^{\cdot}, s_1, s_1') \underset{p_M}{<} (G^{\cdot}, s, s').$$

Si on suppose de plus $(G^{\cdot}, s) \in \bar{N}(p)_0$, on a:

$$s_1' < s' < s \times s$$

et, puisque $p(s_1') \subset p(s_1 \times s_1)$, le théorème 1, I, montre que $s_1' < s_1 \times s_1$, donc $(G_1^{\cdot}, s_1, s_1') \in \bar{N}(p)_0$.

Remarque: Les conditions $(G^{\cdot}, s) \in \bar{N}(p)_0$, $G_1 \subset G$, $s_1 < s$ et $p(s_1) = G_1$ n'entraînent pas toujours l'existence de $s_1' < s'$ tel que $(G_1^{\cdot}, s_1, s_1')$ soit une classe multiplicative fortement p-structurée, même si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite.

Théorème 5: *Soient* $(G^{\cdot}, s, s') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ *et* ϱ *une relation d'équivalence compatible sur* $G^{\cdot}$ *telle que l'on ait:*

$$\bar{\varrho} = (s/\varrho, \tilde{\varrho}, s) \in H^s(M^s, p) \text{ et } \overline{\varrho * \varrho} = (\bar{s}', \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, s') \in H^s(M^s, p),$$

où $\tilde{\varrho}$ *désigne la surjection canonique de* G *sur* G/ϱ. *Alors* $(G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ *est une structure quotient de* $(G^{\cdot}, s, s')$ *dans* $(M, ., \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$.

Démonstration: D'après la proposition 12, I, $G^{\cdot}$ admet une classe multiplicative quotient $G^{\cdot}/\varrho$ et on a:

$$(\varkappa(G^{\cdot}/\varrho), \tilde{\varrho}, \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, \varkappa(G^{\cdot})) \in \square M;$$

la proposition 2, I, entraîne $(s/\varrho, \varkappa(G^{\cdot}/\varrho), \bar{s}') \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} (s, \varkappa(G^{\cdot}), s')$, d'où $\Gamma_\varrho = (G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ et

$$(\Gamma_\varrho, \tilde{\varrho}, (G^{\cdot}, s, s')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p).$$

Soit $\Phi = ((\tilde{G}^{\cdot}, \tilde{s}, \tilde{s}'), \varphi' \tilde{\varrho}, (G^{\cdot}, s, s')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)$; alors on a $\varphi'\tilde{\varrho} * \varphi'\tilde{\varrho} = (\varphi' * \varphi')(\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})$ et les relations:

$$G^{\cdot}/\varrho \overset{pN}{\longrightarrow\!\!<} G^{\cdot}, \quad s/\varrho \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} s \quad \text{et} \quad \bar{s}' \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} s'$$

entraînent:

$$(\tilde{G}^{\cdot}, \varphi', (G^{\cdot}/\varrho)) \in N, \ (\tilde{s}, \varphi', s/\varrho) \in H \quad \text{et} \quad (\tilde{s}', \varphi' * \varphi', \bar{s}') \in H,$$

donc

$$\Phi' = ((\tilde{G}^{\cdot}, \tilde{s}, \tilde{s}'), \varphi', \Gamma_\varrho) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p) \text{ et}$$

$$\Phi = \Phi' \cdot (\Gamma_\varrho, \tilde{\varrho}, (G^{\cdot}, s, s')).$$

Ceci démontre le théorème 5.

Remarque: Si dans le théorème 5 on suppose de plus $(G^{\cdot}, s) \in \bar{N}(p)_0$, il n'en résulte pas que $(G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in \bar{N}(p)_0$, comme il peut être montré par des exemples de classes multiplicatives structurées dans $\tilde{T}$.

Théorème 6: *Supposons* $(M, p, H, .)$ *saturée au-dessus de* M, *à produits finis et résolvante à droite. Soient*

$$\bar{\mu}_i = ((G^{\cdot}, s, s'), \mu_i, (G_i^{\cdot}, s_i, s_i')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p) \ (\textit{resp.} \in \bar{N}(p)),$$

où $i = 1, 2$. *Soit* $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') = (G_1^{\cdot}, s_1, s_1') \times (G_2^{\cdot}, s_2, s_2')$ (théorème 3). *Il existe* $\sigma < s_1 \times s_2$ *et* $\sigma' < S'$ *tels que* $(\bar{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \bar{\mu}_1), \sigma, \sigma')$ *soit une sous-structure de* $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S')$ *dans* $(M, \bar{p}_M, \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$ *(resp. dans* $(M, ., \bar{N}(p), .)$*),* $\bar{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \bar{\mu}_1)$ *désignant la classe multiplicative induite de* $G_1^{\cdot}$ *par* $((G^{\cdot}, \mu_2, G_2^{\cdot}), (G^{\cdot}, \mu_1, G_1^{\cdot}))$.

Démonstration: Puisque $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, le couple $((s, \mu_1 p_1, s_1 \times s_2), (s, \mu_2 p_2, s_1 \times s_2))$ admet un p-noyau σ tel que $p(\sigma) =$

$= \overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1)$, où p_i désigne la projection canonique de $G_1 \times G_2$ sur G_i. **D'après le théorème 3, il existe S' tel que:**

1 $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ (*resp.* $\in N(p)_0$) et $(S', \pi', s_1' \times s_2') \in H_\gamma$, où $\pi'((g_1', g_1), (g_2', g_2)) = ((g_1', g_2'), (g_1, g_2))$. Le couple

$$((s \times s, (\mu_1 * \mu_1)\, p_1' \pi'^{-1}, S'), (s \times s, (\mu_2 * \mu_2)\, p_2' \pi'^{-1}, S')) ,$$

où p_1' est la projection canonique de $p(s_1' \times s_2')$ sur $p(s_1')$, admet un p-noyau $\sigma' < S'$ tel que $p(\sigma') = (\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1)) * (\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1))$. Il résulte donc du théorème 4 que l'on a:

$$(\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma, \sigma') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0 \quad (\text{resp.} \in \overline{N}(p)_0) .$$

2+

2. Graphes structurés

Soit $(M, p_G, G, .)$ la catégorie d'homomorphismes considérée au nº 3, I. Rappelons qu'une unité de G est un graphe (G, β_G, α_G), unité que nous noterons aussi (G, β, α), ou simplement $[G]$. Soit (M, p, H) un foncteur.

Définition 3: *On appellera* graphe p-structuré *un triplet* $([G], B, A)$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) $[G] \in G_0$, $B \in H$, $A \in H$, $p(B) = ([G]_0, \beta_G, G)$, $p(A) = ([G]_0, \alpha_G, G)$;

2) $\beta(A) = \beta(B) = s_0 \in H_0$, $\alpha(A) = \alpha(B) = s \in H_0$;

3) s_0 *est une sous-structure de* s *relativement à* (M^i, p) (voir nº 3, I).

Nous désignerons par $G(p)_0$ la classe des graphes p-structurés.

Définition 4: *On appellera* morphisme entre graphes p-structurés *un triplet* $\overline{\Phi} = (([\overline{G}], \overline{B}, \overline{A}), \Phi, ([G], B, A))$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) $([G], B, A) \in G(p)_0$ *et* $([\overline{G}], \overline{B}, \overline{A}) \in G(p)_0$.

2) $\overline{p}_H(\overline{\Phi}) = \Phi \in H$ *et* $\overline{p}_G(\overline{\Phi}) = ([\overline{G}], p(\Phi), [G]) \in G$.

3) *On a:* $(\overline{B}, \Phi_0, \Phi, B) \in \square H$ *et* $(\overline{A}, \Phi_0, \Phi, A) \in \square H$, *où* $\Phi_0 \underset{p}{<} \Phi$.

Proposition 3: *La classe* $G(p)$ *des morphismes entre graphes p-structurés est une catégorie;* $(G, \overline{p}_G, G(p))$ *et* $(H, \overline{p}_H, G(p))$ *sont des foncteurs.*

Nous supposons désormais que $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes.

Proposition 4: $G(p)_0$ *s'identifie à la classe des couples* $([G], s)$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) $[G] \in G_0$, $s \in H_0$ *et* $p(s) = G$.

2) *Il existe* $s_0 \underset{p}{<} s$ *tel que* $p(s_0) = [G]_0$ *et on a:*

$$(s_0, \alpha_G, s) \in H \quad \text{et} \quad (s_0, \beta_G, s) \in H .$$

Démonstration: Si $([G], s)$ vérifie les conditions 1 et 2, alors

$$([G], (s_0, \beta, s), (s_0, \alpha, s)) \in G(p)_0 .$$

Inversement soit $([G], B, A) \in G(p)_0$, $s_0 = \beta(A)$ et $s = \alpha(A)$; le couple $([G], s)$ vérifie les conditions 1 et 2 et on a:

$$A = (s_0, \alpha_G, s) \quad \text{et} \quad B = (s_0, \beta_G, s);$$

comme la p-sous-structure s_0 de s est entièrement déterminée par la donnée de s et de $[G]_0$ d'après la proposition 6, I, l'application $([G], B, A) \to ([G], s)$ est une bijection.

Proposition 5: *$G(p)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $p^*(G, p_G)$ admettant $G(p)_0$ pour classe d'objets.*

Démonstration: Soit $\bar{\Phi} = (([\bar{G}], \varphi, [G]), (\bar{s}, \varphi, s)) \in p^*(G, p_G)$ tel que $([G], s)$ et $([\bar{G}], \bar{s})$ vérifient les conditions 1 et 2 de la proposition 4. D'après la proposition 2, I, il existe $\Phi_0 = (\bar{s}_0, \varphi_0, s_0) \in H$, où $s_0 < s$, $\bar{s}_0 < \bar{s}$, $p(s_0) = [G]_0$ et $p(\bar{s}_0) = [\bar{G}]_0$. Il en résulte, en posant $\Phi = (\bar{s}, \varphi, s)$,

$$((\bar{s}_0, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}), \Phi_0, \Phi, (s_0, \alpha_G, s)) \in \square H ;$$

$$((\bar{s}_0, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}), \Phi_0, \Phi, (s_0, \beta_G, s)) \in \square H .$$

Donc $\bar{\Phi}$ s'identifie à $(([\bar{G}], \bar{s}), \Phi, ([G], s)) \in G(p)$. – Inversement si $(([\bar{G}], \bar{B}, \bar{A}), \Phi, ([G], B, A)) \in G(p)$, on a $(([\bar{G}], p(\Phi), [G]), \Phi) \in p^*(G, p_G)$.

Nous identifierons désormais $G(p)$ à la sous-catégorie pleine de $p^*(G, p_G)$ lui correspondant d'après la proposition 5. Ainsi un graphe p-structuré sera représenté par le couple $([G], s)$; nous désignerons par s_0 la p-sous-structure de s telle que $p(s_0) = [G]_0$. Un morphisme $\bar{\Phi}$ entre graphes p-structurés sera écrit sous la forme:

$$(([\bar{G}], \bar{s}), \varphi, ([G], s)), \text{ où } ([\bar{G}], \varphi, [G]) \in G \text{ et } (\bar{s}, \varphi, s) \in H .$$

Proposition 6: *Soient $[G] \in G_0$, $s \in H_0$ et $p(s) = G$. Pour que $([G], s)$ soit un graphe p-structuré, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée:*

1) *Il existe $s_0 < s$ tel que $p(s_0) = [G]_0$; on a:*

$$(s, \alpha, s) \in H \quad \textit{et} \quad (s, \beta, s) \in H .$$

1′) *Il existe $s_0 \in H_0$ tel que $(s, \iota, s_0) \in H$, $(s_0, \alpha, s) \in H$ et $(s_0, \beta, s) \in H$.*

Démonstration: Si $([G], s) \in G(p)_0$, les conditions 1 et 1′ sont évidemment vérifiées. – Supposons la condition 1 vérifiée; des relations:

$$(s, \alpha, s) \in H \quad \text{et} \quad \alpha(G) \subset [G]_0, \text{ on déduit } (s_0, \alpha, s) \in H$$

puisque $s_0 < s$; de même $(s_0, \beta, s) \in H$, et $([G], s) \in G(p)_0$. – Supposons la condition 1′ vérifiée. Comme $s_0 = (s_0, \alpha, s) \cdot (s, \iota, s_0)$, il résulte de la proposition 6, I que $s_0 < s$, d'où $([G], s) \in G(p)_0$.

Théorème 7: *Si H est saturé au-dessus de M, $G(p)$ est une sous-catégorie saturée de $p^*(G, p_G)$.*

Démonstration: Soient $([G], s) \in G(p)_0$ et

$$\overline{\Phi} = (([\overline{G}], \varphi, [G]), (\bar{s}, \varphi, s)) \in (p^*(G, p_G))_\gamma .$$

Montrons que $([\overline{G}], \bar{s})$ est un graphe p-structuré. En effet, puisque H est saturé au-dessus de M, il existe $(\bar{s}_0, \varphi_0, s_0) \in H_\gamma$, où $\varphi_0 = \varphi\,\iota$; comme $(\bar{s}, \varphi, s) \in H_\gamma$, on a $\bar{s}_0 < \bar{s}$ d'après la proposition 3, I; il en résulte:

$$(\bar{s}_0, \alpha_{\overline{G}}, \bar{s}) = (\bar{s}_0, \varphi_0, s_0) \cdot (s_0, \alpha_G, s) \cdot (\bar{s}, \varphi, s)^{-1} \in H;$$

de même $(\bar{s}_0, \beta_{\overline{G}}, \bar{s}) \in H$, donc $([\overline{G}], \bar{s}) \in G(p)_0$.

Corollaire: *Si H est saturé au-dessus de M, $(G, \overline{p}_G, G(p), .)$, $(H, \overline{p}_H, G(p), .)$ et $(M, p\overline{p}_H, G(p), .)$ sont des catégories d'homomorphismes; de plus $G(p)$ est saturé au-dessus de G et de H.*

Ce corollaire résulte du théorème 7 et de la proposition 31, I.

Proposition 7: *Si $(M, p, H, .)$ est saturée au-dessus de M et à produits*
1 *finis, $(M, ., G(p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis.*

Démonstration: Soient $([G_i], s_i) \in G(p)_0$, où $i = 1, 2$. On a: $[G_1] \times [G_2] = [G_1 \times G_2] \in G_0$, où $\alpha_{G_1 \times G_2} = \alpha_{G_1} \times \alpha_{G_2}$, $\beta_{G_1 \times G_2} = \beta_{G_1} \times \beta_{G_2}$,

$$(s_1 \times s_2, \iota \times \iota, (s_1)_0 \times (s_2)_0) \in H ,$$

$((s_1)_0 \times (s_2)_0, \alpha_{G_1 \times G_2}, s_1 \times s_2) \in H$ et $((s_1)_0 \times (s_2)_0, \beta_{G_1 \times G_2}, s_1 \times s_2) \in H$ et, d'après la proposition 6, $([G_1 \times G_2], s_1 \times s_2) \in G(p)_0$. On en déduit que $G(p)$ est à produits finis, avec

$$([G_1 \times G_2], s_1 \times s_2) = ([G_1], s_1) \times ([G_2], s_2) .$$

Définition 5: *Une $p\overline{p}_H$-sous-structure (resp. une $p\overline{p}_H$-structure quotient) $([\overline{G}], \bar{s})$ de $([G], s) \in G(p)_0$ sera appelée* sous-graphe (*resp.* graphe quotient) p-structuré *de* $([G], s)$.

2 Puisque $[\overline{G}]$ est un graphe, il résulte du théorème 2, I, que $([\overline{G}], \bar{s})$ est aussi une $\overline{p}_G$-sous-structure (resp. une $\overline{p}_G$-structure quotient) de $([G], s)$.

Proposition 8: *Soient $([G], s) \in G(p)_0$, $[\overline{G}]$ un sous-graphe de $[G]$ et $\bar{s} \underset{p}{<} s$ tel que $p(\bar{s}) = \overline{G}$. S'il existe $\bar{s}_0 < \bar{s}$ tel que $p(\bar{s}_0) = [\overline{G}]_0$, $([\overline{G}], \bar{s})$ est un sous-graphe p-structuré de $([G], s)$.*

Démonstration: Comme $s_0 \prec s, \bar{s}_0 \prec s$ et $p(\bar{s}_0) \subset p(s_0)$, on a $\bar{s}_0 \prec s_0$, d'après le théorème 1, I. $\alpha_{\bar{G}}$ étant une restriction de α_G, les conditions: $\alpha_G(\bar{G}) \subset [\bar{G}]_0$,

$$(s_0, \alpha_G, s) \in H,\ \bar{s}_0 \prec s_0 \text{ et } \bar{s} \prec s \text{ entraînent } (\bar{s}_0, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H;$$

de même $(\bar{s}_0, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H$, et par suite $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p)_0$. Puisque $([\bar{G}], \bar{s})$ est une sous-structure de $([G], s)$ dans $(M, ., p^*(G, p_G), .)$ d'après la proposition 5, I, $([\bar{G}], \bar{s})$ est aussi une sous-structure de $([G], s)$ dans la sous-catégorie pleine $G(p)$ de $p^*(G, p_G)$.

Proposition 9: *Soient* $([G], s) \in G(p)_0$ *et* ϱ *une relation d'équivalence sur* G, *compatible avec* α_G *et* β_G, *telle qu'il existe une* p*-structure quotient* s/ϱ. *S'il existe* $\bar{s}_0 \prec s/\varrho$ *avec* $p(\bar{s}_0) = [G/\varrho]_0$, *alors* $([G/\varrho], s/\varrho)$ *est un graphe quotient* p*-structuré de* $([G], s)$.

Démonstration: Soit $\tilde{\varrho}$ l'application: $f \to f \bmod \varrho$, où $f \in G$. Les conditions:

$$s/\varrho \xrightarrow{p} s,\ (s/\varrho, \tilde{\varrho}\alpha_G, s) = (s/\varrho, \tilde{\varrho}, s) \cdot (s, \alpha_G, s) \in H \quad \text{et} \quad \alpha_{G/\varrho}\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}\alpha_G$$

entraînent $(s/\varrho, \alpha_{G/\varrho}, s/\varrho) \in H$ en vertu de la proposition 2, I; de même $(s/\varrho, \beta_{G/\varrho}, s/\varrho) \in H$ et on a $([G/\varrho], s/\varrho) \in G(p)_0$, d'après la proposition 6. – Comme $([G/\varrho], s/\varrho)$ est une structure quotient de $([G], s)$ dans $(M, ., p^*(G, p_G), .)$ d'après la proposition 5, I, et que $G(p)$ est une sous-catégorie pleine de $p^*(G, p_G)$, on a aussi $([G/\varrho], s/\varrho) \longrightarrow ([G], s)$ dans $(M, ., G(p), .)$.

Proposition 10: *Supposons* $(M, p, H, .)$ *résolvante à droite. Pour qu'un couple* $([G], s)$ *soit un graphe* p*-structuré, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

1) $[G] \in G_0$, $s \in H_0$ *et* $p(s) = G$.
2) *On a:* $(s, \alpha, s) \in H$ *et* $(s, \beta, s) \in H$.

En effet, les conditions sont évidemment nécessaires. Si elles sont vérifiées, le couple $(s, (s, \alpha, s))$ admet un p-noyau $s_0 \prec s$ tel que $p(s_0) = [G]_0$ et on a $([G], s) \in G(p)_0$ en vertu de la proposition 6.

Corollaire 1: *Si* $(M, p, H, .)$ *est résolvante à droite,* $G(p)$ *est une sous-catégorie saturée de* $p^*(G, p_G)$; $(G, \bar{p}_G, G(p), .)$, $(H, \bar{p}_H, G(p), .)$ *et* $(M, p\bar{p}_H, G(p), .)$ *sont des catégories d'homomorphismes.*

Démonstration: Les conditions: $([G], s) \in G(p)_0$ et

$$\bar{\Phi} = (([\bar{G}], \varphi, [G]), (\bar{s}, \varphi, s)) \in p^*(G, p_G)_\gamma$$

entraînent:

$$(\bar{s}, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) = (\bar{s}, \varphi, s) \cdot (s, \alpha_G, s) \cdot (\bar{s}, \varphi, s)^{-1} \in H \quad \text{et} \quad (\bar{s}, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H,$$

d'où $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p)_0$ en vertu de la proposition 10. Par suite $G(p)$ est saturée dans $p^*(G, p_G)$ et le corollaire résulte de la proposition 31, I.

Corollaire 2: *Si* $(M, p, H, .)$ *est résolvante à droite et à produits finis* $(M, ., G(p), .)$ *est à produits finis.*

En effet, si $([G_i], s_i) \in G(p)_0$, $i = 1, 2$, on a:

$$(s_1 \times s_2, \alpha_{G_1 \times G_2}, s_1 \times s_2) \in H \text{ et } (s_1 \times s_2, \beta_{G_1 \times G_2}, s_1 \times s_2) \in H,$$

d'où $([G_1 \times G_2], s_1 \times s_2) = ([G_1], s_1) \times ([G_2], s_2)$ dans $G(p)$.

Théorème 8: *Supposons* $(M, p, H, .)$ *résolvante à droite; soit* $([G], s) \in G(p)_0$. *Si* $[\bar{G}] \underset{p_G}{<} [G]$, $\bar{s} \underset{p}{<} s$ *et* $p(\bar{s}) = \bar{G}$, *alors* $([\bar{G}], \bar{s})$ *est un sous-graphe p-structuré de* $([G], s)$. *Si* ϱ *est une relation d'équivalence sur G compatible avec* α_G *et* β_G *et si s admet une p-structure quotient* s/ϱ *par* ϱ, $([G/\varrho], s/\varrho)$ *est un graphe quotient p-structuré de* $([G], s)$.

Démonstration: Les conditions: $(s, \alpha_G, s) \in H$ et $\alpha_G(\bar{G}) \subset \bar{G}$ entraînent: $(\bar{s}, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H$; de même $(\bar{s}, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H$, donc $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p)$, d'après la proposition 10. – Une démonstration analogue à celle de la proposition 9 prouve: $(s/\varrho, \alpha_{G/\varrho}, s/\varrho) \in H$ et $(s/\varrho, \beta_{G/\varrho}, s/\varrho) \in H$, donc $([G/\varrho], s/\varrho) \in G(p)_0$. Le théorème résulte des propositions 5, I, et 5.

Corollaire: *Si* $(M, p, H, .)$ *est résolvante à droite,* $(M, p\bar{p}_H, G(p), .)$ *est résolvante à droite.*

En effet, soient $\bar{\Phi}_i = (([\bar{G}], \bar{s}), \varphi_i, ([G], s)) \in G(p)$, où $i = 1, 2$. Soit $[G']$ le graphe p_G-noyau du couple $(([\bar{G}], \varphi_1, [G]), ([\bar{G}], \varphi_2, [G]))$ et s' le p-noyau du couple $((\bar{s}, \varphi_1, s), (\bar{s}, \varphi_2, s))$. Il résulte du théorème 8 que $([G'], s')$ est le $p\bar{p}_H$-noyau de $(\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2)$.

1+ Nous supposons désormais $(M, p, H, .)$ à produits finis. Soit H' une sous-catégorie de H contenant H_γ et soit p' la restriction de p à H'.

Définition 6: *On dira que* $([G], s)$ *est un* graphe (p, H')-structuré (*resp.* $(p, (H', H'))$-structuré) *si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1) $([G], s) \in G(p)_0$.

2) *On a* $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H'$, *où* $[\beta, \alpha](f) = (\beta(f), \alpha(f))$, $f \in G$ (*resp. on a* $(s_0, \alpha, s) \in H'$ *et* $(s_0, \beta, s) \in H'$).

Proposition 11: *Soient* $[G] \in G_0$, $s \in H_0$ *et* $p(s) = G$. *Pour que* $([G], s)$ *soit un graphe* (p, H')- (*resp.* $(p, (H', H'))$-)*structuré, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée:*

1) *Il existe* $s_0 \underset{p}{<} s$ *tel que* $p(s_0) = [G]_0$; *on a* $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H'$ (*resp. on a* $(s_0, \alpha, s) \in H'$ *et* $(s_0, \beta, s) \in H'$).

1') *Il existe* $s_0 \in H_0$ *tel que* $p(s_0) = [G]_0$ *et* $(s, \iota, s_0) \in H$; *on a* $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H'$ (*resp. on a* $(s_0, \alpha, s) \in H'$ *et* $(s_0, \beta, s) \in H'$).

Démonstration: Les conditions sont évidemment nécessaires. La condition $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H'$ entraîne $(s_0, \alpha, s) = (s_0, p_1[\beta, \alpha], s) \in H$, où p_1 désigne la projection canonique de $p(s_0 \times s_0)$ sur $p(s_0)$; de même $(s_0, \beta, s) \in H$. Il résulte donc de la condition 1 ou 1' et de la proposition 6 que $([G], s) \in G(p)_0$, ce qui démontre la proposition 11.

Nous désignerons par $G(p, H')$ (resp. $G(p, (H', H'))$) la sous-catégorie pleine de $G(p)$ admettant pour unités les graphes (p, H') (resp. $(p, (H', H'))$)-structurés.
Si la sous-catégorie H' de H vérifie la condition [2]:
(σ) $s < s'$ dans $(M, p, H, .)$ entraîne $s < s'$ dans $(M, p', H', .)$,
la catégorie $G(p, (H', H'))$ est identique à la catégorie $G(p')$.

Proposition 12: *Si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite (resp. saturée au-dessus de M) et si H' est stable par produits dans H* (déf. 2, II, [2]), *et vérifie* (σ), *alors $G(p')$ est une sous-catégorie pleine de $G(p, H')$.*
En effet, soit $([G], s) \in G(p, (H', H'))_0$; d'après le théorème 6, I, il existe $(s_\delta, [\iota, \iota], s) \in H_\gamma$, et par suite:

$$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) = (s_0 \times s_0, \beta \times \alpha, s \times s) \cdot (s \times s, \iota, s_\delta) \cdot (s_\delta, [\iota, \iota], s) \in H',$$

d'où
$$([G], s) \in G(p, H')_0 .$$

Proposition 13: *Supposons que H' vérifie la condition* (σ); *soient $[G] \in G_0$, $s \in H_0$ et $p(s) = G$; on a $([G], s) \in G(p, H')_0$ si, et seulement si:*
1'') *Il existe $s_0 \underset{p}{<} s$ tel que $p(s_0) = [G]_0$ et on a $(s \times s, [\beta, \alpha], s) \in H'$.*
Si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, la condition 1'' est équivalente à:
1''') *On a $(s \times s, [\beta, \alpha], s) \in H'$.*
En effet, les conditions sont évidemment nécessaires. Si 1'' est vérifié, on a: $s_0 \times s_0 \underset{p}{<} s \times s$ et $[\beta, \alpha](G) \subset p(s_0 \times s_0)$, d'où
$$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H' \text{ et } ([G], s) \in G(p, H')_0.$$
La condition 1''' entraîne $(s, \alpha, s) \in H$ et $(s, \beta, s) \in H$, donc $([G], s) \in G(p)_0$ d'après la proposition 10; par suite 1'' est vérifié.

Théorème 9: *Si H est saturé au-dessus de M (resp. si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite), $G(p, H')$ et $G(p, (H', H'))$ sont des sous-catégories saturées de $G(p)$; $(M, p\bar{p}_H, G(p, H'), .)$ et $(M, p\bar{p}_H, G(p, (H', H')), .)$ sont des catégories d'homomorphismes; si de plus H' est stable par produits dans H, ces catégories d'homomorphismes sont à produits finis.* 1

Démonstration: Les conditions $([G], s) \in G(p, H')_0$ et
$$\bar{\Phi} = (([\bar{G}], \bar{s}), \varphi, ([G], s)) \in (G(p))_\gamma$$
entraînent: $\Phi_0 = (\bar{s}_0, \varphi_0, s_0) \in H_\gamma$, $\Phi_0 \times \Phi_0 = (\bar{s}_0 \times s_0, \varphi_0 \times \varphi_0, s_0 \times s_0) \in H_\gamma$ 2

et $(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\beta_{\bar{G}}, \alpha_{\bar{G}}], \bar{s}) = (\Phi_0 \times \Phi_0) \cdot (s_0 \times s_0, [\beta_G, \alpha_G], s) \cdot (\bar{s}, \varphi, s)^{-1} \in H'$, donc $G(p, H')$ est saturé dans $G(p)$. – Les conditions $([G], s) \in G(p, (H', H'))_0$ et $\bar{\Phi} \in (G(p))_\gamma$ entraînent:

$$(\bar{s}_0, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) = (\bar{s}_0, \varphi_0, s_0) \cdot (s_0, \alpha_G, s) \cdot (\bar{s}, \varphi, s)^{-1} \in H'$$

et $(\bar{s}_0, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H'$, d'où $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p, (H', H'))_0$ et $G(p, (H', H'))$ est saturée dans $G(p)$. Les deux dernières affirmations du théorème résultent d'une part du théorème 7, d'autre part des propositions 7 et 10, corollaire 2.

Proposition 14: *Soient* $([G], s) \in G(p, H')_0$ *(resp.* $\in G(p, (H', H'))_0$*),* $\bar{s} \underset{p}{<} s$, $[\bar{G}] \underset{pG}{<} [G]$ *et* $p(\bar{s}) = \bar{G}$. *Si on a* $(s, \iota, \bar{s}) \in H'$ *et s'il existe* $\bar{s}_0 \in H_0$ *tel que* $\bar{s}_0 \times \bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0 \times s_0$ *(resp. que* $\bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0$*) et* $p(\bar{s}_0) = [\bar{G}]_0$, *alors* $([\bar{G}], \bar{s})$ *est une sous-structure de* $([G], s)$ *dans* $(M, ., G(p, H'), .)$ *(resp. dans* $(M, ., G(p, (H', H')), .)$*).*

Démonstration: La condition $\bar{s}_0 \times \bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0 \times s_0$ entraînant $(s_0 \times s_0, \iota, \bar{s}_0 \times \bar{s}_0) \in H$, on trouve:

$$(s, \iota, \bar{s}_0) = (s, \iota, s_0) \cdot (s_0, p_1, s_0 \times s_0) \cdot (s_0 \times s_0, \iota, \bar{s}_0 \times \bar{s}_0) \cdot (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\iota, \iota], \bar{s}_0) \in H,$$

où p_1 désigne la projection canonique de $[G]_0 \times [G]_0$ sur $[G]_0$. On en déduit $(\bar{s}, \iota, \bar{s}_0) \in H$, puisque $\bar{s} \underset{p}{<} s$ et $p(\bar{s}_0) \subset p(\bar{s})$. Par ailleurs, les relations: $\bar{s}_0 \times \bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0 \times s_0$, $[\beta_G, \alpha_G](\bar{G}) \subset [\bar{G}]_0 \times [\bar{G}]_0$ et $(s_0 \times s_0, [\beta_G, \alpha_G], s) \cdot (s, \iota, \bar{s}) \in H'$ entraînent:

$$(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\beta_{\bar{G}}, \alpha_{\bar{G}}], \bar{s}) \in H',$$

donc $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p, H')_0$ en vertu de la proposition 11.

– Si $([G], s) \in G(p, (H', H')_0)$, de la condition $\bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0$, il résulte:

$$(s, \iota, \bar{s}_0) = (s, \iota, s_0) \cdot (s_0, \iota, \bar{s}_0) \in H$$

et par suite $(\bar{s}, \iota, \bar{s}_0) \in H$, car $\bar{s} \underset{p}{<} s$. De plus on a:

$$(\bar{s}_0, \alpha_G, s) \cdot (s, \iota, \bar{s}) \in H', \quad \text{d'où} \quad (\bar{s}_0, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) \underset{p'}{<} (s_0, \alpha_G, s);$$

de même $(\bar{s}_0, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H'$. Par conséquent $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p, (H', H'))_0$. – La proposition 14 est alors conséquence des propositions 5, I et 5.

Corollaire 1: *Soient* $([G], s) \in G(p, H')_0$, $[\bar{G}] \underset{pG}{<} [G]$, $\bar{s} \underset{p}{<} s$ et $p(\bar{s}) = \bar{G}$. *Si* H' *vérifie la condition* (σ) *et s'il existe* $\bar{s}_0 \underset{p}{<} s$ *tel que* $p(\bar{s}_0) = [\bar{G}]_0$, *alors* $([\bar{G}], \bar{s})$ *est une sous-structure de* $([G], s)$ *dans* $(M, ., G(p, H'), .)$.

En effet, les conditions $\bar{s}_0 \underset{p}{<} \bar{s}$, $s_0 \underset{p}{<} s$ et $p(\bar{s}_0) \subset p(s_0)$ entraînent $\bar{s}_0 \underset{p}{<} s_0$ d'après le théorème 1, I, et par suite $\bar{s}_0 \times \bar{s}_0 \underset{p}{<} s_0 \times s_0$ en vertu de la proposition 3, II, [2]. En utilisant la condition (σ), on en déduit $\bar{s}_0 \times \bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0 \times s_0$; de plus $\bar{s} \underset{p}{<} s$ entraîne $\bar{s} \underset{p'}{<} s$, d'où $(s, \iota, \bar{s}) \in H'$. Ainsi les conditions de la proposition 14 sont vérifiées et le corollaire 1 en résulte.

Corollaire 2: *Si H' vérifie la condition (σ) et si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, les conditions $([G], s) \in G(p, H')_0$, $[\bar{G}] < [G]$, $\bar{s} \underset{p}{<} s$ et $p(\bar{s}) = \bar{G}$ entraînent $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p, H')_0$. De plus $(M, ., G(p, H'), .)$ est résolvante à droite.*

Ceci résulte du théorème 8, et du corollaire 1.

Proposition 15: *Soient $([G], s) \in G(p, H')_0$, ϱ une relation d'équivalence sur G compatible avec α_G* et *β_G et $s/\varrho \overset{p'}{-\!\!<} s$ tel que $p(s/\varrho) = G/\varrho$. Si H' est stable par produits et vérifie la condition (σ) et s'il existe $\bar{s}_0 \in H_0$ tel que $\bar{s}_0 \underset{p}{<} s/\varrho$ et $p(\bar{s}_0) = [G/\varrho]_0$, alors $([G/\varrho], s/\varrho)$ est une structure quotient de $([G], s)$* dans *$(M, ., G(p, H') \cap p'^*(G, p_G), .)$.* 1

Démonstration: En vertu de (σ), on a $\bar{s}_0 \underset{p'}{<} s/\varrho$. Soit $\tilde{\varrho}$ la surjection canonique de G sur G/ϱ. Comme $(s/\varrho \times s/\varrho, \tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho}, s \times s) \in H'$ et $(s \times s, [\beta_G, \alpha_G], s) \in H'$, on a $(s/\varrho \times s/\varrho, (\tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho})[\beta_G, \alpha_G], s) \in H'$ et les relations $s/\varrho \overset{p'}{-\!\!<} s$ et $[\beta_{G/\varrho}, \alpha_{G/\varrho}]\tilde{\varrho} = (\tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho})[\beta_G, \alpha_G]$ entraînent:

$$(s/\varrho \times s/\varrho, [\beta_{G/\varrho}, \alpha_{G/\varrho}], s/\varrho) \in H', \quad \text{d'où} \quad ([G/\varrho], s/\varrho) \in G(p, H')_0,$$

en tenant compte de la proposition 13. – De plus $([G/\varrho], s/\varrho)$ est une structure quotient de $([G], s)$ dans $p'^*(G, p_G)$ d'après la proposition 5, I; comme $G(p, H')$ est une sous-catégorie pleine de $p^*(G, p_G)$, la sous-catégorie $G(p, H') \cap p'^*(G, p_G)$ est pleine dans $p'^*(G, p_G)$ et $([G/\varrho], s/\varrho)$ est aussi une structure quotient de $([G], s)$ dans $(M, ., G(p, H') \cap p'^*(G, p_G), .)$.

Corollaire: *Supposons que H' vérifie la condition (σ) et soit stable par produits et que $(M, p, H, .)$ soit résolvante à droite. Soient $([G], s) \in G(p, H')_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur G compatible avec α_G et β_G et telle que s admette une p'-structure quotient par ϱ. Alors on a $([G/\varrho], s/\varrho) \in G(p, H')_0$.*

En effet, la démonstration précédente montre que l'on a:

$$(s/\varrho \times s/\varrho, [\beta_{G/\varrho}, \beta_{G/\varrho}], s/\varrho) \in H',$$

et le corollaire résulte de la proposition 10.

3. Graphes multiplicatifs structurés

Soit $(M, p'_N, N', .)$ la catégorie d'homomorphismes construite au nº 3, I, où p'_N est la restriction de p_N à la sous-catégorie N' de N. Soit $G^\cdot \in N'_0$; $G^\cdot$ est donc un graphe multiplicatif, dont le graphe sous-jacent sera désigné par $[G^\cdot]$. Soient $G^\cdot_\alpha$ et $G^\cdot_\beta$ les classes des couples $(f, \alpha(f))$ et $(\beta(f), f)$ resp., où $f \in G$; soient γ_α et γ_β les bijections canoniques:

$$[\iota, \alpha] : f \to (f, \alpha(f)) \quad \text{et} \quad [\beta, \iota] : f \to (\beta(f), f)$$

de $G^\cdot$ sur $G^\cdot_\alpha$ et sur $G^\cdot_\beta$ respectivement.

Soit (M, p, H) un foncteur. Nous reprenons les notations des nos 1 et 2; en particulier $\overline{p}_G$ et $\overline{p}_H$ désignent les foncteurs canoniques de la catégorie $G(p)$ vers G et H resp.; $\breve{p}_N$ est le foncteur canonique de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ vers N et $\breve{p}_H$ le foncteur de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ vers H défini par: $((\overline{G^\cdot}, \overline{K}), \Phi, \Phi', (G^\cdot, K)) \to \Phi$.

Définition 7: *On appellera* graphe multiplicatif p-structuré (*resp.* fortement p-structuré) *un quadruplet* $(G^\cdot, K, B, A)$ *vérifiant les conditions:*

1) $G^\cdot \in N'_0$; $(G^\cdot, K) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ (*resp.* $\in \overline{N}(p)_0$), $([G], B, A) \in G(p)_0$.

2) *On a:* $\alpha(A) = \beta(K) = s \in H_0$.

3) *Il existe* $\Gamma_\alpha \in H_\gamma$ *et une p-injection* j_α *telle que* $K \cdot j_\alpha = \Gamma_\alpha^{-1}$ *et* $p(\Gamma_\alpha) = \gamma_\alpha$; *il existe* $\Gamma_\beta \in H_\gamma$ *tel que* $\alpha(\Gamma_\beta) = s$ *et* $p(\Gamma_\beta) = \gamma_\beta$.

Ces conditions entraînent que $j_\beta = j_\alpha \cdot \Gamma_\alpha \cdot \Gamma_\beta^{-1}$ est une p-injection telle que $K \cdot j_\beta = \Gamma_\beta^{-1}$.

Soit $N'(p)_0$ (resp. $\overline{N}'(p)_0$) la classe des graphes multiplicatifs p-structurés (resp. fortement p-structurés).

Les conditions 1 et 2 de la définition 7 signifient que $(G^\cdot, K, B, A)$ s'identifie à une unité $((G^\cdot, K), ([G^\cdot], B, A))$ de $\overline{p}^*_H(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \breve{p}_H)$ (resp. de $\overline{p}^*_H(\overline{N}(p), \breve{p}_H))$ telle que $G^\cdot \in N'_0$.

Définition 8: *Un morphisme de la sous-catégorie pleine* $N'(p)$ (*resp.* $\overline{N}'(p)$) *de* $\overline{p}^*_H(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \breve{p}_H)$ *ayant* $N'(p)_0$ (*resp.* $\overline{N}'(p)_0$) *pour classe d'objets sera appelé* morphisme entre graphes multiplicatifs p-structurés (*resp.* fortement p-structurés).

Nous supposerons désormais que $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes.

Un graphe multiplicatif p-structuré s'identifie alors à un triplet $(G^\cdot, s, s')$ vérifiant les conditions suivantes:

1) $G^\cdot \in N'_0$; $(G^\cdot, s, s') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$, $([G^\cdot], s) \in G(p)_0$.

2) Il existe $s_\alpha < s'$ tel que $p(s_\alpha) = G^\cdot_\alpha$ et $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H_\gamma$.

3) Il existe $s_\beta \in H_0$ tel que $(s_\beta, \gamma_\beta, s) \in H_\gamma$.

La condition 2 entraîne que $(G^\cdot, s, s')$ est entièrement déterminé par la donnée du couple $(G^\cdot, s')$, en vertu de la proposition 6, I; si de plus $(G^\cdot, s, s')$ est fortement p-structuré, la donnée du couple $(G^\cdot, s)$ détermine aussi $(G^\cdot, s, s')$. Par suite nous représenterons indifféremment un graphe multiplicatif p-structuré sous la forme $(G^\cdot, s, s')$ ou $(G^\cdot, s')$; s'il est fortement p-structuré, on peut aussi le représenter par $(G^\cdot, s)$.

Proposition 16: *Un morphisme entre graphes multiplicatifs p-structurés s'identifie à un triplet* $\hat{\Phi} = ((\bar{G}^\cdot, \bar{s}'), \varphi, (G^\cdot, s'))$ *vérifiant les conditions suivantes:* $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$; $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}') \in N'(p)_0$; $(\bar{G}, \varphi, G) \in M$; $(\bar{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot) \in N'$ et $(\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \in H$. *Un morphisme entre graphes multiplicatifs fortement p-structurés s'identifie à un triplet*

$$\hat{\Phi} = ((\bar{G}^\cdot, \bar{s}), \varphi, (G^\cdot, s)) \ \textit{tel que} \ (G^\cdot, s) \in \bar{N}'(p)_0, (\bar{G}^\cdot, \bar{s}) \in \bar{N}'(p)_0,$$

$$(\bar{G}, \varphi, G) \in M, \ (\bar{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot) \in N' \ \textit{et} \ (\bar{s}, \varphi, s) \in H.$$

En effet, les conditions $s_\alpha < s'$, $\bar{s}_{\bar{\alpha}} < \bar{s}'$, $(\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \in H$ et $(\varphi * \varphi)(G^\cdot_\alpha) \subset \bar{G}^\cdot_{\bar{\alpha}}$ entraînent, en vertu de la proposition 2, I: $(\bar{s}_{\bar{\alpha}}, (\varphi * \varphi)\,\iota, s_\alpha) \in H$, et par suite:

$$(\bar{s}, \varphi, s) = (\bar{s}_{\bar{\alpha}}, \gamma_{\bar{\alpha}}, \bar{s})^{-1} \cdot (\bar{s}_{\bar{\alpha}}, (\varphi * \varphi)\,\iota, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H,$$

d'où $\hat{\Phi} \in N'(p)$. La fin de la proposition résulte de la proposition 2.

Proposition 17: *Soit* $(G^\cdot, s, s')$ *un triplet vérifiant les conditions:*
1) $G^\cdot \in N'_0$; $(G^\cdot, s, s') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ *et* $([G^\cdot], s) \in G(p)_0$.
Si H *est saturé au-dessus de* M, $(G^\cdot, s, s') \in N'(p)_0$ *est équivalent à:*
2) $(s', \gamma_\alpha, s) \in H$.

1+

Démonstration: Si $(G^\cdot, s, s') \in N'(p)_0$, on a:

$$(s', \gamma_\alpha, s) = (s', \iota, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H.$$

Supposons la condition 2 vérifiée. Il existe $s_\alpha \in H_0$ et $s_\beta \in H_0$ tels que $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H_\gamma$ et $(s_\beta, \gamma_\beta, s) \in H_\gamma$; on obtient:

$$(s', \iota, s_\alpha) = (s', \gamma_\alpha, s) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s)^{-1} \in H$$

et

$$(s_\alpha, \gamma_\alpha\, \varkappa(G^\cdot), s') = (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \cdot (s, \varkappa(G^\cdot), s') \in H.$$

Comme $(s_\alpha, \gamma_\alpha\, \varkappa(G^\cdot), s') \cdot (s', \iota, s_\alpha) = s_\alpha$, il résulte de la proposition duale de la proposition 6, I, que s_α est une p-sous-structure de s'; par suite $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$.

Si $\hat{\Phi} = ((\bar{G}^\cdot, \bar{s}'), \varphi, (G^\cdot, s')) \in N'(p)$, nous poserons:

$$\hat{p}_H(\hat{\Phi}) = (\bar{s}, \varphi, s) \in H \quad \text{et} \quad \hat{p}_{N'}(\hat{\Phi}) = (\bar{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot) \in N'.$$

Théorème 10: *Si H est saturé au-dessus de M (resp. si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite), $N'(p)$ est une sous-catégorie saturée de la catégorie $\overline{p}^*_H(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \grave{p}_H)$. Si H est saturé au-dessus de M, $\overline{N}'(p)$ est une sous-catégorie saturée de $N'(p)$.*

Démonstration: Soit $(G^\cdot, s, s') \in N'(p)_0$ et:
$\hat{\Phi} = (((\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}'), \varphi, (G^\cdot, s, s')), (([\overline{G}], \bar{s}), \varphi, ([G^\cdot], s))) \in \overline{p}^*_H(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \grave{p}_H)_\gamma$; comme N' est saturé au-dessus de M, on a $\overline{G}^\cdot \in N'_0$ et $[\overline{G}] = [\overline{G}^\cdot]$. De plus $(\bar{s}', \gamma_{\alpha_{\overline{G}}}, \bar{s}) = (\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \cdot (s', \gamma_\alpha, s) \cdot (\bar{s}, \varphi, s)^{-1} \in H$, ce qui entraîne $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') \in N'(p)_0$ en vertu de la proposition 17. – Si on suppose $(G^\cdot, s) \in \overline{N}'(p)_0$, on trouve $(G^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') \in \overline{N}'(p)_0$, car $\overline{N}(p)$ est une sous-catégorie saturée de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ d'après le théorème 2.

Corollaire: *Si H est saturé au-dessus de M, $(H, \hat{p}_H, N'(p), .)$, $(N', \hat{p}_{N'}, N'(p), .)$, $(M, p_{N'}\hat{p}_{N'}, N'(p), .)$, $(H, ., \overline{N}'(p), .)$, $(N', ., \overline{N}'(p), .)$ et $(M, ., \overline{N}'(p), .)$ sont des catégories d'homomorphismes saturées.*

Ce corollaire résulte de la proposition 31, I.

Théorème 11: *Si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, $\overline{N}'(p)$ est identique à la sous-catégorie pleine et saturée de $\overline{p}^*_H(\overline{N}(p), \grave{p}_H)$ ayant pour unités les couples $((G^\cdot, s, s'), ([G^\cdot], s))$, où $G^\cdot \in N'_0$.*

Démonstration: Montrons que les conditions $G^\cdot \in N'_0$, $(G^\cdot, s, s') \in \overline{N}(p)_0$ et
1 $([G'], s) \in G(p)_0$ entraînent $(G^\cdot, s') \in \overline{N}'(p)_0$. On a:

$$(s, p_2, s \times s) \in H \quad \text{et} \quad (s, \alpha, s) \cdot (s, p_1, s \times s) \in H,$$

où p_i désigne la i^e projection canonique de $G \times G$ sur G. Puisque $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, le couple $((s, p_2, s \times s), (s, \alpha p_1, s \times s))$ admet un p-noyau s_α tel que $p(s_\alpha) = G^\cdot_\alpha$. Les relations:

$$s' \prec s \times s \quad \text{et} \quad G^\cdot_\alpha \subset G^\cdot * G^\cdot$$

entraînent $s_\alpha \prec s'$, d'après le théorème 1, I. Comme $s \times s$ est un produit dans H, on a:

$$(s \times s, \gamma_\alpha, s) = (s \times s, [\iota, \alpha], s) \in H,$$

et par suite $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H$, puisque $s_\alpha \prec s \times s$. Par ailleurs, on a:

$$(s, \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) = (s, \varkappa(G^\cdot), s') \cdot (s', \iota, s_\alpha) \in H.$$

On en déduit $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H_\gamma$. On montre de même que l'on a $(s_\beta, \gamma_\beta, s) \in H_\gamma$, d'où $(G^\cdot, s) \in \overline{N}'(p)_0$. Le théorème résulte alors du fait que N' est saturé dans N.

Corollaire: *Si* $(M, p, H, .)$ *est résolvante à droite et à produits finis,* $(N', \hat{p}_{N'}, \overline{N}'(p), .)$ *est une catégorie d'homomorphismes.*

Démonstration: Soient $(G^\cdot, s) \in \overline{N}'(p)_0$, $(G^\cdot, s_1) \in \overline{N}'(p)_0$ et

$$\hat{\Phi} = ((\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}'), \varphi, (G^\cdot, s, s')) \in (\overline{N}'(p))_\gamma .$$

Puisque (M, p, H_γ) est une espèce de structures, il existe $(\bar{s}_1, \varphi, s_1) \in H_\gamma$ et il résulte des corollaires du théorème 2 et de la proposition 10 que l'on a $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}_1) \in \overline{N}(p)_0$ et $([\overline{G}^\cdot], \bar{s}_1) \in G(p)_0$; donc $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}_1) \in \overline{N}'(p)_0$ en vertu du théorème 11.

Cas particulier: La définition donnée dans [2] d'une catégorie H-structurée $(C^\cdot, s)$ est équivalente à: $C^\cdot$ est une catégorie et on a $(C^\cdot, s) \in \overline{p}^*_H(\overline{N}(p), \check{p}_H)_0$. Il résulte du théorème 11 que, si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, cette définition est équivalente à: $C^\cdot$ est une catégorie et on a $(C^\cdot, s) \in \overline{N}'(p)_0$.

Remarques: 1. En général si H n'est pas saturé au-dessus de M, $N'(p)$ et $\overline{N}'(p)$ ne sont pas des catégories d'homomorphismes au-dessus de H ni au-dessus de M. Toutefois si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite et à produits 1
finis, la catégorie des foncteurs H-structurés est une catégorie d'homomorphismes au-dessus de H (voir [2] théorème 11, II); ceci résulte des propriétés suivantes: si $(C^\cdot, s)$ est une catégorie H-structurée, s' est le p-noyau du couple $((s, \alpha\, p_1, s \times s), (s, \beta\, p_2, s \times s))$; par ailleurs H_γ opère sur les p-injections définissant un p-noyau, en vertu de la proposition 16, I, [2].
2. Si H n'est pas saturé au-dessus de M, on peut se ramener à ce cas en remplaçant H par son élargissement [3] $\tilde{H}$ au-dessus de M. Cette opération ne change 2
pas les notions de sous-structures et de structures quotient dans H, mais peut introduire de nouvelles sous-structures ou structures quotient.

Nous supposerons désormais que $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de M.

Théorème 12: *Si* $(M, p, H, .)$ *est à produits finis,* $(M, ., N'(p), .)$ *et* $(M, ., \overline{N}'(p), .)$ *sont des catégories d'homomorphismes à produits finis.*

Démonstration: Soients $(G_i, s_i, s_i') \in N'(p)_0$ (resp. $\in \overline{N}'(p)_0$), où $i = 1, 2$. 3
D'après la proposition 7 et le théorème 3, on a:

$$([G_1^\cdot \times G_2^\cdot], s_1 \times s_2) \in G(p)_0 ,$$

et $(G_1^\cdot \times G_2^\cdot, s_1 \times s_2, S') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ (resp. $\in \overline{N}(p)_0$), où $(S', \pi', s_1' \times s_2') \in H_\gamma$

et $\pi'((g_1', g_1), (g_2', g_2)) = ((g_1', g_2'), (g_1, g_2))$. Il en résulte:
$(S', \gamma_{\alpha_{G_1^\cdot \times G_2^\cdot}}, s_1 \times s_2) = (S', \pi', s_1' \times s_2') \cdot [(s_1', \gamma_{\alpha_{G_1^\cdot}}, s_1) \times (s_2', \gamma_{\alpha_{G_2^\cdot}}, s_2)] \in H.$
En vertu de la proposition 17, ceci prouve que l'on a:

$$(G_1^\cdot \times G_2^\cdot, s_1 \times s_2, S') \in N'(p)_0 \text{ (resp. } \in \overline{N}'(p)_0) .$$

Comme $(M, p, H, .)$ et $(M, ., N', .)$ sont à produits finis, on en déduit $(G_1^\cdot \times G_2^\cdot, s_1 \times s_2, S') = (G_1^\cdot, s_1, s_1') \times (G_2^\cdot, s_2, s_2')$ dans $N'(p)$ (resp. $\overline{N}'(p)$).

Soit $(G^\cdot, s')$ un couple vérifiant la condition suivante:
1 1) $G^\cdot \in N_0'$, $s' \in H_0$ et $p(s') = G^\cdot * G^\cdot$.
Considérons les conditions suivantes:
2) Il existe $s_\alpha < s'$ tel que $p(s_\alpha) = G_\alpha^\cdot$ et il existe $s_0' < s'$ tel que $p(s_0') = (G_0^\cdot \times G_0^\cdot) \frown G_\alpha^\cdot$.
2') Il existe $(s', \iota, s_\alpha) \in H$ et $(s', \iota, s_0') \in H$ tels que:

$$p(s_\alpha) = G_\alpha^\cdot \quad \text{et} \quad p(s_0') = (G_0^\cdot \times G_0^\cdot) \frown G_\alpha^\cdot .$$

3) $(s', \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H$;
3') $(s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H$;
4) $(s', \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H$ et $(s', \gamma_\alpha \beta \varkappa(G^\cdot), s') \in H$;
4') $(s_0', \gamma_\alpha \alpha \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \in H$ et $(s_0', \gamma_\alpha \beta \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \in H$.

Proposition 18: *On a* $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$ *si, et seulement si, les conditions* 1, 2, 3, 4 (*resp.* 1, 2, 3', 4'; *resp.* 1, 2', 3', 4') *ci-dessus sont vérifiées. Si* $(M, p, H, .)$ *est résolvante à droite, on a* $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$ *si, et seulement si, les conditions* 1, 3 *et* 4 *sont vérifiées.*

Démonstration: Soit $(G^\cdot, s, s') \in N'(p)_0$; il existe $s_0 < s$, où $p(s_0) = G_0^\cdot$, et par suite $(s_0', \gamma_\alpha \iota, s_0) \in H_\gamma$ avec $p(s_0') = (G_0^\cdot \times G_0^\cdot) \frown G_\alpha^\cdot$; comme $s_0 < s$ et $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H_\gamma$, on a $s_0' < s_\alpha < s'$, d'après la proposition 3, I. On en déduit que les conditions indiquées sont vérifiées, à l'aide des relations:

$$(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \cdot (s, \varkappa(G^\cdot), s') \in H; \; (s_0', \gamma_\alpha \iota, s_0) \cdot (s_0, \alpha, s) \cdot (s, \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \in H$$

et

$$(s', \iota, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \cdot (s, \alpha, s) \cdot (s, \varkappa(G^\cdot), s') \in H .$$

Supposons les conditions 1, 2, 3, 4 vérifiées. D'après le théorème 1, I, la condition 2 entraîne $s_0' < s_\alpha$. H étant saturé au-dessus de M, il existe $(s, \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \in H_\gamma$ et $(s_0, \gamma_\alpha^{-1} \iota, s_0') \in H_\gamma$, où $p(s_0) = G_0^\cdot$; en vertu de la proposition 3, I, on a $s_0 < s$. La condition 3 et les relations $s_\alpha < s'$ et $\gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot)(G^\cdot * G^\cdot) \subset G_\alpha^\cdot$ ont pour conséquence $(s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H$, d'où $(s, \varkappa(G^\cdot), s') = (s, \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H$ et $(G^\cdot, s, s') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$. La condition 4 et les relations: $s_\alpha < s'$ et $\gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot)(G_\alpha^\cdot) \subset G_\alpha^\cdot$ entraînant $(s_\alpha, \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot) \iota, s_\alpha) \in H$, on trouve

$$(s, \alpha, s) = (s, \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot)\, \iota, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H .$$

De même $(s, \beta, s) \in H$, d'où $([G^\cdot], s) \in \mathsf{G}(p)_0$ et $(G^\cdot, s, s') \in N'(p)_0$. – Si les conditions 1, 2, 3′, 4′ sont vérifiées, on a:

$$(s', \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot), s') = (s', \iota, s_0') \cdot (s_0', \gamma_\alpha \alpha \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H .$$

On en déduit que les conditions 1, 2, 3, 4 sont vérifiées, d'où $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$. – Si les conditions 1, 2′, 3′, 4′ sont vérifiées, les égalités:

$$(s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \cdot (s', \iota, s_\alpha) = s_\alpha$$

et

$$((s_0', \gamma_\alpha \alpha \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s')) \cdot (s', \iota, s_0') = s_0'$$

entraînent $s_\alpha < s'$ et $s_0' < s'$, en utilisant la proposition 6, I. Donc les conditions 1, 2, 3′ et 4′ sont vérifiées et $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$. – Enfin supposons $(M, p, H, .)$ résolvante à droite et les conditions 1, 3, 4 vérifiées. Le couple $(s', (s', \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s'))$ admet un p-noyau s_α tel que $p(s_\alpha) = G_\alpha^\cdot$ et le couple $(s', (s', \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot), s'))$ admet un p-noyau s_0' tel que l'on ait $p(s_0') = (G_0^\cdot \times G_0^\cdot) \cap G_\alpha^\cdot$. Par conséquent la condition 2 est aussi vérifiée, et par suite $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$.

Définition 9: *Une $p\hat{p}_H$-sous-structure (resp. structure quotient) de $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$ sera appelée* sous-graphe multiplicatif (*resp.* graphe multiplicatif quotient) p-structuré *de $(G^\cdot, s')$. On définit de même les sous-graphes multiplicatifs (resp. graphes multiplicatifs quotient)* fortement p-structurés *en remplaçant $N'(p)$ par $\overline{N}'(p)$.*

Théorème 13: *Supposons $(M, p, H, .)$ résolvante à droite. Soient $(G^\cdot, s, s') \in N'(p)_0$ (resp. $\in \overline{N}'(p)_0$), $\overline{G}^\cdot$ une sous-structure de $G^\cdot$ dans $(M, ., N', .)$ et $\bar{s}' < s'$ tel que $p(\bar{s}') = \overline{G}^\cdot * \overline{G}^\cdot$. Alors $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}')$ est un sous-graphe multiplicatif p-structuré (resp. fortement p-structuré) de $(G^\cdot, s')$.* 1¶

Démonstration: Les conditions $\bar{s}' < s'$, $(s', \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H$ et $\gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot)(\overline{G}^\cdot * \overline{G}^\cdot) \subset \overline{G}^\cdot * \overline{G}^\cdot$ entraînent $(\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}} \varkappa(\overline{G}^\cdot), \bar{s}') \in H$. Le couple $(\bar{s}', (\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}} \varkappa(\overline{G}^\cdot), \bar{s}'))$ admet un p-noyau $\bar{s}_{\bar{\alpha}} < \bar{s}'$ tel que $p(\bar{s}_{\bar{\alpha}}) = \overline{G}_{\bar{\alpha}}^\cdot$; comme $\bar{s}_{\bar{\alpha}} < \bar{s}' < s'$ et $s_\alpha < s'$, on a $\bar{s}_{\bar{\alpha}} < s_\alpha$, en vertu du théorème 1, I. De plus, H étant saturé au-dessus de M, il existe $(\bar{s}, \gamma_{\bar{\alpha}}^{-1}, \bar{s}_{\bar{\alpha}}) \in H$, avec $p(\bar{s}) = \overline{G}^\cdot$; d'où $\bar{s} < s$, en vertu de la proposition 3, I. Des théorèmes 4 et 8, il résulte alors: $([\overline{G}^\cdot], \bar{s}) \in \mathsf{G}(p)_0$; $([\overline{G}^\cdot], \bar{s}) \underset{p\bar{p}_H}{\leq} ([G^\cdot], s)$; $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ et $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}') \underset{p\grave{p}_H}{\leq} (G^\cdot, s')$. Donc $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}') \in N'(p)_0$ et $(G^\cdot, \bar{s}') < (G^\cdot, s')$ dans $(M, ., \overline{p}_H^*(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \grave{p}_H), .)$ 2 d'après la proposition 5, I; puisque $N'(p)$ est une sous-catégorie pleine de $\overline{p}_H^*(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \grave{p}_H)$, $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}')$ est un sous-graphe multiplicatif de

$(G^\cdot, s')$. – Supposons de plus $(G^\cdot, s) \in \overline{N}'(p)_0$. D'après le théorème 6, I, on a $\bar{s} \times \bar{s} < s \times s$; par ailleurs les conditions $\bar{s}' < s' < s \times s$ et $p(\bar{s}') \subset \bar{G} \times \bar{G}$ entraînent $\bar{s}' < \bar{s} \times \bar{s}$. Par conséquent $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}) \in \overline{N}'(p)_0$. Comme $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}) \underset{p\hat{p}_H}{<} (G^\cdot, s)$ et comme $\overline{N}'(p)$ est pleine dans $N'(p)$, on trouve $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}) < (G^\cdot, s)$ dans $(M, p\hat{p}_H, \overline{N}'(p), .)$.

Théorème 14: *Supposons $(M, p, H, .)$ résolvante à droite. Soient $(G^\cdot, s, s') \in N'(p)_0$, ϱ une relation d'équivalence bicompatible sur $G^\cdot$ et $\tilde{\varrho}$ la surjection canonique associée. Si on a:*

$$(\bar{s}', \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, s') \in H^s(M^s, p) \quad et \quad p(\bar{s}') = (G^\cdot/\varrho) * (G^\cdot/\varrho),$$

alors il existe $s/\varrho \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} s$ et $(G^\cdot/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ est un graphe multiplicatif quotient p-structuré de $(G^\cdot, s, s')$; de plus on a $(s/\varrho)_0 \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} s_0$.

1+ **Démonstration:** D'après la proposition 21, I, $G^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif; nous désignerons par $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ resp. ses applications source et but. Comme $\bar{s}' \longrightarrow\!\!< s'$, les relations:

2 $$(s', \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H \quad \text{et} \quad (\tilde{\varrho} * \varrho)\, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot) = \gamma_{\bar{\alpha}} \varkappa(G^\cdot/\varrho)\, (\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})$$

entraînent
$$(\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}} \varkappa(G^\cdot/\varrho), \bar{s}') \in H,$$

et les relations:

$$(s', \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H \quad \text{et} \quad (\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})\, \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot) = \gamma_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} \varkappa(G^\cdot/\varrho)\, (\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})$$

entraînent
$$(\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} \varkappa(G^\cdot/\varrho), \bar{s}') \in H;$$

de même
$$(\bar{s}', \gamma_{\bar{\beta}} \bar{\beta} \varkappa(G^\cdot/\varrho), \bar{s}') \in H.$$

3 D'après la proposition 18, il en résulte $(G^\cdot/\varrho, s/\varrho, s') \in N'(p)_0$. Le couple $(\bar{s}', (\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}} \varkappa(G^\cdot/\varrho), \bar{s}'))$ admet un p-noyau $\bar{s}_{\bar{\alpha}}$ tel que $p(\bar{s}_{\bar{\alpha}}) = (G^\cdot/\varrho)_{\bar{\alpha}} = \bar{G}^\cdot_{\bar{\alpha}}$. Comme $(\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})(G^\cdot_\alpha) = \bar{G}^\cdot_{\bar{\alpha}}$, on a

$$(\bar{s}_{\bar{\alpha}}, \tilde{\varrho}_\alpha, s_\alpha) \in H \quad \text{et} \quad (\bar{s}_{\bar{\alpha}}, \tilde{\varrho}_\alpha, s_\alpha) < (\bar{s}', \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, s');$$

de plus on a:

$$(s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H \quad \text{et} \quad (s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \cdot (s', \iota, s_\alpha) = s_\alpha;$$

à l'aide la proposition 4, I, on en déduit $(\bar{s}_{\bar{\alpha}}, \tilde{\varrho}_\alpha, s_\alpha) \in H^s(M^s, p)$. H étant saturé au-dessus de M, il existe $(\bar{s}, \gamma_{\bar{\alpha}}^{-1}, \bar{s}_{\bar{\alpha}}) \in H_\gamma$. On obtient:

$$(\bar{s}, \tilde{\varrho}, s) = (\bar{s}, \gamma_{\bar{\alpha}}^{-1}, \bar{s}_{\bar{\alpha}}) \cdot (\bar{s}_{\bar{\alpha}}, \tilde{\varrho}_\alpha, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H^s(M^s, p),$$

d'où $\bar{s} = s/\varrho \longrightarrow\!\!< s$. Des théorèmes 8 et 5, il résulte que $([G^\cdot/\varrho], s/\varrho)$ est un
4 graphe quotient p-structuré de $([G^\cdot], s)$ et que $([G^\cdot/\varrho], \bar{s}/\varrho, s')$ est une classe multiplicative quotient p-structuré de $(G^\cdot, s, \bar{s}')$. En utilisant la proposition 5,I et le fait que $N'(p)$ est une sous-catégorie pleine de $\bar{p}_H^*(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \check{p}_H)$, on

voit que $(G^{\cdot}/\varrho, \bar{s}')$ est un graphe multiplicatif quotient p-structuré de $(G^{\cdot}, s')$. – Les relations: $s_0 < s$, $(s/\varrho)_0 < s/\varrho$ et $\tilde{\varrho}(G_0^{\cdot}) \subset (G^{\cdot}/\varrho)_0$ entraînant $((s/\varrho)_0, \tilde{\varrho}_0, s_0) < (s/\varrho, \tilde{\varrho}, s)$, on trouve, à l'aide de la proposition 4, I, $s/\varrho_0 \overset{p}{\prec} s_0$.

Remarque: Si on suppose dans le théorème 14 que $(G^{\cdot}, s) \in \bar{N}'(p)_0$, il n'en résulte pas que $(G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho) \in \bar{N}'(\varrho)_0$; nous verrons plus loin des cas où il en est ainsi. 1+

Soient H' et H'' deux sous-catégories de H contenant H_γ. Pour simplifier, nous supposons $(M, p, H, .)$ à produits finis. Soient p' et p'' les restrictions de p à H' et à H'' resp.

Définition 10: *On dira que* $(G^{\cdot}, s, s')$ *est un* graphe multiplicatif (p, H', H'') (*resp.* $(p, (H', H''), H'')$)-structuré *si les conditions suivantes sont vérifiées:* 2

1) $(G^{\cdot}, s, s')$ *est un graphe multiplicatif* p*-structuré.*

2) $([G^{\cdot}], s)$ *est un graphe* (p, H') (*resp.* $(p, (H', H'))$)*-structuré.*

3) $(G^{\cdot}, s, s')$ *est une classe multiplicative* p''*-structurée.*

Si la condition 1 *est remplacée par la condition:*

1') $(G^{\cdot}, s, s')$ *est un graphe multiplicatif fortement* p*-structuré,*

on dira que $(G^{\cdot}, s, s')$ *est un* graphe multiplicatif fortement (p, H', H'') (*resp.* $(p, (H, H'), H'')$)-structuré. 3

Remarque: Un graphe multiplicatif $(G^{\cdot}, s, s')$ fortement (p, H', H'')-structuré peut ne pas être une classe multiplicative fortement p''-structurée, sauf si H'' vérifie la condition (σ), car $s' \underset{p}{<} s \times s$ n'entraîne pas $s' \underset{p''}{<} s \times s$.

Définition 11: *Soient* $C^{\cdot}$ *une catégorie et* $(C^{\cdot}, s, s')$ *un graphe multiplicatif* (p, H', H'')*-structuré (resp.* $(p, (H', H'), H'')$*-structuré); on dira que* $(C^{\cdot}, s, s')$ *est* une catégorie faiblement (p, H', H'') (*resp.* $(p, (H', H'), H'')$)-structurée. *Si de plus* $(C^{\cdot}, s) \in \bar{N}'(p)_0$, *on dira que* $(C^{\cdot}, s)$ *est* une catégorie $H(H', H'')$ (*resp.* $H((H', H'), H'')$)-structurée.

Remarque: Cette définition est en accord avec celle de [2] dans le cas, principalement considéré dans [2], où $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, 4
en vertu du théorème 11 (voir ci-dessus dans le cas $H = H' = H''$).

Un graphe multiplicatif (p, H', H'')-structuré est aussi un graphe multiplicatif (p, H_1', H_1'')-structuré, si H_1' contient H' et H_1'' contient H''.

Nous désignerons par $N'(p, H', H'')$ (resp. $N'(p, (H', H'), H'')$) la sous-catégorie pleine de $N'(p)$ ayant pour unités les graphes multiplicatifs (p, H', H'') (resp. $(p, (H', H'), H'')$)-structurés. Soit:

$$\bar{N}'(p, H', H'') = \bar{N}'(p) \cap N'(p, H', H'')$$

et

$$\bar{N}'(p, (H', H'), H'') = \bar{N}'(p) \cap N'(p, (H', H'), H'') .$$

Pour simplifier les notations, nous utiliserons le symbole $N'(\ )$ qui pourra être lu partout $N'(p, H', H'')$, ou partout $N'(p, (H', H'), H'')$. Même convention pour les symboles $\bar{N}'(\ )$, $(p,\ )$ et $H(\ )$. D'une manière analogue, $G(\ )$ peut être lu partout $G(p, H')$ ou partout $G(p, (H', H'))$.

Théorème 15: *$N'(\ )$ (resp. $\bar{N}'(\ )$) est une sous-catégorie saturée de $N'(p)$ (resp. de $\bar{N}'(p)$).*

Démonstration: Supposons $((\bar{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}'), \Phi, (G^\cdot, s')) \in (N'(p))_\gamma$ et $(G^\cdot, s') \in N'(\ )_0$. Comme $G(\ )$ est une sous-catégorie saturée de $G(p)$ d'après le théorème 9, on a $([\bar{G}^\cdot], \bar{s}) \in G(\ )_0$. Puisque $(M, p'', H'', .)$ est saturée au-dessus de M, $\varkappa^*(\square\square H'', \square p'')$ est saturé au-dessus de M, selon le cor. du théorème 1, et on a $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') \in \varkappa^*(\square\square H'', \square p'')_0$. Donc $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}') \in N'(\ )_0$. Par suite $N'(\ )$ est une sous-catégorie saturée de $N'(p)$. Le théorème en résulte, car $\bar{N}'(p)$ est saturée dans $N'(p)$ en vertu du théorème 10.

Corollaire: *Le corollaire du théorème 10 est encore vrai en y remplaçant $N'(p)$ par $N'(\ )$ et $\bar{N}'(p)$ par $\bar{N}'(\ )$.*

Théorème 16: *Si H' et H'' sont stables par produits dans H, les catégories d'homomorphismes $(M, ., N'(\ ), .)$ et $(M, ., \bar{N}'(\ ), .)$ sont à produits finis.*
Ce théorème résulte des théorèmes 3, 9 et 12.

Nous supposerons désormais pour simplifier que $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite et que la sous-catégorie H' vérifie la condition (σ).

Théorème 17: *Supposons aussi que H'' vérifie la condition (σ). Soit $(G^\cdot, s, s') \in N'(\ )_0$, (resp. $\in \bar{N}'(\ )_0$). Les conditions:*

$$\bar{s}' \underset{p}{<} s', \quad \bar{G}^\cdot \underset{p'_N}{<} G^\cdot \quad et \quad p(\bar{s}') = \bar{G}^\cdot * \bar{G}^\cdot$$

entraînent que $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}')$ est une sous-structure de $(G^\cdot, s')$ dans $(M, ., N'(\ ), .)$ (resp. dans $(M, ., \bar{N}'(\ ), .)$).

Démonstration: Soit $(G^\cdot, s) \in N'(\ )_0$. D'après le théorème 13, il existe $\bar{s} < s$ tel que $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') < (G^\cdot, s, s')$. Puisque H' vérifie la condition (σ), on a $([\bar{G}^\cdot], \bar{s}) \in G(\ )$, en vertu du cor. 2, prop. 14. Comme H'' vérifie la condition (σ), on a aussi $\bar{s}' \underset{p''}{<} s'$ et $\bar{s} \underset{p''}{<} s$, donc

$$(\bar{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') < (G^\cdot, s, s') \text{ dans } (M, ., \varkappa^*(\square\square H'', \square p''), .)$$

d'après le théorème 4. Donc $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}') < (G^\cdot, s')$ dans $(M, ., N'(\ ), .)$. – Si de plus $(G^\cdot, s') \in \bar{N}'(\ )_0$, on a $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}') \in \bar{N}'(p)_0$, en tenant compte du théorème 13, ce qui démontre le théorème 17.

Corollaire 1: *Si H'' vérifie la condition (σ), les catégories d'homomorphismes* $(M, ., N'(\ ), .)$ *et* $(M, ., \overline{N}'(\ ), .)$ *sont résolvantes à droite.*
Démonstration analogue à celle du corollaire du théorème 8.

Corollaire 2: *Supposons que H'' vérifie la condition (σ) et que H' et H'' soient stables par produits. Soient*

$$\overline{\mu}_i = ((G^{\cdot}, s, s'), \mu_i, (G_1^{\cdot}, s_i, s_i')) \in N'(\ )\ (resp. \in \overline{N}'(\ )),\ i = 1, 2 .$$

Alors il existe $\sigma \underset{p}{<} s_1 \times s_2$ *et* $\sigma' \underset{p}{<} S'$ *tels que* $(\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma, \sigma')$ *soit une sous-structure de* $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S')$ *dans* $(M, ., N'(\ ), .)$ *(resp. dans* $(M, ., \overline{N}'(\ ), .))$; *de plus on a:*

$$\overline{p_i\, \iota} = ((G_i^{\cdot}, s_i'), p_i\, \iota, (\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma')) \in N'(\ )\ (resp. \in \overline{N}'(\ ))$$

(voir théorèmes 8, I et 6).

Démonstration: D'après le théorème 16, on a $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') \in N'(\ )_0$ et, en vertu du théorème 6, il existe $\sigma' < S'$ et $\sigma < s_1 \times s_2$ tels que $(\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma, \sigma') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$; il résulte donc du théorème 17 que l'on a $(\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma') \in N'(\ )_0$. – Par définition, on a:

$$(G_i^{\cdot}, p_i\, \iota, \overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1)) \in N' .$$

La relation:

$$(s_i', p_i\, \iota * p_i\, \iota, \sigma') = (s_i', p_i', s_1' \times s_2') \cdot (s_1' \times s_2', \pi', S') \cdot (S', \iota, \sigma') \in H ,$$

où p_i' est la projection canonique de $p(s_1' \times s_2')$ sur $p(s_i')$ et

$$\pi'((g_1, g_2), (f_1, f_2)) = ((g_1, f_1), (g_2, f_2)) ,$$

entraîne $\overline{p_i\, \iota} \in N'(\ )$.

Remarque: Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie $H(\ )$-structurée. Si $\overline{s} \underset{p}{<} s$ et si $p(\overline{s})$ est une sous-catégorie $\overline{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$, alors $(\overline{C}^{\cdot}, \overline{s})$ est une catégorie $H(\ )$-structurée (voir théorème 13, II, [2]). Par contre l'énoncé analogue pour les graphes multiplicatifs fortement structurés n'est plus valable car la démonstration du théorème 13, II [2] repose sur le fait que s' est un p-noyau, ce qui n'est plus vrai dans un graphe multiplicatif.

Théorème 18: *Supposons H' stable par produits. Soit* $(G^{\cdot}, s, s') \in N'(\ )_0$. *Soit ϱ une relation d'équivalence bicompatible sur $G^{\cdot}$ et $\tilde{\varrho}$ la surjection canonique de G sur G/ϱ. Si on a:* $(\overline{s}', \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, s') \in H^s(M^s, p) \cap H''^s(M^s, p)$ *et si la relation* $s/\varrho \xrightarrow{p} < s$ *entraîne* $s/\varrho \xrightarrow{p'} < s$ *et* $(s/\varrho, \tilde{\varrho}, s) \in H''$, *alors* $(G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \overline{s}')$ *est un graphe multiplicatif $(p,\ )$-structuré, qui est une structure quotient de* $(G^{\cdot}, s, s')$ *dans* $(M, ., N'(\ ), .)$.

Démonstration: D'après le théorème 14, il existe $s/\varrho \in H_0$ tel que $s/\varrho \overset{p}{\prec} s$ et $(G^\cdot/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(p)_0$. En vertu du cor. prop. 15, on a aussi

$$([G^\cdot/\varrho], s/\varrho) \in G(\;)_0 .$$

Enfin les relations: $\bar{s}' \overset{p''}{\prec} s'$, $(s/\varrho, \tilde{\varrho}\,\varkappa(G^\cdot), s') \in H''$ et $\tilde{\varrho}\,\varkappa(G^\cdot) = \varkappa(G^\cdot/\varrho)\,(\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})$ entraînent $(s/\varrho, \varkappa(G^\cdot/\varrho), \bar{s}') \in H''$. Donc $(G^\cdot/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(\;)_0$.

4. Quelques applications

Nous reprenons les conventions de la fin du nº 3. En particulier, $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite et saturée au-dessus de M. H' et H'' désignent deux sous-catégories de H contenant H_γ et on suppose que H' vérifie la condition (σ).

A. Graphes multiplicatifs fortement structurés induits

Supposons que H'' soit identique à H et que H' soit une sous-catégorie de H stable par produits dans H.

Théorème 19: *Soient* $(G^\cdot, s) \in \bar{N}'(\;)_0$ *et* $(s_0, \psi_0, \bar{s}_0) \in H$, *où* $s_0 \prec s$ *et* $p(s_0) = G^\cdot_0$. *Alors il existe un graphe multiplicatif fortement structuré induit* $(\psi_0^*(G^\cdot), \sigma) \in \bar{N}'(\;)_0$ *tel que* $\sigma \prec s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$ *et*

$$\bar{\Psi} = \big((G^\cdot, s), \bar{\psi}, (\psi_0^*(G^\cdot), \sigma)\big) \in \bar{N}'(\;), \; \bar{\psi} = p_1\,\iota,$$

p_1 *désignant la projection* $(f, (u', u)) \to f$ *de* $G \times (p(\bar{s}_0) \times p(\bar{s}_0))$ *sur* G (voir nº 4, I). *De plus, si* $\sigma_0 \prec \sigma$ *et* $p(\sigma_0) = \psi_0^*(G^\cdot)_0$, *on a:*

$$j = (s_0, [\psi_0, \delta]^{-1}, \sigma_0) \in H_\gamma, \text{ avec } [\psi_0, \delta](u) = (\psi_0(u), (u, u)) .$$

Démonstration: D'après le théorème 13, II, [2], $\bar{\Sigma} = \big((p(\bar{s}_0) \times p(\bar{s}_0))^\perp, \bar{s}_0 \times \bar{s}_0\big)$ est une catégorie $H(H_\gamma, H)$-structurée, où $\perp$ désigne la loi de composition entre couples:

$$(u'', u') \perp (u', u) = (u'', u),$$

et
$$\Psi_0 \times \Psi_0 = \Big(\big((p(s_0) \times p(s_0))^\perp, s_0 \times s_0\big), \psi_0 \times \psi_0, \bar{\Sigma}\Big) \in \bar{N}'(\;) .$$

Comme $\big((p(s_0) \times p(s_0))^\perp, [\beta, \alpha], G^\cdot\big) \in N'$ et $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H$, on a $\overline{[\beta, \alpha]} = \Big(\big((p(s_0) \times p(s_0))^\perp, s_0 \times s_0\big), [\beta, \alpha], (G^\cdot, s)\Big) \in \bar{N}'(\;)$, en vertu de la proposition 16. Puisque $\psi_0^*(G^\cdot) = (\Psi_0 \times \Psi_0)^*(G^\cdot, \overline{[\beta, \alpha]})$, il résulte du corollaire 2 du théorème 17 qu'il existe $\sigma \prec s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$ tel que $(\psi_0^*(G^\cdot), \sigma) \in \bar{N}'(\;)_0$ et $\bar{\Psi} \in \bar{N}'(\;)$. – De plus on a:

$$(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, \delta, \bar{s}_0) = (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\iota, \iota], \bar{s}_0) \in H, \text{ d'où } (s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0), [\psi_0, \delta], \bar{s}_0) \in H,$$

et par suite $(\sigma_0, [\psi_0, \delta], \bar{s}_0) \in H$, car $[\psi_0, \delta]\,(p(\bar{s}_0)) \subset \psi_0^*(G_0^{\cdot})$. Les relations: 1

$$j = (\bar{s}_0, p_1' p_2, s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)) \cdot (s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0), \iota, \sigma_0) \in H,$$

où p_2 (resp. p_1') est la projection de $p(s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0))$ sur $p(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$ (resp. de $p(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$ sur $p(\bar{s}_0)$),

$$(\sigma_0, [\psi_0, \delta], \bar{s}_0) \cdot j = \sigma_0 \text{ et } j \cdot (\sigma_0, [\psi_0, \delta], \bar{s}_0) = \bar{s}_0$$

entraînent:

$$j \in H_\gamma .$$

Corollaire: *Si de plus $(G^{\cdot}, s)$ est une catégorie $H(\ )$-structurée. alors $(\psi_0^*(G^{\cdot}), \sigma)$ est aussi une catégorie $H(\ )$-structurée.*

Soit $\bar{U}(\ )$ le foncteur de $\bar{N}'(\ )$ vers H défini par:

$$\Phi = ((G^{\cdot}, s), \varphi, (\bar{G}^{\cdot}, \bar{s})) \to (s_0, \varphi_0, \bar{s}_0),$$

φ_0 désignant toujours la restriction de φ à $G_0^{\cdot}$.

Théorème 20: *Pour que $\Psi = ((G^{\cdot}, s), \psi, (\bar{G}^{\cdot}, \bar{s})) \in \bar{N}'(\ )$ soit une $(H, \bar{U}(\ ))$-injection, il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\Psi = \bar{\Psi} \cdot \Psi', \text{ où } \bar{\Psi} = ((G^{\cdot}, s), p_1 \iota, (\psi_0^*(G^{\cdot}), \sigma)) \text{ et } \Psi' \in \bar{N}'(\ )_\gamma .$$

Démonstration: Reprenons les notations du théorème 19 et montrons que $\bar{\Psi}$ est une $(H, \bar{U}(\ ))$-injection. Soit:

$$\Phi = ((G^{\cdot}, s), \varphi, (\tilde{G}^{\cdot}, \tilde{s})) \in \bar{N}'(\ )$$

tel que $\bar{U}(\ )(\Phi) = (s_0, \varphi_0, \tilde{s}_0) = (s_0, \bar{\psi}_0, \sigma_0) \cdot (\sigma_0, \varphi_0', \tilde{s}_0)$, où $(\sigma_0, \varphi_0', \tilde{s}_0) \in H$. Puisque $\varphi_0 = \bar{\psi}_0 \varphi_0'$ et que $(G^{\cdot}, \bar{\psi}, \psi_0^*(G^{\cdot}))$ est une $(M, \bar{U})$-injection d'après le théorème 9, I, on a:

$$(G^{\cdot}, \varphi, \tilde{G}^{\cdot}) = (G^{\cdot}, \bar{\psi}, \psi_0^*(G^{\cdot})) \cdot (\psi_0^*(G^{\cdot}), \varphi', \tilde{G}^{\cdot}),$$

φ' désignant l'application $[\varphi, [p(j)\,\varphi_0'\tilde{\beta}, p(j)\,\varphi_0'\tilde{\alpha}]]$, c'est-à-dire $\varphi'(f) = (\varphi(f), (e', e))$ tel que:

$$(\psi_0(e), (e, e)) = \varphi_0'(\alpha(f)) \quad \text{et} \quad (\psi_0(e'), (e', e')) = \varphi_0'(\beta(f))$$

pour tout $f \in \tilde{G}$. Les relations:

$$j \cdot (\sigma_0, \varphi_0', \tilde{s}_0) \cdot (\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{s}) \in H \quad \text{et} \quad j \cdot (\sigma_0, \varphi_0', \tilde{s}_0) \cdot (\tilde{s}_0, \tilde{\beta}, \tilde{s}) \in H$$

entraînent:

$$h = (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [p(j)\,\varphi_0'\tilde{\beta}, p(j)\,\varphi_0'\tilde{\alpha}], \tilde{s}) = [(\bar{s}_0, p(j)\,\varphi_0'\tilde{\beta}, \tilde{s}), (\bar{s}_0, p(j)\,\varphi_0'\tilde{\alpha}, \tilde{s})] \in H.$$

Par ailleurs, on a:

$$(s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0), \varphi', \tilde{s}) = [(s, \varphi, \tilde{s}), h] \in H .$$

Comme $\varphi'(\tilde{G}) \subset \psi_0^*(\tilde{G}^{\cdot})$ et $\sigma < s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$, il en résulte $(\sigma, \varphi', \tilde{s}) \in H$.

Donc $\Phi' = ((\psi_0^*(G^{\cdot}), \sigma), \varphi', (\widetilde{\overline{G}}^{\cdot}, \widetilde{s})) \in \overline{N}'(\ )$ et $\overline{\Psi}$ est une $(H, \overline{U}(\ ))$-injection; il en est de même de $\Psi = \overline{\Psi} \cdot \Psi'$, si $\Psi' \in \overline{N}'(\ )_\gamma$. – On voit que la condition de l'énoncé est aussi nécessaire, par une démonstration analogue à la deuxième partie de la démonstration du théorème 9, I.

Corollaire: *Soit* $\Psi = ((G^{\cdot}, s), \psi, (\overline{G}^{\cdot}, \overline{s})) \in \overline{N}'(\ )$; *alors* Ψ *admet la décomposition canonique* $\Psi = \overline{\Psi} \cdot \Psi'$, *où*

$$\overline{\Psi} = ((G^{\cdot}, s), \overline{\psi}, (\psi_0^*(G^{\cdot}), \sigma)), \quad \Psi' = ((\psi_0^*(G^{\cdot}), \sigma), \psi', (\overline{G}^{\cdot}, \overline{s}))$$

et

$$\psi'(f) = (\psi(f), (\psi_0(\overline{\beta}(f)), \psi_0(\overline{\alpha}(f)))) \quad \textit{pour tout} \quad f \in \overline{G}.$$

B. Catégorie structurée quotient

Dans tous les théorèmes suivants *nous supposons que* $C^{\cdot}$ *est une catégorie et* ϱ *une relation d'équivalence sur* C, *telle que* $C^{\cdot}$ *admette une catégorie quotient strict par* ϱ; les applications source et but dans la catégorie quotient $C^{\cdot}/\varrho$ seront notées $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$. Soit $\varrho * \varrho$ (resp. ϱ_0) la relation d'équivalence induite par la relation d'équivalence produit $\varrho \times \varrho$ sur $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ (resp. par ϱ sur $C_0^{\cdot}$). Nous supposons que $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie H-structurée et nous posons $s' \prec s \times s$, $p(s') = C^{\cdot} * C^{\cdot}$. Si: $\overline{\varrho * \varrho} = (\overline{s}', \widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho}, s') \in H^s(M^s, p)$,

où $\widetilde{\varrho}(f) = f \bmod \varrho$ pour tout $f \in C$ et $\widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho}(g, f) = (\widetilde{\varrho}(g), \widetilde{\varrho}(f))$, alors il existe $s/\varrho \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} s$ et $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \overline{s}')$ est une catégorie faiblement p-structurée quotient de $(C^{\cdot}, s, s')$ dans $(M, ., N'(p), .)$, d'après le théorème 14; de plus $(s/\varrho)_0 \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} s_0$ et par suite il existe $s_0/\varrho_0 \longrightarrow\!\!< s_0$. Dans ce cas nous poserons $\overline{\varrho} = (s/\varrho, \widetilde{\varrho}, s)$ et $\overline{\varrho}_0 = ((s/\varrho)_0, \widetilde{\varrho}_0, s_0)$.

1 **Remarque:** Pour que $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ soit saturé pour $\varrho \times \varrho$, il faut et il suffit que ϱ_0 soit la relation identique. Généralement les auteurs se bornent à ce cas particulier (mais important dans des applications) pour définir une catégorie quotient.

Théorème 21: *Supposons* $\overline{\varrho * \varrho} \in H^s(M^s, p)$. *Si les relations:* $(\widetilde{s}', \iota, \overline{s}') \in H$ *et* $p(\widetilde{s}') = p(\overline{s}')$ *entraînent* $\overline{s}' = \widetilde{s}'$, *alors* $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ *est une catégorie* H-*structurée quotient de* $(C^{\cdot}, s)$ *dans* $(M, ., \overline{H}, .)$ (II, [3]).

Démonstration: On a $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \overline{s}') \in N'(p)_0$. Le couple:

$$((s/\varrho, \overline{\alpha}\, p_1, s/\varrho \times s/\varrho), (s/\varrho, \overline{\beta}\, p_2, s/\varrho \times s/\varrho))$$

où p_i sont les projections canoniques de $C^{\cdot}/\varrho * C^{\cdot}/\varrho$ sur $C^{\cdot}/\varrho$, admet un p-noyau $\widetilde{s}'$ tel que $p(\widetilde{s}') = C^{\cdot}/\varrho * C^{\cdot}/\varrho$. Les conditions:

$$(s/\varrho \times s/\varrho, \widetilde{\varrho} \times \widetilde{\varrho}, s \times s) \in H, \quad \text{et} \quad (\widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho})(C^{\cdot} * C^{\cdot}) = (C^{\cdot}/\varrho) * (C^{\cdot}/\varrho)$$

entraînent $(\widetilde{s}', \widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho}, s') \in H$. Comme $\overline{s}' \longrightarrow\!\!< s'$, il en résulte $(\widetilde{s}', \iota, \overline{s}') \in H$, d'où $\bar{s}' = \tilde{s}' < s/\varrho \times s/\varrho$, et $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho) \in \bar{N}'(p)_0$. On en déduit que $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie H-structurée quotient de $(C^\cdot, s)$ dans $(M, ., \bar{H}, .)$, car la sous-catégorie $\bar{H}$ de $\bar{N}'(p)$ formée des foncteurs H-structurés [2] est pleine dans $\bar{N}'(p)$.

Corollaire: *Soit* $(C^\cdot, C^\perp)$ *une catégorie double* [2]. *Si* $(C^\cdot * C^\cdot)^\perp$ *admet une catégorie quotient (resp. quotient strict) par* $\varrho * \varrho$, *alors il existe une catégorie double* $(C^\cdot/\varrho, (C/\varrho)^\perp)$ *(resp.* $(C^\cdot/\varrho, C^\perp/\varrho)$*) quotient de* $(C^\cdot, C^\perp)$ *par* ϱ.

Démonstration: Rappelons qu'une catégorie double est une catégorie F-structurée $(C^\cdot, s)$, où $s = C^\perp \in F_0$. Comme les relations $(S, \iota, S') \in F$ et $p(S) = p(S')$ entraînent $S = S'$ (proposition 9, II [2]), il résulte du théorème 21 qu'il existe une catégorie $(C/\varrho)^\perp$ quotient de $C^\perp$ telle que $(C^\cdot/\varrho, (C/\varrho)^\perp)$ soit une catégorie double. – Supposons de plus que $(C^\cdot * C^\cdot)^\perp$ admette une catégorie quotient strict $(C^\cdot * C^\cdot)/\varrho * \varrho$. La bijection canonique de $(C^\cdot * C^\cdot)/\varrho * \varrho$ sur $(C^\cdot/\varrho) * (C^\cdot/\varrho)$ définit sur $(C^\cdot/\varrho) * (C^\cdot/\varrho)$ une loi de composition $\perp$ telle que $(C^\cdot/\varrho * C^\cdot/\varrho)^\perp$ soit aussi une catégorie quotient strict de $(C^\cdot * C^\cdot)^\perp$. Si $\tilde{g} \perp \tilde{f}$ est défini dans $(C/\varrho)^\perp$, le composé $(\tilde{g}, \bar{\alpha}(\tilde{g})) \perp (\tilde{f}, \bar{\alpha}(\tilde{f}))$ est défini dans $(C^\cdot/\varrho * C^\cdot/\varrho)^\perp$, puisque l'on a:

$$((C^\cdot/\varrho * C^\cdot/\varrho)^\perp, \gamma_{\bar{\alpha}}, (C/\varrho)^\perp) \in F .$$

Par suite il existe $(g, h') \in C^\cdot * C^\cdot$ et $(f, h) \in C^\cdot * C^\cdot$ tels que le composé $(g, h') \perp (f, h)$ soit défini dans $(C^\cdot * C^\cdot)^\perp$ et que:

$$\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}\,(g, h') = (\tilde{g}, \bar{\alpha}(\tilde{g})),\ \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}\,(f, h) = (\tilde{f}, \bar{\alpha}(\tilde{f})) .$$

Comme $\tilde{\varrho}(g) = \tilde{g}$, $\tilde{\varrho}(f) = \tilde{f}$ et que $g \perp f$ est défini, $\bar{\varrho}$ définit $(C/\varrho)^\perp$ comme catégorie quotient strict de $C^\perp$, en vertu de la proposition 23, I, c'est-à-dire on a $(C/\varrho)^\perp = C^\perp/\varrho$.

Corollaire 2: *Soit* $(C^\cdot, s)$ *une catégorie topologique* [3]. *Supposons* $C^\cdot * C^\cdot$ *saturé pour* $\varrho \times \varrho$ *(resp. supposons la relation d'équivalence* ϱ *fermée et la topologie* s *séparée). Si* $s \times s/\varrho \times \varrho$ *est homéomorphe à* $s/\varrho \times s/\varrho$ *(par exemple si la relation d'équivalence* ϱ *est ouverte) alors* $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ *est une catégorie topologique quotient de* $(C^\cdot, s)$. 1¶

Démonstration: Rappelons qu'une catégorie topologique $(C^\cdot, s)$ est une catégorie $\tilde{T}$-structurée, où $(M, \theta, \tilde{T}, .)$ est la catégorie d'homomorphismes formée des applications continues; donc s est une topologie sur C et s' est la topologie induite par $s \times s$ sur $C^\cdot * C^\cdot$. Comme s' admet une topologie quotient $s'/\varrho * \varrho$, on a $\overline{\varrho * \varrho} \in \tilde{T}^s(M^s, \theta)$ et $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(\theta)$, où $\bar{s}'$ est la topologie sur $(C^\cdot/\varrho) * (C^\cdot/\varrho)$ homéomorphe à $s'/\varrho * \varrho$. Soit $\tilde{s}'$ la topologie

induite par $s/\varrho \times s/\varrho$ sur $(C^{\cdot}/\varrho) * (C^{\cdot}/\varrho)$. Puisque s' est un θ-noyau, $\theta(s')$ est
1 fermé dans $s \times s$, si s est séparée. Si la relation d'équivalence ϱ est fermée
2¶ et si s est séparée (resp. si $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ est saturé pour $\varrho \times \varrho$), et si $s/\varrho \times s/\varrho$ est homéomorphe à $s \times s/\varrho \times \varrho$, alors $s'/\varrho * \varrho$, et par suite $\bar{s}'$, est homéomorphe à $\tilde{s}'$. Il en résulte $\bar{s}' = \tilde{s}' < s/\varrho \times s/\varrho$; donc $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie topologique.

Théorème 22: *Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie ordonnée. Si on a $\overline{\varrho * \varrho} \in \tilde{\Omega}''$ et si les relations $E \in C^{\cdot}_0$, $e \in C^{\cdot}_0$, $e' \in C^{\cdot}_0$, $e < E$, $e' < E$ et $e \sim e' \operatorname{mod} \varrho$ entraînent $e = e'$, alors on a $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$ et $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie ordonnée. Si de plus $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'')$-structurée, il en est de même de $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$.*

Démonstration: Rappelons [1] qu'une catégorie ordonnée $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$-structurée, donc s est la classe C munie d'une relation d'ordre, notée $<$. D'après la proposition 28, I, $\overline{\varrho * \varrho} \in \tilde{\Omega}''$ est une ω-surjection; par suite $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ est un graphe multiplicatif ω-structuré. La deuxième con-
3 dition du théorème signifie que l'on a $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'_1$; on en déduit: $\bar{\varrho}_0 \times \bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'_1 \subset \tilde{\Omega}'$. Les relations:

4 $$\bar{\varphi} = (\bar{\varrho}_0 \times \bar{\varrho}_0) \cdot (s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \tilde{\Omega}' \quad \text{et} \quad \omega(\bar{\varphi}) = (\tilde{\varrho}_0 \times \tilde{\varrho}_0)[\beta, \alpha] = [\bar{\beta}, \bar{\alpha}]\tilde{\varrho}$$

assurent que $\bar{\varrho}$ est une ω'-surjection d'après la proposition 27, I. Donc $((s/\varrho)_0 \times (s/\varrho)_0, [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], s/\varrho) \in \tilde{\Omega}'$, en vertu du corollaire de la proposition 15, et $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ est un graphe multiplicatif $(\omega, \tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$-structuré. – Montrons: $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$. En effet, soient $f \in C$ et $\tilde{f}' < \tilde{\varrho}(f)$ dans s/ϱ. Comme $(\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}}, s/\varrho) \in \tilde{\Omega}$, on trouve, dans $\bar{s}'$:

$$(\tilde{f}', \bar{\alpha}(\tilde{f}')) < (\tilde{\varrho}(f), \bar{\alpha}(\tilde{\varrho}(f))) = (\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})(f, \alpha(f)).$$

L'hypothèse $\overline{\varrho * \varrho} \in \tilde{\Omega}''$ assure l'existence de $(f', h) < (f, \alpha(f))$ dans s' tel que $\tilde{\varrho}(f') = \tilde{f}'$ et $\tilde{\varrho}(h) = \bar{\alpha}(\tilde{f}')$. On a:

$$f' \cdot h = \varkappa(C^{\cdot})(f', h) < \varkappa(C^{\cdot})(f, \alpha(f)) = f$$

et, puisque $(C^{\cdot}/\varrho, \tilde{\varrho}, C^{\cdot}) \in F$:

$$\tilde{\varrho}(f' \cdot h) = \tilde{\varrho}(f') \cdot \tilde{\varrho}(h) = \tilde{f}',$$

d'où $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$. – Montrons que $\bar{s}'$ est identique à la structure d'ordre $\tilde{s}'$ induite par $s/\varrho \times s/\varrho$ sur $C^{\cdot}/\varrho * C^{\cdot}/\varrho$. En effet, on a $(\tilde{s}', \iota, \bar{s}') \in \tilde{\Omega}$. Supposons
5 $(\tilde{g}', \tilde{f}') < (g, \tilde{f})$ dans $(C^{\cdot}/\varrho * C^{\cdot}/\varrho, \tilde{s}')$, c'est-à-dire $\tilde{g}' < \tilde{g}$ et $\tilde{f}' < \tilde{f}$ dans s/ϱ. Comme $C^{\cdot}/\varrho$ est une catégorie quotient strict de $C^{\cdot}$, il existe $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ tel que $\tilde{\varrho}(g) = \tilde{g}$ et $\tilde{\varrho}(f) = \tilde{f}$. Puisque $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$, il existe $g' < g$ tel que

$\tilde{\varrho}(g') = \tilde{g}'$ et il existe $f' < f$ tel que $\tilde{\varrho}(f') = \tilde{f}'$; on a:

$$\alpha(g') < \alpha(g) = \beta(f),\ \beta(f') < \beta(f) \ \text{ et } \ \tilde{\varrho}(\alpha(g')) = \bar{\alpha}(\tilde{g}') = \bar{\beta}(\tilde{f}') = \tilde{\varrho}(\beta(f)) .$$

En utilisant la condition $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'_1$, on en déduit $\alpha(g') = \beta(f')$. $(C^\cdot, s)$ étant une catégorie ordonnée, on a $(g', f') < (g, f)$ dans s', d'où

$$(\tilde{g}', \tilde{f}') = \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}(g', f') < \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}(g, f) = (\tilde{g}, \tilde{f})$$

dans $\bar{s}'$, car $\overline{\varrho * \varrho} \in \tilde{\Omega}$. Ceci démontre la relation $(\bar{s}', \iota, \tilde{s}') \in \tilde{\Omega}$; par suite $\bar{s}' = \tilde{s}' \prec s/\varrho \times s/\varrho$ et $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie ordonnée. – Supposons de plus $(C^\cdot, s) \in \bar{N}'(\omega, \tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'')$. De $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$ et de la proposition 28, I, il résulte $s/\varrho \overset{\omega''}{\prec} s$; la proposition 2, I, entraîne alors $(s/\varrho, \varkappa(C^\cdot/\varrho), \bar{s}') \overset{\omega''}{\prec} (s, \varkappa(C^\cdot), s')$, donc $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'')$-structurée.

Théorème 23: *Soit $(C^\cdot, s)$ une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive). Si on a $\overline{\varrho * \varrho} \in I''^{ps}$ (resp. $\in I''^{s}$, resp. $\in I''$) et $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'$, alors $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive) quotient de $(C^\cdot, s)$ par ϱ.*

Démonstration: Soit $(C^\cdot, s)$ une catégorie sous-préinductive, c'est-à-dire (voir [1]) une catégorie $I^{ps}(I'^{ps}, I^{ps})$-structurée. D'après le corollaire de la proposition 29, I, $\overline{\varrho * \varrho} \in I''^{ps}$ est une ω^{ps}-surjection et il résulte du théorème 14 que $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ est un graphe multiplicatif ω^{ps}-structuré. D'après la démonstration du théorème 22, $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$, d'où $s/\varrho \overset{\omega}{\prec} s$. Le couple

$$((s/\varrho, \alpha p_1, s/\varrho \times s/\varrho), (s/\varrho, \beta p_2, s/\varrho \times s/\varrho))$$

où p_i désigne la i-ième projection canonique de $C/\varrho \times C/\varrho$ sur C/ϱ, admet un ω^{ps}-noyau $\tilde{s}'$ et on a $(\tilde{s}', \iota, \bar{s}') \in I^{ps}$. Par ailleurs les conditions $\bar{\varrho}_0 \in I^{ps}$ et $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'$ entraînant $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'_1$ (voir [3] et [1]), $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie ordonnée en vertu du théorème 22. Les relations:

$$\bar{s}' \underset{\omega}{\prec} s/\varrho \times s/\varrho \quad \text{et} \quad (s/\varrho \times s/\varrho, \iota, \tilde{s}') \in I^{ps}$$

entraînent $(\bar{s}', \iota, \tilde{s}') \in \tilde{\Omega}$, d'où $\bar{s}' = \tilde{s}' \underset{\omega^{ps}}{\prec} s/\varrho \times s/\varrho$. Donc $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie sous-préinductive. Le cas sous-inductif (resp. inductif) se démontre d'une manière analogue.

Corollaire: *Soit $(C^\cdot, s)$ un groupoïde sous-préinductif (resp. sous-inductif, resp. inductif)* [3]. *Si on a $\overline{\varrho * \varrho} \in I''^{ps}$ (resp. $\in I''^{s}$, resp. $\in I''$) et $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'$, alors $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est un groupoïde sous-préinductif (resp. sous-inductif, resp. inductif).*

Démonstration: Rappelons [2] qu'un groupoïde sous-préinductif est un groupoïde $I^{ps}(I^{ps}, I''^{ps} \cap I'^{ps})$-structuré. Supposons $\overline{\varrho * \varrho} \in I''^{ps}$ et $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'$. D'après les théorèmes 22 et 23, $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie sous-préinductive et une catégorie $\widetilde{\Omega}\,(\widetilde{\Omega}', \widetilde{\Omega}'')$-structurée. En vertu de la proposition 2, I, on a $(s/\varrho, j, s/\varrho) \in \widetilde{\Omega}_\gamma$, où $j(\widetilde{f}) = \widetilde{f}^{-1}$ pour tout $\widetilde{f} \in C/\varrho$. D'après la démonstration du théorème 22, on a $\bar{\varrho} \in \widetilde{\Omega}'$. Des relations:

$$\bar{\varrho} \cdot (s, \varkappa(C^\cdot), s') \in \widetilde{\Omega}' \quad \text{et} \quad \widetilde{\varrho}\,\varkappa(C^\cdot) = \varkappa(C^\cdot/\varrho)\,(\widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho})$$

et de la proposition 27, I, il résulte que $\overline{\varrho * \varrho}$ est une ω'-surjection. Par suite on a $(s/\varrho, \varkappa(C^\cdot/\varrho), \bar{s}') \xrightarrow{\omega'}\!\!< (s, \varkappa(C^\cdot), s')$

et
$$(s/\varrho, \varkappa(C^\cdot/\varrho), \bar{s}') \in I''^{ps} \cap I'^{ps},$$

ce qui démontre le corollaire dans le cas sous-préinductif. La démonstration est analogue dans le cas sous-inductif (resp. inductif).

Remarque: Le théorème p. 57 [3] est un cas particulier du dernier corollaire.

Dans les deux théorèmes suivants, *nous supposons que* $C^\cdot * C^\cdot$ *est saturée pour* $\varrho \times \varrho$.

Théorème 24: *Soit* $(C^\cdot, s)$ *une catégorie ordonnée;* ϱ *est compatible avec* s *si, et seulement si,* $\varrho * \varrho$ *est compatible avec* s'. *Si* ϱ *est compatible avec* s, *il existe une catégorie ordonnée* $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ *quotient de* $(C^\cdot, s)$ *par* ϱ.

Démonstration: Supposons $\varrho * \varrho$ compatible avec s'; alors $\overline{\varrho * \varrho}$ est une ω-surjection d'après la proposition 27, I, il existe $s/\varrho \xrightarrow{\omega}\!\!< s$ et $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(\omega)$. Supposons $\widetilde{f}' < \widetilde{f}$ dans s/ϱ; on a:

$$(\widetilde{f}', \bar{\alpha}(\widetilde{f}')) < (\widetilde{f}, \bar{\alpha}(\widetilde{f})) \quad \text{dans } \bar{s}'$$

et il existe $(f', h') \in C^\cdot * C^\cdot$ et $(f, h) \in C^\cdot * C^\cdot$ tels que

$$\widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho}\,(f', h') = (\widetilde{f}', \bar{\alpha}(\widetilde{f}'))\,;\ \widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho}\,(f, h) = (\widetilde{f}, \bar{\alpha}(\widetilde{f}))\,;\ (f', h') < (f, h).$$

Comme $(C^\cdot, s)$ est une catégorie ordonnée, on a $s' \prec s \times s$, d'où

$$f' < f,\ \widetilde{\varrho}\,(f') = \widetilde{f}' \quad \text{et} \quad \widetilde{\varrho}\,(f) = \widetilde{f};$$

donc ϱ est compatible avec s. – Supposons inversement ϱ compatible avec s; soit $\bar{s}'$ la structure d'ordre induite par $s/\varrho \times s/\varrho$ sur $C^\cdot/\varrho * C^\cdot/\varrho$. La condition $(g', k') < (g, k)$ dans s' entraîne:

$$\widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho}(g', k') = (\widetilde{\varrho}(g'), \widetilde{\varrho}(k')) < \widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho}(g, k)$$

dans $\bar{s}'$. Supposons $(\widetilde{f}', \widetilde{h}') < (\widetilde{f}, \widetilde{h})$ dans $\bar{s}'$; il existe $(f', h') \in C^\cdot * C^\cdot$ et $(f, h) \in C^\cdot * C^\cdot$ tels que:

$$\widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho}(f', h') = (\widetilde{f}', \widetilde{h}') \quad \text{et} \quad \widetilde{\varrho} * \widetilde{\varrho}(f, h) = (\widetilde{f}, \widetilde{h}),$$

car $C^\cdot/\varrho$ est une catégorie quotient strict de $C^\cdot$. Il existe aussi $f_1' < f_1$ et $h_1' < h_1$ tels que:
$$f_1' \sim f',\ h_1' \sim h',\ f_1 \sim f \quad \text{et} \quad h_1 \sim h.$$

Puisque $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ est saturée pour $\varrho \times \varrho$, on en déduit

$$(f_1', h_1') < (f_1, h_1) \text{ dans } s'.$$

Par suite $\varrho * \varrho$ est compatible sur s' et, d'après la proposition 27, I, on a $\bar{s}' \overset{\omega}{-\!\!<} s'$. Il en résulte $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(\omega)$; de plus $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée, car $\bar{s}' \prec s/\varrho \times s/\varrho$. Comme $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'$, un raisonnement 1
analogue à celui du théorème 22 prouve

$$((s/\varrho)_0 \times (s/\varrho)_0, [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], s/\varrho) \in \tilde{\Omega}',$$

de sorte que $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie ordonnée.

Théorème 25: *Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive). $\overline{\varrho * \varrho}$ vérifie la condition (q^{ps}) (resp. la condition (q^s), resp. (q^s)) si, et seulement si, $\bar{\varrho}$ vérifie la même condition. Dans ce cas, $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive) quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par ϱ.*

En effet, la démonstration de la première partie est analogue à celle du théorème 24. Si $\overline{\varrho * \varrho}$ vérifie la condition (q^{ps}), $\varrho * \varrho$ est compatible sur s' et $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie ordonnée d'après le théorème 24. La condition (q^{ps}) entraînant que $\overline{\varrho * \varrho}$ est une ω^{ps}-surjection d'après la proposition 29, I, une démonstration similaire à celle du théorème 23 prouve que l'on a $\bar{s}' \underset{\omega^{ps}}{\prec} s/\varrho \times s/\varrho$, de sorte que $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie sous-préinductive. La démonstration est analogue dans le cas sous-inductif (resp. inductif). 2+

BIBLIOGRAPHIE

[0] Ehresmann C.: *Structures quotient et catégories quotient.* C.R.A.S. 256, Paris, 1963, p. 5080.
[1] Ehresmann C.: *Sous-structures et catégories ordonnées* (Act. polycopié), à l'impression dans Fund. Math.
[2] Ehresmann C.: *Catégories structurées.* (Act. polycopié, à l'impression dans Ann. Ecole Normale, Paris), résumé dans C.R.A.S. 256, Paris, 1963, p. 1198, 1891, 2080 et 2280. 3
[3] Ehresmann C.: *Espèces de structures locales. Elargissements de catégories,* Sém. Topologie et Géométrie différentielle (Ehresmann), Paris, III, 1961.
[4] Ehresmann C.: *Catégorie des foncteurs types.* Rev. Un. Mate. Argentina v. XX, 1960, p. 194.
[5] Hasse Maria: *Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und Gruppoide.* Math. Nachrichten, 22, H. 5–6, Berlin, 1960.
[6] Hilton P. J.: *Note on free and direct products in general categories.* Bull. Soc. Math. Belgique, t. XIII, 1961.
[7] Kurosch, Liwschitz, Schulgeifer, Zalenko. *Zur Theorie der Kategorien.* Deutsch. Verlag Wissenschaften, Berlin, 1963.
[8] Hoehnke H. J.: *Zur Theorie der Gruppoide.* Acta Math. XIII, 1–2, 1962.

(Reçu le 9 juillet 1963)

JAHRESTAGUNG DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG
UNIVERSITÄT FRANKFURT, 3-7 SEPTEMBER 1963
AUSZUG DES VORTRAGS

/67/

TEILSTRUKTUREN UND FAKTORSTRUKTUREN

von EHRESMANN, Charles, Paris

Bezüglich eines Funktors p von einer Kategorie H nach eine Kategorie C definiert man die Begriffe Teilstruktur und Faktorstruktur eines Objektes S von H; dabei handelt es sich um eine Verschärfung der Begriffe Teilobjekt und Faktorobjekt in einer Kategorie. Die Begriffe Produkt und Summe in einer Kategorie lassen sich darauf zurückführen.

Viele Sätze bedeuten eine Aussage über Konstruktion oder Eigenschaften einer Teilstruktur oder Faktorstruktur: z.B. Definition einer Kategorie durch Erzeugende und Relationen, Vervollständigung eines geordneten Gruppoids, perfekte Ergänzung einer Kategorie.

Schärfere Resultate erhält man, wenn H eine Kategorie von Homomorphismen zu einer Gattung von Strukturen über der Kategorie C ist («Gattungen von lokalen Strukturen», *Jahresb. DMV*, 1957). Indem man die Kategorien als eine Gattung von Strukturen über der Kategorie der Mengenabbildungen betrachtet, erhält man auf diese Weise den korrekten Begriff Faktorkategorie.

Die Theorie der Kategorien lässt sich bereichern, indem die Kategorien mit zusätzlichen Strukturen versehen werden und dann die Teilstrukturen und Faktorstrukturen der strukturierten Kategorien untersucht werden. Besondere Fälle: Mehrfache Kategorien, die zur Theorie der natürlichen Transformationen der Funktoren führen; induktive Kategorien, die eine Theorie der lokalen Strukturen ergeben; topologische und differenzierbare Kategorien, worauf die Differentialgeometrie aufgebaut ist.

EHRESMANN, CH.
Math. Annalen 171, 293—363 (1967)

/ 100 /

Structures Quasi-Quotient

CHARLES EHRESMANN

Introduction

Soit p un foncteur d'une catégorie $H^{\cdot}$ vers une catégorie pleine d'applications $\mathscr{M}$; soit s une unité de $H^{\cdot}$ et soit r une relation d'équivalence sur $p(s)$. Dans [1] et [2] nous avons défini et étudié la notion de p-structure quotient de s par r; en particulier dans [2] nous avons cherché les catégories p-structurées quotient d'une catégorie p-structurée par une relation. Mais nous avons vu qu'il faut imposer des conditions assez strictes sur p, sur s et sur r pour pouvoir assurer l'existence d'une p-structure quotient de s par r. Nous allons ici généraliser la notion de p-structure quotient en celle de p-structure quasi-quotient et nous l'appliquerons pour construire les catégories p-structurées quotient d'une catégorie p-structurée donnée. Le présent travail est donc la suite de [2].

Dans le n° 1, la notion de (H', p)-structure quasi-quotient de s par r, où $H'^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $H^{\cdot}$, est définie par l'intermédiaire des quasi-surjections associées à un foncteur. Supposons qu'il existe une p-structure quasi-quotient s' de s par r; alors il existe une application f dans $p(s')$ de la classe quotient $p(s)/r$. Pour qu'il existe une p-structure quotient de s par r, il faut et il suffit que f soit une bijection. Par suite la classe $\mathscr{M}_{\gamma} . f$ détermine la première obstruction A à l'existence d'une p-structure quotient $\hat{s}$ de s par r, l'existence de $\hat{s}$ étant équivalente à la relation: $A \subset \mathscr{M}_{\gamma}$.

Quelques critères d'existence de $(H, \tilde{H}^{\cdot})$-projecteurs, où $H^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $\tilde{H}^{\cdot}$, sont donnés au n° 2. Nous les utilisons dans les théorèmes 1–2 et 2–2 pour montrer que, sous des conditions assez générales, il existe des p-quasi-surjections et des p-structures quasi-quotient. Les théorèmes 3–2 et 4–2 sont des théorèmes d'existence de limites inductives.

A partir du n° 3, nous abordons le problème de la détermination des structures quasi-quotient d'un graphe multiplicatif p-structuré. Soit $C^{\cdot}$ un graphe multiplicatif, $[C^{\cdot}]$ son graphe sous-jacent et $([C^{\cdot}], s)$ un graphe p-structuré [2]; soit r une relation d'équivalence sur C. A l'aide des résultats du n° 2, nous obtenons un théorème d'existence (th. 1–3) d'une catégorie p-structurée, d'un groupoïde p-structuré et d'un demi-groupe p-structuré quasi-quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par r. Il en résulte en particulier qu'un graphe multiplicatif p-structuré admet une projection dans les catégories et les groupoïdes p-structurés.

Dans les n° 4 et 5, nous précisons le théorème d'existence lorsque p est $\ulcorner$-étalant (exemples: foncteur projection vers $\mathscr{M}$ de la catégorie des applications continues entre espaces topologiques ou des applications ordonnées) ou dénombrablement $\sqcap$-engendrant pour $\mathcal{M}$ (exemples: foncteur projection vers $\mathcal{M}$ de la catégorie des foncteurs, des néofoncteurs, des applications sous-préinductives, ...).

Si p est le foncteur identique de $\mathcal{M}$, la catégorie et le groupoïde quasi-quotient de $C^{\cdot}$ par r sont des catégories quotient respectivement de la catégorie libre $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$ des chemins du graphe $[C^{\cdot}]$ et de la catégorie libre $L[G]^{\cdot}$, où
1 $[G]$ est un graphe «symétrisé» de $[C^{\cdot}]$. Le demi-groupe quasi-quotient de $C^{\cdot}$
2 par r est un quotient du monoïde libre $M(C)^{\cdot}$ associé à C par une relation $r_s(C^{\cdot})\cup r$. Nous cherchons à étendre ces résultats au cas où p est quelconque. Nous montrons que la construction des catégories et groupoïdes p-structurés quasi-quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par r se ramène respectivement à celle des catégories p-structurées quasi-quotient de $([C^{\cdot}], s)$ (th. 1–6) et à celle des catégories p-structurées quasi-quotient de $([\bar{C}], \bar{s})$, où $([\bar{C}]^{\cdot}, \bar{s})$ est un p-symétrisé de $([C^{\cdot}]^{\cdot}, s)$.

3 Si $H^{\cdot}$ est à sommes dénombrables, les demi-groupes p-structurés quasi-quotient de $(C^{\cdot}, s)$ sont (th. 3–6 et 4–6) les demi-groupes p-structurés quasi-quotient de $\left(M(C)^{\cdot}, \sum_{n\in N} s^n\right)$ par $r_s(C^{\cdot})\cup r$, où N est l'ensemble des entiers positifs. Mais il n'existe pas en principe de structure canonique faisant de $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$ une catégorie p-structurée. C'est pourquoi nous sommes conduits à définir les quasi-catégories et quasi-catégories p-structurées. Les théorèmes suivants font l'objet du n° 7: Toute quasi-catégorie admet pour projection une catégorie. Si $[C]$ est un graphe, il admet pour projection une quasi-catégorie, à savoir la quasi-catégorie libre $\hat{L}([C])$ de tous les chemins de $[C]$, dont la catégorie libre $L[C]^{\cdot}$ des chemins «propres» de $[C]$ est une catégorie pro-
4 jection. Si $H^{\cdot}$ est une catégorie à sommes dénombrables, il existe une quasi-catégorie p-structurée $(\hat{L}([C^{\cdot}]), \hat{s})$. Les catégories p-structurées quasi-quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par r sont alors les catégories p-structurées quasi-quotient de $(\hat{L}([C^{\cdot}]), \hat{s})$ par $\hat{r}(C^{\cdot})\cup r$, où $\hat{r}(C^{\cdot})$ est la relation d'équivalence engendrée par la classe A des couples $((g,f), g.f)$, où $(g,f)\in C^{\cdot} * C^{\cdot}$. Si $([\bar{C}], \bar{s})$ est un p-symétrisé de $([C^{\cdot}], s)$, les groupoïdes p-structurés quasi-quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par r sont les groupoïdes p-structurés quasi-quotient par une relation $\hat{r}_g(C^{\cdot})\cup r$ de $(\hat{L}([\bar{C}]), \hat{s}')$.

Partant de ces résultats, nous décrivons plus précisément (n° 8) les structures quasi-quotient de $(C^{\cdot}, s)$ dans le cas où p est $\sqcap$-étalant ou dénombrablement $\sqcap$-engendrant pour $\mathcal{M}$. Comme application, nous prouvons que le théorème d'existence d'une catégorie $\hat{C}^{\cdot}$ quotient d'une catégorie $C^{\cdot}$ par une sous-catégorie $G^{\cdot}$ se transpose au cas des catégories p-structurées quotient d'une catégorie p-structurée $(C^{\cdot}, s)$ par une sous-catégorie p-structurée $(G^{\cdot}, s_1)$. Pour cela nous utilisons le fait que les catégories p-structurées quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par $(G^{\cdot}, s_1)$ sont les catégories p-structurées quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par la relation d'équivalence r_G engendrée par la classe des couples $(g, \alpha(g))$ tels que $g\in G$.

Certains résultats de ce mémoire ont été résumés dans trois Notes à l'Académie des Sciences [0]. Les références contenant un numéro de chapitre ou d'appendice sont relatives au livre [1], dont nous reprenons la terminologie et les notations (qui figurent dans les deux index de [1]). Les énoncés de [2] et de [3] auxquels nous renvoyons sont toujours ceux des parties II de [2] ou de [3].

Plan

0. Univers

Rappelons qu'une catégorie pleine d'applications $\mathcal{M}$ est définie [1] comme suit: Soit $\mathcal{M}_0$ une classe de classes vérifiant la condition:

1. Si $M \in \mathcal{M}_0$ et si $M' \subset M$, on a $M' \in \mathcal{M}_0$; si $M \in \mathcal{M}_0$ et $M_1 \in \mathcal{M}_0$, la classe produit $M \times M_1$ appartient à $\mathcal{M}_0$.

La catégorie $\mathcal{M}$ est obtenue en identifiant $\mathcal{M}_0$ à la classe des unités de la catégorie formée de toutes les applications d'une classe appartenant à $\mathcal{M}_0$ dans une autre, i.e. $\mathcal{M}$ a pour éléments les classes $M \in \mathcal{M}_0$ et les applications

$f = (M', \underline{f}, M)$, où $M \in \mathcal{M}_0$, $M' \in \mathcal{M}_0$ et $f \neq (M, \iota, M)$ (= ap. identique de M). 1¶

Nous dirons que $\mathcal{M}_0$ est un *univers*[1] si $\mathcal{M}_0$ est une classe de classes vérifiant la condition 1 et si de plus elle admet pour éléments un ensemble infini ainsi que:

2. avec une classe M la classe $\mathcal{P}(M)$ de ses parties;

3. avec une famille $(M_i)_{i \in I}$ de classes M_i, où $I \in \mathcal{M}_0$, la classe réunion.

Il en résulte que la catégorie $\mathcal{M}$ est une catégorie à $\mathcal{M}_0$-produits.

Supposons que $\hat{\mathcal{M}}$ soit une catégorie pleine d'applications telle que $\hat{\mathcal{M}}_0$ soit un univers et que $\mathcal{M}_0 \subset \hat{\mathcal{M}}_0$, $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$, où $\mathcal{M}_0$ est un univers. Pour tout $f = (M', \underline{f}, M) \in \mathcal{M}$, on a $\underline{f} = (\underline{f}(M), F, M) \in A$, où

$$A = \mathcal{P}(M') \times \mathcal{P}(M' \times M) \times \mathcal{P}(M) \in \mathcal{M}_0$$

et

$$f \in \mathcal{P}(M') \times A \times \mathcal{P}(M) \in \mathcal{M}_0 .$$

Il s'ensuit

$$M' . \mathcal{M} . M \in \mathcal{M}_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{M} \in \hat{\mathcal{M}}_0 .$$

Soit $\bar{\mathcal{M}}$ la saturante de $\mathcal{M}$ dans $\hat{\mathcal{M}}$ (i.e. la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{M}}$ ayant pour unités les classes $\bar{M}$ telles qu'il existe une bijection de $\bar{M}$ sur un élément M de $\mathcal{M}_0$). Alors on voit facilement que $\bar{\mathcal{M}}_0$ est aussi un univers. Les conditions:

$$M \in \mathcal{M}_0 \quad \text{et} \quad (M', f, M) \in \hat{\mathcal{M}}$$

2+

[1] Cette définition est un peu différente de celle de Grothendieck (voir [12]) car nous ne supposons pas vérifié l'axiome: Si $x \in M$ et si $M \in \mathcal{M}_0$, alors $x \in \mathcal{M}_0$.

ont pour conséquence $M/r_f \in \mathcal{M}_0$, en désignant par r_f la relation d'équivalence associée à l'application f. Comme la bijection

$$x \bmod r_f \to f(x), \quad \text{où} \quad x \in M,$$

appartient à $\bar{\mathcal{M}}$, on trouve: $f(M) \in \bar{\mathcal{M}}_0$.

Rappelons les conventions suivantes de [1] que nous utiliserons sans cesse: Si $C^{\cdot}$ est un graphe multiplicatif, nous désignons par $C_0^{\cdot}$ la classe de ses unités, par α et β ses applications source et but, par $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ la classe des couples composables, par κ sa loi de composition. Si de plus C' et C'' sont deux sous-classes de C, nous notons $\square(C^{\cdot}; C', C'')$ la classe des quadruplets

$$(k_1'', k_1', k_2', k_2'') \quad \text{tels que} \quad k_i' \in C', \quad k_i'' \in C'', \quad \text{si} \quad i = 1, 2,$$

1 et que l'on ait $k_1''.k_2' = k_1'.k_2''$.

1. Quasi-surjections

Surjections et projections

Soit $p = (K^{\cdot}, \underline{p}, H^{\cdot})$ un foncteur et soit K' une sous-classe de K telle que $p(H_0^{\cdot}) \subset K'$.

Soit $\square(K', p)$ la classe des quadruplets (k, f', f, h) tels que

$$h \in H \quad \text{et} \quad (k, f', f, p(h)) \in \square(K^{\cdot}; K', K).$$

2 Soit $\boxminus(K', p)$ la catégorie obtenue en munissant $\square(K', p)$ de la loi de composition:

$$((k_1, f_1', f_1, h_1), (k, f', f, h)) \to (k_1 . k, f_1', f, h_1 . h)$$

si, et seulement si, $f_1 = f'$ et $(h_1, h) \in H^{\cdot} * H^{\cdot}$ (ainsi $\boxminus(K, p)$ est isomorphe à la catégorie produit fibré $(K^{\cdot}, \alpha^{\square}, \boxminus K^{\cdot}) \vee p$). L'application

$$h \to (p(h), \underline{p}\, \beta(h), \underline{p}\, \alpha(h), h)$$

définit un isomorphisme de $H^{\cdot}$ sur la sous-catégorie pleine de $\boxminus(K', p)$ ayant pour unités les quadruplets (e, e, e, s), où $s \in H_0^{\cdot}$ et $e = p(s)$. Nous identifions $H^{\cdot}$ à cette sous-catégorie pleine. La classe $H_0^{\cdot}. \square(K', p)$ est formée des quadruplets $(k, e, f, h) \in K \times K \times K' \times H$ tels que $e = \beta(k)$ et $k.f = p(h)$; si f est un épimorphisme, cet élément est déterminé par la donnée du couple (f, h).

Soit $H'^{\cdot}$ une sous-catégorie pleine de $H^{\cdot}$ et soit $p' = (K^{\cdot}, \underline{p}\iota, H'^{\cdot})$. Pour simplifier les notations, dans ce n° nous posons $M^{\cdot} = \boxminus(K', p)$.

Définition 1. *On dira que $j \in H$ est* une (K', p, H')-quasi-surjection *s'il existe un $(H', M^{\cdot})$-projecteur (k, e, f, j). Une (K, p, H')- (resp. (K, p, H)-) quasi-surjection est appelée une (p, H')- (resp.* une *p-)* quasi-surjection. *Si $(e, e, p(j), j)$ définit une (K', p, H')- (resp. une (K, p, H')-) quasi-surjection, on dit que j est une (K', p, H')-*

3+ *(resp.* une *(p, H')-)* surjection.

Pour que $\bar{k} = (k, e, f, j) \in M$ soit un $(H', M^{\cdot})$-projecteur, il faut et il suffit que, pour tout $(k', e', f, h) \in H_0'^{\cdot}. M$ tel que l'on ait $\alpha(h) = \alpha(j)$, il existe un et un seul $g \in H'$ tel que $h = g.j$ et $k' = p(g).k$. Pour que $j \in H$ soit une (K', p, H')-surjection, il faut et il suffit que l'on ait $p(j) \in K'$ et que, pour tout $h \in H_0'^{\cdot}. H. \alpha(j)$

tel que $p(h) = k'.p(j)$, où $k' \in K$, il existe un et un seul $g \in H'$ vérifiant $g.j = h$ et $p(g) = k'$.

Exemples. La notion de (K', p, H)-surjection est identique à celle de (K', p)-surjection (chap. III). Pour que $j \in H$ soit un $(H', H^{\cdot})$-projecteur, il faut et il suffit que $(p(j), e, e', j)$ soit un $(H', M^{\cdot})$-projecteur, où $e' = \alpha(p(j))$ et $e = \beta(p(j))$.

Par dualité on définit de même les notions de (K', p, H')-quasi-injections et de (K', p, H')-injections.

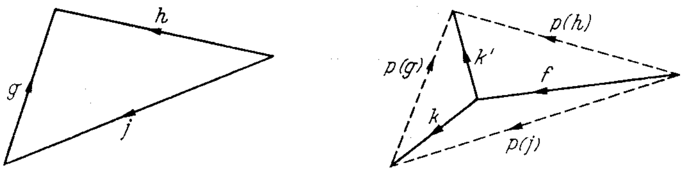


Fig. 1

Si j est une (K', p, H')-quasi-surjection, et si $K' \subset K''$ et $H'' \subset H'$, où $H''^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $H^{\cdot}$, alors j est une (K'', p, H'')-quasi-surjection, si $\beta(j) \in H''$.

Proposition 1. *Soit* $\bar{j} = (k, e, f, j)$ *un* $(H', M^{\cdot})$*-projecteur. Pour qu'il existe une* (p, H')*-surjection* j' *telle que* $\alpha(j') = \alpha(j)$ *et* $p(j') = f$*, il faut (resp. faut et il suffit si* p'_γ *est un foncteur d'hypermorphismes saturé) que* k *soit inversible dans* $K^{\cdot}$*; dans ce cas,* $\beta(j')$ *est isomorphe à* $\beta(j)$ *dans* $H'^{\cdot}$.

Démonstration. Soit j' une telle (p, H')-surjection. Comme $\bar{j}' = (e', e', p(j'), j')$ et $\bar{j}$ sont deux $(H', M^{\cdot})$-projecteurs de même source, il existe (prop. 20, chap. III) un et un seul $g \in H'^{\cdot}_\gamma$ tel que $g.\bar{j}' = \bar{j}$, c'est-à-dire $g.j' = j$ et $p(g) = k$. Ainsi $k \in K^{\cdot}_\gamma$. — Inversement, si $k \in K^{\cdot}_\gamma$ et si p'_γ est un foncteur d'hypermorphismes saturé, il existe un et un seul $g \in \beta(j).H'^{\cdot}_\gamma$ tel que $p(g) = k$. Il s'ensuit que $g^{-1}.\bar{j} = (e', e', f, g^{-1}.j)$ est un $(H', M^{\cdot})$-projecteur. Ceci signifie que $g^{-1}.j$ est une (p, H')-surjection ayant les propriétés voulues.

Proposition 2. *Soit* $\bar{j} = (k, e, f, j)$ *un* $(H', M^{\cdot})$*-projecteur et* $\bar{j}' = (k', e, f', j) \in \in H'^{\cdot}_0.M$*. S'il existe* $\bar{h} = (k'', f', f, \alpha(j)) \in M$ *tel que* $f' \in R_d(K^{\cdot})$ *et* $\bar{j}'.\bar{h} = \bar{j}$*, alors* $\bar{j}'$ *est un* $(H', M^{\cdot})$*-projecteur.*

Démonstration. D'après la proposition 17, chap. III, il suffit[2] de montrer que l'on a $\bar{h} \in R_d(H'^{\cdot}_0.M, M^{\cdot})$. En effet, supposons

$$\bar{h}_i = (k_i, e_i, f_i, h_i) \in H'^{\cdot}_0.M \quad \text{et} \quad \bar{h}_1.\bar{h} = \bar{h}_2.\bar{h}.$$

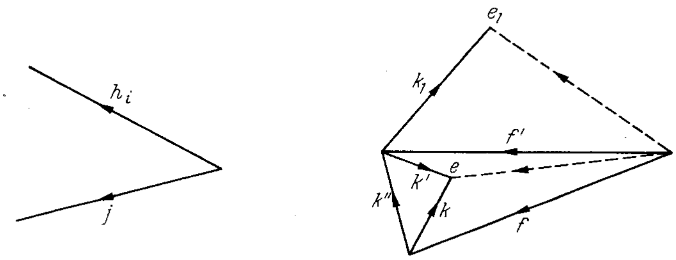


Fig. 2

21*

On a $k_i . f_i = p(h_i)$ et, comme

$$\bar{h}_i . \bar{h} = (k_i, e_i, f_i, h_i) . (k'', f', f, \alpha(j)) = (k_i . k'', e_i, f, h_i),$$

on trouve

$$e_1 = e_2, \quad f_1 = f_2 = f' \quad \text{et} \quad h_1 = h_2 .$$

Il s'ensuit

$$k_1 . f' = p(h_1) = p(h_2) = k_2 . f', \quad \text{d'où} \quad k_1 = k_2,$$

car f' est un épimorphisme. Par suite $\bar{h}_1 = \bar{h}_2$.

Corollaire 1. *Si j est une (K', p, H')-quasi-surjection et si $p(j)$ est un épimorphisme de $K^{\cdot}$, alors j est une (p, H')-surjection.*

En effet, il existe un $(H', M^{\cdot})$-projecteur $\bar{j} = (k, e, f, j)$ et on a

$$\bar{h} = (k, p(j), f, \alpha(j)) \quad \text{et} \quad (e, e, p(j), j) . \bar{h} = \bar{j},$$

de sorte que le corollaire est conséquence de la proposition 2.

Corollaire 2. *Soit $\bar{j} = (k, e, f, j) \in H_0^{\prime\cdot} . M$. Si $\bar{j}$ est un $(H', M^{\cdot})$-projecteur et si $f \in K^{\cdot}_{\gamma}$, alors j est un $(H', H^{\cdot})$-projecteur; si j est un $(H', H^{\cdot})$-projecteur et si $f \in R_d(K^{\cdot})$, $\bar{j}$ est un $(H', M^{\cdot})$-projecteur.*

Démonstration. j est un $(H', H^{\cdot})$-projecteur si, et seulement si, $\bar{j}' = (p(j), e, e', j)$ est un $(H', M^{\cdot})$-projecteur. — Si $\bar{j}$ est un $(H', M^{\cdot})$-projecteur, $\bar{j}'$ est un $(H', M^{\cdot})$-projecteur en vertu de la proposition 2, lorsque $f \in K^{\cdot}_{\gamma}$, car

$$\bar{j}' . \bar{h} = \bar{j}, \quad \text{où} \quad \bar{h} = (f^{-1}, e', f, \alpha(j)) .$$

Si $\bar{j}'$ est un $(H', M^{\cdot})$-projecteur et si $f \in R_d(K^{\cdot})$, on trouve

$$\bar{j} . \bar{h}' = \bar{j}', \quad \text{où} \quad \bar{h}' = (f, f, e', \alpha(j)) \in M,$$

donc $\bar{j}$ est un $(H', M^{\cdot})$-projecteur d'après la proposition 2.

Théorème 1. *Soit $\bar{j} = (k, e, f, j)$ un $(H', M^{\cdot})$-projecteur. Si $j' \in H . \alpha(j)$ est une (p, H')-surjection, et s'il existe $g \in K'$ tel que $g . p(j') = f$, il existe un $(H', M^{\cdot})$-projecteur (k, e, g, j'') tel que $j'' . j' = j$.*

Démonstration. On a

$$k . g . p(j') = k . f = p(j)$$

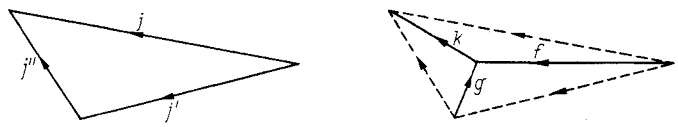


Fig. 3

et, j' étant une (p, H')-surjection, il existe un et un seul $j'' \in H'$ tel que

$$j'' . j' = j \quad \text{et} \quad p(j'') = k . g .$$

On en déduit

$$\bar{j}'' = (k, e, g, j'') \in M, \quad \bar{h} = (e', g, f, j') \in M \quad \text{et} \quad \bar{j}'' . \bar{h} = \bar{j} .$$

En vertu de la proposition 17, chap. III, il suffit[2] de montrer que $\bar{h} \in R_d(H_0^{\prime\cdot} . M, M^{\cdot})$.

[2] La deuxième partie de la proposition 17, chap. III, peut évidemment être généralisée comme suit: Si j est un $(C, K^{\cdot})$-projecteur, si $f \in R_d(C_0^{\cdot} . K, K^{\cdot})$ et si $j = j' . f$, alors j' est un $(C, K^{\cdot})$-projecteur.

En effet, soient
$$\bar{h}_i = (k_i, e'', g, h_i) \in H_0^{\prime\cdot}.M \quad \text{tels que} \quad \bar{h}_1.\bar{h} = \bar{h}_2.\bar{h}.$$
On trouve $k_1 = k_2$ et $h_1.j' = h_2.j'$, d'où
$$p(h_1) = k_1.g = p(h_2).$$
Ces égalités entraînent $h_1 = h_2$, car j' est une (p, H')-surjection.

Remarque. Le théorème 1, chap. III, est un cas particulier du théorème 1.

Proposition 3. *Soit $\bar{j}' = (k, e, f, j)$ un (H', M')-projecteur, où $f \in R_d(K')$. Si j est une (K', p, H')-surjection, les relations $h \in H_0^{\prime\cdot}.H.\alpha(j)$ et $k_i.p(j) = p(h)$, où $i = 1, 2$, entraînent $k_1 = k_2$; de plus $j \in R_d(H_0^{\prime\cdot}.H, H')$.*

Démonstration. Posons $\bar{j} = (e, e, p(j), j)$. On a $\bar{h}_i = (k_i, e', p(j), h) \in H_0^{\prime\cdot}.M$, de sorte qu'il existe un et un seul $h_i' \in H'$ tel que $h_i'.\bar{j} = \bar{h}_i$, c'est-à-dire
$$h_i'.j = h \quad \text{et} \quad p(h_i') = k_i.$$

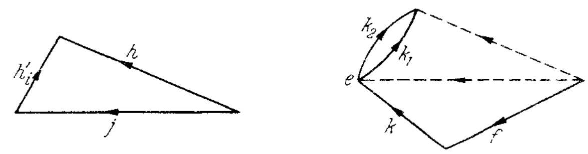


Fig. 4

Des relations
$$k_i.p(j) = k_i.k.f \quad \text{et} \quad f \in R_d(K'),$$
on déduit
$$k_1.k = k_2.k \quad \text{et} \quad \bar{h}'' = (k_i.k, e', f, h) \in H_0^{\prime\cdot}.M.$$
Il s'ensuit qu'il existe un et un seul $h'' \in H$ tel que $h''.\bar{j}' = \bar{h}''$, i.e.
$$h''.j = h \quad \text{et} \quad p(h'').k = k_i.k.$$
Or on a $h_i'.\bar{j}' = \bar{h}''$, d'où:
$$h_i' = h'' \quad \text{et} \quad k_1 = p(h_1') = p(h'') = k_2.$$
Si $g_1.j = g_2.j$, où $g_i \in H_0^{\prime\cdot}.H$, on a
$$p(g_1).p(j) = p(g_2).p(j), \quad \text{d'où} \quad p(g_1) = p(g_2)$$
d'après le début de la démonstration, et, j étant une (K', p, H')-surjection, $g_1 = g_2$.

Structures quotient

Soit C une classe; la relation identique sur C (i.e. la relation (C, Δ_C, C), où Δ_C est la diagonale de $C \times C$) est notée $i(C)$. Soit $r = (C, A, C)$ et $r' = (C', A', C')$ deux relations; nous posons
$$r \cup r' = (C \cup C', A \cup A', C \cup C')$$
et, si $A \subset A'$ et $C = C'$, nous disons que r est contenue dans r', ou que $r \subset r'$. Si r est une relation d'équivalence sur C, l'application $x \to x \bmod r$ de C sur la classe quotient C/r est notée $\tilde{r}$. Soit $k = (C', \underline{k}, C)$ une application; la relation

d'équivalence associée à k est notée r_k et $\lambda(k)$ désigne l'application de C/r_k dans C' définie par la bijection

$$\lambda(\underline{k}): x \bmod r_k \to k(x), \quad \text{où} \quad x \in C.$$

On a $k = \lambda(k).\tilde{r}_k$, et $\lambda(k)$ est une bijection si, et seulement si, k est une surjection. Si $r = (C, A, C)$ est une relation, nous écrirons

$$k(r) = (C', (k \times k)(A), C');$$

k est compatible avec (r', r) si, et seulement si, $k(r) \subset r'$; en particulier k est compatible avec r si, et seulement si, $k(r) \subset i(C')$. Si $k' = (C'', \underline{k}', C')$ est une autre application, l'égalité $k'(k(r)) = k'.k(r)$ montre que k' est compatible avec $k(r)$ si, et seulement si, $k'.k$ est compatible avec r.

Soit $\mathscr{M}$ une catégorie pleine d'applications telle que $C/r \in \mathscr{M}_0$ pour tout $C \in \mathscr{M}_0$ et toute relation d'équivalence r sur C. Soit $\mathscr{M}'^{\mathrm{q}}$ la classe des surjections canoniques $\tilde{r} \in \mathscr{M}$ telles que $r \neq i(C)$ et soit $\mathscr{M}^{\mathrm{q}} = \mathscr{M}'^{\mathrm{q}} \cup \mathscr{M}_0$. Nous désignons par χ la surjection de $\mathscr{M}^{\mathrm{q}}$ sur $\chi(\mathscr{M}^{\mathrm{q}})$ telle que

$$\chi(\tilde{r}) = r \quad \text{si} \quad \tilde{r} \in \mathscr{M}'^{\mathrm{q}}, \quad \chi(C) = i(C), \quad \text{si} \quad C \in \mathscr{M}_0.$$

Soit $p = (\mathscr{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ un foncteur. Si $h \in H$ et $C = p(\alpha(h))$, nous posons

$$p(h) = (p(\beta(h)), \underline{h}, C), \quad r_h = r_{p(h)}, \quad \lambda(h) = \lambda(p(h)), \quad h(x) = \underline{h}(x)$$

si $x \in C$; si r est une relation sur C, soit $h(r) = p(h)(r)$; si $p(h)$ est compatible avec r, on dira parfois que h est compatible avec r.

Soit p^{r} la classe des triplets (r', h, r) tels que $h \in H$, que r soit une relation d'équivalence sur $p(\alpha(h))$ et r' une relation d'équivalence sur $p(\beta(h))$, l'application $p(h)$ étant compatible avec (r', r). L'application

$$(k, f', f, h) \to (\chi(f'), h, \chi(f)), \quad \text{où} \quad (k, f', f, h) \in \square(\mathscr{M}^{\mathrm{q}}, p),$$

est une bijection $\hat{\chi}$ de $\square(\mathscr{M}^{\mathrm{q}}, p)$ sur p^{r}. Soit p^{r} la catégorie image de $\boxminus(\mathscr{M}^{\mathrm{q}}, p)$ par $\hat{\chi}$. Un élément $(i(C'), h, r)$, où $C' = p(\beta(h))$, sera identifié au couple (h, r) et un élément (r, s, r), où $s \in H_0^{\cdot}$, au couple (s, r) (ces identifications sont possibles car $(i(C), s, r) \in p^{\mathrm{r}}$ et $s \in H_0^{\cdot}$ entraîne $r = i(C)$). Nous identifions $H^{\cdot}$ à la sous-catégorie pleine de p^{r} formée des éléments $(h, i(C))$, où $C = p(\alpha(h))$.

Soit $H'^{\cdot}$ une sous-catégorie pleine de $H^{\cdot}$. Posons $M^{\cdot} = \boxminus(\mathscr{M}, p)$ et $p' = (\mathscr{M}, \underline{p}\iota, H'^{\cdot})$.

Proposition 4. *Si $\bar{j} = (k, e, f, j)$ est un $(H', M^{\cdot})$-projecteur et si $p(j)$ est une surjection, (j, r_j) est un (H', p^{r})-projecteur. Si (j, r) est un (H', p^{r})-projecteur, (j, r_j) est un (H', p^{r})-projecteur; si de plus j est une (p, H')-surjection, $p(j)$ est une surjection.*

Démonstration. Soit $j \in H_0'^{\cdot}.H$. Pour que (j, r_j) soit un (H', p^{r})-projecteur, il faut et il suffit que $(\lambda(j), e, \tilde{r}_j, j)$ soit un $(H', M^{\cdot})$-projecteur, puisque p^{r} est isomorphe à une sous-catégorie pleine de $M^{\cdot}$. — Soit $\bar{j} = (k, e, f, j)$ un $(H', M^{\cdot})$-projecteur tel que $p(j)$ soit une surjection. On a

$$\bar{j}' = (\lambda(j), e, \tilde{r}_j, j) \in H_0'^{\cdot}.M, \quad \lambda(j) \in \mathscr{M}_{\gamma}, \quad \bar{h} = (\lambda(j)^{-1}.k, \tilde{r}_j, f, \alpha(j)) \in M$$

et $\bar{j}'.\bar{h} = \bar{j}$. Comme $\tilde{r}_j \in R_d(\mathscr{M})$, la proposition 2 affirme que $\bar{j}'$ est un $(H', M^{\cdot})$-projecteur. — Inversement soit (j, r) un (H', p^{r})-projecteur; d'après la proposition 2, $\bar{j}' = (\lambda(j), 'e, \tilde{r}_j, j)$ est aussi un (H', M')-projecteur, car il existe k' tel que $k'.\tilde{r} = \tilde{r}_j$ et on a

$$\bar{j}'.(k', \tilde{r}_j, \tilde{r}, \alpha(j)) = (k, e, \tilde{r}, j).$$

Posons $p(j) = (C', j, C)$ et soit $a' \in j(C)$. Supposons qu'il existe $a \in C' - j(C)$. L'application f de C' dans C' telle que

$$f(a) = a' \quad \text{et} \quad f(x) = x \quad \text{si} \quad x \neq a,$$

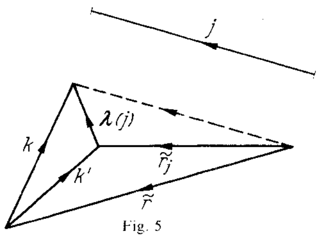


Fig. 5

vérifie $f.p(j) = p(j)$. Si de plus j est une (p, H')-surjection, en utilisant la proposition 3 on trouve $f = C$, ce qui est impossible. Donc $p(j)$ est une surjection.

Soit $s \in H_0^{\cdot}$ et soit r une relation sur $p(s)$; soit $\hat{r}$ la relation d'équivalence engendrée par r.

Définition 2. *On dira que s admet s' pour* (H', p)-structure quasi-quotient *par r s'il existe un (H', p^r)-projecteur $(j, \hat{r})$ tel que $s = \alpha(j)$ et $s' = \beta(j)$; dans ce cas, r_j est appelée* relation d'équivalence (H', p)-compatible engendrée par r sur s.

Si de plus $p(j) = \tilde{r}_j$ (resp. $= \tilde{r}$), on dit que s' est une (H', p)-structure quotient faible (*resp.* quotient) de s par r. 1+

Une (H, p)-structure quasi-quotient (resp. quotient faible) de s par r est appelée une *p-structure quasi-quotient* (resp. *quotient faible*) de s par r et la relation (H, p)-compatible engendrée par r est dite relation *p-compatible* engendrée par r sur s.

Exemples. Les notions de (H, p)-structure quotient de s par r et de p-structure quotient de s par r (chap. III) sont identiques. Pour que s' soit une $(H', H^{\cdot})$-projection de s, il faut et il suffit que s' soit une (H', p)-structure quasi-quotient de s par $i(p(s))$.

Proposition 5. *Si s admet s' pour p-structure quasi-quotient par r, il existe une (H', p)-structure quasi-quotient $\hat{s}$ de s par r si, et seulement si, s' admet $\hat{s}$ pour $(H', H^{\cdot})$-projection. Si s' est une (H', p)-structure quotient faible de s par r, alors s' est une (H', p)-structure quotient de s par la relation (H', p)-compatible r_j engendrée par r sur s.*

En effet, comme s' est une (H, p^r)-projection de $(s, \hat{r})$, il existe une (H', p^r)-projection $\hat{s}$ de $(s, \hat{r})$ si, et seulement si, s' admet $\hat{s}$ pour $(H', H^{\cdot})$-projection d'après le théorème 7, chap. III. — Soit $(j, \hat{r})$ un (H', p^r)-projecteur. D'après la proposition 4, (j, r_j) est un (H', p^r)-projecteur; si $s' = \beta(j)$ est une (H', p)-structure quotient faible de s par r, on a $p(j) = \tilde{r}_j$ et il résulte du corollaire 1 de la proposition 2 que j est une (p, H')-surjection.

Proposition 6. *Soit (j, r) un (H', p^r)-projecteur et $s = \alpha(j)$; soit k l'application telle que $p(j) = k.\tilde{r}$. Pour qu'il existe une (H', p)-structure quotient s' de s par r, il faut (resp. il faut et il suffit si p'_γ est un foncteur d'hypermorphismes saturé) que k soit une bijection; s' est alors isomorphe à $\beta(j)$ dans $H^{\cdot}$.*

En effet, cette proposition est un cas particulier de la proposition 1.

Application à l'étude des catégories quotient

Soit $\mathcal{M}_0$ un univers; soit $\mathcal{M}$ la catégorie pleine d'applications associée. Soient $p_{\mathcal{N}}$, $p_{\mathcal{N}'}$ et $p_{\mathcal{F}}$ respectivement les foncteurs projections canoniques vers $\mathcal{M}$ de la catégorie $\mathcal{N}$ des homomorphismes entre classes multiplicatives, de la catégorie $\mathcal{N}'$ des néofoncteurs et de la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs. Soit (N, v) le
1 foncteur $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$-projection naturalisé construit dans le théorème 10, chap. III.

Théorème 2. *Soit $p = p_{\mathcal{F}}$ ou $p_{\mathcal{N}'}$. Si F est une p-surjection, $p(F)$ est une surjection.*

Démonstration. Soit $F = (\hat{C}^{\cdot}, \underline{F}\ C^{\cdot})$ une $p_{\mathcal{N}'}$-surjection (resp. une $p_{\mathcal{F}}$-surjection). Soit $L^{\cdot}$ la catégorie ayant 4 éléments distincts: 3 unités e, e' et e'' et un morphisme h de source e' et de but e''. L'application $f \to e$, où $f \in C$, définit un néofoncteur F' de $C^{\cdot}$ vers $L^{\cdot}$. Soit m l'application de $\hat{C}$ dans L telle que:

$$\begin{cases} m(\hat{f}) = e & \text{si} \quad \hat{f} \in F(C) \\ m(\hat{f}) = h & \text{si} \quad \hat{f} \notin F(C). \end{cases}$$

On a $m.p(F) = p(F')$. Comme F est une $p_{\mathcal{N}'}$-surjection (resp. une $p_{\mathcal{F}}$-surjection), m définit un néofoncteur de $\hat{C}^{\cdot}$ vers $L^{\cdot}$. Or soit $\hat{f} \in \hat{C} - F(C)$; on a $m(\hat{f}) = h$ et, m définissant un néofoncteur,

$$m(\alpha(\hat{f})) = \alpha(m(\hat{f})) = e'.$$

Ceci est impossible puisque $e' \notin m(\hat{C})$. Donc $\hat{C} = F(C)$, c'est-à-dire F est surjectif.

Corollaire. *j est une $p_{\mathcal{N}'}$-surjection (resp. une $p_{\mathcal{F}}$-surjection) si, et seulement si, j est une $p_{\mathcal{N}'}$-quasi-surjection (resp. une $p_{\mathcal{F}}$-quasi-surjection) et $p(j)$ une surjection.*

En effet, ce corollaire résulte du théorème 2 et du corollaire 1 de la proposition 2.

Remarque. Si F est une $p_{\mathcal{N}}$-surjection, alors $p(F)$ peut ne pas être une surjection, comme le montre l'exemple suivant: Soit $C^{\cdot}$ une classe multiplicative et r une relation d'équivalence compatible sur $C^{\cdot}$; soit $(C^{\cdot}/r, \tilde{r}, C^{\cdot})$ le $p_{\mathcal{N}}$-épimorphisme de $C^{\cdot}$ sur $C^{\cdot}/r$. Soit $\hat{C}^{\cdot}$ la classe multiplicative obtenue en ajoutant à C/r un élément $k \notin C/r$, celui-ci n'étant composable avec aucun autre. $(\hat{C}^{\cdot}, \tilde{r}, C^{\cdot})$ est aussi une $p_{\mathcal{N}}$-surjection.

Théorème 3. *Soient $C^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0$ et r une relation sur C. Alors $C^{\cdot}$ admet pour $p_{\mathcal{N}'}$-structure quotient faible par r le graphe multiplicatif $C^{\cdot}/\bar{r}$ quotient de $C^{\cdot}$ par la relation d'équivalence bicompatible $\bar{r}$ engendrée par r; de plus $C^{\cdot}$ admet $N(C^{\cdot}/\bar{r})$ pour $(\mathcal{F}, p_{\mathcal{N}'})$-structure quasi-quotient par r (resp. pour $(\mathcal{F}, p_{\mathcal{F}})$-structure quasi-quotient par r si $C^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$).*

En effet, soit j le $p_{\mathcal{N}'}$-épimorphisme de $C^{\cdot}$ sur $C^{\cdot}/\bar{r}$ et soit $\hat{r}$ la relation d'équivalence engendrée par r. On a $(j, \hat{r}) \in p^r_{\mathcal{N}'}$ et $(j, \bar{r})$ est un $(\mathcal{N}', p^r_{\mathcal{N}'})$-projecteur. Si

$(F, \hat{r}) \in p^{r}_{\mathcal{N}'}$ la relation r_F est bicompatible sur $C^{\cdot}$ et contient r; par suite elle contient $\bar{r}$, de sorte que $(F, \bar{r}) \in p^{r}_{\mathcal{N}'}$ et qu'il existe $F' \in \mathcal{N}'$ tel que $F'.j = F$. Donc $(j, \hat{r})$ est un $(\mathcal{N}', p^{r}_{\mathcal{N}'})$-projecteur. — Puisque $N(C^{\cdot}/\bar{r})$ est une $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$-projection de $C^{\cdot}$, c'est une $(\mathcal{F}, p_{\mathcal{N}'})$-structure quasi-quotient de $C^{\cdot}$ par r (prop. 5).

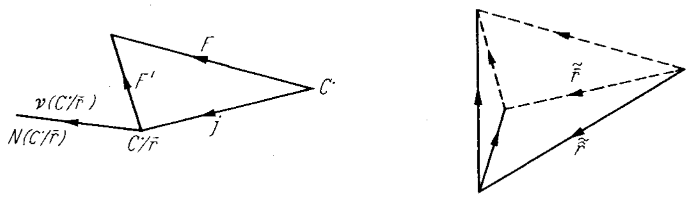


Fig. 6

Corollaire. *Soient $C^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ et r une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$. Si $\nu(C^{\cdot}/r)$ est surjectif, $N(C^{\cdot}/r)$ est une catégorie quotient de $C^{\cdot}$. Pour qu'il existe une catégorie quotient de $C^{\cdot}$ par r, il faut et il suffit que $\underline{\nu(C^{\cdot}/r)}$ soit une bijection sur $p_{\mathcal{F}}(N(C^{\cdot}/r))$.*

En effet, avec les notations précédentes, $\nu(C^{\cdot}/\bar{r}).(j, \hat{r})$ est un $(\mathcal{F}, p^{r}_{\mathcal{F}})$-projecteur, de sorte que le corollaire résulte des propositions 4 et 6.

En d'autres termes, le théorème 3 signifie que, si $C^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0$ et si r est une relation sur C, alors r engendre une relation $p_{\mathcal{N}'}$-compatible sur $C^{\cdot}$, à savoir la relation bicompatible engendrée par r sur $C^{\cdot}$; elle engendre aussi une relation $(\mathcal{F}, p_{\mathcal{N}'})$-compatible.

Remarques. 1) Une démonstration analogue au début de la démonstration du théorème 3 prouve que, si $C^{\cdot} \in \mathcal{N}_0$ et si r est une relation sur C, alors $C^{\cdot}$ admet pour $p_{\mathcal{N}}$-structure quotient faible par r la classe multiplicative $C^{\cdot}/\bar{r}$, où $\bar{r}$ est la relation compatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par r.

2) Le corollaire du théorème 3 contient la proposition 39 et le théorème 11, chap. III.

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie et soit $G^{\cdot}$ une sous-catégorie de $C^{\cdot}$. Soit A'_G la classe des couples $(g, \alpha(g))$ tels que $g \in G$. La relation d'équivalence sur C engendrée par la relation (C, A'_G, C) est la relation, notée r_G, telle que $r_G = (C, A_G, C)$, où A_G est la classe formée des couples (h, h), où $h \in C$, et des couples (g', g), où $g \in G$, $g' \in G$ et $\alpha(g) = \alpha(g')$. Soit $\bar{r}_G$ la relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par r_G. Soit $G'^{\cdot}$ une autre sous-catégorie de $C^{\cdot}$ et $G^{\cdot}_0 = G'^{\cdot}_0$. Si $g' \in G'$ et $g' \notin G$, on a $(g', \alpha(g')) \in A_{G'}$ et $(g', \alpha(g')) \notin A_G$; ainsi $r_{G'}$ est différent de r_G.

Proposition 7. *Si $G^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $C^{\cdot}$, la relation $\bar{r}_G$ est la relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par la relation $(C, \hat{A}_G, C)$:*

$$(h', h) \in \hat{A}_G \quad \textit{si, et seulement si, il existe} \quad (g', h', h, g) \in \square(C^{\cdot}; C, G).$$

Démonstration. r_G étant la relation d'équivalence engendrée par (C, A'_G, C), la relation $\bar{r}_G$ est aussi la relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par (C, A'_G, C). On a $A'_G \subset \hat{A}_G$. Soit j le $p_{\mathcal{N}'}$-épimorphisme de $C^{\cdot}$ sur $C^{\cdot}/\bar{r}_G$. Si $g \in G$,

$$(g, \alpha(g)) \in A_G, \quad \text{d'où} \quad j(g) = j(\alpha(g)) = \alpha(j(g)) \in (C^{\cdot}/\bar{r}_G)_0 .$$

Si $(g', h', h, g) \in \square(C^\cdot; C, G)$, on en déduit

$$j(h) = j(g') . j(h) = j(g' . h) = j(h' . g) = j(h') . j(g) = j(h'),$$

i.e. $h \sim h' \bmod \bar{r}_G$. Donc $(C, \hat{A}_G, C) \subset \bar{r}_G$ et la relation d'équivalence bicompatible sur $C^\cdot$ engendrée par $(C, \hat{A}_G, C)$ est identique à $\bar{r}_G$.

Soient $F = (\hat{C}^\cdot, \underline{F}, C^\cdot)$ un foncteur, $G^\cdot$ et $\hat{G}^\cdot$ deux sous-catégories de $C^\cdot$ et de $\hat{C}^\cdot$ respectivement telles que $C_0^\cdot \subset G$ et $\hat{C}_0^\cdot \subset \hat{G}$. On a

$$(r_{\hat{G}}, F, r_G) \in p^{\mathrm{r}}_{\mathscr{F}} \quad \text{si, et seulement si,} \quad F(G) \subset \hat{G}.$$

L'application

$$((\hat{C}^\cdot, \hat{G}), \underline{F}, (C^\cdot, G)) \to (r_{\hat{G}}, F, r_G)$$

définit un isomorphisme Y de la catégorie $\overline{\mathscr{V}}$ (n° 4E, III) sur une sous-catégorie pleine de $p^{\mathrm{r}}_{\mathscr{F}}$ contenant $\mathscr{F}$.

Théorème 4. *Soit $(C^\cdot, G) \in \overline{\mathscr{V}}_0$ et soit (j, r_G) un $(\mathscr{F}, p^{\mathrm{r}}_{\mathscr{F}})$-projecteur; alors $(\beta(j), j, (C^\cdot, G))$ est un $(\mathscr{F}, \overline{\mathscr{V}})$-projecteur; il existe une catégorie quotient de $C^\cdot$ par $G^\cdot$ si, et seulement si, j est surjectif, et dans ce cas $C^\cdot/G^\cdot$ est isomorphe à*
1 *$N(C^\cdot/\bar{r}_G)$.*

Démonstration. Puisque Y est un isomorphisme, $Y^{-1}(j, r_G)$ est un $(\mathscr{F}, \overline{\mathscr{V}})$-projecteur et $\beta(j)$ est isomorphe à $N(C^\cdot/\bar{r}_G)$ d'après le théorème 3. — Si $F \in \mathscr{F} . C^\cdot$, on a

$$F . (C^\cdot, \iota, G^\cdot) \in J_{\mathscr{F}} \quad \text{si, et seulement si,} \quad (F, r_G) \in p^{\mathrm{r}}_{\mathscr{F}}.$$

Il en résulte que $(h, (C^\cdot, \iota, G^\cdot))$ est une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte si, et seulement si, (h, r_G) est un $(\mathscr{F}, p^{\mathrm{r}}_{\mathscr{F}})$-projecteur tel que h soit une $p_{\mathscr{F}}$-surjection, i.e., en vertu du théorème 2, tel que h soit surjectif; dans ce cas, (h, r_G) et (j, r_G) étant deux $(\mathscr{F}, p^{\mathrm{r}}_{\mathscr{F}})$-projecteurs, il existe un isomorphisme g tel que $g . h = j$, de sorte que j est aussi surjectif. Par ailleurs, si j est surjectif, $(j, (C^\cdot, \iota, G^\cdot))$ est une $(p_{\mathscr{F}}, J_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte, et par suite $\beta(j) = C^\cdot/G^\cdot$.

Remarque. Le théorème 4 est équivalent au théorème 15, chap. III. La démonstration du théorème 15 est plus longue, car elle consiste à prouver dans ce cas les th. 1 et 3.

Définition 3. *Soient $C^\cdot$ une catégorie et $G^\cdot$ une sous-catégorie de $C^\cdot$. Une $p_{\mathscr{F}}$-structure quasi-quotient de $C^\cdot$ par r_G est appelée* catégorie quasi-quotient de $C^\cdot$ par $G^\cdot$.

D'après le théorème 3, il existe toujours une catégorie quasi-quotient de $C^\cdot$
2 par $G^\cdot$, à savoir la catégorie $N(C^\cdot/\bar{r}_G)$.

2. Existence de structures quasi-quotient

Conventions. Soit $\mathscr{M}$ une catégorie pleine d'applications; soit $\mathscr{M}^\iota$ la classe des injections canoniques $(M, \iota, M') \in \mathscr{M}$. Si p est un foncteur de $H^\cdot$ vers $\mathscr{M}$, nous désignons par $p_i^{\ulcorner}$ la classe des p-monomorphismes, par $p_\iota^{\ulcorner}$ la classe des
3 $(\mathscr{M}^\iota, p)$-injections, par $p_n^{\ulcorner}$ la classe des $(\mathscr{M}^\iota, p)$-noyaux de familles finies. Nous supposons que $\hat{\mathscr{M}}$ est une catégorie pleine d'applications contenant $\mathscr{M}$ et nous notons $\overline{\mathscr{M}}$ la saturante de $\mathscr{M}$ dans $\hat{\mathscr{M}}$, qui est aussi une catégorie pleine d'applications.

Noyaux et sous-morphismes engendrés

Soit $\hat{H}^{\cdot}$ une catégorie, $H^{\cdot}$ une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^{\cdot}$ et $X^{\cdot}$ une sous-catégorie de $\hat{H}^{\cdot}$ formée de monomorphismes de $\hat{H}^{\cdot}$.

Définition 1. *Soient $h \in H$ et $h' \in \beta(h).H.\alpha(h)$. On dit que j est* un $(H, X, \hat{H}^{\cdot})$-noyau de (h, h') *si $j \in X.H_0^{\cdot}$ et si la classe des $k \in \hat{H}$ tels que $h.k = h'.k$ admet j pour $\hat{H}^{\cdot}$-maximum. On dit que $H^{\cdot}$ est à* $(X, \hat{H}^{\cdot})$-noyaux *si tout couple (h, h'), où $h \in H$ et $h' \in \beta(h).H.\alpha(h)$, admet un $(H, X, \hat{H}^{\cdot})$-noyau.*

j est un $(H, X, \hat{H}^{\cdot})$-noyau de (h, h') si, et seulement si, $j \in X.H_0^{\cdot}$ et $h.j = h'.j$ 1
et si, pour tout $k \in \hat{H}$ tel que $h.k = h'.k$, il existe $g \in \hat{H}$ vérifiant $k = j.g$. Comme X est formé de monomorphismes de $\hat{H}^{\cdot}$, si j est un $(H, X, \hat{H}^{\cdot})$-noyau de (h, h'), la classe des $(H, X, \hat{H}^{\cdot})$-noyaux de (h, h') est la classe $j.H_{i}^{\cdot} \cap X$.

Proposition 1. *Soit $P = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur tel que $p = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}\,\iota, H^{\cdot})$ soit résolvant à droite. Si $p_n^{\ulcorner} \subset X \subset P_i^{\ulcorner}$, alors $H^{\cdot}$ est une catégorie à $(X, \hat{H}^{\cdot})$-noyaux.*

Démonstration. Soient $h \in H$ et $h' \in \beta(h).H.\alpha(h)$. Par hypothèse, le couple (h, h') admet un $(\mathscr{M}^{\iota}, p)$-noyau j, c'est-à-dire (déf. 6, chap. III) j est un $H^{\cdot}$-maximum de la classe des $j' \in p_i^{\ulcorner}$ tels que $h.j' = h'.j'$ et on a $p(j) = (p(\beta(h)), \iota, M)$, où M est la classe des $x \in \alpha(\underline{h})$ vérifiant $h(x) = h'(x)$. Comme $j \in p_n^{\ulcorner}$, on a $j \in X \subset P_i^{\ulcorner}$. Si $k \in \hat{H}$ et si $h.k = h'.k$, on trouve

$$h(k(y)) = h'(k(y)) \quad \text{pour tout} \quad y \in \alpha(\underline{k}),$$

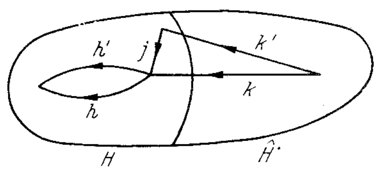


Fig. 7

d'où $\beta(\underline{k}) \subset M$. Puisque $j \in P_i^{\ulcorner}$, il existe $k' \in \hat{H}$ tel que

$$P(k') = (M, \underline{k}, \alpha(\underline{k})) \quad \text{et} \quad k = j.k'.$$

Donc j est un $(H, X, \hat{H}^{\cdot})$-noyau de (h, h').

Remarque. La notion de $(H, X, \hat{H}^{\cdot})$-noyau de (h, h') précise la notion de noyau de (h, h') dans $H^{\cdot}$, au sens de [6]. Si $p = (\mathscr{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ est un foncteur qui n'est pas résolvant à droite, il peut exister des $(H, p_i^{\ulcorner}, H^{\cdot})$-noyaux de (h, h') qui ne sont pas des $(\mathscr{M}^{\iota}, p)$-noyaux de (h, h'), car la définition de j n'entraîne pas que $\alpha(j)$ soit la classe des x tels que $h(x) = h'(x)$. 2+

Soit $P = (K^{\cdot}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur, $H^{\cdot}$ une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^{\cdot}$ et $X^{\cdot}$ une sous-catégorie de $(R_g(K^{\cdot}), P)^{\ulcorner}$. Alors $X^{\cdot}$ est formée de monomorphismes de $\hat{H}^{\cdot}$ (prop. 1*, chap. III).

Définition 2. *Soit $s \in \hat{H}_0^{\cdot}$ et soit $k'' \in P(s).R_g(K^{\cdot})$. On dira que k''* engendre un (X, H)-sous-morphisme $\hat{j}$ de s *si la classe $X_H(s, k'')$ des $j \in s.X.H_0^{\cdot}$ tels que $k'' \underset{K}{\leq} P(j)$ admet $\hat{j}$ pour $\hat{H}^{\cdot}$-minimum. Si K'' est une sous-classe de $R_g(K^{\cdot})$, on dira que P est* (K'', X, H)-engendrant *si, pour tout $s \in X_0^{\cdot}$ et pour tout $k'' \in P(s).K''$, il existe un (X, H)-sous morphisme de s engendré par k''.*

3+

Si j est un (X, H)-sous-morphisme de s engendré par k'', la classe des (X, H)-sous-morphismes de s engendrés par k'' est la classe $j . H^{\cdot}_{\gamma} \cap X$. Pour que j soit un $((R_g(K^{\cdot}), P)^{\ulcorner}, H)$-sous-morphisme de s engendré par k'', il faut et il suffit que j soit un $(R_g(K^{\cdot}), P, H)$-sous-morphisme de s engendré par k'' au sens de [4] et que l'on ait $k'' \underset{K^{\cdot}}{\leq} P(j)$. Pour que P soit (K'', X, H)-engendrant, il faut et il suffit que la restriction de P à $X^{\cdot}_0 . \hat{H} . X^{\cdot}_0$ soit (K'', X, H)-engendrant.

1¶ 

Fig. 8

Si k'' engendre un (X, H)-sous-morphisme de s, alors $k'' . f$, où $f \in K^{\cdot}_{\gamma}$, engendre aussi un (X, H)-sous-morphisme de s.

Supposons que P soit un foncteur de $\hat{H}^{\cdot}$ vers $\hat{\mathcal{M}}$ et que l'on ait $X \subset P^{\cdot}_{i}$.

Définition 3. *Si $s \in H^{\cdot}_0$ et si $M \subset P(s)$, on dit que s' est* une (X, H)-sous-structure de s engendrée par M *si $(P(s), \iota, M)$ engendre un (X, H)-sous-morphisme j de s et si $s' = \alpha(j)$. On dit que P est* $\ulcorner$-engendrant pour $(\mathcal{M}, X, H)$ (*resp.* pour $\mathcal{M}$) *si P est (K'', X, H)- (resp. $(K'', P^{\ulcorner}_{i}, \overset{-1}{\underline{P}}(\mathcal{M}))$-) engendrant, où K'' est la sous-classe de $\hat{\mathcal{M}}^{\cdot}$ formée des injections canoniques (N, ι, N'), où $\emptyset \neq N' \in \overline{\mathcal{M}}$.*

Pour que s' soit une (X, H)-sous-structure de s engendrée par M, il faut et il suffit que la classe $X_H(s, M)$ des $j \in s . X . H^{\cdot}_0$ tels que $M \subset \beta(j)$ admette un
2 $\hat{H}^{\cdot}$-minimum $\hat{j}$ et que l'on ait $s' = \alpha(\hat{j})$. Dans ce cas, s' est déterminé à un isomorphisme de $H^{\cdot}$ près. Si P est $\ulcorner$-engendrant pour $(\mathcal{M}, X, H)$, il est aussi $(\bar{K}'', X, H)$-engendrant, en désignant par $\bar{K}''$ la sous-classe de $\hat{\mathcal{M}} . \overline{\mathcal{M}}_0$ formée
3 des f tels que $\alpha(f) \neq \emptyset$.

Proposition 2. *Soit $P = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur d'homomorphismes saturé, $H = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathcal{M})$, $\bar{H} = \overset{-1}{\underline{P}}(\overline{\mathcal{M}})$ et $X' = X \cap P^{\ulcorner}_{i}$. Supposons $\bar{H}^{\cdot}_{\gamma} \subset X$. Pour que P soit $\ulcorner$-engendrant pour $(\mathcal{M}, X, H)$, il faut et il suffit qu'il soit $\ulcorner$-engendrant pour $(\mathcal{M}, X', \bar{H})$. La condition suivante est nécessaire et suffisante pour que P soit $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$:*

Pour tout $s \in \hat{H}^{\cdot}_0$,

1) *si $M \in \overline{\mathcal{M}}_0$ et $\emptyset \neq M \subset P(s)$, il existe $s' \ulcorner_{\mathbf{P}}\, s$ tel que $M \subset P(s') \in \overline{\mathcal{M}}$;*

2) *si A est une classe de P-sous-structures de s et si $\emptyset \neq \cap P(A) \in \overline{\mathcal{M}}$, il existe*
4+ *$s' \ulcorner_{\mathbf{P}}\, s$ tel que $P(s') = \cap P(A)$, lorsque $A \subset \bar{H}$.*

Démonstration. $\bar{H}^{\cdot}$ est la saturante de $H^{\cdot}$ dans $\hat{H}^{\cdot}$ et on a $X^{\cdot}_0 = X'^{\cdot}_0$. Soient $s \in X^{\cdot}_0$ et $M \in \overline{\mathcal{M}}$ tel que $\emptyset \neq M \subset P(s)$. — Si $j \in X_H(s, M)$, la surjection j définit une bijection; P étant saturé, il existe un et un seul

$$g(j) \in \bar{H}^{\cdot}_{\gamma} . \alpha(j) \quad \text{tel que} \quad P(g(j)) = j$$

et on a $u(j) \in X'_{\bar{H}}(s, M)$, où $u(j) = j . g(j)^{-1}$. Si $m = (s, j_2, j_1, k) \in \square(\hat{H}^{\cdot}; X_H(s, M), \hat{H})$, on a

$$u'(m) = (s, u(j_2), u(j_1), g(j_2) . k . g(j_1)^{-1}) \in \square(\hat{H}^{\cdot}; X'_{\bar{H}}(s, M), \hat{H}) .$$

Inversement, si $m' = (s, j'_2, j'_1, k') \in \square(\hat{H}^{\cdot}; X'_{\bar{H}}(s, M), \hat{H})$, il existe $f_i \in H_0^{\cdot}.\bar{H}_y^{\cdot}.\alpha(j'_i)$, où $i = 1, 2$, et on a

$$m' = u'(m_1), \quad \text{si} \quad m_1 = (s, j'_2 . f_2^{-1}, j'_1 . f_1^{-1}, f_2 . k' . f_1^{-1}).$$

On en déduit que $\hat{j}$ est un élément $\hat{H}^{\cdot}$-minimal de $X_H(s, M)$ si, et seulement si, $u(\hat{j})$ est élément $\hat{H}^{\cdot}$-minimal de $X'_{\bar{H}}(s, M)$. — Supposons vérifiées les conditions 1 et 2. Soit A la classe des s' tels que

$$s' \ulcorner_P s, \quad M \subset P(s') \quad \text{et} \quad s' \in \bar{H}.$$

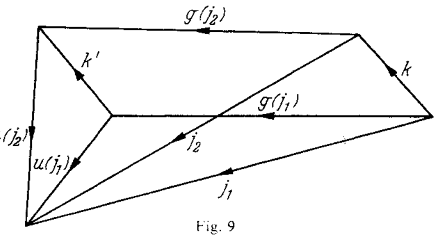


Fig. 9

On a $A \neq \emptyset$ et il existe $\hat{s} \in \bar{H}_0^{\cdot}$ tel que $\hat{s} \ulcorner_P s$ et $P(\hat{s}) = \cap P(A) \supset M$, car $\cap P(A) \in \bar{\mathcal{M}}$. Par suite $\hat{s} \in A$; si $s' \in A$, on a $P(\hat{s}) \subset P(s')$, d'où, en vertu du théorème 1, chap. III, $\hat{s} \ulcorner_P s'$. Donc $\hat{s}$ est la P-sous-structure de s engendrée par M, et P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$, en vertu du début de la démonstration. — Réciproquement, supposons que P soit $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$. Soit A une classe de P-sous-structures de s telles que $A \subset \bar{H}$ et

$$\emptyset \neq M \in \bar{\mathcal{M}}_0, \quad \text{où} \quad M = \cap P(A).$$

Nous avons vu que M engendre une P-sous-structure $\hat{s}$ de s et que $M \subset P(\hat{s}) \in \bar{\mathcal{M}}$. Pour tout $s' \in A$, les relations

$$s' \ulcorner_P s \quad \text{et} \quad M \subset P(s')$$

entraînent :

$$\hat{s} \ulcorner_P s' \quad \text{et} \quad P(\hat{s}) \subset P(s').$$

Il en résulte $P(\hat{s}) \subset M$, d'où $M = P(\hat{s})$, et les conditions de la proposition sont remplies.

Corollaire. *Soit P un foncteur d'homomorphismes saturé. P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$ si, et seulement si, pour tout $s \in \hat{H}_0^{\cdot}$ et tout $M \in \bar{\mathcal{M}}_0$ tel que $\emptyset \neq M \subset P(s)$, il existe une P-sous-structure s' de s engendrée par M telle que $P(s') \in \bar{\mathcal{M}}$.* 1

En effet, ceci équivaut à la première affirmation de la proposition 2, lorsque $X = P_i^{\ulcorner}$ (et par suite $X' = P_i^{\ulcorner}$).

Soient $\hat{\mathcal{F}}$ et $\hat{\mathcal{N}}'$ les catégories des foncteurs et néofoncteurs associées à $\hat{\mathcal{M}}$; soient $P_{\mathcal{F}}$ et $P_{\mathcal{N}'}$ leurs foncteurs projections canoniques vers $\hat{\mathcal{M}}$. Nous désignons par $\hat{\mathcal{F}}_g$ la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathcal{F}}$ ayant pour unités les groupoïdes, par P_g la restriction de $P_{\mathcal{F}}$ à $\hat{\mathcal{F}}_g$.

Proposition 3. *Si $\mathcal{M}_0$ et $\hat{\mathcal{M}}_0$ sont des univers, $P_{\mathcal{N}'}$, $P_{\mathcal{F}}$ et P_g sont $\ulcorner$-engendrants pour $\mathcal{M}$.*

Démonstration. Soient
$$C^{\cdot} \in \hat{\mathcal{N}}'_0 \quad \text{et} \quad M \in \bar{\mathcal{M}}_0 \quad \text{tels que} \quad \emptyset \neq M \subset C.$$
On a, α et β désignant les applications source et but dans $C^{\cdot}$:
$$\alpha(M) \in \bar{\mathcal{M}}_0 \quad \text{et} \quad \beta(M) \in \bar{\mathcal{M}}_0, \quad \text{d'où} \quad \hat{M} = M \cup \alpha(M) \cup \beta(M) \in \bar{\mathcal{M}}_0,$$
car $\bar{\mathcal{M}}_0$ est un univers. Comme le sous-graphe multiplicatif de $C^{\cdot}$ engendré par M est la sous-classe multiplicative $\hat{M}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$, il appartient à la saturante $\bar{\mathcal{N}}'$ de $\mathcal{N}'$ dans $\hat{\mathcal{N}}'$. Ceci prouve, d'après la proposition 2, que $P_{\mathcal{N}'}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$. — Supposons de plus $C^{\cdot} \in \hat{\mathcal{F}}_0$; soit $L[\hat{M}^{\cdot}]^{\cdot}$ la catégorie libre des chemins du graphe $[\hat{M}^{\cdot}]$ sous-jacent à $\hat{M}^{\cdot}$ (on identifiera $\hat{M}$ à une sous-classe de $L[\hat{M}^{\cdot}]$). La classe $\sum_{n \in N} \hat{M}^n$, où N est l'ensemble des entiers > 0, appartient à $\bar{\mathcal{M}}_0$, de même que sa sous-classe $L[\hat{M}^{\cdot}]$. La sous catégorie $\hat{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ engendrée par M étant l'image de $L[\hat{M}^{\cdot}]$ par l'application
$$f \to f \quad \text{et} \quad (f_n, \ldots, f_1) \to f_n \cdot \ldots \cdot f_1 \quad \text{de } L[\hat{M}^{\cdot}] \text{ dans } C,$$
elle appartient aussi à $\bar{\mathcal{M}}$. Donc $P_{\mathcal{F}}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$. — Soit $C^{\cdot} \in (\hat{\mathcal{F}}_g)_0$ et soit I la bijection $f \to f^{-1}$ de C sur C. Le sous-groupoïde $\tilde{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ engendré par M est la sous-catégorie de $C^{\cdot}$ engendrée par la classe $\tilde{M} = M \cup I(M)$. Comme $\tilde{M} \in \bar{\mathcal{M}}$, on a, d'après ce qui précède, $\tilde{C} \in \bar{\mathcal{M}}$. Ainsi P_g est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$.

Soit $P = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ *un foncteur.*

1 **Définition 4.** *On dira que* P *est* $\ulcorner$-étalant (*resp.* faiblement $\ulcorner$-étalant) *si, pour tout* $s \in \hat{H}^{\cdot}_0$ *et pour toute sous-classe non vide* M *de* $P(s)$ *(resp.* M *telle que* $(P(s), \iota, M) \in P(s.\hat{H})$*), il existe une* P*-sous-structure* s' *de* s *vérifiant* $P(s') = M$.

Dire que P est $\ulcorner$-étalant signifie que $((\hat{\mathcal{M}}_0, \subset), \underline{P}\,\iota, (\hat{H}^{\cdot}_0, \ulcorner_P))$ est un étalement [5]. Si P est $\ulcorner$-étalant et si de plus il est fidèle, il est résolvant à droite. Si P est un foncteur d'homomorphismes saturé et $\ulcorner$-étalant, il est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$, d'après le corollaire de la proposition 2.

Exemples. Le foncteur $p_{\mathcal{N}}$ et le foncteur $p_{\mathcal{T}}$ (resp. p_{Ω}) projection canonique de la catégorie $\mathcal{T}$ des applications continues (resp. Ω des applications ordonnées) sont $\ulcorner$-étalants. Les foncteurs $p_{\mathcal{N}'}$ et $p_{\mathcal{F}}$ sont faiblement $\ulcorner$-étalants.

Existence de projections

Définition 5. *Soient* $\tilde{H}^{\cdot}$ *une catégorie,* $H^{\cdot}$ *et* $\bar{H}^{\cdot}$ *deux sous-catégories pleines de* $\tilde{H}^{\cdot}$ *telles que* $H \subset \bar{H}$. *On dit que* j *est un* $(H, \bar{H}, \tilde{H}^{\cdot})$-projecteur, *ou que* $\beta(j)$ est une $(H, \bar{H}, \tilde{H}^{\cdot})$-projection de $e = \alpha(j)$, *si* $j \in \bar{H}^{\cdot}_0 . \tilde{H}$ *et si, pour tout* $h \in H^{\cdot}_0 . \tilde{H} . e$, *il existe un et un seul* $h' \in \bar{H}$ *tel que* $h = h'.j$.

Cette définition signifie que j est un $(\bar{H}, \tilde{H}^{\cdot}_j)$-projecteur, où $\tilde{H}^{\cdot}_j$ est la sous-catégorie de $\tilde{H}^{\cdot}$ engendrée par $\{j\} \cup H \cup H^{\cdot}_0 . \bar{H} . \beta(j) \cup H^{\cdot}_0 . \tilde{H} . \alpha(j)$. En particulier j est un $(H, H, \tilde{H}^{\cdot})$-projecteur si, et seulement si, c'est un $(H, \tilde{H}^{\cdot})$-projecteur.

Soient $\tilde{H}^{\cdot}$ *une catégorie et* $H^{\cdot}$ *une sous-catégorie pleine de* $\tilde{H}^{\cdot}$. Nous supposons qu'*il existe un objet final* a *de* $\tilde{H}^{\cdot}$ *appartenant à* H (on peut se ramener à ce cas en ajoutant à $\tilde{H}^{\cdot}$ et à $H^{\cdot}$ un objet final, i.e. un $\emptyset$-produit, a). Nous désignons par e une unité de $\tilde{H}^{\cdot}$, par I_e la classe $H_0^{\cdot}.\tilde{H}.e$; comme il existe $h \in a.\tilde{H}.e$, la classe I_e n'est pas vide. Dans les 3 propositions suivantes, nous supposons que $(\beta(g))_{g \in I_e}$ *admet un produit naturalisé* $((p_g)_{g \in I_e}, S)$ *dans* $\tilde{H}^{\cdot}$ *et nous posons* $\hat{g} = [g]_{g \in I_e}$. *Soit* $\bar{H}^{\cdot}$ *une sous-catégorie pleine de* $\tilde{H}^{\cdot}$ *telle que* $H \subset \bar{H}$.

Proposition 4. *S'il existe* $h \in R_d(H_0^{\cdot}.\bar{H}, \tilde{H}^{\cdot})$ *et* $j \in \tilde{H}.\bar{H}_0^{\cdot}$ *tel que* $\hat{g} = j.h$, *alors* h *est un* $(H, \bar{H}, \tilde{H}^{\cdot})$*-projecteur.*

En effet, si $g \in I_e$, on a $g = p_g.\hat{g} = (p_g.j).h$, où $p_g.j \in \bar{H}$.

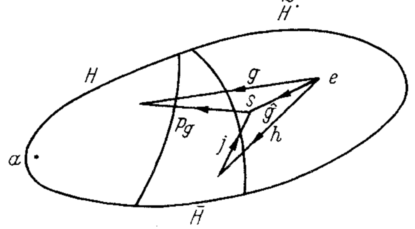


Fig. 10

Remarque. La proposition 4 admet pour cas particulier la prop. 2, app. I (voir aussi [11]).

Pour simplifier, nous nous limitons dans la suite aux théorèmes d'existence pour les $(H, \tilde{H}^{\cdot})$-projecteurs, le cas de $(H, \bar{H}, \tilde{H}^{\cdot})$-projecteurs en résultant.

Soit $X^{\cdot}$ une sous-catégorie de $R_g(\tilde{H}^{\cdot})$. Rappelons que, si $\bar{h} \in \tilde{H}$, on dit que $\bar{h}$ admet j pour $(X.H_0^{\cdot}, \tilde{H}^{\cdot}, \tilde{H})$-image si $j \in X.H_0^{\cdot}$, s'il existe $h \in \tilde{H}$ tel que $\bar{h} = j.h$ et si les conditions $j' \in X.H_0^{\cdot}$ et $\bar{h} = j'.h'$ entraînent $j \underset{\tilde{H}}{\leq} j'$ (déf. 30, chap. III).

Proposition 5. *Soit* $X^{\cdot}$ *une sous-catégorie de* $R_g(\tilde{H}^{\cdot})$ *telle que* $H^{\cdot}$ *soit à* $(X, \tilde{H}^{\cdot})$*-noyaux. Si* $\hat{g}$ *admet une* $(X.H_0^{\cdot}, \tilde{H}^{\cdot}, \tilde{H})$*-image* $\hat{j}$, *alors* $\alpha(\hat{j})$ *est une* $(H, \tilde{H}^{\cdot})$*-projection de* e.

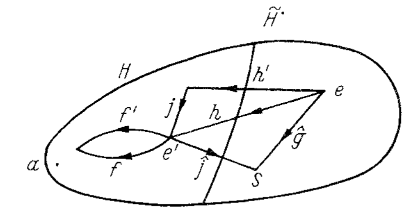


Fig. 11

Démonstration. Il existe $h \in H_0^{\cdot}.\tilde{H}$ tel que $\hat{g} = \hat{j}.h$. D'après la proposition 4, il suffit de montrer que l'on a $h \in R_d(H, \tilde{H}^{\cdot})$. En effet, supposons $f.h = f'.h$, où $f \in H$, $f' \in H$ et $\beta(f) = \beta(f')$. Il existe un $(H, X, \tilde{H}^{\cdot})$-noyau j de (f, f'); par définition d'un noyau, il existe $h' \in \tilde{H}$ tel que $h = j.h'$. Il s'ensuit

$$\hat{j}.j.h' = \hat{j}.h = \hat{g}.$$

Comme $j \in X$ et que $X^{\cdot}$ est une catégorie, on a $\hat{j}.j \in X.H_0^{\cdot}$. Par suite il existe $k \in H$ tel que $\hat{j} = \hat{j}.j.k$. Puisque $\hat{j}$ est un monomorphisme de $\tilde{H}^{\cdot}$, on en déduit $\alpha(\hat{j}) = j.k$ et, j étant un monomorphisme de $\tilde{H}^{\cdot}$, on a $j \in H_{\gamma}^{\cdot}$. L'égalité $f.j = f'.j$ entraîne donc $f = f'$. Ainsi h est un $(H, \tilde{H}^{\cdot})$-projecteur.

Corollaire. *Soit $q = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{q}, \tilde{H}^{\cdot})$ un foncteur tel que $p = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{q}\iota, H^{\cdot})$ soit résolvant à droite. Si $X^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $q_i^{\ulcorner}$ telle que $p_n^{\ulcorner} \subset X$ et si $M = \beta(\underline{\hat{g}})$ engendre une (X, H)-sous-structure e' de S, alors e' est une $(H, \tilde{H}^{\cdot})$-projection de e.*

En effet, d'après la proposition 1, $H^{\cdot}$ est une catégorie à $(X, \tilde{H}^{\cdot})$-noyaux. Soit j un (X, H)-sous-morphisme de S engendré par M ; on a $\beta(\underline{\hat{g}}) \subset \beta(\underline{j})$, de sorte qu'il existe $h \in \tilde{H}$ tel que $\hat{g} = j.h$, car $j \in q_i^{\ulcorner}$; de plus les conditions $j' \in X.H_0^{\cdot}$ et $j'.h' = \hat{g}$ entraînent $\beta(\underline{\hat{g}}) \subset \beta(\underline{j'})$, et par suite $j \underset{\tilde{H}^{\cdot}}{\leqslant} j'$. Ainsi j est une $(X.H_0^{\cdot}, \tilde{H}^{\cdot}, \tilde{H})$-image de $\hat{g}$, et le corollaire résulte de la proposition 5.

Proposition 6. *Soit $q = (K^{\cdot}, \underline{q}, \tilde{H}^{\cdot})$ un foncteur (K'', X, H)-engendrant, où K'' est une sous-classe de $R_g(K^{\cdot})$, et $X^{\cdot}$ une sous-catégorie de $(R_g(K^{\cdot}), q)^{\cdot}$. Si $q(S.X.H_0^{\cdot}) \subset K''$, si $H^{\cdot}$ est à $(X, \tilde{H}^{\cdot})$-noyaux, si $S \in X$ et si $q(\hat{g})$ admet une $(K'', K^{\cdot}, K)$-image, alors e admet une $(H, \tilde{H}^{\cdot})$-projection.*

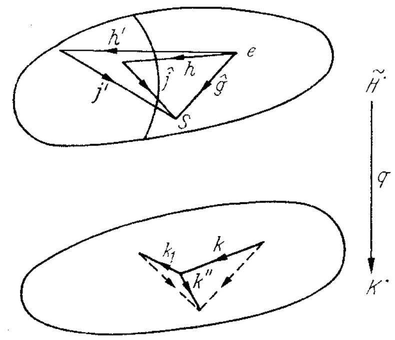


Fig. 12

Démonstration. Soit k'' une $(K'', K^{\cdot}, K)$-image de $q(\hat{g})$ et soit $q(\hat{g}) = k''.k$, où $k \in K$. Par hypothèse, k'' engendre un (X, H)-sous-morphisme $\hat{j}$ de S, de sorte qu'il existe $k_1 \in K$ tel que $k'' = q(\hat{j}).k_1$. On a

$$q(\hat{g}) = k''.k = q(\hat{j}).k_1.k$$

et, X étant formé de q-injections, il existe $h \in \tilde{H}$ vérifiant $\hat{j}.h = \hat{g}$. Par ailleurs si on a $j'.h' = \hat{g}$ et $j' \in X.H_0^{\cdot}$, on a $q(j').q(h') = q(\hat{g})$, avec $q(j') \in K''$. Il s'ensuit $k'' \underset{K^{\cdot}}{\leqslant} q(j')$, et par conséquent $\hat{j} \underset{\tilde{H}^{\cdot}}{\leqslant} j'$. Donc $\hat{j}$ est une $(X.H_0^{\cdot}, \tilde{H}^{\cdot}, \tilde{H})$-image de $\hat{g}$. En vertu de la proposition 5, h est donc un $(H, \tilde{H}^{\cdot})$-projecteur.

Corollaire. *Soit $q = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{q}, \tilde{H}^{\cdot})$ un foncteur tel que $p = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{q}\iota, H^{\cdot})$ soit résolvant à droite. Soit $X^{\cdot}$ une sous-catégorie de $q_i^{\ulcorner}$ telle que $p_n^{\ulcorner} \subset X$. Si $\mathcal{M}_0$ est un univers, si q est $\ulcorner$-engendrant pour $(\mathcal{M}, X, H)$ et si $q(e) \in \mathcal{M}$, alors e admet une $(H, \tilde{H}^{\cdot})$-projection, lorsque $S \in X$.*

En effet, on a $M = \beta(\underline{\hat{g}}) \in \bar{\mathcal{M}}$, puisque $\mathcal{M}_0$ est un univers, de sorte que $q(\hat{g})$ admet $(q(S), \iota, M)$ pour $(\hat{\mathcal{M}}^i.\bar{\mathcal{M}}, \hat{\mathcal{M}}, \hat{\mathcal{M}})$-image. Comme $H^{\cdot}$ est à $(X, \tilde{H}^{\cdot})$-noyaux, d'après la proposition 1, le corollaire se déduit de la proposition 6.

Proposition 7. *Soit $q = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{q}, \tilde{H}^{\cdot})$ un foncteur, $\hat{H}^{\cdot}$ une sous-catégorie pleine de $\tilde{H}^{\cdot}$ et $P = (\hat{\mathcal{M}}, \underline{q}\iota, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur d'homomorphismes saturé et $\ulcorner$-étalant. Supposons que $\mathcal{M}_0$ soit un univers et que $H = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathcal{M})$. Si $q(e) \in \mathcal{M}$, si $P_i^{\ulcorner} \subset q_i^{\ulcorner}$*

et si $S \in \hat{H}$, *il existe une* $(H, \tilde{H}^{\cdot})$*-projection* e' *de* e *telle que* $q(e')$ *soit une classe quotient de* $q(e)$.

Démonstration. Montrons que l'on a $p_\iota^\ulcorner \subset P_\iota^\ulcorner$, où $p = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{q}\iota, H^{\cdot})$. En effet, soit

$$j \in p_\iota^\ulcorner, \quad \beta(j) = s \quad \text{et} \quad \alpha(j) = \hat{s}.$$

P étant $\ulcorner$-étalant, il existe $\hat{j}$ tel que

$$\hat{j} \in s . P_\iota^\ulcorner \quad \text{et} \quad P(\hat{j}) = p(j) \in \mathscr{M}.$$

On a $\alpha(\hat{j}) \in H$, car $H = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathscr{M})$. Il s'ensuit $\hat{j} \in p_\iota^\ulcorner$ et, d'après le corollaire du $th. 1^*$, chap. III, on a $j = \hat{j}$. On en déduit $j \in P_\iota^\ulcorner$ et $p_\iota^\ulcorner \subset P_\iota^\ulcorner$. — Par ailleurs, il existe une P-sous-structure s' de S vérifiant $P(s') = M = \beta(\underline{\hat{g}})$. Or $q(e) \in \mathscr{M}_0$ entraîne $M' \in \mathscr{M}_0$, où $M' = q(e)/r_{\hat{g}}$. Soit $\underline{f}$ la bijection $\lambda(\underline{\hat{g}})^{-1}$ de M sur M'. Il existe

$$f \in \hat{H}_\gamma^{\cdot} . s' \quad \text{tel que} \quad P(f) = \underline{f},$$

d'où $e' = \beta(f) \in H$. Comme e' est une $(P_i^\ulcorner, H)$-sous-structure de S engendrée par M et que p est résolvant à droite, car P est résolvant à droite, e' est une $(H, \tilde{H}^{\cdot})$-projection de e, d'après le corollaire, prop. 5, et elle a la propriété voulue. 1+

Existence de structures quasi-quotient

Soit $P = (K^{\cdot}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur, $H^{\cdot}$ et $\bar{H}^{\cdot}$ deux sous-catégories de $\hat{H}^{\cdot}$ telles que $H \subset H . \hat{H} . \bar{H} \subset \bar{H}$ et que $\hat{H}^{\cdot}$ admette un objet final $a \in H$, où $H^{\cdot}$ est pleine. Soient K' et K'' des parties de K vérifiant les conditions suivantes:

1. $K_0^{\cdot} \subset K' \subset R_d(K^{\cdot})$ et $K'' \subset R_g(K^{\cdot})$;
2. Tout $k \in P(\hat{H} . \bar{H}_0^{\cdot})$ admet une $(K'', K^{\cdot}, K)$-image;
3. Si $(k'', f', f, k') \in \square K^{\cdot}$, où $k'' \in R_g(K^{\cdot})$, $k' \in K'$, il existe $g \in K$ tel que $k'' . g = f'$. 2

La condition 3 entraîne $k'' . g . k' = f' . k' = k'' . f$, d'où $g . k' = f$.

Théorème 1. *Soit* $P = (K^{\cdot}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ *un foncteur tel que les conditions précédentes soient vérifiées, que* $\hat{H}^{\cdot}$ *soit une catégorie à* $\mathscr{P}(\bar{H})$*-produits et que P soit compatible avec les* $\mathscr{P}(\bar{H})$*-produits. Soit* $X^{\cdot}$ *une sous-catégorie de* $(R_g(K^{\cdot}), P)^\ulcorner$ *stable par produits dans* $\hat{H}^{\cdot}$, *et* $P(X . H_0^{\cdot}) \subset K''$. *Si* $H^{\cdot}$ *est à* $(X, \tilde{H}^{\cdot})$*-noyaux et si P est* (K'', X, H)*-engendrant, pour tout* $s \in \bar{H}_0^{\cdot}$ *et tout* $k' \in K' . P(s)$, *il existe une* (P, H)*-quasi-surjection j vérifiant* $\alpha(j) = s$ *et* $P(j) = f . k'$.

Démonstration. Soit $\tilde{H}^{\cdot}$ la catégorie $\boxminus(K', P)$ construite au n° 1. Soit $I \subset \bar{H}$ et $s_i \in \hat{H}_0^{\cdot}$ pour tout $i \in I$. Alors $(s_i)_{i \in I}$ admet un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ dans $\hat{H}^{\cdot}$ et $(P(p_i)_{i \in I}, P(S))$ est un produit naturalisé dans $K^{\cdot}$.
— Montrons que S est aussi un produit de $(s_i)_{i \in I}$ dans $\tilde{H}^{\cdot}$. En effet, soient $e \in \tilde{H}_0^{\cdot}$,

$$m_i = (k_i, P(s_i), k', h_i) \in \tilde{H} . e, \quad \text{où} \quad \beta(h_i) = s_i, \quad \text{pour tout} \quad i \in I.$$

Il existe un et un seul $h \in \hat{H}$ et un et un seul $k \in K$ tels que

$$p_i . h = h_i \quad \text{et} \quad P(p_i) . k = k_i \quad \text{pour tout} \quad i \in I.$$

Pour tout $i \in I$, on trouve

$$P(p_i) . k . k' = k_i . k' = P(h_i) = P(p_i) . P(h),$$

d'où $k.k' = P(h)$, et par suite $m = (k, P(S), k', h) \in \tilde{H}$. Il s'ensuit que m est l'unique élément de $\tilde{H}$ tel que $m_i = p_i.m$, ce qui démontre l'affirmation énoncée.
— Soit q le foncteur de $\tilde{H}^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ défini par $(k, k_1', k', h) \to P(h)$. — Montrons que l'on a $(R_g(K^{\cdot}), P)^{\ulcorner} \subset (R_g(K^{\cdot}), q)^{\ulcorner}$. En effet, soient : $j \in (R_g(K^{\cdot}), P)^{\ulcorner}$,

$$m = (f, x, k', h) \in \beta(j).\tilde{H}, \quad q(m) = q(j).k \quad \text{et} \quad k \in K.$$

On a $\beta(h) = \beta(j)$ et $P(h) = P(j).k$, de sorte qu'il existe un et un seul $h' \in H$ vérifiant

$$P(h') = k \quad \text{et} \quad h = j.h'.$$

Puisque $K^{\cdot}$ vérifie la condition 3 et que l'on a $k' \in K'$ et $P(j) \in R_g(K^{\cdot})$, il existe $f' \in K$ pour lequel $f = P(j).f'$. On en déduit

$$f'.k' = P(h'), \quad \text{c'est-à-dire} \quad m' = (f', x', k', h') \in \tilde{H}, \quad \text{où} \quad x' = \beta(f').$$

De plus

$$m = (f, x, k', h) = j.(f', x', k', h') = j.m' \quad \text{et} \quad q(m') = P(h') = k.$$

Par conséquent $j \in (R_g(K^{\cdot}), q)^{\ulcorner}$, et q est (K'', X, H)-engendrant.
— Montrons que $H^{\cdot}$ est à $(X, \tilde{H}^{\cdot})$-noyaux. En effet, soient $h \in H$ et $h' \in \beta(h).H.\alpha(h)$. Il existe un $(H, X, \hat{H}^{\cdot})$-noyau j de (h, h'). Si

$$m = (f, x, k', \bar{h}) \in \tilde{H} \quad \text{et si} \quad h.m = h'.m,$$

1 on a $h.\bar{h} = h'.\bar{h}$. Par suite il existe $g \in \tilde{H}$ tel que $\bar{h} = j.g$, ce qui signifie $q(m) = q(j).q(g)$; d'après ce qui précède j est une (K'', q)-injection, de sorte qu'il existe $m' \in \tilde{H}$ tel que $m = j.m'$. Ceci prouve que j est un $(H, X, \tilde{H}^{\cdot})$-noyau de (h, h').
— Soient $s \in \bar{H}_0^{\cdot}$ et $k' \in K'.P(s)$. On a $e = (x', k', k', s) \in \tilde{H}$. La classe $H_0^{\cdot}.\tilde{H}.e = I_e$, isomorphe à $I' \subset \bar{H}$, est non vide, car $\tilde{H}^{\cdot}$ a un objet final $a \in H$, et $(\beta(g))_{g \in I_e}$
2 admet un produit S dans $\hat{H}^{\cdot}$ qui, d'après le début de la démonstration, est un produit dans $\tilde{H}^{\cdot}$. Ainsi $S \in X$, les conditions de la proposition 6 sont vérifiées et cette proposition affirme qu'il existe un $(H, \tilde{H}^{\cdot})$-projecteur (f, x, k', j) de source e. Donc j est une (P, H)-quasi-surjection vérifiant les conditions indiquées.

3+ Dans la fin de ce n° 2, nous supposons que $\mathscr{M}_0$ *et* $\hat{\mathscr{M}}_0$ *sont des univers et que l'on a* $\mathscr{M}_0 \in \hat{\mathscr{M}}_0$. Il existe une application $\hat{\mathscr{M}}_0$-produit canonique dans $\hat{\mathscr{M}}$, notée $\hat{\pi}$, telle que, si $I \neq \emptyset$, on ait

$$\hat{\pi}((M_i)_{i \in I}) = ((p_i)_{i \in I}, \prod_{i \in I} M_i),$$

où

$$p_j((x_i)_{i \in I}) = x_j \quad \text{pour tout} \quad j \in I,$$

et

$$\hat{\pi}(V) = (V, \{\emptyset\}),$$

où V est la famille vide $(\ )_{i \in \emptyset}$ et où $\{\emptyset\}$ est l'ensemble réduit au seul élément $\emptyset$ (on a $\{\emptyset\} \in \mathscr{M}_0$, car $\mathscr{M}_0$ est un univers et que $\{\emptyset\} = \mathscr{P}(\emptyset)$, où $\emptyset \in \mathscr{M}_0$).

Soit $P = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur. Rappelons que P est $\hat{\pi}$-*compatible* si toute famille $(e_i)_{i \in I}$, où $I \in \hat{\mathscr{M}}_0$ et $e_i \in \hat{H}_0^{\cdot}$, admet un produit naturalisé $((p_i)_{i \in I}, S)$ dans P (i.e. tel que $(P(p_i)_{i \in I}, P(S)) = \hat{\pi}(P(e_i))_{i \in I})$. 1

Dans ce cas $\hat{H}^{\cdot}$ admet en particulier un objet final a tel que $P(a) = \{\theta\}$, que nous appellerons un *objet P-final de* $\hat{H}^{\cdot}$.

Théorème 2. *Soit* $P = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ *un foncteur* $\hat{\pi}$*-compatible, où* $\overset{-1}{\underline{P}}(\mathscr{M}) \in \hat{\mathscr{M}}_0$, *et* $H^{\cdot}$ *une sous-catégorie pleine de* $\hat{H}^{\cdot}$ *telle que* $P(H) \subset \mathscr{M}$ *et* $a \in H$, *où a est un objet P-final de* $\hat{H}^{\cdot}$. *Soit* $X^{\cdot}$ *une sous-catégorie de* $P_i^{\ulcorner}$ *stable par produits dans* $\hat{H}^{\cdot}$. *Supposons p résolvant à droite et* $p_n^{\ulcorner} \subset X$, *où* $p = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}\,\iota, H^{\cdot})$. *Si* $s \in \overset{-1}{\underline{P}}(\mathscr{M})_0$, *si r est une relation sur* $P(s)$ *et si P est* $\ulcorner$*-engendrant pour* $(\mathscr{M}, X, H)$, *il existe une* (H, P)*-structure quasi-quotient de s par r.*

Démonstration. Montrons que les conditions du théorème 1 sont vérifiées, en prenant $\bar{H} = H \cup H . \hat{H} . s \cup \{s\}$, $K' = \hat{\mathscr{M}}^{\mathrm{q}}$ et K'' = sous-classe de $\hat{\mathscr{M}}^{\mathrm{i}} . \bar{\mathscr{M}}_0$ formée des f tels que $\alpha(f) \neq \theta$. Comme $\bar{H} \subset \overset{-1}{\underline{P}}(\mathscr{M}) \in \hat{\mathscr{M}}_0$ et que $\hat{\mathscr{M}}_0$ est un univers, $\hat{\mathscr{M}}_0$ est à $\mathscr{P}(\bar{H})$-produits; P étant $\hat{\pi}$-compatible, $\hat{H}^{\cdot}$ est à $\mathscr{P}(\bar{H})$-produits. D'après la proposition 1, $H^{\cdot}$ est une catégorie à $(X, \hat{H}^{\cdot})$-noyaux. De plus P est (K'', X, H)-engendrant. Tout $f \in P(\hat{H} . \bar{H}_0^{\cdot}) \subset \hat{\mathscr{M}} . \bar{\mathscr{M}}_0$ admet $(\beta(f), \iota, \beta(\underline{f}))$ pour $(K'', \hat{\mathscr{M}}, \hat{\mathscr{M}})$-image. Supposons

$$(k'', f', f, k') \in \square\, \hat{\mathscr{M}}, \quad k'' \in \hat{\mathscr{M}}^{\mathrm{i}} \quad \text{et} \quad k' \in \hat{\mathscr{M}}^{\mathrm{q}}.$$

Alors $\underline{k}''$ est une bijection; si $x \in \alpha(f')$, il existe $y \in \alpha(k')$ tel que $k'(y) = x$ et on a $f'(x) = k''. f(y)$, d'où $x \in \alpha(\underline{k}''^{-1} \underline{f}')$. Il s'ensuit

$$g = (\beta(f), \underline{k}''^{-1} \underline{f}', \alpha(f')) \in \hat{\mathscr{M}} \quad \text{et} \quad k''. g = f'.$$

Donc les conditions du théorème 1 sont vérifiées et le théorème 2 en résulte. En vertu de la proposition 6, si $I_e = H_0^{\cdot} . P^{\mathrm{r}} . (s, r)$ et $\hat{g} = [g]_{g \in I_e}$, la structure s admet pour (H, P)-structure quasi-quotient par r la (X, H)-sous-structure s' de $S = \beta(\hat{g})$ engendrée par $\beta(\hat{g})$.

Corollaire. *Soit* $P = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ *un foncteur d'homomorphismes saturé,* $\hat{\pi}$*-compatible et* $\ulcorner$*-étalant. Soit* $H = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathscr{M}) \in \hat{\mathscr{M}}_0$ *et* $p = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}\,\iota, H^{\cdot})$. *Si* $s \in H_0^{\cdot}$ *et si r est une relation sur* $P(s)$, *il existe une p-structure quotient faible* s' *de s par r.*

En effet, avec les notations de la fin de la démonstration précédente, la proposition 7 affirme que l'on peut choisir s' tel que $p(s')$ soit une classe quotient de $p(s)$. En utilisant la proposition 5–1, on voit donc que s' est une p-structure quotient de s.

Exemples. Le théorème 3–1 est un corollaire du théorème 1, puisque $P_{\mathscr{N}'}$ et 2
$P_{\mathscr{F}}$ sont $\ulcorner$-engendrants pour $\mathscr{M}$ d'après la proposition 3. Comme p_Ω est $\ulcorner$-étalant, toute classe ordonnée $(M, <)$, où $M \in \mathscr{M}_0$, admet une p_Ω-structure quotient faible par toute relation r, en vertu du corollaire du théorème 1 (mais non en général une p_Ω-structure quotient par r).

Existence de limites inductives

Théorème 3. *Soit* $p = (K^{\cdot}, \underline{p}, H^{\cdot})$ *un foncteur fidèle et g un foncteur de* $I^{\cdot}$ *vers* $H^{\cdot}$. *Supposons que* $(g(i))_{i \in I_0^{\cdot}}$ *admette une somme s dans* $H^{\cdot}$ *et que* $(p(g(i)))_{i \in I_0^{\cdot}}$ *admette une somme dans* $K^{\cdot}$. *Si* $K^{\cdot}$ *est une catégorie à sommes fibrées finies, si*

22*

$\boxminus(R_d(K^{\cdot}), p)$ est une catégorie à H-projections et si $p.g$ admet une limite inductive x, il existe une p-quasi-surjection j telle que $\beta(j)$ soit une limite inductive de g et que $\alpha(j) = s$.

Démonstration. Soit $L(H)^{\cdot}$ la catégorie longitudinale $\mathfrak{N}(H^{\cdot}, I^{\cdot})^{\boxminus}$ des transformations naturelles entre foncteurs de $I^{\cdot}$ vers $H^{\cdot}$; nous identifions $L(H)_0^{\cdot}$ à la classe des foncteurs de $I^{\cdot}$ vers $H^{\cdot}$ et $H^{\cdot}$ à une sous-catégorie (pleine si $I^{\cdot}$ est connexe seulement) de $L(H)^{\cdot}$ (voir fin appendice I). Définissons de même $L(K)^{\cdot}$. Posons $s_i = g(i)$, pour tout $i \in I_0^{\cdot}$. Soit $(s, (\bar{v}^i)_{i\in I_0^{\cdot}})$ une somme naturalisée de $(s_i)_{i \in I_0^{\cdot}}$ dans $H^{\cdot}$ et $(e, (v_i)_{i\in I_0^{\cdot}})$ une somme naturalisée de $(p(s_i))_{i\in I_0^{\cdot}}$ dans $K^{\cdot}$. Comme $p(\bar{v}^i) \in p(s).K$, il existe un et un seul $k \in K$ tel que

$$k.v_i = p(\bar{v}^i) \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0^{\cdot}.$$

Soit $\bar{\phi}$ un $(K, L(K)^{\cdot})$-projecteur de source $p.g$ de but x. Les relations

$$\bar{\phi}(i) = \phi(i)^{\boxminus}, \quad \text{où} \quad \phi(i) \in x.K.p(s_i), \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0^{\cdot}$$

entraînent qu'il existe $k' \in K$ vérifiant $k'.v_i = \phi(i)$. Il existe par hypothèse une somme fibrée naturalisée $V = ((k_1, k), (k_1', k'))$ dans $K^{\cdot}$. Si

$$f.k_1 = f'.k_1 \quad \text{et} \quad \beta(f) = \beta(f').$$

on a, pour tout $i \in I_0^{\cdot}$:

$$f.k_1'.\phi(i) = f.k_1'.k'.v_i = f.k_1.k.v_i = f'.k_1'.k'.v_i = f'.k_1'.\phi(i),$$

d'où $f.k_1' = f'.k_1'$. On en déduit $f = f'$, par définition de V. Donc $k_1 \in R_d(K^{\cdot})$.
— Il existe un $(H, \boxminus(R_d(K^{\cdot}), p))$-projecteur

$$m = (f, x', k_1, j) \quad \text{tel que} \quad \alpha(j) = s.$$

Posons $\tau(i) = j.\bar{v}^i$. Soit $u \in i'.I.i$; on a $\phi(i) = \phi(i').\underline{p}\,\underline{g}(u)$ et les relations

$$p(\tau(i)) = p(j).p(\bar{v}^i) = f.k_1.p(\bar{v}^i) = f.k_1'.k'.v_i = f.k_1'.\phi(i)$$
$$= f.k_1'.\phi(i').\underline{p}\,\underline{g}(u) = p(\tau(i').g(u)),$$
$$\alpha(\tau(i)) = \alpha(\tau(i').g(u)) \quad \text{et} \quad \beta(\tau(i)) = \beta(\tau(i').g(u))$$

ont pour conséquence $\tau(i) = \tau(i').g(u)$, car p est fidèle. Ceci montre que l'application

$$u \to (\beta(j), \tau(i'), \tau(i), g(u)), \quad \text{où} \quad u \in I,$$

définit une transformation naturelle $\Phi \in L(H)$ de source g, de but $\beta(j)$.
— Montrons que Φ est un $(H, L(H)^{\cdot})$-projecteur. En effet, soit $\Psi \in s'.L(H).g$,

$$s' \in H_0^{\cdot} \quad \text{et} \quad \Psi(i) = \sigma(i)^{\boxminus} \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0^{\cdot}.$$

On a $\boxminus p.\Psi \in p(s').L(K).(p.g)$, de sorte qu'il existe un et un seul $k'' \in K$ tel que $k''.\phi(i) = p(\sigma(i))$. Etant donné que $\sigma(i) \in s'.H.s_i$, il existe un et un seul

$$h \in H \quad \text{vérifiant} \quad h.\bar{v}^i = \sigma(i) \quad \text{pour tout} \quad i \in I_0^{\cdot}.$$

On trouve, pour tout $i \in I_0^{\cdot}$:

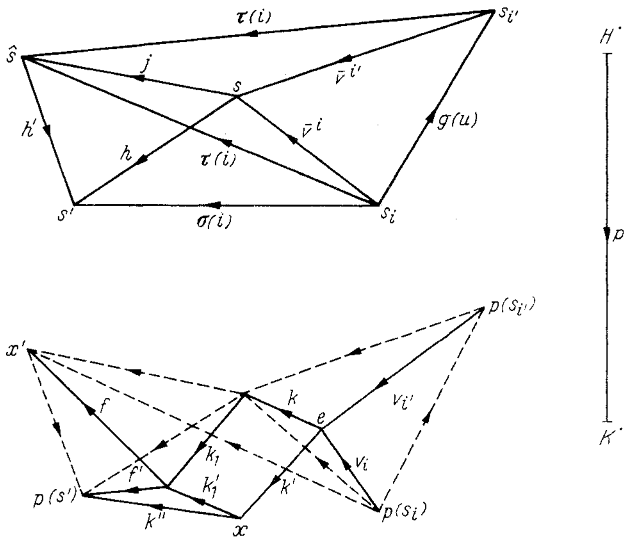
$$p(h).k.v_i = p(h).p(\bar{v}^i) = p(\sigma(i)) = k''.\phi(i) = k''.k'.v_i;$$

on en déduit $p(h).k = k''.k'$. Puisque V est une somme fibrée naturalisée dans $K^{\cdot}$, il existe un et un seul $f' \in K$ tel que

$$p(h) = f'.k_1 \quad \text{et} \quad k'' = f'.k'_1 ,$$

c'est-à-dire on a

$$m' = (f', x'', k_1, h) \in \square(R_d(K^{\cdot}), p), \quad \text{où} \quad x'' = p(s') \quad \text{et} \quad \alpha(m') = \alpha(m).$$



1

Fig. 13

Or, m étant un $(H, \boxminus(R_d(K^{\cdot}), p))$-projecteur, il en résulte qu'il existe $h' \in H$ tel que $h'.m = m'$, ce qui signifie

$$h'.j = h \quad \text{et} \quad p(h').f = f'.$$

Par suite h' est l'unique élément de H tel que

$$h'.\tau(i) = h'.j.\bar{v}^i = h.\bar{v}^i = \sigma(i) \quad \text{et} \quad h'.\Phi = \Psi .$$

Ceci montre que $\beta(j)$ est une limite inductive de g.

Corollaire 1. *Soit $p = (\mathscr{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ un foncteur fidèle, où $\mathscr{M}_0$ est un univers, et g un foncteur de $I^{\cdot} \in \mathscr{F}_0$ vers $H^{\cdot}$. Si $(g(i))_{i \in I_0^{\cdot}}$ admet une somme s dans $H^{\cdot}$ et si pour toute relation r sur $p(s)$ il existe une p-structure quasi-quotient de s par r, alors g admet une limite inductive $\hat{s}$, qui est une p-structure quasi-quotient de s.*

Démonstration. $\mathscr{M}_0$ étant un univers, $\mathscr{M}$ est une catégorie à $G^{\cdot}$-limites inductives, pour tout $G^{\cdot} \in \mathscr{F}_0$. Il s'ensuit que les conditions du théorème 3 sont vérifiées et, d'après ce théorème, g admet une limite inductive $\hat{s}$, qui est construite comme suit: Posons $s_i = g(i)$ pour tout $i \in I_0^{\cdot}$ et soit $(s, (\bar{v}^i)_{i \in I_0^{\cdot}})$ une somme naturalisée de $(s_i)_{i \in I_0^{\cdot}}$ dans $H^{\cdot}$. Soit $\hat{C}$ la classe somme des $(p(s_i))_{i \in I_0^{\cdot}}$. Il existe un et un seul $k \in p(s).\mathscr{M}.\hat{C}$ tel que

$$p(\bar{v}^i) = k.v_i, \quad \text{où} \quad v_i(y) = (y, i).$$

Le foncteur $p.g$ admet pour limite inductive la classe quotient de $\hat{C}$ par la relation d'équivalence r engendrée par la relation $(\hat{C}, U, \hat{C})$, où

$$((y, i), (y', i')) \in U \quad \text{si, et seulement si, il existe } u \in i'.I.i \text{ tel que } y' = g(u)(y).$$

Désignons par $\hat{r}$ la relation d'équivalence engendrée par $k(r)$. On a:

1 $\lim g = \hat{s}$, où $\hat{s}$ est une p-structure quasi-quotient de s par $\hat{r}$,

dès que s est défini, ainsi que $\lim g$ ou $\hat{s}$.

Corollaire 2. *Soit $P = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$ et $\bar{\pi}$-compatible. Soit $H = \bar{\underline{P}}^1(\mathscr{M}) \in \hat{\mathscr{M}}_0$ et $I^{\cdot} \in \mathscr{F}_0$. Si $H^{\cdot}$ est une catégorie à $\{I_0^{\cdot}\}$-sommes*[3],
2 *si $(\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}\iota, H^{\cdot}) = p$ est résolvant à droite et fidèle et si $p_n^{\ulcorner} \subset P_i^{\ulcorner}$, la catégorie $H^{\cdot}$ est à $I^{\cdot}$-limites inductives.*

En effet, les conditions du corollaire 1 sont vérifiées, en vertu du th. 2.

Corollaire 3. *Soit $P = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur $\ulcorner$-étalant, $\bar{\pi}$-compatible et fidèle. Si $H = \bar{\underline{P}}^1(\mathscr{M}) \in \hat{\mathscr{M}}_0$, si $I^{\cdot} \in \mathscr{F}_0$ et si $H^{\cdot}$ est une catégorie à $\{I_0^{\cdot}\}$ sommes*[3], *tout foncteur g de $I^{\cdot}$ vers $H^{\cdot}$ admet pour limite inductive une p-structure quotient d'une somme de $(g(i))_{i \in I_0^{\cdot}}$ si P est un foncteur d'homomorphismes saturé et $p = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}\iota, H^{\cdot})$.*

En effet, les conditions du corollaire 1 sont vérifiées et la limite inductive $\hat{s}$ de g est une p-structure quotient faible de s par $\hat{r}$ (not. cor. 1), d'après le corollaire
3 2 du théorème 2.

Théorème 4. *Soit $I^{\cdot} \in \mathscr{F}_0$. Les catégories $\mathscr{F}$ et $\mathscr{N}'$ sont à $I^{\cdot}$-limites inductives. Si $\hat{g}$ est un foncteur de $I^{\cdot}$ vers $\mathscr{F}$, on a $\lim \hat{g} = N(\lim \hat{g}')$, où $\hat{g}' = (\mathscr{N}', \underline{\hat{g}}, I^{\cdot})$. Si $I^{\cdot}$*
4 *est une catégorie filtrante (i.e. définissant un ordre filtrant sur $I_0^{\cdot}$), $P_{\mathscr{N}'}$ est compatible avec les $I^{\cdot}$-limites inductives.*

Démonstration. Etant donné que $\mathscr{N}_0 \subset \mathscr{M}_0 \times \mathscr{M}$, on a $\mathscr{N} \in \hat{\mathscr{M}}_0$, d'ou $\mathscr{N}' \in \hat{\mathscr{M}}_0$ et $\mathscr{F} \in \hat{\mathscr{M}}_0$. Comme $P_{\mathscr{F}}$ et $P_{\mathscr{N}'}$ sont $\ulcorner$-engendrants pour $\mathscr{M}$ (prop. 3) et $\bar{\pi}$-compatibles, et comme $p_{\mathscr{F}}$ et $p_{\mathscr{N}'}$ sont des foncteurs à $\mathscr{M}_0$-sommes, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{N}'$ sont des catégories à $I^{\cdot}$-limites inductives, d'après le corollaire 2 du théorème 3. — Soit $\hat{g}$ un foncteur de $I^{\cdot}$ vers $\mathscr{F}$ et $\hat{g}' = (\mathscr{N}', \underline{\hat{g}}, I^{\cdot})$. Soit $K^{\perp} = \lim \hat{g}'$. La catégorie $N(K^{\perp})$ est une $(\mathscr{F}, \mathscr{N}')$-projection de $K^{\perp}$, et par suite (th. 7, chap. III) une $(\mathscr{F}, \mathfrak{N}(\mathscr{N}', I^{\cdot})^{\square})$ projection de $\hat{g}'$. Il en résulte $N(K^{\perp}) = \lim \hat{g}$. — Soit g un foncteur de $I^{\cdot}$ vers $\mathscr{N}'$ et reprenons les notations de la fin de la démonstration du corollaire 1 du théorème 3, en supposant $p = p_{\mathscr{N}'}$ et $I^{\cdot}$ filtrante. Choisissons pour s le graphe multiplicatif $\hat{C}^{\perp}$ somme des $s_i = C_i^{\perp}$; on a $k = \hat{C}$. La relation

5 [3] Cette condition est inutile, car nous montrerons ailleurs, en utilisant la proposition 6 et la définition des sommes donnée dans le chapitre IV, que si P est un foncteur $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$ et $\bar{\pi}$-compatible tel que $p = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}\iota, H^{\cdot})$ soit résolvant à droite, alors $H^{\cdot}$ est une catégorie à $\mathscr{M}_0$-sommes.

d'équivalence r est simplement définie par:

$$(y, i) \sim (y', i') \quad \text{si, et seulement si, il existe } i'' \in I_0^{\cdot} \text{ tel que}$$
$$g(i'', i)(y) = g(i'', i')(y').$$

Il en résulte, $g(i'', i)$ étant un néofoncteur, que r est compatible avec α et β. Si les composés $z \perp (y, i)$ et $z' \perp (y', i')$ sont définis dans $\hat{C}^{\perp}$, on a

$$z = (y_1, i), \quad z' = (y'_1, i'), \quad (y_1, y) \in C_i^{\perp} * C_i^{\perp} \quad \text{et} \quad (y'_1, y') \in C_{i'}^{\perp} * C_{i'}^{\perp}.$$

Lorsque $(y, i) \sim (y', i')$ et $z \sim z'$, il existe $i''' \in I_0^{\cdot}$ tel que

$$g(i''', i)(y) = g(i''', i')(y') \quad \text{et} \quad g(i''', i)(y_1) = g(i''', i')(y'_1);$$

on en déduit

$$g(i''', i)(y_1 \perp y) = g(i''', i')(y'_1) \perp g(i''', i')(y') = g(i''', i')(y'_1 \perp y').$$

Ceci montre que r est bicompatible sur $\hat{C}^{\perp}$, de sorte que la p-structure quasi-quotient de $\hat{C}^{\perp}$ par r est le graphe multiplicatif $\hat{C}^{\perp}/r$ (th. 3–1), d'où

$$\lim g = \hat{C}^{\perp}/r \quad \text{et} \quad p_{\mathcal{N}'}(\lim g) = \hat{C}/r = \lim (p.g).$$

Remarques. 1. Une catégorie à $\mathcal{M}_0$-sommes est à $I^{\cdot}$-limites inductives si, et seulement si, elle est à conoyaux [6]. Par conséquent si les hypothèses du théorème 2 ou de son corollaire 1 sont vérifiées, $H^{\cdot}$ est à conoyaux (et à $\mathcal{M}_0$-sommes fibrées). Toutefois une p-quasi-surjection n'est pas nécessairement un conoyau et réciproquement un conoyau peut ne pas être une p-quasi-surjection. 1+

2. Le problème de l'existence de foncteurs adjoints d'un foncteur donné se ramène à celui de l'existence de certaines projections (app. I); par suite les résultats de ce n° 2 permettront d'étudier ce problème. Nos résultats sont de nature différente de [14] et [7] (qui généralisent ceux de [8]) car nous introduisons X et ne supposons pas que $H^{\cdot}$ soit une catégorie à limites projectives (condition non vérifiée dans certaines applications que nous avons en vue). Nous montrerons ailleurs que le théorème 2 de [7] peut se déduire de la 2
proposition 5, et par suite aussi le théorème 3 de [7] et les résultats de [8].

3. La construction d'une somme fibrée finie dans $\mathcal{F}$ donnée dans [9] revient à construire la catégorie $N(K^{\perp})$ associée au graphe multiplicatif somme fibrée $K^{\perp}$.

3+

3. Catégories structurées quasi-quotient et projections

Notations

Les notations suivantes seront utilisées dans toute la suite de cet article. Soit $\mathcal{M}$ une catégorie pleine d'applications telle que $\mathcal{M}_0$ soit un univers et π l'application $\mathcal{M}_0$-produit canonique dans $\mathcal{M}$. Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ un foncteur d'homomorphismes π-compatible et résolvant à droite[4]; soit a l'objet p-final de $H^{\cdot}$.

[4] Si p est résolvant à droite, $H^{\cdot}$ est une catégorie à noyaux. On sait qu'il en résulte, si p est de plus π-compatible, qu'il est compatible avec les $I^{\cdot}$-limites projectives, pour toute catégorie $I^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$. Inversement, si p est un foncteur d'homomorphismes saturé, alors il est compatible avec les $I^{\cdot}$-limites projectives, lorsque $I^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$, si, et seulement si, il est π-compatible et résolvant à droite.

$\mathscr{K}(p)$ est la catégorie produit fibré $p_{\mathscr{N}'} \vee p$, dont les unités sont donc les couples $(C^{\cdot}, s)$, où $C^{\cdot} \in \mathscr{N}_0'$, $s \in H_0^{\cdot}$ et $p(s) = C$; l'élément

$$((\hat{C}^{\cdot}, \underline{h}, C^{\cdot}), h) \in \mathscr{K}(p)$$

est identifié au triplet $(\hat{C}^{\cdot}, h, C^{\cdot})$.

$\mathscr{K}'(p)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{K}(p)$ ayant pour unités les couples $(C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}(p)_0$ tels que $([C^{\cdot}], s)$ soit un graphe p-structuré (déf. 3, [2]), c'est-à-dire tels qu'il existe $\bar{\alpha} \in s.H.s$ et $\bar{\beta} \in s.H.s$ vérifiant

$$p(\bar{\alpha}) = (C, \alpha, C) \quad \text{et} \quad p(\bar{\beta}) = (C, \beta, C).$$

Nous désignerons par s_0 le p-noyau de $(\bar{\alpha}, s)$; on a donc

$$s_0 \sqsubset_p s \quad \text{et} \quad p(s_0) = C_0^{\cdot}.$$

Si $\bar{h} = (\hat{C}^{\cdot}, h, C^{\cdot}) \in \mathscr{K}'(p)$, soit $\bar{h}_0$ le p-sous-morphisme de h tel que

$$\bar{h}_0 \in \beta(h)_0 . H . \alpha(h)_0 .$$

$\mathscr{G}'(p)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{K}'(p)$ ayant pour unités les $(C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$ tels que

$$(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot} \quad \text{entraîne} \quad g \in C_0^{\cdot} \quad \text{ou} \quad f \in C_0^{\cdot}.$$

$\mathscr{G}'(p)$ est isomorphe à la catégorie $\mathscr{G}(p)$ des morphismes entre graphes p-structurés (déf. 4 [2]).

$\mathscr{N}(p)$ (resp. $\bar{\mathscr{N}}(p)$) est la catégorie des morphismes entre classes multiplicatives p-structurées (resp. multiplicatives fortement p-structurées) (déf. 1 [2]). Un élément de $\mathscr{N}(p)_0$ est donc un triplet $(C^{\cdot}, s, s')$; si $(C^{\cdot}, s, s') \in \bar{\mathscr{N}}(p)_0$, on représentera $(C^{\cdot}, s, s')$ par le couple $(C^{\cdot}, s)$ qui le détermine.

$\mathscr{N}'(p)$ est la catégorie des néofoncteurs p-structurés (i. e. des morphismes entre graphes multiplicatifs p-structurés[5] dans la terminologie de [2]). C'est une sous-catégorie (non pleine) de $\mathscr{N}(p)$. On identifie $\bar{\mathscr{N}}'(p)$ à une sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}'(p)$.

$\bar{\mathscr{N}}'(p)$ est la catégorie des néofoncteurs entre graphes multiplicatifs fortement p-structurés (déf. 7, [2]). Elle est identifiée à une sous-catégorie pleine de $\mathscr{K}'(p)$ (th. 11, [2]). On a $(C^{\cdot}, s) \in \bar{\mathscr{N}}'(p)_0$ si, et seulement si, $(C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$ et s'il existe une p-sous-structure $s * s$ de $s \times s$ et un $\bar{\kappa} \in s.H.s * s$ tels que $p(\bar{\kappa}) = (C, \kappa, C^{\cdot} * C^{\cdot})$, où κ est la loi de composition de $C^{\cdot}$.

1 $\mathscr{F}(p)$ est la catégorie des foncteurs p-structurés; $\mathscr{F}(p)$ est donc la sous-catégorie pleine de $\bar{\mathscr{N}}'(p)$ ayant pour unités les catégories p-structurées dans la terminologie de [3], c'est-à-dire les $(C^{\cdot}, s) \in \bar{\mathscr{N}}'(p)_0$ tels que $C^{\cdot}$ soit une catégorie.

$\mathscr{F}_g(p)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}(p)$ ayant pour unités les groupoïdes p-structurés, c'est-à-dire les $(C^{\cdot}, s) \in \mathscr{F}(p)_0$ tels que $C^{\cdot}$ soit un groupoïde et qu'il existe $\bar{g} \in s.H.s$ pour lequel $\bar{g}(x) = x^{-1}$ pour tout $x \in C$.

$\mathfrak{S}'(p)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}(p)$ ayant pour unités les $(C^{\cdot}, s) \in \mathscr{F}(p)_0$

2 tels que $C_0^{\cdot} = \{x\}$ et que x soit le seul élément idempotent de $C^{\cdot}$. Alors $\mathfrak{S}'(p)$ est aussi une sous-catégorie pleine de $\bar{\mathscr{N}}(p)$.

[5] A la définition d'un graphe multiplicatif p-structuré $(C^{\cdot}, s, s')$ de [2], nous ajoutons l'axiome: Il existe $m \in s \times s.H.s'$ tel que $p(m) \in \mathscr{M}'$. Les résultats de [2] sont encore valables dans ce cas.

$\mathfrak{S}(p)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}_g(p)$ ayant pour unités les groupes p-structurés.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{F}_g(p) & & & \mathscr{K}'(p) \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathscr{K}(p) \\
\mathfrak{S}(p) \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & & \mathscr{F}(p) \arrow[ul, phantom, "\subset" sloped] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \bar{\mathscr{N}}'(p) \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset" sloped] & \mathscr{N}'(p) \arrow[u, phantom, "\subset" sloped] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathscr{N}(p) \\
 & \mathfrak{S}'(p) \arrow[ul, phantom, "\subset" sloped] \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] & & & \bar{\mathscr{N}}(p) \arrow[ur, phantom, "\subset" sloped] &
\end{tikzcd}$$

Le foncteur projection canonique de $\mathscr{K}(p)$ (resp. de $\mathscr{N}(p)$) vers $H^\cdot$ est noté $\hat{p}^H_{\mathscr{K}}$ (resp. noté $\hat{p}^H_{\mathscr{N}}$); posons

$$\hat{p}_{\mathscr{K}} = p.\hat{p}^H_{\mathscr{K}} \quad \text{et} \quad \hat{p}_{\mathscr{N}} = p.\hat{p}^H_{\mathscr{N}}.$$

Si $\mathscr{U}(p)$ est une des sous-catégories de $\mathscr{K}(p)$ (resp. de $\mathscr{N}(p)$) définies ci-dessus, on désigne par $\hat{p}_{\mathscr{U}}$ et $\hat{p}^H_{\mathscr{U}}$ les foncteurs restriction de $\hat{p}_{\mathscr{K}}$ et $\hat{p}^H_{\mathscr{K}}$ (resp. de $\hat{p}_{\mathscr{N}}$ et $\hat{p}^H{}_{\mathscr{N}}$) à $\mathscr{U}(p)$. Par exemple, $\hat{p}_{\mathscr{F}}$ est le foncteur restriction de $\hat{p}_{\mathscr{K}}$ (resp. de $\hat{p}_{\mathscr{N}}$) à $\mathscr{F}(p)$.

Convention. Les symboles $\mathscr{U}(p)$ et $\mathscr{V}(p)$ représentent l'une des catégories

$$\mathscr{K}(p), \quad \mathscr{K}'(p), \quad \mathscr{F}(p), \quad \mathscr{F}_g(p), \quad \mathfrak{S}'(p), \quad \mathfrak{S}(p)$$

ou aussi, si p est un foncteur d'homomorphismes saturé, l'une des catégories

$$\mathscr{N}(p), \quad \bar{\mathscr{N}}(p), \quad \mathscr{N}'(p) \quad \text{ou} \quad \bar{\mathscr{N}}'(p).$$

Soit $\hat{\mathscr{M}}$ une catégorie pleine d'applications telle que $\mathscr{M}_0 \subset \hat{\mathscr{M}}_0$. Nous supposons que $\hat{\mathscr{M}}_0$ est un univers. Soit $P = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}, \hat{H}^\cdot)$ un foncteur d'homomorphismes $\bar{\pi}$-compatible et résolvant à droite. Nous supposons que p est la restriction de P à la sous-catégorie pleine $H^\cdot$ de $\hat{H}^\cdot$ telle que $H = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathscr{M})$. La catégorie $\mathscr{U}(p)$ est alors une sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}(P)$. Soit $\bar{\mathscr{M}}$ la sous- 1¶
catégorie pleine et saturée de $\hat{\mathscr{M}}$ engendrée par $\mathscr{M}$. On suppose $H_0^\cdot \in \hat{\mathscr{M}}_0$ (et par suite $H \in \hat{\mathscr{M}}_0$).

$\hat{p}_{\mathscr{U}}$-structures quasi-quotient

Rappelons les résultats suivants:

1. Supposons $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{K}(p)$ ou $= \bar{\mathscr{N}}(p)$, $e = (C^\cdot, s) \in \mathscr{U}(p)_0$ et $\hat{s} \ulcorner_p s$. Soit

$$\hat{C} = p(\hat{s}) \quad \text{et} \quad \hat{e} = (\hat{C}^\cdot, \hat{s}).$$

Dans chacun des cas suivants, $\hat{e}$ est une $\hat{p}_{\mathscr{U}}$-sous-structure de e:

a) Si $\mathscr{U}(p) = \mathscr{K}(p)$ (resp. $= \mathscr{K}'(p)$ ou $= \bar{\mathscr{N}}'(p)$) et si $\hat{C}^\cdot$ est un sous-graphe multiplicatif de $C^\cdot$, d'après le théorème 9, chap. IV (resp. th. 8 ou th. 13 [2]).

b) Si $\mathscr{U}(p) = \mathscr{F}(p)$ ou $= \mathfrak{S}'(p)$ et si $\hat{C}^\cdot$ est une sous-catégorie de $C^\cdot$ (th. 14 [3]).

c) Si $\mathscr{U}(p) = \mathscr{F}_g(p)$ ou $= \mathfrak{S}(p)$ et si $\hat{C}^\cdot$ est un sous-groupoïde de $C^\cdot$ (th. 14 [3]).

d) Si $\mathscr{U}(p) = \bar{\mathscr{N}}(p)$. 2¶

2. Soit $\mathscr{U}(p) = \mathscr{N}(p)$ ou $\bar{\mathscr{N}}(p)$ (resp. $= \mathscr{N}'(p)$). Si $e' = (C^\cdot, s, s') \in \mathscr{U}(p)_0$, si

$$\hat{s} \ulcorner_p s, \quad \hat{s}' \ulcorner_p s', \quad p(\hat{s}) = \hat{C} \quad \text{et} \quad p(\hat{s}') = \hat{C}^\cdot * \hat{C}^\cdot,$$

alors $\hat{e}' = (\hat{C}^\cdot, \hat{s}, \hat{s}')$ est une $\hat{p}_{\mathscr{U}}$-sous-structure de e' (resp. e' si $\hat{C}^\cdot$ est un sous-graphe multiplicatif de $C^\cdot$) (th. 4, resp. 13 [2]).

Proposition 1. *$\hat{p}_{\mathscr{U}}$ est un foncteur d'homomorphismes à produits et résolvant à droite.*

Démonstration. D'après le théorème 12, chap. IV, $\hat{p}^H_{\mathscr{K}}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé, puisque $p_{\mathscr{N}'}$ est saturé; il en résulte (prop. 19, chap. II) que $\hat{p}_{\mathscr{K}} = p . \hat{p}^H_{\mathscr{K}}$ est un foncteur d'homomorphismes. $\hat{p}_{\mathscr{U}}$ est un sous-foncteur d'homomorphismes de $\hat{p}_{\mathscr{K}}$, si $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{K}(p)$, d'après le corollaire 1 de la proposition 10 [2] et le théorème 11 [3]. — Soient

$$F_i = (G^{\cdot}, h_i, C^{\cdot}) \in \mathscr{K}(p), \quad \text{où} \quad i = 1, 2.$$

Le couple (h_1, h_2) admet un p-noyau $\hat{s}$ et $p(\hat{s})$ définit un sous-graphe multiplicatif $\hat{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$, car $p_{\mathscr{N}'}$ est résolvant à droite; par suite $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ est un $\hat{p}_{\mathscr{K}}$-noyau S de (F_1, F_2), et $\hat{p}_{\mathscr{K}}$ est résolvant à droite. Si de plus

$$F_i \in \mathscr{K}'(p) \quad \text{ou} \quad \mathscr{G}'(p) \quad (\text{resp. } \in \mathscr{U}(p), \text{ où } \mathscr{U}(p) \subset \mathscr{F}(p)),$$

S est un $\hat{p}_{\mathscr{U}}$-noyau de (F_1, F_2), d'après le corollaire du théorème 8, [2] (resp. du
1 cor. 2 du th. 14 [13]). — Si $(C_i^{\cdot}, s_i) \in \mathscr{U}(p)_0$ pour tout $i \in I$ et s'il existe $C = \prod_{i \in I} C_i$ dans $\mathscr{M}$, il existe $s = \prod_{i \in I} s_i$ dans $H^{\cdot}$, car p est π-compatible, et $(C^{\cdot}, s)$ est un produit de $(C_i^{\cdot}, s_i)$ dans $\mathscr{U}(p)$, d'après le corollaire 3 du théorème 10, chap. IV si
2 $\mathscr{U}(p) = \mathscr{K}(p)$, d'après le corollaire 2 de la proposition 8 [2] si $\mathscr{U}(p) = \mathscr{K}'(p)$ ou $\mathscr{G}'(p)$, et d'après le théorème 13 [3] si $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{F}(p)$. — Si p est un foncteur d'homomorphismes saturé, $\hat{p}_{\mathscr{N}}$ et $\hat{p}_{\bar{\mathscr{F}}}$ (resp. $\hat{p}_{\mathscr{N}'}$ et $\hat{p}_{\bar{\mathscr{F}}'}$) sont des foncteurs d'homomorphismes à produits, en vertu du théorème 3 (resp. th. 12) [2]. Du théorème 4 (resp. du corollaire 1 du th. 17) [2], on déduit qu'ils sont résolvants à droite.

Proposition 2. *Soit P un foncteur d'homomorphismes saturé et $\ulcorner$-étalant; $\hat{P}_{\mathscr{U}}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$.*

Démonstration. Soit $C^{\cdot}$ une classe multiplicative telle que $C \in \bar{\mathscr{M}}$ et soit

$$M \in \mathscr{M}_0 \quad \text{tel que} \quad \emptyset \neq M \subset C.$$

D'après la proposition 3–2, la $(\mathscr{U}, P_{\mathscr{N}})$-sous-structure $\hat{C}^{\cdot}$ (resp. la sous-catégorie, resp. le sous-groupoïde $\tilde{C}^{\cdot}$) de $C^{\cdot}$ engendrée par M appartient à $\bar{\mathscr{M}}$.
— Supposons

$$e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{U}(P)_0 \subset \mathscr{K}(P).$$

Il existe

$$\hat{s} \ulcorner_{P} s \quad \text{tel que} \quad P(\hat{s}) = \hat{C} \quad (\text{resp. } = \tilde{C}).$$

D'après les résultats rappelés ci-dessus, $\hat{e} = (\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ (resp. $= (\tilde{C}^{\cdot}, \hat{s})$) est la $\hat{P}_{\mathscr{U}}$-sous-structure de e engendrée par M, si $\mathscr{U}(p) = \mathscr{K}(p)$, $\mathscr{K}'(p)$ ou $\bar{\mathscr{N}}'(p)$ (resp. $= \mathscr{F}(p)$ ou $\mathfrak{S}'(p)$, resp. $= \mathscr{F}_g(p)$ ou $\mathfrak{S}(p)$). Donc $\hat{P}_{\mathscr{U}}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$, d'après la démonstration de la proposition 2–2. — Soit

$$e' = (C^{\cdot}, s, s') \in \mathscr{U}(P)_0, \quad \text{où} \quad \mathscr{U}(P) = \mathscr{N}(P), \quad \bar{\mathscr{N}}(P) \quad \text{ou} \quad \mathscr{N}'(P).$$

Il existe

$$\hat{s} \ulcorner_{P} s \quad \text{et} \quad \hat{s}' \ulcorner_{P} s' \quad \text{tels que} \quad P(\hat{s}) = \hat{C} \quad \text{et} \quad P(\hat{s}') = \hat{C}^{\cdot} * \hat{C}^{\cdot}.$$

Comme $\hat{e}' = (\hat{C}^{\cdot}, \hat{s}, \hat{s}')$ est la $\hat{P}_{\mathscr{U}}$-sous-structure de e' engendrée par M, comme nous l'avons vu plus haut, le foncteur $\hat{P}_{\mathscr{U}}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$.

Proposition 3. *Soit $\mathscr{V}(p)$ une sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}(p)$ telle que $\mathscr{V}(p) \subset \mathscr{K}(p)$ ou $= \bar{\mathscr{N}}(p)$. Soit $\bar{j} = (C^{\cdot}, j, \hat{C}^{\cdot}) \in \mathscr{V}(P)$; si $(C^{\cdot}, \underline{j}, \hat{C}^{\cdot}) \in (P_{\mathscr{N}})_i^{\ulcorner}$ et $j \in P_i^{\ulcorner}$, on a $\bar{j} \in (\hat{P}_{\mathscr{U}})_i^{\ulcorner}$; si P est un foncteur d'homomorphismes saturé faiblement $\ulcorner$-étalant et si $\bar{j} \in (\hat{P}_{\mathscr{V}})_i^{\ulcorner}$, on a $j \in P_i^{\ulcorner}$.*

Démonstration. Soit $q = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{q}, \tilde{H}^{\cdot})$ l'élargissement maximal de P. Il existe 1
$f \in \tilde{H}^{\cdot}_{\gamma}.\alpha(j)$ tel que $\underline{f} = \underline{j}$; posons

$$s = \beta(j), \quad \tilde{s} = \beta(f) \quad \text{et} \quad \tilde{C} = p(\tilde{s}).$$

$\tilde{s}$ est une q-sous-structure de s. D'après les résultats rappelés plus haut, $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{s})$ 2¶
est une $\hat{q}_{\mathscr{U}}$-sous-structure de $(C^{\cdot}, s)$, c'est-à-dire

$$\bar{j}' = (C^{\cdot}, j', \tilde{C}^{\cdot}) \in (\hat{q}_{\mathscr{U}})_i^{\ulcorner}, \quad \text{où} \quad j' = s \leftarrow \tilde{s}.$$

Ceci entraîne

$$\bar{j} = \bar{j}'.(\tilde{C}^{\cdot}, f, \hat{C}^{\cdot}) \in (\hat{q}_{\mathscr{U}})_i^{\ulcorner}.$$

Puisque $\hat{H}^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $\tilde{H}^{\cdot}$, la sous-catégorie $\mathscr{V}(P)$ de $\mathscr{U}(q)$ est pleine; il s'ensuit $\bar{j} \in (\hat{P}_{\mathscr{V}})_i^{\ulcorner}$. — Supposons P faiblement $\ulcorner$-étalant et soit $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ une $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-sous-structure de $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{V}(P)_0$; il existe $\tilde{s} \ulcorner_P s$ tel que $P(\tilde{s}) = P(\hat{s})$; il en résulte que $(\hat{C}^{\cdot}, \tilde{s})$ est une $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-sous-structure de e, donc $\hat{s} = \tilde{s}$; ainsi $\bar{j} \in (\hat{P}_{\mathscr{V}})_i^{\ulcorner}$ a pour conséquence $j \in P_i^{\ulcorner}$. La proposition s'en déduit car $(\hat{P}_{\mathscr{V}})_i^{\ulcorner} = (\hat{P}_{\mathscr{V}})_i^{\ulcorner} \cdot \mathscr{V}(P)_{\gamma}$, si P est un foncteur d'homorphismes saturé.

Définition 1. *Soit $X_{\mathscr{U}}$ la classe des $\hat{P}_{\mathscr{U}}$-monomorphismes $\bar{j}$ tels que $\hat{P}^H_{\mathscr{U}}(\bar{j}) \in P_i^{\ulcorner}$. On dira que P est $(\mathscr{M}, \mathscr{U})$-*résolvant *si $\hat{P}_{\mathscr{U}}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $(\mathscr{M}, X_{\mathscr{U}}, \mathscr{U}(p))$.*

Si P est un foncteur d'homomorphismes saturé et si $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{K}(p)$ ou $= \bar{\mathscr{N}}(p)$, pour que P soit $(\mathscr{M}, \mathscr{U})$-résolvant il faut et il suffit[6], d'après la proposition 2-2, qu'il vérifie la condition suivante:

Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{U}(P)_0$ et soit $M \in \bar{\mathscr{M}}$ tel que $\emptyset \neq M \subset C$. Si e_M est la classe des

$$(C_1^{\cdot}, s_1) \in \mathscr{U}(P)_0 \quad \text{tels que} \quad M \subset C_1, \quad s_1 \ulcorner_P s \quad \text{et} \quad C_1^{\cdot} \ulcorner_{P_{\mathscr{U}}} C^{\cdot},$$

il existe $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s}) \in e_M$ tel que $\hat{C} = \cap \hat{P}_{\mathscr{U}}(e_M) \in \bar{\mathscr{M}}$.

En particulier, si P est faiblement $\ulcorner$-étalant, on a $X_{\mathscr{U}} = (\hat{P}_{\mathscr{U}})_i^{\ulcorner}$ (prop. 3-3), et P est $(\mathscr{M}, \mathscr{U})$-résolvant si, et seulement si, $\hat{P}_{\mathscr{U}}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$.

Proposition 4. *Soit P un foncteur d'homomorphismes saturé. Si P est $\ulcorner$-étalant, il est $(\mathscr{M}, \mathscr{U})$-résolvant. Si P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$, il est $(\mathscr{M}, \bar{\mathscr{N}})$-résolvant.*

Démonstration. Soit $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{K}(p)$ ou $= \bar{\mathscr{N}}(p)$. Soient

$$e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{U}(P)_0 \quad \text{et} \quad M \in \bar{\mathscr{M}}, \quad \emptyset \neq M \subset C.$$

Si P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$, M engendre une $(P_i^{\ulcorner}, H)$-sous-structure $\hat{s}$ de s; on a

$$\hat{s} \ulcorner_P s \quad \text{et} \quad M \subset P(\hat{s}) \in \bar{\mathscr{M}};$$

[6] En réalité, comme $X_{\mathscr{U}}$ est stable par produits fibrés dans $\mathscr{U}(P)$, il suffit que les conditions

$$e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{U}(P)_0 \quad \text{et} \quad \emptyset \neq M \subset C, \quad \text{où} \quad M \in \mathscr{M}_0,$$

entraînent l'existence d'un $(\hat{C}_1^{\cdot}, \hat{s}_1) \in \mathscr{U}(p)_0$ tel que

$$M \subset C_1, \quad \hat{s}_1 \ulcorner_P s \quad \text{et} \quad C_1^{\cdot} \ulcorner_{P_{\mathscr{N}}} C^{\cdot}.$$

si $\mathscr{U}(p) = \bar{\mathscr{N}}(p)$, le couple $(P(\hat{s})^{\cdot}, \hat{s})$ est la $\hat{P}_{\bar{\mathscr{N}}}$-sous-structure de e engendrée par M, de sorte que P est $(\mathscr{M}, \bar{\mathscr{N}})$-résolvant. — Supposons que P soit $\ulcorner$-étalant et que $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{K}(p)$. Désignons par $\hat{M}^{\cdot}$ le sous-graphe multiplicatif (resp. la sous-catégorie, resp. le sous-groupoïde) de $C^{\cdot}$ engendré par M si $\mathscr{U}(p) \supset \bar{\mathscr{N}}'(p)$ (resp. si $\mathscr{U}(p) = \mathscr{F}(p)$ ou $\mathfrak{S}'(p)$, resp. si $\mathscr{U}(p) = \mathscr{F}_g(p)$ ou $\mathfrak{S}(p)$). D'après la proposition 3-2, on a $\hat{M} \in \bar{\mathscr{M}}$. Il existe $\hat{s}$ tel que

$$\hat{s} \ulcorner_P s \quad \text{et} \quad P(\hat{s}) = \hat{M}\,.$$

Par suite $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{s})$ est la $\hat{P}_{\mathscr{U}}$-sous-structure de e engendrée par M; ainsi P est $(\mathscr{M}, \mathscr{U})$-résolvant. — Soit $\mathscr{U}(p) = \mathscr{N}(p)$ ou $\mathscr{N}'(p)$,

$$e = (C^{\cdot}, s, s') \in \mathscr{U}(P)_0 \quad \text{et} \quad M \in \bar{\mathscr{M}}, \quad \emptyset \neq M \subset C\,.$$

Si P est $\ulcorner$-étalant, il existe $\hat{s} \ulcorner_P s$ et $\hat{s}' \ulcorner_P s'$ tels que

$$P(\hat{s}) = \hat{M} \quad \text{et} \quad P(\hat{s}') = \hat{M}^{\cdot} * \hat{M}^{\cdot}\,,$$

où $\hat{M}^{\cdot}$ est la $P_{\mathscr{U}}$-sous-structure de $C^{\cdot}$ engendrée par M. Il s'ensuit que $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{s}, \hat{s}')$ est la $\hat{P}_{\mathscr{U}}$-sous-structure de e engendrée par M, et que P est $(\mathscr{M}, \mathscr{U})$-résolvant.

Théorèmes d'existence

Nous supposons dans la fin de ce numéro que $\mathscr{M}_0 \in \hat{\mathscr{M}}$ et que $\mathscr{V}(p)$ est une
1 *sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}(p)$ telle que $\mathscr{V}(p) \subset \mathscr{K}(p)$ ou $= \bar{\mathscr{N}}(p)$.* Alors $\mathscr{U}(p) \in \hat{\mathscr{M}}_0$.

Théorème 1. *Supposons que P soit $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-résolvant (resp. que $\hat{P}_{\mathscr{V}}$ soit $\ulcorner$-engendrant et que $(\hat{p}_{\mathscr{V}})_n^{\ulcorner} \subset (\hat{P}_{\mathscr{V}})_i^{\ulcorner} \subset (\hat{P}_{\mathscr{U}})_i^{\ulcorner}$). Si $e \in \mathscr{U}(p)_0$ et si r est une relation sur $\hat{p}_{\mathscr{U}}(e)$, il existe une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quasi-quotient de e par r. En particulier*
2 *$\mathscr{U}(p)$ est une catégorie à $\mathscr{V}(p)$-projections.*

Démonstration. Le foncteur $\hat{P}_{\mathscr{U}}$ est $\hat{\pi}$-compatible et $\mathscr{V}(p)$ est une sous-catégorie stable par produits de $\mathscr{U}(p)$ d'après la proposition 1. Le couple $(\{\theta\}^{\cdot}, a) \in \mathfrak{S}(p)$, où $\{\theta\}^{\cdot}$ est le groupe ayant pour seul élément l'unité θ, est le $\hat{P}_{\mathscr{K}}$-objet final de $\mathscr{K}(P)$, et par suite le $\hat{P}_{\mathscr{U}}$-objet final de $\mathscr{U}(P)$. Le foncteur $\hat{p}_{\mathscr{V}}$ est résolvant à droite (proposition 1). Soit $X_{\mathscr{V}}$ la classe des $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-monomorphismes $\bar{j}$ tels que $\hat{P}^{II}_{\mathscr{V}}(\bar{j}) \in P_i^{\ulcorner}$; la proposition 3 affirme que l'on a $X_{\mathscr{V}} \subset (\hat{P}_{\mathscr{U}})_i^{\ulcorner}$. Montrons que $(\hat{p}_{\mathscr{V}})_n^{\ulcorner} \subset X_{\mathscr{V}}$. En effet, soient

$$\bar{h}_i = (G^{\cdot}, h_i, C^{\cdot}) \in \mathscr{V}(p),\ i = 1, 2, \quad s = \alpha(h_i) \quad \text{et} \quad s' = \beta(h_i)\,.$$

p et P étant résolvants à droite, (h_1, h_2) admet un p-noyau $\hat{s}$ et un P-noyau $\tilde{s}$ et on a $P(\hat{s}) = P(\tilde{s})$. Comme $H^{\cdot}$ est une sous-catégorie pleine de $\hat{H}^{\cdot}$ et que $\tilde{s} \in \overset{-1}{\underline{P}}(\mathscr{M}) = H$, on trouve $\tilde{s} \ulcorner_p s$, d'où (cor. th. 1, chap. III) $\tilde{s} = \hat{s}$. Il s'ensuit que $(p(\hat{s})^{\cdot}, \hat{s})$ est une $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-sous-structure de $(C^{\cdot}, s)$ et que $(\hat{p}_{\mathscr{V}})_n^{\ulcorner} \subset X_{\mathscr{V}}$. La sous-catégorie $X_{\mathscr{V}}$ est stable par produits dans $\mathscr{U}(P)$, puisque tout produit de P-monomorphismes est un P-monomorphisme (thé. 12, chap IV). Ainsi les conditions du théorème 2-2 sont vérifiées relativement au foncteur $\hat{P}_{\mathscr{U}}$, à la sous-catégorie $\mathscr{V}(p)$ et à la classe $X_{\mathscr{V}}$ (resp. classe $(\hat{P}_{\mathscr{V}})_i^{\ulcorner}$).D'après ce théorème, il existe une $(\mathscr{V}(p), \hat{P}_{\mathscr{U}})$ structure quasi-quotient $\hat{e}$ de e par r. Etant donné que $\mathscr{U}(p)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}(P)$, $\hat{e}$ est aussi une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quasi-quotient de e par r. — En particulier, si r est la relation identique sur $\hat{p}_{\mathscr{U}}(e)$, la $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quotient de e par r est une $(\mathscr{V}(p), \mathscr{U}(p))$-projection de e. Donc $\mathscr{U}(p)$ est une catégorie à $\mathscr{V}(p)$-projections.

— On peut construire (prop. 6-2) une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quasi-quotient de $e \in \mathscr{U}(p)_0$ par r comme suit : Soit $C = \hat{p}_{\mathscr{U}}(e)$ et soit I la classe des $h \in \mathscr{V}(p)_0 . \mathscr{U}(p) . e$ tels que $\hat{p}_{\mathscr{U}}(h)$ soit compatible avec r. Posons $\overline{S} = (S^{\cdot}, \sigma) = \prod_{h \in I} \beta(h)$. La sous-classe M de S formée des familles $(h(x))_{h \in I}$, où $x \in C$, engendre une $(X_{\mathscr{V}}, \mathscr{V}(p))$- (resp. une $((\hat{P}_{\mathscr{V}})_i^{\ulcorner}, \mathscr{V}(p))$-)sous-structure de $\overline{S}$ qui est une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quasi-quotient de e par r. — Supposons de plus que P soit un foncteur d'homomorphismes saturé et soit $X'_{\mathscr{V}} = X_{\mathscr{V}} \cap (\hat{P}_{\mathscr{V}})_i^{\ulcorner}$. La classe M engendre une $(X'_{\mathscr{V}}, \mathscr{V}(p))$- (resp. une $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-)sous-structure $\hat{e} = (\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ de $\overline{S}$ telle que $\hat{C} \in \overline{\mathscr{M}}$. Le $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-sous-morphisme $\overline{j}$ de $[h]_{h \in I}$, de source e, de but $\hat{e}$, est

$$\overline{j} = (\hat{C}^{\cdot}, j, C^{\cdot}), \quad \text{où} \quad j(x) = (h(x))_{h \in I} \quad \text{pour tout} \quad x \in C,$$

et on a $M = j(C)$. Il existe $\overline{g} \in \mathscr{V}(p)_0 . \mathscr{V}(P)_{\gamma}^{\cdot} . \hat{e}$. D'après la proposition 2-2, $\beta(\overline{g})$ est la $(X_{\mathscr{V}}, \mathscr{V}(p))$-sous-structure de $\overline{S}$ engendrée par M, donc $\beta(\overline{g})$ est une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quasi-quotient de e par r.

Corollaire 1. *Avec les hypothèses du théorème* 1, *supposons que P soit un foncteur d'homomorphismes saturé et que $\mathscr{U}(p) = \mathscr{V}(p)$. Soit $e = (C^{\cdot}, s)$ et soit $\hat{r}$ la relation d'équivalence $\hat{p}_{\mathscr{U}}$-compatible engendrée par r sur e. Pour qu'il existe une $\hat{p}_{\mathscr{U}}$-structure quotient faible (resp. quotient) $\hat{e}$ de e par r, il faut et il suffit qu'il existe une bijection de $C/\hat{r}$ (resp. de C/r) sur $\hat{p}_{\mathscr{U}}(\hat{e})$.*

En effet, ceci résulte du théorème 1 et la proposition 6-1.

Corollaire 2. *Soit P un foncteur d'homomorphismes saturé. Supposons que P soit $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$. Si $e \in \mathscr{N}(p)_0$ et si r est une relation sur $\hat{p}_{\mathscr{N}}(e)$, il existe une $(\overline{\mathscr{N}}(p), \hat{p}_{\mathscr{N}})$-structure quasi-quotient de e par r.*

En effet, P est $(\mathscr{M}, \overline{\mathscr{N}})$-résolvant d'après la proposition 4, et le corollaire résulte du théorème 1.

Corollaire 3. *Si P est un foncteur d'homomorphismes saturé et $\ulcorner$-étalant, si $e \in \mathscr{V}(p)_0$ et si r est une relation sur $\hat{p}_{\mathscr{V}}(e)$, il existe une $\hat{p}_{\mathscr{V}}$-structure quasi-quotient de e par r.*

En effet, P est $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-résolvant (prop. 4). Le corollaire 3 se déduit donc du théorème 1.

Corollaire 4. *Soit P un foncteur d'homomorphismes saturé. Si P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$, la catégorie $\mathscr{N}(p)$ est à $\overline{\mathscr{N}}(p)$-projections ; si P est $\ulcorner$-étalant, $\mathscr{U}(p)$ est une catégorie à $\mathscr{V}(p)$-projections.*

En effet, ce corollaire résulte des corollaires 2 et 3.

Le théorème 1 montre en particulier que, si P est $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-résolvant, si $e \in \mathscr{K}'(p)_0$, alors e admet pour projection une catégorie p-structurée, un groupoïde, un demi-groupe et un groupe p-structurés ; si $e \in \mathscr{N}'(p)_0$, il admet pour projection un graphe multiplicatif fortement p-structuré ; si $e \in \mathscr{N}(p)_0$, il admet pour projection une classe multiplicative fortement p-structurée.

Définition 2. *Soit $C^{\cdot}$ un graphe multiplicatif et r une relation sur C. Soit r_0 la relation induite par r sur $C_0^{\cdot}$. On dit que r est* élémentaire *sur $C^{\cdot}$ si r_0 est la relation identique et si r est compatible avec α et β.*

Si r est élémentaire sur le graphe multiplicatif $C^{\cdot}$, la relation d'équivalence engendrée par r est aussi élémentaire sur $C^{\cdot}$.

Proposition 5. *Supposons $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{K}'(p)$ (resp. $\subset \mathscr{N}'(p)$) et $\mathscr{F}_g(p) \subset \mathscr{V}(p)$. Soit $(\bar{j}, r)$ un $(\mathscr{V}(p), (\hat{p}_{\mathscr{U}})^r)$-projecteur, où $\alpha(\bar{j}) = (C^{\cdot}, s)$ (resp. $= (C^{\cdot}, s, s')$); supposons que r soit élémentaire sur $C^{\cdot}$; alors $p(\bar{j}_0)$ est une injection. Si $p(\bar{j}_0)$ est une surjection, on a $\bar{j}_0 \in H^{\cdot}_{\gamma}$.*

Démonstration. Soient

$$e = \alpha(\bar{j}) \quad \text{et} \quad \beta(\bar{j}) = (\hat{C}^{\cdot}, \hat{s}).$$

Puisque $(C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$, il existe

$$h \in (s_0 \times s_0).H.s \quad \text{tel que} \quad p(h) = [\beta, \alpha].$$

D'après la proposition 30 [3], $((C^{\cdot}_0 \times C^{\cdot}_0)^{\perp}, s_0 \times s_0)$, où $(C^{\cdot}_0 \times C^{\cdot}_0)^{\perp}$ est le groupoïde des couples associé à $C^{\cdot}_0$, est un groupoïde p-structuré. r étant compatible avec α et β et la restriction de r à $C^{\cdot}_0$ étant la relation identique, on a

$$\alpha(x) = \alpha(x') \quad \text{et} \quad \beta(x) = \beta(x'), \quad \text{si} \quad x \sim x' \bmod r,$$

d'où

$$(\bar{h}, r) = (((C^{\cdot}_0 \times C^{\cdot}_0)^{\perp}, h, C^{\cdot}), r) \in \mathscr{V}(p)_0 . (\hat{p}_{\mathscr{U}})^r . (e, r).$$

La p-sous-structure $(s_0 \times s_0)_0$ de $s_0 \times s_0$ est la structure diagonale s_δ de $s_0 \times s_0$, et l'isomorphisme diagonal $d \in s_\delta . H^{\cdot}_{\gamma} . s_0$ est un p-sous-morphisme de h. Comme $(\bar{j}, r)$ est un $(\mathscr{V}(p), (\hat{p}_{\mathscr{U}})^r)$-projecteur, il existe un et un seul $\bar{h}'$ tel que

$$\bar{h}' \in \mathscr{V}(p) \quad \text{et} \quad \bar{h} = \bar{h}' . \bar{j}.$$

Il s'ensuit $\bar{h}_0 = \bar{h}'_0 . \bar{j}_0$, c'est-à-dire

$$(d^{-1} . \bar{h}'_0) . \bar{j}_0 = s_0 .$$

Comme $p(d)$ est une bijection, $p(\bar{j}_0)$ est une injection. — Si de plus $p(\bar{j}_0)$ est une surjection, c'est une bijection admettant $p(d)^{-1} . p(\bar{h}'_0)$ pour inverse. L'élément $k = \bar{j}_0 . d^{-1} . \bar{h}'_0$ admet $\hat{s}_0$ pour unités à droite et à gauche et $p(\hat{s}_0)$ pour image par p, de sorte que l'on a $k = \hat{s}_0$ (car p est fidèle); par suite $\bar{j}_0$ admet $d^{-1} . \bar{h}'_0$ pour inverse dans $H^{\cdot}$. Ainsi $\hat{s}_0$ est isomorphe à s_0 dans $H^{\cdot}$.

4. Cas des foncteurs $\ulcorner$-étalants

Les notations sont les mêmes qu'à la fin du n° 3

Si $[C] = (C, \beta, \alpha)$ est un graphe orienté, nous désignons par $[C]^*$ le graphe dual (C, α, β) de $[C]$; le sous-graphe de $[C]$ dont les éléments sont les sommets de $[C]$ est noté $[C]_0$.

Définition 1. *Soit $[C]$ un graphe et soit $[C']$ un graphe tel que $C \cap C' = [C]_0$. S'il existe un isomorphisme g de $[C]$ sur $[C']^*$ dont la restriction à $[C]_0$ soit l'identité et si $[G]$ est le graphe somme fibrée de $(([C], \iota, [C]_0), ([C'], \iota, [C]_0))$, on appelle $[G]$ un symétrisé de $[C]$ et on pose $g(f) = f^{-1}$ pour tout $f \in C$.*

Cette définition signifie que, si $[C]=(C, \beta, \alpha)$, le graphe symétrisé $[G]=(G, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ est tel que:

$$G = C \cup g(C), \quad [G]_0 = [C]_0,$$
$$\hat{\alpha}(f) = \alpha(f), \quad \hat{\alpha}(f^{-1}) = \beta(f),$$
$$\hat{\beta}(f) = \beta(f), \quad \hat{\beta}(f^{-1}) = \alpha(f),$$

pour tout $f \in C$. Si $e \in [C]_0$, on a $e = e^{-1}$.

Soit $[C]$ un graphe orienté. Nous désignons par $L[C]^{\cdot}$ la catégorie libre des chemins de $[C]$ (on identifie C à une sous-classe de $L[C]$); si $C \in \mathscr{M}_0$, on a $L[C] \in \mathscr{M}_0$, puisque $\mathscr{M}_0$ est un univers par hypothèse et que $L[C]$ est une sous-classe de la classe somme $\sum_{n \in N} C^n$. Soit $S^{\cdot}$ une catégorie et soit h un morphisme de $[C]$ vers $S^{\cdot}$; alors h détermine le foncteur

$$L(h) = (S^{\cdot}, L(\underline{h}), L[C]^{\cdot})$$

tel que

$$L(h)(f_n, \ldots, f_1) = h(f_n). \ldots . h(f_1),$$

si $(f_n, \ldots, f_1) \in L[C]$. Si $S^{\cdot}$ est un groupoïde et si $[G]$ est un symétrisé de $[C]$, on définit un morphisme h^σ de $[G]$ vers $S^{\cdot}$, appelé *symétrisé* de h, en posant:

$$h^\sigma(f) = h(f) \quad \text{et} \quad h^\sigma(f^{-1}) = (h(f))^{-1},$$

si $f \in C$. Le foncteur $L(h^\sigma)$ sera noté $\Gamma(h)$ et on pose $\Gamma(\underline{h}) = L(\underline{h}^\sigma)$.

Si C est une classe, $M(C)$ désigne le monoïde libre engendré par C; on 1
a $M(C) \in \mathscr{M}_0$ si $C \in \mathscr{M}_0$.

Construction de structures quasi-quotient

Soit $P = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ un foncteur d'homomorphismes saturé, $\hat{\pi}$-compatible et $\ulcorner$-étalant. Nous reprenons les notations du n° 3. Soit $\mathscr{V}(p)$ une sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}(p)$ telle que $\mathscr{V}(p) \subset \mathscr{K}(p)$ ou $\mathscr{V}(p) = \overline{\mathscr{N}}(p)$.

Si $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{V}(P)_0$ et si $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ est une $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-sous-structure de e, il existe $\tilde{s} \ulcorner_{P} s$ tel que $P(\tilde{s}) = \hat{C}$. Comme $(\hat{C}^{\cdot}, \tilde{s})$ est une $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-sous-structure de e, on trouve $\hat{s} = \tilde{s} \ulcorner_{P} s$, et par suite $X_{\mathscr{V}} = (\hat{P}_{\mathscr{V}})_i^{\ulcorner}$.

Théorème 1. *Soit $\mathscr{V}(p) = \mathscr{F}(p)$ (resp. $= \mathscr{F}_g(p)$). Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$ et soit r une relation élémentaire sur $C^{\cdot}$. Posons $\hat{I} = \mathscr{V}(p)_0 . (\hat{p}_{\mathscr{K}})^{\mathrm{r}} . (e, r)$. Alors e admet une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}})$-structure quasi-quotient $(L[C^{\cdot}]^{\cdot}/\hat{r}, \tilde{s})$ (resp. $(L[G^{\cdot}]^{\cdot}/\hat{r}, \tilde{s})$, où $[G]$ est un symétrisé de $[C^{\cdot}]$) par r, et $\hat{r}$ est la relation définie par:*

$$x \sim x' \quad \textit{si, et seulement si,} \quad L(\underline{h})(x) = L(\underline{h})(x') \quad (\textit{resp. si, } \Gamma(\underline{h})(x) = \Gamma(\underline{h})(x'))$$
$$\textit{pour tout } (h, r) \in \hat{I}.$$

Démonstration. Nous reprenons les notations de la fin de la démonstration du théorème 1–3 avec $\mathscr{U}(p) = \mathscr{K}'(p)$ et $\mathscr{V}(p) = \mathscr{F}(p)$ (resp. $= \mathscr{F}_g(p)$). La catégorie $\hat{C}^{\cdot}$ est la catégorie (resp. le sous-groupoïde) de $S^{\cdot}$ engendrée par M et $\hat{s}$ est la P-sous-structure de σ telle que $P(\hat{s}) = \hat{C}$. Posons

$$\hat{j} = \overline{g} . \overline{j} \quad \text{et} \quad j' = (\hat{C}^{\cdot}, \underline{j}, [C^{\cdot}]).$$

On a $\bar{g}_0 \in \hat{H}_\gamma^{\cdot}$ et, $p(\hat{j}_0)$ étant une surjection par construction, $\hat{j}_0 \in H_\gamma^{\cdot}$ en vertu de la proposition 5–3; par suite $\bar{j}_0 = \bar{g}_0^{-1} . \hat{j}_0 \in \hat{H}_\gamma^{\cdot}$.

— Supposons $\mathscr{V}(p) = \mathscr{F}(p)$. On a $\hat{C}_0^{\cdot} = \underline{j}(C_0)$, car $\underline{j}$ définit un néofoncteur. Si $\hat{f} \in \hat{C} - \hat{C}_0^{\cdot}$, il existe

$$f_i \in C - C_0^{\cdot}, \quad \text{où} \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{tels que} \quad \hat{f} = j(f_n) . \ldots . j(f_1).$$

$\underline{j}_0$ étant une bijection, on a

$$\alpha(f_{i+1}) = \beta(f_i) \quad \text{si} \quad 1 \leqq i < n,$$

c'est-à-dire

$$(f_n, \ldots, f_1) \in L[C^{\cdot}].$$

Il en résulte que $L(j')$ est un foncteur de $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$ sur $\hat{C}^{\cdot}$, dont la restriction à $L[C^{\cdot}]_0^{\cdot} = C_0^{\cdot}$ est bijective. Si $\hat{r}$ est la relation d'équivalence associée à $L(\underline{j})$, l'application $\underline{u} = \lambda(L(\underline{j}))^{-1}$ (not. n° 1) définit un isomorphisme de $\hat{C}^{\cdot}$ sur la catégorie $L[C^{\cdot}]^{\cdot}/\hat{r}$ quotient strict de $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$ par $\hat{r}$. La relation $\hat{r}$ s'écrit:

$$x \sim y \quad \text{si, et seulement si,} \quad L(\underline{h})(x) = L(\underline{h})(y) \text{ pour tout } (h, r) \in \hat{I},$$

car on a:

$$L(\underline{j})(x) = (h(f_n))_{h \in I} . \ldots . (h(f_1))_{h \in I} = (h(f_n) . \ldots . h(f_1))_{h \in I} = (L(\underline{h})(x))_{h \in I},$$

si $x = (f_n, \ldots, f_1) \in L[C^{\cdot}]^{\cdot}$. Puisque P est un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe $u \in \hat{H}_\gamma^{\cdot} . \hat{s}$ tel que $P(u) = \underline{u}$; on a $\beta(u) = \bar{s} \in H$, car $L[C^{\cdot}] \in \mathscr{M}_0$; par conséquent $(L[C^{\cdot}]^{\cdot}/\hat{r}, \bar{s})$ est une $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{X}'})$-structure quasi-quotient de e par r.

— Supposons $\mathscr{V}(p) = \mathscr{F}_g(p)$. Soient $[G]$ un symétrisé de $[C^{\cdot}]$ et j'^{σ} le morphisme symétrisé de j'. On a $\hat{C}_0^{\cdot} = j'^{\sigma}([G]_0)$. Soit $\hat{f} \in \hat{C} - \hat{C}_0^{\cdot}$; comme $\hat{C}^{\cdot}$ est le sous-groupoïde de $S^{\cdot}$ engendré par $M = \underline{j}(C)$, il existe

$$f_i' \in G - [G]_0, \quad \text{où} \quad i = 1, \ldots, n, \quad \text{tels que} \quad \hat{f} = j'^{\sigma}(f_n') . \ldots . j'^{\sigma}(f_1').$$

$p(\bar{j}_0)$ étant une bijection, on a $(f_n', \ldots, f_1') \in L[G]$. Ainsi $\Gamma(j')$ est un foncteur de $L[G]^{\cdot}$ sur $\hat{C}^{\cdot}$, dont la restriction à $C_0^{\cdot}$ est bijective. En désignant par $\hat{r}$ la relation d'équivalence associée à $\Gamma(\underline{j})$, l'application $\underline{u}' = \lambda(\Gamma(\underline{j}))^{-1}$ définit un isomorphisme de $\hat{C}^{\cdot}$ sur la catégorie $L[G]^{\cdot}/\hat{r}$ quotient strict de $L[G]^{\cdot}$ par $\hat{r}$; la relation $\hat{r}$ est définie par

$$y \sim y' \quad \text{si, et seulement si,} \quad \Gamma(\underline{h})(y) = \Gamma(\underline{h})(y') \quad \text{pour tout} \quad (h, r) \in \hat{I}.$$

Si $u' \in \hat{H}_\gamma^{\cdot} . \hat{s}$ et $P(u') = \underline{u}'$, on a $(L[G]^{\cdot}/\hat{r}, u', \hat{C}^{\cdot}) \in \mathscr{V}(p)_0 . \mathscr{V}(P)_\gamma . \hat{e}$.

Corollaire 1. *Supposons vérifiées les conditions du théorème 1. Si pour* $x \in L[C^{\cdot}]$ *il existe* $f \in C$ *tel que* $h(f) = L(\underline{h})(x)$ *pour tout* $(h, r) \in \hat{I}$, *alors e admet une* $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{X}'})$*-structure quotient faible par r.*

En effet, reprenons les notations de la lère partie de la démonstration du théorème 1. Si $\hat{f} \in \hat{C}$, il existe $x \in L[C]$ tel que $L(\underline{j})(x) = \hat{f}$ et il existe $f \in C$ tel que, pour tout $h \in I$, on ait $h(f) = L(\underline{h})(x)$, c'est-à-dire $f \sim x \bmod \hat{r}$. Il s'ensuit $L(j')(x) = j(f) \in \underline{j}(C)$. Donc $P(\hat{j})$, et par suite $\hat{p}_{\mathscr{X}'}(\hat{j})$, est une surjection, de sorte que $(L[C^{\cdot}]/\hat{r}, \bar{s})$ est une $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{X}'})$-structure quotient faible de e par r.

Corollaire 2. *Soit $e=(C^{\cdot}, s)\in \mathscr{F}(p)_0$ et soit r une relation élémentaire sur $C^{\cdot}$. Alors il existe un $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-structure quotient faible de e par r.*

En effet, si $x=(f_n, \ldots, f_1)\in L[C^{\cdot}]$, le composé $f=f_n.\ldots.f_1$ est défini dans $C^{\cdot}$ et on a $h(f)=L(\underline{h})(x)$ pour tout $h\in I$, de sorte que le corollaire 2 se déduit du corollaire 1.

Corollaire 3. *Soit $e=(C^{\cdot}, s)\in \mathscr{K}'(p)_0$ et soit $[G]$ un symétrisé de $[C^{\cdot}]$. Si r est une relation élémentaire sur $C^{\cdot}$, il existe une $(\mathfrak{S}'(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$- (resp. une $(\mathfrak{S}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-) structure quasi-quotient de e par r de la forme $(M(L[C^{\cdot}]/\hat{r})^{\cdot}/\hat{r}', \hat{s}')$ (resp. de la forme $(M(L[G]/\hat{r})^{\cdot}/\hat{r}', \bar{s}')$).*

Démonstration. Soit $\mathscr{V}(p)=\mathscr{F}(p)$ (resp. $=\mathscr{F}_g(p)$). D'après le théorème 1, e admet une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient par r de la forme $(L[C^{\cdot}]^{\cdot}/\hat{r}, \bar{s})$ (resp. $(L[G]^{\cdot}/\hat{r}, \bar{s})$). D'après le théorème 7, chap. III, il suffit de prouver que, si $e\in \mathscr{V}(p)_0$, il existe une $(\mathfrak{S}'(p), \mathscr{V}(p))$-projection de e de la forme $(M(C^{\cdot})/\hat{r}', \bar{s}')$ 1
(resp. forme $(M(C)^{\cdot}/\hat{r}', \bar{s}')$), c'est-à-dire, puisque P est un foncteur d'homomorphismes saturé, que, avec les notations de la fin de la démonstration du théorème 1–3, $\hat{C}^{\cdot}$ est isomorphe à un demi-groupe (resp. à un groupe) quotient de $M(C)^{\cdot}$ (resp. de $M(C)^{\cdot}$).

— Soit $e\in \mathscr{F}(p)_0$. Comme $\hat{C}^{\cdot}$ est la sous-catégorie de $S^{\cdot}$ engendrée par $\underline{j}(C)$, pour tout $\hat{f}\in \hat{C}$, il existe

$$f_i\in C \quad \text{tels que} \quad \hat{f}=j(f_n).\ldots.j(f_1).$$

L'application d:

$$(f_n, \ldots, f_1)\to j(f_n).\ldots.j(f_1)$$

de $M(C)$ dans $\hat{C}$ définit un homomorphisme de $M(C)^{\cdot}$ sur $\hat{C}^{\cdot}$. Par suite $\hat{C}^{\cdot}$ est isomorphe au demi-groupe quotient de $M(C)^{\cdot}$ par la relation d'équivalence $\hat{r}'$:

$(f_n, \ldots, f_1)\sim (f'_m, \ldots, f'_1)$ si, et seulement si, pour tout $(\bar{C}^{\cdot}, h, C^{\cdot})\in I$,

on a

$$h(f_n).\ldots.h(f_1)=h(f'_m).\ldots.h(f'_1).$$

— Si de plus $e\in \mathscr{F}_g(p)_0$, on a $\underline{j}(C)=\underline{j}(C)^{-1}$, de sorte que $\hat{C}^{\cdot}$ est un groupe. Comme $\mathscr{F}_g(p)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}(p)$, on en déduit que $\hat{e}$ est isomorphe dans $\mathfrak{S}'(P)$ à une $(\mathfrak{S}(p), \mathscr{F}_g(p))$-projection de e. 2

Remarque. Supposons que q soit un foncteur d'homomorphismes au-dessus de P tel que $P'=P.q$ soit un foncteur d'homomorphismes saturé et $\sqcap$-étalant. Soit p' la restriction de P' à $\underline{P}'(\mathscr{M})$. Soit $e\in \mathscr{K}'(p')_0$ et soit $(\tilde{C}'^{\cdot}, \bar{s}')$ une $(\mathscr{V}(p'), \hat{p}'_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient de e par une relation élémentaire r. Si $(\tilde{C}^{\cdot}, \bar{s})$ est une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient de $\mathscr{N}'\times q(e)$ par r et si $\mathscr{V}(p)\subset \mathscr{F}(p)$, alors $\tilde{C}'^{\cdot}$ est une catégorie quotient strict de $\tilde{C}^{\cdot}$, d'après le théorème 1.

Théorème 2. *Soit $\mathscr{U}(p)=\mathscr{N}(p)$ (resp. $=\mathscr{N}'(p)$ ou $\mathscr{K}'(p)$) et soit $\mathscr{V}(p)=\bar{\mathscr{N}}(p)$ (resp. $=\bar{\mathscr{N}}'(p)$). Si $e=(C^{\cdot}, s, s')\in \mathscr{U}(p)_0$ et si r est une relation sur C, alors e admet une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quotient faible par r (resp. faible $(\tilde{C}^{\cdot}, \bar{s})$ par r, où $\bar{s}_0$ est isomorphe dans $H^{\cdot}$ à s_0, si r est élémentaire sur $C^{\cdot}$).*

Démonstration. Reprenons les notations de la fin de la démonstration du théorème 1–3. M définit une sous-classe multiplicative $M^{\cdot}$ de $S^{\cdot}$ (resp. un sous-graphe multiplicatif $M^{\cdot}$ de $S^{\cdot}$, car $\underline{j}$ définit un néofoncteur de $C^{\cdot}$ vers $S^{\cdot}$).

Etant donné que P est $\ulcorner$-étalant, il existe $\hat{s}$ tel que

$$\hat{s} \ulcorner_P \sigma \quad \text{et} \quad P(\hat{s}) = M\,;$$

d'après les résultats rappelés au n° 3, $(M^{\cdot}, \hat{s})$ est la $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-sous-structure de $\overline{S}$ engendrée par M. Soit $\hat{r}$ la relation d'équivalence associée à j:

$$x \sim x' \quad \text{si, et seulement si,} \quad h(x) = h(x') \quad \text{pour tout} \quad h \in I\,.$$

On a $C/\hat{r} \in \mathscr{M}$. La bijection $u = \lambda(j)^{-1}$ définit un isomorphisme de $M^{\cdot}$ sur une classe multiplicative $\tilde{C}^{\cdot}$, où $\tilde{C} = C/\hat{r}$; puisque P est un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe $\overline{u} \in H_0^{\cdot}.\hat{H}_\gamma^{\cdot}.\hat{s}$ tel que $P(\overline{u}) = u$; si $\beta(\overline{u}) = \tilde{s}$, $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{s})$ est une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quotient faible de e par r. — Si $\mathscr{U}(p) = \mathscr{N}'(p)$ et si r est élémentaire sur $C^{\cdot}$, on a $\overline{j}_0 \in \hat{H}_\gamma^{\cdot}$ en vertu de la proposition 5–3, car $P(\overline{j}_0)$ est une surjection.

Corollaire. *Soit $e = (C^{\cdot}, s, s') \in \mathscr{N}'(p)_0$ et soit r une relation sur C. Il existe une $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{N}'})$-structure quasi-quotient $(L[C/\hat{r}]^{\cdot}/\hat{r}', \tilde{s}')$ de e par r; si r est élémentaire sur $C^{\cdot}$, alors $\tilde{s}_0'$ est isomorphe à s_0 dans $H^{\cdot}$.*

Démonstration. Reprenons les notations de la démonstration du théorème 2. D'après le théorème 7, chap. III, une $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{N}'})$-structure quasi-quotient de e par r est une $(\mathscr{F}(p), \overline{\mathscr{N}}'(p))$-projection de la $(\overline{\mathscr{N}}'(p), \hat{p}_{\mathscr{N}'})$-structure quotient faible $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{s})$ de e par r. Le théorème 1 montre que $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{s})$ admet une $(\mathscr{F}(p), \mathscr{K}'(p))$-projection e' de la forme $(L[\tilde{C}^{\cdot}]/\tilde{r}', \overline{s})$, où $\overline{s}_0$ est isomorphe dans $H^{\cdot}$ à $\tilde{s}_0$, et par suite aussi à s_0, si r est élémentaire sur $C^{\cdot}$. Comme $\overline{\mathscr{N}}'(p)$ est pleine dans $\mathscr{K}'(p)$, c'est une $(\mathscr{F}(p), \overline{\mathscr{N}}'(p))$-projection de $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{s})$; le corollaire en résulte.

Application au cas $P = (\hat{\mathscr{M}}, \iota, \hat{\mathscr{M}})$

Supposons que p soit le foncteur identité de $\mathscr{M}$; on a

$$\mathscr{K}(p) = \mathscr{K}'(p) = \mathscr{N}', \quad \mathscr{F}(p) = \mathscr{F}, \quad \mathscr{F}_g(p) = \mathscr{F}_g,$$

$\mathfrak{S}(p)$ et $\mathfrak{S}'(p)$ sont respectivement les catégories des homomorphismes $\mathfrak{S}$ entre groupes, et $\mathfrak{S}'$ entre monoïdes admettant pour seul élément idempotent une unité. Si $[C]$ est un graphe orienté, nous désignerons par $[C]^{\cdot}$ le graphe multiplicatif déterminé par $[C]$, tel que

1 $$(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot} \quad \text{si, et seulement si,} \quad g \in [C]_0 \quad \text{ou} \quad f \in [C]_0\,,$$

et que $[[C]^{\cdot}] = [C]$. La catégorie $\mathscr{G}'(p)$, isomorphe à la catégorie $\mathscr{G}$ des morphismes entre graphes orientés, est la sous-catégorie pleine $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{N}'$ ayant pour unités les graphes multiplicatifs $[C]^{\cdot}$ tels que $[C] \in \mathscr{G}_0$.

Nous allons appliquer les résultats des n° 3 et 4 au cas où $P = (\hat{\mathscr{M}}, \iota, \hat{\mathscr{M}})$. Pour cela nous aurons à utiliser la remarque suivante:

Soit $S^{\cdot} \in \mathscr{N}_0'$ et soit ϱ une relation (S, A, S); soit I_ϱ la classe des $h \in \mathscr{N}'.S^{\cdot}$ tels que

$$(x, y) \in A \quad \text{entraîne} \quad h(x) = h(y)\,.$$

La relation d'équivalence bicompatible sur $S^{\cdot}$ engendrée par ϱ peut être définie (d'après les résultats du n° 1) par:

$$x \sim y \quad \text{si, et seulement si,} \quad \underline{h}(x) = \underline{h}(y) \quad \text{pour tout} \quad h \in I_\varrho\,.$$

Soit $C^{\cdot} \in \mathcal{N}_0'$. Si $\hat{h}$ est un foncteur de $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$ vers $K^{\cdot} = \beta(\hat{h})$, sa restriction h à C est un néofoncteur de $C^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ si, et seulement si,

$$\hat{h}(g.f) = \hat{h}(g).\hat{h}(f) = \hat{h}((g,f)) \quad \text{pour tout} \quad (g,f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot} \cap L[C^{\cdot}] .$$

Désignons par $r(C^{\cdot})$ la relation $(L[C^{\cdot}], A, L[C^{\cdot}])$ telle que:

$$((g,f), g.f) \in A \quad \text{si, et seulement si,} \quad (g,f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot},\ g \notin C_0^{\cdot},\ f \notin C_0^{\cdot} .$$

L'application $h \to L(\beta(h), \underline{h}, [C^{\cdot}])$ est une injection de $\mathcal{F}_0 . \mathcal{N}' . C^{\cdot}$ sur la classe $I_{r(C^{\cdot})}$. D'après la démonstration du théorème 1, $C^{\cdot}$admet une $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$-projection 1
de la forme $L[C^{\cdot}]^{\cdot}/r$, où r est la relation d'équivalence:

$$x \sim y \quad \text{si, et seulement si,} \quad L(\underline{h})(x) = L(\underline{h})(y) \quad \text{pour tout} \quad h \in \mathcal{F}_0 . \mathcal{N}' . C^{\cdot}.$$

En vertu de la remarque précédente, r est donc la relation d'équivalence bicompatible sur $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$ engendrée par $r(C^{\cdot})$, c'est-à-dire $L[C^{\cdot}]^{\cdot}/r$ est identique à la catégorie $N(C^{\cdot})$ construite au théorème 10, chap. III. Si de plus $C^{\cdot} \in \mathcal{G}_0'$, on a

$$(L[C^{\cdot}]^{\cdot}, \iota, C^{\cdot}) \in \mathcal{F}_0 . \mathcal{N}' . C^{\cdot} ,$$

de sorte que r est la relation identique et que $C^{\cdot}$ admet $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$ pour $(\mathcal{F}, \mathcal{N}')$-projection. Ce résultat est équivalent au théorème 8, chap. III.

Soit $C^{\cdot} \in \mathcal{N}_0'$ et soit $[G]$ un symétrisé de $[C^{\cdot}]$. Un foncteur $\hat{h}'$ de $L[G]^{\cdot}$ vers un groupoïde $K^{\cdot}$ est le foncteur $\Gamma(h)$ associé à un morphisme h de $[C^{\cdot}]$ vers $K^{\cdot}$ sous-jacent à un néofoncteur $\bar{h}$ de $C^{\cdot}$ vers $K^{\cdot}$ si, et seulement si, on a

$$\hat{h}'(g.f) = \hat{h}'(g).\hat{h}'(f) = \hat{h}'((g,f)) \quad \text{si} \quad (g,f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot},\ g \notin C_0^{\cdot}, f \notin C_0^{\cdot}$$

et

$$\hat{h}'(f^{-1}) = (\hat{h}'(f))^{-1} \qquad \text{si} \quad f \in C - C_0^{\cdot} ;$$

cette dernière relation peut aussi s'écrire:

$$\hat{h}'((f^{-1}, f)) = \hat{h}'(f^{-1}).\hat{h}'(f) = \hat{h}'(\alpha(f)) \quad \text{et} \quad \hat{h}'(f, f^{-1}) = \hat{h}'(\beta(f)) .$$

Désignons par $r_g(C^{\cdot})$ la relation $(L[G], A', L[G])$ telle que A' ait pour éléments les couples

$$((f, f^{-1}), \beta(f)),\ ((f^{-1}, f), \alpha(f)),\ ((g,f), g.f),$$

où $f \in C - C_0^{\cdot}$, $g \in C - C_0^{\cdot}$ et $(g,f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$. L'application $\bar{h} \to \Gamma(h)$ définit une injection de $(\mathcal{F}_g)_0 . \mathcal{N}' . C^{\cdot}$ sur la classe $I_{r_g(C^{\cdot})}$. D'après la démonstration du 2
théorème 1, $C^{\cdot}$ admet pour $(\mathcal{F}_g, \mathcal{N}')$-projection la catégorie $\Gamma(C^{\cdot})$ quotient strict de $L[G]^{\cdot}$ par la relation d'équivalence r:

$$x \sim y \quad \text{si, et seulement si,} \quad \Gamma(h)(x) = \Gamma(h)(y) \quad \text{pour tout} \quad \bar{h} \in (\mathcal{F}_g)_0 . \mathcal{N}' . C^{\cdot},$$

et r est la relation d'équivalence bicompatible sur $L[G]^{\cdot}$ engendrée par $r_g(C^{\cdot})$. En particulier, si $C^{\cdot} \in \mathcal{G}_0'$ (resp. si $C^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ et si $C = R(C^{\cdot})$), on retrouve le
théorème 9, chap. III (resp. le théorème 7, chap. V). 3

Soit $C^{\cdot} \in \mathcal{F}_0$ et soit $M(C)^{\cdot}$ le monoïde libre engendré par C. Si $S^{\cdot}$ est un
demi-groupe, toute application k de C dans $S^{\cdot}$ se prolonge en un homomor- 4
phisme $M(k) = (S^{\cdot}, M(\underline{k}), M(C)^{\cdot})$. Si $S^{\cdot} \in \mathfrak{S}_0'$, pour qu'un homomorphisme $\hat{h}'$ de $M(C)^{\cdot}$ vers $S^{\cdot}$ soit le prolongement d'un néofoncteur h de $C^{\cdot}$ vers $S^{\cdot}$, il faut

23*

et il suffit que

$$\tilde{h}'(g.f) = \tilde{h}'(g).\tilde{h}'(f) = \tilde{h}'((g,f)) \quad \text{si} \quad (g,f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$$

et

$$\tilde{h}'(u) = \tilde{h}'(u') \qquad \text{si} \quad u \in C_0^{\cdot} \quad \text{et} \quad u' \in C_0^{\cdot}.$$

En effet, ces conditions sont nécessaires; si elles sont vérifiées, on a

$$\tilde{h}'(u) = \tilde{h}'(u.u) = \tilde{h}'(u).\tilde{h}'(u),$$

donc $\tilde{h}'(u) \in S_0^{\cdot}$, car tout élément idempotent de $S^{\cdot}$ est une unité par hypothèse. Désignons par $r_{\mathfrak{s}}(C^{\cdot})$ la relation $(M(C), B, M(C))$ telle que B soit formé des couples

$$((g,f), g.f), \quad \text{où} \quad (g,f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}, \quad \text{et} \quad (u', u), \quad \text{où} \quad u \in C_0^{\cdot},\ u' \in C_0^{\cdot}.$$

1 L'application $h \to M(\beta(h), \underline{h}, C)$ est une injection de $\mathfrak{S}_0'.\mathscr{F}.C^{\cdot}$ sur la classe $I_{r_{\mathfrak{s}}(C^{\cdot})}$.
2 Le corollaire du théorème 1 affirme que $C^{\cdot}$ admet pour $(\mathfrak{S}', \mathscr{F})$-projection le demi-groupe $S(C^{\cdot})$ quotient de $M(C)^{\cdot}$ par la relation d'équivalence r:

$$x \sim y \quad \text{si, et seulement si,} \quad M(\underline{h})(x) = M(\underline{h})(y) \quad \text{pour tout} \quad h \in \mathfrak{S}_0'.\mathscr{F}.C^{\cdot},$$

3¶ c'est-à-dire par la relation d'équivalence compatible sur $M(C)^{\cdot}$ engendrée par la relation $r_{\mathfrak{s}}(C^{\cdot})$. Si $C^{\cdot}$ est un groupoïde, $S(C^{\cdot})$ est un groupe, qui est une
4+ $(\mathfrak{S}, \mathscr{F}_g)$-projection de $C^{\cdot}$, résultat trouvé directement dans [13].

Foncteurs admettant une section maximale

Définition 2. *Soit $q = (\hat{K}^{\cdot}, \underline{q}, K^{\cdot})$ un foncteur; on dira que q* admet z pour section maximale *si z est un foncteur section de q et si, pour tout $s \in K_0^{\cdot}$, il existe $h \in z(q(s)).K.s$ tel que $q(h) = q(s)$.*

Exemple. Le foncteur $p_{\mathscr{T}}$ projection de la catégorie $\mathscr{T}$ des applications continues vers $\mathscr{M}$ admet z pour section maximale, où $z(T)$ est, pour tout $T \in \mathscr{T}_0$, la topologie grossière sur $p_{\mathscr{T}}(T)$.

Reprenons les notations du n° 3.

Proposition 1. *Supposons que p admette z pour section maximale et soit $z' = z.p$. Alors z' est compatible avec les produits et, si $\hat{s} \in z'(H_0^{\cdot})$ et $s' \sqsubset_p \hat{s}$, on a*
5 *$z'(s') \sqsubset_p \hat{s}$.*

Démonstration. Soit $(s_i)_{i \in I}$ une famille d'unités de $H^{\cdot}$ telle que $\prod_{i \in I} p(s_i)$ existe dans $\mathscr{M}$. Posons $\hat{s}_i = z'(s_i)$; il existe $s = \prod_{i \in I} s_i$ et $\hat{s} = \prod_{i \in I} \hat{s}_i$ dans p. Soit $S = z'(s)$; désignons par p_i la projection canonique de s sur s_i. Nous allons montrer que l'on a $S = \hat{s}$. En effet, les relations

$$S \in z'(H) \quad \text{et} \quad p(S) = \prod_{i \in I} p(s_i) = \prod_{i \in I} p(\hat{s}_i) = p(\hat{s})$$

entraînent qu'il existe

$$j \in S.H.\hat{s} \quad \text{tel que} \quad p(j) = p(S),$$

puisque z est une section maximale. Par ailleurs, il existe

$$f = [z'(p_i)]_{i \in I} \in \hat{s}.H.S,$$

et on a $p(f)=p(S)$. Il en résulte, p étant fidèle:

$$f.j=\hat{s} \quad \text{et} \quad j.f=S,$$

d'où $j \in H^{\cdot}_{\gamma}$. Puisque p_{γ} est bien fidèle, il s'ensuit

$$S=j=\hat{s}.$$

Donc z' (et par suite z) est compatible avec les produits.
— Supposons $\hat{s} \in z'(H^{\cdot}_0)$, $s' \sqsubset_p \hat{s}$ et soit $\hat{s}'=z'(s')$. Il existe

$$j' \in \hat{s}'.H.s' \quad \text{tel que} \quad p(j')=p(s').$$

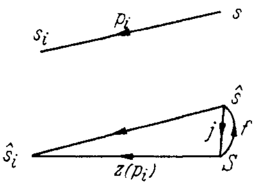


Fig. 14

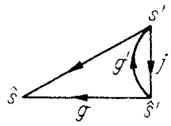


Fig. 15

Si $g=z(p(\hat{s} \leftarrow\!\!\lrcorner\, s'))$, on a $\underline{g}(p(\hat{s}'))=p(s')$, de sorte que, par définition d'une p-sous-structure, il existe $g' \in s'.H.\hat{s}'$ verifiant

$$(\hat{s} \leftarrow\!\!\lrcorner\, s').g'=g \quad \text{et} \quad p(g')=p(s').$$

Par suite g' est l'inverse de j' dans $H^{\cdot}_{\gamma}$, et on a $s'=\hat{s}'$ car p_{γ} est bien fidèle. 1+

Nous désignerons par $\hat{p}'_{\mathscr{U}}$ le foncteur projection canonique de $\mathscr{U}(p)$ vers:

$$\begin{cases} \mathscr{N} & \text{si} \quad \mathscr{U}(p)=\mathscr{N}(p) \quad \text{ou} \quad =\bar{\mathscr{N}}(p) \\ \mathscr{N}' & \text{si} \quad \mathscr{U}(p)=\mathscr{K}(p),\ \mathscr{K}'(p),\ \mathscr{N}'(p) \quad \text{ou} \quad \bar{\mathscr{N}}'(p) \\ \mathscr{U} & \text{si} \quad \mathscr{U}(p) \subset \mathscr{F}(p). \end{cases}$$

Proposition 2. *Si p admet une section maximale z (resp. z et si p est $\sqsubset$-étalant), $\hat{p}'_{\mathscr{U}}$ admet une section maximale $z_{\mathscr{U}}$ si $\mathscr{U}(p)=\mathscr{K}(p)$, $\mathscr{K}'(p)$, $\mathscr{N}(p)$ ou $\mathscr{N}'(p)$ (resp. $z_{\mathscr{U}}$ pour tout $\mathscr{U}(p)$).*

Démonstration. Soit $z'=z.p$. On définit un foncteur $z_{\mathscr{K}}$ section de $\hat{p}'_{\mathscr{K}}$ en posant 2

$$z_{\mathscr{K}}(\hat{p}'_{\mathscr{K}}(\bar{h}))=(\hat{C}^{\cdot}, z'(h), C^{\cdot}) \quad \text{si} \quad \bar{h}=(\hat{C}^{\cdot}, h, C^{\cdot}) \in \mathscr{K}(p).$$

Soit $e=(C^{\cdot}, s, s') \in \mathscr{N}(p)_0$; il existe

$$\bar{\kappa} \in s.H.s' \quad \text{tel que} \quad p(\bar{\kappa})=(C, \kappa, C^{\cdot} * C^{\cdot});$$

de la relation $z'(\bar{\kappa}) \in z'(s).H.z'(s')$, il résulte que l'on a

$$z'_{\mathscr{N}}(e)=\hat{e} \in \mathscr{N}(p), \quad \text{où} \quad \hat{e}=(C^{\cdot}, z'(s), z'(s')).$$

L'application qui associe à $\hat{p}'_{\mathscr{N}}(e', k, e)$ le triplet $(z'_{\mathscr{N}}(e'), z'(k), z'_{\mathscr{N}}(e))$ définit une section maximale de $\hat{p}'_{\mathscr{N}}$. Pour montrer que la restriction $z_{\mathscr{U}}$ de $z_{\mathscr{K}}$ (resp. de $z_{\mathscr{N}}$) à $\beta(\hat{p}'_{\mathscr{U}})$, où $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{K}(p)$ (resp. $\subset \mathscr{N}(p)$), est une section maximale de $\hat{p}'_{\mathscr{U}}$, il suffit de prouver que, si $e \in \mathscr{U}(p)_0$, on a $z_{\mathscr{U}}(\hat{p}_{\mathscr{U}}(e)) \in \mathscr{U}(p)_0$. — Soit $(C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$ et soit $\hat{s}=z'(s)$. Comme $([C^{\cdot}], s)$ est un graphe p-structuré, il existe $\bar{\alpha} \in s.H.s$

et $\bar{\beta} \in s.H.s$ tels que

$$p(\bar{\alpha}) = (C, \alpha, C) \quad \text{et} \quad p(\bar{\beta}) = (C, \beta, C).$$

Par conséquent, on a

$$z'(\bar{\alpha}) \in \hat{s}.H.\hat{s} \quad \text{et} \quad z'(\bar{\beta}) \in \hat{s}.H.\hat{s}.$$

Etant donné que p est résolvant à droite, on en déduit $(C^{\cdot}, \hat{s}) \in \mathcal{K}'(p)_0$. Ainsi $z_{\mathcal{K}'}$ est une section maximale de $\hat{p}_{\mathcal{K}'}$. — De ce qui précède il résulte que, si $e = (C^{\cdot}, s, s') \in \mathcal{N}'(p)_0$, on a $z'_{\mathcal{N}}(e) \in \mathcal{N}'(p)_0$, c'est-à-dire $z_{\mathcal{N}'}$ est une section maximale de $\hat{p}'_{\mathcal{N}'}$.

1 — Supposons de plus que p soit $\ulcorner$-étalant. Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \bar{\mathcal{N}}(p)_0$ et soit $z'_{\mathcal{N}}(e) = (C^{\cdot}, \hat{s}, z'(s * s))$. Il existe une p-sous-structure s' de $\hat{s} \times \hat{s}$ telle que $p(s') = C^{\cdot} * C^{\cdot}$. D'après la proposition 1, on a $\hat{s} \times \hat{s} = z'(s \times s)$ et $s' \in z'(H)$. Comme $p(s') = p(z'(s * s))$, on trouve

$$z'(s * s) = s' \ulcorner_p \hat{s} \times \hat{s}.$$

Donc $z'_{\mathcal{N}}(e) \in \bar{\mathcal{N}}(p)_0$ et $z_{\bar{\mathcal{N}}}$ est une section maximale de $\hat{p}'_{\bar{\mathcal{N}}}$. Par suite $z_{\mathcal{U}}$ est aussi une section maximale de $\hat{p}'_{\mathcal{U}}$ lorsque $\mathcal{U}(p) \subset \mathcal{F}(p)$.

Théorème 3. *Soit p un foncteur d'homomorphismes saturé $\ulcorner$-étalant cdmettant une section maximale. Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathcal{K}'(p)_0$ et soit r une relation sur C. Si $\bar{r}$ est la relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par r, il existe une $(\mathcal{V}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$-structure quasi-quotient $\bar{e} = (\bar{C}^{\cdot}, \bar{s})$ de e par r telle que $\bar{C}^{\cdot} = C^{\cdot}/\bar{r}$ si $\mathcal{V}(p) = \bar{\mathcal{N}}'(p)$, $\bar{C}^{\cdot} = N(C^{\cdot}/\bar{r})$ si $\mathcal{V}(p) = \mathcal{F}(p)$, $\bar{C}^{\cdot} = \Gamma(C^{\cdot}/\bar{r})$ si $\mathcal{V}(p) = \mathcal{F}_g(p)$ et $\bar{C}^{\cdot} = S(C^{\cdot}/\bar{r})$ si $\mathcal{V}(p) = \mathfrak{S}'(p)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{V}(p) = \bar{\mathcal{N}}'(p)$ (resp. $= \mathcal{F}(p)$, resp. $= \mathcal{F}_g(p)$, resp. $= \mathfrak{S}'(p)$) et soit r' la relation d'équivalence engendrée par r (resp. soit $r' = i(C)$). Soit I la classe des $\bar{h} \in \mathcal{K}'(p)$ tels que $(\bar{h}, r') \in \mathcal{V}(p)_0 . \hat{p}^{r}_{\mathcal{K}'}.(e, r')$. Comme $\hat{p}'_{\mathcal{K}'}$ admet une section maximale (prop. 2), la classe $\hat{p}'_{\mathcal{K}'}(I)$ est identique à la classe des $h \in \mathcal{N}'$ tels $(h, r') \in \mathcal{V}_0 . p^{r}_{\mathcal{N}'}.(C^{\cdot}, r')$ (on pose $\bar{\mathcal{N}}' = \mathcal{N}'$). La construction du $\tilde{C}^{\cdot}$ de la $(\mathcal{V}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$-structure quasi-quotient $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{s})$ de e par r' faite au théorème 2 (resp. th. 1) fait seulement intervenir la classe $\hat{p}_{\mathcal{K}'}(I)$, de sorte que $\tilde{C}^{\cdot}$ est la $p_{\mathcal{N}'}$-structure quasi-quotient de $C^{\cdot}$ par r (resp. la $(\mathcal{V}, \mathcal{N}')$-projection de $C^{\cdot}$). En vertu du théorème 3–1, on a $\tilde{C}^{\cdot} = C^{\cdot}/\bar{r}$ (resp. du § précédent on a $\tilde{C}^{\cdot} = N(C^{\cdot})$, resp. $= \Gamma(C^{\cdot})$, resp. $= S(C^{\cdot})$).– Le théorème 7, chap. III, affirme que la $(\mathcal{V}(p), \bar{\mathcal{N}}'(p))$-projection $(\bar{C}^{\cdot}, \bar{s})$ de la $(\bar{\mathcal{N}}'(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$-structure quasi-quotient $(C^{\cdot}/\bar{r}, \tilde{s})$ de e par r est une $(\mathcal{V}(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$-structure quasi-quotient de e par r. D'après le début de la démonstration, on a donc $\bar{C}^{\cdot} = N(C^{\cdot}/\bar{r})$ si $\mathcal{V}(p) = \mathcal{F}(p)$, $\bar{C}^{\cdot} = \Gamma(C^{\cdot}/\bar{r})$ si $\mathcal{V}(p) = \mathcal{F}_g(p)$ et $\bar{C}^{\cdot} = S(C^{\cdot}/\bar{r})$ si $\mathcal{V}(p) = \mathfrak{S}'(p)$.

Corollaire. *Si p est un foncteur d'homomorphismes saturé, admettant une section maximale et $\ulcorner$-étalant et si $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ est une catégorie p-structurée quotient de la catégorie p-structurée $(C^{\cdot}, s)$ par r, alors $\hat{C}^{\cdot}$ est la catégorie quotient de $C^{\cdot}$ par r.*

5. Foncteurs dénombrablement engendrants pour $\mathcal{M}$

2 *Soient P et p les foncteurs considérés au* n° 3, *et $\mathcal{V}(p) \subset \mathcal{K}'(p)$ ou $= \bar{\mathcal{N}}(p)$.*

Définition 1. *On dira que P est* dénombrablement engendrant pour *$\mathcal{M}$ s'il est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathcal{M}$ et s'il vérifie la condition:*

Soit $s \in \hat{H}_0^{\cdot}$; pour tout entier $i > 0$, soit s_i une P-sous-structure de s telle que $P(s_i) \in \bar{\mathscr{M}}$ et $P(s_i) \subset P(s_{i+1})$; alors il existe une P-sous-structure $\hat{s}$ de s telle que $P(\hat{s}) = \bigcup_{i \in N} P(s_i)$. 1

Comme $\bar{\mathscr{M}}_0$ est un univers, on a $P(\hat{s}) \in \bar{\mathscr{M}}$. D'après le théorème 1*, chap. III, on trouve $s_i \ulcorner_P s_{i+1} \ulcorner_P \hat{s}$.

Soit N l'ensemble des entiers positifs. Soient $P_{\mathscr{N}'}$, $P_{\mathscr{F}}$ et P_g les foncteurs projection de $\hat{\mathscr{N}}'$, de $\hat{\mathscr{F}}$ et de $\hat{\mathscr{F}}_g$ respectivement vers $\hat{\mathscr{M}}$ (voir n° 2).

Proposition 1. *$P_{\mathscr{N}'}$, $P_{\mathscr{F}}$ et P_g sont des foncteurs dénombrablement engendrants pour $\mathscr{M}$.*

Démonstration. D'après la proposition 3–2, les foncteurs $P_{\mathscr{N}'}$, $P_{\mathscr{F}}$ et P_g sont $\ulcorner$-engendrants pour $\mathscr{M}$. — Soit $C^{\cdot} \in \hat{\mathscr{N}}_0'$ et soit $C_i^{\cdot}$, pour tout $i \in N$, un sous-graphe multiplicatif de $C^{\cdot}$ tel que

$$C_i \subset C_{i+1} \quad \text{et} \quad C_i \in \bar{\mathscr{M}}.$$

Soit $\hat{C} = \bigcup_{i \in N} C_i$. Si $f \in \hat{C}$, il existe $i \in N$ tel que $f \in C_i$; par suite on a

$$\alpha(f) \in C_i \subset \hat{C} \quad \text{et} \quad \beta(f) \in C_i \subset \hat{C};$$

donc $\hat{C}^{\cdot}$ est un sous-graphe multiplicatif de $C^{\cdot}$ et $P_{\mathscr{N}'}$ est dénombrablement engendrant pour $\mathscr{M}$. — Supposons de plus $C^{\cdot} \in \hat{\mathscr{F}}_0$ et $C_i^{\cdot} \in \hat{\mathscr{F}}_0$ pour tout $i \in N$. Si

$$f' \in \hat{C}, \quad f \in \hat{C} \quad \text{et} \quad (f', f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot},$$

il existe $i \in N$ et $i' \in N$ tels que $f \in C_i$ et $f' \in C_{i'}$. Il en résulte

$$(f', f) \in C_j^{\cdot} * C_j^{\cdot}, \quad \text{si} \quad j = \sup(i, i').$$

Donc $(f', f) \in \hat{C}^{\cdot} * \hat{C}^{\cdot}$ et $\hat{C}^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $C^{\cdot}$. — Enfin si $C^{\cdot}$ et $C_i^{\cdot}$ sont des groupoïdes et si $f \in \hat{C}$, on a $f \in C_i$, d'où $f^{-1} \in C_i \subset \hat{C}$. Ainsi $\hat{C}^{\cdot}$ est un sous-groupoïde de $C^{\cdot}$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 1. *Soit P un foncteur d'homomorphismes saturé et dénombrablement engendrant pour $\mathscr{M}$. Alors P est $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-résolvant, si $\mathscr{V}(p) \subset \mathscr{K}(p)$ ou $= \bar{\mathscr{N}}(p)$.* 2+

Démonstration. Comme P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$, le foncteur P est $(\mathscr{M}, \bar{\mathscr{N}})$-résolvant en vertu de la proposition 4–3. — Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{V}(P)_0$ et soit $M \in \bar{\mathscr{M}}$ tel que $\emptyset \neq M \subset C$. Supposons $\bar{\mathscr{N}}'(p) \subset \mathscr{V}(p) \subset \mathscr{K}(p)$ (resp. $\mathscr{V}(p) = \mathscr{F}(p)$ ou $\mathfrak{S}'(p)$, resp. $= \mathscr{F}_g(p)$ ou $\mathfrak{S}(p)$). Soit $M_1^{\cdot}$ le sous-graphe multiplicatif (resp. la sous-catégorie, resp. le sous-groupoïde) de $C^{\cdot}$ engendré par M; on a $M_1 \in \bar{\mathscr{M}}$, d'après la proposition 3–2. P étant $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$, la classe M_1 engendre une P-sous-structure s_1 de s telle que $P(s_1) \in \bar{\mathscr{M}}$. Supposons définis pour tout $i < n$

$$M_i \in \bar{\mathscr{M}} \quad \text{et} \quad s_i \in \overset{-1}{P}(\bar{\mathscr{M}}).$$

Soit $M_n^{\cdot}$ le sous-graphe multiplicatif (resp. la sous-catégorie, resp. le sous-groupoïde) de $C^{\cdot}$ engendré par $P(s_{n-1})$; on a $M_n \in \bar{\mathscr{M}}$ et M_n engendre une P-sous-structure s_n de s telle que $P(s_n) \in \bar{\mathscr{M}}$. On définit ainsi par récurrence pour tout $i \in N$ une P-sous-structure s_i de s vérifiant $P(s_i) \in \bar{\mathscr{M}}$. Par hypothèse, il existe une P-sous-structure $\hat{s}$ de s telle que

$$P(\hat{s}) = \bigcup_{i \in N} P(s_i) \quad \text{et} \quad P(\hat{s}) \in \bar{\mathscr{M}}.$$

Posons $\hat{C} = \bigcup_{i \in N} M_i$. Comme

$$P(s_i) \subset M_{i+1} \subset P(s_{i+1}),$$

on a $P(\hat{s}) \subset \hat{C} \subset P(\hat{s})$, d'où $P(\hat{s}) = \hat{C}$. Par suite $\hat{C}^{\cdot}$ est un sous-graphe multiplicatif (resp. une sous-catégorie, resp. un sous-groupoïde) de $C^{\cdot}$, car $P_{\mathcal{N}'}$, $P_{\mathcal{F}}$ et P_g sont dénombrablement engendrants pour $\mathcal{M}$ (prop. 1). Il en résulte que $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ est la $(X_{\mathcal{V}} \cap (\hat{P}_{\mathcal{V}})_i^{\ulcorner}, \mathcal{V}(P))$-sous-structure de e engendrée par M et, d'après la proposition 2–2, $\hat{P}_{\mathcal{V}}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $(\mathcal{M}, X_{\mathcal{V}}, \mathcal{V}(p))$, donc P est $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$-résolvant.

Corollaire. *Supposons $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ et soit $\mathcal{V}(p)$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}(p)$. Soit P un foncteur d'homomorphismes saturé et dénombrablement engendrant pour $\mathcal{M}$ (resp. Soit $p = p_{\mathcal{N}'}$, $p_{\mathcal{F}}$ ou $p_g = (\mathcal{M}, \underline{p}_{\mathcal{F}}\iota, \mathcal{F}_g)$). Si $e \in \mathcal{U}(p)_0$ et si r est une relation sur $\hat{p}_{\mathcal{U}}(e)$, il existe une $(\mathcal{V}(p), \hat{p}_{\mathcal{U}})$-structure quasi-quotient de e par r.*

En effet, P est $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$-résolvant d'après le théorème 1 (resp. théorème 1 car $P_{\mathcal{N}'}$, $P_{\mathcal{F}}$, P_g sont dénombrablement engendrants pour $\mathcal{M}$ en vertu de la proposition 1, et ce sont des foncteurs d'homomorphismes saturés et résolvants à droite). Le corollaire résulte donc du théorème 1–3.

Construction des structures quasi-quotient si $p = p_{\mathcal{N}'}$ ou $p_{\mathcal{F}}$

Nous supposons que $\mathcal{M}_0 \in \hat{\mathcal{M}}_0$ et que $\mathcal{V}(p)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathcal{U}(p)$ telle que $\mathcal{V}(p) \subset \mathcal{K}(p)$ ou $= \bar{\mathcal{N}}(p)$. Soit $P = P_{\mathcal{N}'}$ ou $P_{\mathcal{F}}$; on a $p = p_{\mathcal{N}'}$ ou $p_{\mathcal{F}}$. La relation $(C^{\cdot}, \iota, \hat{C}^{\cdot}) \in \hat{H}$ entraînant que $\hat{C}$ définit une P-sous-structure de $C^{\cdot}$ (th. 6, chap. III), P et p sont faiblement $\ulcorner$-étalants; donc $X_{\mathcal{V}} = (\hat{P}_{\mathcal{V}})_i^{\ulcorner}$ (prop. 3–3).

Soient $e = (C^{\cdot}, C^{\perp}) \in \mathcal{U}(p)_0$ si $\mathcal{U}(p) \subset \mathcal{K}'(p)$ (resp. $= (C^{\cdot}, C^{\perp}, s')$ si $\mathcal{U}(p) = \mathcal{N}(p)$ ou $\mathcal{N}'(p)$), et r une relation sur C. La fin de la démonstration du théorème 1–3 montre (d'après le corollaire du théorème 1) que e admet une $(\mathcal{V}(p), \hat{p}_{\mathcal{U}})$-structure quasi-quotient $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{C}^{\perp})$ par r isomorphe dans $\mathcal{V}(P)$ à la $\hat{P}_{\mathcal{V}}$-sous-structure $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{C}^{\perp})$ de $\bar{S}$ engendrée par $M = \underline{j}(C)$. (Les notations sont celles du th. 1–3). Posons

$$\bar{S} = (S^{\cdot}, S^{\perp}) \quad \text{et} \quad j_1 = (\hat{C}^{\cdot}, \underline{j}, C^{\cdot}),$$

et désignons par α et β les applications source et but dans $S^{\cdot}$, par $\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$ les applications source et but dans $S^{\perp}$.

Théorème 2. *Reprenons les notations précédentes. Si $\underline{p} = p_{\mathcal{F}}$ et si $\mathcal{V}(p) = \bar{\mathcal{N}}(p)$ ou $\bar{\mathcal{N}}'(p)$, la sous-catégorie de $S^{\perp}$ engendrée par $\underline{M}$ est $\hat{C}^{\perp}$. Soit $p = p_{\mathcal{N}'}$. Alors e admet une $(\mathcal{V}(p), \hat{p}_{\mathcal{U}})$-structure quasi-quotient $\tilde{e} = (\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{C}^{\perp})$ telle que:*

1. *$\tilde{e}$ est une $(\mathcal{V}(p), \hat{p}_{\mathcal{U}})$-structure quotient faible de e par r si $\mathcal{V}(p) = \bar{\mathcal{N}}'(p)$ ou $\bar{\mathcal{N}}(p)$.*

2. *Soit $\mathcal{U}(p) \subset \mathcal{K}'(p)$ ou $\mathcal{N}'(p)$ et supposons $\underline{r}$ élémentaire sur $C^{\cdot}$; alors $(\tilde{C}_0^{\cdot})^{\perp}$ est isomorphe à $(C_0^{\cdot})^{\perp}$ si $\mathcal{F}_g(p) \subset \mathcal{V}(p)$; on a $\tilde{C}^{\cdot} = L[C^{\cdot}]^{\cdot}/\hat{r}$ si $\mathcal{V}(p) = \mathcal{F}(p)$, $\tilde{C}^{\cdot} = L[G]^{\cdot}/\hat{r}$, où $[G]$ est un symétrisé de $[C^{\cdot}]$, si $\mathcal{V}(p) = \mathcal{F}_g(p)$ et $\tilde{C}^{\cdot} = M(C)^{\cdot}/\hat{r}$ si $\mathcal{V}(p) = \mathfrak{S}'(p)$.*

Démonstration. Puisque j est un néofoncteur, M définit un sous-graphe multiplicatif de $S^{\perp}$. Supposons $p = p_{\mathscr{F}}$. Soit $\hat{M}^{\perp}$ la sous-catégorie de $S^{\perp}$ engendrée par M, dont les éléments sont les composés $f_n \perp \ldots \perp f_1$, où $f_i \in M$ si $1 \leqq i \leqq n$. — Si $(\mathscr{V}(p), \mathscr{U}(p)) = (\bar{\mathscr{N}}(p), \mathscr{N}(p))$, $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{M}^{\perp})$ est une $\hat{P}_{\bar{\mathscr{N}}}$-sous-structure de $(S^{\cdot}, S^{\perp})$ et l'on a $\hat{C} = \hat{M}$. — Soit $\mathscr{U}(p) = \mathscr{N}'(p)$ ou $\mathscr{K}'(p)$ et $\mathscr{V}(p) = \bar{\mathscr{N}}'(p)$. Comme j_1 est un néofoncteur, M définit un sous-graphe multiplicatif de $S^{\cdot}$, et $(S^{\perp}, \alpha, S^{\perp})$ et $(S^{\perp}, \beta, S^{\perp})$ sont des néofoncteurs, ce qui entraîne

$$\alpha(\hat{M}) \subset \hat{M} \quad \text{et} \quad \beta(\hat{M}) \subset \hat{M}\,.$$

Donc $(\hat{M}^{\cdot}, \hat{M}^{\perp})$ est une $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-sous-structure de $(S^{\cdot}, S^{\perp})$ et $\hat{C} = \hat{M}$.
— Supposons $p = p_{\mathscr{N}'}$. Soit $(\mathscr{V}(p), \mathscr{U}(p)) = (\bar{\mathscr{N}}(p), \mathscr{N}(p))$. Puisque $(M^{\cdot}, M^{\perp})$ est une $\hat{P}_{\bar{\mathscr{N}}}$-sous-structure de $(S^{\cdot}, S^{\perp})$, on trouve $M = \hat{C}$. Soit $\tilde{C}$ la classe quotient de C par la relation d'équivalence $\hat{r} = r_j$ associée à j et soit u la bijection $\lambda(\underline{j})^{-1}$. Si $\tilde{C}^{\cdot}$ et $\tilde{C}^{\perp}$ sont les classes multiplicatives images de $M^{\cdot}$ et de $M^{\perp}$ respectivement par u, $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{C}^{\perp})$ est une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quotient faible de e par r. On a

$$x \sim x' \bmod \hat{r} \quad \text{si, et seulement si,} \quad g(x) = g(x') \quad \text{pour tout} \quad g \in I\,. \text{—}$$

Supposons $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{K}(p)$ ou $\mathscr{N}'(p)$. Dans ce cas, $C^{\cdot}$ est un graphe multiplicatif et j_1 est un néofoncteur, de sorte que M définit un sous-graphe multiplicatif de $S^{\cdot}$. Si $\mathscr{V}(p) = \bar{\mathscr{N}}'(p)$ ou $\mathscr{K}'(p)$, $(M^{\cdot}, M^{\perp})$ est une $\hat{P}_{\mathscr{V}}$-sous-structure de $(S^{\cdot}, S^{\perp})$, i.e. on a $M = \hat{C}$. — Si r est élémentaire sur $C^{\cdot}$, la proposition 5–3 dit que $((\hat{C}_0^{\cdot})^{\perp}, \underline{j}\iota, (C_0^{\cdot})^{\perp})$ est un isomorphisme si $\mathscr{U}(p) \subset \mathscr{K}'(p)$ ou $\mathscr{N}'(p)$; on construit $\tilde{C}$ comme plus haut.
— Supposons $p = p_{\mathscr{N}'}$, que r soit une relation élémentaire sur $C^{\cdot}$ et que $\mathscr{U}(p)$ soit contenu dans $\mathscr{K}'(p)$ ou dans $\mathscr{N}'(p)$. Soit $\mathscr{V}(p) = \mathscr{F}(p)$. La sous-catégorie $\tilde{M}^{\cdot}$ de $S^{\cdot}$ engendrée par M est formée des composés

$$\hat{f} = \hat{f}_n \cdot \ldots \cdot \hat{f}_1\,, \quad \text{où} \quad \hat{f}_i = j(f_i) \quad \text{et} \quad f_i \in C\,.$$

Si $(\hat{f}_2, \hat{f}_1) \in S^{\cdot} * S^{\cdot}$, on a

$$\alpha(\alpha^{\perp}(\hat{f}_2)) = \alpha^{\perp}(\alpha(\hat{f}_2)) = \alpha^{\perp}(\beta(\hat{f}_1)) = \beta(\alpha^{\perp}(\hat{f}_1))\,,$$

d'où $(\alpha^{\perp}(\hat{f}_2), \alpha^{\perp}(\hat{f}_1)) \in S^{\cdot} * S^{\cdot}$ et, $\kappa(S^{\cdot} * S^{\cdot})$ définissant un néofoncteur de $(S^{\cdot} * S^{\cdot})^{\perp}$ vers $S^{\perp}$, on trouve

$$\alpha^{\perp}(\hat{f}_2 \cdot \hat{f}_1) = \alpha^{\perp}(\hat{f}_2) \cdot \alpha^{\perp}(\hat{f}_1)\,.$$

Par récurrence, on en déduit

$$\alpha^{\perp}(\hat{f}) = \alpha^{\perp}(\hat{f}_n) \cdot \ldots \cdot \alpha^{\perp}(\hat{f}_1)\,,$$

et $\alpha^{\perp}(\hat{f}) \in \tilde{M}$, car $\alpha^{\perp}(M) \subset M$. De même $\beta^{\perp}(\hat{f}) \in \tilde{M}$; ainsi $\tilde{M}^{\perp}$ est un sous-graphe multiplicatif de $S^{\perp}$, c'est-à-dire on a $\hat{C} = \tilde{M}$. Comme $\hat{C}_0^{\cdot} = j(C_0^{\cdot})$, la proposition 5–3 entraîne que $(\hat{C}_0^{\cdot}, j\iota, C_0^{\cdot})$ est une bijection. Par conséquent

$$\hat{f} = L(\underline{j})(f_n, \ldots, f_1) \quad \text{et} \quad \tilde{M} = L(\underline{j})(L[C^{\cdot}])\,.$$

Ceci montre que $L(\underline{j})$ définit $\tilde{M}^{\cdot}$ comme catégorie quotient strict de $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$. Par suite e admet pour $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quasi-quotient $(L[C^{\cdot}]^{\cdot}/\hat{r}, \tilde{C}^{\perp})$, où $\hat{r}$ est la relation d'équivalence:

$$x \sim x' \quad \text{si, et seulement si,} \quad L(\underline{h})(x) = L(\underline{h})(x') \quad \text{pour tout} \quad h \in I\,.$$

— Soit $\mathscr{V}(p)=\mathscr{F}_g(p)$. Soit $\bar{M}^{\cdot}$ le sous-groupoïde de $S^{\cdot}$ engendré par M. Si $\hat{f}\in S$ et si $\hat{f}^{-1}$ est l'inverse de $\hat{f}$ dans $S^{\cdot}$, on a

$$\alpha^{\perp}(\hat{f}).\alpha^{\perp}(\hat{f}^{-1})=\alpha^{\perp}(\hat{f}.\hat{f}^{-1})=\alpha^{\perp}(\beta(\hat{f}))\in S_0^{\cdot}$$

et

$$\alpha^{\perp}(\hat{f}^{-1}).\alpha^{\perp}(\hat{f})=\alpha^{\perp}(\hat{f}^{-1}.\hat{f})\in S_0^{\cdot},$$

d'où $\alpha^{\perp}(\hat{f}^{-1})=(\alpha^{\perp}(\hat{f}))^{-1}$. Un raisonnement analogue au précédent prouve que $\hat{C}=\bar{M}$ et que $\hat{C}^{\cdot}$ est un groupoïde quotient strict de $L[G]^{\cdot}$. — Si $\mathscr{V}(p)=\mathfrak{S}'(p)$, soit $\hat{M}^{\cdot}$ le sous-monoïde de $S^{\cdot}$ engendré par M; on a comme précédemment
1 $\hat{M}=\hat{C}$, ce qui entraîne $\hat{C}=M(j)(C)$, et $\hat{C}^{\cdot}$ est un demi-groupe quotient de $M(C)^{\cdot}$.

Cas des catégories d'applications ordonnées

Nous supposons $\mathscr{M}_0\in\hat{\mathscr{M}}$. Soit $\hat{\Omega}$ la catégorie des applications ordonnées $((M',<),f,(M,<))$ telles que $(M',f,M)\in\hat{\mathscr{M}}$; soit P_Ω son foncteur projection canonique vers $\hat{\mathscr{M}}$ et soit p_Ω la restriction de P_Ω à $\Omega=\overset{-1}{\underline{P}}_\Omega(\mathscr{M})$.

Soit $\hat{\mathscr{I}}^{ps}$ la sous-catégorie de $\hat{\Omega}$ formée des applications sous-préinductives (i.e. des applications ordonnées $((M',<),f,(M,<))\in\hat{\Omega}$ telles que $(M,<)$ et $(M',<)$ soient des classes sous-préinductives et que, si $x'<x$ et $x''<x$ dans $(M,<)$, on ait $f(x'\cap x'')=f(x')\cap f(x'')$ dans $(M',<)$). Soit $\mathscr{I}^{ps}=\hat{\mathscr{I}}^{ps}\cap\Omega$. Nous désignons par P_{ps} et par p_{ps} respectivement les foncteurs restrictions de P_Ω à $\hat{\mathscr{I}}^{ps}$ et à $\mathscr{I}^{ps}$.

Théorème 3. *P_{ps} est un foncteur d'homomorphismes saturé $\hat{\pi}$-compatible,*
2 *résolvant à droite et dénombrablement engendrant pour $\mathscr{M}$.*

Démonstration. Posons $P=P_{ps}$ et $p=p_{ps}$. Nous savons [5] que P est un foncteur d'homomorphismes saturé $\hat{\pi}$-compatible. Soit $e=(C,<)\in\hat{\mathscr{I}}_0^{ps}$. — Montrons que $P_\iota^{\sqsubset}\subset(P_\Omega)_\iota^{\sqsubset}$. En effet, soit $\hat{e}=(\hat{C}^{\cdot},\hat{s})$ une P-sous-structure de e. On a $(e,\iota,\hat{e})\in\hat{\mathscr{I}}^{ps}$. Soient $x\in\hat{C}$, $y\in\hat{C}$ et $x<y$ dans e; désignons par M la classe ayant x et y pour seuls éléments, alors

$$(e,\iota,(M,<))\in\hat{\mathscr{I}}^{ps}.$$

Comme $\hat{e}\sqsubset_{P} e$, il existe

$$(\hat{e},\iota,(M,<))\in\hat{\mathscr{I}}^{ps},\quad \text{d'où}\quad x<y \text{ dans } \hat{e}.$$

Ainsi $\hat{e}$ est une sous-classe ordonnée de e. Il en résulte que les P-sous-structures de e sont les sous-classes ordonnées $(\hat{C},<)$ de e telles que $\hat{C}$ soit une sous-classe sous-préinductive de e (i.e. telles que $x'\cap x''\in\hat{C}$ si $x''\in\hat{C}$, $x'\in\hat{C}$ et s'il existe $x\in\hat{C}$ pour lequel $x'<x$ et $x''<x$). — Soient

$$h_i=((S,<),\underline{h}_i,e)\in\hat{\mathscr{I}}^{ps},\quad \text{où}\quad i=1,2,$$

et $e'=(C',<)$ le P_Ω-noyau de (h_1,h_2). Si $x'<x$ et $x''<x$ dans e', la relation

$$h_1(x'\cap x'')=h_1(x')\cap h_1(x'')=h_2(x')\cap h_2(x'')=h_2(x'\cap x'')$$

entraîne $x'\cap x''\in C'$. Ainsi e' est une P-sous-structure de e, de sorte que e' est le P-noyau de (h_1,h_2). Par conséquent P, et par suite p, sont résolvants à droite. — Montrons que P est dénombrablement engendrant pour $\mathscr{M}$. Soit $e_i=(C_i,<)$, pour tout $i \in N$, une P-sous-structure de e. Supposons

$$C_i \in \bar{\mathscr{M}}_0, \quad C_i \subset C_{i+1} \quad \text{et} \quad \hat{C} = \bigcup_{i \in N} C_i .$$

Si $x \in \hat{C}$, $x' \in \hat{C}$, $x'' \in \hat{C}$ et si $x' < x$ et $x'' < x$ dans e, il existe $i \in N$ tel que

$$x' < x \quad \text{et} \quad x'' < x \quad \text{dans } e_i ;$$

comme C_i est une sous-classe sous-préinductive de e, on a $x' \cap x'' \in C_i \subset \hat{C}$. Il s'ensuit que $\hat{C}$ est une sous-classe sous-préinductive de e, c'est-à-dire $(\hat{C}, <)$ est une P-sous-structure de e. — Il ne reste plus qu'à montrer que P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$. En effet, si K est une sous-classe de C, nous désignons par $K \wedge K$ la classe des couples $(x', x'') \in K \times K$ tels que x' et x'' soient majorés par un $x \in K$. On a $K \wedge K \subset C \wedge C$. Soit v l'application

$$(x', x'') \to x' \cap x'' \quad \text{de} \quad C \wedge C \quad \text{dans} \quad C .$$

Si $K \in \bar{\mathscr{M}}$, on a

$$v(K \wedge K) \subset v((C \wedge C) \cap (K \times K)) \in \bar{\mathscr{M}}_0 ,$$

car $v \in \hat{\mathscr{M}}$ et $K \wedge K \in \bar{\mathscr{M}}$. Supposons $M \in \bar{\mathscr{M}}_0$ et $\emptyset \neq M \subset C$. Posons $M_1 = v(M \wedge M)$ et définissons par récurrence M_i, pour tout $i \in N$, par la relation $M_i = v(M_{i-1} \wedge M_{i-1})$. On a $M_i \in \bar{\mathscr{M}}$, $M_{i-1} \subset M_i$ et $\hat{C} = \bigcup_{i \in N} M_i \in \bar{\mathscr{M}}$. Si $(x', x'') \in \hat{C} \wedge \hat{C}$, il existe $x \in \hat{C}$ tel que $x' < x$ et $x'' < x$ dans e; on en déduit qu'il existe $i \in N$ tel que $x \in C_i$ et $(x', x'') \in C_i \wedge C_i$. Par construction, on a

$$x' \cap x'' \in C_{i+1} \subset \hat{C} .$$

Par suite $\hat{C}$ est une sous-classe sous-préinductive de e, et $(\hat{C}, <)$ est la P-sous-structure de e engendrée par M. D'après la proposition 2–2, P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$, puisque P est un foncteur d'homomorphismes saturé.

Corollaire. *Soit $p = p_{ps}$; si $e \in \mathscr{U}(p)_0$ et si r est une relation sur $\hat{p}_{\mathscr{U}}(e)$, il existe une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-structure quasi-quotient de e par r, lorsque $\mathscr{V}(p)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}(p)$; en particulier $\mathscr{U}(p_{ps})$ est une catégorie à $\mathscr{V}(p_{ps})$-projections.*

En effet, ceci résulte du corollaire du théorème 1 et du théorème 3.

Définition 2. *On appelle* classe $\mathfrak{f}$-inductive *une classe ordonnée $(C, <)$ telle que, si $x' < x$ et $x'' < x$ dans $(C, <)$, il existe $x' \overset{x}{\bigcup} x''$; une classe $\mathfrak{f}$-inductive $(C, <)$ qui est une classe sous-préinductive est dite* $\mathfrak{f}$-sous-inductive. 1

Si $(C, <)$ est une classe $\mathfrak{f}$-inductive, toute partie finie A majorée par $x \in C$ admet un x-agrégat noté $\overset{x}{\bigcup} A$.

Soit $\hat{\mathscr{F}}^{\mathfrak{f}\cup}$ la classe des applications $\mathfrak{f}$-inductives, i.e. des applications $((\hat{C}, <), h, (C, <)) \in \hat{\Omega}$ telles que $(C, <)$ et $(\hat{C}, <)$ soient des classes $\mathfrak{f}$-inductives et que, si $x' < x$ et $x'' < x$ dans $(C, <)$, on ait

$$h\left(x' \overset{x}{\bigcup} x''\right) = h(x') \overset{y}{\bigcup} h(x''), \quad \text{où} \quad y = h(x) .$$

Soit $\hat{\mathscr{F}}^{\mathfrak{f}s} = \hat{\mathscr{F}}^{\mathfrak{f}\cup} \cap \hat{\mathscr{F}}^{ps}$. Soit $\hat{\mathscr{F}}^{\cup}$ la sous-catégorie de $\hat{\mathscr{F}}^{\mathfrak{f}\cup}$ formée des applications quasi-inductives [5]. Soit $\hat{\mathscr{F}}_{\mathfrak{i}}^{s}$ (resp. $\hat{\mathscr{F}}_{\mathfrak{i}}$) la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathscr{F}}^{\mathfrak{f}s} \cap \hat{\mathscr{F}}^{\cup}$ 2 formée des applications sous-inductives (resp. inductives) $((C_2, <), h, (C_1, <))$ telles que $(C_i, <)$ vérifie *l'axiome de distributivité:* (D') Soient x' et x'' deux éléments de C_i majorés par x dans $(C_i, <)$; si A est une sous-classe de C_i majorée par x', on a

$$\left(\overset{x'}{\bigcup} A\right) \cap x'' = \overset{x'}{\bigcup_{a \in A}} (a \cap x'').$$

Soit $\hat{\mathscr{H}}$ l'une des catégories $\hat{\mathscr{I}}^{\mathfrak{f}\cup}$, $\hat{\mathscr{I}}^{\mathfrak{f}s}$, $\hat{\mathscr{I}}^{\cup}$, $\hat{\mathscr{I}}_l^s$ ou $\hat{\mathscr{I}}_l$; nous posons $\mathscr{H} = \hat{\mathscr{H}} \cap \Omega$ et nous désignons par $P_{\mathscr{H}}$ (resp. par $p_{\mathscr{H}}$) la restriction de P_Ω à $\hat{\mathscr{H}}$ (resp. à $\mathscr{H}$).

Théorème 4. *Soit $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{I}}^{\mathfrak{f}\cup}$ ou $\hat{\mathscr{I}}^{\mathfrak{f}s}$; alors $P_{\mathscr{H}}$ est dénombrablement engendrant pour $\mathscr{M}$. Si $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{I}}^{\cup}$, $\hat{\mathscr{I}}_l^s$ ou $\hat{\mathscr{I}}_l$ et si $\mathscr{V}(p) \supset \bar{\mathscr{N}}'(p)$, le foncteur $P_{\mathscr{H}}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$ et $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-résolvant.*

Démonstration. $P_{\mathscr{H}}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé $\hat{\pi}$-compatible, car $\hat{\mathscr{H}}$ est une sous-catégorie saturée et stable par produits de $\hat{\Omega}$. Une démonstration analogue au début de celle du théorème 3 montre que l'on a

$$(p_{\mathscr{H}})_i^{\ulcorner} \subset (P_{\mathscr{H}})_i^{\ulcorner} \subset (P_\Omega)_i^{\ulcorner}.$$

Si $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{I}}^{\mathfrak{f}\cup}$ (resp. $\hat{\mathscr{I}}^{\cup}$), les $P_{\mathscr{H}}$-sous-structures de $e \in \hat{\mathscr{H}}_0$ sont les sous-classes ordonnées $(C', <)$ de e telles que $x' < x$ et $x'' < x$ dans $(C', <)$ entraîne $x' \overset{x}{\bigcup} x'' \in C'$ (resp. que C' soit faiblement $\cup$-saturé dans e [5]). Si $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{I}}^{\mathfrak{f}s}$, les $P_{\mathscr{H}}$-sous-structures de e sont les $P_{\mathscr{I}^{\mathfrak{f}\cup}}$-sous-structures $(C', <)$ telles que C' soit une sous-classe sous-préinductive de e. Si $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{I}}_l^s$ ou $\hat{\mathscr{I}}_l$, les $P_{\mathscr{H}}$-sous-structures de e sont les sous-classes ordonnées $(C', <)$ de e telles que C' soit une sous-classe sous-inductive faible de e (i.e. une sous-classe sous-préinductive et faiblement $\cup$-saturée), l'axiome (D') étant évidemment vérifié dans une telle classe ordonnée $(C', <)$ s'il est vrai pour e. On voit comme au théorème 3 que $P_{\mathscr{H}}$ est résolvant à droite.

— Soit $\hat{\mathscr{I}}^{\mathfrak{f}\cup} \supset \hat{\mathscr{H}}$ et soit $e = (C, <) \in \hat{\mathscr{H}}_0$. Soit K une partie de C telle que $K \in \bar{\mathscr{M}}$. Désignons par $U^{\mathfrak{f}}(K)$ (resp. par $U(K)$) la classe des parties finies (resp. des parties) A de K majorées dans $(K, <)$ et par $U'^{\mathfrak{f}}(K)$ (resp. par $U'(K)$) la classe des couples

$$(x, A) \in K \times U^{\mathfrak{f}}(K) \quad (\text{resp.} \in K \times U(K)) \quad \text{tels que} \quad A < x.$$

Comme $\bar{\mathscr{M}}$ est un univers, on a $U'(K) \in \bar{\mathscr{M}}_0$. Si $\mathscr{H} = \mathscr{I}^{\mathfrak{f}\cup}$ ou $\mathscr{I}^{\mathfrak{f}s}$ (resp. $= \mathscr{I}^{\cup}$), soit u l'application

$$(x, A) \to \overset{x}{\bigcup} A \quad \text{de} \quad U'^{\mathfrak{f}}(K) \ (\text{resp. de } U'(K)) \text{ vers } C$$

et soit

$$\hat{K} = u(U'^{\mathfrak{f}}(K)) \quad (\text{resp.} = u(U'(K))).$$

On a $\hat{K} \in \bar{\mathscr{M}}$. Soit $M \in \bar{\mathscr{M}}_0$ et $\emptyset \neq M \subset C$. — Si $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{I}}^{\mathfrak{f}\cup}$ (resp. $\subset \hat{\mathscr{I}}^{\cup}$), on a $\hat{\hat{M}} = \hat{M}$, de sorte que M engendre la P-sous-structure $(\hat{M}, <)$ de e; ainsi P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$. — Soit $\mathscr{H} = \mathscr{I}^{\mathfrak{f}s}$ et soit v l'application $A \to \cap A$ de $U^{\mathfrak{f}}(K)$ dans C. Définissons par récurrence

$$M_1 = \hat{M} \cup v(U^{\mathfrak{f}}(M)) \quad \text{et} \quad M_{i+1} = \hat{M}_i \cup v(U^{\mathfrak{f}}(M_i)) \in \bar{\mathscr{M}},$$

pour tout $i \in N$. Soit $M' = \bigcup_{i \in N} M_i \in \bar{\mathcal{M}}$. On a

$$M' \in \bar{\mathcal{M}} \quad \text{et} \quad \hat{M}' \cup v(U^{\dagger}(M')) = M' .$$

Par suite $(M', <)$ est la $P_{\mathscr{H}}$-sous-structure de e engendrée par M, et $P_{\mathscr{H}}$ est $\sqcap$-engendrant pour $\mathcal{M}$.
— Une démonstration analogue à celle faite dans le théorème 3 prouve que $P_{\mathscr{H}}$ est dénombrablement engendrant pour $\mathcal{M}$, si $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{I}}^{\dagger\cup}$ ou $\hat{\mathscr{I}}^{\dagger s}$.
— Soit $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{I}}^{\cup}$ et $P = P_{\mathscr{H}}$. D'après la proposition 4–3, P est $(\mathcal{M}, \bar{\mathcal{N}})$-résolvant. Montrons que P est $(\mathcal{M}, \mathscr{V})$-résolvant si $\mathscr{V}(p) \supset \bar{\mathcal{N}}'(p)$. En effet, soient 1

$$e = (C^{\cdot}, <) \in \mathscr{K}'(p)_0 \quad (\text{resp.} \in \bar{\mathcal{N}}'(p)_0) \quad \text{et} \quad M \in \mathcal{M}_0 \quad \text{tel que } 0 \neq M \subset C .$$

Soit $K^{\cdot}$ le sous-graphe multiplicatif de $C^{\cdot}$ engendré par M ; on a $K \in \bar{\mathcal{M}}$ et K engendre une P-sous-structure $(\hat{K}, <)$ de $(C, <)$. Nous avons $\hat{K} = u(U'(K))$. Or

$$\alpha\Big(\overset{x}{\bigcup} A\Big) = \overset{\alpha(x)}{\bigcup} \alpha(A) \in \hat{K} \quad \text{et} \quad \beta\Big(\overset{x}{\bigcup} A\Big) \in \hat{K}\,, \quad \text{si} \quad \overset{x}{\bigcup} A \in \hat{K} . \qquad 2$$

Ainsi $\hat{K}^{\cdot}$ est un sous-graphe multiplicatif de $C^{\cdot}$, et $(\hat{K}^{\cdot}, <)$ est la $(X_{\mathscr{V}}, \mathscr{V}(P))$-sous-structure de e engendrée par M ; donc (prop. 1–2) P est $(\mathcal{M}, \mathscr{V})$-résolvant. — Montrons que, si $\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{I}}_l^s$ ou $\hat{\mathscr{I}}_l$, alors $P_{\mathscr{H}}$ est $\sqcap$-engendrant pour $\mathcal{M}$. En effet, soient

$$e = (C, <) \in \hat{\mathscr{H}}_0, \quad M \in \bar{\mathcal{M}} \quad \text{et} \quad 0 \neq M \subset C .$$

Soit $(M', <)$ la P_{ps}-sous-structure de e engendrée par M ; on a $M' \in \bar{\mathcal{M}}$. Supposons

$$y_i = \overset{x_i}{\bigcup} A_i \in \hat{M}' , \quad i = 1, 2 ;$$

si $y = \overset{x}{\bigcup} A \in \hat{M}'$ et si $y_i < y$, on a $y_i < x$, et, en utilisant l'axiome (D'),

$$y_1 \cap y_2 = \Big(\overset{x}{\bigcup} A_1\Big) \cap \Big(\overset{x}{\bigcup} A_2\Big) = \overset{x}{\bigcup} A' ,$$

en désignant pour A' la classe des éléments $a_1 \cap a_2$ tels que $a_i \in A_i$. Comme $a_1 \cap a_2 \in M'$, on trouve $A' \subset M'$, d'où $y_1 \cap y_2 \in \hat{M}'$. Ceci montre que $(\hat{M}', <)$ est la $P_{\mathscr{H}}$-sous-structure de e engendrée par M. Donc $P_{\mathscr{H}}$ est $\sqcap$-engendrant pour $\mathcal{M}$. Une démonstration analogue à celle faite pour $P_{\mathscr{I}\cup}$ montre que $P_{\mathscr{H}}$ est $(\mathcal{M}, \mathscr{V})$-résolvant.

Corollaire. *Soit $\mathscr{H} = \mathscr{I}^{\dagger\cup}$ ou $\mathscr{I}^{\dagger s}$ (resp. $= \mathscr{I}^{\cup}$, $\mathscr{I}_l^s$ ou $\mathscr{I}_l$). Soit $\mathscr{V}(p_{\mathscr{H}})$ une sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}(p_{\mathscr{H}})$ (resp. de $\mathscr{U}(p_{\mathscr{H}})$ telle que $\bar{\mathcal{N}}'(p_{\mathscr{H}}) \subset \mathscr{V}(p_{\mathscr{H}})$). Si $e \in \mathscr{U}(p_{\mathscr{H}})_0$ et si r est une relation sur $(\hat{p}_{\mathscr{H}})_{\mathscr{U}}(e)$, il existe une $(\mathscr{V}(p_{\mathscr{H}}), (\hat{p}_{\mathscr{H}})_{\mathscr{U}})$-structure quasi-quotient de e par r.*

En effet, ce corollaire résulte du corollaire du théorème 1 (resp. du théorème 1–3) et du théorème 4.

3

6. Construction de catégories structurées quasi-quotient

Soit $p = (\mathcal{M}, \underline{p}, H^{\cdot})$ un foncteur d'homomorphismes vérifiant les conditions du n° 3, dont nous reprenons les conventions.

Soit $e'=(C^{\cdot}, s)\in \mathscr{K}'(p)_0$ et soit $e=([C^{\cdot}]^{\cdot}, s)$; on a $L[C^{\cdot}]=L[[C^{\cdot}]^{\cdot}]$. Si $\bar{j}=(\hat{C}^{\cdot}, j, [C^{\cdot}]^{\cdot})\in \mathscr{F}(p)_0.\mathscr{K}'(p).e$, la relation $L(\underline{j})(r(C^{\cdot}))$, où $r(C^{\cdot})$ est la relation construite au n° 4, est la relation $(\hat{C}, A, \hat{C})$ telle que

$$(x,y)\in A \quad \text{si, et seulement si, il existe} \quad (f',f)\in C^{\cdot} * C^{\cdot} \ \text{tel que}$$
$$f\notin C^{\cdot}_0,\quad f'\notin C^{\cdot}_0,\quad x=j(f').j(f) \quad\text{et}\quad y=j(f'.f).$$

Nous désignons par $\mathscr{U}^{\tau}(p)$ la catégorie $(\hat{p}_{\mathscr{U}})^{\tau}$ servant à définir les $\hat{p}_{\mathscr{U}}$-structures quasi-quotient (voir n° 1). Si $\bar{j}=(\hat{C}^{\cdot}, j, C^{\cdot})\in\mathscr{F}(p)_0.\mathscr{K}'(p)$, nous posons

$$L(\bar{j})=(\hat{C}, L(\underline{j}), L[C^{\cdot}])=p_{\mathscr{F}}(L(\hat{C}^{\cdot}, \underline{j}, [C^{\cdot}])).$$

Théorème 1. *Supposons* $\mathscr{V}(p)\subset\mathscr{F}(p)$. *Soient* $e'=(C^{\cdot},s)\in\mathscr{K}'(p)_0$, $e=([C^{\cdot}]^{\cdot},s)$ *et r une relation d'équivalence sur C. Si* $(\bar{j}, r)$ *est un* $(\mathscr{V}(p), \mathscr{K}'^{\tau}(p))$- *(resp. si* $\bar{j}$ *est un* $(\mathscr{V}(p), \mathscr{K}'(p))$-*) projecteur tel que* $\alpha(\bar{j})=e$ *et* $\beta(\bar{j})=\hat{e}$, *il existe une* $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}})$-*structure quasi-quotient* $\tilde{e}$ *de* e' *par r si, et seulement si,* $\hat{e}$ *admet* $\tilde{e}$
1 *pour* $\hat{p}_{\mathscr{V}}$-*structure quasi-quotient par* $L(\bar{j})(r(C^{\cdot}))$ *(resp. par* $L(\bar{j})(r(C^{\cdot})\cup r)$*).*

Démonstration. Soit $\bar{j}=(\hat{C}^{\cdot}, j, [C^{\cdot}]^{\cdot})$. Désignons par $\hat{r}$ la relation d'équivalence engendrée sur $\hat{C}$ par $L(\bar{j})(r(C^{\cdot}))$ (resp. par $L(\bar{j})(r(C^{\cdot})\cup r)$). Posons:

$$Z=\mathscr{V}(p)_0.\mathscr{V}^{\tau}(p).(\hat{e},\hat{r}),\qquad K=\mathscr{V}(p)\cup Z\cup\{(\hat{e},\hat{r})\},$$
$$Z'=\mathscr{V}(p)_0.\mathscr{K}'^{\tau}(p).(e',r),\qquad K'=\mathscr{V}(p)\cup Z'\cup\{(e',r)\}.$$

On a

$$(r,\bar{i},r)\in\mathscr{K}'^{\tau}(p),\quad\text{où}\quad \bar{i}=(C^{\cdot}, s, [C^{\cdot}]^{\cdot}).$$

2 Soit $(\bar{h}', r)\in Z'$ et $h'=\hat{p}^{H}_{\mathscr{K}}(h')$. Puisque

$$(\bar{h}'.\bar{i}, r)=(\bar{h}',r).(r,\bar{i},r)\in\mathscr{K}'^{\tau}(p).(e,r)$$

et que $(\bar{j}, r)$ (resp. que $\bar{j}$) est un $(\mathscr{V}(p),\mathscr{K}'^{\tau}(p))$-projecteur, il existe un et un seul $\bar{h}\in\mathscr{V}(p)$ tel que $\bar{h}.\bar{j}=\bar{h}'.\bar{i}$. Nous avons vu au n° 4 que $L(\underline{h}')$ est compatible avec $r(C^{\cdot})$; comme $\underline{h}'$ est compatible avec r, $L(\underline{h}')$ est aussi compatible avec $r(C^{\cdot})\cup r$. L'égalité $\underline{h}L(\underline{j})=L(\underline{h}')$ entraîne que $\underline{h}$ est compatible avec $\hat{r}$. Par suite, en posant

$$w(\bar{h}',r)=(\bar{h},\hat{r}),\quad\text{on a}\quad w(\bar{h}',r)\in Z.$$

— Par ailleurs, soit

$$(\bar{k},\hat{r})\in Z,\quad\text{où}\quad \bar{k}=(S^{\cdot},k,\hat{C}^{\cdot}).$$

On a $L(\underline{k.j})=\underline{k}L(\underline{j})$ et $L(\underline{k.j})$ est compatible avec $r(C^{\cdot})$ étant donné que $\underline{k}$ est compatible avec $L(\underline{j})(\overline{r(C^{\cdot})})$. On en déduit (voir n° 4) que $\underline{k.j}$ définit un néofoncteur de $C^{\cdot}$ vers $S^{\cdot}$, c'est-à-dire

$$\bar{k}'=(S^{\cdot}, k.j, C^{\cdot})\in\mathscr{K}'(p).$$

Etant donné que $\underline{j}$ est compatible avec r (resp. que k est compatible avec $p(j)(r)$), l'application $\underline{kj}$ est compatible avec r, donc

$$(\bar{k}',r)\in Z'\quad\text{et}\quad(\bar{k},\hat{r})=w(\bar{k}',r).$$

Ceci montre que l'application $w:(\bar{h}',r)\to w(\bar{h}',r)$ est une bijection de Z' sur Z. En posant

$$w(e',r)=(\hat{e},\hat{r})\quad\text{et}\quad w(\bar{g})=\bar{g}\quad\text{si}\quad \bar{g}\in\mathscr{V}(p),$$

on prolonge w en une bijection de K' sur K, définissant un isomorphisme de la sous-catégorie $K'^{\cdot}$ de $\mathscr{K}'^{\tau}(p)$ sur la sous-catégorie $K^{\cdot}$ de $\mathscr{V}^{\tau}(p)$, admettant pour restriction le foncteur identique de $\mathscr{V}(p)$. Il s'ensuit que $(\overline{h}', r)$ est un $(\mathscr{V}(p), K'^{\cdot})$-projecteur si, et seulement si, $w(\overline{h}', r)$ est un $(\mathscr{V}(p), K^{\cdot})$-projecteur, ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Symétrisé d'un graphe structuré

Si $e = ([C]^{\cdot}, s) \in \mathscr{G}'(p)_0$, on posera $e^* = ([C]^*, s)$; on a $e^* \in \mathscr{G}'(p)_0$ et $[C]^* = [[C]^*]^{\cdot}$.

Définition 1. *Soit* $e = ([C]^{\cdot}, s) \in \mathscr{G}'(p)_0$ *et* $\overline{u}_1 = ([C]^{\cdot}, s \xleftarrow[p]{} s_0, [C]_0^{\cdot})$. *On dira que* $\overline{e}$ *est* un p-symétrisé de e *s'il existe un graphe* $[C_2]$ *tel que* $C \cap C_2 = [C]_0$, *un* $\overline{\gamma} \in \mathscr{G}'(p)_\gamma . e$ *tel que* $\overline{\gamma} = ([C_2]^*, \gamma, [C]^{\cdot})$ *et* $\gamma(x) = x$ *si* $x \in [C]_0$ *et une somme fibrée naturalisée* $((\overline{v}_1, \overline{u}_1), (\overline{v}_2, \overline{u}_2))$ *dans* $\mathscr{G}'(p)$, *où* $\overline{u}_2 = ([C_2]^{\cdot}, \gamma.(s \xleftarrow[p]{} s_0), [C]_0^{\cdot})$, *et* $\overline{e} = \beta(\overline{v}_1)$. *On appelle alors* $\overline{v}_1$ *(resp.* $\overline{v}_2$*)* l'injection canonique de e (*resp.* de $\beta(\overline{\gamma})^*$) vers $\overline{e}$.

Proposition 1. *Supposons que p soit un foncteur d'homomorphismes saturé et* $H^{\cdot}$ *une catégorie à sommes fibrées finies. Si* $e = ([C]^{\cdot}, s) \in \mathscr{G}'(p)_0$, *il existe un p-symétrisé* $\overline{e}$ *de e.*

Démonstration. Soit $[C] = (C, \beta, \alpha)$ et soit $\underline{\gamma}$ une bijection de C sur C_2 telle que

$$C \cap C_2 = [C]_0 \quad \text{et} \quad \underline{\gamma}(x) = x \quad \text{pour tout} \quad x \in [C]_0 .$$

Soit $[C_2]^* = (C_2, \alpha_2, \beta_2)$ le graphe image de $[C]$ par $\underline{\gamma}$. Il existe $\gamma \in H_{\underline{\gamma}}^{\cdot} . s$ tel que $p(\gamma) = \underline{\gamma}$ et, si $s_2 = \beta(\gamma)$ et $[C_2] = (C_2, \beta_2, \alpha_2)$, on a:

$$([C_2]^{\cdot}, s_2) \in \mathscr{G}'(p)_0 \quad \text{et} \quad \overline{\gamma} = ([C_2]^*, \gamma, [C]^{\cdot}) \in \mathscr{G}'(p)_{\gamma} . e .$$

La restriction de $\underline{\gamma}$ à $[C]_0$ étant l'identité, la p-sous-structure $(s_2)_0$ de s_2 est identique à s_0, car $p(H_\gamma^{\cdot})$ opère sur $p_1^{\ulcorner}$ (prop. 9, chap. III). Soit

$$u_1 = s \xleftarrow[p]{} s_0 \quad \text{et} \quad u_2 = s_2 \xleftarrow[p]{} s_0 = \gamma . u_1 .$$

La catégorie $H^{\cdot}$ étant à sommes fibrées finies, il existe une somme fibrée naturalisée $((v_1, u_1), (v_2, u_2))$ dans $H^{\cdot}$. Posons

$$\overline{s} = \beta(v_1), \quad \overline{C} = p(\overline{s}) \quad \text{et} \quad [\overline{C}]_0 = \underline{v}_1([C]_0) = \underline{v}_2([C]_0) .$$

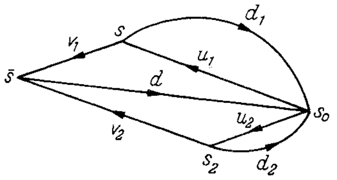


Fig. 16

Puisque $([C], s)$ et $([C_2], s_2)$ sont des graphes p-structurés, il existe

$$d_1 \in s_0 . H . s \quad \text{et} \quad d_2 \in s_0 . H . s_2 \quad \text{tels que} \quad p(d_1) = \alpha \quad \text{et} \quad p(d_2) = \alpha_2 .$$

Les relations

$$d_i . u_i \in s_0 . H . s_0 , \quad \text{et} \quad p(d_i . u_i) = [C]_0 , \quad \text{si} \quad i = 1, 2 ,$$

entraînent $d_1 . u_1 = d_2 . u_2$, car p est fidèle. Par définition d'une somme fibrée, il existe un et un seul

$$d \in s_0 . H . \bar{s} \quad \text{tel que} \quad d . v_i = d_i, \quad i = 1, 2 .$$

Soit $d' = v_1 . u_1 . d \in \bar{s} . H . \bar{s}$. Si $x \in [\bar{C}]_0$, il existe $y \in [C]_0$ tel que $x = v_i(y)$ et on a

$$d(x) = d(v_1(y)) = d_1(y) = \alpha(y) = y$$

et

$$d'(x) = v_1(u_1(d(x))) = v_1(u_1(y)) = x .$$

Ainsi $\underline{d}'$ est une rétraction $\bar{\alpha}$ de $\bar{C}$ sur $[\bar{C}]_0$. On voit de même qu'il existe

$$d'' \in \bar{s} . H . \bar{s} \quad \text{tel que} \quad d'' . v_i = v_i . u_i . \hat{d}_i, \quad \text{où} \quad \underline{\hat{d}}_1 = \beta \quad \text{et} \quad \underline{\hat{d}}_2 = \beta_2 ,$$

et que $\underline{d}''$ soit une rétraction $\bar{\beta}$ de $\bar{C}$ sur $[\bar{C}]_0$. Par suite $(\bar{C}, \bar{\beta}, \bar{\alpha})$ est un graphe orienté $[\bar{C}]$ et on a

$$\bar{e} = ([\bar{C}]^{\cdot}, \bar{s}) \in \mathscr{G}'(p)_0 .$$

De plus $\bar{e}$ est une somme fibrée dans $\mathscr{G}'(p)$ de $(([C]^{\cdot}, u_1, [C]_0^{\cdot}), ([C_2]^{\cdot}, u_2, [C]_0^{\cdot}))$, c'est-à-dire $\bar{e}$ est un p-symétrisé de e.

Corollaire 1. *Soit P un foncteur d'homomorphismes saturé et $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$ et $H^{\cdot}$ une catégorie à sommes finies*[3]. *Si $e = ([C]^{\cdot}, s) \in \mathscr{G}'(p)_0$, il existe un p-symétrisé de e.*

En effet, $H^{\cdot}$ est une catégorie à sommes fibrées finies, d'après le corollaire 2 du théorème 3-2. Si $[G]$ est un symétrisé de $[C]$ défini par la bijection $\underline{\gamma}$ et si $s_2 = \beta(\gamma)$, où $\gamma \in H^{\cdot}_{\gamma} . s$ et $p(\gamma) = \underline{\gamma}$, alors $(s \xleftarrow{p} s_0, \gamma . s \xleftarrow{p} s_0)$ admet pour somme fibrée dans $H^{\cdot}$ une p-structure quasi-quotient d'une somme de (s, s_2).

Corollaire 2. *Soit P un foncteur d'homomorphismes saturé, $e = ([C]^{\cdot}, s) \in \in \mathscr{G}'(p)_0$ et $[G]$ un symétrisé de $[C]$. Si P est un foncteur à sommes finies et $\ulcorner$-étalant (resp. si p est à sommes fibrées finies), il existe un p-symétrisé $([\bar{C}]^{\cdot}, \bar{s})$ de e tel que $[\bar{C}]$ soit un graphe quotient de $[G]$ (resp. que $[\bar{C}] = [G]$).*

Démonstration. Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 1. $[G]$ est une somme fibrée dans $\mathscr{G}$ de $(([C], \iota, [C]_0), ([C_2], \iota, [C]_0))$. Supposons que P soit $\ulcorner$-étalant et p à sommes finies. Il existe une somme S de (s, s_2) dans $H^{\cdot}$ telle que $p(S)$ soit la somme de $p(s)$ et $p(s_2)$. Par définition d'une somme fibrée, il existe une bijection de G sur une classe quotient $p(S)/r$ de $p(S)$. En vertu du corollaire 3 du théorème 3-2, $\bar{s}$ est une p-structure quotient faible de S par une relation $\bar{r}$ contenant r; par suite il existe une bijection $\underline{g}$ de $p(\bar{s})$ sur une classe quotient G/r' de G. Puisque p est saturé, $\hat{p}_{\mathscr{G}'}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé et il existe $\bar{g} \in \mathscr{G}'(p)_{\gamma} . \bar{e}$ tel que $p(\bar{g}) = \underline{g}$. Il s'ensuit que $\beta(\bar{g})$ est un p-symétrisé $([\tilde{C}]^{\cdot}, \tilde{s})$ de e tel que $\tilde{C} = G/r'$. L'égalité

1 $$([\bar{C}], \underline{v}_1, [C]) . ([C], \iota, [C]_0) = ([\bar{C}], \underline{v}_2, [C_2]) . ([C_2], \iota, [C]_0)$$

entraîne $([\tilde{C}], \underline{\tilde{r}}', [G]) \in \mathscr{G}$, car $[G]$ est une somme fibrée dans $\mathscr{G}$, c'est-à-dire (prop. 33, chap. III) $[\tilde{C}] = [G]/r'$. — Si p est à sommes fibrées finies, on peut choisir $\bar{s}$ tel que $p(\bar{s}) = G$ et la démonstration s'achève comme plus haut.

[3] Voir Note p. 316.

Soit $e = ([C]^{\cdot}, s) \in \mathcal{G}'(p)_0$ et soit $\bar{e} = ([\bar{C}]^{\cdot}, \bar{s})$ un p-symétrisé de e. Reprenons les notations de la définition 1 et posons

$$v_i = \hat{p}^{H}_{\mathcal{K}'}(\bar{v}_i),\ i = 1, 2, \quad \text{et} \quad \beta(\bar{\gamma}) = ([C_2]^{\cdot}, s_2)^* ;$$

Soit $[G]$ le symétrisé de $[C]$ défini par $\underline{\gamma}$, tel que $G = C \cup C_2$. Il existe un et un seul $v = ([\bar{C}], \underline{v}, [G]) \in \mathcal{G}$ tel que

$$([\bar{C}],\ \underline{v}_1,\ [C]) = v.([G], \iota, [C]) \quad \text{et} \quad ([\bar{C}],\ \underline{v}_2,\ [C_2]) = v.([G], \iota, [C_2]).$$

Soit

$$\bar{h} = (S^{\cdot}, h, [C]^{\cdot}) \in \mathcal{F}_g(p)_0 . \mathcal{K}'(p).e \quad \text{et} \quad \bar{h}_2 = (S^{\cdot}, I.h.\gamma^{-1}, [C_2]^{\cdot}) \in \beta(\bar{h}).\mathcal{K}'(p),$$

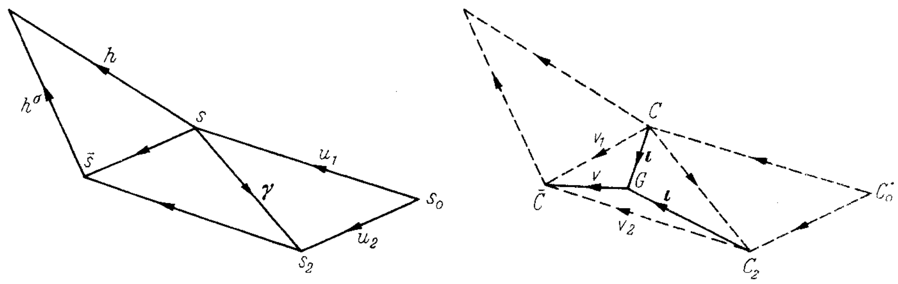


Fig. 17

où $p(I)$ est l'application $g \to g^{-1}$ de S dans S. Comme $\bar{h}.\bar{u}_1 = \bar{h}_2.\bar{u}_2$, il existe un et un seul

$$\bar{h}' = (S^{\cdot}, h', [\bar{C}]^{\cdot}) \in \mathcal{K}'(p).\bar{e} \quad \text{tel que} \quad \bar{h}'.\bar{v}_1 = \bar{h} \quad \text{et} \quad \bar{h}'.\bar{v}_2 = \bar{h}_2 .$$

Le morphisme $(S^{\cdot}, \underline{h'v}, [G])$ est le symétrisé de $(S^{\cdot}, \underline{h}, [C])$; nous poserons $h' = h^\sigma$ et $\bar{h}' = \bar{h}^\sigma$; on appellera $\bar{h}^\sigma$ un *p-symétrisé* de $\bar{h}$. Si

$$\bar{k} = (S^{\cdot}, k, [\bar{C}]^{\cdot}) \in \mathcal{F}_g(p)_0 . \mathcal{K}'(p).\bar{e},$$

pour que $\bar{k} = (\bar{k}.\bar{v}_1)^\sigma$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\underline{kv}(f^{-1}) = (\underline{kv}(f))^{-1} \quad \text{pour tout} \quad f \in C,$$

c'est-à-dire que $(S^{\cdot}, \underline{kv}, [G]^{\cdot})$ soit la restriction à $[G]^{\cdot}$ de $\Gamma\,(S^{\cdot}, \underline{kv_1}, [C])$. En effet, la condition est nécessaire. Si elle est vérifiée, soit

$$\bar{k}_1 = \bar{k}.\bar{v}_1 \quad \text{et} \quad \bar{k}_2 = (S^{\cdot}, I.k.v_1.\gamma^{-1}, [C_2]^{\cdot}).$$

Pour tout $f \in C$, on a

$$\underline{kv}_2(f^{-1}) = \underline{kv}(f^{-1}) = \underline{Ikv\gamma}^{-1}(f^{-1}) = \underline{Ikv_1\gamma}^{-1}(f^{-1}) = k_2(f^{-1}),$$

d'où, $\hat{p}_{\mathcal{K}}$ étant fidèle, $\bar{k}.\bar{v}_2 = \bar{k}_2$ et, d'après la construction précédente, $\bar{k} = (\bar{k}_1)^\sigma$.

Si r est une relation d'équivalence sur C, on notera $r_{\bar{e}}$ la relation d'équivalence sur $\bar{C}$ engendrée par $v_1(r)$.

Supposons de plus $C^{\cdot} \in \mathcal{N}'_0$ et $[C] = [C^{\cdot}]$. Nous désignerons par $r_g^{\bar{e}}(C^{\cdot})$ la relation $L(v)\,(r_g(C^{\cdot}))$ sur $L[\bar{C}]$, où $r_g(C^{\cdot})$ est la relation considérée sur $L[G]$ au n° 4. Soit

$$\bar{j} = (\hat{C}^{\cdot}, j, [\bar{C}]^{\cdot}) \in \mathcal{F}_g(p)_0 . \mathcal{K}'(p).\bar{e} ;$$

la relation $L(\bar{j})\,(r_g^{\bar{e}}(C^{\cdot}))$ est $(\hat{C}, \hat{B}, \hat{C})$, où $\hat{B}$ a pour éléments les couples (x, y) tels qu'il existe $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ vérifiant: $g \in C - C_0^{\cdot}$, $f \in C - C_0^{\cdot}$,

$$x = \underline{j}\underline{v}(g).\underline{j}\underline{v}(f) \quad \text{et} \quad y = \underline{j}\underline{v}(g.f)$$

et les couples (x, y) pour lesquels existe $f \in C - [C]_0$ tel que

$$x = \underline{j}\underline{v}(f).\underline{j}\underline{v}(f^{-1}) \quad \text{et} \quad y = \underline{j}\underline{v}(\beta(f))$$

ou

$$x = \underline{j}\underline{v}(f^{-1}).\underline{j}\underline{v}(f) \quad \text{et} \quad y = \underline{j}\underline{v}(\alpha(f)).$$

Théorème 2. *Soient $e' = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$ et $\bar{e} = ([\bar{C}]^{\cdot}, \bar{s})$ un p-symétrisé de $e = ([C]^{\cdot}, s)$. Soit r une relation d'équivalence sur C. Supposons qu'il existe un $(\mathscr{F}(p), \mathscr{K}'^{\tau}(p))$-projecteur $(\bar{j}, r_{\bar{e}})$ (resp. un $(\mathscr{F}(p), \mathscr{K}'(p))$-projecteur $\bar{j}$) tel que $\alpha(\bar{j}) = \bar{e}$ et $\beta(\bar{j}) = \hat{e}$. Pour qu'il existe une $(\mathscr{F}_g(p), \hat{p}_{\mathscr{K}})$-structure quasi-quotient $\tilde{e}$ de e' par r, il faut et il suffit que $\hat{e}$ admette $\tilde{e}$ pour $(\mathscr{F}_g(p), \hat{p}_{\mathscr{F}})$-structure quasi-quotient par $L(\bar{j})\,(r_g^{\bar{e}}(C^{\cdot}))$ (resp. par $L(\bar{j})\,(r_g^{\bar{e}}(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}})$).*

1 *Démonstration.* Soit $\bar{j} = (\hat{C}^{\cdot}, j, [C^{\cdot}]^{\cdot})$ et désignons par $\hat{r}$ la relation d'équivalence engendrée par $L(\bar{j})\,(r_g^{\bar{e}}(C^{\cdot}))$ (resp. par $L(\bar{j})\,(r_g^{\bar{e}}(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}})$). Nous reprenons les notations précédant le théorème et nous posons:

$$[C] = [C^{\cdot}], \quad Z' = \mathscr{F}_g(p)_0 . \mathscr{K}'^{\tau}(p).(e', r) \quad \text{et} \quad Z = \mathscr{F}_g(p)_0 . \mathscr{F}^{\tau}(p).(\hat{e}, \hat{r}).$$

Supposons

$$(\bar{h}', r) \in Z' \quad \text{et} \quad \bar{h}' = (S^{\cdot}, h', C^{\cdot}).$$

Soit $\bar{h}'^{\sigma} = (S^{\cdot}, h'^{\sigma}, [\bar{C}]^{\cdot})$ un p-symétrisé de $(S^{\cdot}, h', [C]^{\cdot})$. Comme $(\bar{j}, r_{\bar{e}})$ (resp. $\bar{j}$) est un $(\mathscr{F}(p), \mathscr{K}'^{\tau}(p))$-projecteur, il existe un et un seul $\bar{h} = (S^{\cdot}, h, \hat{C}^{\cdot}) \in \mathscr{F}(p)$ tel que

$$\bar{h}'^{\sigma} = \bar{h}.\bar{j}, \quad \text{et on a} \quad L(\bar{h}'^{\sigma}) = p(h).L(\bar{j}).$$

$(S^{\cdot}, \underline{h}'^{\sigma}\underline{v}, [G])$ étant un symétrisé de $(S^{\cdot}, \underline{h}', [C])$ et $\underline{h}'$ définissant un néofoncteur de $C^{\cdot}$ vers $S^{\cdot}$, l'application

$$L(S^{\cdot}, \underline{h}'^{\sigma}\underline{v}, [G]^{\cdot}) = L(\bar{h}'^{\sigma}).p_{\mathscr{F}}(L(v))$$

est compatible avec $r_g(C^{\cdot})$, d'après le n° 4, de sorte que $L(\bar{h}'^{\sigma})$ est compatible avec $r_g^{\bar{e}}(C^{\cdot}) = L(v)\,(r_g(C^{\cdot}))$. Puisque $\underline{h}' = \underline{h}'^{\sigma}\underline{v}_1$ est compatible avec r, la surjection $\underline{h}'^{\sigma}$ est compatible avec $v_1(r) = r_{\bar{e}}$; par suite $L(\bar{h}'^{\sigma})$ est compatible avec $r_g^{\bar{e}}(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}}$. Il s'ensuit que $p(h)$ est compatible avec $\hat{r}$, d'où

$$w^{\sigma}(\bar{h}', r) \in Z \quad \text{si} \quad w^{\sigma}(\bar{h}', r) = (\bar{h}, \hat{r}).$$

— Par ailleurs, soit

$$(\bar{k}, \hat{r}) \in Z \quad \text{et} \quad \bar{k} = (S^{\cdot}, k, \hat{C}^{\cdot}).$$

$L(\bar{k}.\bar{j}) = p(k).L(\bar{j})$ est compatible avec $r_g^{\bar{e}}(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}}$; il en résulte que $\underline{k}' = \underline{kj}\underline{v}_1$ est compatible avec r. Etant donné que $\underline{k}'$ est la restriction de $\underline{kj}\underline{v}$ et que $L(\underline{kj}\underline{v}) = L(\underline{kj})\,L(\underline{v})$ est compatible avec $r_g(C^{\cdot})$, la surjection $\underline{k}'$ définit (n° 4) un néofoncteur de $C^{\cdot}$ vers $S^{\cdot}$. Donc

$$(\bar{k}', r) \in Z', \quad \text{où} \quad \bar{k}' = (S^{\cdot}, k.j.v_1, C^{\cdot}).$$

De plus, pour tout $f \in C - C_0^{\cdot}$, les relations

$$L(\overline{k}.\overline{j})(\hat{f}^{-1}, \hat{f}) = \underline{kj}(\hat{f}^{-1}).\underline{k}'(f) = \underline{k}'(\alpha(f)),$$

$$L(\overline{k}.\overline{j})(\hat{f}, \hat{f}^{-1}) = \underline{k}'(f).\underline{kj}(\hat{f}^{-1}) = \underline{k}'(\beta(f)),$$

où $\hat{f} = v(f)$ et $\hat{f}^{-1} = v(f^{-1})$, ont pour conséquence

$$\underline{kjv}(f^{-1}) = (\underline{k}'(f))^{-1} = (\underline{kjv}(f))^{-1}.$$

Les résultats indiqués avant le théorème entraînent

$$\overline{k}'^{\sigma} = \overline{k}.\overline{j} \quad \text{et} \quad (\overline{k}, \hat{r}) = w^{\sigma}(\overline{k}', r).$$

Ainsi w^{σ} est une bijection de Z' sur Z. Soient $K^{\cdot}$ et $K'^{\cdot}$ les sous-catégories de $\mathscr{K}'^{\mathrm{r}}(p)$ définies par

$$K = \mathscr{F}_g(p) \cup Z \cup \{(\hat{e}, \hat{r})\} \quad \text{et} \quad K' = \mathscr{F}_g(p) \cup Z' \cup \{(e', r)\}.$$

En posant

$$w^{\sigma}(e', r) = (\hat{e}, \hat{r}) \quad \text{et} \quad w^{\sigma}(\overline{g}) = \overline{g} \quad \text{si} \quad \overline{g} \in \mathscr{F}_g(p),$$

on obtient une bijection de K' sur K, qui définit un isomorphisme de $K'^{\cdot}$ sur $K^{\cdot}$ admettant pour restriction le foncteur identique de $\mathscr{F}_g(p)$. Par conséquent $(\overline{h}', r)$ est un $(\mathscr{F}_g(p), K'^{\cdot})$-projecteur si, et seulement si, $w^{\sigma}(\overline{h}', r)$ est un $(\mathscr{F}_g(p), K^{\cdot})$-projecteur, ce qu'il fallait démontrer.

Projection dans les demi-groupes structurés 1

Soit p_m la restriction de $p_{\mathscr{N}}$ à la sous-catégorie pleine $\mathscr{N}_m$ de $\mathscr{N}$ ayant pour
unités les monoïdes. Soit $\mathscr{N}_m^{\cdot}(p)$ la catégorie produit fibré $p \vee p_m$; l'élément 2
$\overline{h} = (h, (\hat{C}^{\cdot}, \underline{h}, C^{\cdot})) \in \mathscr{N}_m^{\cdot}(p)$ sera représenté par le triplet $(\hat{C}^{\cdot}, h, C^{\cdot})$ et $\mathscr{N}_m^{\cdot}(p)_0$
est identifiée à la classe des couples $(C^{\cdot}, s)$ tels que $C^{\cdot} \in (\mathscr{N}_m^{\cdot})_0$, $s \in H_0^{\cdot}$ et $p(s) = C$.
Soit $\hat{p}_m$ le foncteur de $\mathscr{N}_m(p)$ vers $\mathscr{M}$ tel que $\hat{p}_m(\overline{h}) = p(h)$ et soit $\overline{\mathscr{N}}_m(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_m^{\cdot}(p)$ ayant pour unités les $(C^{\cdot}, s) \in \mathscr{N}_m(\underline{p})_0 \cap \overline{\mathscr{N}}(p)_0$. La catégorie $\mathfrak{S}'(p)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{N}_m(p)$ et de $\overline{\mathscr{N}}_m(p)$. Soit Σ la classe des couples $(C^{\cdot}, h)$ tels que $h \in H$ et $(C^{\cdot}, \beta(h)) \in \mathscr{N}_m(p)_0$. Soit $\mathscr{L}_m(p)$ la catégorie ayant $H \cup \mathscr{N}_m(p) \cup \Sigma$ pour classe sous-jacente, $H^{\cdot}$ et $\mathscr{N}_m^{\cdot}(p)$ pour sous-catégories pleines et telle que l'application somme de $\underline{p}$, de $\underline{\hat{p}}_m$ et de $\underline{\hat{p}}_{\Sigma} : (C^{\cdot}, h) \to p(h)$ définisse un foncteur fidèle $\hat{p}_{\mathscr{L}}$ de $\mathscr{L}_m(p)$ vers $\mathscr{M}$. Si $(C^{\cdot}, h) \in \Sigma$, posons $M(h) = (C, M(\underline{h}), M(\alpha(\underline{h})))$.

Théorème 3. *Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$ et soit r une relation sur C. Supposons
qu'il existe un $(\overline{\mathscr{N}}_m(p), \mathscr{N}_m(p), (\hat{p}_{\mathscr{L}})^{\mathrm{r}})$-projecteur $((\hat{C}^{\cdot}, j), r)$ (resp. $(\hat{C}^{\cdot}, j)$) tel que* 3+
$\alpha(j) = s$, $(\hat{C}^{\cdot}, \beta(j)) = \hat{e}$. Pour qu'il existe une $(\mathfrak{S}'(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient $\tilde{e}$ de e par r, il faut et il suffit que $\hat{e}$ admette $\tilde{e}$ pour $(\mathfrak{S}'(p), \hat{p}_m)$-structure quasi-quotient par $M(j)(r_s(C^{\cdot}))$ (resp. par $M(j)(r_s(C^{\cdot}) \cup r)$).

Démonstration. La relation $M(j)(r_s(C^{\cdot}))$ (voir nº 4) est la relation $(\hat{C}, B, \hat{C})$ telle que $(x, y) \in B$ si

$$x = j(f').j(f) \quad \text{et} \quad y = j(f'.f), \quad \text{où} \quad (f', f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$$

ou si

$$x = j(u) \qquad \text{et} \quad y = j(u'), \qquad \text{où} \quad u \in C_0^{\cdot} \quad \text{et} \quad u' \in C_0^{\cdot}.$$

24*

Soit $\hat{r}$ la relation d'équivalence engendrée par $M(j)\,(r_s(C^{\cdot}))$ (resp. par $M(j)\,(r_s(C^{\cdot})\cup r)$). Posons

$$Z = \mathfrak{S}'(p)_0 . (\hat{p}_m)^r . (\hat{e}, \hat{r}) \quad \text{et} \quad Z' = \mathfrak{S}'(p)_0 . \mathscr{K}'^r(p) . (e, r) .$$

Supposons

$$(\bar{h}', r) \in Z', \quad \text{où} \quad \bar{h}' = (S^{\cdot}, h', C^{\cdot}) .$$

Puisque $((\hat{C}^{\cdot}, j), r)$ (resp. puisque $(\hat{C}^{\cdot}, j)$) est un $(\bar{\mathscr{N}}_m(p), \mathscr{N}_m(p), (\hat{p}_{\mathscr{L}})^r)$-projecteur et que $(S^{\cdot}, h') \in \bar{\mathscr{N}}_m(p)_0 . \Sigma$, il existe un et un seul

$$\bar{h} = (S^{\cdot}, h, \hat{C}^{\cdot}) \in \mathscr{N}_m(p) \quad \text{tel que} \quad h' = h . j .$$

Nous avons vu (n° 4) que $M(h')$ est compatible avec $r_s(C^{\cdot})$, et par suite avec $r_s(C^{\cdot})\cup r$, car $\underline{h}'$ est compatible avec r. Comme $M(h') = p(h) . M(j)$, il en résulte que $p(h)$ est compatible avec $\hat{r}$, d'où

$$w_s(\bar{h}', r) \in Z \quad \text{si} \quad w_s(\bar{h}', r) = (\bar{h}, \hat{r}) .$$

— Par ailleurs, soit

$$(\bar{k}, \hat{r}) \in Z \quad \text{et} \quad \bar{k} = (S^{\cdot}, k, \hat{C}^{\cdot}) ;$$

alors $\underline{kj}$ est compatible avec r; d'après les résultats du n° 4, $\underline{kj}$ définit un néo-foncteur de $C^{\cdot}$ vers $S^{\cdot}$, de sorte que l'on trouve

$$\bar{k}' = (S^{\cdot}, k . j, C^{\cdot}) \in \mathscr{K}'(p), \quad (\bar{k}', r) \in Z' \quad \text{et} \quad w_s(\bar{k}', r) = (\bar{k}, \hat{r}) .$$

Ceci montre que w_s est une bijection de Z' sur Z. Soient $K^{\cdot}$ et $K'^{\cdot}$ les sous-catégories de $(\hat{p}_m)^r$ et de $\mathscr{K}'^r(p)$ respectivement définies par

$$K' = \mathfrak{S}'(p) \cup Z' \cup \{(e, r)\} \quad \text{et} \quad K = \mathfrak{S}'(p) \cup Z \cup \{(\hat{e}, \hat{r})\} .$$

En posant

$$w_s(e, r) = (\hat{e}, \hat{r}) \quad \text{et} \quad w_s(\bar{g}) = \bar{g} \quad \text{si} \quad \bar{g} \in \mathfrak{S}'(p) ,$$

on obtient un isomorphisme de $K'^{\cdot}$ sur $K^{\cdot}$. Donc $(\bar{h}', r)$ est un $(\mathfrak{S}'(p), K'^{\cdot})$-projecteur si, et seulement si, $w_s(\bar{h}', r)$ est un $(\mathfrak{S}'(p), K^{\cdot})$-projecteur, ce qui achève la démonstration.

Construction d'un monoïde structuré projection

Soit N l'ensemble des entiers positifs. Si $h \in H$, nous posons

$$h^n = \prod_{i \leq n} h_i, \quad \text{où} \quad h_i = h \quad \text{pour tout} \quad 1 \leq i \leq n .$$

Définition 2. *Soit $s \in H_0^{\cdot}$ et $C = p(s)$. Nous dirons que S est une p-*somme *engendrée par s s'il existe une somme naturalisée $(S, (v^n)_{n\in N})$ de $(s^n)_{n\in N}$ dans $H^{\cdot}$ telle que $p(v^n) = (M(C), \iota, C^n)$.*

Théorème 4. *Si $s \in H_0^{\cdot}$ et si S est une p-somme engendrée par s, alors s admet $(M(C)^{\cdot}, S)$ pour $(\bar{\mathscr{N}}_m(p), \mathscr{N}_m(p), \mathscr{L}_m(p))$-projection, où $C = p(s)$.*

Démonstration. Soit $(S, (v^n)_{n\in N})$ la somme naturalisée dans $H^{\cdot}$ définissant S. Posons

$$e = (M(C)^{\cdot}, S) \quad \text{et} \quad \bar{j} = (M(C)^{\cdot}, v^1)$$

et montrons que $\bar{j}$ est un $(\bar{\mathscr{N}}_m(p), \mathscr{N}_m(p), \mathscr{L}_m(p))$-projecteur. On a $\bar{j} \in \mathscr{L}_m(p)$. Soit

$$\bar{h} = (G^{\cdot}, h) \in \bar{\mathscr{N}}_m(p)_0 . \mathscr{L}_m(p) . s \quad \text{et} \quad \hat{s} = \beta(h) .$$

Montrons que, pour tout $n \in N$, il existe $\bar{\kappa}_n \in \hat{s}.H.\hat{s}^n$ tel que $p(\bar{\kappa}_n)$ soit l'application

$$(f_n, \ldots, f_1) \to f_n \cdot \ldots \cdot f_1, \quad \text{où} \quad (f_n, \ldots, f_1) \in M(C).$$

En effet, il existe $\bar{\kappa}_2$ puisque $p(\bar{\kappa}_2)$ est la loi de composition de la classe multiplicative fortement p-structurée $(G^{\cdot}, \hat{s})$. Il existe $\bar{g} \in (\hat{s} \times \hat{s}^n).H_{\gamma}^{\cdot}.\hat{s}^{n+1}$ tel que $p(\bar{g})$ soit la bijection:

$$(f_{n+1}, f_n, \ldots, f_1) \to (f_{n+1}, (f_n, \ldots, f_1)),$$

car p est π-compatible; si $\bar{\kappa}_n$ est déterminé, on définit par récurrence $\bar{\kappa}_{n+1} = \bar{\kappa}_2.(\hat{s} \times \bar{\kappa}_n).\bar{g}$. La famille $(\bar{\kappa}_n.h^n)_{n \in N}$ admet une somme $h' \in \hat{s}.H.S$ dans p 1
et $p(h')$ est l'application $M(h)$. Par suite

$$\bar{h}' = (G^{\cdot}, h', M(C)^{\cdot}) \in \mathcal{N}_m(p).$$

On a $h'.v^1 = h$ et, comme p est fidèle, $\bar{h}'$ est l'unique élément de $\mathcal{N}_m(p)$ tel que $\bar{h}'.\bar{j} = \bar{h}$. Ceci prouve que $\bar{j}$ est un $(\bar{\mathcal{N}}_m(p), \mathcal{N}_m(p), \mathcal{L}_m(p))$-projecteur.

Corollaire 1. *Soit $s \in H_0^{\cdot}$ et $p(s) = C$. Si s engendre une p-somme S telle que $S \times S$ soit une somme de $(s^n \times s^{n'})_{n, n' \in N}$ dans $H^{\cdot}$, alors $(M(C)^{\cdot}, S)$ est une $(\bar{\mathcal{N}}_m(p), \mathcal{L}_m(p))$-projection de s.* 2

Démonstration. D'après le théorème 4, il suffit de montrer que $(M(C)^{\cdot}, S) \in \bar{\mathcal{N}}(p)$. Si n et n' sont deux entiers, désignons par $p_1'^{n'n}$ et $p_2'^{n'n}$ les projections canoniques de $s^{n'} \times s^n$ sur $s^{n'}$ et sur s^n respectivement, par p_i^n les projections canoniques de s^n sur s, où $1 \leqq i \leqq n$. Posons

$$q^{n'n} = v^{n'+n}.[p_1^{n'}.p_1'^{n'n}, \ldots, p_{n'}^{n'}.p_1'^{n'n}, p_1^n.p_2'^{n'n}, \ldots, p_n^n.p_2'^{n'n}].$$

On a $q^{n'n} \in S.H.s^{n'} \times s^n$ et il existe une somme $q = \sum_{\substack{n' \in N \\ n \in N}} q^{n'n} \in S.H.(S \times S)$ dans $H^{\cdot}$.

Comme $p(q)$ est la loi de composition du monoïde libre $M(C)^{\cdot}$, on a 3
$(M(C)^{\cdot}, S) \in \bar{\mathcal{N}}_m(p)_0$.

Corollaire 2. *Soient $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathcal{K}'(p)_0$ et r une relation sur C. Si s engendre une p-somme S, il existe une $(\mathfrak{S}'(p), \hat{p}_{\mathcal{K}'})$-structure quasi-quotient $\tilde{e}$ de e par r si, et seulement si, $\tilde{e}$ est une $(\mathfrak{S}'(p), \hat{p}_m)$-structure quasi-quotient de $(M(C)^{\cdot}, S)$ par $r_s(C^{\cdot}) \cup r$.*

En effet, ce corollaire résulte des théorèmes 3 et 4.

Le corollaire 2 du théorème 4 montre que, si p est un foncteur à sommes dénombrables, la détermination des monoïdes quasi-quotient d'un graphe 4
multiplicatif p-structuré se ramène à celle des monoïdes structurés quasi- 5
quotient d'un monoïde structuré libre. 6+

7. Quasi-catégories structurées

Quasi-catégories

Définition 1. *On appelle* quasi-catégorie *un élément $D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ vérifiant les conditions:*

1. *$C^{\cdot}$ est une classe multiplicative et (C, β, α) un graphe orienté, noté $[D]$.*
2. *Si $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$, on a $\beta(g.f) = \beta(g)$ et $\alpha(g.f) = \alpha(f)$.*
3. *$C^{\cdot} * C^{\cdot}$ est la classe produit fibré $\alpha \vee \beta$. Si $(h, g) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$, alors $h.(g.f) = (h.g).f$.*

1 Soit $D=(C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ une quasi-catégorie. $C^{\cdot}$ est une catégorie admettant $[D]$ pour graphe sous-jacent si, et seulement si, le graphe multiplicatif $[D]^{\cdot}$ associé à $[D]$ est une sous-classe multiplicative de $C^{\cdot}$; dans ce cas, $C^{\cdot}$ est identifié à D.

Soit $\mathscr{M}$ une catégorie pleine d'applications telle que $\mathscr{M}_0$ soit un univers. Soit $\mathscr{F}'$ la catégorie des *quasi-foncteurs* associée à $\mathscr{M}$, dont les éléments sont les $h=((C^{\cdot}, \beta, \alpha), \underline{h}, (\hat{C}^{\cdot}, \hat{\beta}, \hat{\alpha}))$ tels que

$$(C^{\cdot}, \underline{h}, \hat{C}^{\cdot}) \in \mathscr{N} \quad \text{et} \quad ((C, \beta, \alpha), h, (\hat{C}, \hat{\beta}, \hat{\alpha})) \in \mathscr{G}.$$

On identifie $\mathscr{F}'_0$ à la classe des quasi-catégories $(C^{\cdot}, \beta, \alpha)$, où $C \in \mathscr{M}_0$, et $\mathscr{F}$ à une sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}'$. Soit $p_{\mathscr{F}'}$ le foncteur de $\mathscr{F}'$ vers $\mathscr{M}$ tel que

$$p_{\mathscr{F}'}(h)=(C, \underline{h}, \hat{C}).$$

Proposition 1. *Soit $D=(C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \mathscr{F}'_0$; les $p_{\mathscr{F}'}$-sous-structures de D sont les $(\hat{C}, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ tels que $\hat{C}^{\cdot}$ soit une sous-classe multiplicative stable de $C^{\cdot}$ et $(\hat{C}, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ un sous-graphe de (C, β, α). Le foncteur $p_{\mathscr{F}'}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé, π-compatible, résolvant à droite et faiblement $\ulcorner$-étalant.*

Démonstration. $p_{\mathscr{F}'}$ est évidemment un foncteur d'homomorphismes saturé, l'image de D par la bijection $g \in \mathscr{M}_{\gamma}.C$ étant $(C_1^{\cdot}, \beta_1, \alpha_1)$, où $C_1^{\cdot}$ est la classe multiplicative image de $C^{\cdot}$ par g et (C_1, β_1, α_1) le graphe image de (C, β, α) par g. Il est π-compatible, car le produit dans $\mathscr{F}'$ de $(C_i^{\cdot}, \beta_i, \alpha_i)_{i \in I}$, où $I \in \mathscr{M}_0$, est

$$\left(\prod_{i \in I} C_i^{\cdot}, \ \prod_{i \in I} \beta_i, \ \prod_{i \in I} \alpha_i\right).$$

La démonstration de la première affirmation est analogue à celle du théorème 6 chap. III, et montre qu'un quasi-foncteur h tel que $p_{\mathscr{F}'}(h) \in \mathscr{M}^{\iota}$ est une $p_{\mathscr{F}'}$-injection. Il en résulte que $p_{\mathscr{F}'}$ est résolvant à droite et faiblement $\ulcorner$-étalant.

Une $p_{\mathscr{F}'}$-sous-structure de $D \in \mathscr{F}'_0$ sera appelée une *sous-quasi-catégorie* de D.

Soit Σ la classe des triplets $(D, \underline{h}, [C])$ tels que

$$D=(C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \mathscr{F}'_0 \quad \text{et} \quad ([D], \underline{h}, [G]) \in \mathscr{G}_0.$$

Soit $\mathscr{L}'$ la catégorie ayant $\mathscr{F}' \cup \Sigma \cup \mathscr{G}$ pour classe sous-jacente, $\mathscr{F}'$ et $\mathscr{G}$ pour sous-catégories pleines et telle que l'application somme de $\underline{p}_{\mathscr{F}'}$, de $\underline{p}_{\mathscr{G}}$ et de

$$\underline{p}_{\Sigma}: ((C^{\cdot}, \beta, \alpha), \underline{h}, [G]) \to (C, \underline{h}, G)$$

définisse un foncteur fidèle de $\mathscr{L}'$ vers $\mathscr{M}$.

Si $[C]$ est un graphe orienté, nous désignons par $\hat{L}[C]$ la classe des chemins (non nécessairement propres) de $[C]$, c'est-à-dire des suites:

$$(f_n, \ldots, f_1) \in C^n \quad \text{telles que} \quad \alpha(f_{i+1})=\beta(f_i) \quad \text{pour tout} \quad 1 \leqq i < n.$$

On identifie C à une sous-classe de $\hat{L}[C]$.

2 **Proposition 2.** *Si $[C] \in \mathscr{G}_0$, alors $[C]$ admet pour $(\mathscr{F}', \mathscr{L}')$-projection la quasi-catégorie $(\hat{L}[C]^{\cdot}, \beta', \alpha')$, où $\hat{L}[C]^{\cdot}$ est une sous-classe multiplicative de $M(C)^{\cdot}$ et où α' et β' sont les surjections de $\hat{L}[C]$ sur $[C]_0$ telles que*

$$\alpha'(x)=\alpha(f_1) \quad \text{et} \quad \beta'(x)=\beta(f_n) \quad \text{si} \quad x=(f_n, \ldots, f_1) \in \hat{L}[C].$$

Démonstration. Soient

$$x=(f_n, \ldots, f_1) \in \hat{L}[C] \quad \text{et} \quad x'=(f'_m, \ldots, f'_1) \in \hat{L}[C].$$

Comme $x'.x$ est défini dans $\hat{L}[C]^{\cdot}$ si, et seulement si, $\alpha'(x') = \beta'(x)$ et que

$$x'.x = (f'_m, \dots, f'_1, f_n, \dots, f_1),$$

on trouve $\hat{L}[C]^{\cdot} * \hat{L}[C]^{\cdot} = \alpha' \vee \beta'$. Il s'ensuit que $(\hat{L}[C]^{\cdot}, \beta', \alpha')$ est une quasi-catégorie, notée $\hat{L}([C])$, et on a

$$j = (\hat{L}([C]), \iota, [C]) \in \mathscr{L}'.$$

Soit $h \in \mathscr{F}'_0 . \mathscr{L}' . [C]$; l'application

$$(f_n, \dots, f_1) \to h(f_n). \dots . h(f_1)$$

restriction de $M(\underline{h})$ à $\hat{L}[C]$ définit un quasi-foncteur $\hat{L}(h)$ de $\hat{L}([C])$ vers $\beta(h)$, c'est-à-dire on a $h = \hat{L}(h).j$. Les relations $h' \in \mathscr{F}'$ et $h = h'.j$ entraînent $h' = \hat{L}(h)$, puisque $\hat{L}([C])$ est engendrée par C. Donc j est un $(\mathscr{F}', \mathscr{L}')$-projecteur.

Définition 2. *Une quasi-catégorie qui est une $(\mathscr{F}', \mathscr{L}')$-projection d'un graphe $[C]$ est appelée* quasi-catégorie libre; *$\hat{L}([C])$ est dite* quasi-catégorie libre *associée à $[C]$.*

Une quasi-catégorie $D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha)$ est un quotient de $\hat{L}([D])$. S'il existe une partie B de C engendrant D et telle que $B \cap \kappa(\hat{C}^{\cdot} * \hat{C}^{\cdot}) = \emptyset$, où $\hat{C} = C - [D]_0$, B est dit *système de générateurs* de D.

Théorème 1. *Soit $D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \mathscr{F}'_0$ et soit $r(D)$ la relation (C, U, C) où U est la classe des couples $(f.\alpha(f), f)$ et $(\beta(f).f, f)$, où $f \in C$. Alors D admet $C^{\cdot}/\bar{r}$ pour $(\mathscr{F}, \mathscr{F}')$-projection, $\bar{r}$ étant la relation d'équivalence compatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par $r(D)$.*

Démonstration. Soit $i = (D, \iota, [D]) \in \mathscr{L}'$. D'après la proposition 2, il existe un quasi-foncteur $\hat{L}(i)$ de $\hat{L}([D])$ vers D, se réduisant à l'identité sur $C^{\cdot}$. Si

$$x = (f_n, \dots, f_1) \in \hat{L}[D],$$

nous désignons par $\tilde{x}$ le chemin propre de $[D]$ obtenu en supprimant de la suite x tous les $f_i \in [D]_0$ sauf un au plus. Alors $x \to \tilde{x}$ définit un $p_{\mathscr{N}}$-épimorphisme de $\hat{L}[D]^{\cdot}$ sur $L[D]^{\cdot}$. Il en résulte que la relation d'équivalence $\bar{r}$ compatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par $r(D)$ est définie par:

$g \sim g'$ si, et seulement si, il existe $x \in \hat{L}[D]$ et $x' \in \hat{L}[D]$ tels que

$$\tilde{x} = \tilde{x}', \quad g = \hat{L}(i)(x) \quad \text{et} \quad g' = \hat{L}(i)(x').$$

De plus elle est compatible avec α et β. Soit h le $p_{\mathscr{N}}$-épimorphisme de $C^{\cdot}$ sur $C^{\cdot}/\bar{r}$ et soit α' et β' respectivement les applications

$$h(g) \to h(\alpha(g)) \quad \text{et} \quad h(g) \to h(\beta(g)), \quad \text{où} \quad g \in C.$$

La restriction de h à $[D]_0$ est injective; une démonstration analogue à celle de la proposition 11, chap. III, montre que $(C^{\cdot}/\bar{r}, \beta', \alpha')$ est une quasi-catégorie et que h est un $p_{\mathscr{F}'}$-épimorphisme. Comme

$$g.\alpha(g) \sim g \quad \text{et} \quad \beta(g).g \sim g \quad \text{pour tout} \quad g \in C,$$

on voit que $C^{\cdot}/\bar{r}$ est une catégorie. — Soit $k = (S^{\cdot}, \underline{k}, D) \in \mathscr{F}_0 . \mathscr{F}'$. On a

$$k(f.\alpha(f)) = k(f).k(\alpha(f)) = k(f) \quad \text{et} \quad k(\beta(f).f) = k(f)$$

pour tout $f \in C$; par suite $\underline{k} = \underline{k}'\ \underline{h}$ et, h étant un $p_{\mathscr{F}'}$-épimorphisme, on obtient

$$(S^{\cdot}, \underline{k}', C^{\cdot}/\bar{r}) \in \mathscr{F}.$$

Ceci prouve que $C^{\cdot}/\bar{r}$ est une $(\mathscr{F}, \mathscr{F}')$-projection de D.

Exemple. Si $[C] \in \mathscr{G}_0$, la catégorie $\hat{L}([C])/r(\hat{L}([C]))$ s'identifie à la catégorie $L[C]^{\cdot}$ des chemins propres de $[C]$.

Soit $\hat{\mathscr{F}}'$ la catégorie des quasi-foncteurs relative à une catégorie pleine d'applications $\hat{\mathscr{M}}$ telle que $\mathscr{M} \subset \hat{\mathscr{M}}$ et soit $\bar{\mathscr{M}}$ la saturante de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}$. Soit $P_{\mathscr{F}'}$ le foncteur projection canonique de $\hat{\mathscr{F}}'$ vers $\hat{\mathscr{M}}$.

Proposition 3. *$P_{\mathscr{F}'}$ est dénombrablement engendrant pour $\mathscr{M}$.*

Démonstration. Soit $D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \hat{\mathscr{F}}'$ et soit $M \in \bar{\mathscr{M}}$ tel que $\emptyset \neq M \subset C$. On a

$$M' = M \cup \alpha(M) \cup \beta(M) \in \bar{\mathscr{M}}$$

et M' définit un sous-graphe $[M']$ de $[D]$. Soit $\hat{M}'$ la classe image de $\hat{L}[M'] \in \bar{\mathscr{M}}$ par l'application

$$(f_n, \ldots, f_1) \to f_n \cdot \ldots \cdot f_1, \quad \text{où} \quad (f_n, \ldots, f_1) \in \hat{L}[M'] .$$

Alors $\hat{M}' \in \bar{\mathscr{M}}$ et $\hat{M}'^{\cdot}$ est la sous-classe multiplicative stable de $C^{\cdot}$ engendrée par M'. D'après la proposition 1, $\hat{M}'$ définit une sous-quasi-catégorie D' de D. On en déduit que D' est la $P_{\mathscr{F}'}$-sous-structure de D engendrée par M, de sorte que $P_{\mathscr{F}'}$ est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathscr{M}$. Une démonstration analogue à celle de la proposition 1–5 montre que $P_{\mathscr{F}'}$ est dénombrablement engendrant pour $\mathscr{M}$.

Quasi-catégories p-structurées

Soit $p = (\mathscr{M}, p, H^{\cdot})$ un foncteur d'homomorphismes résolvant à droite et π-compatible, où $\mathscr{M}$ est une catégorie pleine d'applications et $\mathscr{M}_0$ un univers. Nous reprenons les conventions du n° 3.

Définition 3. *On appelle* quasi-catégorie p-structurée *un couple* (D, s) *tel que*

$$D = (C^{\cdot}, \beta, \alpha) \in \mathscr{F}_0', \quad ([D]^{\cdot}, s) \in \mathscr{G}'(p) \quad et \quad (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{N}(p) .$$

Si $((C^{\cdot}, \beta, \alpha), s)$ est une quasi-catégorie p-structurée, il existe $\bar{\alpha} \in s.H.s$ et $\bar{\beta} \in s.H.s$ tels que $p(\bar{\alpha}) = (C, \alpha, C)$ et $p(\bar{\beta}) = (C, \beta, C)$. Comme $s * s$ est une p-sous-structure de $s \times s$ telle que $p(s * s) = C^{\cdot} * C^{\cdot} = \alpha \vee \beta$, on a (théorème 6,
1+ chap IV) $s * s = \bar{\alpha} \vee \bar{\beta}$.

Soit $\mathscr{F}'(p)$ la catégorie des *quasi-foncteurs p-structurés*, dont les éléments sont les triplets (D_2, h, D_1), où $D_i = (C_i^{\cdot}, \beta_i, \alpha_i) \in \mathscr{F}_0'$ pour $i = 1, 2$,

$$([D_2]^{\cdot}, h, [D_1]^{\cdot}) \in \mathscr{G}'(p) \quad \text{et} \quad (C_2^{\cdot}, h, C_1^{\cdot}) \in \mathscr{N}(p) .$$

Soit $\hat{p}_{\mathscr{F}'}$ le foncteur de $\mathscr{F}'(p)$ vers $\mathscr{M}$ tel que $(D_2, h, D_1) \to p(h)$.

Proposition 4. *Soit $([C]^{\cdot}, s) \in \mathscr{G}'(p)_0$ et soit n un entier > 0. Il existe une p-sous-structure s^{*n} de s^n telle que $p(s^{*n})$ soit la classe $[C]^{*n}$ des chemins de $[C]$ ayant n termes. Si $(D, s) \in \mathscr{F}'(p)_0$ et si $[C] = [D]$, il existe $\bar{\kappa}_n \in s.H.s^{*n}$ tel que $p(\bar{\kappa}_n)$ soit l'application κ_n: $(f_n, \ldots, f_1) \to f_n \cdot \ldots \cdot f_1$, où $(f_n, \ldots, f_1) \in \hat{L}[C]$.*

Démonstration. Soit p_i^n la i-ième projection canonique du produit s^n sur s. Désignons par $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ les éléments de $s.H.s$ tels que

$$p(\bar{\alpha}) = (C, \alpha, C) \quad \text{et} \quad p(\bar{\beta}) = (C, \beta, C) .$$

Soit $n > 1$,

$$u_1^n = \bar{\beta}^{n-1}.[p_2^n, \ldots, p_n^n] \in H \quad \text{et} \quad u_2^n = \bar{\alpha}^{n-1}.[p_1^n, \ldots, p_{n-1}^n] \in H.$$

Si $x = (f_n, \ldots, f_1) \in \hat{L}[C]$, on a

$$u_1^n(x) = (\beta(f_{n-1}), \ldots, \beta(f_1)) \quad \text{et} \quad u_2^n(x) = (\alpha(f_n), \ldots, \alpha(f_2)).$$

Comme p est résolvant à droite, le couple (u_1^n, u_2^n) admet un p-noyau s^{*n} et $p(s^{*n}) = [C]^{*n}$.– Supposons $(D, s) \in \mathscr{F}'(p)_0$, $D = ((C^{\cdot}, \beta, \alpha), s)$ et $[D] = [C]$. Si $n = 2$, on a $[C]^{*2} = C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $p(s^{*2}) = s * s$; il existe donc $\bar{\kappa}_2 \in s.H.s{*}s$ tel que $p(\bar{\kappa}_2)$ soit la loi de composition de $C^{\cdot}$, puisque $(C^{\cdot}, s)$ est une classe multiplicative fortement p-structurée. Supposons démontré qu'il existe un $\bar{\kappa}_n$ vérifiant les conditions de l'énoncé et montrons qu'il existe aussi $\bar{\kappa}_{n+1}$. En effet, on a

$$\bar{g} = [p_1^{n+1}, [p_2^{n+1}, \ldots, p_{n+1}^{n+1}]] \in s \times s^n.H_{\gamma}^{\cdot}.s^{n+1}$$

et $p(\bar{g})$ est la bijection g:

$$(f_{n+1}, \ldots, f_1) \to (f_{n+1}, (f_n, \ldots, f_1)).$$

Les relations

$$g([C]^{*n+1}) \subset C \times [C]^{*n}, \quad s^{*n+1} \ulcorner_{p}\, s^{n+1} \quad \text{et} \quad s \times s^{*n} \ulcorner_{p}\, s \times s^n$$

entraînent qu'il existe

$$\bar{g}' \in s \times s^{*n}.H.s^{*n+1} \quad \text{tel que} \quad \bar{g}' \ulcorner_{p}\, \bar{g},$$

d'où $\bar{h} = (s \times \bar{\kappa}_n).\bar{g}' \in H$. Puisque $p(\bar{h})$ est l'application h:

$$(f_{n+1}, f_n, \ldots, f_1) \to (f_{n+1}, f_n \cdot \ldots \cdot f_1),$$

on a $h([C]^{*n+1}) \subset C^{\cdot} * C^{\cdot}$, et $s * s$ étant une p-sous-structure de $s \times s$, il existe

$$\bar{h}' \in s * s.H.s^{*n+1} \quad \text{tel que} \quad \bar{h}' \ulcorner_{p}\, \bar{h}.$$

Il en résulte que $\bar{\kappa}_2.\bar{h}'$ est un élément $\bar{\kappa}_{n+1} \in s.H.s^{*n+1}$ répondant à la question.

Soit $\mathscr{K}''(p)$ la catégorie dont les éléments sont les $\bar{h} = (\hat{D}, h, D)$ tels que

$$h \in H, \quad (\hat{D}, \underline{h}, D) \in \mathscr{F}' \quad \text{et} \quad ([\hat{D}]^{\cdot}, h, [D]^{\cdot}) \in \mathscr{G}'(p),$$

l'application $\hat{p}_{\mathscr{K}''}: \bar{h} \to p(h)$ définissant un foncteur fidèle de $\mathscr{K}''(p)$ vers $\mathscr{M}$. La catégorie $\mathscr{K}''(p)$ admet $\mathscr{F}'(p)$ pour sous-catégorie pleine. Posons $\mathscr{U}'(p) = \mathscr{K}''(p)$ ou $\mathscr{F}'(p)$.

Proposition 5. *$\hat{p}_{\mathscr{U}'}$ est un foncteur d'homomorphismes (resp. d'homomorphismes saturé si p est un foncteur d'homomorphismes saturé), π-compatible et résolvant à droite. Si $\bar{j} = (D', j, D) \in \mathscr{U}'(p)$ et si $j \in p_i^{\ulcorner}$, on a $\bar{j} \in (\hat{p}_{\mathscr{U}'})_i^{\ulcorner}$. Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{U}'(p)_0$; alors $\hat{e}$ est une $(\mathscr{F}(p), \mathscr{U}'(p))$-projection de e si, et seulement si, $\hat{e}$ est une $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}'})$-structure quasi-quotient de e par $r(D)$.*

Démonstration. Les résultats obtenus dans [3] sur les catégories structurées s'étendent immédiatement aux quasi-catégories p-structurées, car les démonstrations utilisent seulement l'existence de $\bar{\alpha}$ et de $\bar{\beta}$, et non le fait que les éléments de $C_0^{\cdot}$ sont des unités de $C^{\cdot}$. En particulier si (D, s) est une quasi-catégorie p-structurée et si $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$ est une sous-quasi-catégorie de D et $\hat{s}$ une p-sous-structure de s telles que $p(\hat{s}) = \hat{C}$, alors $((\hat{C}^{\cdot}, \hat{\beta}, \hat{\alpha}), \hat{s})$ est une sous-quasi-

catégorie p-structurée de (D, s) (i.e. une $\hat{p}_{\mathscr{F}'}$-sous-structure de D). Par suite des raisonnements analogues à ceux faits pour prouver les propositions 1–3 et 3–3 peuvent être faits. — Si $e=(D, s)$, soit $\hat{r}$ la relation d'équivalence engendrée
1 par $r(D)$. D'après le théorème 2, on a

$$\bar{h} \in \mathscr{F}(p)_0 . \mathscr{U}'(p) . e \quad \text{si, et seulement si,} \quad (\bar{h}, \hat{r}) \in \mathscr{F}(p)_0 . (\hat{p}_{\mathscr{U}'})^{\mathrm{r}} . (e, \hat{r}) .$$

La proposition en résulte.

Supposons que p soit le foncteur restriction à $H^{\cdot} = \overset{-1}{\underline{P}}(\mathscr{M})$ de $P = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\cdot})$ (n° 3).

Théorème 2. *Soit $\mathscr{V}(p) \subset \mathscr{F}(p)$. Si P est $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-résolvant (resp. si P est un foncteur d'homomorphismes saturé $\ulcorner$-étalant, resp. dénombrablement engendrant pour $\mathscr{M}$), si $e \in \mathscr{U}'(p)_0$ et si r est une relation sur $\hat{p}_{\mathscr{U}'}(e)$, il existe une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{U}'})$-structure quasi-quotient de e par r; $\mathscr{U}'(p)$ est une catégorie à $\mathscr{V}(p)$-projections.*

En effet, la démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1–3; si P est $\ulcorner$-étalant (resp. dénombrablement engendrant pour $\mathscr{M}$), il est $(\mathscr{M}, \mathscr{V})$-résolvant en vertu de la proposition 4–3 (resp. du théorème 1–5).

Soit $\mathscr{L}'(p)$ la classe réunion de $\mathscr{K}''(p)$, de $\mathscr{G}'(p)$ et $\Sigma'(p)$ où $\Sigma'(p)$ est la classe des triplets $\bar{h} = (D, h, C^{\cdot})$ tels que

2 $$(D, \beta(h)) \in \mathscr{K}''(p)_0, \quad (C^{\cdot}, \alpha(h)) \in \mathscr{G}'(p)_0 \quad \text{et} \quad ([D]^{\cdot}, h, C^{\cdot}) \in \mathscr{G}'(p) .$$

On munit $\mathscr{L}'(p)$ d'une structure de catégorie telle que $\mathscr{K}''(p)$ et $\mathscr{G}'(p)$ en soient des sous-catégories pleines et que l'application somme des applications $\hat{p}_{\mathscr{K}''}$, $\hat{p}_{\mathscr{G}'}$ et

$$\hat{p}_{\Sigma'} : \bar{h} \to p(h) \quad \text{si} \quad \bar{h} \in \Sigma'(p)$$

définisse un foncteur fidèle $\hat{p}_{\mathscr{L}'}$ de $\mathscr{L}'(p)$ vers $\mathscr{M}$.

Si $\bar{h} = (D, h, C^{\cdot}) \in \Sigma'(p)$, le quasi-foncteur $\hat{L}(D, \underline{h}, [C^{\cdot}])$ défini dans la pro-
3 position 1 est $(D, \hat{L}(\underline{h}), \hat{L}([C^{\cdot}]))$; on pose $\hat{L}(\bar{h}) = (p_{\mathscr{F}'}(D), \hat{L}(\underline{h}), \hat{L}[C^{\cdot}])$.

Soit $C^{\cdot} \in \mathscr{N}_0'$. Nous désignons par $\hat{r}(C^{\cdot})$ la relation $(\hat{L}[C^{\cdot}], \hat{A}, \hat{L}[C^{\cdot}])$, où $\hat{A}$ est la classe des couples

$$((g, f), g . f) \quad \text{tels que} \quad (g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot} .$$

Si $[G]$ est un symétrisé du graphe $[C^{\cdot}]$, soit $\hat{r}_{\mathrm{g}}(C^{\cdot})$ la relation $(\hat{L}[G], \hat{B}, \hat{L}[G])$, où $\hat{B}$ est formée des couples $(x, y) \in \hat{A}$ et des couples

$$((f, f^{-1}), \beta(f)) \quad \text{et} \quad ((f^{-1}, f), \alpha(f)), \quad \text{tels que} \quad f \in C .$$

Supposons de plus $e = ([C^{\cdot}]^{\cdot}, s) \in \mathscr{G}'(p)_0$; soit $\bar{e} = ([\bar{C}]^{\cdot}, \bar{s})$ un p-symétrisé de e défini à l'aide de l'isomorphisme $\bar{\gamma}$; soit $\bar{v}_1$ (resp. $\bar{v}_2$) l'injection canonique de e (resp. $\beta(\bar{\gamma})^*$) vers $\bar{e}$. Nous avons vu (avant th. 2–6) qu'il existe $v = ([\bar{C}], \underline{v}, [G])$ tel que $\underline{\bar{v}}_1$ et $\underline{\bar{v}}_2$ soient des restrictions de $\underline{v}$. Soit $\hat{L}(v)$ le quasi-foncteur de $\hat{L}([G])$ vers $\hat{L}([\bar{C}])$ qui est une $(\mathscr{F}', \mathscr{L}')$-projection de v. Nous désignons par $\hat{r}_{\mathrm{g}}^{\bar{e}}(C^{\cdot})$ la relation $\hat{L}(v)(\hat{r}_{\mathrm{g}}(C^{\cdot}))$.

Théorème 3. *Supposons $\mathscr{V}(p) = \mathscr{F}(p)$ (resp. $= \mathscr{F}_g(p)$). Soient $e' = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$, $e = ([C^{\cdot}]^{\cdot}, s)$, $\bar{e}$ un symétrisé de e et r une relation sur C. Soit $\bar{j}$ un*
4 *$(\mathscr{V}(p), \mathscr{K}''(p), \mathscr{L}'(p))$-projecteur de source e (resp. $\bar{e}$), de but $\hat{e}$. Pour qu'il existe une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient $\tilde{e}$ de e' par r, il faut et il suffit que $\hat{e}$*

admette $\tilde{e}$ pour $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}''})$-structure quasi-quotient par $\hat{L}(\bar{j})\,(\hat{r}(C^{\cdot}) \cup r)$ (resp. par $\hat{L}(\bar{j})\,(\hat{r}_{g}^{\bar{e}}(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}})$).

Démonstration. Soit $h = (S^{\cdot}, \underline{h}, \hat{L}([C^{\cdot}])) \in \mathscr{F}_0 . \mathscr{F}'$. Pour que $(S^{\cdot}, \underline{h}\iota, C^{\cdot})$ soit un néofoncteur et que l'on ait $h = \hat{L}(S^{\cdot}, \underline{h}\iota, [C^{\cdot}])$, il faut et il suffit que $\underline{h}$ soit compatible avec $\hat{r}(C^{\cdot})$ (la démonstration est analogue à celle faite au n° 4 dans le cas de $L[C^{\cdot}]$). Si $[G]$ est un symétrisé de $[C^{\cdot}]$ et si

$$h' = (S^{\cdot}, \underline{h}', \hat{L}([G])) \in (\mathscr{F}_g)_0 . \mathscr{F}',$$

on a $h'(f^{-1}) = (h'(f))^{-1}$ si $f \in C$,

$$(S^{\cdot}, \underline{h}'\iota, C^{\cdot}) \in \mathscr{F}' \quad \text{et} \quad h' = \hat{L}(S^{\cdot}, \underline{h}'\iota, [G])$$

si, et seulement si, $\underline{h}'$ est compatible avec $\hat{r}_g(C^{\cdot})$. Par suite le raisonnement utilisé pour prouver le théorème 1–6 (resp. 2–6) peut être utilisé pour démontrer le théorème 3.

Construction d'une quasi-catégorie p-structurée projection

Définition 4. *Soient $s_i \in H_0^{\cdot}$ pour tout $i \in I$ et $p(s_i) \cap p(s_{i'}) = \emptyset$ si $i \neq i'$, où $i, i' \in I$. On dit que $(s_i)_{i \in I}$ admet $\hat{s}$ pour p-*somme *s'il existe une somme naturalisée $(\hat{s}, (v^i)_{i \in I})$ dans $H^{\cdot}$ de $(s_i)_{i \in I}$ telle que $p(v^i) = \left(\bigcup_{i \in I} p(s_i), \iota, p(s_i)\right)$.*

Théorème 4. *Soit $e = ([C]^{\cdot}, s) \in \mathscr{G}'(p)_0$ et soit s^{*n} la p-sous-structure de s^n telle que $p(s^{*n}) = [C]^{*n}$ (prop. 4). Si $(s^{*n})_{n \in N}$ admet une p-somme $\hat{s}$, alors e admet $\hat{L}(e) = (\hat{L}([C]), \hat{s})$ pour $(\mathscr{F}'(p), \mathscr{K}''(p), \mathscr{L}'(p))$-projection.*

Démonstration. Soit $(\hat{s}, (v^n)_{n \in N})$ la somme naturalisée dans $H^{\cdot}$ telle que $p(v^n) \in \mathscr{M}^{\iota}$. On a $p(\hat{s}) = \hat{L}[C]$. Reprenons les notations de la proposition 4. Les familles

$$(v^1 . \bar{\alpha} . p_n^n . s^n \leftarrow_{p} s^{*n})_{n \in N} \quad \text{et} \quad (v^1 . \bar{\beta} . p_1^n . s^n \leftarrow_{p} s^{*n})_{n \in N}$$

admettent respectivement des sommes $\bar{\alpha}' \in \hat{s} . H . \hat{s}$ et $\bar{\beta}' \in \hat{s} . H . \hat{s}$ dans $H^{\cdot}$ telles que

$$p(\bar{\alpha}') = (\hat{L}[C], \alpha', \hat{L}[C]) \quad \text{et} \quad p(\bar{\beta}') = (\hat{L}[C], \beta', \hat{L}[C]),$$

où $\hat{L}([C]) = (\hat{L}[C]^{\cdot}, \beta', \alpha')$ (prop. 2). Par suite

$$((\hat{L}[C], \beta', \alpha'), \hat{s}) \in \mathscr{G}'(p)_0 \quad \text{et} \quad \hat{L}(e) = (\hat{L}([C]), \hat{s}) \in \mathscr{K}''(p)_0 .$$

De plus

$$\bar{j}' = (\hat{L}([C]), v^1, [C]^{\cdot}) \in \mathscr{K}''(p)_0 . \mathscr{L}'(p) . e .$$

— Montrons que $\bar{j}'$ est un $(\mathscr{F}'(p), \mathscr{K}''(p), \mathscr{L}'(p))$-projecteur. En effet, soit

$$\bar{h} = (D, h, [C]^{\cdot}) \in \mathscr{F}'(p)_0 . \mathscr{L}'(p) . e, \quad D = (\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha}) \quad \text{et} \quad \tilde{s} = \beta(h).$$

D'après la proposition 2, $\underline{h}$ se prolonge en une surjection $\hat{L}(\underline{h})$ définissant un quasi-foncteur de $\hat{L}([C])$ vers D. Si $x = (f_n, \ldots, f_1) \in \hat{L}[C]$, on a

$$x \in p(s^{*n}) \quad \text{et} \quad h^n(x) \in [D]^{*n},$$

de sorte que le composé $h(f_n). \ldots .h(f_1)$ est défini dans $\tilde{C}^{\cdot}$. Posons $h^{*1} = h$. Pour tout entier $n > 1$, soit $\tilde{\kappa}_n \in \tilde{s} . H . \tilde{s}^{*n}$ l'élément relatif à $(D, \tilde{s})$ construit dans la proposition 4. Les relations

$$s^{*n} \sqsubset_p s^n, \quad h^n \in \tilde{s}^n . H . s^n, \quad \tilde{s}^{*n} \sqsubset_p \tilde{s}^n \quad \text{et} \quad h^n(p(s^{*n})) \subset p(\tilde{s}^{*n})$$

entraînent qu'il existe

$$h^{*n} \sqsubset_p h^n \quad \text{tel que} \quad h^{*n} \in \tilde{s}^{*n}.H.s^{*n}.$$

1 La famille $(\tilde{\kappa}_n . h^{*n})_{n \in N}$ admet une somme $h' \in \tilde{s}.H.\hat{s}$ dans p et on a $\underline{h}' = \hat{L}(\underline{h})$. Il s'ensuit

$$h'.v^1 = h, \quad \bar{h}' = (D, h', \hat{L}([C])) \in \mathscr{K}''(p) \quad \text{et} \quad \bar{h}'.\bar{j}' = \bar{h}. \text{ —}$$

Par ailleurs, si

$$\bar{h}'' = (D, h'', \hat{L}([C])) \in \mathscr{F}'(p) \quad \text{et si} \quad \bar{h}''.\bar{j}' = \bar{h},$$

on a $p(h'') = p(h') = \hat{L}(\bar{h})$ d'après le théorème 1, et par conséquent $\bar{h}'' = \bar{h}'$, car $\hat{p}_{\mathscr{F}'}$ est fidèle. Ceci montre que $\bar{j}'$ est un $(\mathscr{F}'(p), \mathscr{K}''(p), \mathscr{L}'(p))$-projecteur.

2¶ **Corollaire 1.** *Soit p un foncteur à sommes dénombrables. Soient $e' = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$, $e = ([C^{\cdot}]^{\cdot}, s)$ et $\bar{e}$ un p-symétrisé de e. Si r est une relation sur C, pour qu'il existe une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient $\tilde{e}$ de e' par r, il faut et il suffit, si on a $\mathscr{V}(p) = \mathscr{F}(p)$ (resp. $= \mathscr{F}_g(p)$), que $\hat{L}(e)$ admette $\tilde{e}$ pour $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}''})$-structure quasi-quotient par $\hat{r}(C^{\cdot}) \cup r$ (resp. par $\hat{r}_g^{\bar{e}}(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}}$).*

En effet, ce corollaire résulte des théorèmes 3 et 4.

Corollaire 2. *Supposons p à sommes dénombrables. Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$ et soit r une relation d'équivalence bicompatible sur $C^{\cdot}$ telle qu'il existe une p-structure quotient $\hat{s}$ de s par r. Pour qu'il existe une $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient $\tilde{e}$ de e par r, il faut et il suffit que $\tilde{e}$ soit la $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}''})$-structure quasi-quotient de $\hat{L}([C^{\cdot}/r]^{\cdot}, \hat{s})$ par $\hat{r}(C^{\cdot}/r)$.*

En effet, il existe un graphe multiplicatif $C^{\cdot}/r$ quotient de $C^{\cdot}$ par r (théo. 6, chap. III) et $([C^{\cdot}/r], \hat{s})$ est un graphe p-structuré quotient de $([C^{\cdot}], s)$, d'après la proposition 15, [2]. Par suite $\hat{e} = (C^{\cdot}/r, \hat{s})$ est une $\hat{p}_{\mathscr{K}'}$-structure quotient de e par r. Le corollaire 2 résulte donc du corollaire 1 et de la prop. 5–1.

Cas particulier. Soit p un foncteur à sommes dénombrables. Si P est $(\mathscr{M}, \mathscr{F})$-résolvant et si $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$, alors e admet pour $(\mathscr{F}(p), \mathscr{K}'(p))$-projection la $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}''})$-structure quasi-quotient de $\hat{L}([C^{\cdot}]^{\cdot}, s)$ par $\hat{r}(C^{\cdot})$. Si $e \in \mathscr{F}(p)_0$, comme e est une $(\mathscr{F}(p), \mathscr{K}'(p))$-projection de e, c'est une $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}''})$-structure quasi-quotient par $\hat{r}(C^{\cdot})$ de la quasi-catégorie structurée libre $\hat{L}([C^{\cdot}]^{\cdot}, s)$.

Le corollaire 1 du théorème 4 montre que, si p est à sommes dénombrables, la détermination des $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structures quasi-quotient d'un graphe multiplicatif p-structuré se ramène à celle des $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}''})$-structures quasi-quotient d'une quasi-catégorie structurée libre, si $\mathscr{V} = \mathscr{F}$ (resp. si $\mathscr{V} = \mathscr{F}_g$ et si tout graphe p-structuré admet un p-symétrisé).

Définition 5. *On dira que p est* un foncteur à sommes dénombrables régulières *si p est un foncteur à sommes dénombrables et s'il vérifie les conditions, où $s_n \in H_0^{\cdot}$:*

1. *Si $s_n \sqsubset_p s'_n$ pour tout $n \in N$, on a $\sum_{n \in N} s_n \sqsubset_p \sum_{n \in N} s'_n$.*
2. *L'élément $\left(\sum_{n \in N} s_n\right) \times \left(\sum_{n \in N} s_n\right)$ est isomorphe dans $H^{\cdot}$ à $\sum_{n', n \in N} (s_n \times s_{n'})$.*

Proposition 6. *Soit $e = ([C]^{\cdot}, s) \in \mathscr{G}'(p)_0$. Si p est un foncteur à sommes dé-*
3 *nombrables régulières, $\hat{L}(e)$* (th. 4) *est une quasi-catégorie p-structurée.*

Démonstration. Il existe une p-somme S engendrée par s et une p-somme $\hat{s}$ de $(s^{*n})_{n\in N}$. Comme $s^{*n} \sqsubset_p s^n$ pour tout $n \in N$, on a $\hat{s} \sqsubset_p S$. De plus $S \times S$ est isomorphe dans $H^\cdot$ à $\sum_{n,n'\in N} s^n \times s^{n'}$ et $\hat{s} \times \hat{s}$ est isomorphe dans $H^\cdot$ à $\sum_{n,n'\in N} s^{*n} \times s^{*n'}$. Puisque

$$s^{*n} \times s^{*n'} \sqsubset_p s^n \times s^{n'}, \quad \text{pour tout} \quad n', n \in N,$$

on en déduit $\hat{s} \times \hat{s} \sqsubset_p S \times S$. Les conditions du corollaire du théorème 4–6 sont 1
vérifiées; aussi existe-t-il $q \in S.H.S \times S$ tel que $p(q)$ soit la loi de composition de $M(C)^\cdot$. D'après le théorème 4, on a $\hat{L}(e) = (\hat{L}([C]), \hat{s}) \in \mathscr{K}''(p)$. Etant donné que p est résolvant à droite, il existe $\hat{s} * \hat{s} \sqsubset_p \hat{s} \times \hat{s}$ tel que $p(\hat{s} * \hat{s}) = \hat{L}[C]^\cdot * \hat{L}[C]^\cdot$. Les relations

$$q(p(\hat{s} * \hat{s})) \subset p(\hat{s}), \quad \hat{s} \sqsubset_p S \quad \text{et} \quad \hat{s} * \hat{s} \sqsubset_p S \times S$$

entraînent qu'il existe

$$\overline{\kappa}' \in \hat{s}.H.\hat{s} * \hat{s} \quad \text{tel que} \quad \overline{\kappa}' \sqsubset_p q.$$

Par conséquent $p(\overline{\kappa}')$ est la loi de composition de $\hat{L}[C]^\cdot$. Ceci montre que $\hat{L}(e) \in \mathscr{F}'(p)_0$.

8. Applications

Nous reprenons les notations des n° 3–6–7.

Généralisation des résultats précédents

Soient $H'^\cdot$ et $H''^\cdot$ deux sous-catégories de $H^\cdot$ contenant $H^\cdot_\gamma$, stables par produits et vérifiant la condition (σ) relativement à $(\mathscr{M}^\cdot, p)$ (déf. 4, chap. III). Nous désignons par $\mathscr{U}_1(p)$ (resp. $\mathscr{U}_2(p)$) la sous-catégorie pleine de $\mathscr{U}(p)$ ayant pour unités:

les couples $(G^\cdot, s)$ tels que $([G^\cdot], s)$ soit un graphe (p, H')- (resp. $(p, (H', H'))$-) structuré si $\mathscr{U}(p) = \mathscr{K}'(p)$ ou $\mathscr{G}'(p)$,

les $e \in \mathscr{U}(p)_0$ tels que e soit de plus un graphe multiplicatif $p(H', H'')$- (resp. $p((H', H'), H'')$-) structuré, si $\mathscr{F}(p) \supset \mathscr{U}(p)$ ou si $\mathscr{U}(p) = \mathscr{N}'(p)$, $\overline{\mathscr{N}}'(p)$. 2

$\mathscr{V}_1(p)$ et $\mathscr{V}_2(p)$ sont obtenues de même à partir de $\mathscr{V}(p)$. Soient $\hat{p}_{\mathscr{U}_1}$ et $\hat{p}_{\mathscr{U}_2}$ les foncteurs restrictions de $\hat{p}_{\mathscr{U}}$ à $\mathscr{U}_1(p)$ et à $\mathscr{U}_2(p)$ respectivement.

Définition 1. *On appelle* quasi-catégorie $p(H', H'')$- *(resp.* $p((H', H'), H'')$-*)* structurée *une quasi-catégorie p-structurée* (D, s) *telle que* $([D], s)$ *soit un graphe* (p, H')- *(resp.* $(p, (H', H'))$-*) structuré et que l'on ait* $\overline{\kappa} \in H''$ *où* $\overline{\kappa}$ *est l'élément de* $s.H.s * s$ *tel que* $p(\overline{\kappa})$ *soit la loi de composition de* D.

Soit $\mathscr{F}_1'(p)$ (resp. $\mathscr{F}_2'(p)$) la sous-catégorie pleine de $\mathscr{F}'(p)$ ayant pour unités les quasi-catégories $p(H', H'')$- (resp. $(p((H', H'), H'')$-) structurées. Soit

$$\mathscr{W}_i(p) = \mathscr{W}(p) \quad \text{si} \quad \mathscr{W} = \mathscr{N}_m, \quad \overline{\mathscr{N}}_m, \quad \mathscr{L}_m, \quad \mathscr{K}'' \quad \text{ou} \quad \mathscr{L}',$$

$\mathscr{U}_i'(p) = \mathscr{F}_i'(p)$ ou $\mathscr{K}''(p)$. Le foncteur restriction du foncteur projection q de $\mathscr{W}$ ou $\mathscr{F}'$ vers $\mathscr{M}$ à $\mathscr{W}_i$ ou $\mathscr{F}_i'$ est désigné par q_i.

Supposons que p soit la restriction à $\overset{-1}{\underline{P}}(\mathscr{M})$ de $P = (\hat{\mathscr{M}}, \underline{P}, \hat{H}^\cdot)$. Soient $\hat{H}'^\cdot$ et $\hat{H}''^\cdot$ deux sous-catégories de $\hat{H}^\cdot$ stables par produits et vérifiant la condition (σ) relativement à $(\hat{\mathscr{M}}^\cdot, P)$; soit $H' = H \cap \hat{H}'$ et $H'' = H \cap \hat{H}''$.

Nous désignons par proposition x_i (resp. théorème x_i ou corollaire$_i$), où $i=1,2$, l'énoncé obtenu en remplaçant dans l'énoncé de la proposition x (resp. du théorème x ou du corollaire) chaque lettre de ronde $\mathscr{Y}$ par $\mathscr{Y}_i$. Nous faisons la même convention relativement aux définitions. Nous désignerons par énoncé x_i' l'énoncé obtenu en remplaçant dans l'énoncé x les lettres $\mathscr{V}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}_g$ seulement par $\mathscr{V}_i$, $\mathscr{F}_i$ et $\mathscr{F}_{ig}$, où $i=1,2$. Si un mot défini dans la définition y est utilisé dans l'énoncé x, il sera remplacé dans l'énoncé x_i ou x_i' par le mot correspondant défini dans la définition y_i.

Théorème 1. a) *Les propositions* 1_i–3, 2_i–3, 3_i–3, 4_i–3, 5_i–7, *les théorèmes* 1_i–3, 1_i–5, 1_i–6, 2_i–6, 3_i–6, 2_i–7, 3_i–7 *et leurs corollaires* $_i$ *sont vrais ainsi que*
1 *les théorèmes* $1_i'$–3, $1_i'$–5, $1_i'$–6, $2_i'$–6, $4_i'$–6, $2_i'$–7, $3_i'$–7 *et* $4_i'$–7, *si* $i=1,2$.

b) *Les propositions* 5_1–3, $5_1'$–3, *les théorèmes* 1_1–4, $1_1'$–4, 2_1–4 *et leurs corollaires* $_1$ *sont vrais* si $H''=H$ *et si* $H'^{\cdot}$ *est une sous-catégorie saturée de* $H^{\cdot}$.

2 *Démonstration.* a) Il résulte des proposition 1–3 (resp. 5) et théorèmes 9 et 16 [2] que $\hat{p}_{\mathscr{U}_i}$ (resp. $\hat{p}_{\mathscr{U}_i'}$) est un foncteur d'homomorphismes π-compatible. Par ailleurs, soit $e=(C^{\cdot}, s)\in \mathscr{K}_i'(p)_0$; si $\hat{C}^{\cdot}$ est un sous-graphe multiplicatif de $C^{\cdot}$ et si on a $\hat{s} \sqsubset_p s$ et $p(\hat{s})=\hat{C}$, alors $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ est une $\hat{p}_{\mathscr{K}_i}$-sous-structure de e, d'après
3 la proposition 15 [2]. Si de plus $e=(C^{\cdot}, s, s')\in \mathscr{N}_i'(p)_0$ et si $\hat{s}'$ est une p-sous-structure de s' telle que $p(\hat{s}')=\hat{C}^{\cdot} * \hat{C}^{\cdot}$, le triplet $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s}, \hat{s}')$ est une $\hat{p}_{\mathscr{N}_i}$-sous-structure de e. Il s'ensuit que la démonstration des énoncés x se transpose immédiatement au cas de l'énoncé x_i ou x_i'.

b) Supposons $H''=H$. Pour pouvoir adapter la démonstration de l'énoncé x pour prouver l'énoncé x_i, il suffit de savoir que, avec les notations de la démonstration de la proposition 5–3, $((C_0^{\cdot} \times C_0^{\cdot})^{\perp}, s_0 \times s_0)$ est un groupoïde $p(H', H)$-structuré: or ceci résulte de la proposition 30 [3], puisque $H_{\gamma}^{\cdot} \subset H'$.

Remarque. En général, la proposition 5_2–3, et par suite les théorèmes 1_2–4 et 2_2–4 ne sont pas vrais, car $((C_0^{\cdot} \times C_0^{\cdot})^{\perp}, s_0 \times s_0)$ peut ne pas appartenir à $\mathscr{F}_2(p)$.

2. Dans les théorèmes généraux de [2] et [3] ainsi que dans les démonstra-
4 tions de cet article, l'hypothèse que p vérifie la condition (E_3) (prop. 8, chap. II) est seulement utilisée:

a) Pour démontrer que les foncteurs $\hat{p}_{\mathscr{U}}$ vérifient (E_3);

b) Dans les théorèmes supposant que p est un foncteur d'homomorphismes saturé.

Par suite les théorèmes des n° 3, 6 et 7 sont aussi vrais si on remplace la condition que p est un foncteur d'homomorphismes par la condition: p est un
5 foncteur fidèle tel que p_{γ} soit bien fidèle.

Cas des foncteurs $\sqsubset$-étalants

Supposons que P soit un foncteur d'homomorphismes saturé et $\sqsubset$-étalant. Soit $H'^{\cdot}$ une sous-catégorie de $H^{\cdot}$ contenant $H_{\gamma}^{\cdot}$, vérifiant la condition (σ) et stable par produits dans $H^{\cdot}$. Les résultats des n° 6 et 7 permettent de compléter les théorèmes du n° 4 comme suit.

Comme $H^{\cdot}$ est une catégorie à sommes finies [3], c'est une catégorie à sommes fibrées finies (corollaire 2, th. 3-3) et tout $e \in \mathscr{G}'(p)_0$ admet un p-symétrisé $\bar{e}$, 1
d'après le corollaire 1 de la proposition 1-6.

Soit $e' = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{K}'(p)_0$ et $r = (C, A, C)$ une relation d'équivalence. Posons $e = ([C^{\cdot}]^{\cdot}, s)$ et désignons par $\bar{e}$ un symétrisé de e. D'après le théorème $1'_1$-3, il existe des $(\mathscr{V}_1(p), \mathscr{K}^{\tau}(p))$-projecteurs

$$(\bar{j}_{\mathscr{V}}, r) \text{ de source } (e, r) \quad \text{et} \quad (\bar{j}''_{\mathscr{V}}, r_{\bar{e}}) \text{ tel que } \alpha(\bar{j}''_{\mathscr{V}}) = \bar{e} = ([\bar{C}]^{\cdot}, \bar{s}).$$

Soit

$$e_{\mathscr{V}} = (C^{\cdot}_{\mathscr{V}}, s_{\mathscr{V}}) = \beta(\bar{j}_{\mathscr{V}}) \quad \text{et} \quad \bar{e}_{\mathscr{V}} = \beta(\bar{j}''_{\mathscr{V}}) = (G^{\cdot}_{\mathscr{V}}, \bar{s}_{\mathscr{V}}).$$

Théorème 2. *Si r est élémentaire sur $C^{\cdot}$, alors e' admet pour $(\mathscr{V}_1(p), \hat{p}_{\mathscr{K}^{\cdot}})$-structure quasi-quotient par r:*

1. *la $\hat{p}_{\mathscr{F}_1}$-structure quotient faible de $e_{\mathscr{F}}$ par $L(\bar{j}_{\mathscr{F}})(r(C^{\cdot}))$ si $\mathscr{V} = \mathscr{F}$;*
2. *la $\hat{p}_{\mathscr{F}_{1g}}$-structure quotient faible de $e_{\mathscr{F}_g}$ par $L(\bar{j}_{\mathscr{F}_g})(r(C^{\cdot}))$ si $\mathscr{V} = \mathscr{F}_g$;*
3. *la $(\mathscr{F}_{1g}(p), \hat{p}_{\mathscr{F}_1})$-structure quotient faible de $\bar{e}_{\mathscr{F}}$ par $L(\bar{j}''_{\mathscr{F}})(r^{\bar{e}}_{g}(C^{\cdot}))$, si $\mathscr{V} = \mathscr{F}_g$.*

Démonstration. D'après le théorème $1'_1$-3, il existe un $(\mathscr{V}_1(p), \mathscr{K}'^{\tau}(p))$-projecteur $\bar{j}'_{\mathscr{V}}$ de source e' de but $e'_{\mathscr{V}} = (\tilde{C}^{\cdot}_{\mathscr{V}}, \tilde{s}_{\mathscr{V}})$. Le théorème $1'_1$-4 montre que $L(\bar{j}'_{\mathscr{F}})$ et $L(\bar{j}_{\mathscr{F}})$ sont des surjections de $L[C^{\cdot}]$ sur $\tilde{C}_{\mathscr{F}}$ et sur $C_{\mathscr{F}}$ respectivement. En vertu du théorème 1_1-6, il existe un $(\mathscr{F}_1(p), \mathscr{F}^{\tau}_1(p))$-projecteur $(\bar{i}, \hat{r})$ de source $(e_{\mathscr{F}}, \hat{r})$ de but $e'_{\mathscr{F}}$, où $\hat{r}$ est la relation d'équivalence engendrée par $L(\bar{j}_{\mathscr{F}})(r(C^{\cdot}))$,
et on a $L(\bar{i}).L(\bar{j}_{\mathscr{F}}) = L(\bar{j}'_{\mathscr{F}})$; ainsi $L(\bar{i})$ est une surjection. Comme $L(\bar{i}) = \hat{p}_{\mathscr{F}}(\bar{i})$, 2
il en résulte que $\bar{i}$ est un $\hat{p}_{\mathscr{F}_1}$-épimorphisme (prop. 6-1). — La deuxième affirmation se démontre de même, en utilisant (th. $1'_1$-4) que $\Gamma(\bar{j}'_{\mathscr{F}_g})$ et $\Gamma(\bar{j}_{\mathscr{F}_g})$ sont des surjections de $L[G]$ sur $\tilde{C}_{\mathscr{F}_g}$ et sur $C_{\mathscr{F}_g}$ respectivement. — D'après le théorème $2'_1$-6, il existe un $(\mathscr{F}_{1g}(p), \mathscr{F}^{\tau}_1(p))$-projecteur $(\bar{i}', \hat{r}')$, en désignant par $\hat{r}'$ la relation d'équivalence engendrée par $L(\bar{j}''_{\mathscr{F}})(r^{\bar{e}}_{g}(C^{\cdot}))$, tel que $\alpha(\bar{i}') = \bar{e}_{\mathscr{F}}$ et $\beta(\bar{i}') = e'_{\mathscr{F}_g}$ et on a

$$\bar{j}'^{\sigma}_{\mathscr{F}_g} = \bar{i}'.\bar{j}''_{\mathscr{F}} \quad \text{d'où} \quad L(\bar{j}'^{\sigma}_{\mathscr{F}_g}) = i'.L(\bar{j}''_{\mathscr{F}}), \quad \text{si} \quad i' = \hat{p}_{\mathscr{F}}(\bar{i}').$$

Soit $v = ([\bar{C}], \underline{v}, [G])$ l'homomorphisme considéré dans la démonstration du théorème 2–6. Nous avons vu dans ce théorème que

$$m^{\sigma} = (\tilde{C}^{\cdot}_{\mathscr{F}_g}, \bar{j}'^{\sigma}_{\mathscr{F}_g}\underline{v}, [G])$$

est un symétrisé de $m = (\tilde{C}^{\cdot}_{\mathscr{F}_g}, \bar{j}'_{\mathscr{F}_g}, [C^{\cdot}])$; par suite

$$\Gamma(m) = L(m^{\sigma}) = L(\tilde{C}^{\cdot}_{\mathscr{F}_g}, \bar{j}'^{\sigma}_{\mathscr{F}_g}, [\bar{C}]).L(v).$$

Or le théorème $1'_1$–4 dit que $\Gamma(m)$ est un $p_{\mathscr{F}}$-épimorphisme de $L[G]^{\cdot}$ sur $\tilde{C}^{\cdot}_{\mathscr{F}_g}$. Puisque

$$p_{\mathscr{F}}(\Gamma(m)) = i'.L(\bar{j}''_{\mathscr{F}}).p_{\mathscr{F}}(L(v)),$$

on en déduit que i' est une surjection, c'est-à-dire que $\bar{i}'$ est une $(\hat{p}_{\mathscr{F}_1}, \mathscr{F}_{1g}(p))$-surjection.

Corollaire. *Supposons que r soit la relation $i(C)$ et que p admette une section maximale. Alors $e_{\mathscr{F}}$ admet une $\hat{p}_{\mathscr{F}_1}$-structure quotient faible par $L(\bar{j}_{\mathscr{F}})(r(C^{\cdot}))$*

[3] Voir Note p. 316.

de la forme $(N(C^{\cdot}), \tilde{s})$ *et* $\bar{e}_{\mathscr{F}}$ *une* $(\mathscr{F}_g(p), \hat{p}_{\mathscr{F}})$*-structure quotient faible par* $L(\bar{j}''_{\mathscr{F}})$ $(r_{\mathrm{g}}^{\bar{e}}(C^{\cdot}))$ *de la forme* $(\Gamma(C^{\cdot}), \tilde{s})$, *si* $H = H'$.

En effet, avec les notations précédentes, $C^{\cdot}_{\mathscr{F}}$, $\tilde{C}^{\cdot}_{\mathscr{F}}$, $\tilde{C}^{\cdot}_{\mathscr{F}_g}$ et $G^{\cdot}_{\mathscr{F}}$ sont isomorphes respectivement à $L[C]^{\cdot}$, $N(C^{\cdot})$, $\Gamma(C^{\cdot})$ et $L[\bar{C}]^{\cdot}$ d'après le théorème 3–4, de sorte que le corollaire résulte du théorème 2.

Supposons de plus que p soit à *sommes dénombrables régulières.* Soit S une
1 p-somme engendrée par s. D'après le corollaire du théorème 4–6, on a $M(e) = (M(C)^{\cdot}, S) \in \bar{\mathscr{N}}_m(p)$; en vertu de la proposition 6–7, il existe $\hat{s} \sqsubset_p S$ tel que $\hat{L}(e) = (\hat{L}([C^{\cdot}]), \hat{s}) \in \mathscr{F}'(p)$.

Théorème 3. *Si* r *est élémentaire sur* $C^{\cdot}$, *alors* e' *admet pour* $(\mathscr{V}_1(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$*-structure quasi-quotient* $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{s})$ *par* r:

1. *la* $(\mathfrak{S}'_1(p), \hat{p}_m)$*-structure quotient faible de* $M(e)$ *par* $r_{\mathrm{s}}(C^{\cdot}) \cup r$ *si* $\mathscr{V} = \mathfrak{S}'$ *et* $e \in \mathscr{F}(p)_0$.

2. *la* $(\mathscr{V}_1(p), \hat{p}_{\mathscr{F}'})$*-structure quotient faible de* $\hat{L}(e)$ *par* $\hat{r}(C^{\cdot}) \cup r$ *si* $\mathscr{V} = \mathscr{F}$ *(resp. de* $\hat{L}(\bar{e})$ *par* $\hat{r}_{\mathrm{g}}^{\bar{e}}(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}}$ *si* $\mathscr{V} = \mathscr{F}_g$*)*.

2 *Démonstration.* D'après le corollaire $3'_1$ du théorème 1–4, e' admet une $(\mathfrak{S}'_1(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{s})$ par r telle que $\tilde{C}$ soit une classe quotient de $M(C)$; la lère partie se déduit donc du corollaire 2_1 du théorème 4–6. — Si $\mathscr{V} = \mathscr{F}$, il existe une $(\mathscr{F}_1(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient $\tilde{e} = (\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{s})$ de e' par r et $\tilde{C}^{\cdot}$ est un quotient de $L[C]^{\cdot}$ d'après le théorème 1–4, et une $(\mathscr{F}_1(p), \hat{p}_{\mathscr{K}''})$-structure quasi-quotient de $\hat{L}(e)$ par $\hat{r}(C^{\cdot}) \cup r$, de $\hat{L}(\bar{e})$ par $\hat{r}_{\mathrm{g}}^{\bar{e}}(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}}$, en vertu du théorème 3_1–7. Comme $L[C^{\cdot}]$ est un quotient de $\hat{L}[C^{\cdot}]$, la classe $\tilde{C}$ est un quotient de $\hat{L}[C^{\cdot}]$, et par suite une démonstration analogue à celle du théorème 2 prouve que $\tilde{e}$ est une $(\mathscr{V}_1(p), \hat{p}_{\mathscr{F}'})$-structure quotient faible de $\hat{L}(e)$. La 2ème affirmation se démontre de même.

Corollaire. *Si* p *admet une section maximale,* $M(e)$ *admet une* $(\mathfrak{S}'(p), \hat{p}_m)$*-structure quotient faible par* $r_{\mathrm{s}}(C^{\cdot})$ *de la forme* $(S(C^{\cdot}), \tilde{s})$.

En effet, ce corollaire résulte des théorèmes 3 et 3–4.

Exemples. Les foncteurs $p_{\mathscr{T}}$ et p_{Ω}, projection vers $\mathscr{M}$ de la catégorie $\mathscr{T}$ des applications continues et Ω des applications ordonnées respectivement, sont des foncteurs d'homomorphismes saturés et $\sqsubset$-étalants. De plus ils sont à sommes dénombrables régulières. La sous-catégorie Ω' de Ω formée des applications ordonnées strictes [5] est stable par produits, contient Ω_γ et
3 vérifie la condition (σ) relativement à $(\mathscr{M}', p_{\Omega})$. Par suite les théorèmes 3 et 4 s'appliquent à $p_{\mathscr{T}}$, p_{Ω} et à (p_{Ω}, Ω'). En particulier, on en déduit des théorèmes de projection des graphes multiplicatifs topologiques, p_{Ω}-structurés ou ordonnés dans les catégories et les groupoïdes topologiques, p_{Ω}-structurés ou ordonnés. Le résultat selon lequel $\bar{\mathscr{N}}'(p_{\Omega})$ et $\bar{\mathscr{N}}'_1(p_{\Omega})$ sont des catégories à $\mathscr{F}(p_{\Omega})$-projections et à $\mathscr{F}_1(p_{\Omega})$-projections respectivement a été démontré par S. LEGRAND. La construction du théorème 1–4 a été inspirée par sa construction (qu'elle généralise) [10]. Cet exemple montre d'ailleurs l'intérêt d'introduire des quasi-catégories p-structurées. En effet, soit $e = (C^{\cdot}, <) \in \mathscr{G}'(p_{\Omega})_0$ et soit $\hat{L}(e)$ la quasi-catégorie p_{Ω}-structurée (th. 4–7) $(\hat{L}([C^{\cdot}]), <)$, où

$(f'_m, \ldots, f'_1) < (f_n, \ldots, f_1)$ si, et seulement si, $m = n$ et $f'_i < f_i$ pour tout $i \leqq n$.

La catégorie $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$, munie de la relation d'ordre induite par $(\hat{L}[C], <)$, n'est pas une catégorie Ω-structurée. Remarquons que $\hat{L}(e)$ n'est pas toujours une quasi-catégorie ordonnée (i.e. $p(\Omega', \Omega)$-structurée) si e est un graphe ordonné.

Foncteurs dénombrablement engendrants pour $\mathscr{M}$

Soit $p = p_{\mathscr{H}}$, où $\mathscr{H} = \mathscr{I}^{fs}, \mathscr{I}^{ps}$ ou $\mathscr{I}^{f\cup}$. Alors p est un foncteur dénombrablement engendrant pour $\mathscr{M}$ (th. 2–5 et 3–5) et à sommes dénombrables régulières. Si $e \in \mathscr{G}'(p)_0$, il existe donc

$$\hat{L}(e) \in \mathscr{F}'(p)_0 \quad \text{et} \quad M(e) \in \bar{\mathscr{N}}_m(p)_0$$

d'après la proposition 6–7 et le corollaire 2 du théorème 4–6. De plus $\mathscr{H}$ est une catégorie à $\mathscr{M}_0$-sommes finies, donc une catégorie à $\mathscr{M}_0$-sommes fibrées finies (cor. 2, th. 3–2), de sorte que e admet un p-symétrisé, en vertu du corollaire 1 de la proposition 1–6.

Théorème 4. *Soit $p = p_{\mathscr{H}}$, où $\mathscr{H} = \mathscr{I}^{ps}$, $\mathscr{I}^{fs}$ ou $\mathscr{I}^{f\cup}$, et $\mathscr{H}' = \Omega' \cap \mathscr{H}$. Soit*

$$e' = (C^{\cdot}, <) \in \mathscr{K}'(p)_0\,, \quad e = ([C^{\cdot}]^{\cdot}, <)$$

et r une relation sur C. Alors e' admet pour $(\mathscr{F}_1(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$ - (resp. pour $(\mathfrak{S}'_1(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-) structure quasi-quotient $\tilde{e}$ par r une $(\mathscr{F}_1(p), \hat{p}_{\mathscr{F}'})$ - (resp. une $(\mathfrak{S}'_1(p), \hat{p}_m)$-) structure quasi-quotient de $\hat{L}(e)$ par $\hat{r}(C^{\cdot}) \cup r$ (resp. de $M(e)$ par $r_s(C^{\cdot}) \cup r$). Si $\bar{e}$ est un p-symétrisé de e, alors e' a une $(\mathscr{F}_{1g}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient $\tilde{e}'$ par r qui est une $(\mathscr{F}_{1g}(p), \hat{p}_{\mathscr{F}'})$-structure quasi-quotient de $\hat{L}(\bar{e})$ par $\hat{r}^{\bar{e}}_g(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}}$. 1

En effet, $P_{\mathscr{H}}$ est $(\mathscr{M}, \mathscr{F}_1)$-résolvant d'après le théorème 1_1–5, car $\mathscr{H}'$ est une sous-catégorie de $\mathscr{H}$ stable par produits contenant $\mathscr{H}_\gamma$ et vérifiant (σ). Donc il existe $\tilde{e}$ et, en vertu du théo. 3_1–6, $\tilde{e}$ est une structure quasi-quotient de 2
$\hat{L}(e)$ (resp. de $M(e)$). De même il existe $\tilde{e}'$ et, d'après le théorème 3_1–6, $\tilde{e}'$ est une 3
structure quasi-quotient de $\hat{L}(\bar{e})$ par $\hat{r}^{\bar{e}}_g(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}}$.

Théorème 5. *$\mathscr{K}'(p_{\mathscr{N}'})$ est une catégorie à $\mathscr{V}(p_{\mathscr{V}})$-projections, si $\mathscr{V} = \mathscr{F}$ ou $\mathscr{F}_g$ et $p_{\mathscr{F}_g} = (\mathscr{M}, p_{\mathscr{F}}\,\iota, \mathscr{F}_g)$.*

Démonstration. Soit $e = (C^{\cdot}, C^{\perp}) \in \mathscr{K}'(p_{\mathscr{N}'})_0$. D'après le théorème 2–5, il existe un $(\mathscr{V}(p_{\mathscr{N}'}), \mathscr{K}'(p_{\mathscr{N}'}))$-projecteur $\bar{j}'$ de source e de but $(\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{C}^{\perp})$. La démonstration du théorème 2–5 prouve que les applications source et but de $\tilde{C}^{\perp}$ définissent des foncteurs de $\tilde{C}^{\cdot}$ vers $\tilde{C}^{\cdot}$, c'est-à-dire on a:

$$e_1 = (\tilde{C}^{\perp}, \tilde{C}^{\cdot}) \in \mathscr{K}'(p_{\mathscr{V}})\,.$$

Nous savons alors qu'il existe un $(\mathscr{V}(p_{\mathscr{V}}), \mathscr{K}'(p_{\mathscr{V}}))$-projecteur $\bar{j}''$ (cor. 2, th. 1–5) 4
de source e_1, de but $(S^{\perp}, S^{\cdot})$. En vertu du théorème 4 [3], on a

$$\hat{e} = (S^{\cdot}, S^{\perp}) \in \mathscr{V}(p_{\mathscr{V}})\,.$$

L'application $\bar{j}''\bar{j}'$ définit un néofoncteur de $C^{\cdot}$ vers $S^{\cdot}$ et un néofoncteur j de $C^{\perp}$ vers $S^{\perp}$, de sorte que l'on a

$$\bar{j} = (S^{\cdot}, j, C^{\cdot}) \in \mathscr{K}'(p_{\mathscr{N}'}).e\,.$$

— Montrons que $\bar{j}$ est un $(\mathscr{V}(p_{\mathscr{V}}), \mathscr{K}'(p_{\mathscr{N}'}))$-projecteur. En effet, soit

$$\bar{h} = (K^{\cdot}, h, C^{\cdot}) \in \mathscr{V}(p_{\mathscr{V}})_0 . \mathscr{K}'(p_{\mathscr{N}'}).e\,.$$

Il existe un et un seul

$$\bar{h}' = (K^{\cdot}, h', \tilde{C}^{\cdot}) \in \mathscr{V}(p_{\mathscr{N}'}) \quad \text{tel que} \quad \bar{h}'.\bar{j}' = \bar{h}.$$

En posant $h'_1 = (K^{\cdot}, \underline{h}', \tilde{C}^{\cdot})$, on obtient

$$\bar{h}'_1 = (K^{\perp}, h'_1, \tilde{C}^{\perp}) \in \mathscr{V}(p_{\mathscr{V}})_0 . \mathscr{K}'(p_{\mathscr{F}}). e_1 .$$

Il existe donc un et un seul

$$\bar{h}''_1 = (K^{\perp}, h''_1, S^{\perp}) \in \mathscr{V}(p_{\mathscr{V}}) \quad \text{tel que} \quad \bar{h}''_1 . \bar{j}'' = \bar{h}'_1 .$$

Il s'ensuit

$$h'' = (K^{\perp}, \underline{h}''_1, S^{\perp}) \in \mathscr{V} \quad \text{et} \quad \bar{h}'' = (K^{\cdot}, h'', S^{\cdot}) \in \mathscr{V}(p_{\mathscr{V}}).$$

Les égalités

$$\underline{h}'' \underline{j} = \underline{h}'' \bar{\underline{j}}'' \bar{\underline{j}}' = \underline{h}''_1 \bar{\underline{j}}'' \bar{\underline{j}}' = \underline{h}'_1 \bar{\underline{j}}' = \underline{h}' \bar{\underline{j}}' = \underline{h}$$

entraînent $\bar{h}''.\bar{j} = \bar{h}$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. *Tout graphe multiplicatif double admet pour $(\mathscr{F}(p_{\mathscr{F}}), \bar{\mathscr{N}}'(p_{\mathscr{N}'}))$-projection une catégorie double et pour $(\mathscr{F}_g(p_{\mathscr{F}_g}), \bar{\mathscr{N}}'(p_{\mathscr{N}'}))$-projection un groupoïde double.*

1+ En effet, ceci résulte du théorème précédent.

Soit $p = p_{\mathscr{F}}$ ou $p_{\mathscr{N}'}$. Alors p est un foncteur à $\mathscr{M}_0$-sommes et à sommes dénombrables régulières. D'après le théorème 4–2, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{N}'$ sont des catégories à $\mathscr{M}_0$-sommes fibrées. Supposons:

$$e' = (C^{\cdot}, C^{\perp}) \in \mathscr{K}'(p)_0 \quad \text{et} \quad e = ([C]^{\cdot}, C^{\perp}).$$

Nous désignons par $\alpha^{\perp}$ et $\beta^{\perp}$ les applications source et but dans $C^{\perp}$. D'après

2 le corollaire du théorème 4–6, e admet une $(\bar{\mathscr{N}}_m(p), \mathscr{L}_m(p))$-projection

$$M(e) = (M(C)^{\cdot}, M(C)^{\perp}).$$

D'après la proposition 6–7, e admet une $(\mathscr{F}'(p), \mathscr{L}'(p))$-projection

$$\hat{L}(e) = (\hat{L}([C^{\cdot}]), \hat{L}[C^{\cdot}]^{\perp}),$$

où la loi de composition $\perp$ est définie par

$$((f'_m, \ldots, f'_1), (f_n, \ldots, f_1)) \to (f'_m \perp f_n, \ldots, f'_1 \perp f_1)$$

3 si, et seulement si, $m = n$ et $\alpha^{\perp}(f'_i) = \beta^{\perp}(f_i)$ pour tout $1 \leqq i \leqq n$. Le corollaire 2 de la proposition 1–6 affirme que e admet un p-symétrisé $\bar{e} = ([\bar{C}]^{\cdot}, \bar{C}^{\perp})$.

4 D'après le corollaire 2 du théorème 4–7, toute $(\mathfrak{S}'(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient de e' par r est une $(\mathfrak{S}'(p), \hat{p}_m)$-structure quasi-quotient de $M(e)$ par $r_s(C^{\cdot}) \cup r$. En vertu du corollaire 1 du théorème 4–7, une $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient de e' par r est une $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{F}'})$-structure quasi-quotient de $\hat{L}(e)$ par $\hat{r}(C^{\cdot}) \cup r$, et une $(\mathscr{F}_g(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient de e' par r est une $(\mathscr{F}_g(p), \hat{p}_{\mathscr{F}'})$-structure quasi-quotient de $\hat{L}(\bar{e})$ par $\hat{r}_g^{\bar{e}}(C^{\cdot}) \cup r_{\bar{e}}$.

Théorème 6. *Soit $p = p_{\mathscr{N}'}$ et soit $\bar{e}$ un $p_{\mathscr{N}'}$-symétrisé de e. Si r est élémentaire sur $C^{\cdot}$, e' admet pour $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structure quasi-quotient $\tilde{e} = (\tilde{C}^{\cdot}, \tilde{C}^{\perp})$ par r:*

1. *la $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{F}'})$-structure quotient faible de $\hat{L}(e)$ par $\hat{r}(C^{\cdot}) \cup r$, si $\mathscr{V} = \mathscr{F}$;*
2. *la $(\mathscr{F}_g(p), \hat{p}_{\mathscr{F}'})$-structure quotient faible de $\hat{L}(\bar{e})$ par $\hat{r}_g(C^{\cdot}) \cup r$, si $\mathscr{V} = \mathscr{F}_g$;*
3. *la $(\mathfrak{S}'(p), \hat{p}_m)$-structure quotient faible de $M(e)$ par $r_s(C^{\cdot}) \cup r$, si $\mathscr{V} = \mathfrak{S}'$.*

Démonstration. e admet un $p_{\mathcal{N}'}$-symétrisé $\bar{e} = ([\bar{C}]^{\cdot}, \bar{C}^{\perp})$ tel que $[\bar{C}]$ soit un symétrisé de $[C^{\cdot}]$, d'après le corollaire 2 de la proposition 1–6, de sorte que 1¶

$$\hat{r}_{\mathrm{g}}^{\bar{e}}(C^{\cdot}) = \hat{r}_{\mathrm{g}}(C^{\cdot}) \quad \text{et} \quad r_{\bar{e}} = (\bar{C}, R, \bar{C}) \quad \text{si} \quad r = (C, R, C).$$

Si $\mathscr{V} = \mathscr{F}$ (resp. $= \mathscr{F}_g$, resp. $= \mathfrak{S}'$), $\tilde{C}^{\cdot}$ est, d'après le théorème 2–5, une catégorie quotient de $L[C^{\cdot}]^{\cdot}$ (resp. de $L[\bar{C}]^{\cdot}$, resp. de $M(C)^{\cdot}$) et un raisonnement analogue à celui utilisé pour montrer le théorème 2 prouve que $\tilde{e}$ est une $(\mathscr{V}(p), \hat{p}_{\mathscr{F}'})$-structure quotient faible de $\hat{L}(e)$ par $\hat{r}(C^{\cdot}) \cup r$ (resp. de $\hat{L}(\bar{e})$ par $\hat{r}_{\mathrm{g}}(C^{\cdot}) \cup r$, resp. une $(\mathfrak{S}'(p), \hat{p}_m)$-structure quotient faible de $M(e)$ par $r_{\mathfrak{s}}(C^{\cdot}) \cup r$).

Corollaire. *Si $p = p_{\mathcal{N}'}$ et si $\tilde{e}$ et $\tilde{e}'$ sont des $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{K}'})$-structures quasi-quotient de e et de e' respectivement par la relation élémentaire r, alors $\tilde{e}$ est une $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-* 2
structure quotient de $\tilde{e}'$. 3

En effet, la démonstration est analogue à celle du théorème 2.

Remarque. Soit $p = p_{\mathscr{F}}$: le $p_{\mathcal{N}'}$-symétrisé $([\bar{C}]^{\cdot}, \bar{C}^{\perp})$ de e n'est pas un $p_{\mathscr{F}}$-symétrisé de e car $\bar{C}^{\perp}$ n'est généralement pas une catégorie. D'après le corollaire 3, proposition 1–6, et le théorème 4–2, le $p_{\mathscr{F}}$-symétrisé de e est $([G]^{\cdot}, G^{\perp})$, où 4
$G^{\perp} = N(\bar{C}^{\perp})$, de sorte que $\hat{r}_{\mathrm{g}}^{\bar{e}}(C^{\cdot}) = \nu(\bar{C}^{\perp})(\hat{r}_{\mathrm{g}}(C^{\cdot}))$, si (N, ν) est le foncteur $(\mathscr{F}, \mathcal{N}')$-projection canonique. On peut donner des exemples dans lesquels une $(\mathscr{F}(p), \mathscr{K}'(p))$-projection de e est seulement une $(\mathscr{F}(p), \hat{p}_{\mathscr{F}'})$-structure quasi-quotient (et non quotient faible) de $\hat{L}(e)$.

Catégories structurées quotient par une sous-catégorie

Soit p un foncteur d'homomorphismes saturé. Soit $J(p)$ l'idéal de $\mathscr{F}(p)$ formé des foncteurs p-structurés $(C^{\cdot}, h, \hat{C}^{\cdot})$ tels que $(C^{\cdot}, \underline{h}, \hat{C}^{\cdot})$ appartienne à l'idéal $J_{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$ (c'est-à-dire que $\underline{h}(\hat{C}_0^{\cdot}) \subset C_0^{\cdot}$).

Définition 2. *Soient $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{F}(p)_0$ et $G^{\cdot}$ une sous-catégorie de $C^{\cdot}$. On dira que e admet $\hat{e}$* pour catégorie p-structurée quotient par $G^{\cdot}$ *s'il existe une $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-sous-structure $e_1 = (G^{\cdot}, s_1)$ de e et si e admet $\hat{e}$ pour $(J(p), \hat{p}_{\mathscr{F}})$-structure quotient par e_1.*

Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{F}(p)_0$ et $G^{\cdot}$ une sous-catégorie de $C^{\cdot}$. Pour qu'il existe une catégorie p-structurée $\hat{e}$ quotient de e par $G^{\cdot}$, il faut et il suffit qu'il existe une sous-catégorie p-structurée $(G^{\cdot}, s_1)$ de e et une $(J(p), \hat{p}_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte 5
$(\bar{k}, \bar{h})$ telle que

$$\bar{h} \in e.(\hat{p}_{\mathscr{F}})_{\iota}^{\ulcorner}.e_1, \;\; \hat{p}_{\mathscr{F}}(\bar{h}) = (C, \iota, G) \quad \text{et} \quad \beta(\bar{k}) = \hat{e}.$$

Nous désignons par r_G la relation d'équivalence sur C définie dans le n° 1, si $G^{\cdot}$ est une sous-catégorie de la catégorie $C^{\cdot}$.

Théorème 7. *Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{F}(p)_0$ et $e_1 = (G^{\cdot}, s_1)$ une sous-catégorie p-structurée de e. Pour qu'il existe une catégorie p-structurée quotient $\hat{e}$ de e par $G^{\cdot}$, il faut et il suffit que e admette $\hat{e}$ pour $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-structure quotient faible par r_G.*

Démonstration. Soit $\bar{h}$ le $(\mathscr{M}^{\iota}, \hat{p}_{\mathscr{F}})$-monomorphisme définissant e_1 comme $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-sous-structure de e. Si

$$\bar{k} = (S^{\cdot}, k, C^{\cdot}) \in \mathscr{F}(p).e,$$

on a

$$(\bar{k}, r_G) \in (\hat{p}_{\mathscr{F}})^{\mathrm{r}} \quad \text{si, et seulement si,} \quad \bar{k}.\bar{h} \in J(p).$$

25*

Il en résulte que $(\bar{k}, \bar{h})$ est une $(J(p), \hat{p}_{\mathscr{F}})$-suite exacte courte si, et seulement si, $(\bar{k}, r_G)$ est un $(\mathscr{F}(p), \mathscr{F}^{\tau}(p))$-projecteur et si $\bar{k}$ est un $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-épimorphisme. Comme $(\bar{k}, r_G)$ est un $(\mathscr{F}(p), \mathscr{F}^{\tau}(p))$-projecteur tel que $p(k)$ soit une surjection si, et seulement si, $\bar{k}$ est un $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-épimorphisme d'après la proposition 5–1, le théorème est démontré.

Corollaire 1. *Soit $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{F}(p)_0$ et $(G^{\cdot}, s_1)$ une sous-catégorie p-structurée de e; supposons qu'il existe une p-structure quotient s_G de s par la relation d'équivalence $\bar{r}_G$ bicompatible sur $C^{\cdot}$ engendrée par r_G. Pour qu'il existe une catégorie p-structurée quotient de e par $G^{\cdot}$, il faut et il suffit qu'il existe un $(\mathscr{F}(p), \mathscr{K}'(p))$-projecteur $\bar{j}$ de source $(C^{\cdot}/\bar{r}_G, s_G)$ tel que $p(\bar{j})$ soit une surjection.*

En effet, toute relation $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-compatible étant bicompatible, $\hat{e}$ est une $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-structure quotient faible de e par r_G si, et seulement si, c'est une $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-structure quotient faible de e par $\bar{r}_G$; par suite, le corollaire résulte de la proposition 5–1.

Corollaire 2. *Soient $e = (C^{\cdot}, s) \in \mathscr{F}(p)_0$ et $G^{\cdot}$ une sous-catégorie de $C^{\cdot}$. Si p est $\ulcorner$-étalant et admet une section maximale et s'il existe une catégorie quotient $\hat{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ par $G^{\cdot}$ et une p-structure quotient $\hat{s}$ de s telle que $p(\hat{s}) = \hat{C}$, alors il existe une catégorie p-structurée quotient $(\hat{C}^{\cdot}, \bar{s})$ de e par $G^{\cdot}$.*

Démonstration. Il existe $s_1 \ulcorner_p s$ tel que $p(s_1) = G$ et $(G^{\cdot}, s_1)$ est une $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-sous-structure e_1 de e. On a $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s}) \in \mathscr{K}'(p)_0$ et, en vertu du théorème 3–4, il existe
1 un $(\mathscr{F}(p), \mathscr{K}'(p))$-projecteur $\bar{j}$ de source $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$, de but $(N(\hat{C}^{\cdot}), \bar{s})$. Donc le corollaire 2 est conséquence du corollaire 1.

Exemple. Si *$(C^{\cdot}, T)$ est une catégorie topologique et si $G^{\cdot}$ est une sous-catégorie propre de $C^{\cdot}$*, il existe une catégorie $\hat{C}^{\cdot}$ quotient de $C^{\cdot}$ par $G^{\cdot}$, d'après le théorème 16, chap. III. Comme toute topologie admet une topologie quotient par une relation d'équivalence, le corollaire 2 du théorème 5 montre qu'*il existe une catégorie topologique quotient de $(C^{\cdot}, T)$ par $G^{\cdot}$.*

Nous n'étudierons pas ici le problème général de l'existence d'une catégorie p-structurée quotient par une sous-catégorie. La notion de catégorie p-structurée quotient par une sous-catégorie intervient dans le problème général de l'expansion p-structurée d'un foncteur p-structuré et de l'expansion p-structurée régulière d'un néofoncteur p-structuré. Nous reviendrons dans un autre article sur ces questions.

Remarque. On pourrait préciser comme suit la définition 2: Soit J un idéal de $H^{\cdot}$; la classe $\hat{J}$ des $\bar{h}$ tels que

$$\bar{h} = (C^{\cdot}, h, S^{\cdot}) \in J(p) \quad \text{et} \quad h \in J$$

est un idéal de $\mathscr{F}(p)$. On dira qu'une catégorie p-structurée e admet *une catégorie p-structurée J-quotient par une sous-catégorie $G^{\cdot}$* s'il existe une $\hat{p}_{\mathscr{F}}$-sous-structure $e_1 = (G^{\cdot}, s_1)$ de e et une $(\hat{J}, \hat{p}_{\mathscr{F}})$-structure quotient de e par e_1. Remarquons que le théorème 7 ne s'étend pas dans ce cas général.

Les théorèmes d'existence de structures quasi-quotient obtenus dans ce travail s'appliquent à l'étude du problème général de la cohomologie [4]. Ils permettent de prouver l'existence de foncteurs de quasi-cohomologie dans
2 des cas très généraux (voir [0] dont les résultats seront ultérieurement
3+ développés).

Bibliographie

[0] EHRESMANN, C.: Compt. Rend. **261**, 1577, 1932 et 4583 (1965).
[1] — Catégories et structures. Paris: Dunod 1965.
[2] — Structures quotient. Comment. Math. Helv. **17**, **38**, 219—283 (1963).
[3] — Catégories structurées. Ann. sci. Ecole norm. sup. **80**, 349—426 (1963).
[4] — Cohomologie à valeurs dans une catégorie dominée. Coll. de Bruxelles (1964), p. 21—80.
[5] — Catégories ordonnées-Cohomologie-Holonomie. Ann. Inst. Fourier (Coll. de Grenoble 1963), t. 14,1, 205—268 (1964).
[6] GROTHENDIECK, A.: Texte polycopié.
[7] BENABOU, J.: Critères de représentabilité des foncteurs. Compt. Rend. **260**, 752 (1965).
[8] FREYD, P.: Abelian Categories. New York: Harper and Row 1964.
[9] GIRAUD, J.: Méthode de la descente. Bull. Soc. Math. France, Mém. **2**, VIII + 150 (1964).
[10] LEGRAND, S.: Compt. Rend. **260**, 3255 et 6785 (1965).
[11] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles, chap. 4. Paris: Hermann.
[12] GABRIEL, P.: Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. France **90**, 323—448 (1962).
[13] HIGGINS, P. J.: Presentations of groupoids. Proc. Cambridge Phil. Soc. **60** I, 7—20 (1964).
[14] LAWVERE, F.: Functorial semantics of algebraic theories. Thesis, Columbia Univ. (1963).

M. CHARLES EHRESMANN
Université de Paris, Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
11, rue Pierre-Curie
Paris-5e

(Reçu le 12 octobre 1965)

COLLOQUE ELIE CARTAN
Paris, Juin 1970

/112/

CATEGORIES DE FONCTEURS STRUCTURES

par Charles EHRESMANN

La Conférence était consacrée à l'exposé de quelques résultats sur les catégories structurées, obtenus en collaboration avec Andrée (Bastiani-) EHRESMANN et publiés principalement dans l'article :

«Catégories de foncteurs structurés» par A. et C. EHRESMANN, *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*, XI-3, 1969, 329-384.

En voici un résumé :

Soit p un foncteur d'oubli d'une catégorie H vers la catégorie des applications associée à un univers. Une *catégorie p-structurée* est le couple d'une catégorie C et d'un objet s de H tel que $p(s)$ soit l'ensemble sous-jacent à C et que les applications source, but et loi de composition de C soient «compatibles avec s».

Une étude de la catégorie des foncteurs p-structurés conduit à des théorèmes d'existence de limites projectives, inductives, de sous-catégories structurées et de catégories structurées quasi-quotients.

Le principal théorème, obtenu à l'aide de la notion de transformation naturelle p-structurée, affirme que la catégorie des foncteurs p-structurés est une catégorie monoïdale fermée lorsque H est une catégorie monoïdale fermée. Ce résultat n'est prouvé dans le travail cité que sous certaines conditions sur p ; le cas général sera traité par les auteurs dans un article (à paraître) faisant suite au précédent. [1)]

1) N. d. E. Categories of sketched structures, *Cahiers Topo. et Géom. Diff.* XIII-2 (1972), 103-214.

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

Vol. XI, 3. 1969

/109/

CATEGORIES DE FONCTEURS STRUCTURES

par Andrée et Charles EHRESMANN

Introduction.

Le présent article est une étude générale de la catégorie $\mathcal{F}(p)$ des foncteurs p-structurés, où p est un «bon» foncteur d'une catégorie H vers la catégorie des applications associée à un univers. Une catégorie p-structurée est un couple d'une catégorie $C^{\cdot}$ et d'une p-structure s sur l'ensemble C sous-jacent (i.e. d'une unité s de H vérifiant $p(s) = C$) tel que les applications source et but «se relèvent» en des éléments a et b de H de sources et buts s et que la loi de composition «se relève» en un élément de H de source un produit fibré de (a, b) et de but s. Cette notion est différente de celle de catégorie p-dominée (ou de la notion plus précise de catégorie monoïdale fermée [8]), où ce sont séparément les ensembles $Hom_C(e', e)$ qui sont munis de p-structures. Comme exemples importants de catégories structurées, citons les catégories doubles, ordonnées, topologiques, différentiables,... qui interviennent dans les domaines les plus variés (Topologie algébrique, Géométrie différentielle, Analyse,...).

Le texte a été rédigé en supposant seulement connus les résultats du cours [A1] (dont il utilise la terminologie et les notations), afin que sa lecture puisse être abordée par des chercheurs débutants. C'est pourquoi le paragraphe 1 et le début du paragraphe 3 contiennent quelques rappels (sur les p-injections, aussi appelées morphismes cartésiens, les limites, les foncteurs $\ulcorner$-engendrants).

La théorie générale des catégories structurées est exposée dans le paragraphe 2. Les principaux théorèmes assurent l'existence de sous-catégories structurées et de limites projectives sous des conditions plus faibles que celles de [6]. Dans le paragraphe 3, l'existence de catégories structurées quasi-quotients est montrée à l'aide du théorème général d'existence de structures libres [4]. Là encore, les hypothèses de [1] ont pu être affaiblies, en particulier pour montrer que la sous-catégorie structurée engendrée par une partie «assez petite» est «assez petite» (mais naturellement la construction par récurrence de cette sous-catégorie est plus compliquée que dans [1]).

Les transformations naturelles p-structurées ont été introduites dans [10], lorsque p est à limites projectives; dans le paragraphe 4, nous obtenons sans cette hypothèse la 2-catégorie des transformations naturelles structurées. Nous montrons aussi l'existence d'une catégorie double structurée des quatuors associée à une catégorie structurée, en supposant seulement p à produits fibrés finis, grâce à une construction entièrement différente de celle de [6] (qui supposait l'existence de produits). Cette catégorie double structurée est essentielle pour démontrer les principaux résultats de cet article, relatifs au cas où H est munie d'une p'-domination: La catégorie des transformations naturelles structurées entre deux catégories p-structurées données est alors canoniquement p'-structurée, et l'on obtient ainsi une domination de la catégorie $\mathcal{F}(p)$, qui est une domination forte si H est fortement p'-dominée. On en déduit que, si H est une catégorie cartésienne fermée dont un élément final est un générateur, $\mathcal{F}(p)$ est une catégorie cartésienne fermée. Ces résultats sont également valables pour la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(p)$ ayant pour objets les groupoïdes structurés (paragraphe 5).

Nous nous sommes volontairement restreints au cas des catégories p-structurées, afin de ne pas utiliser la théorie générale des réalisations
1 de l'esquisse des catégories [5]. C'est pourquoi les résultats du paragraphe 4 ne sont pas les meilleurs possibles. Dans un prochain article, nous montrerons qu'ils peuvent être étendus aux catégories structurées généralisées, même avec des hypothèses très affaiblies (voir remarque finale du paragraphe 4).

1. Quelques compléments sur les p-injections.

Soit $p = (K^{\cdot}, \underline{p}, H^{\cdot})$ un foncteur.

Rappelons [A1] que $j \in H$ est une *p-injection* si les conditions 1

$$f \in \beta(j).H \text{ et } p(f) = p(j).k$$

entraînent qu'il existe un et un seul $h \in H$ tel que

$$p(h) = k \text{ et } f = j.h.$$

Si j et j' sont des p-injections et si $j'.j$ est défini, alors $j'.j$ est une p-injection [A1]. Si j et j' sont des p-injections de même but et si $p(j') = p(j).k$, l'unique h tel que $p(h) = k$ et $j.h = j'$ est une p-injection. En particulier si p_γ est bien fidèle et si j et j' sont deux p- 2
injections de même but telles que $p(j) = p(j')$, alors $j = j'$.

Si j et j' sont deux p-injections et si $g \in \beta(j).H.\beta(j')$ est tel que $p(g).p(j') = p(j).k$, l'unique h vérifiant

$$j.h = g.j' \text{ et } p(h) = k$$

est appelé *p-sous-morphisme de g (relativement à (j, j')).*

PROPOSITION 1. *Si p est fidèle et si $j \in H$ admet un inverse à gauche j', alors j est une p-injection.*

Δ. Soit $f \in \beta(j).H$ tel que $p(f) = p(j).k$. Posons $h = j'.f$. On a

$$p(h) = p(j').p(f) = p(j').p(j).k = p(j'.j).k = k,$$

d'où

$$p(j.h) = p(j).p(h) = p(j).k = p(f).$$

Comme p est fidèle, il s'ensuit $j.h = f$. De plus $j.h' = f$ entraîne 3

$$h' = j'.j.h' = j'.f = h. \ \nabla$$

On dira qu'une transformation naturelle $T = (F, t, \hat{s}')$ d'un foncteur constant $\hat{s}'$ sur $s' \in H_o^{\cdot}$ vers F est une *limite projective naturalisée dans p* si T est une limite projective naturalisée et si $pT = (p.F, \underline{p}\,t, \hat{e})$, où $e = p(s')$, est une limite projective naturalisée. En particulier, on définit ainsi les notions de produit (naturalisé) dans p, de produit fibré (naturalisé) dans p, de noyau dans p. 4

PROPOSITION 2. *Soient h et h' des éléments de H de même but. Si p est fidèle et s'il existe un produit naturalisé $((m,m'),s)$ de $(\alpha(h), \alpha(h'))$ dans p et un produit fibré naturalisé $((p(h), v), (p(h'), v'))$ dans $K^\bullet$, il existe un produit fibré naturalisé $((h,\overline{v}), (h',\overline{v}'))$ dans p tel que $p(\overline{v}) = v$ et $p(\overline{v}')= v'$ si, et seulement si, il existe une p-injection $j \in s.H$ telle que*

$$p(m).p(j) = v \text{ et } p(m').p(j) = v'.$$

1 Ceci résulte de la proposition 7, page 57 [A1].

PROPOSITION 3. *Soient h et h' deux éléments de $H^\bullet$ de même source et de même but. Si p est fidèle, il existe un noyau j de (h, h') dans p si, et seulement si, j est une p-injection telle que $p(j)$ soit un noyau de $(p(h), p(h'))$ dans $K^\bullet$.*

$\triangle$. 1°) Soit j un noyau de (h, h') dans p et soit $f \in \beta(j).H$ tel que $p(f) = p(j).k$. Comme p est fidèle, les égalités

$$p(h.f) = p(h).p(j).k = p(h').p(j).k = p(h'.f)$$

entraînent $h.f = h'.f$, de sorte qu'il existe un unique g vérifiant $j.g = f$. On trouve $p(g) = k$, car le noyau $p(j)$ est un monomorphisme et

$$p(j).p(g) = p(f) = p(j).k.$$

2°) Soit j une p-injection telle que $p(j)$ soit un noyau dans $K^\bullet$ de $(p(h), p(h'))$. Si $h.f = h'.f$, où $f \in H$, il existe un et un seul k tel que $p(j).k = p(f)$. Par suite il existe un unique $g \in H$ vérifiant $j.g = f$ et $p(g) = k$. Puisque $p(j)$ est un monomorphisme, j en est aussi

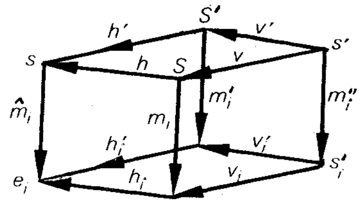
2 un [A1] donc j est un noyau de (h, h') dans p. ∇

PROPOSITION 4. *Soient h_i et h'_i des éléments de H de même but e_i pour tout $i \in J$, et h et h' des morphismes produits de $(h_i)_{i \in J}$ et de $(h'_i)_{i \in J}$ dans $H^\bullet$ relatifs au même produit naturalisé $((\hat{m}_i)_{i \in J}, s)$ de $(e_i)_{i \in J}$. S'il existe des produits fibrés s'_i de (h_i, h'_i) et s' de (h, h') dans $H^\bullet$, alors s' est un produit de $(s'_i)_{i \in J}$.*

$\triangle$. Soient $((h, v), (h', v'))$ et $((h_i, v_i), (h'_i, v'_i))$, pour tout élément i de J, des produits fibrés naturalisés, $((m_i)_{i \in J}, S)$ et $((m'_i)_{i \in J}, S')$ des produits naturalisés de $(\alpha(h_i))_{i \in J}$ et de $(\alpha(h'_i))_{i \in J}$ tels que $\hat{m}_i.h = h_i.m_i$ et $\hat{m}_i.h' = h'_i.m'_i$ pour tout $i \in J$. Comme

$$h_i . m_i . v = \hat{m}_i . h . v = \hat{m}_i . h' . v' = h'_i . m'_i . v'$$

pour tout $i \in J$, il existe un unique m''_i vérifiant



$v_i . m''_i = m_i . v$ et $v'_i . m''_i = m'_i . v'$.

On montre facilement que $((m''_i)_{i \in J}, \alpha(v))$ est un produit naturalisé. Ce résultat se déduit également du théorème de commutativité entre limites projectives (voir par exemple [2], chapitre I). ∇

Nous désignons par $C^\bullet$ une catégorie, par $\mathfrak{N}(H^\bullet, C^\bullet)^{\square\square}$ la catégorie longitudinale des transformations naturelles entre foncteurs de $C^\bullet$ vers $H^\bullet$, dont les unités sont identifiées aux foncteurs de $C^\bullet$ vers $H^\bullet$. La bijection c associant à $h \in H$ la transformation naturelle $(\hat{s}', \overline{h}, \hat{s})$, où

$$s = \alpha(h), \quad s' = \beta(h) \text{ et } \overline{h}(e) = h \text{ pour tout } e \in C^\bullet_o,$$

définit un isomorphisme de $H^\bullet$ sur une sous-catégorie de $\mathfrak{N}(H^\bullet, C^\bullet)^{\square\square}$. 1
Si $T = (F, t, \hat{s}')$ est une transformation naturelle ayant pour source le foncteur constant sur le but de h, alors Th note la transformation naturelle $T \square\square c(h)$, c'est-à-dire la transformation naturelle $(F, t', \hat{s})$, où $t'(e) = t(e) . h$ pour tout $e \in C^\bullet_o$. On a donc

$$(T' \square\square T)h = T' \square\square (Th) \text{ et } T(h . h') = (Th)h'$$

si $T' \square\square T$ et $h . h'$ sont définis.

Soit $\mathfrak{N}(p)$ le foncteur canonique [Al] de $\mathfrak{N}(H^\bullet, C^\bullet)^{\square\square}$ vers 2
$\mathfrak{N}(K^\bullet, C^\bullet)^{\square\square}$ associant à la transformation naturelle $T' = (F', t, F)$ la transformation naturelle $pT' = (p . F', \underline{p}t, p . F)$.

PROPOSITION 5. *Soit* $T = (F, t, F')$ *une transformation naturelle entre foncteurs de* $C^\bullet$ *vers* $H^\bullet$ *telle que* $t(e)$ *soit une* p*-injection pour toute unité* e *de* $C^\bullet$. *Alors* T *est une* $\mathfrak{N}(p)$*-injection. Si* $V = (F, v, \hat{s})$ *et* $W' = (p . F', w', \hat{x})$ *sont des limites projectives naturalisées dans* p *et dans* $K^\bullet$ *respectivement, une limite projective naturalisée* $V' = (F', v', \hat{s}')$ *vérifiant* $pV' = W'$ *détermine une p-injection* j *telle que* $Vj = T \square\square V'$; *de même une* p*-injection* j *de but* s *telle que* $(pV)p(j) = pT \square\square W'$ *détermine une limite projective naturalisée* V' *telle que* $Vj = T \square\square V'$.

Δ. 1°) Montrons que T est une $\mathfrak{N}(p)$-injection. Pour cela, soit $T'=(F,t',F'') \in \mathfrak{N}(H^{\cdot}, C^{\cdot})$ et $pT' = pT \boxbar U$, où $U=(p.F',u,p.F'')$. Si $e \in C^{\cdot}_0$, l'égalité $p(t'(e)) = p(t(e)).u(e)$ assure l'existence d'un unique $t''(e) \in H$ tel que

$$t'(e) = t(e).t''(e) \text{ et } p(t''(e)) = u(e).$$

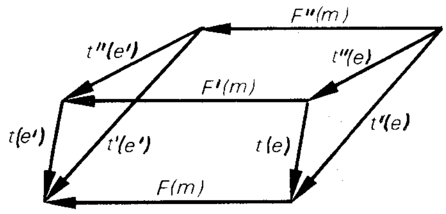
Soit $m \in e'.C.e$; on a $F'(m).t''(e) = t''(e').F''(m)$, car $t(e')$ est une p-injection,

$$t(e').F'(m).t''(e) = F(m).t(e).t''(e) = F(m).t'(e) =$$
$$= t'(e').F''(m) = t(e').t''(e').F''(m)$$

et

$$p(F'(m).t''(e)) = p(F'(m)).u(e) = u(e').p(F''(m)) =$$
$$= p(t''(e').F''(m)).$$

Par suite (F', t'', F'') est une transformation naturelle, qui est l'unique



élément T'' de $\mathfrak{N}(H^{\cdot}, C^{\cdot})$ vérifiant $T \boxbar T'' = T'$ et $pT'' = U$.

2°) Supposons que $V = (F, v, \hat{s})$ et $V' = (F', v', \hat{s}')$ soient des limites projectives naturalisées dans p. La transformation naturelle $T \boxbar V'$ ayant $\hat{s}'$ pour source et F pour but, il existe un unique $j \in s.H.s'$ tel que $Vj = T \boxbar V'$. Supposons $h \in s.H$ et $p(h) = p(j).k$. D'après la partie 1, T est une $\mathfrak{N}(p)$-injection; comme

$$p(Vh) = ((pV)p(j))k = p(Vj)k = pT \boxbar ((pV')k),$$

il existe un unique $T' \in \mathfrak{N}(H^{\cdot}, C^{\cdot})$ vérifiant

$$Vh = T \boxbar T' \text{ et } pT' = (pV')k.$$

Puisque V' est une limite projective naturalisée, il existe un unique $h' \in s'.H$ tel que $V'h' = T'$. Les égalités

$$V(j.h') = (T \boxbar V')h' = T \boxbar T' = Vh$$

entraînent $j.h' = h$. De plus $p(h') = k$, car pV' est une limite projec-

$$\begin{tikzcd}
 & & \hat{s}'' \arrow[dll, "T'"'] \arrow[dl, "c(h')"'] \arrow[ddl, "c(h)"] \\
F' \arrow[d, "T"'] & \hat{s}' \arrow[l, "V'"'] \arrow[d, "c(j)"'] & \\
F & \hat{s} \arrow[l, "V"] &
\end{tikzcd}$$

tive naturalisée et

$$(pV')p(h') = pT' = (pV')k.$$

Donc j est une p-injection.

3°) Supposons que $V = (F, v, \hat{s})$, pV et $W' = (p.F', w', \hat{x})$ soient des limites projectives naturalisées, et que j soit une p-injection de but s vérifiant $(pV)p(j) = pT \boxdot W'$; posons $s' = \alpha(j)$. Comme T est une $\mathfrak{N}(p)$-injection, il existe une unique transformation naturelle V' telle que $Vj = T \boxdot V'$ et $pV' = W'$. Montrons que V' est une limite projective naturalisée. En effet, supposons $T' = (F', t', \hat{s}'') \in \mathfrak{N}(H^{\cdot}, C^{\cdot})$ et $s'' \in H_0^{\cdot}$. La transformation naturelle $T \boxdot T'$ ayant $\hat{s}''$ pour source et F pour but, il existe $h \in s.H.s''$ tel que $Vh = T \boxdot T'$. Puisque $W' = pV'$ est une limite projective naturalisée, il existe un unique $k \in K$ tel que $W'k = pT'$; des égalités

$$(pV)p(h) = pT \boxdot pT' = pT \boxdot (W'k) = p(Vj)k = (pV)(p(j).k),$$

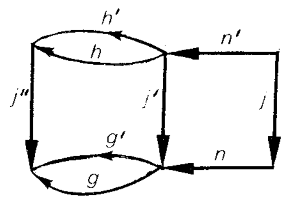
on déduit $p(h) = p(j).k$, car pV est une limite projective naturalisée. j étant une p-injection, il existe un unique $h' \in s'.H.s''$ vérifiant $j.h' = h$ et $p(h') = k$. Ce h' est l'unique morphisme de $H^{\cdot}$ tel que $V'h' = T'$, étant donné que T est une $\mathfrak{N}(p)$-injection et que

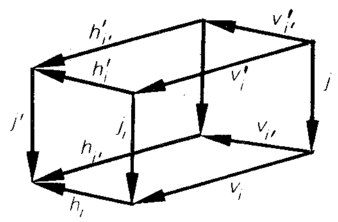
$$T \boxdot (V'h') = (Vj)h' = Vh = T \boxdot T' \text{ et } p(V'h') = W'k = pT'. \quad \nabla$$

COROLLAIRE 1. *Si j_i est une p-injection pour tout $i \in J$ et s'il existe un morphisme j produit de $(j_i)_{i \in J}$ dans p, alors j est une p-injection.*

COROLLAIRE 2. *Soit n un noyau de (g, g') dans p, h et h' des p-sous-morphismes relativement à (j'', j') de g et de g' respectivement. Si m est un noyau de $(p(h), p(h'))$ dans $K^{\cdot}$, il existe un noyau n' de (h, h')*

dans $H^{\cdot}$ *tel que* $p(n') = m$ *si, et seulement si, il existe une* p*-injection* j *vérifiant* $p(n.j) = p(j').m$; *et dans ce cas on peut choisir* n' *tel que* $n.j = j'.n'$.





COROLLAIRE 3. *Supposons que* $((h_i)_{i\in J}, (v_i)_{i\in J})$ *soit un produit fibré naturalisé dans* $H^{\cdot}$. *Soit* j' *une* p*-injection de but* $\beta(h_i)$ *et* h'_i *un* p*-sous-morphisme de* h_i *relativement à* (j', j_i) *pour tout* $i \in J$. *Si* $((p(h'_i))_{i\in J}, (w'_i)_{i\in J})$ *est un produit fibré naturalisé dans* $K^{\cdot}$, *il existe un produit fibré naturalisé* $((h'_i)_{i\in J}, (v'_i)_{i\in J})$ *dans* p *vérifiant* $p(v'_i) = w'_i$ *pour tout* $i \in J$ *si, et seulement si, il existe une* p*-injection* j *telle que* $p(v_i.j) = {}$ ${} = p(j_i).w'_i$ *pour tout* $i \in J$.

2. Catégories structurées.

Nous supposons désormais donnés un univers $\mathfrak{U}$, la catégorie $\mathfrak{M}$ des applications associée et un foncteur p d'une catégorie $H^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$. Nous notons p_γ le foncteur de $H^{\cdot}_\gamma$ vers $\mathfrak{M}_\gamma$ restriction de p, où $H^{\cdot}_\gamma$ et $\mathfrak{M}_\gamma$ sont les groupoïdes des éléments inversibles de $H^{\cdot}$ et de $\mathfrak{M}$ respectivement.

1 DEFINITION. On dit que p est un *foncteur d'homomorphismes saturé* si p est fidèle et si p_γ est un foncteur d'hypermorphismes saturé, i.e. vérifie la condition :

Si $s \in H^{\cdot}_0$ et si f est une bijection telle que $\alpha(f) = p(s)$, il existe un et un seul $h \in H^{\cdot}_\gamma . s$ tel que $p(h) = f$.

PROPOSITION 1. *Soient* p *un foncteur d'homomorphismes saturé et* F *un foncteur de* $C^{\cdot}$ *vers* $H^{\cdot}$. *Si* F *admet une limite projective dans* p, *il existe une unique limite projective naturalisée* T *de but* F *telle que* pT *soit la limite projective naturalisée canonique de* $p.F$ *dans* $\mathfrak{M}$.

Δ. Soit $T' = (F, t', \hat{s}')$ une limite projective naturalisée dans p. Alors pT' est une limite projective naturalisée de but $p.F = F'$. Par ailleurs soit A la limite projective canonique de F', c'est-à-dire [A1] l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in C_0^{\cdot}}$ telles que

$$x_i \in F'(i) \text{ et } F'(m)(x_i) = x_j \text{ si } m \in j.C.i;$$

notons v_i la projection canonique de A vers $F'(i)$ pour toute unité i de $C^{\cdot}$. Il existe une et une seule bijection f de $p(s')$ sur A telle que $v_i . f = p(t'(i))$ pour tout $i \in C_0^{\cdot}$. Par définition d'un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe un unique $h \in H_{\gamma}^{\cdot}.s'$ appliqué par p sur f. Il s'ensuit que $T = (F, t, \hat{s})$ est la limite projective naturalisée cherchée, où $s = \beta(h)$ et $t(i) = t'(i).h^{-1}$ pour toute unité i de $C^{\cdot}$. ∇

HYPOTHESE. Nous supposons dans toute la suite que p est un foncteur d'homomorphismes saturé de $H^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$. 1

De la proposition 1, il résulte en particulier que, si (h, h') admet un produit fibré dans p, il existe un produit fibré naturalisé $((h,v),(h',v'))$ tel que $p(v)$ et $p(v')$ soient les restrictions des projections canoniques du produit $p(\alpha(h)) \times p(\alpha(h'))$ à la partie $p(h) \vee p(h')$ de ce produit formée des couples (x, x') vérifiant $p(h)(x) = p(h')(x')$. Nous l'appellerons *produit fibré naturalisé canonique de* (h, h') *dans* p, nous poserons $h \vee h' = \alpha(v)$ et nous dirons que v et v' sont les projections canoniques de $h \vee h'$ vers $\alpha(h)$ et $\alpha(h')$.

De même, si $(s_i)_{i \in J}$ admet un produit dans p, nous noterons $\prod_{i \in J} s_i$ son *produit canonique dans* p, c'est-à-dire le produit S tel que $p(S)$ soit l'ensemble produit de $(p(s_i))_{i \in J}$ et que la projection canonique de S vers s_i soit l'unique $v_i \in s_i.H.S$ tel que $p(v_i)((x_i)_{i \in J}) = x_i$.

Enfin si (h, h') admet un noyau dans p, son noyau canonique est l'unique n tel que $p(n)$ soit l'injection canonique dans $p(\alpha(h))$ de sa partie formée des x vérifiant $p(h)(x) = p(h')(x)$.

Par ailleurs, si j est une p-injection, où $p(j)$ est l'injection canonique (B, ι, B') de $B' \subset B$ dans B, alors $s' = \alpha(j)$ est l'unique p-sous-structure de $s = \beta(j)$ vérifiant $p(s') = B'$; on dit que c'est la p-sous-structure de s *définie par* B'.

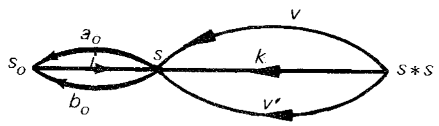
DEFINITION. On appelle *catégorie p-structurée* un couple $(C^{\cdot}, s)$ vérifiant les conditions suivantes :

1°) $C^{\cdot}$ est une catégorie, $s \in H^{\cdot}_o$ et $p(s) = C$;

2°) Il existe une unité s_o de $H^{\cdot}$ et des éléments $a_o \in s_o . H . s$, $b_o \in s_o . H . s$ et $i \in s . H . s_o$ tels que

$$p(i) = (C, \iota, C^{\cdot}_o), \qquad p(a_o) = (C^{\cdot}_o, \alpha, C), \qquad p(b_o) = (C^{\cdot}_o, \beta, C).$$

3°) Il existe un produit fibré naturalisé canonique $a_o \vee b_o = s * s$ dans p et un $k \in s . H . s * s$ tel que $p(k) = (C, \kappa, C^{\cdot} * C^{\cdot})$ soit la loi de composition de $C^{\cdot}$.



PROPOSITION 2. *Soit* $(C^{\cdot}, s)$ *une catégorie* p*-structurée. Avec les notations de la définition,* s_o *est une* p*-sous-structure de* s *et* i *un noyau de* $(s, i . a_o)$ *et un noyau de* $(s, i . b_o)$. *S'il existe un produit canonique*
1 $s \times s$ *de* (s, s) *dans* p, *alors* $s * s$ *en est une* p*-sous-structure.*

Δ. Puisque p est fidèle et que $p(a_o . i)$ est l'application identique de $C^{\cdot}_o$, l'élément a_o est un inverse à gauche de i; il s'ensuit (proposition 1-1) que i est une p-injection. De plus i est un noyau de (s, a), où $a = i . a_o$, d'après la proposition 3-1, car $p(i)$ est le noyau canonique de $(p(s), p(a))$ dans $\mathfrak{M}$. On voit de même que i est un noyau de (s, b), où $b = i . b_o$. La dernière affirmation résulte de la proposition 2-1. ∇

PROPOSITION 3. *Si* p *est un foncteur à produits fibrés finis (resp. à noyaux),* $(C^{\cdot}, s)$ *est une catégorie* p*-structurée si, et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

1°) $C^{\cdot}$ *est une catégorie,* $s \in H^{\cdot}_o$ *et* $p(s) = C$.

2'°) Il existe $a \in s . H . s$ *et* $b \in s . H . s$ *tels que*

$$p(a) = (C, \alpha, C) \quad \text{et} \quad p(b) = (C, \beta, C)$$

et un produit fibré naturalisé $((a, v), (b, v'))$ *dans* p.

3'°) Si on désigne par $s*s$ *le produit fibré canonique de* (a, b)
2 *dans* p, *il existe* $k \in s . H . s * s$ *tel que* $p(k) = (C, \kappa, C^{\cdot} * C^{\cdot})$.

Δ. 1°) Si $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie p-structurée, les conditions sont vérifiées en prenant

$$a = i . a_o \text{ et } b = i . b_o ;$$

en effet, i étant un monomorphisme, $s * s$ est un produit fibré de (a, b) si, et seulement si, c'est un produit fibré de (a_o, b_o).

2°) Supposons que p soit à noyaux et que les conditions de la proposition soient remplies. Il existe un noyau canonique i de (s, a) dans p, et $p(i)$ est l'injection canonique de $C_o^\bullet$ dans C. Comme i est une p-injection (proposition 3-1) et que $p(a) = p(i) . (C_o^\bullet, \alpha, C)$, il existe un et un seul $a_o \in H . s$ vérifiant

$$i . a_o = a \text{ et } p(a_o) = (C_o^\bullet, \alpha, C).$$

De même il existe $b_o \in H . s$ tel que $i . b_o = b$ et $p(b_o) = (C_o^\bullet, \beta, C)$. Le produit fibré de (a, b) étant aussi un produit fibré de (a_o, b_o), il en résulte que $(C^\bullet, s)$ est une catégorie p-structurée.

3°) a-Supposons vérifiées les conditions 1 et 2' de l'énoncé. Il existe un produit fibré naturalisé canonique $((a, v), (b, v'))$ dans p et $s * s = a \vee b$ admet $C^\bullet * C^\bullet = (C, \alpha, C) \vee (C, \beta, C)$ pour image par p. Comme p est fidèle, $a . s = a = b . a$, car $\alpha(x) = \beta(\alpha(x))$ pour tout $x \in C$. Par suite il existe un unique $j_a \in s * s . H . s$ vérifiant

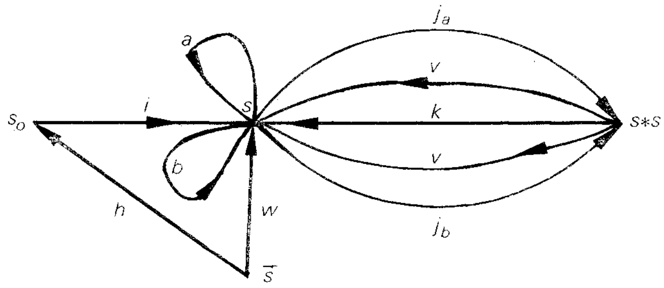
$$v . j_a = s \text{ et } v' . j_a = a.$$

L'application $p(j_a)$ de C dans $C^\bullet * C^\bullet$ associe $(x, \alpha(x))$ à x. De même les égalités $a . b = b = b . s$ assurent l'existence d'un unique $j_b \in s * s . H . s$ tel que

$$v . j_b = b \text{ et } v' . j_b = s,$$

et $p(j_b)$ associe $(\beta(x), x)$ à $x \in C$; remarquons que j_a et j_b sont des p-injections d'après la proposition 1-1, car ils ont des inverses à gauche.

b-Supposons de plus que p soit à produits fibrés finis et que la condition 3' soit remplie. Montrons qu'il existe une p-injection i telle que $p(i) = (C, \iota, C_o^\bullet)$. Une démonstration analogue à la fin de la partie 2 prouvera alors que $(C^\bullet, s)$ est une catégorie p-structurée. Voyons d'abord qu'il existe une p-injection de source $\bar{s}$, de but s, telle que $p(\bar{s})$ soit la diagonale D de $C_o^\bullet \times C_o^\bullet$. Avec les notations de la partie a, il existe un produit fibré naturalisé canonique $((j_a, w), (j_b, w'))$ dans p. Si $\bar{s}$ est la source de w, l'ensemble $p(\bar{s})$ est formé des couples $(x, y) \in C \times C$ tels que $(x, \alpha(x)) = (\beta(y), y)$, i.e. tels que $x = \beta(x)$ et $\alpha(x) = y$, ou encore tels que $x = y \in C^{\cdot}_{o}$. Autrement dit, $p(\bar{s}) = D$. Les applications $p(w)$ et $p(w')$ de D dans C associant e à $(e, e) \in D$, on trouve $w = w'$,



car p est fidèle. Il en résulte que w est un noyau de (j_a, j_b) dans p et que (prop. 3-1) w est une p-injection. L'application $f: (e, e) \mapsto e$ de D sur $C^{\cdot}_{o}$ étant une bijection, il existe un unique inversible h de $H^{\cdot}$ de source $\bar{s}$ tel que $p(h) = f$. Le composé $i = w . h^{-1}$ est une p-injection et

$$p(i) = p(w) . f^{-1} = (C, \iota, C^{\cdot}_{o}).$$

Ceci achève la démonstration. ∇

DEFINITION. On appelle *foncteur p-structuré* un triplet $((\bar{C}^{\cdot}, \bar{s}), h, (C^{\cdot}, s))$ vérifiant les conditions suivantes :

1°) $(C^{\cdot}, s)$ et $(\bar{C}^{\cdot}, \bar{s})$ sont des catégories p-structurées.

2°) $h \in \bar{s}.H.s$ et $p(h)$ définit un foncteur de $C^{\cdot}$ vers $\bar{C}^{\cdot}$, désigné par $(\bar{C}^{\cdot}, \underline{h}, C^{\cdot})$.

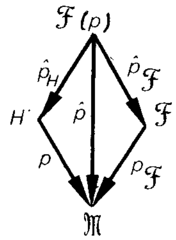
Nous noterons $\mathfrak{F}(p)$ l'ensemble des foncteurs p-structurés. On voit que $\mathfrak{F}(p)$ est une catégorie pour la loi de composition

$$(((\bar{C}^{\cdot}_1, \bar{s}_1), h_1, (C^{\cdot}_1, s_1)), ((\bar{C}^{\cdot}, \bar{s}), h, (C^{\cdot}, s))) \to ((\bar{C}^{\cdot}_1, \bar{s}_1), h_1 . h, (C^{\cdot}, s))$$

si, et seulement si, $(C^{\cdot}_1, s_1) = (\bar{C}^{\cdot}, \bar{s})$.

Cette catégorie admet pour classe d'objets l'ensemble $\mathfrak{F}(p)_o$ des catégories p-structurées.

On définit des foncteurs p_H et $p_{\mathfrak{F}}$ de $\mathfrak{F}(p)$ vers $H^{\cdot}$ et vers la catégorie $\mathcal{F}$ des foncteurs en associant à $((\overline{C}^{\cdot}, \overline{s}), h, (C^{\cdot}, s))$ respectivement h et $(\overline{C}^{\cdot}, \underline{h}, C^{\cdot})$. On note $\hat{p}$ le foncteur $p.\hat{p}_H$ de $\mathcal{F}(p)$ vers $\mathfrak{M}$. On a aussi $\hat{p} = p_{\mathcal{F}}.\hat{p}_{\mathcal{F}}$, où $p_{\mathcal{F}}$ est le foncteur d'oubli de $\mathcal{F}$ vers $\mathfrak{M}$.



PROPOSITION 4. *$\hat{p}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé.* 1

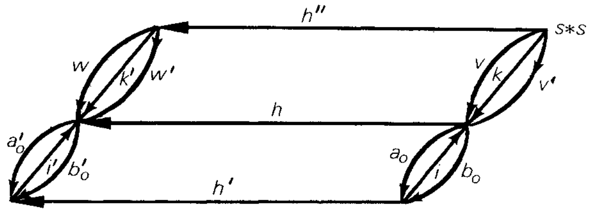
Δ. $\hat{p}_H$ étant évidemment fidèle et p étant fidèle, $\hat{p}$ est fidèle. Soient $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée et f une bijection de C sur C'. Il existe par hypothèse un unique $h \in H^{\cdot}_{\gamma}.s$ tel que $p(h) = f$. Posons $s' = \beta(h)$ et notons $C'^{\cdot}$ la catégorie image de $C^{\cdot}$ par f.

1°) Montrons que $(C'^{\cdot}, s')$ est une catégorie p-structurée. En effet, reprenons pour $(C^{\cdot}, s)$ les notations de la définition d'une catégorie p-structurée.

a- Si $s_o = \alpha(i)$ et si f' est la bijection de $C^{\cdot}_o$ sur $C'^{\cdot}_o$ restriction de f, il existe $h' \in H^{\cdot}_{\gamma}.s_o$ tel que $p(h') = f'$. Soit $s'_o = \beta(h')$. On trouve

$$i' = h.i.h'^{-1} \in s'.H.s'_o,\quad a'_o = h'.a_o.h^{-1} \in s'_o.H.s',$$
$$b'_o = h'.b_o.h^{-1} \in s'_o.H.s',\quad p(i') = (C'^{\cdot}, \iota, C'^{\cdot}_o),$$
$$p(a'_o) = (C'^{\cdot}_o, \alpha', C'),\quad p(b'_o) = (C'^{\cdot}_o, \beta', C'),$$

où α' et β' sont les surjections source et but de $C'^{\cdot}$.



b- Puisque h' est inversible et que $h'.a_o = a'_o.h$ et $h'.b_o = b'_o.h$, le couple $((a'_o.h, v), (b'_o.h, v'))$ est un produit fibré naturalisé dans p, ainsi que $((a'_o, h.v), (b'_o, h.v'))$, car h est inversible. Par suite, il existe un produit fibré naturalisé $((a'_o, w), (b'_o, w'))$ canonique. L'unique inversible h'' tel que

$$w.h'' = h.v \text{ et } w'.h'' = h.v'$$

admet pour image par p l'application de $C^{\bullet} * C^{\bullet}$ vers $C'^{\bullet} * C'^{\bullet}$ restriction de $f * f$. Il en résulte que, si $k' = h.k.h''^{-1}$, l'application $p(k')$ est la loi de composition de $C'^{\bullet}$. Donc $(C'^{\bullet}, s') \in \mathcal{F}(p)_o$.

2°) f définit l'isomorphisme canonique de $C^{\bullet}$ sur $C'^{\bullet}$, de sorte que $\hat{h} = ((C'^{\bullet}, s'), h, (C^{\bullet}, s))$ est un foncteur p-structuré, qui est un inversible de $\mathcal{F}(p)$. Si $\hat{h}_1 = ((C_1^{\bullet}, s_1), h_1, (C^{\bullet}, s)) \in \mathcal{F}(p)_\gamma$ et $\bar{p}(\hat{h}_1) = f$, alors $C_1^{\bullet} = C'^{\bullet}$ et

$$h_1 = \bar{p}_H(\hat{h}_1) \in H_\gamma^{\bullet}.s, \text{ d'où } h = h_1 \text{ et } \hat{h}_1 = \hat{h}.$$

Ainsi $\bar{p}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé. ∇

Si $(C^{\bullet}, s)$ est une catégorie p-structurée et f une bijection de C sur C', l'unique catégorie p-structurée $(C'^{\bullet}, s')$ associée à $(C^{\bullet}, s)$ et à f par la preuve précédente est appelée *catégorie p-structurée image de $(C^{\bullet}, s)$ par f.*

PROPOSITION 5. *Soient $(C^{\bullet}, s)$ une catégorie p-structurée et $C'^{\bullet}$ une sous-catégorie de $C^{\bullet}$. Si l'une des conditions suivantes est vérifiée, C' définit une $\bar{p}$-sous-structure $(C'^{\bullet}, s')$ de $(C^{\bullet}, s)$.*

1- p est un foncteur à produits fibrés finis et C' définit une p-sous-structure s' de s.

2- p est un foncteur à noyaux et $C'^{\bullet} * C'^{\bullet}$ définit une p-sous-structure $\bar{s}'$ de $s * s = a \vee b$.

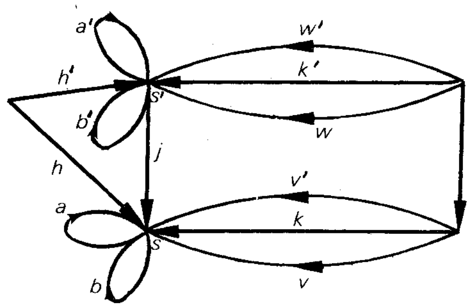
1 Δ. 1°) Nous reprenons les notations de la proposition 3 et nous désignons par α', β' et κ' les surjections source, but et loi de composition de $C'^{\bullet}$; ce sont des restrictions de celles α, β et κ de $C^{\bullet}$.

a-Supposons la condition 1 vérifiée et soit j la p-injection canonique de source s', de but s. Comme

$$p(j).(C', \alpha', C') = p(a).p(j),$$

il existe un p-sous-morphisme a' de a relativement à (j, j), vérifiant $p(a') = (C', \alpha', C')$. De même il existe un p-sous-morphisme b' de b relativement à (j, j), et $p(b') = (C', \beta', C')$. Soient $((a, v), (b, v'))$ et $((a', w), (b', w'))$ les produits fibrés naturalisés canoniques dans p (qui existent par hypothèse). D'après la proposition 5-1, l'unique j' tel que

$$v . j' = j . w \quad \text{et} \quad v' . j' = j . w'$$



est une p-injection. L'application $p(j')$ étant l'injection canonique de $C'^{\cdot} * C'^{\cdot}$ dans $C^{\cdot} * C^{\cdot}$, on a

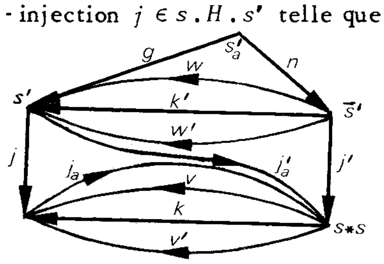
$$p(k).p(j') = p(j).(C', \kappa', C'^{\cdot} * C'^{\cdot}),$$

de sorte qu'il existe un p-sous-morphisme k' de k relativement à (j, j') vérifiant $p(k') = (C', \kappa', C'^{\cdot} * C'^{\cdot})$. Donc $(C'^{\cdot}, s')$ est une catégorie p-structurée.

b- Supposons la condition 2 remplie, et soit j' la p-injection canonique de source $\bar{s}'$, de but $s * s$. Il existe un noyau canonique n de $(v'.j', a.v.j')$ dans p, à savoir la p-injection canonique de but $\bar{s}'$, de source s'_a, où $p(s'_a)$ est l'ensemble des couples $(x, \alpha(x))$, $x \in C'$. Le foncteur d'homomorphismes p étant saturé, il existe $g \in H^{\cdot}_{\gamma} . s'_a$ tel que $p(g)$ soit la bijection $(x, \alpha(x)) \to x$ de $p(s'_a)$ sur C'; posons $s' = \beta(g)$. Le composé $j'.n.g^{-1}$ est une p-injection j'_a appliquée par p sur une restriction de l'application $\gamma_a : x \to (x, \alpha(x))$ de C dans $C^{\cdot} * C^{\cdot}$. D'après la partie 3a de la proposition 3, il existe une p-injection $j_a \in s * s . H . s$ vérifiant $p(j_a) = \gamma_a$. Puisque

$$p(j'_a) = p(j_a).(C, \iota, C'),$$

il existe une unique p-injection $j \in s . H . s'$ telle que



$$j'_a = j_a . j \text{ et } p(j) = (C, \iota, C').$$

On voit comme dans la partie a qu'il existe des p-sous-morphismes a' et b' de a et b relativement à (j, j) et k' de k relativement à (j, j') vérifiant :

$$p(a') = (C', \alpha', C'), \quad p(b') = (C', \beta', C'),$$
$$p(k') = (C', \kappa', C'^{\cdot} * C'^{\cdot}).$$

Enfin le corollaire 3 de la proposition 5-1 entraîne qu'il existe un produit fibré naturalisé canonique $((a', w), (b', w'))$ dans p et que

$$\bar{s}' = a' \vee b', \quad v.j' = j.w \text{ et } v'.j' = j.w'.$$

Ainsi $(C'^{\cdot}, s')$ est une catégorie p-structurée.

2°) Nous venons de voir, dans les deux cas précédents, que $\hat{j} = ((C^{\cdot}, s), j, (C'^{\cdot}, s'))$ est un foncteur p-structuré. Montrons que $\hat{j}$ est une $\hat{p}$-injection. En effet, supposons

$$\hat{h} = ((C^{\cdot}, s), h, (\bar{C}^{\cdot}, \bar{s})) \in \mathfrak{F}(p) \text{ et } \hat{p}(\hat{h}) = \hat{p}(\hat{j}).k.$$

Puisque j est une p-injection et que

$$p(h) = \hat{p}(\hat{h}) = p(j).k,$$

il existe un unique $h' \in s'.H.\bar{s}$ vérifiant $p(h') = k$ et $j.h' = h$. L'application $p(h)$ définissant un foncteur de $\hat{C}^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ prenant ses valeurs dans C', l'application $p(h')$ définit un foncteur de $\bar{C}^{\cdot}$ vers $C'^{\cdot}$. Donc $((C'^{\cdot}, s'), h', (\bar{C}^{\cdot}, \bar{s}))$ est l'unique élément $\hat{h}'$ de $\mathfrak{F}(p)$ tel que $\hat{j}.\hat{h}' = \hat{h}$ et $\hat{p}(\hat{h}') = k$, de sorte que $(C'^{\cdot}, s')$ est une $\hat{p}$-sous-structure de $(C^{\cdot}, s)$. ∇

REMARQUE. Soient $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée et $(C'^{\cdot}, s')$ une de ses $\hat{p}$-sous-structures. Comme (C, ι, C') définit un foncteur de $C'^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$, la catégorie $C'^{\cdot}$ est une sous-catégorie de $C^{\cdot}$; mais s' peut ne pas être une p-sous-structure de s. Cependant s'il existe une p-sous-structure $\bar{s}$ de s définie par C', on a $s' = \bar{s}$, car $(C'^{\cdot}, \bar{s})$ est alors l'unique $\hat{p}$-sous-structure de $(C^{\cdot}, s)$ définie par C', si p est à produits fibrés finis.

DEFINITION. On appelle *sous-catégorie p-structurée* de $(C^{\cdot}, s) \in \mathfrak{F}(p)_0$ une $\hat{p}$-sous-structure $(C'^{\cdot}, s')$ de $(C^{\cdot}, s)$ telle que s' soit une p-sous-structure de s. On appelle *$\hat{p}$-monomorphisme strict* une $\hat{p}$-injection $\hat{j}$ telle que $\hat{p}_H(\hat{j})$ soit un p-monomorphisme.

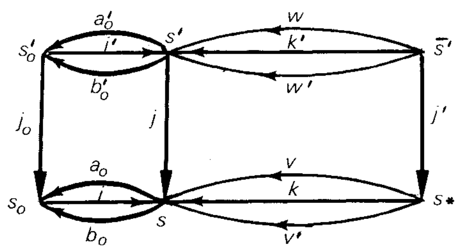
Pour que $\hat{j} = ((C^\bullet, s), j, (\overline{C}^\bullet, \overline{s})) \in \mathfrak{F}(p)$ soit un $\hat{p}$-monomorphisme strict, il faut et il suffit que $p(j)$ soit une injection et que la catégorie p-structurée $(C'^\bullet, s')$ image de $(\overline{C}^\bullet, \overline{s})$ par la bijection de $\overline{C}$ sur C' restriction de $p(j)$ soit une sous-catégorie p-structurée de $(C^\bullet, s)$ (i.e. que s' soit une p-sous-structure de s).

PROPOSITION 6. *Soient $(C^\bullet, s)$ une catégorie p-structurée et $C'^\bullet$ une sous-catégorie de $C^\bullet$. Alors C' définit une sous-catégorie p-structurée de $(C^\bullet, s)$ si, et seulement si, C', $C'^\bullet_o$ et $C'^\bullet * C'^\bullet$ définissent respectivement des p-sous-structures de s, de s_o et de $s * s$.* 1

Δ. Reprenons les notations de la définition d'une catégorie p-structurée et soit $((a_o, v), (b_o, v'))$ le produit fibré naturalisé canonique dans p. Nous notons α', β' et κ' respectivement les surjections source, but et loi de composition de $C'^\bullet$.

1°) Soit $(C'^\bullet, s')$ une sous-catégorie p-structurée de $(C^\bullet, s)$. Comme $C'^\bullet_o \subset C^\bullet_o$, la p-sous-structure s'_o de s', et a fortiori de s, définie par $C'^\bullet_o$ est une p-sous-structure de s_o. Si a'_o et b'_o sont les p-sous-morphismes de a_o et b_o structurant α' et β', le produit fibré canonique $s' * s' = a'_o \vee b'_o$ est une p-sous-structure de $s * s = a_o \vee b_o$ (proposition 5-1).

2°) Inversement, supposons qu'il existe des p-sous-structures s'_o de s_o, s' de s et $\overline{s}'$ de $s * s$ définies par $C'^\bullet_o$, par C' et par $C'^\bullet * C'^\bullet$; soient $j_o \in s_o.H.s'_o$, $j \in s.H.s'$ et $j' \in s * s.H.\overline{s}'$ les p-injections canoniques. Puisque α', β' et κ' sont des restrictions de α, β et κ, on voit comme dans la proposition 5 qu'il existe des p-sous-morphismes a'_o et b'_o de a_o et b_o relativement à (j_o, j), i' de i relativement à (j, j_o), k', w et w' de k, v, v' relativement à (j, j'), tels que les morphismes



a'_o, b'_o, i' et k' structurent respectivement α', β', $(C', \iota, C'^{\bullet}_o)$ et κ' et que $((a'_o, w),(b'_o, w'))$ soit un produit fibré naturalisé canonique dans p. Par suite $(C'^{\bullet}, s')$ est une sous-catégorie p-structurée de $(C^{\bullet}, s)$, et $\overline{s'} = s' * s'$. ∇

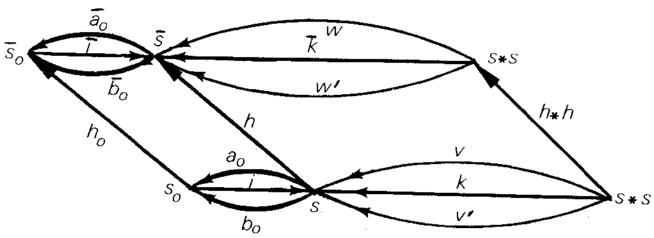
Soit $\hat{h} = ((\overline{C}^{\bullet}, \overline{s}), h, (C^{\bullet}, s))$ un foncteur p-structuré. Si s_o et s_o sont les p-sous-structures de s et de $\overline{s}$ définies par $C^{\bullet}_o$ et par $\overline{C}^{\bullet}_o$ et i et $\overline{i}$ les p-injections canoniques correspondantes, il existe un p-sous-morphisme h_o de h relativement à $(\overline{i}, i)$, car $p(h)$ définit un foncteur de $C^{\bullet}$ vers $\overline{C}^{\bullet}$ de sorte que $p(h)(C^{\bullet}_o) \subset \overline{C}^{\bullet}_o$. Par ailleurs, si $((a, v),(b, v'))$ et $((\overline{a}, w),(\overline{b}, w'))$ sont les produits fibrés naturalisés intervenant dans la définition de $(C^{\bullet}, s)$ et de $(\overline{C}^{\bullet}, \overline{s})$, l'égalité $\overline{a}.h.v = \overline{b}.h.v'$ entraîne qu'il existe un unique $h * h \in H$ tel que

$$w.h * h = h.v \quad \text{et} \quad w'.h * h = h.v';$$

ainsi $h * h$ admet pour source $s * s = a \vee b$, pour but $\overline{s} * \overline{s} = \overline{a} \vee \overline{b}$ et $p(h * h)$ est l'application

$$(x, y) \to (p(h)(x), p(h)(y)) \text{ de } C^{\bullet} * C^{\bullet} \text{ dans } \overline{C}^{\bullet} * \overline{C}^{\bullet}.$$

Comme h_o et $h * h$ sont déterminés de façon unique, les applications $\hat{h} \to h_o$ et $\hat{h} \to h * h$ de $\mathfrak{F}(p)$ dans H définissent des foncteurs $\not{p}^o$ et $\not{p}''$ de $\mathfrak{F}(p)$ vers $H^{\bullet}$.

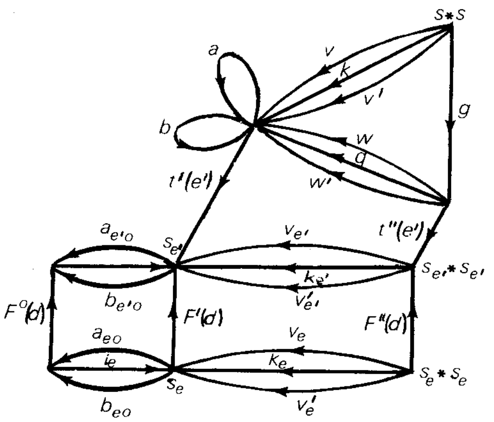


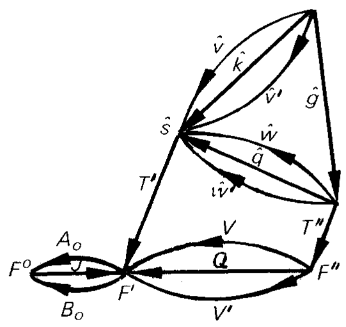
PROPOSITION 7. *Supposons que F soit un foncteur d'une catégorie $K^{\bullet}$ vers $\mathfrak{F}(p)$ et que les foncteurs $F' = \not{p}_H . F$ et $F'' = \not{p}'' . F$ admettent des limites projectives dans p. Alors si $F^o = \not{p}^o . F$ admet une limite projective dans p (resp. si p est à produits fibrés finis ou à noyaux), F admet une limite projective $(C^{\bullet}, s)$ dans $\not{p}$, où $C^{\bullet}$ et s sont respectivement les*
1+ *limites projectives canoniques de $\not{p}_{\mathfrak{F}} . F$ et de F'.*

Δ. Soit e une unité de $K^{\bullet}$. Posons

$$F(e) = (C^{\bullet}_{e}, s_e), \quad F^o(e) = s_{eo}, \quad F''(e) = s_e * s_e.$$

Soient $a_{eo} \in s_{eo}.H.s_e$, $b_{eo} \in s_{eo}.H.s_e$, $k_e \in s_e.H.s_e * s_e$ et $i_e \in s_e.H.s_{eo}$ les morphismes structurant les applications source α_e, but β_e et loi de composition κ_e de $C^{\bullet}_e$ et l'injection canonique $(C_e, \iota, C^{\bullet}_{eo})$. Il existe des produits fibrés naturalisés $((a_{eo}, v_e), (b_{eo}, v'_e))$ dans p, et $((a_e, v_e), (b_e, v'_e))$ est aussi un produit fibré naturalisé dans p, où $a_e = i_e.a_{eo}$ et $b_e = i_e.b_{eo}$. Si $\tilde{a}_o$, $\tilde{b}_o$, $\tilde{k}$, $\tilde{i}$, $\tilde{v}$ et $\tilde{v}'$ sont les applications de $K^{\bullet}_o$ dans H associant à e respectivement a_{eo}, b_{eo}, k_e, i_e, v_e et v'_e, montrons que les triplets $A_o = (F^o, \tilde{a}_o, F')$, $B_o = (F^o, \tilde{b}_o, F')$, $Q = (F', \tilde{k}, F'')$, $J = (F', \tilde{i}, F^o)$, $V = (F', \tilde{v}, F'')$ et $V' = (F', \tilde{v}', F'')$ sont des transformations naturelles. En effet, si $d \in e'.K.e$, on obtient les





$\hat{m} = c(m)$

égalités

$$a_{e'o}.F'(d) = F^o(d).a_{eo}, \quad b_{e'o}.F'(d) = F^o(d).b_{eo},$$

$$k_{e'}.F''(d) = F'(d).k_e, \quad i_{e'}.F^o(d) = F'(d).i_e,$$

$$v_{e'}.F''(d) = F'(d).v_e, \quad v'_{e'}.F''(d) = F'(d).v'_e,$$

car p est fidèle et $p(F'(d))$ définit un foncteur de $C^{\bullet}_e$ vers $C^{\bullet}_{e'}$. De plus $((A_o, V), (B_o, V'))$ est un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{N}(H^{\bullet}, K^{\bullet})^{\boxminus}$ ([2], chapitre I) et $((pA_o, pV), (pB_o, pV'))$ un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^{\bullet})^{\boxminus}$. De même $((A, V), (B, V'))$, où $A = J \boxminus A_o$ et $B = J \boxminus B_o$, est un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{N}(p)$. 1

2°) Soient $T' = (F', t', \hat{s})$ et $T'' = (F'', t'', \hat{s}')$ des limites projectives naturalisées canoniques dans p. Si $M^{\boxplus}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(H^\bullet, K^\bullet)^{\boxplus}$ ayant pour seules unités F' et F'', il existe un unique foncteur L de $M^{\boxplus}$ vers $H^\bullet$ qui soit un foncteur limite projective partiel sur $H^\bullet$ associé aux éjecteurs (T', s) et (T'', s'). Posons:

$$a = L(A), \quad b = L(B), \quad q = L(Q), \quad w = L(V), \quad w' = L(V')$$

et soit z le foncteur injection canonique de $M^{\boxplus}$ vers $\mathfrak{N}(H^\bullet, K^\bullet)^{\boxplus}$. Comme L est un foncteur coadjoint partiel du foncteur canonique c de $H^\bullet$ vers $\mathfrak{N}(H^\bullet, K^\bullet)^{\boxplus}$, si Ω est une limite projective naturalisée dans $M^{\boxplus}$ et si $z\Omega$ est une limite projective naturalisée, alors $L\Omega$ est une limite projective naturalisée, dans $H^\bullet$ ([A1], corollaire, proposition 8-5-I, ou [2], théorème de commutativité des limites projectives). En particulier, $((A, V), (B, V'))$ étant un produit fibré naturalisé, $((a, w), (b, w'))$ est un produit fibré naturalisé dans $H^\bullet$. Etant donné que $((pA, pV), (pB, pV'))$ est un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{N}(\mathfrak{M}, K^\bullet)^{\boxplus}$ et que pT et pT' sont des limites projectives naturalisées dans $\mathfrak{M}$, on voit par un raisonnement analogue que $((p(a), p(w)), (p(b), p(w')))$ est aussi un produit fibré naturalisé dans $\mathfrak{M}$. Il s'ensuit qu'il existe un produit fibré naturalisé canonique $((a, v), (b, v'))$ dans p et un unique $g \in H^\bullet_\gamma$ tel que $v = w.g$ et $v' = w'.g$; soit $k = q.g$. Puisque $pT' = (\hat{p}.F, \underline{p}t', \hat{C})$ et pT'' sont les limites projectives naturalisées canoniques dans $\mathfrak{M}$, les applications $p(a)$ et $p(b)$ associent à $(x_e)_{e \in K^\bullet_o} \in C$ respectivement $(\alpha_e(x_e))_{e \in K^\bullet_o}$ et $(\beta_e(x_e))_{e \in K^\bullet_o}$, tandis que $p(g)$ et $p(k)$ associent respectivement

$$((x'_e, x_e))_{e \in K^\bullet_o} \text{ et } (x'_e . x_e)_{e \in K^\bullet_o} \text{ à } ((x'_e)_{e \in K^\bullet_o}, (x_e)_{e \in K^\bullet_o}).$$

Ceci montre que a, b et k structurent les applications source (C, α, C), but (C, β, C) et loi de composition κ de la catégorie $C^\bullet$ limite projective canonique du foncteur $\hat{p}\mathcal{J}.F$.

a-Si p est à produits fibrés finis ou à noyaux, ce qui précède montre que $(C^\bullet, s)$ vérifie les conditions de la proposition 3, de sorte que cette proposition affirme que $(C^\bullet, s)$ est une catégorie p-structurée.

b-Supposons que F^o admette une limite projective dans p et soit $T = (F^o, t, \hat{s}_o)$ la limite projective naturalisée canonique dans p; l'ensemble $p(s_o)$ étant la limite projective canonique de $p.F^o$, on trouve $p(s_o) = C_o^{\bullet}$. Les uniques morphismes a_o, b_o et i vérifiant

$$T a_o = A_o \square\!\square T', \quad T b_o = B_o \square\!\square T' \text{ et } T'i = J \square\!\square T$$

sont appliqués par p respectivement sur $(C_o^{\bullet}, \alpha, C)$, sur $(C_o^{\bullet}, \beta, C)$ et sur $(C, \iota, C_o^{\bullet})$, et $((a_o, v), (b_o, v'))$ est un produit fibré naturalisé dans p. Donc $(C^{\bullet}, s)$ est une catégorie p-structurée.

3°) Montrons que $u = (C^{\bullet}, s)$ est une limite projective de F dans $\hat{p}$.

a-Si e est une unité de $K^{\bullet}$, on a $t'(e) \in s_e.H.s$ et $p(t'(e))$ définit un foncteur de $C^{\bullet}$ vers $C_e^{\bullet}$; par suite

$$y(e) = (F(e), t'(e), u) \in \mathfrak{F}(p).$$

De plus $F(d).y(e) = y(e')$ si $d \in e'.K.e$, car $\hat{p}_H$ est fidèle et

$$\hat{p}_H(F(d).y(e)) = F'(d).t'(e) = t'(e') = \hat{p}_H(y(e')).$$

Ainsi $Y = (F, y, \hat{u})$ est une transformation naturelle, où y est l'application $e \to y(e)$ de $K_o^{\bullet}$ dans $\mathfrak{F}(p)$, et $\hat{p}_H Y = T'$.

b-Supposons que $Y' = (F, y', \hat{u}')$ soit une transformation naturelle, où $u' = (G^{\bullet}, S) \in \mathfrak{F}(p)_o$. Comme $\hat{p}_H Y'$ est une transformation naturelle de $\hat{S}$ vers F', il existe un unique $h \in s.H.S$ vérifiant $T'h = \hat{p}_H Y'$, et $p(h)$ définit l'unique foncteur de $G^{\bullet}$ vers $C^{\bullet}$ tel que $(\hat{p}\mathfrak{F} Y) p(\overline{h}) =$ 1
$= \hat{p}\mathfrak{F} Y'$. On en déduit que (u, h, u') est l'unique foncteur p-structuré $\overline{h}$ tel que $Y\overline{h} = Y'$. Ceci prouve que Y est une limite projective naturalisée dans $\hat{p}$. ∇

COROLLAIRE. *Si p est un foncteur à $K^{\bullet}$-limites projectives (resp. à K-produits, resp. à produits fibrés finis, resp. à noyaux), il en est de même pour $\hat{p}$.*

PROPOSITION 8. *Soient F un foncteur de $K^{\bullet}$ vers $\mathfrak{F}(p)$ et $F' = \hat{p}_H.F$, $F'' = \hat{p}''.F$. Dans les deux cas suivants, F admet une limite projective canonique $(C^{\bullet}, s)$ dans $\hat{p}$:*

1°) p est à produits fibrés finis et F' admet une limite projective dans p;

2°) p est à noyaux et F'' admet une limite projective dans p. Dans chacun de ces cas, $C^{\bullet}$ est la catégorie limite projective de $\hat{p}\mathfrak{F}.F$ et

1 *s la limite projective canonique de F' dans p.*

Δ. D'après la proposition 7, il suffit de prouver que F'' dans le premier cas, F' dans le second, admettent des limites projectives dans p. Reprenons les notations de la partie 1 de la preuve de la proposition 7.

1°) Supposons que p soit à produits fibrés finis et que $T'=(F',t',\hat{s})$ soit la limite projective naturalisée canonique dans p; notons encore a et b les éléments de $s.H.s$ tels que

$$T'a = A \square\!\square\, T' \quad \text{et} \quad T'b = B \square\!\square\, T'.$$

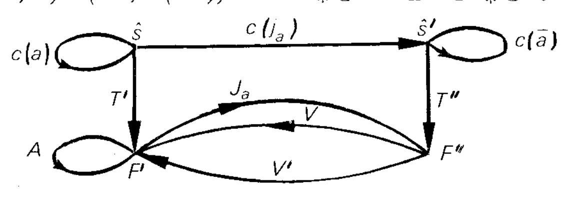
Dans p, il existe un produit fibré naturalisé canonique $((a,v),(b,v'))$. Le foncteur $\{1,2\}$-produit fibré canonique sur $H^{\bullet}$ étant compatible avec les limites projectives, $a \vee b$ est une limite projective de F'' (théorème de commutativité des limites projectives).

2°) Supposons que p soit à noyaux. Pour tout $e \in K_o^{\bullet}$, il existe (preuve de la proposition 3, partie 3) une p-injection j_{ea} de source s_e, de but $s_e * s_e$ telle que $p(j_{ea})(x) = (x, \alpha(x))$ si $x \in C_e$. Pour tout $d \in e'.K.e$, on a $F''(d).j_{ea} = j_{e'a}.F'(d)$, car p est fidèle et $\not{p}(F(d))$ définit un foncteur de $C_e^{\bullet}$ vers $C_{e'}^{\bullet}$. Ainsi $J_a = (F'', \tilde{j}_a, F')$ est une transformation naturelle, où $\tilde{j}_a(e) = j_{ea}$ si $e \in K_o^{\bullet}$. Supposons que F'' admette une limite projective dans p. En notant $C^{\bullet}$ la catégorie limite projective de $\not{p}\mathfrak{F}.F$, il existe une limite projective naturalisée $\theta = (p.F'', m, \widehat{C^{\bullet} * C^{\bullet}})$ telle que

$$m(e')((x'_e)_{e \in K_o^{\bullet}}, (x_e)_{e \in K_o^{\bullet}}) = (x'_{e'}, x_{e'}) \text{ pour tout } e' \in K_o^{\bullet}.$$

Le foncteur d'homomorphismes p étant saturé, il existe une limite projective naturalisée $T'' = (F'', t'', \hat{s}')$ dans p telle que $pT'' = \theta$. Soit $\bar{a}$ l'unique élément de $s'.H.s'$ vérifiant $T''\bar{a} = J_a \square\!\square\, V \square\!\square\, T''$; alors $p(\bar{a})$ est l'application

$$(x', x) \to (x', \alpha(x')) \text{ de } C^{\bullet} * C^{\bullet} \text{ dans } C^{\bullet} * C^{\bullet}.$$



Comme $(p(\overline{a}), p(s'))$ admet pour noyau l'application $\gamma_a : x \to (x, \alpha(x))$ de C dans $C^{\bullet} * C^{\bullet}$ et que p est un foncteur d'homomorphismes saturé à noyaux, il existe un noyau j_a de $(\overline{a}, s')$ dans p tel que $p(j_a) = \gamma_a$, et j_a est une p-injection (proposition 3-1). La source C de $p(j_a)$ étant une limite projective de $p.F'$, il résulte de la proposition 5-1 que la source s de j_a est une limite projective de F'. ∇

COROLLAIRE 1. *Soit* $\xi = ((C_i^{\bullet}, s_i))_{i \in K}$ *une famille de catégories* p-*structurées; si* p *est à produits fibrés finis et s'il existe un produit de* $(s_i)_{i \in K}$ *(resp. si* p *est à noyaux et s'il existe un produit de* $(s_i * s_i)_{i \in K}$*) dans* p, *alors* ξ *admet un produit* $(\prod_{i \in K} C_i^{\bullet}, s)$ *dans* $\bar{p}$ *tel que* s *soit le produit canonique de* $(s_i)_{i \in K}$ *dans* p.

COROLLAIRE 2. *Soit* p *un foncteur à produits fibrés finis (resp. à noyaux); si* $\overline{h}$ *et* $\overline{h}'$ *sont deux foncteurs* p-*structurés ayant même source, même but tels que* $(\bar{p}_H(\overline{h}), \bar{p}_H(\overline{h}'))$ *ait un noyau* n *dans* p, *il existe un noyau* $\overline{n}$ *de* $(\overline{h}, \overline{h}')$ *dans* $\bar{p}$, *et* $\overline{n}$ *est un* $\bar{p}$-*monomorphisme strict.*

Δ. D'après la proposition 8 (resp. proposition 7), il existe un noyau $\overline{n}$ de $(\overline{h}, \overline{h}')$ dans $\bar{p}$ tel que $\bar{p}_H(\overline{n}) = n$. Comme n est un p-monomorphisme, $\overline{n}$ est un $\bar{p}$-monomorphisme strict. ∇

3. Catégories structurées quasi-quotients.

HYPOTHESES. Nous supposons que $\mathfrak{U}$ et $\hat{\mathfrak{U}}$ sont deux univers tels que $\mathfrak{U} \subset \hat{\mathfrak{U}}$ et nous désignons par $\mathfrak{M}$ et $\hat{\mathfrak{M}}$ les catégories des applications associées, par $\hat{\mathfrak{M}}^{\iota}$ l'ensemble des injections canoniques (E, ι, E') d'une partie E' de $E \in \hat{\mathfrak{U}}$ dans E. Soit $\tilde{\mathfrak{U}}$ l'ensemble des éléments de $\hat{\mathfrak{U}}$ équipotents à un élément de $\mathfrak{U}$, et $\tilde{\mathfrak{M}}$ la sous-catégorie pleine de $\hat{\mathfrak{M}}$ ayant pour objets les éléments de $\tilde{\mathfrak{U}}$. Rappelons (prop. 3-15 [3]) que $\tilde{\mathfrak{U}}$ est un univers. Nous nous donnons un foncteur d'homomorphismes saturé $P = (\hat{\mathfrak{M}}, \underline{P}, \hat{H}^{\bullet})$ de $\hat{H}^{\bullet}$ vers $\hat{\mathfrak{M}}$, et nous notons $H^{\bullet}$ et $\tilde{H}^{\bullet}$ les sous-catégories pleines de $\hat{H}^{\bullet}$ telles que $H = \underline{P}^{-1}(\mathfrak{M})$ et $\tilde{H} = \underline{P}^{-1}(\tilde{\mathfrak{M}})$. Soit X un ensemble de P-monomorphismes et X^{ι} l'ensemble des $j \in X$ tels que $P(j) \in \hat{\mathfrak{M}}^{\iota}$.

Comme P est un foncteur d'homomorphismes, si s est une P-sous-structure de $S \in \hat{H}_0^{\bullet}$, il existe une unique P-injection $j \in S.\hat{H}.s$ telle que $P(j) \in \hat{\mathfrak{M}}^{\iota}$; on l'appellera P-*injection canonique de* s *vers* S.

DEFINITION. Soit S une unité de $\hat{H}^{\bullet}$. On appelle *(X, P)-sous-structure* de S une P-sous-structure $\bar{s}$ de S telle que la P-injection canonique de $\bar{s}$ vers S appartienne à X. Si E est une partie de $P(S)$, on dit que $\bar{s}$ est la *(X, P)-sous-structure de S engendrée par E* si $\bar{s}$ est une (X, P)-sous-structure de S, si $E \subset P(\bar{s})$ et si $P(\bar{s}) \subset P(s')$ pour toute (X, P)-sous-structure s' de S telle que $E \subset P(s')$.

Ainsi $\bar{s}$ est la (X, P)-sous-structure de S engendrée par $E \subset P(S)$ si, et seulement si, c'est la plus petite (X, P)-sous-structure s de S telle que $E \subset P(s)$, l'ordre sur l'ensemble des (X, P)-sous-structures de S étant :

$$s < s' \text{ si, et seulement si, } P(s) \subset P(s').$$

S'il existe une (X, P)-sous-structure $\bar{s}$ de S engendrée par E, celle-ci est déterminée d'une façon unique. Si de plus $\bar{s}$ est une (X', P)-sous-structure de S, où $X' \subset X$, c'est aussi une (X', P)-sous-structure de S engendrée par E.

PROPOSITION 1. *Soient $S \in \hat{H}_0^{\bullet}$ et $E \subset P(S)$. Une (X, P)-sous-structure $\bar{s}$ de S est engendrée par E si, et seulement si, la P-injection canonique j de $\bar{s}$ vers S est un (X^{ι}, P)-sous-morphisme de S engendré par $(P(S), \iota, E)$*
1 [A1].

Δ. Soit A l'ensemble des $j \in S.X^{\iota}$ tels que $E \subset P(s)$ et

$$P(j).(P(s), \iota, E) = (P(S), \iota, E),$$

où $s = \alpha(j)$; en associant s à j, on définit une bijection α' de A sur l'ensemble A' des (X, P)-sous-structures s de S telles que $E \subset P(s)$. Si j et j' sont les P-injections canoniques de $s \in A'$ vers S et de $s' \in A'$ vers S, on a $P(s) \subset P(s')$ si, et seulement si, il existe $h \in \hat{H}$ tel que $j = j'.h$ (et alors $P(h) = (P(s'), \iota, P(s))$). Donc $j \in A$ est un (X^{ι}, P)-sous-morphisme de S engendré par $(P(S), \iota, E)$ si, et seulement si, $\alpha(j)$ est une (X, P)-sous-structure de S engendrée par E. ∇

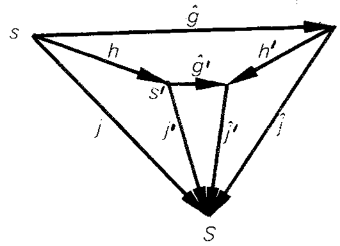
DEFINITION. Supposons $X.\tilde{H}_{\gamma}^{\bullet} \subset X$. On dit que P est *$(\mathfrak{M}, X.H_0^{\bullet})$-engendrant* s'il vérifie la condition :

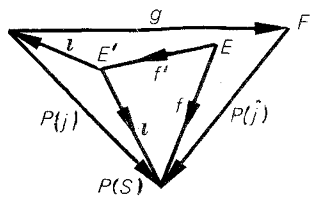
2 (1) Pour tout $S \in \hat{H}_0^{\bullet}$ et toute partie E de $P(S)$ telle que $E \in \tilde{\mathfrak{U}}$,

il existe une $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structure de S engendrée par E.
P est *dénombrablement* $(\mathfrak{M}, X.H^{\bullet}_{o})$*-engendrant* s'il est $(\mathfrak{M}, X.H^{\bullet}_{o})$-engendrant et si de plus, N notant l'ensemble des entiers $\neq 0$, on a :

(2) Si $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et si $(s_i)_{i \in N}$ est une suite de $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structures de S telles que $P(s_i) \subset P(s_{i+1}) \in \tilde{\mathfrak{U}}$ pour tout entier i, alors il existe une (X, P)-sous-structure $\bar{s}$ de S vérifiant $P(\bar{s}) = \bigcup_{i \in N} P(s_i)$.

PROPOSITION 2. *Supposons* $X.\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma} \subset X$, $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$, $f = (P(S), \underline{f}, E) \in \hat{\mathfrak{M}}$ *et* $E \in \mathfrak{U}$. *Il existe un* $(X.H^{\bullet}_{o}, P)$*-sous-morphisme de* S *engendré par* f *si, et seulement si, il existe une* $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$*-sous-structure de* S *engendrée par* $E' = f(E)$.





Δ. Soient A l'ensemble des $j \in X^{\iota}.\tilde{H}^{\bullet}_{o}$ tels que 1

$P(j) \cdot (P(\alpha(j)), \iota, E') = (P(S), \iota, E')$,

et B l'ensemble des $\hat{j} \in X.H^{\bullet}_{o}$ tels qu'il existe k vérifiant $P(\hat{j}) \cdot k = f$. Si $j \in A$ et $s = \alpha(j)$, l'ensemble $P(s)$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, de sorte qu'il existe une bijection g de $P(s)$ sur un $F \in \mathfrak{U}$. Le foncteur d'homomorphismes P étant saturé, il existe un et un seul $\hat{g} \in \hat{H}^{\bullet}_{\gamma}.s$ tel que $P(\hat{g}) = g$. Par définition de $\tilde{H}$ et de H, on a $\hat{g} \in H^{\bullet}_{o}.\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}$, d'où

$$\hat{j} = j.\hat{g}^{-1} \in X.\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma}.H^{\bullet}_{o} \subset X.H^{\bullet}_{o}.$$

De plus, si f' désigne l'application de E sur E' restriction de f, on trouve

$$f = (P(S), \iota, E').f' = P(j).(P(s), \iota, E').f' =$$
$$= P(\hat{j}).g.(P(s), \iota, E').f',$$

c'est-à-dire $\hat{j} \in B$. Inversement, si $\hat{j}' \in B$, il existe un $\hat{g}'' \in \hat{H}^{\bullet}_{\gamma}.\alpha(\hat{j}')$ tel que $P(\hat{g}'')$ soit la bijection restriction de $P(\hat{j}')$ à $\alpha(P(\hat{j}'))$ et posant $\hat{g}' = \hat{g}''^{-1}$ et $j' = \hat{j}'.\hat{g}'$, on trouve $j' \in A$, car $P(j') = (P(S), \iota, E'')$, où $E'' = P(\beta(\hat{g}''))$. Enfin il existe $h \in \hat{H}$ tel que $j'.h = j$ si, et seulement si,

$\hat{j}'.h' = \hat{j}$, où $h' = \hat{g}'.h.\hat{g}^{-1}$. Il en résulte que la P-injection canonique j de s vers S est un $(X^{\iota}.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-morphisme de S engendré par $(P(S), \iota, E')$ (i.e., d'après la proposition 1, que s est une $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structure de S engendrée par E') si, et seulement si, $\hat{j}$ est un $(X.H^{\bullet}_{o}, P)$-sous-morphisme de S engendré par f. ∇

COROLLAIRE. *Si* $X.\tilde{H}^{\bullet}_{\gamma} \subset X$, *alors* P *est* $(\mathfrak{M}, X.H^{\bullet}_{o})$*-engendrant si, et seulement si, pour tout* $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ *et toute application* $(P(S), f, E)$, *où* $E \in \mathfrak{U}$, *il existe un* $(X.H^{\bullet}_{o}, P)$*-sous-morphisme de* S *engendré par* $\bar{f}$.

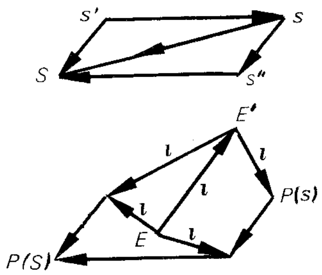
DEFINITION. Supposons que X soit l'ensemble des P-monomorphismes; une (X, P)-sous-structure de S engendrée par E est appelée une *P-sous-structure de S engendrée par E*; si P est (resp. est dénombrablement) $(\mathfrak{M}, X.H^{\bullet}_{o})$-engendrant, on dit que P est (resp. est *dénombrablement*) *$\nearrow$-engendrant pour* $\mathfrak{M}$.

PROPOSITION 3. *P est $\nearrow$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ si, et seulement si, il vérifie la condition : Pour toute unité S de $\hat{H}^{\bullet}_{o}$ et toute partie E de $P(S)$*
1 *appartenant à $\tilde{\mathfrak{U}}$, il existe une P-sous-structure s de S engendrée par E telle que $P(s) \in \tilde{\mathfrak{U}}$.*

Δ. Notons X l'ensemble de tous les P-monomorphismes.

1°) Si la condition est vérifiée et si $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$, $E \subset P(S)$ et $E \in \tilde{\mathfrak{U}}$, la P-sous-structure s de S engendrée par E est a fortiori une $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structure de S engendrée par E. Donc P est $\nearrow$-engendrant pour $\mathfrak{M}$.

2°) Supposons que P soit $\nearrow$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, que $S \in \hat{H}^{\bullet}_{o}$ et que
2 $E \in \tilde{\mathfrak{U}}$ soit une partie de $P(S)$. Il existe une $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structure s' de S engendrée par E, et $P(s')$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$. Montrons que s' est une P-sous-structure de S engendrée par E. En effet, soit s'' une P-sous-structure de S telle que $P(s'')$ contienne E. L'ensemble $E' = P(s') \cap P(s'')$ appartient à l'univers $\tilde{\mathfrak{U}}$, de sorte qu'il existe une $(X.\tilde{H}^{\bullet}_{o}, P)$-sous-structure s de s'' engendrée par E'. Comme s est une P-sous-structure de S telle que



$$P(s) \in \tilde{\mathfrak{U}} \text{ et } E \subset E' \subset P(s),$$

elle admet s' pour P-sous-structure. Il s'ensuit que s' est une P-sous-structure de s'', ce qui achève la preuve. ∇

COROLLAIRE. *Si P est $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, si s_i est une P-sous-structure de $S \in \hat{H}_o^{\cdot}$ pour tout $i \in J$ et si $E = \bigcap_{i \in J} P(s_i) \in \tilde{\mathfrak{U}}$, alors E* 1
définit une P-sous-structure de S.

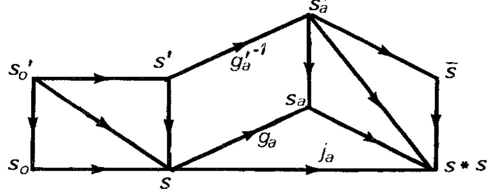
Δ. D'après la proposition, E engendre une P-sous-structure s de S telle que $E \subset P(s) \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Puisque s_i est une P-sous-structure de S et que E est contenu dans $P(s_i)$, s est une P-sous-structure de s_i pour tout $i \in J$, d'où $P(s) \subset \bigcap_{i \in J} P(s_i) = E$. Au total $P(s) = E$. ∇

PROPOSITION 4. *Supposons que P soit $\ulcorner$-engendrant pour $\mathfrak{M}$; soient $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie P-structurée et $K^{\cdot}$ une sous-catégorie de $C^{\cdot}$. Si K appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$ et si $K^{\cdot} * K^{\cdot}$ définit une P-sous-structure $\bar{s}$ de $s * s$, alors K définit une sous-catégorie P-structurée de $(C^{\cdot}, s)$.* 2

Δ. Reprenons les notations de la partie 3 de la démonstration de la proposition 3-2, en y remplaçant p par P; en particulier soit j_a la P-injection de s vers $s * s$ telle que $P(j_a)(x) = (x, \alpha(x))$. Le foncteur d'homomorphismes P étant saturé, il existe $g_a \in \hat{H}_{\gamma}^{\cdot} . s$ tel que le but s_a de g_a soit une P-sous-structure de $s * s$ appliquée par P sur l'ensemble $C_a^{\cdot}$ des couples $(x, \alpha(x))$, où $x \in C$, et que $P(g_a)$ soit la bijection restriction de $P(j_a)$ à C. L'ensemble

$$K_a^{\cdot} = C_a^{\cdot} \cap (K^{\cdot} * K^{\cdot}) = P(s_a) \cap P(\bar{s})$$

des couples $(x, \alpha(x))$, où $x \in K$, appartenant à $\tilde{\mathfrak{U}}$, il définit une P-sous-structure s'_a de $s * s$ d'après le corollaire de la proposition 3. Notons s' le but de l'unique élément g'_a de $\hat{H}_{\gamma}^{\cdot} . s'_a$ tel que $P(g'_a)(x, \alpha(x)) = x$ pour tout $x \in K$. On trouve $K = P(s')$ et s' est une P-sous-structure de s, car s'_a est une P-sous-structure de s_a. Toujours d'après le corollaire de la proposition 3, comme $K_o^{\cdot} = C_o^{\cdot} \cap K = P(s_o) \cap P(s') \in \tilde{\mathfrak{U}}$, l'ensemble



$K_o^{\bullet}$ définit une P-sous-structure s'_o de s, et s'_o est a fortiori une P-sous-structure de s_o. Il résulte alors de la proposition 6-2 que $(K^{\bullet}, s')$ est une sous-catégorie P-structurée de $(C^{\bullet}, s)$. ∇

COROLLAIRE. *Supposons que P soit $\nearrow$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ et que $(C^{\bullet}, s)$ soit une catégorie P-structurée. Si $(C_i^{\bullet}, s_i)$ est une sous-catégorie P-*
1 *structurée de $(C^{\bullet}, s)$ pour tout $i \in J$ et si $K = \bigcap_{i \in J} C_i$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, alors K définit une sous-catégorie P-structurée de $(C^{\bullet}, s)$.*

Δ. D'après le corollaire de la proposition 3, K définit une P-sous-structure s' de s; de même $K^{\bullet} * K^{\bullet} = \bigcap_{i \in J} C_i^{\bullet} * C_i^{\bullet}$ définit une P-sous-structure $\bar{s}$ de $s * s$, étant donné que $K^{\bullet} * K^{\bullet}$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$ et que $C_i^{\bullet} * C_i^{\bullet}$ définit une P-sous-structure $s_i * s_i$ de $s * s$ pour tout $i \in J$ (proposition 6-2). Par suite la proposition 4 entraîne que $(K^{\bullet}, s')$ est une sous-catégorie P-structurée de $(C^{\bullet}, s)$. ∇

PROPOSITION 5. *Soient $\hat{\mathfrak{F}}$ la catégorie des foncteurs associée à $\hat{\mathfrak{U}}$ et $P_{\mathfrak{F}}$ son foncteur d'oubli vers $\hat{\mathfrak{M}}$. Alors $P_{\mathfrak{F}}$ est dénombrablement $\nearrow$-*
2 *engendrant pour $\mathfrak{M}$.*

Δ. Soit $C^{\bullet}$ une catégorie telle que C appartienne à $\hat{\mathfrak{U}}$.

1°) Soient E une partie de C et $K^{\bullet}$ la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par E. Pour montrer que $P_{\mathfrak{F}}$ est $\nearrow$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, il suffit de prouver que, si $E \in \tilde{\mathfrak{U}}$, alors $K \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Or posons $A = E \cup \alpha(E) \cup \beta(E)$, où α et β sont les surjections source et but de $C^{\bullet}$; soit L l'ensemble des chemins de $C^{\bullet}$ de la forme $(x_n, \dots, x_1)$, où $x_i \in A$ si $1 \leq i \leq n$. K est l'image de L par l'application k':

$$(x_n, \dots, x_1) \to x_n \cdot \ldots \cdot x_1 \text{ de } L \text{ dans } C.$$

$\tilde{\mathfrak{U}}$ étant un univers, $E \in \tilde{\mathfrak{U}}$ entraîne $\alpha(E) \in \tilde{\mathfrak{U}}$ et $\beta(E) \in \tilde{\mathfrak{U}}$, d'où $A \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Il s'ensuit (proposition 3-15 [3]) que l'ensemble produit A^n, pour tout entier n, appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, et par suite la réunion $A' = \bigcup_{n \in N} A^n$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, l'ensemble N des entiers appartenant à tout univers. Comme L est une partie de A', on obtient $L \in \tilde{\mathfrak{U}}$, et a fortiori $K = k'(L) \in \tilde{\mathfrak{U}}$.

2°) Si $(C_n^{\bullet})_{n \in N}$ est une suite de sous-catégories de $C^{\bullet}$ telle que $C_n \subset C_{n+1}$ pour tout entier n, alors $C' = \bigcup_{n \in N} C_n$ définit évidemment une sous-catégorie $C'^{\bullet}$ de $C^{\bullet}$. ∇

Désignons par $\mathcal{F}(P)$ la catégorie des foncteurs P-structurés, par $\hat{P}$ son foncteur d'oubli vers $\hat{\mathfrak{M}}$ et par $\hat{X}$ l'ensemble des $\hat{P}$-monomorphismes stricts (voir § 2).

PROPOSITION 6. *Si P est dénombrablement $\leftharpoondown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, $\hat{P}$ est dénombrablement $(\mathfrak{M}, \hat{X}.\mathcal{F}(p)_o)$-engendrant.* 1

$\triangle$. Comme P est un foncteur d'homomorphismes saturé, il en est de même pour $\hat{P}$ (proposition 4-2). De plus $\hat{X}.\mathcal{F}(P)_\gamma \subset \hat{X}$, car tout foncteur P-structuré inversible dans $\mathcal{F}(P)$ appartient à $\hat{X}$ et $\hat{X}$ définit une sous-catégorie de $\mathcal{F}(P)$. Soit $(C^\bullet, s)$ une catégorie P-structurée. Notons $\mathcal{F}(\tilde{p})_o$ l'ensemble des catégories P-structurées $(\tilde{C}^\bullet, \tilde{s})$ où $\tilde{C} \in \tilde{\mathfrak{U}}$.

1°) Montrons que, si E est une partie de C appartenant à $\tilde{\mathfrak{U}}$, il existe une sous-catégorie P-structurée $(K^\bullet, s')$ de $(C^\bullet, s)$ telle que $E \subset K \in \tilde{\mathfrak{U}}$ et que $K \subset C'$ pour toute sous-catégorie P-structurée $(C'^\bullet, s'')$ de $(C^\bullet, s)$ vérifiant $E \subset C' \in \tilde{\mathfrak{U}}$. En effet, soit $((\alpha, w), (\beta, w'))$ le produit fibré naturalisé canonique dans $\hat{\mathfrak{M}}$ de (α, β). Pour toute partie A de $C^\bullet * C^\bullet = \alpha \vee \beta$, nous poserons 2

$$z(A) = w(A) \cup w'(A);$$

si A appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, il en est de même pour $z(A)$.

a- Soit $C_1^\bullet$ la sous-catégorie de $C^\bullet$ engendrée par E. D'après la proposition 5, C_1 appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$; par suite $C_1^\bullet * C_1^\bullet \in \tilde{\mathfrak{U}}$, et il existe (proposition 3) une P-sous-structure s'_1 de $s * s$ engendrée par $C_1^\bullet * C_1^\bullet$ telle que $P(s'_1) \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Si $x \in C_1$, la relation

$$\overline{x} = (x, \alpha(x)) \in C_1^\bullet * C_1^\bullet \subset P(s'_1)$$

entraîne $x = w(\overline{x}) \in z(P(s'_1))$, c'est-à-dire $C_1 \subset z(P(s'_1))$.

b- Soit n un entier, $n > 1$, et supposons définies deux suites $(C_i)_{i<n}$ et $(s'_i)_{i<n}$ ayant pour premiers termes C_1 et s'_1 respectivement et telles que, si $1 < i < n$, les conditions suivantes soient vérifiées :

(1) $s'_i \in \tilde{H}_o^\bullet$, $P(s'_i) \subset C^\bullet * C^\bullet$, $C_i \subset Z_i = z(P(s'_i))$ et $C_i^\bullet$ est la sous-catégorie de $C^\bullet$ engendrée par Z_{i-1}.

(2) $P(s'_{i-1}) \subset C_i^\bullet * C_i^\bullet$ et s'_i est la P-sous-structure de $s * s$ engendrée par $C_i^\bullet * C_i^\bullet$.

Notons $C_n^{\bullet}$ la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par $Z_{n-1} = z(P(s'_{n-1}))$. Si $(x', x) \in P(s'_{n-1})$, on a $\alpha(x') = \beta(x)$,

$$x' \in Z_{n-1} \subset C_n, \quad x \in Z_{n-1} \subset C_n, \text{ d'où } (x', x) \in C_n^{\bullet} * C_n^{\bullet}.$$

Puisque $P(s'_{n-1})$ appartient à $\tilde{\mathfrak{U}}$, l'ensemble Z_{n-1} y appartient aussi, ainsi que C_n (proposition 5). Il en résulte que $C_n^{\bullet} * C_n^{\bullet}$ engendre une P-sous-structure s'_n de $s * s$ telle que $P(s'_n) \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Enfin $x \in C_n$ a pour conséquence :

$$x = w(x, \alpha(x)) \in z(C_n^{\bullet} * C_n^{\bullet}) \subset Z_n, \text{ où } Z_n = z(P(s'_n)),$$

de sorte que $C_n \subset Z_n$.

c- Par récurrence on construit de cette façon des suites $(C_i)_{i \in N}$ et $(s'_i)_{i \in N}$ vérifiant les conditions (1) et (2) pour tout entier $i \neq 0$. En particulier

$$C_i \subset C_{i+1} \in \tilde{\mathfrak{U}} \text{ et } P(s'_{i-1}) \subset C_i^{\bullet} * C_i^{\bullet} \subset P(s'_i)$$

pour tout $i \in N$. D'après la proposition 5, $K = \bigcup_{i \in N} C_i$ définit une sous-catégorie $K^{\bullet}$ de $C^{\bullet}$. Etant donné que K appartient à l'univers $\tilde{\mathfrak{U}}$, que

$$K^{\bullet} * K^{\bullet} = \bigcup_{i \in N} C_i^{\bullet} * C_i^{\bullet} = \bigcup_{i \in N} P(s'_i)$$

et que P est dénombrablement $\nearrow$-engendrant pour $\mathfrak{M}$, l'ensemble $K^{\bullet} * K^{\bullet}$ définit une P-sous-structure $\bar{s}$ de $s * s$. La proposition 4 affirme que K définit aussi une $\hat{P}$-sous-structure $(K^{\bullet}, s')$ de $(C^{\bullet}, s)$.

2°) Avec les mêmes hypothèses, supposons que $(C'^{\bullet}, s'')$ soit une sous-catégorie P-structurée de $(C^{\bullet}, s)$ telle que $E \subset C'$ et $C' \in \tilde{\mathfrak{U}}$. Comme C_1 est contenu dans C', on a $C_1^{\bullet} * C_1^{\bullet} \subset C'^{\bullet} * C'^{\bullet}$, et la P-sous-structure s'_1 de $s * s$ engendrée par $C_1^{\bullet} * C_1^{\bullet}$ est une P-sous-structure de la P-sous-structure $s'' * s''$ de $s * s$ définie par $C'^{\bullet} * C'^{\bullet}$. Soit n un entier, $n > 1$, et supposons prouvées les inclusions

$$C_i \subset C' \text{ et } P(s'_i) \subset C'^{\bullet} * C'^{\bullet} \text{ pour tout } i < n.$$

$C'^{\bullet}$ étant une sous-catégorie de $C^{\bullet}$, on trouve

$$Z_{n-1} = z(P(s'_{n-1})) \subset z(C'^{\bullet} * C'^{\bullet}) \subset C';$$

par suite C_n, qui définit la sous-catégorie de $C^{\bullet}$ engendrée par Z_{n-1}, est contenu dans C', et $C^{\cdot}_n * C^{\cdot}_n \subset C'^{\cdot} * C'^{\cdot}$, de sorte que la P-sous-structure s'_n de $s * s$ engendrée par $C^{\cdot}_n * C^{\cdot}_n$ est une P-sous-structure de $s'' * s''$. Par récurrence ceci prouve que

$$C_n \subset C' \quad \text{et} \quad P(s'_n) \subset C'^{\cdot} * C'^{\cdot}$$

pour tout entier $n > 1$. Il en résulte $K = \bigcup_{n \in N} C_n \subset C'$. Donc $(K^{\cdot}, s')$ est une $(\hat{X}.\mathfrak{F}(\tilde{p})_o, \hat{P})$-sous-structure de $(C^{\cdot}, s)$ engendrée par E.

3°) Soit $((G^{\cdot}_n, s_n))_{n \in N}$ une suite de sous-catégories P-structurées de $(C^{\cdot}, s)$ telle que $G_n \subset G_{n+1} \in \tilde{\mathfrak{U}}$ pour tout entier n. L'ensemble G réunion de $(G_n)_{n \in N}$ appartient à l'univers $\tilde{\mathfrak{U}}$ et définit une sous-catégorie $G^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$ (proposition 5). Puisque $(G^{\cdot}_n * G^{\cdot}_n)_{n \in N}$ est une suite croissante de parties de $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ telles que $G^{\cdot}_n * G^{\cdot}_n$ appartienne à $\tilde{\mathfrak{U}}$ et définisse une P-sous-structure $s_n * s_n$ de $s * s$ et que $G^{\cdot} * G^{\cdot} = \bigcup_{n \in N} G^{\cdot}_n * G^{\cdot}_n$, il existe une P-sous-structure $\tilde{s}$ de $s * s$ vérifiant $P(\tilde{s}) = G^{\cdot} * G^{\cdot}$, car le foncteur P est dénombrablement $\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$. D'après la proposition 4, il s'ensuit que G définit une sous-catégorie P-structurée de $(C^{\cdot}, s)$, c'est-à-dire une $(\hat{X}.\mathfrak{F}(\tilde{p})_o, \hat{P})$-sous-structure de $(C^{\cdot}, s)$. Ceci montre que P est dénombrablement $(\mathfrak{M}, \hat{X}.\mathfrak{F}(p)_o)$-engendrant. ∇

PROPOSITION 7. *Supposons que $\mathfrak{U} \in \hat{\mathfrak{U}}$, que P soit un foncteur à noyaux et à $\hat{\mathfrak{U}}$-produits, dénombrablement $\frown$-engendrant pour $\mathfrak{M}$ et que $\underline{\overset{-1}{P}}(\{E\}) \in \hat{\mathfrak{U}}$ pour tout $E \in \mathfrak{U}$. Si $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie p-structurée et r une relation d'équivalence sur C, il existe une $\hat{p}$-structure quasi-quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par r. De plus $\mathfrak{F}(p)$ est une catégorie à $K^{\cdot}$-limites inductives pour toute catégorie $K^{\cdot} \in \mathfrak{F}_o$.* 1

Δ. La proposition sera prouvée si on montre que sont vérifiées les conditions des théorèmes généraux d'existence de structures quasi-quotients (corollaire 1, proposition 3-2 [4]) et de limites inductives (proposition 4-3 [4]). 2

1°) $\mathfrak{F}(p)_o$ appartient à $\hat{\mathfrak{U}}$. En effet, si $(C^{\cdot}, s) \in \mathfrak{F}(p)_o$, on a:

$$C^{\cdot} = (C, \kappa) \in \mathfrak{U} \times \mathfrak{U}, \quad s \in H^{\cdot}_o = \bigcup_{C \in \mathfrak{U}} \underline{P}^{-1}(\{C\}) \in \hat{\mathfrak{U}}$$

d'où $(C^{\cdot}, s) \in (\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}) \times H^{\cdot}_o \in \hat{\mathfrak{U}}$, car $\hat{\mathfrak{U}}$ est un univers. Il s'ensuit

$$\mathfrak{F}(p)_o \subset (\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}) \times H^{\cdot}_o, \quad \text{donc} \quad \mathfrak{F}(p)_o \in \hat{\mathfrak{U}}.$$

2°) Le foncteur $\hat{p}$ étant fidèle, l'application

$$((\overline{C}^{\bullet}, \overline{s}), h, (C^{\bullet}, s)) \to ((\overline{C}^{\bullet}, \overline{s}), \underline{h}, (C^{\bullet}, s)),$$

où $\underline{h}$ est le graphe de $p(h)$, est une bijection de $\mathcal{F}(p)$ sur une partie de $\mathcal{F}(p)_0 \times \mathfrak{U} \times \mathcal{F}(p)_0$. Par suite $\mathcal{F}(p)$ est équipotent à un élément de $\hat{\mathfrak{U}}$. Le foncteur $\hat{P}$ étant à J-produits pour tout $J \in \hat{\mathfrak{U}}$ (corollaire 2, proposition 7-2), il est aussi à J-produits, pour toute partie J de $\mathcal{F}(p)$.

3°) $\hat{P}$ est $(\mathfrak{M}, \hat{X}.\mathcal{F}(p)_0)$-engendrant, où $\hat{X}$ est l'ensemble des P-monomorphismes stricts, en vertu de la proposition 6. De plus $\hat{p}$ est à noyaux et tout noyau n dans $\hat{p}$ appartient à $\hat{X}$ (corollaire, proposition 7-2); il s'ensuit $\hat{X}.n \subset \hat{X}$, car $\hat{X}$ définit une sous-catégorie de $\mathcal{F}(P)$. ∇

4. Transformations naturelles structurées.

HYPOTHESE. Dans ce paragraphe, p désigne un foncteur d'homomorphismes saturé $(\mathfrak{M}, \underline{p}, H^{\bullet})$.

DEFINITION. On appelle *transformation naturelle p-structurée* un triplet $T = (\overline{h}', t, \overline{h})$, où $\overline{h}$ et $\overline{h}'$ sont deux foncteurs p-structurés de même source $(C'^{\bullet}, s')$, de même but $(C^{\bullet}, s)$ et où $t \in s.H.s'_0$ est tel que $(\hat{p}\mathcal{G}(\overline{h}'), p(t), \hat{p}\mathcal{G}(\overline{h}))$ soit une transformation naturelle, dite *sous-jacente à T*.

Si $(C^{\bullet}, s)$ et $(C'^{\bullet}, s')$ sont deux catégories p-structurées, nous noterons $\mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$ l'ensemble des transformations naturelles p-structurées $(\overline{h}', t, \overline{h})$ telles que $\overline{h}$ ait $(C'^{\bullet}, s')$ pour source, $(C^{\bullet}, s)$ pour but.

PROPOSITION 1. *Soient $(C^{\bullet}, s)$ et $(C'^{\bullet}, s')$ deux catégories p-structurées. L'application ν associant à $T \in \mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$ la transformation naturelle sous-jacente est une bijection de $\mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$ sur un ensemble M définissant une sous-catégorie $M^{\square\!\square}$ de la catégorie longitudinale $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\square\!\square}$ des transformations naturelles entre foncteurs de $C'^{\bullet}$ vers $C^{\bullet}$.*

Δ. Le foncteur p étant fidèle, ν est une bijection de $M' = \mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$ sur une partie M de $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})$. Prouvons que M définit une sous-catégorie de $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\square\!\square}$. En effet, supposons $T = (\overline{h}', t, \overline{h}) \in M'$, où

$$\bar{h} = ((C^{\bullet}, s), h, (C'^{\bullet}, s')) \text{ et } \bar{h}' = ((C^{\bullet}, s), h', (C'^{\bullet}, s')).$$

Notons (F', θ, F) la transformation naturelle $\nu(T) \in M$ et i' la p-injection canonique de s'_o vers s', où $p(s'_o) = C'^{\bullet}_o$. Le triplet $(\bar{h}, h.i', \bar{h})$ est une transformation naturelle p-structurée $\alpha^{\boxminus} T$, et $\nu(\alpha^{\boxminus} T) = = (F, F_o, F) \in M$ est la source de $\nu(T)$ dans $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\boxminus}$. De même

$$\beta^{\boxminus} T = (\bar{h}', h'.i', \bar{h}') \in M'$$

et $\nu(\beta^{\boxminus} T) \in M$ est le but de $\nu(T)$ dans $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\boxminus}$. Soit de plus

$$T' = (\bar{h}'', t', \bar{h}_1) \in M' \text{ et } \nu(T') = (F'', \theta', F_1).$$

Le composé $\Theta'' = \nu(T') \boxminus \nu(T)$ est défini dans $\mathfrak{N}(C^{\bullet}, C'^{\bullet})^{\boxminus}$ si, et seulement si, $F_1 = F'$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\bar{h}_1 = \bar{h}'$; supposons qu'il en soit ainsi. Alors

$$\Theta'' = (F'', \theta'', F), \text{ où } \theta''(x) = \theta'(x).\theta(x)$$

pour tout $x \in C'^{\bullet}_o$. Si a et b structurent les applications source et but de $C^{\bullet}$, on obtient $a.t' = b.t$, car p est fidèle et

$$\alpha(\theta'(x)) = F'(x) = \beta(\theta(x)) \text{ pour tout } x \in C'^{\bullet}_o.$$

Si $((a, v), (b, v'))$ est le produit fibré naturalisé canonique de (a, b) dans p, il existe un et un seul $g \in s * s.H.s'_o$ tel que

$$v.g = t' \text{ et } v'.g = t,$$

et $p(g)$ associe $(\theta'(x), \theta(x))$ à $x \in C'^{\bullet}_o$. Il s'ensuit que le composé $t'' = k.g$, où k structure la loi de composition de $C^{\bullet}$, admet θ'' pour

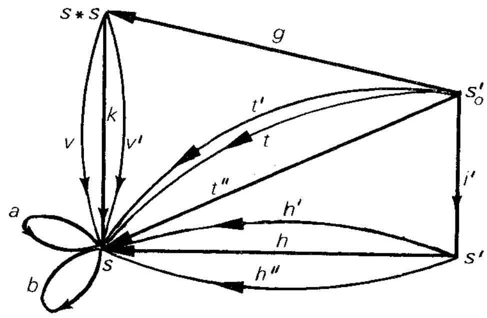


image par p. Donc

$$T'' = (\overline{h}'', t'', \overline{h}) \in M' \quad \text{et} \quad \Theta'' = \nu(T'') \in M,$$

de sorte que M définit une sous-catégorie $M^{\boxbar}$ de $\mathfrak{N}(C^{\cdot}, C'^{\cdot})^{\boxbar}$. ∇

DEFINITION. Avec les notations de la proposition 1, la catégorie image de $M^{\boxbar}$ par la bijection inverse de ν est notée $\mathfrak{N}((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))^{\boxbar}$ et appelée catégorie *longitudinale des transformations naturelles p-structurées.*

Sa loi de composition est donc définie par :

$$((\overline{h}'', t', \overline{h}_1), (\overline{h}', t, \overline{h})) \to (\overline{h}'', t'', \overline{h}) \text{ si, et seulement si, } \overline{h}_1 = \overline{h}',$$

où t'' est l'unique élément de $s . H . s'_0$ tel que

$$p(t'')(x) = p(t')(x) . p(t)(x) \text{ pour tout } x \in C'^{\cdot}_0 .$$

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie, de loi de composition κ. Nous notons $(\boxminus C^{\cdot}, \boxbar C^{\cdot})$ la catégorie double des quatuors de $C^{\cdot}$ (voir [6]). L'ensemble $\square C^{\cdot}$ des quatuors de $C^{\cdot}$ est un produit fibré (non canonique) de (κ, κ) dans $\mathfrak{M}$, si $C \in \mathfrak{U}$, le produit fibré naturalisé correspondant étant $((\kappa, \mu), (\kappa, \mu'))$, où μ et μ' associent respectivement (y', x) et (x', y) à $(y', x', x, y) \in \square C^{\cdot}$. Si $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie p-structurée et s'il existe un produit fibré dans p de (k, k), où $k \in s . H . s * s$ structure κ, il existe aussi un unique produit fibré naturalisé $((k, m), (k, m'))$ dans p tel que $\mu = p(m)$ et $\mu' = p(m')$. Dans ce cas, nous désignerons par $\square s$ le produit fibré de (k, k) source de m.

Soit $C'^{\cdot}$ une autre catégorie. Si $\Theta = (F', \theta, F)$ est une transformation naturelle entre foncteurs de $C'^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$, l'application

$$x \to (F'(x), \theta(\beta(x)), \theta(\alpha(x)), F(x)), \text{ où } x \in C',$$

définit un foncteur Φ_{Θ} de $C'^{\cdot}$ vers la catégorie latérale $\boxminus C^{\cdot}$; l'application $\Theta \to \Phi_{\Theta}$ définit un isomorphisme de la catégorie $\mathfrak{N}(C^{\cdot}, C'^{\cdot})^{\boxbar}$ sur la catégorie $\mathcal{F}(\boxminus C^{\cdot}, C'^{\cdot})^{\boxbar}$ des foncteurs de $C'^{\cdot}$ vers $\boxminus C^{\cdot}$ considérée dans le théorème 7, II [6].

PROPOSITION 2. *Soient $(C^{\cdot}, s)$ et $(C'^{\cdot}, s')$ deux catégories p-structurées et supposons qu'il existe un produit fibré $\square s$ de (k, k) structurant*

$\square C^{\bullet}$. *Il existe une bijection* z *de* $\mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$ *sur l'ensemble* $\mathcal{F}(\square s, s')$ *des* $f \in \square s . H . s'$ *tels que* $p(f)$ *définisse un foncteur de* $C'^{\bullet}$ *vers* $\boxminus C^{\bullet}$. 1

$\triangle$. Reprenons les notations de la proposition 3-2 relativement à $(C^{\bullet}, s)$.

1° Supposons $T = (\overline{h'}, t, \overline{h}) \in \mathfrak{N}((C^{\bullet}, s), (C'^{\bullet}, s'))$, où

$$\overline{h} = ((C^{\bullet}, s), h, (C'^{\bullet}, s')) \text{ et } \overline{h'} = ((C^{\bullet}, s), h', (C'^{\bullet}, s')).$$

Notons Θ la transformation naturelle (F', θ, F) sous-jacente à T et Φ le foncteur de $C'^{\bullet}$ vers $\boxminus C^{\bullet}$ associé à Θ. Puisque

$$\alpha(F'(x)) = \beta(\theta(\alpha(x))) \text{ et } \alpha(\theta(\beta(x))) = \beta(F(x))$$

pour tout $x \in C'$ et que p est fidèle, on trouve

$$a_o . h' = b_o . t . a'_o \text{ et } a_o . t . b'_o = b_o . h,$$

où a_o, b_o, a'_o et b'_o structurent les applications source et but de $C^{\bullet}$ et de $C'^{\bullet}$. Il existe des éléments f' et f'' de $s * s . H . s'$ tels que

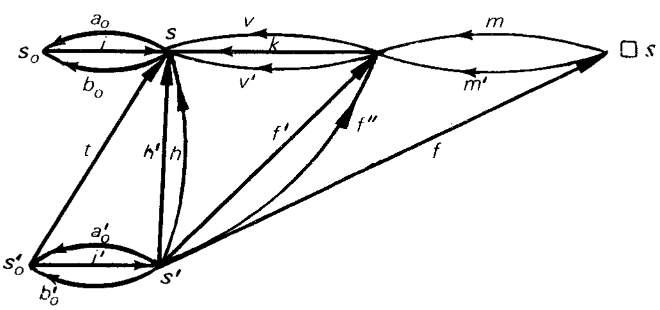
$$v . f' = h', \quad v' . f' = t . a'_o, \quad v . f'' = t . b'_o, \quad v' . f'' = h,$$

car $((a_o, v), (b_o, v'))$ est un produit fibré naturalisé dans p. Les applications $p(k . f')$ et $p(k . f'')$ associant respectivement à $x \in C'$ les composés

$$F'(x) . \theta(\alpha(x)) \text{ et } \theta(\beta(x)) . F(x)$$

qui sont égaux, on a $p(k . f') = p(k . f'')$, d'où $k . f' = k . f''$. Si $((k, m), (k, m'))$ est le produit fibré naturalisé dans p définissant $\square s$, il existe un unique $f \in \square s . H . s'$ tel que

$$m . f = f' \text{ et } m' . f = f'';$$



l'application $p(f)$ associe $(F'(x), \theta(\beta(x)), \theta(\alpha(x)), F(x))$ à $x \in C'$, c'est-à-dire définit le foncteur Φ. Donc $f \in \mathfrak{F}(\square s, s')$; posons $f = z(T)$.

2° Inversement, supposons $f \in \mathfrak{F}(\square s, s')$ et soient Φ le foncteur de $C'^{\cdot}$ vers $\boxminus C^{\cdot}$ défini par $p(f)$ et (F', θ, F) la transformation naturelle correspondante. Les applications $p(v.m.f)$ et $p(v'.m'.f)$ définissant respectivement les foncteurs F' et F, les triplets

$$\bar{h}' = ((C^{\cdot}, s), v.m.f, (C'^{\cdot}, s')) \text{ et } \bar{h} = ((C^{\cdot}, s), v'.m'.f, (C'^{\cdot}, s'))$$

sont des foncteurs p-structurés. Enfin $\theta = p(t')$, où $t' = v.m'.f.i'$, i' étant la p-injection canonique de s'_o vers s'. Ainsi $T' = (\bar{h}', t', \bar{h})$ est une transformation naturelle p-structurée, et $f = z(T')$. Ceci prouve que l'application $z : T \to z(T)$ est la bijection cherchée. ∇

1 DEFINITION. On appelle *catégorie double p-structurée* un triplet $(K^{\cdot}, K^o, s)$, où $(K^{\cdot}, K^o)$ est une catégorie double et où $(K^{\cdot}, s)$ et (K^o, s) sont des catégories p-structurées.

PROPOSITION 3. *Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée. Si p est un foncteur à produits fibrés finis, il existe une catégorie double p-structurée*
2 *$(\square\!\square C^{\cdot}, \boxminus C^{\cdot}, \square s)$, où $\square s$ est un produit fibré de (k, k).*

Δ. Nous reprenons les notations de la proposition 3-2 relativement à $(C^{\cdot}, s)$. Le foncteur d'homomorphismes saturé p étant à produits fibrés finis, il existe un produit fibré naturalisé $((k, m), (k, m'))$ dans p tel que $p(m)$ et $p(m')$ soient respectivement les applications

$$\mu : (y', x', x, y) \to (y', x) \text{ et } \mu' : (y', x', x, y) \to (x', y)$$

de $\square C^{\cdot}$ dans C. Posons $\square s = \alpha(m)$.

1°) Comme, par définition, on a $k.j_a = s = k.j_b$, il existe un unique $d \in \square s.H.s$ tel que

$$m.d = j_a \text{ et } m'.d = j_b.$$

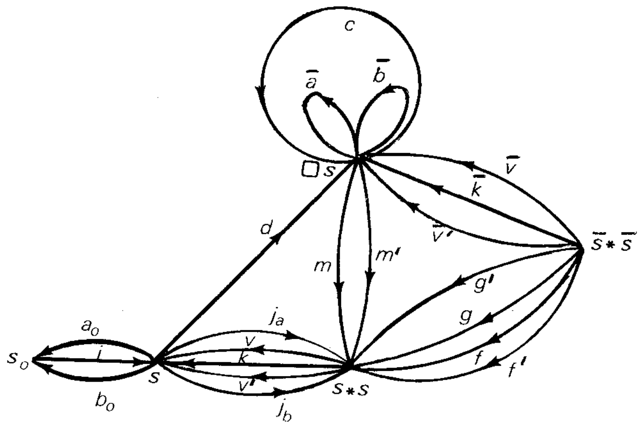
Le composé $\bar{a} = d.v'.m'$ est appliqué par p sur l'application source

$$(y', x', x, y) \to y^{\square\!\square} = (y, \beta(y), \alpha(y), y)$$

de $\square\!\square C^{\cdot}$. De même $\bar{b} = d.v.m$ est appliqué par p sur l'application but

$$(y', x', x, y) \to y'^{\square\!\square} \text{ de } \square\!\square C^{\cdot}.$$

Notons $((\bar{a}, \bar{v}), (\bar{b}, \bar{v}'))$ le produit fibré naturalisé canonique de $(\bar{a}, \bar{b})$ dans p, et soit $\bar{s} * \bar{s}$ la source de $\bar{v}$.



2°) On trouve $a.v'.m.\bar{v} = b.v'.m.\bar{v}'$, car p est fidèle et ces deux éléments de $s.H.\bar{s}*\bar{s}$ sont appliqués par p sur l'application

$$q = ((y'', x''', x'', y'), (y', x', x, y)) \to \alpha(x'') = \beta(x).$$

Il existe donc $f \in s*s.H.\bar{s}*\bar{s}$ tel que

$$v.f = v'.m.\bar{v} \quad \text{et} \quad v'.f = v'.m.\bar{v}';$$

$p(f)$ est l'application associant (x'', x) à q. De même, comme $a.v.m'.\bar{v} = b.v.m'.\bar{v}'$, il existe $f' \in s*s.H.\bar{s}*\bar{s}$ vérifiant

$$v.f' = v.m'.\bar{v} \quad \text{et} \quad v'.f' = v.m'.\bar{v}',$$

et $p(f')$ associe (x''', x') à q. Puisque $\alpha(y'') = \beta(x''.x)$ et $\alpha(x'''.x') = \beta(y)$, on obtient $a.v.m.\bar{v} = b.k.f$ et $a.k.f' = b.v'.m'.\bar{v}'$, de sorte qu'il existe des éléments g et g' de $s*s.H.\bar{s}*\bar{s}$ tels que

$$v.g = v.m.\bar{v}, \qquad v'.g = k.f,$$

$$v.g' = k.f', \qquad v'.g' = v'.m'.\bar{v}'.$$

Les applications $p(g)$ et $p(g')$ associent respectivement à q les couples $(y'', x''.x)$ et $(x'''.x', y)$. L'égalité

$$y''.x''.x = x'''.y'.x = x'''.x'.y$$

pour tout $q \in \square\square C^{\cdot} * \square\square C^{\cdot}$ entraîne $k.g = k.g'$. Il en résulte qu'il existe un et un seul $\bar{k} \in \square s.H.\bar{s}*\bar{s}$ tel que

$$m.\bar{k} = g \text{ et } m'.\bar{k} = g'.$$

L'application $p(\bar{k})$ associant $(y'', x'''.x', x''.x, y)$ à q, c'est la loi de composition de $\square\square C^{\cdot}$.

3°) Ainsi $(\square\square C^{\cdot}, \square s)$ vérifie les conditions de la proposition 3-2, et, p étant à produits fibrés finis, c'est une catégorie p-structurée. Par ailleurs de l'égalité $k.m = k.m'$, on déduit qu'il existe un et un seul élément c de $\square s.H.\square s$ vérifiant

$$m.c = m' \quad \text{et} \quad m'.c = m.$$

L'application $p(c)$ étant sous-jacente à l'isomorphisme canonique de $\square\square C^{\cdot}$ sur $\underset{\square}{\square} C^{\cdot}$, qui associe (x', y', y, x) à (y', x', x, y), l'élément c est son propre inverse dans $H^{\cdot}$. Donc $(\underset{\square}{\square} C^{\cdot}, \square s)$ est une catégorie p-structurée, à savoir l'image de $(\square\square C^{\cdot}, \square s)$ par $p(c)$. Au total $(\square\square C^{\cdot}, \underset{\square}{\square} C^{\cdot}, \square s)$ est une catégorie double p-structurée, notée $\square(C^{\cdot}, s)$. ∇

COROLLAIRE. *Supposons que* p *soit à produits fibrés finis et soient deux catégories* p*-structurées* $(C^{\cdot}, s)$ *et* $(C'^{\cdot}, s')$. *Il existe un isomorphisme de* $\mathfrak{N}((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))^{\square\square}$ *sur une catégorie ayant pour ensemble sous-jacent l'ensemble* $\underline{A}$ *des foncteurs* p*-structurés de* $(C'^{\cdot}, s')$ *vers* $(\underset{\square}{\square} C^{\cdot}, \square s)$.

Δ. $(\underset{\square}{\square} C^{\cdot}, \square s)$ étant une catégorie p-structurée, l'application

$$((\underset{\square}{\square} C^{\cdot}, \square s), f, (C'^{\cdot}, s')) \to f$$

définit une bijection z' de $\underline{A}$ sur l'ensemble $\mathcal{F}(\square s, s')$ considéré dans la proposition 2 dont nous reprenons les notations. La catégorie cherchée est donc l'image de $\mathfrak{N}((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))^{\square\square}$ par la bijection $z'^{-1}.z$. ∇

REMARQUE. En fait la première partie de la preuve de la proposition 3 montre qu'il existe $\bar{a}$ et $\bar{b}$ structurant les applications source et but de $\square\square C^{\cdot}$ dès qu'il existe un produit fibré de (k, k) dans p; dans ce cas d, qui admet $v'.m'$ pour inverse à gauche, est une p-injection; la classe des unités de $\square\square C^{\cdot}$ définit alors une p-sous-structure $\bar{s}_0$ de $\square s$, à savoir le but de l'unique inversible d' de source s tel que $p(d')$ soit la bijection $y \to y^{\square\square}$ de C sur $(\square\square C^{\cdot})_0$. Les parties 2 et 3 de cette preuve montrent que, si de plus il existe un produit fibré de $(\bar{a}, \bar{b})$ dans p, on a une catégorie double p-structurée $(\square\square C^{\cdot}, \underset{\square}{\square} C^{\cdot}, \square s)$, où $\square s$ est le produit fibré de (k, k) dans p défini plus haut.

PROPOSITION 4. *L'ensemble des transformations naturelles p-structurées est muni d'une structure de 2-catégorie $(\mathfrak{N}(p)^{\square\square}, \mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge})$ telle que $\mathfrak{N}(p)^{\square\square}$ soit la catégorie somme des catégories longitudinales*

$$\mathfrak{N}((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))^{\square\square}$$

et que l'application y associant à la transformation naturelle p-structurée T la transformation naturelle sous-jacente définisse un foncteur double de $(\mathfrak{N}(p)^{\square\square}, \mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge})$ vers la 2-catégorie des transformations naturelles associée à l'univers $\mathfrak{U}$, laquelle est notée $(\mathfrak{N}^{\square\square}, \mathfrak{N}^{\blacklozenge})$. 1+

Δ. y définit un foncteur fidèle de $\mathfrak{N}(p)^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}^{\square\square}$. Soit T une transformation naturelle p-structurée $(\bar{h}', t, \bar{h})$, où

$$\bar{h} = ((C'^{\cdot}, s'), h, (C^{\cdot}, s)).$$

Si $\bar{g}$ est un foncteur p-structuré $((\bar{C}^{\cdot}, \bar{s}), g, (C'^{\cdot}, s'))$, le triplet $(\bar{g}.\bar{h}', g.t_o, \bar{g}.\bar{h})$ est une transformation naturelle p-structurée, appliquée par y sur $\hat{p}\mathfrak{F}(\bar{g})y(T)$; nous la noterons $\bar{g}T$. Si $\bar{f}$ est un foncteur p-structuré $((C^{\cdot}, s), f, (G^{\cdot}, \tilde{s}))$ et si f_o est le p-sous-morphisme de f de source $\tilde{s}_o$, de but s_o, le triplet $(\bar{h}'.\bar{f}, t.f_o, \bar{h}.\bar{f})$ est une transformation naturelle p-structurée appliquée par y sur $y(T)\hat{p}\mathfrak{F}(\bar{f})$; désignons-la par $T\bar{f}$. Considérons sur $\mathfrak{N}(p)$ la loi de composition partielle:

$$(T', T) \to T' \blacklozenge T = \bar{g}'T \square\square T'\bar{h}, \text{ ssi } \bar{g}.\bar{h} \text{ est défini, où } T = (\bar{h}', t, \bar{h}),$$
$$T' = (\bar{g}', t', \bar{g}).$$

y définit un homomorphisme de $\mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge}$ vers $\mathfrak{N}^{\blacklozenge}$; puisque $(\mathfrak{N}^{\square\square}, \mathfrak{N}^{\blacklozenge})$ est une 2-catégorie et que p est fidèle, $(\mathfrak{N}(p)^{\square\square}, \mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge})$ est aussi une 2-catégorie, dite 2-*catégorie des transformations naturelles p-structurées.* ∇

Nous allons montrer que, sous certaines conditions, les catégories longitudinales des transformations naturelles p-structurées sont canoniquement structurées.

HYPOTHESE. Dans la fin de ce paragraphe, nous supposons donné un foncteur d'homomorphismes saturé p', de $H'^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$, à produits fibrés finis et à noyaux. Nous désignons par $(H^{\cdot}, D)$ une catégorie p'-dominée, de catégorie sous-jacente $H^{\cdot}$, telle que, pour toute unité s' de $H^{\cdot}$, le foncteur $D(., s')$ de $H^{\cdot}$ vers $H'^{\cdot}$ associant $D(h, s')$ à h soit compatible avec les 2

produits fibrés finis. Rappelons (voir [5]) que, si $(K^{\cdot}, \bar{s})$ est une caté-
1+ gorie p-structurée, il existe alors une catégorie p'-structurée $((\bar{s}.H.s')^{\bullet}, D(\bar{s}, s'))$, notée $D((K^{\cdot}, \bar{s}), s')$, dont la loi de composition est:

$$(h', h) \to h'', \quad \text{où} \quad p(h'')(x) = p(h')(x).p(h)(x)$$

ssi cet élément est défini pour tout $x \in p'(s')$.

PROPOSITION 5. *Soient* $(C'^{\cdot}, s')$ *une catégorie* p-*structurée et* $(K^{\cdot}, K^{\circ}, \bar{s})$ *une catégorie double* p-*structurée. Il existe une sous-catégorie* p'-*structurée* $D((K^{\cdot}, K^{\circ}, \bar{s}), (C'^{\cdot}, s'))$ *de* $D((K^{\cdot}, \bar{s}), s')$ *définie par l'ensemble* $\underline{A}$ *des éléments* f *de* H *tels que* $((K^{\circ}, \bar{s}), f, (C'^{\cdot}, s'))$ *soit un élément de* $\mathfrak{F}(p)$.

Δ. Notons $\bar{a}$, $\bar{b}$ et $\bar{k}$ (resp. a', b' et k') les éléments de H structurant les applications source, but et loi de composition de K° (resp. de $C'^{\cdot}$) relativement à $\bar{s}$ (resp. à s').

1°) Le couple $(D(\bar{a}, s'), D(\bar{s}, a'))$ admet un noyau canonique n dans p', dont la source u est appliquée par p' sur l'ensemble U des $f \in \bar{s}.H.s'$ tels que:

$$\bar{a}.f = p'(D(\bar{a}, s'))(f) = p'(D(\bar{s}, a'))(f) = f.a'.$$

Il existe aussi un noyau canonique n' dans p' de $(D(\bar{b}, s'), D(\bar{s}, b'))$, et p' applique la source u' de n' sur l'ensemble U' des $f \in \bar{s}.H.s'$ tels que $\bar{b}.f = f.b'$. Comme p' est un foncteur d'homomorphismes saturé à produits fibrés finis, il existe un produit fibré naturalisé (non canonique) $((n, \bar{n}), (n', \bar{n}'))$ dans p' tel que $n.\bar{n}$ soit la p'-injection canonique de $\bar{u}$ vers $D(\bar{s}, s')$, où $\bar{u}$ est la p'-sous-structure de $D(\bar{s}, s')$ définie par l'intersection de U et de U'. Autrement dit $p'(\bar{u})$ est l'ensemble U'' des $f \in \bar{s}.H.s'$ tels que $p(f)$ définisse un homomorphisme entre les graphes sous-jacents à $C'^{\cdot}$ et à K°.

2°) Soient $((\bar{a}, \bar{v}), (\bar{b}, \bar{v}'))$ et $((a', w), (b', w'))$ les produits fibrés canoniques dans p. Par hypothèse

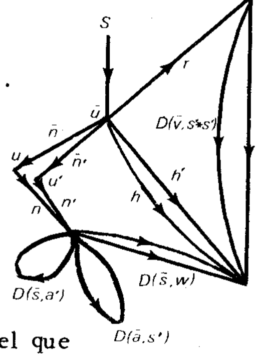
$$((D(\bar{a}, s'), D(\bar{v}, s')), (D(\bar{b}, s'), D(\bar{v}', s')))$$

est un produit fibré naturalisé dans p'. Posons

$$h = D(\bar{s}, w).n.\bar{n} \quad \text{et} \quad h' = D(\bar{s}, w').n.\bar{n}.$$

En utilisant le fait que D est un foncteur de $H^{\cdot} \times H^{*}$ vers $H^{\cdot}$, on obtient

$$D(\bar{a}, s'*s').b = D(\bar{a}, w).n.\bar{n} = D(\bar{s}, w).D(\bar{a}, s').n.\bar{n} =$$
$$= D(\bar{s}, w).D(\bar{s}, a').n.\bar{n} = D(\bar{s}, a'.w).n.\bar{n}$$



et, de même

$$D(\bar{b}, s'*s').b' = D(\bar{s}, b'.w').n'.\bar{n}'.$$

Puisque $a'.w = b'.w'$ et $n.\bar{n} = n'.\bar{n}'$, il s'ensuit

$$D(\bar{a}, s'*s').b = D(\bar{b}, s'*s').b',$$

de sorte qu'il existe un et un seul $r \in H'.\bar{u}$ tel que

$$D(\bar{v}, s'*s').r = b \quad \text{et} \quad D(\bar{v}', s'*s').r = b';$$

$p'(r)$ associe à l'élément f de U'' l'unique $f*f$ tel que

$$\bar{v}.(f*f) = f.w \quad \text{et} \quad \bar{v}'.(f*f) = f.w'.$$

La source S du noyau canonique dans p' du couple $(D(\bar{s}, k').n.\bar{n},$ $D(\bar{k}, s'*s').r)$ est telle que $p'(S)$ soit l'ensemble des $f \in U''$ tels que $f.k' = \bar{k}.(f*f)$. Il en résulte $p'(S) = \underline{A}$.

4°) Soit $\mathfrak{F}(K^{\circ}, C'^{\cdot})$ la catégorie des foncteurs de $C'^{\cdot}$ vers K° associée à la catégorie double $(K^{\cdot}, K^{\circ})$ par le théorème 7-II [6]. La bijection restriction de p' à $\underline{A}$ définissant un isomorphisme de la sous-classe multiplicative $\underline{A}^{\bullet}$ de $(\bar{s}.H.s')^{\bullet}$ sur $\mathfrak{F}(K^{\circ}, C'^{\cdot})$, en fait $\underline{A}^{\bullet}$ est une sous-catégorie de $(\bar{s}.H.s')^{\bullet}$; comme S est une p'-sous-structure de $D(\bar{s}, s')$, il s'ensuit, d'après la proposition 5-2, que $(\underline{A}^{\bullet}, S)$ est une sous-catégorie p'-structurée de $D((K^{\cdot}, \bar{s}), s')$. ∇

Notons $\hat{p}'$ le foncteur d'oubli canonique de la catégorie $\mathfrak{F}(p')$ vers $\mathfrak{M}$ et $\hat{p}'^{\circ}$ le foncteur (non fidèle) de $\mathfrak{F}(p')$ vers $\mathfrak{M}$ associant $p'(f_o) = (C_o^{\cdot}, \underline{f}_\iota, C_o'^{\cdot})$ à $((C^{\cdot}, s), f, (C'^{\cdot}, s'))$, où $\underline{f} = p'(f)$.

PROPOSITION 6. *Si p est à produits fibrés finis, il existe une catégorie $\hat{p}'^{\circ}$-dominée $(\mathfrak{F}(p), E)$ telle que $E((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))$ soit isomorphe à la catégorie p'-structurée $D(\square(C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))$ associée à la catégorie double des quatuors de $(C^{\cdot}, s)$.* 1

Δ. Considérons deux foncteurs p-structurés

$$\bar{g}' = ((C'^{\cdot}, s'), g', (G'^{\cdot}, \bar{s}')) \quad \text{et} \quad \bar{g} = ((G^{\cdot}, \bar{s}), g, (C^{\cdot}, s)).$$

1°) Soit $g*g$ l'élément de $\tilde{s}*\tilde{s}.H.s*s$ appliqué par p sur une restriction de $p(g)\times p(g)$. Si k et $\tilde{k}$ sont les éléments de H structurant les lois de composition de $C^{\cdot}$ et $G^{\cdot}$ respectivement, on a $\tilde{k}.g*g=g.k$, de sorte qu'il existe un unique élément l de H tel que

$$\tilde{m}.l = g*g.m \quad \text{et} \quad \tilde{m}'.l = g*g.m',$$

où $((k,m),(k,m'))$ et $((\tilde{k},\tilde{m}),(\tilde{k},\tilde{m}'))$ sont les produits fibrés naturalisés dans p définissant $\square s$ et $\square\tilde{s}$. L'application $p(l)$ définissant un foncteur double entre les catégories de quatuors de $C^{\cdot}$ et de $G^{\cdot}$,

$\square\square\bar{g}=((\square\square G^{\cdot},\square\tilde{s}),l,(\square\square C^{\cdot},\square s))$ et $\boxminus\bar{g}=((\boxminus G^{\cdot},\square\tilde{s}),l,(\boxminus C^{\cdot},\square s))$

sont des foncteurs p-structurés. Posons $f=D(l,g')$. Si le composé $h'\bullet h$ est défini dans la catégorie $B^{\bullet}$ sous-jacente à $B=D((\square\square C^{\cdot},\square s),s')$, alors $p'(f)(h'\bullet h)=l.(h'\bullet h).g'$ associe à $x\in G'$ l'élément

$$l(h'(g'(x))\square\square h(g'(x)))=l(h'(g'(x)))\square\square l(h(g'(x)))=$$
$$=(l.h'.g'\bullet l.h.g')(x)$$

où l'on écrit $t(x')$ au lieu de $p(t)(x')$, si $t\in H$ et $x'\in p(\alpha(t))$. Il en résulte que f est sous-jacent à un foncteur p-structuré $\bar{f}$ de B vers $B'=D((\square\square G^{\cdot},\square\tilde{s}),\tilde{s}')$.

2°) Soient $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ les ensembles sous-jacents aux sous-catégories p-structurées

$$A=D(\square(C^{\cdot},s),(C^{\cdot\cdot},s')) \quad \text{et} \quad A'=D(\square(G^{\cdot},\tilde{s}),(G^{\cdot\cdot},\tilde{s}'))$$

de B et B' respectivement. Si h appartient à $\underline{A}$, alors $p'(f)(h)=l.h.g'$ définit un foncteur p-structuré de $(G'^{\cdot},\tilde{s}')$ vers $(\boxminus G^{\cdot},\square\tilde{s})$, c'est-à-dire appartient à A'. Par suite il existe un p'-sous-morphisme $D(\bar{g},\bar{g}')$ de $\bar{f}$ de source A, de but A'. L'application $(\bar{g},\bar{g}')\to D(\bar{g},\bar{g}')$ définit un foncteur D' de $\mathfrak{F}(p)\times\mathfrak{F}(p)^*$ vers $\mathfrak{F}(p')$.

3°) Soit $\underline{z}_1$ la bijection $z^{-1}.z'$ définissant l'isomorphisme canonique (corollaire, proposition 3) de $A^{\bullet}$ sur la catégorie $\mathfrak{N}((C^{\cdot},s),(C'^{\cdot},s'))^{\square\square}$ dont on identifie les unités à des foncteurs p-structurés. Cette bijection définit un isomorphisme Z de A sur la catégorie p'-structurée $E((C^{\cdot},s),(C^{\cdot\cdot},s'))$ image de A par $\underline{z}_1$. Soit Z' l'isomorphisme, défini de manière analogue, de A' sur $E((G^{\cdot},\tilde{s}),(G'^{\cdot},\tilde{s}'))$. L'application

$(\bar{g}, \bar{g}') \rightarrow Z'.D(\bar{g}, \bar{g}').Z^{-1}$ définit un foncteur E de $\mathfrak{F}(p) \times \mathfrak{F}(p)^*$ vers $\mathfrak{F}(p')$ équivalent à D' et $p'^o.E$ est le foncteur homomorphismes de $\mathfrak{F}(p)$, c'est-à-dire $(\mathfrak{F}(p), E)$ est une catégorie p'^o-dominée. ∇

PROPOSITION 7. *Si p est à produits fibrés finis, il existe une catégorie p'-dominée $(\mathfrak{F}(p), E')$ telle que $E'((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s'))$ soit isomorphe à une p'-sous-structure de $D(s, s')$ et il existe une transformation naturelle $(E'.(\square\square \times \square\square), \tau^{\square\square}, E')$, où $\square\square$ est le foncteur $\bar{g} \rightarrow \square\square\bar{g}$ de $\mathfrak{F}(p)$ vers $\mathfrak{F}(p)$ et où $p'(\tau^{\square\square}((C^{\cdot}, s), (C'^{\cdot}, s')))$ associe $\square\square\bar{g}$ à $\bar{g}$.* 1

Δ. Soient $e = (C^{\cdot}, s)$ et $e' = (C'^{\cdot}, s')$ deux catégories p-structurées; nous poserons $\square\square e = (\square\square C^{\cdot}, s)$.

1°) Si $\bar{g} = (e, g, e')$ est un foncteur p-structuré, un foncteur p-structuré $\square\square\bar{g} = (\square\square e, \square g, \square\square e')$ lui a été associé au début de la preuve de la proposition 6. Comme le foncteur sous-jacent à $\square\square\bar{g}$ est $\square\square F$, si F est le foncteur sous-jacent à $\bar{g}$, l'application $\bar{g} \rightarrow \square\square\bar{g}$ définit un foncteur $\square\square$ de $\mathfrak{F}(p)$ vers lui-même.

2°) Si C^o est la catégorie discrète sur C, le couple (C^o, s) est une catégorie p-structurée, et $\grave{e} = (C^o, C^{\cdot}, s)$ est une catégorie double p-structurée. La catégorie p'-structurée $D(\grave{e}, e')$ que lui associe la proposition 5 est de la forme (A^o, S), où A^o est la catégorie discrète sur l'ensemble des h tels que (e, h, e') soit un foncteur p-structuré et où S est une p'-sous-structure de $D(s, s')$; notons j la p'-injection canonique de S vers $D(s, s')$. Soit (A'^o, S') la catégorie p'-structurée construite de même à partir de $\square\square e$ et de $\square\square e'$, et j' la p'-injection canonique de S' vers $D(\square s, \square s')$. Montrons qu'il existe un élément $t(e, e')$ de H', de source S, de but S', tel que $p'(t(e, e'))$ associe $\square g$ à $g \in A$. Notons a, b, k et a', b', k' les éléments de H qui structurent respectivement les applications sources, buts et lois de composition de $C^{\cdot}$ et de $C'^{\cdot}$. Soient $((a, v), (b, v'))$ et $((a', w), (b', w'))$ les produits fibrés dans p naturalisés canoniques, $((k, m), (k, m'))$ et $((k', n), (k', n'))$ les produits fibrés naturalisés définissant $\square s$ et $\square s'$. Etant donné que l'on obtient $D(a, s').j = D(s, a').j$, les applications sous-jacentes aux deux membres associant respectivement $a.g$ et $g.a'$ à $g \in A$, et que de même $D(b, s').j = D(s, b').j$, une démonstration analogue à celle de la proposition 5, partie 2, prouve qu'il existe un élément r de H' tel que

$$D(v, s'*s').r = D(s, w).j \quad \text{et} \quad D(v', s'*s').r = D(s, w').j;$$

$p'(r)$ associe $g*g$ à g. L'égalité $k.(g*g) = g.k'$ pour tout g entraîne:

$$D(k, s'*s').r = D(s, k').j,$$

d'où

$$D(k, \Box s').D(s*s, n).r = D(k, n).r = D(s, n).D(k, s'*s').r$$
$$= D(s, n).D(s, k').j$$

et, de manière analogue,

$$D(k, \Box s').D(s*s, n').r = D(s, n').D(s, k').j.$$

Il s'ensuit

$$D(k, \Box s').D(s*s, n).r = D(k, \Box s').D(s*s, n').r,$$

car

$$D(s, n').D(s, k') = D(s, k'.n') = D(s, k'.n) = D(s, n).D(s, k').$$

Le foncteur $D(.\,, \Box s')$ étant compatible avec les produits fibrés finis il existe un unique r' tel que

$$D(m, \Box s').r' = D(s*s, n).r \quad \text{et} \quad D(m', \Box s').r' = D(s*s, n').r,$$

et $p'(r')$ associe à $g \in A$ l'élément $\Box g \in A'$ défini par

$$m.\Box g = g*g.n \quad \text{et} \quad m'.\Box g = g*g.n'.$$

Puisque $p'(r')(A)$ est contenu dans A', il existe un unique élément r'' de $S'.H'.S$ tel que $j'.r'' = r'$, où j' est la p'-injection canonique de S' vers $D(\Box s, \Box s')$. Nous poserons $S = D''(e, e')$ et $r'' = t(e, e')$.

3°) Si de plus $\bar{h} = (\tilde{e}, h, (C^{\cdot}, s))$ et $\bar{h}' = ((C'^{\cdot}, s'), h', \tilde{e}')$ sont des foncteurs p-structurés et si $D''(\tilde{e}, \tilde{e}') = S''$, l'image de l'application $p'(D(h, h')) : g \to h.g.h'$ est contenue dans $p'(S'')$, de sorte qu'il existe un p'-sous-morphisme $D''(\bar{h}, \bar{h}')$ de $D(h, h')$ de source S et de but S''. L'application $(\bar{h}, \bar{h}') \to D''(\bar{h}, \bar{h}')$ définit un foncteur de $\mathfrak{F}(p) \times \mathfrak{F}(p)^*$ vers $H'^{\cdot}$, que nous désignerons par D''. On a

$$D''(\Box\Box\bar{h}, \Box\Box\bar{h}').t(e, e') = t(\tilde{e}, \tilde{e}').D''(\bar{h}, \bar{h}'),$$

les applications sous-jacentes aux deux membres associant respectivement $\Box h.\Box g.\Box h'$ et $\Box(h.g.h')$ à $g \in A$, lesquels sont égaux. Donc $T =$

$(D''.(\square\!\square \times \square\!\square), t, D'')$ est une transformation naturelle.

4°) p' étant un foncteur d'homomorphismes saturé, il existe une équivalence $\Gamma = (E', \gamma, D'')$ telle que $p'(\gamma(e, e'))$ associe (e, h, e') à h. Le couple $(\mathfrak{F}(p), E')$ est une catégorie p'-dominée et la transformation naturelle cherchée est $\Gamma.(\square\!\square \times \square\!\square)\square\!\square\, T\, \square\!\square\, \Gamma^{-1}$. ∇

COROLLAIRE. *La proposition 7 est aussi vraie si l'on remplace partout* $\square\!\square$ *par* $\boxminus$.

Δ. La preuve est analogue à la précédente, l'application $p'(r')$ de la partie 2 ci-dessus appliquant aussi A dans l'ensemble des éléments de H sous-jacents à un foncteur p-structuré de $\boxminus e' = (\boxminus C'^{\cdot}, \square s')$ vers $\boxminus e$. ∇

PROPOSITION 8. *Si p est à produits fibrés finis et si $(H^{\cdot}, D)$ est une catégorie p'-dominée, où p' est à produits finis, $(\mathfrak{F}(p), E')$ et $(\mathfrak{F}(p), E)$ sont des catégories fortement p'-dominée et $\hat{p}'^{o}$-dominée respectivement.* 1+

Δ. Dire que $(H^{\cdot}, D)$ est fortement p'-dominée signifie que, si s, s' et $\bar{s}$ sont trois unités de $H^{\cdot}$, il existe un élément $k(s, s', \bar{s})$ de H' de source $D(s, s') \times D(s', \bar{s})$ et de but $D(s, \bar{s})$ appliqué par p' sur une restriction de la loi de composition de $H^{\cdot}$. Soient

$$e = (C^{\cdot}, s), \quad e' = (C'^{\cdot}, s') \quad \text{et} \quad \bar{e} = (G^{\cdot}, \bar{s})$$

trois catégories p-structurées.

1°) Pour montrer que $(\mathfrak{F}(p), E')$ est fortement p'-dominée, il suffit, vu la construction de E' à partir du foncteur D'' donnée dans la proposition 7, de prouver qu'il existe un élément $k'(e, e', \bar{e})$ de

$$\tilde{s} = D''(e, e') \times D''(e', \bar{e}) \quad \text{vers} \quad s'' = D''(e, \bar{e})$$

appliqué par p' sur une restriction de la loi de composition de $H^{\cdot}$. L'image $p'(k(s, s', \bar{s}))(p'(\tilde{s}))$ étant contenue dans $p'(s'')$ et $\tilde{s}$ et s'' étant respectivement des p'-sous-structures de $D(s, s') \times D(s', \bar{s})$ et de $D(s, \bar{s})$, il existe un p'-sous-morphisme $k'(e, e', \bar{e})$ de $k(s, s', \bar{s})$ vérifiant les conditions voulues.

3°) Montrons qu'il existe un élément $\bar{h}$ de $\mathfrak{F}(p')$ de source $L \times L'$, où $L = E(e, e')$, $L' = E(e', \bar{e})$, de but $L'' = E(e, \bar{e})$, appliqué par $\hat{p}'$ sur une restriction c de la loi de composition de la catégorie $\mathfrak{N}(p)$ ♦ (proposition 4) à $\mathfrak{N}(e, e') \times \mathfrak{N}(e', \bar{e})$; cet élément étant appliqué par $\bar{p}'^{o}$ sur une restriction de la loi de composition de $\mathfrak{F}(p)$, il s'ensuivra que $(\mathfrak{F}(p), E)$ est fortement $\bar{p}'^{o}$-dominée. En effet L, L' et L'' sont isomorphes à $A = D(\square e, e') = (\underline{A}^{\bullet}, S)$, $A' = D(\square e', \bar{e}) = (\underline{A}'^{\bullet}, S')$, $A'' = D(\square e, \bar{e}) = (\underline{A}''^{\bullet}, S'')$; notons

$$Z = (L, z_1, A), \quad Z' = (L', z'_1, A') \quad \text{et } Z'' = (L'', z''_1, A'')$$

les isomorphismes canoniques. L'application $c' = \underline{z}''^{-1}_1 . c . (\underline{z}_1 \times \underline{z}'_1)$ associe à (f', f) l'élément $(\square(b^{\square\square}. f').f) \bullet (f'. a'^{\square\square}. f)$, où $a'^{\square\square}$ est l'élément de $s'.H.\square s'$ tel que $p(a'^{\square\square})(y, y_1, x_1, x) = x$ et $b^{\square\square}$ l'élément de de $s.H.\square s$ tel que $p(b^{\square\square})(y', y'_1, x'_1, x') = y'$ (ceux-ci existent d'après la proposition 3). Il nous suffit de prouver qu'il existe un foncteur p'-structuré $\bar{h}' = (A'', h', A \times A')$ tel que $p'(h') = c'$; l'élément $\bar{h}$ voulu sera alors $Z''. \bar{h}'. (Z \times Z')^{-1}$. Or S étant la p'-sous-structure de $D(\square s, s')$ définie par l'ensemble des éléments de H sous-jacents à un foncteur p-structuré de e' vers $\boxminus e$, elle est identique à $D''(\boxminus e, e')$; de même

$$S' = D''(\boxminus e', \bar{e}) \quad \text{et} \quad S'' = D''(\boxminus e, \bar{e}).$$

Soit $t(e, e')$ l'élément considéré dans la proposition 7, de source S, de but $D''(\boxminus e, \boxminus e')$. Les triplets $\bar{\bar{a}}' = (e', a'^{\square\square}, \boxminus e')$ et $\bar{\bar{b}} = (e, b^{\square\square}, \boxminus e)$ étant des foncteurs p-structurés, il existe des éléments $S \times D''(\bar{\bar{a}}', \bar{e})$ et $(t(e', e). D''(\bar{\bar{b}}, e')) \times S'$ de source $S \times S'$, de but $S \times D''(e', \bar{e})$ et $D''(\boxminus e, \boxminus e') \times S'$ respectivement. Posons

$$g' = k'(\boxminus e, e', \bar{e}).(S \times D''(\bar{\bar{a}}', \bar{e})),$$
$$g = k'(\boxminus e, \boxminus e', \bar{e}).((t(e, e'). D''(\bar{\bar{b}}, e')) \times S').$$

g et g' sont des éléments de H' de source $S \times S'$, de but $D''(\boxminus e, \bar{e})$, et les applications $p'(g)$ et $p'(g')$ associent à (f', f) respectivement $\square(b^{\square\square}. f').f$ et $f'. a'^{\square\square}. f$; ces derniers éléments étant composables dans $A''^{\bullet}$ et le foncteur p' étant fidèle, il s'ensuit $a^{\bullet}. g = b^{\bullet}. g'$, où $a^{\bullet}$ et $b^{\bullet}$ sont les éléments de H' structurant les applications source et but de $A''^{\bullet}$. Par suite il existe un unique élément g'' de H' tel que

$$v^{\bullet}. g'' = g \quad \text{et} \quad v'^{\bullet}. g'' = g',$$

où $((a^{\bullet}, v^{\bullet}), (b^{\bullet}, v'^{\bullet}))$ est le produit fibré naturalisé canonique dans p'.

Si $k^{\bullet}$ est l'élément de H' structurant la loi de composition de $A''^{\bullet}$, l'élément $h' = k^{\bullet}.g''$ est tel que $p'(h') = c'$. Comme $(\mathfrak{N}(p)^{\square\square}, \mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge})$ est une 2-catégorie, c définit un foncteur de $\mathfrak{N}(e, e')^{\square\square} \times \mathfrak{N}(e', \bar{e})^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(e, \bar{e})^{\square\square}$; a fortiori c' définit un foncteur de $A^{\bullet} \times A'^{\bullet}$ vers $A''^{\bullet}$. Donc $(A'', h', A \times A')$ est un foncteur p'-structuré $\overline{h'}$. ∇

Supposons maintenant que $p = p'$ et que $(C'^{\cdot}, s')$ est une catégorie p-structurée, notée e', telle que le produit $s \times s'$ dans p soit défini pour toute unité s de $H^{\cdot}$. Il existe alors un foncteur $X: f \to f \times s'$ produit canonique par s', de $H^{\cdot}$ vers $H^{\cdot}$. D'après le corollaire de la proposition 7-2, il existe également un foncteur X' de $\mathfrak{F}(p)$ vers $\mathfrak{F}(p)$, produit canonique par e'.

PROPOSITION 9. *Supposons que $D(\,.\,, s')$ soit un foncteur coadjoint de X, le X-éjecteur associé à une unité s de $H^{\cdot}$ étant de la forme $(j(s), D(s, s'))$, où $p(j(s))$ est l'application d'évaluation $(f, x) \to p(f)(x)$; alors le foncteur X' admet $E(\,.\,, (C'^{\cdot}, s'))$ pour coadjoint.* 1

Δ. Soient $e = (C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée,

$$A = D(\square e, e') = (A^{\bullet}, S), \quad L = E(e, e');$$

nous notons $Z = (L, z_1, A)$ l'isomorphisme canonique de A sur L et $\bar{u} = (B, u, A)$ la p-injection canonique de A vers $B = D((\square\square C^{\cdot}, \square s), s')$. Enfin $((k, m), (k, m'))$ est le produit fibré naturalisé définissant $\square s$.

1°) Si X'' désigne le foncteur $F \to F \times C'^{\cdot}$ de $\mathfrak{F}$ vers $\mathfrak{F}$, on sait (voir par exemple [2] ou [7]) qu'il existe un X''-éjecteur $(J, \mathfrak{N}(C^{\cdot}, C'^{\cdot})^{\square\square})$ tel que J soit le foncteur de $\mathfrak{N}(C^{\cdot}, C'^{\cdot})^{\square\square} \times C'^{\cdot}$ vers $C'^{\cdot}$ associant à (T, x) l'élément $T(x) = F'(x).t(o)$, si $T = (F', t, F)$ et si x est un élément de C' de source o. Par ailleurs l'injection ν (proposition 1) associant à une transformation naturelle p-structurée la transformation naturelle sous-jacente définit un foncteur N de $\mathfrak{N}(e, e')^{\square\square}$ vers $\mathfrak{N}(C^{\cdot}, C'^{\cdot})^{\square\square}$. Si l'on pose

$$j' = k.m.j(\square s).(u.z_1^{-1} \times s'),$$

l'application $p(j')$ est sous-jacente au foncteur $J.(N \times C'^{\cdot})$, de sorte que $\overline{j'} = (e, j', X'(L))$ est un foncteur p-structuré.

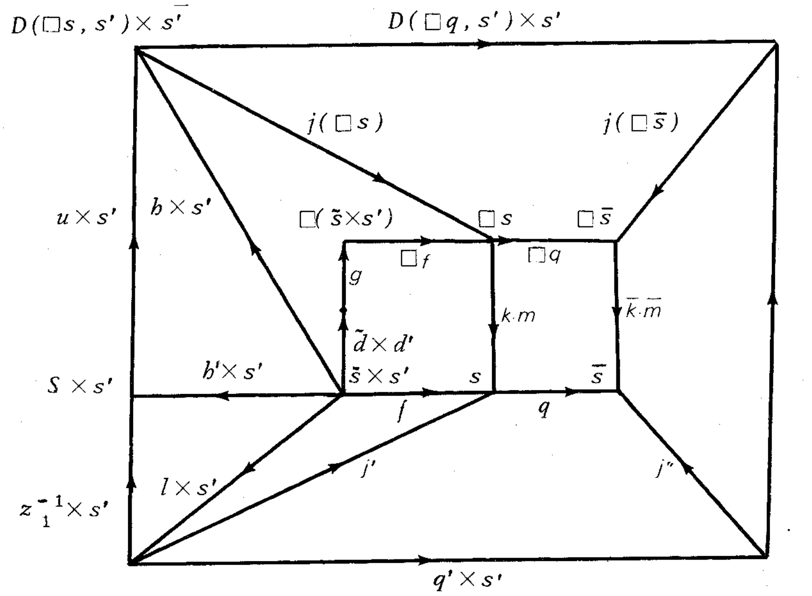
2°) Montrons que $(L, \bar{j}')$ est un X'-éjecteur. En effet, supposons que $\bar{f} = (e, f, X'(\bar{e}))$, où $\bar{e} = (G^{\cdot}, \bar{s})$, soit un foncteur p-structuré, et soit F le foncteur de $G^{\cdot}\times C'^{\cdot}$ vers $C^{\cdot}$ sous-jacent. Il existe des catégories p-structurées $(\square\square G^{\cdot}, \square\bar{s})$ et $(\square\square(G^{\cdot}\times C'^{\cdot}), \square(\bar{s}\times s'))$; soient $\tilde{k}$, k' et k'' les éléments de H structurant les lois de composition de $G^{\cdot}$, de $C'^{\cdot}$ et de $G^{\cdot}\times C'^{\cdot}$ relativement à $\bar{s}$, à s' et à $\bar{s}\times s'$; comme k'' est un produit de $(\tilde{k}, k')$, d'après le théorème de commutativité des produits et produits fibrés, le produit fibré $\square(\bar{s}\times s')$ de (k'', k'') est un produit de $(\square\bar{s}, \square s')$. Il existe donc un $g \in \square(\bar{s}\times s').H.(\square\bar{s}\times\square s')$ inversible tel que $p(g)$ associe

$$((\bar{x}, \bar{x}'), (\bar{y}, \bar{y}'), (y, y'), (x, x')) \text{ à } ((\bar{x}, \bar{y}, y, x), (\bar{x}', \bar{y}', y', x')).$$

D'après la preuve de la proposition 3, il existe aussi des éléments $\tilde{d}$ et d' de H vérifiant les conditions:

$$\tilde{d} \in \square\bar{s}.H.\bar{s} \text{ et } p(\tilde{d})(x) = x^{\boxminus}, \text{ si } x \in G,$$
$$d' \in \square s'.H.s' \text{ et } p(d')(x') = x'^{\square\square}, \text{ si } x \in C'.$$

Enfin il existe $\square f \in \square s.H.\square(\bar{s}\times s')$ tel que $p(\square f)$ soit l'application définissant le foncteur $\boxminus F$. Posons $f' = \square f.g.(\tilde{d}\times d')$; puisque f' appar-



tient à $\square s.H.X(\tilde{s})$, il existe un unique $h \in D(\square s, s').H.\tilde{s}$ tel que $f' = j(\square s).(h \times s')$. Cette relation entraîne

$$p(h(x))(x') = p(f')(x, x'), \text{ où } h(x) = p(h)(x),$$

si $x \in G$ et $x' \in C'$. Autrement dit $p(h(x))$ est l'application

$$p(\square f).p(g).[c_x, p(d')] : x' \to (f(\bar{\upsilon}, x'), f(x, \bar{\upsilon}'), f(x, \upsilon'), f(\upsilon, x')),$$

où $f(\xi) = p(f)(\xi)$ et où c_x est l'application de C' dans $\square G^{\cdot}$ constante sur $x^{\boxminus}$, υ et υ' les sources de x et x', $\bar{\upsilon}$ et $\bar{\upsilon}'$ leurs buts. Etant donné que $p(d')$ et c_x définissent des foncteurs de $C'^{\cdot}$ vers $\boxminus C'^{\cdot}$ et vers $\boxminus G^{\cdot}$ respectivement, que $p(g)$ définit un isomorphisme de $\boxminus G^{\cdot} \times \boxminus C'^{\cdot}$ sur $\boxminus(G^{\cdot} \times C'^{\cdot})$ et $p(\square f)$ le foncteur $\boxminus F$, le triplet $(\boxminus e, h(x), e')$ est un foncteur p-structuré, c'est-à-dire $h(x)$ appartient à $\underline{A}$ pour tout élément x de G; par suite, S étant la p-sous-structure de $D(\square s, s')$ définie par $\underline{A}$, il existe un unique élément h' de $S.H.\tilde{s}$ tel que $u.h' = h$. Posant $l = z_1.h'$, on voit que l'application $\nu.p(l)$ est sous-jacente à l'unique foncteur F' de $G^{\cdot}$ vers $\mathfrak{R}(C^{\cdot}, C'^{\cdot})^{\square\square}$ tel que $J.(F' \times C'^{\cdot}) = F$. Il s'ensuit que $p(l)$ définit un foncteur de $G^{\cdot}$ vers la catégorie $\mathfrak{R}(e, e')^{\square\square}$ sous-jacente à L; a fortiori $\bar{l} = (L, l, \tilde{e})$ est un foncteur p-structuré. Si λ est le foncteur $\hat{p}\mathfrak{F}(\bar{l})$ sous-jacent à $\bar{l}$, on trouve

$$\hat{p}\mathfrak{F}(\bar{j}'.X'(\bar{l})) = J.(N \times C'^{\cdot}).(\lambda \times C'^{\cdot}) = J.(N.\lambda \times C'^{\cdot}) = J.(F' \times C'^{\cdot}) = F$$

d'où, $\hat{p}\mathfrak{F}$ étant fidèle, $\bar{j}'.X'(\bar{l}) = \bar{f}$. Enfin si $\bar{l}' = (L, l', \tilde{e})$ est un foncteur p-structuré tel que $\bar{j}'.X'(\bar{l}') = \bar{f}$, le foncteur λ' sous-jacent à $\bar{l}'$ vérifie $J.(N \times C'^{\cdot}).(\lambda' \times C'^{\cdot}) = F$, ce qui implique $N.\lambda' = F' = N.\lambda$, donc $\lambda = \lambda'$ et $\bar{l} = \bar{l}'$. Ceci prouve que $(L, \bar{j}')$ est un X'-éjecteur; nous le noterons $V(e)$.

3°) Soit Y le foncteur coadjoint de X' construit à partir des éjecteurs $V(e)$. Soient $q = (\bar{e}, q, e)$, où $\bar{e} = (\bar{C}^{\cdot}, \bar{s})$, un foncteur p-structuré, $V(\bar{e}) = (L', \bar{j}'')$, $\bar{j}'' = (\bar{e}, j'', X'(L'))$, $Z' = (L', z_1', A')$ l'isomorphisme canonique sur L' de $A' = D(\square \bar{e}, e')$ et $\bar{u}' = (B', u', A')$ la p-injection canonique de A' vers $B' = D(\square\square \bar{e}, s')$. Si $((\bar{k}, \bar{m}), (\bar{k}, \bar{m}'))$ est le produit fibré naturalisé définissant $\square \bar{s}$ et si $\square q$ est l'élément de H de source $\square s$, de but $\square \bar{s}$, associé à q, on a $\bar{k}.\bar{m}.\square q = q.k.m$. Comme $D(.\,, s')$ est le foncteur coadjoint de X associé aux X-éjecteurs de la forme $(D(s, s'), j(s))$, l'élément $D(\square q, s')$ vérifie

$$j(\square \bar{s}).(D(\square q, s') \times s') = \square q . j(\square s).$$

D'après la preuve de la proposition 6, il existe un p-sous-morphisme q'' de $D(\square q, s')$ relativement à (u', u) et l'on a $E(\bar{q}, e') = \bar{q}' = (L', q', L)$, où $q' = z'_1 . q'' . z_1^{-1}$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} j''.(q' \times s') &= \bar{k}.\bar{m}.j(\square \bar{s}).(u'.z'^{-1}_1 \times s').(q' \times s') \\ &= \bar{k}.\bar{m}.j(\square \bar{s}).(D(\square q, s').u.z_1^{-1} \times s') \\ &= \bar{k}.\bar{m}.\square q.j(\square s).(u.z_1^{-1} \times s') = q.j'. \end{aligned}$$

Par conséquent $\bar{q}'$ est l'unique foncteur p-structuré tel que $\bar{j}''.X'(\bar{q}') = \bar{q}.\bar{j}'$, ce qui signifie que $\bar{q}' = Y(\bar{q})$. ∇

COROLLAIRE. *Avec les hypothèses de la proposition 9 et si $C'^{\cdot}$ est discrète, $D(e, s')$ est une X'-structure colibre associée à e, pour toute catégorie p-structurée e.*

1

Δ. Soit $e = (C^{\cdot}, s)$ une catégorie p-structurée. Reprenons les notations de la preuve précédente et posons $c = D(k.m, s').u$. Comme $C'^{\cdot}$ est discrète, l'application $f \to k.m.f$ définit un isomorphisme de $A^{\bullet}$ sur $(s.H.s')^{\bullet}$. De plus, si d est l'inverse à droite de $k.m$ tel que $p(d)$ soit l'application $x \to x^{\square\square}$ (proposition 3), $p(D(d, s'))(s.H.s')$ est contenu dans $\underline{A}$ et, u étant une p-injection, il existe un $\bar{d}'$ tel que $u.\bar{d}' = D(d, s')$. Ce $\bar{d}'$ est l'inverse de c dans $H^{\cdot}$. Donc c est sous-jacent à un isomorphisme $\bar{c}$ de A sur $\bar{L}' = D(e, s')$. Il en résulte que le couple $(\bar{L}', \bar{j}'.Z.\bar{c}^{-1})$ est aussi un X'-éjecteur. ∇

Rappelons [8] qu'on appelle *catégorie cartésienne fermée* une catégorie $H^{\cdot}$ à produits finis telle que, pour toute unité s' de $H^{\cdot}$, un foncteur produit par s' ait un coadjoint; ce dernier est alors compatible avec les produits fibrés finis.

PROPOSITION 10. *Si $H^{\cdot}$ est une catégorie cartésienne fermée dont un élément final O est un générateur et si p est un foncteur d'homomorphismes saturé à noyaux équivalent au foncteur η de $H^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$ associé au générateur O, alors $\mathfrak{F}(p)$ est une catégorie cartésienne fermée.*

Δ. Puisque η est à produits, p est aussi à produits fibrés finis.

D'après [8] $H^{\cdot}$ est une catégorie monoïdale fermée et on peut choisir pour toute unité s' un foncteur coadjoint $D(.,s')$ du foncteur produit canonique par s' dans p de sorte que $D(.,s')$ soit le foncteur partiel associé à une catégorie p-dominée $(H^{\cdot}, D)$ vérifiant les conditions de la 1¶
proposition 9. Il s'ensuit que $\mathfrak{F}(p)$ est une catégorie cartésienne fermée. ∇

REMARQUE. D'après la preuve précédente, les hypothèses de la proposition 10 équivalent à dire que $(H^{\cdot}, p)$ est un couple fermé au sens de [9] (mais $(\mathfrak{F}(p), \bar{p})$ n'en est pas un, car l'application sous-jacente à un X'-éjecteur n'est pas l'application d'évaluation). Par suite cette proposition entraîne par exemple que la catégorie des foncteurs quasi-topologiques [5] (resp. ordonnés) est une catégorie cartésienne fermée. 2
Par contre ses hypothèses ne sont pas remplies si $H^{\cdot}$ est la catégorie des foncteurs. Nous montrerons cependant dans un prochain article que la catégorie des foncteurs doubles est une catégorie cartésienne fermée. Plus généralement nous montrerons que la catégorie des foncteurs structurés [5] associée à une catégorie monoïdale fermée est fermée.

3+

5. Groupoïdes structurés.

Soit p un foncteur d'homomorphismes saturé de $H^{\cdot}$ vers $\mathfrak{M}$.

DEFINITION. On appelle *groupoïde p-structuré* une catégorie p-structurée $e = (C^{\cdot}, s)$ vérifiant la condition suivante: $C^{\cdot}$ est un groupoïde, et il existe un élément I de $s.H.s$, dit *morphisme d'inversion de* e, tel que $p(I)$ soit l'application d'inversion $x \to x^{-1}$.

Comme $p(I)$ est une bijection qui est son propre inverse, et comme p est fidèle, I est son propre inverse dans $H^{\cdot}$.

Nous désignerons par $\mathfrak{G}(p)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{F}(p)$ ayant pour objets les groupoïdes p-structurés, par q le foncteur de $\mathfrak{G}(p)$ vers $\mathfrak{M}$ restriction de $\bar{p}$.

PROPOSITION 1. *q est un foncteur d'homomorphismes saturé.*

Δ. Comme $\bar{p}$ est un foncteur d'homomorphismes saturé (proposition 4-2), il suffit de montrer que la catégorie p-structurée e' image d'un groupoïde p-structuré $e = (C^{\cdot}, s)$ par une bijection f est un groupoïde

p-structuré. Or son morphisme d'inversion est $h.I.h^{-1}$, où I est le morphisme d'inversion de e et h l'inversible de $H.s$ tel que $p(h)=f$. ∇

DEFINITION. Si e est un groupoïde p-structuré, on appelle *sous-groupoïde p-structuré de e* une sous-catégorie p-structurée e' de e telle que e' soit un groupoïde p-structuré.

$\mathcal{G}(p)$ étant une sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(p)$, un sous-groupoïde p-structuré de e est a fortiori une q- sous-structure de e.

PROPOSITION 2. *Si $e=(C^{\cdot},s)$ est un groupoïde p-structuré et $e'=(C'^{\cdot},s')$ une sous-catégorie p-structurée de e telle que $C'^{\cdot}$ soit un groupoïde, alors e' est un sous-groupoïde p-structuré de e.*

Δ. Soit I le morphisme d'inversion de e. Puisque l'application d'inversion de $C'^{\cdot}$ est une restriction de $p(I)$ et que s' est une p-sous-structure de s, il existe un p-sous-morphisme I' de I tel que $p(I')$ soit l'application d'inversion de $C'^{\cdot}$. Donc e' est un groupoïde p-structuré. ∇

COROLLAIRE. *Si $e=(C^{\cdot},s)$ est un groupoïde p-structuré, si $C'^{\cdot}$ est un sous-groupoïde de $C^{\cdot}$ tel que C', $C'^{\cdot}_0$ et $C'^{\cdot} * C'^{\cdot}$ définissent des p-sous-structures de s, de s et de $s*s$ respectivement, alors C' définit un sous-groupoïde p-structuré de e.*

Notons l le foncteur injection canonique de $\mathcal{G}(p)$ vers $\mathcal{F}(p)$.

PROPOSITION 3. *Soit G un foncteur de $K^{\cdot}$ vers $\mathcal{G}(p)$; posons $l.G=F$. Si F admet une limite projective e, celle-ci est aussi une limite projective de G.*

Δ. $\mathcal{G}(p)$ étant une sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}(p)$, il nous suffit de montrer que $e=(C^{\cdot},s)$ est un groupoïde p-structuré. Pour toute unité u de $K^{\cdot}$, soit $\tilde{I}(u)$ le morphisme d'inversion de $F(u)=(C^{\cdot}_u, s_u)$. Le triplet $\tilde{J}=(F,\tilde{I},F)$ est une transformation naturelle; en effet, si f est un élément de $K.u$ de but u', on a $F(f).\tilde{I}(u)=\tilde{I}(u').F(f)$, les applications sous-jacentes aux deux membres étant identiques, car $p(F(f))$ définit un foncteur de $C^{\cdot}_u$ vers $C^{\cdot}_{u'}$. Si $T=(\hat{p}_H.F,t,\hat{s})$ est la limite projective naturalisée canonique, il existe un unique $I\in s.H.s$ tel que $TI=\tilde{J}\boxdot T$ et que $p(I)$ soit l'application d'inversion de $C^{\cdot}$. Donc e

est un groupoïde p-structuré. ∇

COROLLAIRE. *Si* p *est à* $K^{\cdot}$*-limites projectives,* q *est à* $K^{\cdot}$*-limites projectives.*

Ceci résulte des propositions 3 et 7-2.

PROPOSITION 4. *Avec les hypothèses du paragraphe 3 et si* P *est dénombrablement* $\ulcorner$*-engendrant pour* $\mathfrak{M}$*, le foncteur* Q *de* $\mathcal{G}(P)$ *vers* $\mathfrak{M}$ *est dénombrablement* $(\mathfrak{M}, X' . \mathcal{G}(p)_0)$*-engendrant, où* X' *est l'ensemble des* $\hat{P}$*-monomorphismes stricts appartenant à* $\mathcal{G}(p)$.

Δ. La preuve est analogue à celle de la proposition 6-3, en y remplaçant partout les catégories p-structurées par des groupoïdes p-structurés, et en prenant pour $C_i^{\cdot}$ le sous-groupoïde de $C^{\cdot}$ engendré par Z_{i-1}. ∇

COROLLAIRE. *Supposons les conditions de la proposition 7-3 vérifiées. Alors* q *est un foncteur à structures quasi-quotients,* $\mathcal{G}(p)$ *est une catégorie à* $K^{\cdot}$*- limites inductives, si* K *appartient à* $\mathfrak{U}$*; enfin* $\mathcal{F}(p)$ *est est une catégorie à* $\mathcal{G}(p)$*-projections.*

Δ. $\mathcal{F}(p)$ appartenant à $\hat{\mathfrak{U}}$ (preuve de la proposition 7-3), $\mathcal{G}(p)$ y appartient aussi. Par suite, comme dans la proposition 7-3, on peut appliquer les théorèmes généraux d'existence de structures quasi-quotients, de limites inductives et de structures libres de [4]. ∇

DEFINITION. On appelle *groupoïde double* p*-structuré* un triplet $(K^{\cdot}, K^{\circ}, s)$, où $(K^{\cdot}, K^{\circ})$ est un groupoïde double et où $(K^{\cdot}, s)$ et (K°, s) sont des groupoïdes p-structurés.

PROPOSITION 5. *Si* $e = (C^{\cdot}, s)$ *est un groupoïde* p*-structuré, la catégorie double* p*-structurée* $\square e$ *(proposition 3-4) est un groupoïde double* p*-structuré, si* p *est à produits fibrés finis.*

Δ. $(\square\!\square C^{\cdot}, \boxminus C^{\cdot})$ est un groupoïde double. L'application d'inversion de $\square\!\square C^{\cdot}$ associe à $u = (y', x', x, y)$ le quatuor (y, x'^{-1}, x^{-1}, y'). Reprenons les notations de la preuve de la proposition 3-4, partie 1, et notons I le morphisme d'inversion de e. Comme

$$b . I . v' . m = a . v' . m = a . k . m = a . k . m' = a . v' . m',$$

il existe un unique h tel que

$$v.h = v'.m' \quad \text{et} \quad v'.h = I.v'.m.$$

et $p(h)$ associe (y, x^{-1}) à u. Il existe aussi un unique h' tel que

$$v.h' = I.v.m' \quad \text{et} \quad v'.h' = v.m,$$

car

$$a.I.v.m' = b.v.m' = b.k.m' = b.k.m = b.v.m.$$

Les applications sous-jacentes à $k.h$ et à $k.h'$ associant à u respectivement $y.x^{-1}$ et $x'^{-1}.y'$, elles sont identiques. Il s'ensuit $k.h = k.h'$. Donc il existe un unique $\hat{I}$ tel que

$$m.\hat{I} = h \quad \text{et} \quad m'.\hat{I} = h',$$

et $p(\hat{I})$ est l'application d'inversion de $\square\square C^{\cdot}$. Ceci montre que $\square\square e$ est un groupoïde p-structuré. Il en est de même pour sa catégorie p-structurée image $\boxminus e$. ∇

PROPOSITION 6. *Si e est un groupoïde p-structuré et e' une catégorie p-structurée, la catégorie $\mathfrak{N}(e, e')^{\square\square}$ est un groupoïde.*

Δ. Soit $T = (\bar{h}', t, \bar{h})$ un élément de $\mathfrak{N}(e, e')$. Si I dénote le morphisme d'inversion de e, alors $T' = (\bar{h}, I.t, \bar{h}')$ est une transformation naturelle p-structurée; T' est l'inverse de T dans $\mathfrak{N}(e, e')^{\square\square}$, les transformations naturelles sous-jacentes à T et à T' étant inverses l'une de l'autre dans $\mathfrak{N}^{\square\square}$. ∇

COROLLAIRE. *La sous-catégorie pleine de $\mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge}$ ayant pour objets les groupoïdes p-structurés définit une sous-catégorie double de la catégorie double $(\mathfrak{N}(p)^{\square\square}, \mathfrak{N}(p)^{\blacklozenge})$.*

HYPOTHESE. Nous supposons maintenant remplie l'Hypothèse du § 4.

PROPOSITION 7. *Si $\grave{e} = (K^{\cdot}, K^{o}, s)$ est un groupoïde double p-structuré et $e' = (C'^{\cdot}, s')$ une catégorie p-structurée, $D(\grave{e}, e')$ est un groupoïde p'-structuré.*

Δ. $D((K^{\cdot}, s), s')$ est un groupoïde p'-structuré, son morphisme d'inversion étant $D(I, s')$, où I est le morphisme d'inversion de $(K^{\cdot}, s)$. Puisque $D(\grave{e}, e')$ est une sous-catégorie p'-structurée $(A^{\bullet}, S)$ de

$D((K^{\cdot}, s), s')$ et que $A^{\bullet}$ est un groupoïde isomorphe au groupoïde (proposition 6) $\mathfrak{N}((K^{o}, s), e')$, la proposition 3 affirme que $D(\grave{e}, e')$ est un 1
groupoïde p-structuré. ∇

COROLLAIRE. *Supposons p à produits fibrés finis; il existe une catégorie q'^{o}-dominée $(\mathcal{G}(p), G)$, où G est une restriction de E et q'^{o} la restriction de p'^{o} à $\mathcal{G}(p')$. Si $(H^{\cdot}, D)$ est fortement p'-dominée, alors $(\mathcal{G}(p), G)$ est fortement q'^{o}-dominée, si p' est à produits finis.*

Δ. Soient e et e' des groupoïdes p-structurés. Puisque $E(e, e') \simeq D(\square e, e')$ et que $\square e$ est un groupoïde p-structuré (proposition 5), $E(e, e')$ est un groupoïde p'-structuré. Il existe donc un foncteur G de $\mathcal{G}(p) \times \mathcal{G}(p)^{*}$ vers $\mathcal{G}(p')$ restriction de E. Le corollaire résulte des propositions 6-4 et 8-4, $\mathcal{G}(p')$ étant une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{F}(p')$. ∇

PROPOSITION 8. *Soit e' un groupoïde p-structuré. Si les conditions de la proposition 9-4 sont vérifiées, le foncteur de $\mathcal{G}(p)$ vers $\mathcal{G}(p)$ produit canonique par e' admet $G(., e')$ pour coadjoint.*

Δ. Ceci résulte de la proposition 9-4, car $G(., e')$ est la restriction de $E(., e')$ à la sous-catégorie pleine $\mathcal{G}(p)$ de $\mathcal{F}(p)$. ∇

COROLLAIRE. *Si les hypothèses de la proposition 10-4 sont vérifiées, $\mathcal{G}(p)$ est une catégorie cartésienne fermée.*

Bibliographie.

[A1] C. EHRESMANN, *Algèbre, $1^{ère}$ partie,* C.D.U., Paris 1968.

[1] C. EHRESMANN, Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), p. 293-363.

[2] A. EHRESMANN- C. EHRESMANN, *Catégories abéliennes et Homologie,* multigraphié, Paris 1970.

[3] A. EHRESMANN, *Théorie des Ensembles,* C.D.U., Paris 1970.

[4] C. EHRESMANN, Construction de structures libres, *Lecture Notes in Math.* 92, Springer 1969.

[5] C. EHRESMANN, Catégories structurées généralisées, *Cahiers Top. et Géom. dif.* X-1, Dunod 1968.

[6] C. EHRESMANN, Catégories structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 80 (1963), p. 349-426.

[7] J.-M. CORDIER, Sur la notion de catégorie tensoriellement dominée, *C. R. A. S.* 270 (1970), p.572.

[8] EILENBERG-KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on Categorical Algebra,* La Jolla 1965, Springer 1966.

[9] P. ANTOINE, Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bul. Soc. Math. Belgique,* XVIII, 2 et 4 (1966), p. 142 et 387.

[10] C. EHRESMANN, Quintettes et applications covariantes, *Cahiers Top. et Géom. dif.* V, 1963.

COMMENTS ON PART III-1

by Andrée CHARLES EHRESMANN

INTRODUCTION

The general comments aim to point out necessary corrections, motivations, more intuitive or stronger statements, connections between the papers and other literature, subsequent developments and possible prolongations.

The following Synopsis contains a motivated summary of the reprinted papers and may be used as a «guide» for the reading of the papers and of the main Comments.

The style and terminology of the papers evolved from the first one (1963) to the last one (1969); they were intended to be as rigourous as possible even if heavy.

The essential difference with common notations comes from the way morphisms are written: If C is a category, the set of morphisms from e to e' is denoted by $e'.C.e$ or $Hom(e', e)$, with the right object e at the right (and not $Hom(e, e')$ as is usual). This notation (we dropped with regrets in our last papers because it confused outsiders) is perfectly coherent when diagrams are drawn from right to left

$$e'' \xleftarrow{g} e' \xleftarrow{f} e$$

so that the composite $g.f$ is in the same order as on the figure.

Similarly, a map (or functor, ...) $h: E \to E'$ is denoted by the triple $(E', \underline{h}, E)$ (with its domain E at the right), where $\underline{h}$ is its graph or the onto map $x \mapsto h(x)$. If F and F' are functors, a natural transformation $T: F \Rightarrow F'$ is represented by (F', T, F).

Other characteristic notations are the following ones:

- Categories are thought of as «classes» equipped with a composition; so they are named by their morphisms instead of their objects: the category $\mathfrak{M}$ of maps, $\mathcal{F}$ of functors, ... (and not *Set*, *Cat*, ...).

- A category is often denoted by $C^{\cdot}$, where C is the class of its morphisms and «.» the symbol of its composition; $C_0^{\cdot}$ is the class of its objects (often identified with their identities and called «units»). The domain and codomain are suggestively called *source* and *target* (a morphism being looked at as an arrow), and denoted by α and β.

- In the category $\mathfrak{M}$ of maps (or of sets), the *canonical limits* are: the cartesian product, the equalizer (called *kernel*) of two parallel morphisms as a subset of their source, the pullback as a subset of a product.

In the Comments, we try to avoid ambiguous notations, and generally standard terminology (e.g. Mac Lane's [74]) is adopted.

English language is used, except for the terms in French to be replaced in the original papers: I hope this may make Charles' papers accessible to a wider audience.

CONVENTIONS.

The symbol Y.X preceding a comment means that it is the X$^{\text{th}}$ comment on page Y. The number X is to be found in the outer margin of page Y, beside the line or just after the paragraph which the comment is about. Sometimes X is followed by the symbol:

¶ warning of real flaws or omissions,

+ indicating more substantial addenda.

For instance, **55.2+** points out the second comment on page 55, which is not just a brief remark.

Numbers between / / refer to the *Liste des Publications de Charles Ehresmann* at the beginning of the Volume, numbers between square brackets to the final Bibliography.

Read ... instead of is abbreviated into R. ... i.o. .

GENERAL COMMENTS

ON /57/ : CATEGORIES DOUBLES ET CATEGORIES STRUCTUREES.

This Note is developed in /63/ where more comments are given.

1.1. R. quadruplets *i.o.* quatuors .

1.2. R. $k.h$ i.o. k,h .

1.3. β is too small and too high.

1.4. R. $\mathcal{C}_0^1$ i.o. $\mathcal{C}_0$.

1.5. R. $\mathcal{C}'$ i.o. C' .

1.6. This definition does not agree with the usual one /73, 122/ in which a left ideal J (or *sieve*) of C is a sub-class of C such that $J.C \subset J$.

2.1. For the definition of species of structures and hypermorphisms categories (introduced in /47/), cf. /63/, I, 2-3 and Comment 25.2.

2.2. R. une sous-catégorie de la i.o. la (cf. /63/, Théorème 6-II).

3.1¶ This proposition is not correct: the class of double functors is not closed by the source and target maps.

3.2. R. $\mathcal{C}^{\cdot}$ i.o. $C^{\cdot}$.

3.3. For the definition of a homomorphisms category, cf. page 28.

3.4. R. $\mathcal{C}^{\cdot}$ i.o. $\mathcal{C}$.

3.5+ Conditions 2 and 3 are not strict enough; they are modified in /63/ (and in subsequent papers), where s' is required to be a sub-structure of the product $s \times s$ on K (and this led to the formal definition of sub-structures in /63/, refined in /69, 66/). Both notions coincide if there exists a sub-structure on K, i.e. if there exists a pullback of (α, β) in $\mathcal{H}$. Cf. Comment 55.2, where motivations are also given.

ON /58/ : CATEGORIE DOUBLE DES QUINTETTES, APPLICATIONS COVARIANTES.

This Note is developed in /64/ to which we refer for comments.

5.1. R. sous-2-catégorie i.o. sous-catégorie .

6.1. The symbol $\times$ is confusing (it also denotes the product, cf. lines -2 and -3); in /64/ it is replaced by $\blacklozenge$, and in more recent papers $\cdot$ and $\times$ are denoted $\boxplus$ and $\boxminus$, and called the horizontal and vertical compositions, following Gray [40].

6.2¶ The last sentence is erroneous; indeed:

- the class of objects of $Q^{\cdot}(\mathcal{H})$ is not included in $Q^{\cdot}(\mathcal{S})$,
- the restriction of $\overline{q}$ to $Q^{\cdot}(\mathcal{S})$ is not a hypermorphisms functor, because there may exist a quintet (i.e. a square of the 2-category $\mathcal{N}at$)

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[dr, phantom, "\swarrow"] & {} \arrow[l, "\phi'"'] \\ {} \arrow[u, "g"] & {} \arrow[l, "\phi"] \arrow[u, "q(F)"'] \end{tikzcd}$$

with F in $\mathcal{S}$ and image of a morphism of $Q^{\cdot}(\mathcal{S})$ which only lifts into

$$\begin{tikzcd} {} & {} \arrow[l, "\Phi'"'] \\ {} \arrow[u, "G"] & {} \arrow[l, "\Phi"] \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

in $\mathcal{S}$, with different targets for G and Φ'.

This result is corrected in /64/, Corollary of Theorem 3.

6.3. R. $\alpha^{\boxplus}\Psi$ i.o. $\alpha^{\boxplus}, \Psi$.

6.4. A naturalized functor of $\mathcal{C}$ is an endofunctor equipped with a natural transformation $\phi : Id_{\mathcal{C}} \Rightarrow F$. They are introduced in /52/ in view of axiomatizing Bourbaki's scale of sets and «structure» [12].

7.1¶ If p is not faithful, this map may not be defined, since the equality $p\,F(f) = p\,F(f')$ may not imply $p'\Phi'F(f) = p'\Phi'F(f')$.

8.1+ Γ is formed by the pairs (f,h) where $f: e \to e'$ in $\mathcal{C}$ and h is in $F(e)$. Now $\square(\Gamma'_0, \alpha^{\perp}\Gamma)$ is a double category whose 1-morphisms for the two compositions are included in Γ. It follows that Γ is a double category, the compositions being defined by:

$$(f',h').(f,h) = (f'.f,h) \text{ iff } h' = fh,$$

$$(f'',h'') \perp (f,h) = (f, h'' \perp h)$$

iff $f'' = f: e \to e'$ and $h'' \perp h$ exists in $F(e)$.

ON /61/ : STRUCTURES QUOTIENT ET CATEGORIES QUOTIENT.

This Note is developed in /66/ to which we refer for comments.

10.1. This notion is more general than in /63/.

10.2¶ For some of the following examples it is necessary that $\mathfrak{M}_0$ be also closed by quotients and by countable coproducts (cf. Comment 155.1).

10.3¶ The explicit characterization is good, but not the definition: Z must be the unique functor

$$\bar{\mathcal{H}}_1 \to 2 \ \left(= 1 \xleftarrow{z} 0\right) \quad \text{such that} \quad \bar{Z}^1(1) = \mathcal{H}_1 ,$$

and a $\mathcal{H}_1$-projection (usually called a reflection in $\mathcal{H}_1$) is a $(\{z\}, Z)$-surjection; cf. /66/ page 152, where the correct definition is given.

10.4. R. isomorphe i.o. equivalente.

10.5. R. un isomorphisme i.o. une équivalence.

11.1. R. $(G_1^{\cdot}, \gamma, G^{\cdot})$ i.o. $(G_1, \gamma, G^{\cdot})$.

12.1. R. isomorphe i.o. équivalente.

12.2. Cf. /66, 100/.

ON /82/ : QUASI-SURJECTIONS ET STRUCTURES QUASI-QUOTIENT.

13.1. R. $\boxminus$ i.o. $\exists$.

15.1. R. $\in \bar{\mathfrak{M}}$; on a $p_n^{\leftarrow} \subset X$ i.o. $\mathfrak{M}$; on a $p_i^{\leftarrow} \subset X$.

15.2. R. $\mathfrak{F}(P)$ i.o. $\mathfrak{F}'(P)$.

15.3. This definition is introduced because there is no good characterization of a structured sub-category of $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ whose object of morphisms is not a sub-structure of s.

16.1. For other results on quotient topological categories, cf. /66, 92/.

ON /83/ : QUASI-CATEGORIES STRUCTUREES.

This Note summarizes Sections 7- 8 of /100/ where more comments are given.

18.1. It would be sufficient that p creates pullbacks.

18.2. R. $f_n \cdot \ldots \cdot f_1$ i.o. $f_n \cdot \ldots , f_1$.

19.1. R. $\hat{p}\mathcal{F}'$ i.o. $p\mathcal{F}'$.

19.2. In other terms, $\hat{L}(e)$ is a free object generated by e with respect to the forgetful functor $\mathcal{F}'(p) \to \mathcal{G}(p)$.

20.1. R. $\hat{r}(C^{\cdot})$ and $\hat{L}[C]$ i.o. $r(C^{\cdot})$ and $L[C]$.

20.2. $\mathcal{K}'(p)$ is defined in /82/, Section 4.

20.3. $J\mathcal{F}$ is formed by the functors mapping everything on identities.

20.4. R. $\hat{p}\mathcal{F}$ i.o. $\hat{p}$.

20.5. For the definition, cf. /100/, Comment 277.5 .

20.6. A proper sub-category is defined in /55, 122/ ; cf. also /66/ Comment 163.3 .

20.7. This is done in /89, 90, 95, 96/ .

ON /63/ : CATEGORIES STRUCTUREES.

21.1. This notion of sub-structure is simplified in subsequent papers /61, 66, 69/ , where it is freed from any order on $\mathcal{C}$.

21.2. Structured categories are, in a more modern language, internal categories in a concrete category $\mathcal{H}$, such that the «internal» source, target and composition be applied on those of a usual category by the concrete functor $p: \mathcal{H} \to \mathcal{S}et$ (cf. Comment 55.2).

22.1. A faithful set-valued functor is right solving iff it creates canonical equalizers (cf. Comment 221.2).

22.2. This second part has not been developed, but only sketched in four Notes /89, 90, 95, 96/ .

22.3. R. $\bar{\mathcal{C}}^{\perp}$ i.o. $\bar{\mathcal{C}}^{\top}$.

22.4. This identification must be considered as an abbreviation, not as a formal operation (cf. /100/, Comment 211.1).

23.1¶ «c'est-dire» is not correct: if fz exists, then $a(f) = p_0(z)$; but the converse is not true. For instance, if $\mathcal{C}_1$ is the groupoid of isomorphisms of $\mathcal{C}$, the assertion is valid only if the acting category is $\mathcal{C}$ itself. Hence the notion:

Strong species of structures : It is a species of structures in which the acting subcategory contains each f whose source is in it; equivalently, the composite fz exists iff $a(f) = p_0(z)$.

Strong species of structures are characterized by the axioms 1, 2, 3, 4a (but not 4b) for an acting category (cf. Remark 2, page 25). The corresponding functor $p: \Sigma \to \mathcal{C}$ from the hypermorphisms category satisfies the condition (somewhat stronger than condition (E) page 24):

$$\begin{tikzcd} \Sigma_0 \arrow[d, "p_0"'] & \Sigma \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathcal{C}_0 & \mathcal{C} \arrow[l, "\alpha"'] \end{tikzcd}$$

is a pullback; in a more up to date language, this means that p is a discrete op-fibration. Conversely, each discrete op-fibration determines a strong species of structures.

24.1+ *The set-theoretical assumptions* are not explicit (cf. also /66/ Comment 155.1 and /100/ Comment 211.2). Charles was very conscious of the problem. For instance he suggested such foundational questions as a subject of thesis to Houdebine [55], pointing out Quine's theory of types [87] which he thought in agreement with his ideas on type functors /52/. Later on he was much interested by Lawvere's category-based theory [64].

In fact, Charles' conception on this subject evolved from 1957 to 1967: in /47/ he wanted to speak about «the category $\tilde{\mathfrak{S}}$ of all sets» whence the (not too formal) distinction between classes and sets, as in Bernays-Gödel theory [10]. In /55/ and in this 1963 paper, logical problems are avoided thanks to the use of a «class $\mathfrak{M}_0$ of classes»; Charles thought of $\mathfrak{M}_0$ as a «large enough» variable set (and the word class is used to indicate no particular set theory is adopted), on which conditions are added when necessary (for instance, $\mathfrak{M}_0$ is closed by products and sub-sets in Part II). In /66, 100/, $\mathfrak{M}_0$ must be closed by quotients and by countable coproducts. From /109/ on, $\mathfrak{M}_0$ becomes a universe.

Notice that the letter $\mathfrak{M}$ was really chosen to stress the variability of the class (in Geometry, a variable point is often denoted by M...); but we thought of two other interpretations of this letter: «Mengen» in German, «maps» in English, and this last one is well suited since our later texts are written in Fnglish and we liked to name a category by its morphisms instead of its objects.

25.1+ *Motivations for (intemal) actions:*

Charles first met (topological or differentiable) actions of categories (more precisely, of groupoids) in his theory of fibre bundles: In /28/ in 1950, he shows that, if E is a fibre bundle, the groupoid S of isomorphisms from fibre to fibre, equipped with its canonical topology, acts (continuously) on the total space of E, and the associated to E fibre bundles are those spaces on which S acts. So /50/ the category of fibre bundles is equivalent to the category of actions of «locally trivial groupoids» which are some concrete internal groupoids in the category of topological spaces. The category of principal fibre bundles is equivalent to the category of locally trivial groupoids.

Almost simultaneously /39/, he came upon «local species of structures» (i.e. internal species of structures in the category of local classes), in his attempt to unify the treatment of structures defined by a «gluing together» process.

In 1957, these examples led him to introduce acting categories and species of structures /47/. He choosed this last term by reference to Bourbaki's species of structures, whose «transport by isomorphism of structures» is so axiomatized; indeed, at that time, Charles was most preoccupied by «good» definitions of structures.

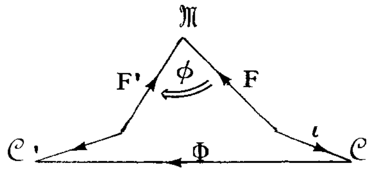
In /47/, he proves the equivalence between the notions: species of structures, hypermorphisms functors and set-valued functors satisfying the condition (A) (page 25). He also gives the enlargement theorem for species of structures (cf. Comment 29.2) which is equivalent to the Kan extension Theorem [58] (published the year after) for set-valued functors, except that the problem is looked at «upside-down», the set-valued functor being replaced by its associated hypermorphisms functor (and this led to more general extension of functors theorems /77, 122/). He uses this enlargement theorem as the first step in his construction of the important «complete enlargement» of a local species of structures, the structures of which are defined by atlases; the second

25.1 ...step consists in a generalization of the associated sheaf Theorem to presheaves over a local class, thanks to an original method (extended in / 110/ to local functors). Locally homogeneous spaces, differentiable or analytic or foliated manifolds, fibre bundles,... are obtained in particular cases.

In / 55/ Charles says explicitly that the category of species of structures with covariant maps is:

- equivalent to the category of functors satisfying the condition (E) with squares of functors as morphisms,

- isomorph to the category of pairs defining a species of structures, a morphism $(\Phi, \phi) : (\mathcal{C}, F) \to (\mathcal{C}', F')$ being defined by



where $\phi : F \to F'\Phi\iota$ is a natural transformation,

- equivalent to the category of pairs $(\mathcal{C}, F)$, where F is a set-valued functor with domain a sub-category of $\mathcal{C}$.

These equivalences restrict (Remarks 1, 2 page 25 and Comment 23.1) to equivalences between the categories of strong species of structures, of discrete op-fibrations and of set-valued functors.

Topological, differentiable, local species of structures are instances of structured (or «concrete internal») species of structures which are defined in / 59, 60/ by «lifting» the action along the forgetful functor of a concrete category; enlargement theorems for them are given in / 89, 90, 95, 96/. In fact, sketches in the sense of / 106/ are easily drawn the set models of which are species of structures and discrete op-fibrations / 117 / ; the models in a category $\mathcal{H}$ are *internal species of structures* and *internal discrete op-fibrations* (also called *internal diagrams* or *internal presheaves*, cf. Johnstone [56]). Thanks to the equivalences indicated above, this provides an «internalization» of the «external» notion of set-valued functor, by looking at it «upside-down», Charles already stressed this fact in his lectures in the early sixties. Probably this did inspire Bénabou, who was one of the first categorists to apply it (in his definition of internal distributors [7]). The development of topos theory led other categorists to adopt (or re-discover) this point of view some ten years later (cf. Mac Lane's analysis of Johnstone's book [75]).

25.2. The set-valued functor associated to $(\mathcal{C}^{\cdot}, \beta, \bar{a}^{1}(e))$ is the partial Hom functor $Hom(e, -): \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$.

26.1. Considering $\mathcal{C}'$, Bénabou gives the following criterion: $F : \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ is representable iff $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}'$ has a left adjoint [5].

26.2+ *Enriched species of structures:*

Analysis problems prompted us to introduce γ-dominated species of structures (in [28]).

If $\mathcal{C}$ is a category and if the species of structures defined by the Hom functor is dominated by $(\gamma, \mathcal{K})$, then $\mathcal{C}$ is called a *γ-dominated* category /77/. A refinement of this notion, the strongly γ-domination of /104, 109/, is equivalent to the notion of a $\mathcal{K}$-category (cf. Eilenberg-Kelly [31]) when $\mathcal{K}$ is a cartesian concrete category.

A fine study of dominated categories is due to Foltz [33].

More generally, let V be a monoidal category. A V-*species of structures* may be defined by the following data: a V-category C, for each object e of C an object $F(e)$ of V, for each pair (e', e) of objects of C a morphism $k'_{e',e} : C(e', e) \otimes F(e) \to F(e')$ satisfying the

Identity and associativity axioms: The diagrams, where I is the unit of $\otimes$, i_-, k_- the identity and associativity morphisms of C,

$$\begin{tikzcd}
F(e) & & C(e,e)\otimes F(e) \arrow[ll, "k'_{e,e}"'] \\
I\otimes F(e) \arrow[u, "\wr"] \arrow[urr, "i_e\otimes F(e)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & F(e'') & C(e'',e)\otimes F(e) \arrow[l, "k'_{e'',e}"'] \\
C(e'',e')\otimes F(e') \arrow[ur, "k'_{e'',e'}"] & & \\
 & C(e'',e')\otimes(C(e',e)\otimes F(e)) \arrow[ul, "C(e'',e')\otimes k'_{e',e}"] & (C(e'',e')\otimes C(e',e))\otimes F(e) \arrow[l, "\sim", "ass"'] \arrow[uu, "k_{e'',e',e}\otimes F(e)"']
\end{tikzcd}$$

commute.

Suppose that V is a cartesian category with commuting coproducts and that I is connected (in Penon's sense [83]). In /120/, Appendix, we have proved that the category of V-categories (with small enough classes of objects) is equivalent to the category of internal categories whose object of objects is a coproduct of copies of I. Similarly:

PROPOSITION A. *The category of* V*-species of structures is equivalent to the category of pseudo-discrete internal species of structures in* V *(pseudo-discrete meaning that the object of structures is coproduct of the fibres).*

Now let $(\mathcal{C}, F)$ be a species of structures dominated by (V, γ), where $\gamma = Hom(I, -)$. If γ admits a left adjoint preserving products, there exists a free V-category C generated by $\mathcal{C}$, and the $F(e)$'s determine a «free» V-species of structures over C. Hence:

PROPOSITION B. *The category of species of structures dominated by* (V, γ) *is equivalent to the category of free* V*-species of structures over a free* V*-category.*

So, in this case, the notion of internal species of structures englobes the notions of enriched and dominated species of structures.

26.3+ Species of morphisms are called «category of categories» in [28]. They are studied in /70, 77, 122/, as well as the opfibrations with a cleavage associated to them (by adapting the construction of the cross-product of a group A and a A-module), with a view to applications in a non-abelian cohomology.

General fibrations were introduced by Grothendieck [43] and studied by Gray in [38]. Their present theory has been developed looking at a fibration as a family of categories (Lawvere [65], Bénabou-Celeyrette [8,19] Paré-Schumacher [82] who call them indexed categories).

27.1. To have this equivalence, condition a must be interpreted independently from the choice of $\mathcal{F}$.

29.1. R. $\bar{f})$, i.o. $\bar{f}))$, .

29.2+ *Enlargement Theorems:*

$(\mathcal{C}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ is a homomorphisms category iff $p: \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ is a faithful (condition 3) functor (condition 1) whose restriction $\mathcal{S} \to p(\mathcal{S})$ is (condition 2) a discrete op-fibration.

$\mathcal{H}$ is saturated over $\mathcal{C}$ if p is a faithful amnestic functor which creates isomorphisms; a functor is called *amnestic* if an isomorphism mapped on an identity is an identity, i.e. if its restriction to the isomorphisms is well-faithful in the sense of / 77, 122/.

If $\mathcal{H}$ is a homomorphisms category with $\mathcal{S}$ the groupoid of all the isomorphisms of $\mathcal{H}$, then it is equivalent to a saturated one. Indeed more generally:

Let $p: \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ be any functor. There exists a smallest creating isomorphisms functor $q: \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{C}$ extending p, and $\mathcal{H}$ is equivalent to $\tilde{\mathcal{H}}$.

q is called the (maximal) *enlargement of* p. It is constructed as follows: Let $\mathcal{L}$ be the category formed by the quadruples (k, f', f, h) with h in $\mathcal{H}$, f and f' isomorphisms of $\mathcal{C}$ and $k.f = f'.p(h)$ in $\mathcal{C}$, the composition being defined by:

$$(k', f'', \hat{f}, h')(k, f', f, h) = (k'.k, f'', f, h'.h)$$
$$\text{iff} \quad f' = \hat{f} \quad \text{and} \quad \alpha(h') = \beta(h).$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot & \cdot \arrow[l, "f''"'] & & \cdot \\
\cdot \arrow[u, "k'"] & \cdot \arrow[l, "f'"'] \arrow[u, "p(h')"'] & & \cdot \arrow[u, "h'"'] \\
\cdot \arrow[u, "k"] & \cdot \arrow[l, "f"] \arrow[u, "p(h)"'] & & \cdot \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

(This sub-category of the comma category $\mathcal{C}\downarrow p$ is used in / 100/ Section 1). Then $\tilde{\mathcal{H}}$ is the strict quotient of $\mathcal{L}$ by the equivalence:

$$(k, f', f, h) \sim (k, f'.p(g'), f.p(g), g'^{-1}.h.g)$$

for any isomorphisms g, g' of $\mathcal{H}$ such that $g'^{-1}.h.g$ exists.

q maps (k, f', f, h) on k. The embedding:

$$(h: s \to s') \mapsto (p(h), p(s'), p(s), h)$$

identifies $\mathcal{H}$ with a sub-category of $\tilde{\mathcal{H}}$ equivalent to $\tilde{\mathcal{H}}$.

q is faithful or amnestic whenever p is, whence the enlargement theorems for species of structures over groupoids and for homomorphisms categories already obtained in /47/. In fact, p may be replaced by q when categorical (i.e. preserved by isomorphisms) properties are considered; the constructions are made in $\bar{\mathcal{H}}$, then transported by isomorphism in $\mathcal{H}$.

The above construction is generalized in /77, 122/ to get extension theorems for functors. It is «internalized» in /89, 90, 95, 96/ giving an «internal version» of Kan extension Theorem (Comment 25.1).

29.3. If $(\mathcal{M}, p, \mathcal{H}, \mathcal{S})$ is a homomorphisms category, where $\mathcal{S}$ is the groupoid of all isomorphisms of $\mathcal{H}$, then $\mathcal{H}$ is also called a *concrete category* and $p: \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ a concrete functor (and we'll often use these terms). In fact, some authors define a concrete functor as any set-valued amnestic faithful functor (without any «transport of structures» property); most of the following results remain valid in this case.

30.1. R. $p\iota$ i.o. p.

In several instances, the restriction of a functor is so denoted by the same letter than the functor; when the source and target are clearly indicated, this does not lead to any confusion, and we shall not always mention it.

31.1+ Up to page 41, the text remains valid without modifications if the hypothesis $\mathcal{C}$ is inductive is replaced by: *$\mathcal{C}$ is a sub-inductive category* (cf. /69/), since all the pseudoproducts used here still exist. This remark is important: some results will be applied to the category $\mathcal{F}$ of categories, which is sub-inductive for the order «a sub-category of», but not inductive (two sub-categories of a category admit a meet, while two categories may not admit a larger common sub-category).

32.1. Sub-structures (in the definition of which $\mathcal{S}$ is unuseful) were introduced for obtaining a good definition of structured categories. Most of the following propositions were devised for use in Part II.

This definition seems to depend upon the order on $\mathcal{C}$. In fact, Proposition 4 suggested a more general notion of a $(\mathcal{C}', p)$-injection /69, 66/, freed from any order on $\mathcal{C}$. The p-injections defined here are exactly the ($\mathcal{C}'$, p)-injections, where

$$\mathcal{C}' = \{ E e \mid e < E \text{ in } \mathcal{C}_0 \}.$$

Almost all the results of this Part generalize to this setting; cf. /66/ and /69/ where both notions are compared.

34.1. R. $g', S')$ i.o. $g', S)$.

35.1. Charles never published part IV, but the results he intended to put in it are scattered in several papers; e.g. ordered categories over an ordered category are considered in /75/.

35.2¶ This is not correct: $(\mathcal{H}, \propto)$ is a sub-inductive category, but not an inductive category. Indeed, a family of objects bounded by s and by s' may have two different joins in the sets of elements lesser than s and lesser than s'.

36.1¶ This inequality (as well as several following ones) lies on the assertion: $h' < h$ *implies* $h'^{-1} < h^{-1}$, which has to be proved.

Indeed, suppose $h' < h$, where $h: E \to \hat{E}$ and $h': e \to \hat{e}$. There exists a pseudoproduct $h^{-1}\hat{e} = h^{-1}.(\hat{E}\,\hat{e}): \hat{e} \to E$; since

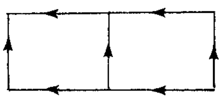
$$(h^{-1}\hat{e}).h': e \to E \quad \text{and} \quad (h^{-1}\hat{e}).h' < (h^{-1}\hat{e})h < h^{-1}h = E,$$

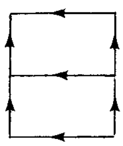
we have $(h^{-1}\hat{e}).h' = eE$. It follows that

$$h'^{-1}.h' = e < eE = (h^{-1}\hat{e}).h',$$

and, composing with h'^{-1}, we find: $h'^{-1} < h^{-1}\hat{e} < h^{-1}$.

37.1. A quartet of $\mathcal{C}$ is (less poetically) called a (commutative) square, and the «longitudinale et latérale» compositions are more geometrically called the *horizontal and vertical compositions* (following Gray).





The category $\square\mathcal{C}$ is also called the category of arrows of $\mathcal{C}$, by the name of its objects, and denoted by $\mathrm{Fl}\mathcal{C}$.

37.2. This is easy to prove (cf. /122/, Chapter II).

41.1. R. $\overline{g}' = (s', g', S')$ i.o. (s', g', S') .

41.2. This definition, given for $\mathcal{C}$ inductive, is also valid as soon as two parallel morphisms (i.e. with the same source and target) have a meet in $\mathcal{C}$; for instance such is the case when $\mathcal{C}$ is the category of categories (though this condition may not be satisfied in some sub-inductive categories).

In usual cases (in particular if $\mathcal{C}$ is the category of sets), $p(s)$ is an equalizer of $(p(h), p(h'))$; then, p being faithful, s is a p-kernel of (h, h') iff it is an equalizer of (h, h') in $\mathcal{H}$ (cf. /109/, Proposition 3-1); so axiom (R) means that p creates equalizers defined by meets (cf. /100/, Comment 221.2). This justifies the name p-kernel (an equalizer is also called difference kernel or even a kernel).

42.1. This notion is considered in /53/. A strict inductive map is defined in Part II, Section 6, page 77.

43.1. Since p is strict, we have immediately $s = \alpha(h \cap h')$.

44.1. It suffices that *two parallel morphisms admit a meet* (this remark allows to apply the result when $\mathcal{C}$ is the category $\mathcal{F}$).

44.2¶ We have to suppose that either *$\mathcal{C}$ is completely right regular or p_0 from $\mathcal{H}_0$ to $\mathcal{C}_0$ preserves joins.*

Indeed, let $h_i : s_i \to s'_i$ be morphisms in $\mathcal{H}$ such that $h_i < h$; there exist joins $s = \cup s_i$ and $s' = \cup s'_i$ in $(\mathcal{H}, \propto)$; the above hypothesis implies that, if k is the pseudoproduct $p(s')(p(h)p(s))$, there exists a commutative square in $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
p(s') \arrow[d, "p(S')p(s')"'] & p(s) \arrow[l, "k"'] \arrow[d, "p(S)p(s)"] \\
p(S') & p(S) \arrow[l, "p(h)"]
\end{tikzcd}$$

hence h has a sub-morphism $h' : s \to s'$, and $h' = \cup h_i$.

44.3¶ This assertion is not correct: $\mathcal{F}$ satisfies the condition c, but $(\mathcal{F}_0, \propto)$ is not an inductive class. $\tilde{\mathcal{J}}_u$ (written erroneously $\tilde{\mathcal{J}}_w$) is not right solving.

49.1. It is useful to notice that $h \mid s$ is unique. Indeed, its target is the unique s' such that $s' < \beta(h)$ and $p(s') = \beta(p(h) \mid p(s))$ (because p is strict), and its source s and image $p(h) \mid p(s)$ are given.

49.2¶ The proof is not complete ; it remains to show that g is lesser than any f in $p(h)^{>}.p(s)$. Indeed, the relation

$$f \cap g < p(h) \quad \text{and} \quad a(f \cap g) = a(f) \cap a(g) = s$$

means that $f \cap g$ is in $p(h)^{>}.p(s)$. Since $f \cap g < g$, the given proof implies $f \cap g = g$, whence

$$g < f \quad \text{and} \quad g < p(h) | p(s).$$

Finally $g = p(h) | p(s)$.

49.3. R. $p(h)$ i.o. (h) .

50.1¶ The proof has to be completed as follows: $p(h|s') \in p(h')^{>}.p(s')$ implies $p(h'|s') < p(h|s')$. Conversely,

$$p(h')^{>}.p(s') \subset p(h)^{>}.p(s') \text{ implies } p(h|s') < p(h'|s') ;$$

hence $p(h|s') = p(h'|s')$. From the unicity of $h'|s'$ (cf. Comment 49.1) we deduce $h|s' = h'|s'$, since both have the same image by p and the same source s'.

50.2¶ The proof is not complete: to conclude that $p(s') = p(j)|p(s')$, we have to prove that $p(s') < f$ for each f in $p(j)^{>}.p(s')$. Indeed, the relations

$$f \cap p(s') \in p(j)^{>}.p(s') \quad \text{and} \quad f \cap p(s') < p(s')$$

imply (proof page 50) $p(s') = f \cap p(s')$, whence $p(s') < f$.

50.3+ *Weakening of the hypotheses:*

The results of this Part I may be strengthened by replacing the hypotheses $\mathcal{C}$ is inductive or $\mathcal{H}$ is inductive by:

- In Proposition 11 : $\mathcal{C}$ is sub-inductive and
  $(*)_{\mathcal{C}}$ Two parallel morphisms admit a meet in $\mathcal{C}$;
- In Theorem 3, Corollary 3, Propositions 13 and 14: $(*)_{\mathcal{C}}$ and $(*)_{\mathcal{H}}$;
- In Propositions 13 and 12 and their corollaries: $\mathcal{C}$ and $\mathcal{H}$ are sub-inductive ;

Finally, in Theorem 4, $(\mathcal{C},<)$ is $(\mathfrak{I},\mathfrak{I}',\mathfrak{I}'')$-structured could be replaced by: $(\mathcal{C},<)$ is $(\mathfrak{I}^{\vartriangle},\mathfrak{I}'^{\vartriangle},\mathfrak{I}''^{\vartriangle})$-structured, where $\mathfrak{I}^{\vartriangle}$ is the category of sub-inductive maps, $\mathfrak{I}'$, $\mathfrak{I}''$ its intersections with $\tilde{\Omega}'$, $\tilde{\Omega}''$ /69/.

51.1. This factorization of $F: A \to B$ is $A \xrightarrow{q} F_0^*(B) \xrightarrow{\pi} B$, where

$$\begin{tikzcd} B & F_0^*(B) \arrow[l, "\pi"'] \arrow[d] \\ B_0 \times B_0 \arrow[u, leftarrow, "{[\beta,\alpha]}"'] & A_0 \times A_0 \arrow[l, "F_0 \times F_0"] \end{tikzcd}$$

is a pullback.

51.2. R. $p(S')$ i.o. $p(S)$.

52.1. R. $(h.g^{-1}, h'.g^{-1})$ i.o. $(g^{-1}.h, \bar{g}^{-1}.h')$.

52.2. $\mathcal{F}$ is only a sub-inductive category; however the preceding results may still be applied to it (cf. Comments 31.1 and 50.3).

52.3. Add 17 after Proposition .

53.1. A kernel (or equalizer) $k: e \to e'$ of (h, h') is always a p-injection since p is faithful; it is a p-kernel if $p(k)$ is an equalizer in $\mathcal{C}$ of $p(h)$, $p(h')$ (cf. Comment 41.2).

54.1. Definition 1 means that p creates canonical products; Propositions 1, 2, 4 are well-known properties of products; Proposition 3 is a particular commutation between initial lifts (since products and p-injections are initial lifts, cf. /66/ Comment 146.1).

55.1. R. $p_{\mathcal{F}}$ i.o. $p_{\overline{\mathcal{F}}}$.

55.2+ *Structured categories and internal categories:*

First remark that the notion given here is stricter than the one defined in /57/, and it motivated the introduction of sub-structures.

Let $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ be a $\mathcal{H}$-structured category (more exactly called a p-structured category later on). Then s' is a sub-structure of $s \times s$ mapped by p on the pullback of (α, β), so that (cf. Proposition 2-1 in /109/) we have the pullback in $\mathcal{H}$:

$$\begin{tikzcd} s & s' \arrow[l] \arrow[d] \\ s_0 \arrow[u, leftarrow, "\beta"'] & s \arrow[l, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

It follows that $(\mathcal{C}^{\bullet}, s)$ determines an internal category in $\mathcal{H}$ (in the usual sense) with s as its object of morphisms and s_0 as its object of

55.2 ...

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r] & s \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[l, bend left, "\alpha"] & s' \arrow[l, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

objects; indeed, since $\mathcal{C}^{\bullet}$ is a category and p is faithful, the identity and associativity axioms are satisfied. Conversely, let

$$\begin{tikzcd} S_0 \arrow[r] & S \arrow[l, bend right, "b"'] \arrow[l, bend left, "a"] & S_2 \arrow[l, "k"'] \end{tikzcd}$$

be an internal category in $\mathcal{H}$; then it «is» a p-structured category iff its image by p is a usual category, i.e. iff $p(k)$ is the composition of a category on $p(S)$ with $p(a)$ and $p(b)$ as its source and target; such an internal category is called a *concrete internal category.*

Hence the category of p-structured categories may be identified with the category of concrete internal categories in $\mathcal{H}$; if p creates canonical pullbacks, it is equivalent /104/ to the category of all internal categories in $\mathcal{H}$.

Charles was motivated to introduce structured categories by the numerous examples (cf. Sections 5-6) he had already met: topological and differentiable categories or groupoids in /28, 50/ in relation with Differential Geometry, ordered and local categories at the base of local structures theory /47, 53, 55/ ; double categories such as the double category of quartets /55/ and the 2-category of natural transformations /52/ . General theorems on structured categories are given here and in /66, 100/ ; they are strengthened in /109/ where the 2-category of structured categories is studied, as well as its enrichments. Completion theorems for structured categories may be found in /102/ .

In 1966 (cf. /104, 93/), Charles considered non-concrete internal categories, which he named *generalized structured categories*. He defines them as the models of the *sketch of categories* σ_{Cat}, which is the full sub-category of the opposite of the simplicial category Δ with objects $0, 1, 2, 3$:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\iota"] & 1 \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[l, bend left, "a"] \arrow[r, bend left=20, "\gamma_\beta"] \arrow[r, bend right=20, "\gamma_a"'] & 2 \arrow[l, "\kappa"'] \arrow[l, bend right=50, "\nu"'] \arrow[l, bend left=50, "\nu'"] & 3 \arrow[l, bend right=50, "\kappa'"'] \arrow[l, bend right=15, "\mu'"'] \arrow[l, bend left=15, "\mu"] \arrow[l, bend left=50] \end{tikzcd}$$

55.2 ... equipped with the cones

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "\alpha"'] & \cdot \arrow[l, "\nu'"'] \arrow[d, "\nu"] \\ \cdot & \cdot \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "\nu'"'] & \cdot \arrow[l, "\mu"'] \arrow[d, "\mu'"] \\ \cdot & \cdot \arrow[l, "\nu"] \end{tikzcd}$$

to be transformed into pullbacks. In /113, 115/ the results of /109/ on concrete internal categories are adapted to the general case. In fact, this theory led Charles to the notion of sketched structures developed from /106/ on.

Bénabou used internal categories in the late sixties (unpublished) and certainly helped to propagate them. Several Theses and papers written near us are wholly or partially devoted to structured or internal categories, e.g. Bourn [13], Conduché [22], Kempf [60], Langbaum [63], Lellahi [69], Vaugelade [97] (without mentioning those on examples).

However internal categories, so universally used to-day, seem to be really of interest to other schools only in the seventies (Gray [39], Diaconescu [26], ...). Though Grothendieck mentions the simplicial object associated to a category in [42], he prefers to work with the associated fibration (called a *category object*) for avoiding pullbacks.

57.1. R. $\bar{p}\iota$ i.o. $\bar{p}$. (Such omissions are no more indicated.)

For internal categories in a category admitting pullbacks, the corresponding result is: *Any isomorphism from the object of morphisms of an internal category extends into an isomorphism of internal categories.*

58.1+ *Topological categories* are formally introduced in /50/, along with the more refined locally trivial categories (cf. Comment 25.1); in particular conditions are given there which ensure the groupoid of all isomorphisms to be open. Their general theory is developed in /92/; *micro-transitive categories* (the map $f \mapsto (\beta(f), \alpha(f))$ is open) are characterized and equipped with a quasi-uniform structure (generalizing the uniformities of a topological group); prolongations of topological and quasi-topological categories are also considered.

Germs of topological categories and species of structures are studied in [29] and in Bednarz [3], with a view to applications in control theory.

58.2. R. $\mathfrak{M}$ i.o. $\tilde{\mathfrak{S}}$ (this is a survival of the notation in /47, 53/).

59.1. R. $\mathcal{C}^r_1$ i.o. $\tilde{\mathcal{C}}^r_1$.

59.2+ *Differentiable categories* are formally defined in /50/, where the groupoid of all isomorphisms is proved to be open.

In a series of short (alas!) papers, Charles outlined modern foundations for Differential Geometry, based on differentiable categories and, in particular, on the differentiable category of jets and on its actions /46, 78, 101, 103, 105, 116/. Prolongations of manifolds and of differentiable actions, higher order connexions and their curvature and torsion, geometrical objects, Lie derivatives (cf. also the theory of Lie for differentiable groupoids done by Pradines [85]) are easily described in this elegant setting.

It is not possible to mention here all the papers written on this subject (cf. Volume I-2 of these «Œuvres»).

Recently, Synthetic Differential Geometry has thrown a new light on Charles' conceptions, since they are well-suited for generalizations to topoi (cf. Kock [61], where jets become «maps»). For instance, the requirement on the source and target of a differentiable category to be submersions finds its justification: it means that the category «is» an internal category in the Dubuc's topos [27].

Notice that α and β were asked to be submersions for ensuring the existence of their pullback (and examples proved this condition to be meaningful). Ngo Van Qué gave a more general definition [80], which amounts to replacing the category of differentiable maps by its pullback completion over $\mathcal{S}et$; I mention it here, since one of the motivations for /107/ came from thinking over his definition.

60.1+ A $\mathfrak{D}'$-structured category is also called a strictly monoidal category: the main example is the simplicial category, equipped with the ordinal sum. The *monoidal categories* (Mac Lane [71], Eilenberg-Mac Lane [32]) or multiplicative categories (Bénabou [4]) are obtained by a «laxification» process: More precisely, they correspond to lax functors from the sketch of monoids

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "i"] & 1 \arrow[r, bend left, "i\times 1"] \arrow[r, bend right, "1\times i"'] & 2 \arrow[l, "k"'] & 3 \arrow[l, bend right, "1\times k"'] \arrow[l, bend left, "k\times 1"] \end{tikzcd}$$

considered as a discrete 2-category toward the 2-category of categories (cf. /117/). Similar «laxifications» lead from 2-categories to bicategories and from double categories to non-associative double categories (Bénabou [6], Chamaillard [20], Moreau [78]).

60.2. [G] is the category of G-spaces.

60.3. R. $\mathcal{C}^{\cdot}$ i.o. $\mathcal{C}$.

61.1. R. homéomorphisme i.o. automorphisme .

61.2. R. $j_{x'}^{\lambda}\tilde{\gamma}$ i.o. $j_{x}^{\lambda}\tilde{\gamma}$ (twice).

62.1. R. $(\mathcal{C}_0^{\perp})^{\cdot}$ i.o. $\mathcal{C}_0^{\perp}$.

62.2. R. $)^{\cdot}$ i.o.). .

62.3. *2-categories* are those double categories $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathcal{C}^{\perp})$ for which objects of $\mathcal{C}^{\perp}$ are also objects of $\mathcal{C}^{\cdot}$, so that $\mathcal{C}_{00} = \mathcal{C}_0^{\perp}$. They are alternatively defined as categories enriched in the cartesian category of categories (by the general result of /120/, Appendix). The main example is the 2-category of natural transformations /52/, from which all double categories may be constructed (cf. /64/, Comment 105.1).

64.1. R. $\kappa^{\perp}$ i.o. $\kappa^{\cdot}$.

65.1. This category is already considered in /55/, Appendix. Here again, it is more intuitive to speak of the horizontal and vertical compositions.

66.1. In agreement with the theory of quotients /66/, «catégorie quotient» should be replaced by «catégorie quotient strict» .

Quotient double categories are constructed in /66/ Corollary Theorem 21-II, and more general quasi-quotient double categories are described in /100/, Section 8.

67.1. R. isomorphisme i.o. équivalence .

68.1+ *Lax transformations:*

This remark is very important. Indeed, it leads to a comprehensive study of lax transformations (in the sense of Kelly-Street [59], called pseudo-transformations by Gray [40] and catadeses by Bourn [14]), which are found in this way when $(\mathcal{C}^{\bullet}, \mathcal{C}^{\mathbf{1}})$ is the double category of squares of a 2-category (cf. /64/, Comment 105.1).

Thanks to this approach (generalized to multiple categories, as announced in /117/ Remark 3, page 399), we have obtained existence theorems for general lax limits in /119, 121/. These theorems are so proved by a short structural proof, which encompasses Bourn, Gray and Street's results on 2-functors [14, 40, 92].

Notice that Charles had already suggested this idea to S. Legrand who began to develop it [67], but she lacked this meaningful example to motivate her.

68.2. More strikingly, $(\mathcal{C}^{\mathbf{1}_i})_{i \leqslant n}$ is an n-fold category iff $(\mathcal{C}^{\mathbf{1}_i}, \mathcal{C}^{\mathbf{1}_j})$ is a double category for any $i < j \leq n$.

Multiple categories are studied in /119, 120, 121/ where in particular a *monoidal closed structure* is constructed on the category of all multiple categories; then it is used to describe the closure functor on the cartesian category of n-fold categories $\mathcal{C}at_n$, and several monoidal closed structures *on* $\mathcal{C}at_n$.

70.1. R. $g\,{}^{\mathbf{1}}{}_1 f$ i.o. $g\,{}^{\mathbf{1}}{}_i f$.

70.2. $\lambda^{i_1} \dots \lambda^{i_p}$ is an $(n-p)$-fold endofunctor of $(\mathcal{C}^{\mathbf{1}_j})_{i_1, \dots, i_p \neq j < n}$.

70.3. R. $\neq \mathrm{Id}$ i.o. $= \mathrm{Id}$.

70.4. R. $f'\,{}^{\mathbf{1}}{}_i f$ i.o. $f'\,{}_i f$.

70.5+ To construct ε_n^{n-1} by induction, one has to use the isomorphism

$$\boxbar(\boxbar(A,A), \boxbar(A,A)) \xrightarrow{\sim} \square(\boxbar(A,A), \boxbar(A,A))^{\mathbf{1}} \hookrightarrow \boxminus(A,A)^4$$
$$Q = (\hat{q}', q', q, \hat{q}) \quad \mapsto \quad (\hat{q}', \square\,'\beta^{\boxminus}(Q), \square\,'\alpha^{\boxminus}(Q), \hat{q}),$$

where $'\alpha^{\boxminus}, '\beta^{\boxminus} : \boxbar(A,A) \to A$ are the source and target functors; this isomorphism is well defined for any category A.

A simpler construction of the n-fold category $\mathcal{C}^{\boxed{n}}$ is done page 95. Cf. also the definition of the functor

$$Square_{n,m} : \mathcal{C}at_n \to \mathcal{C}at_m \text{, for } n < m,$$

in /120/ : the n-fold category $Square_{n-1,n}\mathcal{C}^{\boxed{n-1}}$ is the same as $\mathcal{C}^{\boxed{n}}$ except that the first and last compositions are interchanged.

71.1. Cf. Comment 68.1. - We have proved:

- in /119/ that $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{C}}_n, \mathcal{C}_p)$ defines the internal Hom on the category of all multiple categories,

- in /120/ that the closure functor of the cartesian category $\mathcal{C}at_n$ associates to $\overline{\mathcal{C}}_n$, $\mathcal{C}_n$ the n-fold category $\mathcal{F}(\square_n \overline{\mathcal{C}}_n, \mathcal{C}_n)$, where $\square_n \overline{\mathcal{C}}_n$ is the $2n$-fold category obtained from $Square_{n,2n}\overline{\mathcal{C}}_n$ (cf. Comment 70.5) by the interchange of compositions

$$(1, 2, \dots, 2n) \mapsto (1, 3, \dots, 2n-1, 2, 4, \dots, 2n).$$

71.2. They are also structured groupoids in the category of groupoids.

Double groupoids are studied by Brown-Spencer [16] with a view to applications in homotopy theory; e.g. they prove the category of crossed modules is equivalent to a sub-category of the category of double groupoids.

72.1. A homomorphism between posets is just a monotone map.

73.1. This condition is essential in most applications; however it implies that there does not exist ordered categories which are monoids; in particular ordered groups in the usual sense are not ordered categories in this sense.

Ordered categories and more specially inductive and local groupoids are studied in a long series of papers, summarized in the «Guide» /86/. More special problems are considered in the Theses of Joubert [57], S. Legrand [68], Leblond [66] (cf. «Œuvres» Part II).

74.1. This means that a morphism lesser than an identity is an identity and that a morphism lesser than a composite $g.f$ is of the form $g'.f'$ with $g' < g$, $f' < f$.

74.2. More precisely, if $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ is a functorially ordered groupoid and if $e < \alpha(f)$, there exists exactly one $g < f$ with $\alpha(g) = e$. Indeed, as $\alpha(f) = f^{-1}.f$, there exist

$$g < f \text{ and } g' < f^{-1} \text{ such that } e = g'.g,$$

whence $\alpha(g) = e$. Now g is unique: if $f' < f$ and $\alpha(f') = e$, we have $g.f'^{-1} < f.f^{-1} = \beta(f)$, so that $g.f'^{-1}$ is also an identity, and $g = f'$.

75.1. We need the stronger result indicated in Comment 74.2.

75.2. Read ... $h(z'\cap z'') = h(z'\cap z'')$, où $z'\cap z''$ désigne .

75.3. A weakly sub-inductive susbet A is closed for finite meets and arbitrary joins of families bounded in A

78.1. R. $\mathcal{C}, <$ i.o. $\mathcal{C}^{\cdot}, <$.

80.1. R. $f_i, S_i) < \overline{f}$ i.o. $\overline{f}_i, S_i) < f$.

80.2. R. f_i, i.o. $\overline{f}_i$, .

80.3. R. $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ i.o. $(\mathcal{C}, <)$.

81.1¶ Omit this Proposition 26bis (in which $(\mathcal{C}^{\ell}, <)$ is to be read $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$). Indeed, it is not correct, since (even if $\mathcal{C} = \mathcal{M}$):

$$(\bigcup_{i\in I} g_i)(\bigcup_{i\in I} f_i) = \bigcup_{(i,j)\in I\times I} g_j f_i \neq \bigcup_{i\in I} g_i f_i .$$

81.2¶ The proof is too short: If $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ is an inductive groupoid, it's still necessary to prove that (I_1) and (I_2) are satisfied. Indeed, with the notations of (I_1), page 76, there exists a morphism $g < f$ with source $\alpha(f')\cap\alpha(f'')$; since $\alpha(g) < \alpha(f')$ and $f' = f\alpha(f')$, it follows $g < f'$; also $g < f''$, whence $g < f'\cap f''$. But

$$\alpha(f'\cap f'') < \alpha(f')\cap\alpha(f'') = \alpha(g) \quad \text{implies} \quad f'\cap f'' < g .$$

So $g = f'\cap f''$, and (I_1) is satisfied. For (I_2), we prove similarly that $\cup f_i$ is the unique morphism lesser than f, with source $\cup\alpha(f_i)$.

82.1. R. 1 i.o. 2 .

82.2. Let us prove that, if $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ is functorially ordered, then $\mathcal{C}_\gamma$ is closed by induction. Indeed, let g be an isomorphism and $g' < g$; since since $\alpha(g') < \alpha(g)$, there exists (Comment 74.2) an isomorphism f such that $f < g$ and $\alpha(f) = \alpha(g')$. Then $g'.f^{-1}$ is an identity, because it is lesser than the identity $g.g^{-1}$; hence $g' = f$.

82.3. So $p: \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ is a concrete functor creating canonical finite products and equalizers.

83.1. R. les propositions 5 et 27 i.o. la proposition 5 .

84.1. R. $\mathcal{H}'$ i.o. $\mathcal{H}$ (this is true, since 4 implies $(s, j, s) \in \Gamma$ and $\mathcal{H}'$

contains Γ).

84.2. The last two s are upside-down.

84.3. R. $\times \alpha$), i.o. $\times \alpha$). .

84.4. The two s are upside-down.

84.5. R. $\overline{\mathcal{F}}_\gamma$ i.o. $\overline{\mathrm{F}}_\gamma$.

86.1. R. (R), i.o. (R). .

86.2. R. $p(s)$. i.o. $p(s)$, .

86.3. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .
- Let $|\ |: \overline{\mathcal{H}}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'') \to \mathcal{H}$ be the non-faithful functor mapping

$$F: (\mathcal{C}'^{\cdot}, s') \to (\mathcal{C}''^{\cdot}, s'') \text{ on its restriction } F_0 : s'_0 \to s''_0$$

to the objects ; this functor admits a left adjoint which maps s onto the *discrete structured category* $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$.

87.1. s'' is the p-kernel of $\alpha \times \overline{\alpha}$, $\beta \times \overline{\beta} : s \times \overline{s} \to s \times \overline{s}$.

87.2. R. $s \times \overline{s}$ i.o. $s \times s$.

88.1. R. $\overline{\kappa}^{\cdot}, s'$ i.o. $\kappa^{\cdot}, \overline{s}'$.

89.1. R. sous-inductive faible i.o. sous-inductive .

90.1. This « *indiscrete* » *structured groupoid* is a cofree object generated by s with respect to the functor $|\ |: \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H}', \mathcal{H}) \to \mathcal{H}$ (cf. Comment 86.3).

91.1. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .

92.1. This theorem is also valid if p only creates pullbacks (cf. /109/). It implies that *the 2-category of structured categories is representable* (in Gray's sense [39]), and this result still holds for internal categories in a category admitting pullbacks (/115/, [39]).

92.2. $\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ by definition.

93.1. R. s_β i.o. s'_β . We have

$$p(s_1) = \{(\beta(f'), f', \alpha(h), h) \mid \alpha(f') = \beta(h)\}.$$

93.2. R. $\gamma_\beta \times \iota, s_\beta \times s_\alpha$ i.o. $\gamma'_\beta \times \iota, s'_\beta \times s_\alpha$.
- Pointwise, we have :

$$(h', f', f, h) \xmapsto[\overline{a}_1]{} (h', \beta f', \alpha f, h) \xmapsto[\overline{a}_2]{} (h', \alpha f, h) \xmapsto[\overline{a}_3]{}$$

$$(\alpha h', \alpha f, h) \xmapsto[\gamma_{\beta\alpha}]{} h.$$

93.3. In the case $\mathcal{H}((\mathcal{H}',\mathcal{H}'),\mathcal{H})$, the proof is more complex because the undiscrete structured groupoid on s (used in the proof of Theorem 15) is not $\mathcal{H}((\mathcal{H}',\mathcal{H}'),\mathcal{H})$-structured. This remark also applies to Theorem 17.

94.1. R. $\square\bar{s}$ i.o. $\square s$.

95.1. The last f' is upside-down.

96.1. «Pointwise» we get:

$$((f',f),h) \xmapsto{\bar{a}_1} (f,(\beta h,h)) \xmapsto{\bar{a}_2} (f,a h) \xmapsto{\bar{a}_3} ((f,f),a f).$$

97.1. «Pointwise», these maps are:

$$((f',f),h) \xmapsto{\bar{b}_1} (f',(h,f^{-1})) \xmapsto{\bar{b}_2} f'.h.f^{-1},$$
$$\bar{b}_3 : ((f',f),h) \mapsto ((f'.h.f^{-1},f'),(f,h)).$$

97.2¶ This theorem should read:

Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ *appartient à* $\bar{\mathcal{H}}(\mathcal{H}',\mathcal{H}'')_0$ *(resp. à* $\bar{\mathcal{H}}((\mathcal{H}',\mathcal{H}'),\mathcal{H}'')_0$*), il en est de même pour* $(\boxplus\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ *et* $(\boxminus\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ *(resp. et aussi pour* $(\sqsupset\mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s)$*).*

But $(\sqsupset\mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s)$ may not be $\mathcal{H}(\mathcal{H}',\mathcal{H}'')$-structured when $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ is (counter-examples exist).

The proof is not evident: Suppose that $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ is $\mathcal{H}(\mathcal{H}',\mathcal{H}'')$-structured. To prove the assertion relative to $(\boxplus\mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$, the idea is to lift the following composite in $\mathcal{H}''$ (by a process similar to the one used in the preceding proof):

$$\begin{tikzcd}
((h'',g',g,h'),(h',f',f,h)) \arrow[d, mapsto, "\iota\times[\beta,\alpha]^2\times\iota"] \\
(h'',g',g,\beta h',\alpha h',\beta h',\alpha h',f',f,h) \arrow[d, mapsto, "\approx"] \\
(h'',(g',\alpha g'),(g,\alpha g),(\beta f',f'),(\beta f,f),h) \arrow[d, mapsto, "\iota\times\gamma_\alpha'^{\,2}\times\gamma_\beta'^{\,2}\times\iota"] \\
(h'',g',g,f',f,h) \arrow[r, mapsto, "\approx\iota\times\kappa^2\times\iota"'] & (h'',g'.f',g.f,h)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdot & \cdot \arrow[l, "g'"'] & \cdot \arrow[l, "f'"'] \\
\cdot \arrow[u, "h''"] & \cdot \arrow[l, "g"] \arrow[u, "h'"] & \cdot \arrow[l, "f"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

(we have omitted the canonical isomorphisms between products).

If $(\mathcal{C}^{\cdot}, s)$ is $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structured, a similar proof only lifting the sources in $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}''$, shows that $(\boxminus \mathcal{C}^{\cdot}, \square s)$ and $(\sqsupset \mathcal{C}^{\cdot}, \sqsupset s)$ are $\mathcal{H}((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H}'')$-structured.

ON /64/ : CATEGORIES STRUCTUREES III: QUINTETTES ET APPLICATIONS COVARIANTES.

99.1. This paper lacks an introduction saying that it is devoted to the study of an important double category (in fact, the «universal» double category, cf. Comment 105.1), which englobes both the 2-category of natural transformations and the categories of covariant maps between «dominated species of structures». An analogous double category is defined from concrete internal categories.

100.1. R. isomorphe i.o. équivalente .

101.1. A quintet is also called a (down-)square of the 2-category of categories (defined here after), and drawn

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "\Phi'"'] \\ \cdot \arrow[u, "F'"] & \cdot \arrow[l, "\Phi"] \arrow[u, "F"'] \arrow[ul, phantom, "\Psi"] \end{tikzcd}$$

102.1. It would be more intuitive to call this composition the horizontal one, and to denote it by $\boxbar$.

103.1. This composition is more geometrically called the vertical one, and symbolized by $\boxminus$.

104.1. The following diagram visualizes the proof of these equalities:

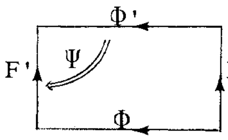
$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "\Psi_4 F'_1 \Phi_1(e)"'] \\ \cdot \arrow[u, "F'_4 \Phi_4 \Psi_1(e)"] & \cdot \arrow[l, "\Psi_4 \Phi'_1 F_1(e)"] \arrow[u, "\Phi'_4 F_4 \Psi_1(e)"'] \arrow[ul, phantom, "="] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F'_1 \Phi_1(e) \\ \Phi'_1 F_1(e) \arrow[u, "\Psi_1(e)"'] \end{tikzcd} \qquad \overset{\cdot}{e}$$

105.1+ *Characterization of double categories:*

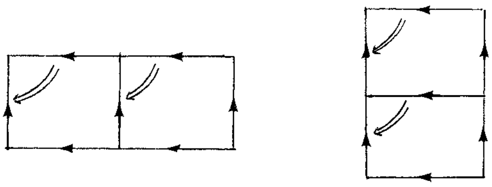
Natural transformations and their compositions have been considered very early (Eilenberg-MacLane [32]). In [37], Godement gave his

105.1 ... five rules of calculus to compose functors and natural transformations. However it seems that Charles was the first to consider the «permutability axiom» between the two compositions (in /52/), which englobes Godement's rules and proves that $\mathfrak{N}$ is a 2-category (usually denoted by Cat); this result was propagated by Bénabou (cf. Mac Lane [72]).

Now, let K be any 2-category, whose second composition is denoted by $\circ$. Propositions 1, 2, 3, 4 and Theorem 1 are easily adapted replacing Cat by K. Indeed, Proposition 1 means that the category of 1-morphisms is right and left acting on the class of 2-cells. Theorem 1 says that the quintets of K, usually called (down-)squares of K and drawn as



where $\Psi : \Phi' \circ F \Rightarrow F' \circ \Phi$ is a 2-cell form a double category Q(K), for the horizontal and vertical compositions



defined as for $Q(\mathrm{Cat}) = (Q^{\cdot}(\mathfrak{F}), Q^{\blacklozenge}(\mathfrak{F}))$ (the proof is similar); it admits K as its greatest sub-2-category.

The double category Q(K) seems to have been introduced by Bénabou and Gabriel-Zisman [35]. Its completeness properties are studied in /117/. It is a double sub-category of the larger double categories of squares (containing also up-squares) considered by Palmquist [81] in his study of adjoint squares.

Spencer [91] has characterized the double categories of the form Q(K) as the double categories D with identical two categories of 1-morphisms D_0, equipped with a double functor $\square D_0 \to D$ (called a *connection* [16]) whose composite with the double frame functor is an

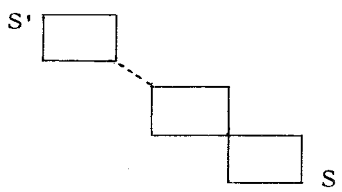
105.1... identity. In this way, he gets :

PROPOSITION A [91]. *The category 2-$\mathcal{C}at$ of 2-categories is equivalent to the category of double categories with connections (the morphisms preserving the connections).*

In /120/ we have given a complete characterization of double categories, namely:

PROPOSITION B /120/. *The functor* Q: *2-$\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at_2$ admits a left adjoint* Q' *and for each double category* C, *the liberty morphism defines an isomorphism from* C *onto a double sub-category of the double category of squares* Q(Q'(C)).

Δ. The 2-category Q'(C) has the same vertices S than C ; the 1-morphisms from S to S' are strings of 1-morphisms for each composition alternately and the 2-cells are classes of strings of blocks of C



linked by their opposite vertices. ∇

This characterization of double categories has the immediate consequence (pointed out to me by Guitart):

PROPOSITION C. *The 2-category of categories is a universal 2-category while its double category of squares (= the double category of quintets) is a universal double category.*

(Here «universal» is taken in the same sense than in a «universal covering.)

Δ. If $K = (\mathcal{K}^{\cdot}, \mathcal{K}^{o})$ is a 2-category, the canonical 2-embedding from K to Cat maps:

- the vertex S on the sub-category $S \circ \mathcal{K}$ of $\mathcal{K}^{\cdot}$ formed by the 2-cells with target S in $\mathcal{K}^{o}$, the 1-morphism $F: S \to S'$ on the functor

$$\hat{F}: S \circ \mathcal{K} \to S' \circ \mathcal{K} : \Psi' \mapsto F \circ \Psi',$$

- the 2-cell $\Psi : F \Rightarrow F'$ on the natural transformation $\hat{\Psi} : \hat{F} \Rightarrow \hat{F}'$, where $\hat{\Psi}(G) = \Psi \circ G$ for each 1-morphism $G : \hat{S} \to S$.

$$\begin{tikzcd} S' & S \arrow[l, bend right, "F'"'] \arrow[l, bend left, "F"] \arrow[l, phantom, "\Uparrow\Psi"] & \hat{S} \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left, "G"] \arrow[l, phantom, "\Uparrow\Psi'"] \end{tikzcd}$$

This embedding extends into a double embedding $Q(K) \to Q(Cat)$. If C is a double category and $K = Q'(C)$ it follows that the composite $C \hookrightarrow Q(K) \hookrightarrow Q(Cat)$ is an isomorphism from C onto a double sub-category of $Q(Cat)$.

105.2. This category is defined by the pullback:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\cdot}_2 & \mu_2^*(\mathcal{C}^{\cdot}_1, \mu_1) \arrow[l] \arrow[d] \\ \mathcal{C}^{\cdot} \arrow[from=u, "\mu_2"'] & \mathcal{C}^{\cdot}_1 \arrow[l, "\mu_1"'] \end{tikzcd}$$

105.3. R. $\mu'^*_2(\mathcal{S}^{\cdot}_1, \mu'_1)$ où $\mu'_1 : \mathcal{S}^{\cdot}_i \to \mathcal{C}^{\cdot}_i$ est la restriction de μ_i i.o. $\mu^*_2(\mathcal{S}^{\cdot}_1, \mu_1)$.

106.1. V has not been written, but induced categories and induced structured categories are characterized in /66/, Sections I-4 and II-4.

106.2. More generally, the category of internal categories in a category admitting pullbacks admits pullbacks.

108.1¶ Replace $(\square\mathcal{L}_\wedge)_0$ by the double sub-category of $\square\mathcal{L}_\wedge$ formed by the squares (F', C', C, F) where $F, F' : C \to C'$.

109.1. $\mathfrak{N}(\mathfrak{F})$ is the same thing as $\mathfrak{N}$.

111.1. R. isomorphe i.o. équivalente .

112.1. R. $\bar{p}(F_i)^{\boxplus}$ i.o. $F_i^{\boxplus}$.

112.2. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .

- $\bar{\mathfrak{N}}([\bar{\mathcal{H}}])$ «is» a sub-2-category of $Q([\bar{\mathcal{H}}])$, called the *2-category of* $\mathcal{H}$-*structured categories*; it is studied in /109/.

112.3. We recall (cf. /63/, I-2) that the symbol $(\mathcal{C}, \pi, \mathcal{S})$ represents the hypermorphisms functor associated to η.

The category of covariant maps is already defined in /47/. Charles thought this notion very important, because it gives a precise meaning to the notions of covariants and invariants in Differential Geometry.

112.4. This is the first instance where a «change of universe» occurs so that $\mathfrak{M}_0'$ be an element of $\mathfrak{M}_0$ (though it is not necessary that $\mathfrak{M}_0$ and $\mathfrak{M}_0'$ be universes).

113.1. R. isomorphe i.o. équivalente .

114.1. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .

114.2. R. isomorphe i.o. équivalente .

114.3+ If $\mathcal{K}$ is a category, the category of quintets

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{K} & \\ {} \arrow[ur, "F'"] & & {} \arrow[ul, "F"'] \arrow[ll, "\Phi"] \arrow[ll, phantom, shift right=6, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

is called the *diagram category of* $\mathcal{K}$. Guitart [44] has shown how this category plays the role of a «power-category» vz. the category of categories. Moreover, in Guitart-Van den Bril [45], it is proved that it is the category of 1-morphisms of the «universal» lax-cocompletion of $\mathcal{K}$.

114.4. The definition of $\mathfrak{A}'(\gamma, \mathcal{K})$ is not clear enough; the idea was to take all the covariant maps with respect to $(\gamma, \mathcal{K})$ between species of structures dominated by any sub-category of $\mathcal{K}$. However, the dominating sub-categories should then intervene in the morphisms, while the data (ϕ, T) do not precise them. In fact, it is easier to interprete $\mathfrak{A}'(\gamma, \mathcal{K})$ as being the category formed by the pairs (ϕ, T), where

$$\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}' \text{ and } T \text{ is a quintet } (*)$$

(Comment 114.3) with Φ a restriction of ϕ .

115.1. $\mathcal{K}$ is the *join category of* μ', μ'', which Charles has often used to reduce adjoint functors to reflections. This method has complicated several statements about free objects: cf. /66/ and /100/ for instances of this situation (as well as the fifth Chapter of /122/).

119.1. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .

ON /65/ : CATEGORIES STRUCTUREES QUOTIENT.

This Note takes back the main results of /66/, Part II, with somewhat stronger hypotheses to render the statements more striking. For other comments, cf. /66/.

121.1. This paper is /66/.

121.2. R. $f\times f(G^{\cdot} * G^{\cdot})$ i.o. $f(G^{\cdot} * G^{\cdot})$.

121.3. The references are /63, 69, 66/.

121.4¶ This condition is not sufficient; the same has to be asked for β. However, since p creates concrete equalizers, it is better to replace this condition 2 by:

2' There exist $(s', \gamma_\alpha, s) \in \mathcal{H}$ and $(s', \gamma_\beta, s) \in \mathcal{H}$

(then s_α is the p-kernel of $(s', (s', \gamma_\alpha \kappa(G^{\cdot}), s'))$).

122.1. In the definition of a strongly structured homomorphism, the condition $(\hat{s}', \Phi * \Phi, s') \in \mathcal{H}$ may also be replaced by $(\hat{s}, \Phi, s) \in \mathcal{H}$.

122.2. R. homomorphismes i.o. foncteurs.

123.1¶ Replace all the line by:

saturé pour $r\times r$ et $r\times r$ fermée ou r ouverte (resp. supposons $r\times r$ fermée et s séparée). Si $s\times s/\rho\times\rho$ est ho-.

124.1. Add tels que $x' < y'$.

ON /69/: SOUS-STRUCTURES ET CATEGORIES ORDONNEES.

125.1. This notion of injection is improved in /66/.

125.2. Ordered categories and their specializations, and pseudoproducts are studied e.g. in /75/. The pseudoproduct was introduced in /53/ for inductive groupoids (which are characterized by its properties).

For a general theory of ordered categories, cf. the «Guide» /86/, and these «Œuvres», Part II.

125.3. R. g i.o. q.

126.1. The fact that $\mathcal{C}'$ is a sub-category of $\mathcal{C}$ is only used in Proposition 1. The other results remain valid for any sub-class of $\mathcal{C}$.

127.1. R. $(p($ i.o. $p(($.

129.1. R. $\boxplus G'$ i.o. $.G'$.

129.2. R. $\bar{k}$ i.o. k.

131.1. R. injective i.o. biunivoque.

132.1. R. $h')$. i.o. $h')$.

132.2. R. $\mathcal{C}^{\cdot}$ i.o. $\mathcal{C}'$.

133.1. R. $f < f'$ i.o. $f' < f$.

133.2. Erase the last s .

This notion, which generalizes the notion of an inductive category over another of /53/, is more precisely considered in /75/.

133.3. R. $\bar{h}$ i.o. h .

135.1+ The motivation for this paper came from the desire of simplifying and strengthening the results of /63/ Part I. This section proves that this aim is achieved.

In fact, we have the following relations with the statements of /63/ (obtained when $\mathcal{H}$ is a homomorphisms category over $\mathcal{C}$ and the ordered category $(\mathcal{C}, <)$ is inductive): Theorem 1 of /63/ gives rise to Propositions 1, 4, 9; Proposition 7 to Propositions 2, 3, 5, 5'; Theorem 2 to Theorems 1 and 1'; Propositions 12 and 13 of /63/ to: Propositions 6, 7 and Corollary page 137, Proposition 11 and Corollary page 141.

135.2. They are (more happily) called sub-preinductive in /100/.

138.1. R. $(p(h)p(\alpha(h')))$ i.o. $p(h)p(\alpha(h'))$ (the pseudoproduct may not be associative).

138.2. They are called sub-inductive in /100/.

139.1. R. $\mathfrak{M}$ i.o. $\mathfrak{M}$.

140.1. R. k' i.o. k_i .

140.2. R. $\kappa,($ i.o. $\kappa($.

141.1. R. $\bar{h}'<$ i.o. $\bar{h}' \prec_p$.

ON /66/ : STRUCTURES QUOTIENT.

144.1. R. S i.o. H .

This condition means that p creates isomorphisms.

146.1+ *p-injections and initial lifts:*

The fact that K' is a category (and not any sub-class) is only used in Proposition 1. Later on (K, p)-injections are called p-injections.

p-injections are the same as cartesian morphisms (Giraud [36]) and as (singleton) initial lifts, while p-surjections are called cocartesian morphisms or final lifts.

$p: H \to K$ is said to be K'-spreading /100, 107/ if each p-morphism $k': e \to p(s)$ in K' lifts into a p-injection $\hat{k}': \hat{s} \to s$. Theorems of «universal» extension of a functor into a spreading functor with the same target are given in /107/. If K' is formed by all the isomorphisms K'-spreading means creating isomorphisms, and we find anew the enlargement Theorem (cf. /63/, Comment 29.2).

More generally, an *initial lift for a p-source* consisting of a family of p-morphisms $k_i: e \to p(s_i)$ is a family of morphisms $\hat{k}_i: \hat{s} \to s_i$ such that $p(\hat{k}_i) = k_i$ and through which factors uniquely every family of morphisms $h_i: s' \to s_i$ whose images by p factor through the k_i's; for instance, if the k_i's are the projections of a product, so are the $\hat{k}_i$'s.

A functor p for which every p-source admits an initial lift is called an *initial-structure functor* (or a *topological functor* if smallness conditions are added; anyway, we prefer keeping this name for internal functors in the category of topological spaces). The dualization Theorem then ensures that p is also a final-structure functor. Such functors have been extensively studied, as well as the «completions» of a functor into an initial-structure functor, e.g. by Antoine [2], Adamek-Herrlich-Strecker [1], Brümmer [17], Chartrelle [21], Herrlich [47,48], Hoffmann [52], Porst [84], Roberts [88], Wischnewsky [98], Wyler [101]. For generalizations, cf. /100/, Comment 212.3.

148.1. R. $\bar{h}'_I$ i.o. h'_I.

149.1. More briefly: Proposition 1 implies that j' is a p-surjection, whence a (K', p)-surjection since $p(j') \in K'$.

149.2. This proposition is a technical result which is essential for the proof of the important Theorem 14, page 196.

150.1+ It is interesting to see the evolution of ideas from /63/ to /69/ and to this paper, though the three papers were written during the first semester of 1963: in /63/ p-injections are only defined when p is a homomorphisms functor equipped with an inductive order on its target; in /69/, the notion is freed from these conditions, but slightly too lax if p is not faithful. Here, the «definitive» notion is obtained.

Propositions 1, 2, 3, 7 and Theorems 1, 2 are the refined dual versions of Propositions 1, 2, 3, 4, 6 and 7 of /69/.

150.2. Cf. /64/, Section 2.

151.1. R. $\bar{j}$ i.o. j .

152.1+ *Reflections and adjoint functors :*

A C'-projection is usually called a reflection into C'. This notion was discovered by chance while seeking significant examples of surjections. As we did not know Kan's adjoint functors when this paper was written, Charles often reduced adjoints to reflections relative to an adequate join category (cf. /64/, Comment 115.1); but the statements are less striking (cf. e.g. Proposition 15).

Later on, we mainly considered adjoint functors «pointwise» as defining free objects, rather than «globally». In fact, Charles had some difficulty for visualizing Kan's definition, and he always spent a long time preparing lectures in which he gave it.

Reflections were also defined in 1963 by Sonner [90] who calls them universal solutions.

152.2. R. j i.o. j .

152.3. R. $\bar{h}$ i.o. h .

153.1+ *Complete local groupoids:*

We recall some terminology of /55/ used in Theorems 3, 4, 5.

A *prelocal groupoid* $(S^{\cdot}, <)$ is a functorially ordered groupoid (/63/ II-6) whose order is a distributive meet-lattice with a smallest element. A *complete sub-class* of S is a set A of morphisms closed by induction ($a \in A,\ s < a \Rightarrow s \in A$) and by joins, and to which the restrictions of the source α and target β preserve finite meets.

A *local groupoid* is a prelocal groupoid in which each bounded subset admits a join. A *complete* (resp. *relatively complete*) local groupoid is a local groupoid in which there exists a join for every complete sub-class (resp. every complete sub-class A such that $\alpha(A)$ and $\beta(A)$ are bounded).

Theorems 3, 4, 5 give the universal characterizations of the completion, of the relative completion and of the «localization» of a prelocal groupoid constructed in older papers /47, 53, 55/.

Such completion theorems are also valid for sub-inductive groupoids /68/ and they are adapted in /76/ to some ordered categories thanks to the notion of an atlas of a category (and its generalizations).

155.1+ *(Re)Set-theoretical assumptions* (cf. Comments 24.1 and 211.2):

Replace the first half of the line by:

toutes ses sous-classes et ses classes quotients, avec une famille dénombrable de classes sa somme, avec deux classes...

Indeed, in many parts of this paper, the hypothesis that M_0 is closed by subsets and finite products is not sufficient, since cosets are freely used and, at least in Propositions 15 and 16, countable coproducts are necessary (the category of paths of a graph $[G]$ is a subset of the coproduct of the G^n's).

In later papers, M_0 is supposed to be a (non-transitive) universe. But this is a stronger assumption; for instance, if U is a universe, M_0 could be formed by all the sets in U with a cardinal lesser than or equal to a given infinite cardinal.

155.2. R. M/ρ_M i.o. M/ρ.

155.3. This terminology differs from /122/, where a (M^s, p)-surjection is called a *p-epimorphism* and a (M^i, p)-injection a p-monomorphism.

156.1. R. M/ρ_M i.o. M/ρ.

156.2. R. $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ i.o. p_1, p_2.

156.3. R. p_i i.o. p_i.

157.1. The proof is not complete: $s < s'$ comes from $s \approx s_\delta < s'_\delta \approx s'$.

157.2. $\tilde{T}$ is the category of topological spaces (cf. Example 1).

158.1. R. $M_1 \subset M$ i.o. $M \subset M$.

159.1. Many authors (e.g. Berge [9]) say hypergraph instead of graph, the term graph meaning that there exists at most one arrow from a vertex to another one.

160.1. This proposition means that $L[G]$ (constructed in /52/ and by Grothendieck [41]) is a free object generated by $[G]$ with respect to the forgetful functor $F \to G$. The category L is just used to replace an adjoint by a reflection (cf. Comment 152.1).

161.1. R. $\overline{\Phi}_2$ i.o. Φ_2. In fact, λ is the unit of the adjunction between pGF and the restriction of L to G.

161.2. R. $C_i^{\cdot}$ i.o. C_i. This proposition means that each category is a quotient of a free category.

161.3. R. 24 i.o. 23.

161.4¶ If ρ does not identify identities, the same is true for $\overline{\rho}$. Indeed, the functor $[\beta, a] : L[G] \to [G]_0 \times [G]_0$ is compatible with ρ, hence with $\overline{\rho}$, so that it factors through the canonical functor $\overline{\overline{\rho}}$ from $L[G]$ to $L[G]/\rho$; it follows that $\overline{\overline{\rho}}(e) = \overline{\overline{\rho}}(e')$ implies

$$[\beta, a](e) = [\beta, a](e'), \quad \text{i.e. } e = e'.$$

162.1. In other terms $\Gamma[G]$ is a free object generated by $[G]$, with respect to the forgetful functor $F_g \to G$, where F_g is the category of groupoids. The free groupoid $\Gamma[G]$ is constructed in [46]; in this paper (prepared under Charles' direction in Paris in 1959), M. Hasse essentially proves that a sub-groupoid of a free groupoid is a free groupoid.

162.2. A perfect category is also called balanced (Mitchell [77]).

163.1. R. (twice) $R(C^{\cdot}) \subset \overline{C}_{\gamma}^{\cdot}$ i.o. $C \cap R(\overline{C}^{\cdot})$.

163.2. R. $R(\overline{C}^{\cdot})$ entre catégories vérifiant (P) i.o. $\overline{C}_{\gamma}^{\cdot}$.

163.3+ R. isomorphe i.o. équivalente.

- *Categories of fractions:*

Proposition 17 and its corollary are generalized as follows: Let S be a sub-category of a category C containing the identities. Then there exists a universal solution C/S to the problem of rendering invertible the elements of S, namely a quotient category of the free category on the graph obtained by adding to $[C]$ an arrow $s' : e' \to e$ for every non-invertible $s : e \to e'$ in S.

We still say that S *satisfies condition (P)* (or, in the terminology of /122/, is a *proper sub-category* of C) if, for each s in S and h in C with the same target, there exists a square with s' in S (and h' in S if h in S):

163.3 ...

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "s"'] \\ \cdot \arrow[u, "h"] \arrow[ur, phantom, "="] & \cdot \arrow[l, "s'"] \arrow[u, "h'"'] \end{tikzcd}$$

In this case, C/S is explicitly constructed as in the proof of Corollary Proposition 17 (with $R(C^{\cdot})$ replaced by S) if elements of S are regular morphisms; otherwise C/S is obtained by the same construction applied to the quotient category of C by the equivalence:

$h \sim h'$ iff $s'.h.s = s'.h'.s$ for some s, s' in S.

This result is already given (with a somewhat more restrictive universal property) in the seemingly unknown Appendix of /55/ (written in 1960), where Charles introduced condition (P) by analogy with the Ore conditions for embedding a semi-group into a group; cf. also /122/ Theorem 14-III and Corollary, Theorem 4-V.

Condition (P) means approximately that S *admits a calculus of right fractions* in the (now standard) Gabriel-Zisman's terminology [35], where morphisms of C/S are described as classes of spans $(f'.h, f)$, instead of triads (f', f, h). The corollary then translates into:

$R(C)$ admits a right calculus of fractions iff the balanced category reflection of C is formed by the fractions: $h'.f^{-1}$, $h' \in C$, $f \in R(C)$.

Categories of fractions were also defined by Hoehnke [50] in 1963, under a little stronger assumption on S.

163.4. $\alpha(f)$ is a right identity for f iff $f.\alpha(f)$ is defined and $g.\alpha(f) = g$ whenever this composite exists.

164.1+ *Neocategories and precategories:*

A multiplicative graph is called a neocategory in more recent papers (and we'll use this term here). Neocategories were introduced both for the study of quotient categories (cf. Section IV) and for applications to optimization problems where «germs of categories» occur. Later on, they provided a good setting for defining sketches /106/.

Neocategories satisfying the «weak associativity axiom»:

(WA) if two composites formed with the same terms but different parentheses are defined, they are equal, are called *precategories* by Dedecker-Mesrch [25], who use them to study quotient categories.

Neocategories satisfying the «strong associativity axiom»:

(SA) If one of the composites $h.(g.f)$ or $(h.g).f$ exists the other exists and both are equal,

are also called precategories by Coppey [23] ; he develops an interesting study of precategories, characterizes well-ordered precategories and applies his results to describe direct decompositions of the monoid N of integers and of N × N.

164.2. R. $\mathcal{f}([\bar{G}^{\cdot}]$ i.o. $\mathcal{f}([G^{\cdot}]$.

164.3. R. $\bar{G}^{\cdot}_0$ i.o. $G^{\cdot}_0$.

164.4. In other terms: ν is a reflector from N' to F and $\tilde{\nu}$ is the unit of the corresponding adjunction. $\nu(G^{\cdot})$ is also constructed in [25], when $G^{\cdot}$ is a precategory.

165.1. A bicompatible equivalence could be called a congruence.

167.1. Proposition 22 and this Remark led to the definition of quasi-quotients in /100/, to formalize the universal property of $\nu(C^{\cdot}/\rho)$.

167.2. R. isomorphe i.o. équivalente .

168.1. R. $=\bar{C}$ et que $\bar{C}^{\cdot}$ i.o. $=\bar{C}^{\cdot}$ et que $\bar{C}$.

170.1+ *Quotient categories:*

Explicit constructions of strict quotient categories, e.g. of the quotient category of a category by a sub-category, are done in /91/ (taken back in /122/ chapter III) and in the Appendix of /102/.

Though quotient categories by non-identifying-objects equivalences are commonly used, few authors are interested in the general case:

- The universal property of $\nu(C/\rho)$ is given by Dedecker-Mersch in [25,76] when C/ρ is a precategory, and when ρ only identifies objects by Higgins [49] who solves the «word problem» for $\nu(C/\rho)$.

- Pümplun [86] says that $(C/\rho)^{\perp}$ is a quotient category as soon as the canonical map defines a functor $C \to (C/\rho)^{\perp}$; however Example 2, page 169, proves that $(C/\rho)^{\perp}$ may not satisfy the universal property of a quotient; Pümplun gives a list of sufficient conditions (e.g. the hypotheses of Proposition 25) to obtain it.

- Quotient groupoids are studied by Hoehnke [51] while Higgins constructs the quotient groupoid by a normal sub-groupoid [49].

173.1. R. $G_i^{\cdot}$ i.o. $G_1^{\cdot}$.

173.2. This corollary means that $\overline{\kappa}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\kappa}_1)$ is a pullback of $(\overline{\kappa}_1, \overline{\kappa}_2)$.

174.1. R. $\overline{G}$ i.o. G .

175.1. R. $\kappa_1), .)$ i.o. $\kappa_1)), .)$.

176.1. R. un isomorphisme i.o. une équivalence .

178.1. The proof is too heavy: $\overline{S}$ is a product of (s, s) in $H^{\cdot}$, since $\phi \times \phi : s \times s \to \overline{S}$ is an isomorphism; hence it is also the canonical product of the isomorphic $(\overline{s}, \overline{s})$.

179.1. $R.$ $G_i^{\cdot}$ i.o. G_i .

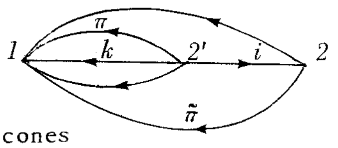
182.1. R. $\overline{N}$ i.o. N .

182.2+ *Multiplicative classes as sketched structures:*

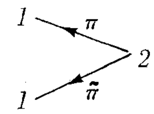
The theorems of this section are reminiscent of results on sketched structures (cf. /106/). However, structured multiplicative classes are not exactly «concrete internal multiplicative classes».

Indeed, the sketch of multiplicative classes is either

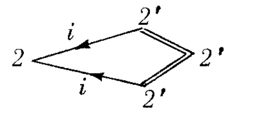
σ_{mc}



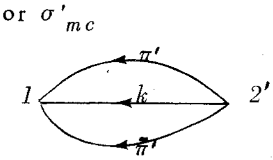
with the cones



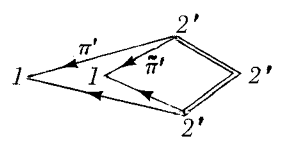
and



or σ'_{mc}



with



the categories of models of these two sketches in the category of sets are both equivalent to the category of multiplicative classes. A usual multiplicative class is obtained if the model maps $\pi, \tilde{\pi}$ on the canonical product projections and i on an insertion, resp. if the model maps π', $\tilde{\pi}'$ on restrictions of the canonical product projections.

The models of σ'_{mc} in a category H are called *internal multiplicative classes in H*. If H is a concrete category with forgetful functor p, the «concrete» models of σ'_{mc} (i.e. those mapped by p on a usual multiplicative class) correspond to the p-structured multiplicative classes $(G^{\cdot}, s, s')$ satisfying:

(*) $(s, \underline{p}_1\iota, s') \in H$ and $(s, \underline{p}_2\iota, s') \in H$, where p_1, p_2 denote the projections of the product $G \times G$.

In fact, this is the adequate definition for many problems. The strongly p-structured multiplicative classes correspond to the concrete models of σ_{mc} in H which map i on a p-injection.

Now, Theorem 2 is the analogue of the «transport by isomorphisms» property for sketched structures, Theorem 3 gives existence of products, Theorems 4 and 5 study sub-structures and quotients, Theorem 6 asserts the existence of pullbacks (and in fact of all finite projective limits) when H is finitely complete.

The hypotheses are more complicated than for internal categories, because the object s' of composable pairs (image of $2'$) is not constructed by limits from the object s of morphisms (image of 1).

184.1. $G(p)$ admits products even if H is not saturated over M.

184.2. R. sous-graphe (resp. graphe quotient) de $G^{\cdot}$ i.o. graphe.

186.1+ *Internal graphs:*

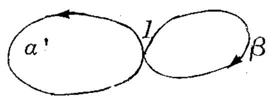
The category of graphs is equivalent to the category of set models of the sketch σ_{Gr}:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "\iota"] & 1 \arrow[l, bend right, "\beta"'] \arrow[l, bend left, "\alpha"] \end{tikzcd} \qquad \beta\iota = 0 = \alpha\iota$$

(without cones); the usual graphs correspond to the models mapping ι on an insertion. The models of σ_{Gr} in a category H are called *internal graphs in H*.

p-structured graphs are the «concrete internal graphs», i.e. those mapped by p on a usual graph. $G(p)$ is equivalent to the category of

186.1... internal graphs in H. So transport by isomorphisms (Theorem 7 and Corollary 1, Proposition 10), existence of products (Proposition 7 and Corollary 2, Proposition 10), of sub-structures (Proposition 8 and Theorem 8), of quotients (Proposition 9) and, if H is complete, of limits (Corollary, Theorem 8) result from the general theory of sketched structures /106/. Proposition 10 means that, if p creates canonical equalizers, p-structured graphs are also the concrete models of the sketch



$\beta'\alpha' = \alpha'$, $\alpha'\beta' = \beta'$.

Indeed, such a model extends into a model of σ_{G_r}, mapping 0 on the equalizer of (α', β').

The end of the section is devoted to the study of some peculiar models; the results are highly technical (and somewhat bothering, though useful in some applications).

187.1. The two categories admit products even if the first hypothesis is not satisfied.

187.2. R. $\overline{s}_0 \times \overline{s}_0$ i.o. $\overline{s}_0 \times s_0$.

189.1. $([G/\rho], s/\rho)$ might not be a quotient for the forgetful functor from $G(p, H')$ since only homomorphisms $\phi: ([G], s) \to ([G'], s')$ with $\phi: s \to s'$ in H' factor through it.

191.1+ *If* p *creates canonical equalizers* (= *is right solving instead of sarated), then* $(G^{\cdot}, s, s')$ *is a* p*-structured graph it it satisfies condition 1 and condition*

2' $(s', \gamma_\alpha, s) \in H$ *and* $(s', \gamma_\beta, s) \in H$.

Δ. s_α and s_β exist, since they are p-kernels of

$(s', (s', \gamma_\alpha \kappa(G^{\cdot}), s'))$ and $(s', (s', \gamma_\beta \kappa(G^{\cdot}), s'))$;

the morphisms of condition 2' have restrictions

$$(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \text{ and } (s_\beta, \gamma_\beta, s)$$

with inverses $(s, \kappa(G^{\cdot})\iota, s_\alpha)$ and $(s, \kappa(G^{\cdot})\iota, s_\beta)$. ∇

This remark is necessary for the proof of Theorem 10.

192.1. R. $G^{\cdot}$ i.o. G' .

193.1. It is sufficient that p creates canonical pullbacks (cf. /109/).

193.2. For the definition of the enlargement, cf. /63/, Comment 29.2.

193.3. R. $G_i^{\cdot}$ i.o. G_i .

194.1. R. $G^{\cdot}$ i.o. $\mathrm{G}^{\cdot}$.

195.1¶ In the «strong» case, it is necessary to assume that $\bar{s} \times \bar{s}$ exists.

195.2. R. $(\bar{G}^{\cdot}, \bar{s}')$ i.o. $(G^{\cdot}, \bar{\bar{s}}')$.

196.1+ This theorem is one of the main results of this paper, and it motivated the introduction of structured neocategories (and of the essentially technical structured classes and graphs). Indeed, seeking conditions for the existence of quotient structured categories revealed that the important thing is to have a quotient of the object of composable pairs (not a quotient $\hat{s}$ of the object of morphisms); but this quotient may not be a sub-structure of $\hat{s} \times \hat{s}$, even for structured categories. Hence the structured neocategories.

196.2. R. $\bar{\rho} * \bar{\rho}$ i.o. $\bar{\rho} * \rho$.

196.3. Replace the line by:

Les conditions 1,3,4 de la Proposition 18 sont remplies. Le couple .

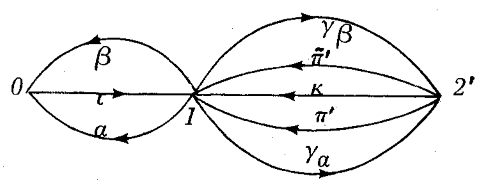
196.4. R. $s/\rho, \bar{s}'$ i.o. $\bar{s}/\rho, s'$.

It is still necessary to define $\bar{s}_0'$ (for condition 2 of Proposition 18 to be fulfilled); it is isomorphic to $\bar{s}_0$ (it exists since H is saturated).

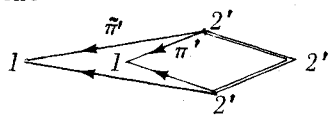
197.1+ *Neocategories as sketched structures:*

There are several sketches the set-models of which are neocategories, as Proposition 18 suggests. So Theorems 10 to 14 may be deduced from general results on transport by isomorphism, existence of products, sub-structures and quotients.

The sketch σ_{Neo} constructed by A. Burroni [18] is obtained by by gluing together the sketches σ_{mc} and σ_{Gr} (Comments 182.2 and 186.1) and adding the «identity axiom». Another sketch is σ_{Neo}' :



197.1 ... with the cone



and relations for defining γ_α and γ_β as factors and for expressing the identity axiom. Its models in a category H will be called *internal neocategories in* H.

If H is a saturated concrete category, the *concrete internal neocategories in* H (i.e. the models of σ'_{Neo} in H mapped by the concrete functor p on a usual neocategory) are those p-structured neocategories $(C^\cdot, s, s')$ satisfying the condition $(*)$ of Comment 182.2. If p creates canonical products, $(*)$ is equivalent to:

$(**)$ $\quad (s \times s, \iota, s') \in H$.

All the results of this section remain valid if this condition is added to the definition (as it is in /100/).

Strongly p-structured neocategories are the concrete models of σ_{Neo} in H which map $i: 2' \to 2$ on a p-injection.

Another way to «add structures on neocategories» is to equip each set of morphisms between two objects of a structure, i.e. to define enriched neocategories (by analogy with enriched categories) in a monoidal category. For their study, cf. Cury's Thesis [24].

197.2. R. (H', H') i.o. (H', H'').

197.3. R. (H', H') i.o. (H, H').

197.4. p is right solving may be replaced by H is saturated over $\mathbf{M}$.

201.1. R. $\psi_0^*(G^\cdot)_0$ i.o. $\psi_0^*(G_0^\cdot)$.

202.1. The condition is necessary, since $e \, \bar{\rho} \, e'$ with e and e' identities implies $(e, e) \, \overline{\rho \times \rho} \, (e, e')$, whence $e = e'$ if $C^\cdot * C^\cdot$ is saturated for $\rho \times \rho$.

203.1¶ Replace all the line by:

saturé par $\rho \times \rho$ *et* $\rho \times \rho$ *fermée ou* ρ *ouverte (resp. supposons* $\rho \times \rho$ *fermée et la topo-* .

These conditions are to insure that $s'/\rho * \rho$ is the topology induced by $s \times s/\rho \times \rho$.

204.1. R. $\rho\times\rho$ i.o. ρ .

204.2¶ R. resp. Si $\rho\times\rho$ est fermée ou ρ ouverte et si i.o. resp. si .

Indeed, if ρ is open, $\rho\times\rho$ is also open, and the topology induced by $s\times s/\rho\times\rho$ on the saturated sub-set $C^{\bullet}*C^{\bullet}$ is $s'/\rho*\rho$; if $\rho\times\rho$ is closed, $s'/\rho*\rho = s\times s/\rho\times\rho$ when $C^{\bullet}*C^{\bullet}$ is either saturated or closed (for instance if s is Hausdorff).

204.3. $\bar{\Omega}'_I$ (cf. /69/) is formed by the monotone maps ϕ such that

$$x' < x,\quad x'' < x \quad\text{and}\quad \phi(x') = \phi(x'') \quad\text{imply}\quad x' = x''.$$

204.4. R. α i.o. a .

204.5. R. $\tilde{g}$ i.o. g .

207.1. $\bar{\rho}_0$ is the identity.

207.2+ *Quotient ordered categories* are also considered by S. Legrand in [68]. She obtains a criterion for the existence of quotient $\bar{\Omega}$-structured categories, ordered categories and sub-preinductive categories, using quotients of a free category of paths equipped with an adequate order. These results are generalized in / 100/ , Section 5.

In [57], Chapter I, Joubert gives conditions on an equivalence ρ on C which ensure that an ordered category $(C^{\bullet}, <)$ admits a (strict) quotient ordered category equipped with the quotient order of $<$ by ρ . These conditions are then adapted to the case of sub-preinductive, sub-inductive and inductive categories. He uses these results to solve the problem of extensions of ordered functors (cf. also S. Legrand [68] and / 90, 95, 96/).

207.3. The references 1 and 2 are respectively /69/ and /63/ .

ON /67/ : TEILSTRUKTUREN UND FAKTORSTRUKTUREN.

This Note is a brief summary of /63, 66/ .

ON / 100/ : STRUCTURES QUASI-QUOTIENT.

210.1. R. monoïde i.o. demi-groupe .

210.2. R. demi-groupe i.o. monoïde .

210.3. R. monoïdes i.o. demi-groupes .

210.4. R. dénombrables régulières i.o. dénombrables .

211.1¶ This strict identification of an object with its identity leads to logical problems. Indeed, a map $f: M \to M'$ is also a set (namely, the unique element A of $\{M'\} \times \{graph_f\} \times \{M\}$), so that in a formula A may be interpreted either as an object or as a map. However, practically there is no confusion, and this identification is an abbreviating (abuse of) notations.

211.2+ *(Re)Set-theoretical assumptions :*

Cf. also /63/ Comment 24.1 and /66/ Comment 155.1 .

In /66/ it is sufficient that $\mathfrak{M}_0$ be closed by subsets, finite products, quotients and countable coproducts. In this paper some existence theorems where concrete functors are used require that $\mathfrak{M}_0$ be closed by power-sets and coproducts indexed by sets in $\mathfrak{M}_0$. Whence the definition of a (non-transitive) universe used here. When Charles introduced this notion, we did not know the Grothendieck universes, the transitivity of which does not intervene in the involved constructions. In fact, it is important not to add this transitivity, since $\overline{\mathfrak{M}}_0$ (used in the sequel) is a universe, but is not transitive even if $\mathfrak{M}_0$ and $\hat{\mathfrak{M}}_0$ are.

Though the term class is used, the underlying set theory is Zermelo-Fraenkel's (this is explicit in later papers) and universes are «large» sets. The necessity of taking «larger and larger» universes for existence theorems led to add the «axiom of universes» :

Every set belongs to a universe.

This axiom is equivalent to the (seemingly stronger) Grothendieck's axiom :

Every set belongs to a transitive universe.

(The equivalence is proved in the last Chapter of [30] .)

Most often (as MacLane has pointed out [73]) just two universes $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$ are used; elements of $\mathfrak{M}_0$ are the «small sets» and elements of $\hat{\mathfrak{M}}_0$ are the «large sets». In this case, it is also possible to adopt Gödel-Bernays theory with elements of $\mathfrak{M}_0$ as sets, elements of $\hat{\mathfrak{M}}_0$ as classes.

In Zermelo-Fraenkel theory «every set has elements». This somewhat bothered Charles, who would have prefered a set theory with atoms (for instance, he thought a point in a plane has «no elements»). But he put aside the question for he was more interested in solving «concrete» problems than logical ones. Anyway his optimistic (perhaps hazardous) philosophy was that foundational problems could always be solved afterwards, without risking the validity of the «working mathematician»'s results.

212.1. Some other notations of / 122/ are used here: $R_d(K)$ is the set of epimorphisms and $R_g(K)$ the set of monomorphisms of the category K; if K' is a sub-class of K, then

$$R_d(K', K) = \{ f \in K \mid k'.f = k''.f, \ k', k'' \in K' \text{ imply } k' = k'' \}.$$

The preorder $\underset{K}{<}$ is defined by $f \underset{K}{<} f'$ if f factors through f'; a minimum for this preorder is called a K-minimum.

If $p: H \to K$ is a functor, $(K', p)^{\ulcorner}$ is the set of (K', p)-injections. A p-surjection j such that $p(j)$ is an epimorphism is called a *p-epimorphism.* If $p: H \to \mathfrak{M}$ is a concrete functor and if s' is a p-sub-structure of s (denoted by $s' \vdash s$ instead of $s' \prec_p s$) the canonical p-injection is written $s \hookleftarrow s'$.

212.2. $\boxminus(K, p)$ is the comma category $p \downarrow Id_K$.

212.3+ *Quasi-surjections and semi-final lifts:*

$j: s \to s'$ is a (K', p, H')-quasi-surjection if:

1° s' is in H', and there exists $f \in K'$ and k such that $p(j) = k.f$.

2° For every $j': s \to s''$ with $s'' \in H'$ and $p(j') = k'.f$, there exists exactly one $g: s' \to s''$ such that $j' = g.j$ and $p(g).k = k'$.

More intuitively, it is a universal solution for the problem of finding a j from s to H' such that $p(j)$ factors through f.

p-quasi-surjections (with $H = H'$ and $K = K'$) have been considered later on by several authors: Wyler calls them proclusion pairs [102]; there are the singleton case of semi-final lifts of p-cocones (cf. Comment 233.3, where the definition is recalled).

A functor $p: H \to K$ *admitting quasi-quotients* (i.e. such that each

212.3 ... p-morphism $k: p(S) \to e$ determines a p-quasi-surjection of source S) is called a proclusion functor (Wyler [102]) or a semi-cofibration (Tholen [94]). If p admits semi-final lifts for each small p-cocone, it is a small semi-topological functor (Hoffmann [53]).

A semitopological functor is a functor admitting semifinal lifts for all (discrete) p-cocones (Trnkova [96], Tholen [94], Wischnewsky [99]). Then p creates colimits, since the semifinal lift of a colimit-cone is a colimit cone.

Tholen and Wischnewsky [95] have proved that semi-topological functors are the full reflective restrictions of initial-structure functors (cf. Comment 146.1). If K is cocomplete and H co-well-powered, p is semi-topological iff H is cocomplete and p is a faithful right adjoint.

Many other classes of functors have been introduced, for instance the q-functors defined by Guitart-Van den Bril [45] in view of studying generalized Kan extensions, Wischnewsky's topologically algebraic structure functors [99] (which are the full coreflective restrictions of semi-topological functors), topologically-algebraic structure functors (Hong [54], Börger-Tholen [11]) intermediate between initial-structure functors and semi-topological functors, ...

These classes of functors are englobed in the versatile notion of a structure functor sequence (Wischnewsky [100]) for which there exist duality theorems unifying the known duality theorems for initial-structure functors (they are the same as final-structure functors), semi-topological functors,...

217.1+ *Quasi-quotient structures:*

j is defined up to an isomorphism of its target.

More intuitively, an object s' of H' is a (H', p)-quasi-quotient of s by r if there exists a morphism $j: s \to s'$ which is universal among the morphisms from s to H' compatible with r. An example shows the difference between quasi-quotients and quotients: if G is a group and r any equivalence on G, then there exists a quasi-quotient group of G by r namely the quotient group of G by the congruence generated by r.

In a preliminary draft of this paper, only quasi-quotient structures were defined, with a view to applications to the study of (quasi-)quotient categories and internal categories. But Charles was not satisfied by this notion, and he dissected it until he got the quasi-surjections with respect to any (non-concrete) functor p .

218.1. The category $N(G)$ reflection of a neocategory G is constructed in /66/, page 164, where (N, ν) is denoted by $(\nu, \tilde{\nu})$. Quotient categories and neocategories are also considered in /66/.

220.1. $\bar{\mathcal{C}}$ is the category of categories pointed by a sub-category containing the identities. If C is a category and G a sub-category containing the identities, the quotient category C/G is the category such that $(h: C \to C/G,\ G \hookrightarrow C)$ is a $(p\mathcal{F}, J\mathcal{F})$-short exact sequence; this means that h maps G on identities and that any functor $k: C \to K$ mapping G on identities factors through h (since $J\mathcal{F}$ is the ideal formed by the identity-valued functors).

220.2. Quotient categories by a sub-category are considered in /73/ (for the case of a sub-groupoid) and /74, 80, 91/ where fine constructions are given. They were defined to study a category-valued cohomology adapted from the abelian cohomology (cf. «Oeuvres» III-2).

220.3. If h, h' are parallel morphisms of H, a $(\mathfrak{M}^{\iota}, p)$-kernel of (h, h') is a p-injection j such that $h.j = h'.j$ and $p(j)$ is the insertion from: $\{x \mid h(x) = h'(x)\}$. (The definition reminded in the proof of Proposition 1 is too complicated.)

221.1. j is a $(H, X, \hat{H}^{\cdot})$-kernel of (h, h') iff j is an equalizer in $\hat{H}$ which is contained in X and with its source in H.

221.2+ *Equalizers, quasi-injections and p-kernels:*

Let $p: H \to K$ be a functor. Suppose $h, h': s \to s'$ and $j: \hat{s} \to s$ are morphisms of H and f is an equalizer of $(p(h), p(h'))$ in K.

PROPOSITION. *If j is a p-quasi-injection defined by f, then j is an equalizer of (h, h') iff $h.j = h'.j$.*

(But an equalizer may not be a quasi-injection.)

From this proposition, it follows:

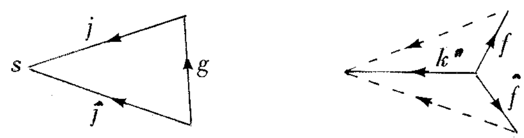
- If p is faithful : j is a p-quasi-injection defined by f iff j is an equalizer of (h, h'); if $p(j) = f$, then j is a p-injection iff j is an equalizer of (h, h').
- If p is faithful and $K = \mathfrak{M}$: j is a $(\mathfrak{M}^{\iota}, p)$-kernel of (h, h') iff j is an equalizer of (h, h'), iff j is a p-injection and $p(j) = f$; so p is right solving iff it creates canonical equalizers.
- If $K = \mathfrak{M}$ and p creates canonical equalizers which are p-injections then p is faithful.

221.3+ A sub-object j of s generated by k'' in Freyd's sense [34] is a (X, H)-sub-morphism of s generated by k'' iff j is in X ; hence this definition «relativizes» Freyd's.

In his Thesis [70], Leroux proves that, if p admits a left adjoint and if $\hat{H}$ admits images, then each P-morphism $k'' : e \to P(S)$ generates a $(P^{\urcorner}_{i}, H)$-sub-morphism of S.

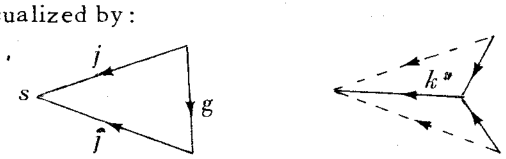
More technical existence theorems for generated sub-morphisms are given in / 102/ .

222.1¶ The diagrams should read:



(1)

Compare generated sub-morphisms with the co-notion of a p-quasi-injection, visualized by:



(three arrows reversed vz. (1)).

222.2. If M is void, then 0 is a $(P^{\urcorner}_{\iota}, H)$*-sub-structure of* s *generated by* $\emptyset$ *iff* 0 *is the smallest sub-structure of* s *in* H , in the case, for instance when H admits an initial object 0 which is the unique element of the fibre of H on $\emptyset$ (this is the condition imposed by Herrlich on topological functors [47]).

222.3. The proof of this assertion is similar to the proof of Proposition 2.

222.4+ *The poset of sub-structures:*

Denote by $s\overline{\ }_H$ the class of P-sub-structures s' of s such that s' is in $\bar{H}$. Condition 1 means that $P(s\overline{\ }_H)$ is cofinal in the power-set of $P(s)$. Condition 2 means that the poset $s\overline{\ }_H$ (with the order $\prec$) admits meets preserved by P for every family A such that $\cap P(A) \neq \emptyset$; it is automatically satisfied e.g. when P creates fibred products indexed by a set the cardinal of which is lesser than the cardinal of $P(s\overline{\ }_H)$ (then $\cap A$ = fibred product of A over s, cf. / 102/, page 21).

Suppose $\mathfrak{M} = \hat{\mathfrak{M}}$ and P is sub-generating for $\mathfrak{M}$. Then $s\overline{\ }_H$ admits joins for every non-void family, and a «negation» may be defined by:

$\neg s'$ is the sub-structure generated by $P(s) \backslash P(s')$;

It satisfies $s' \cup \neg s' = s$, but generally $\neg\neg s' \neq s'$. What are the properties of this negation?

223.1. Intuitively, P is sub-generating for $\mathfrak{M}$ iff «small» non-void subsets of $P(s)$ generate «small» sub-structures of s.

224.1. A sub-spreading functor is a functor $P: H \to \mathfrak{M}$ such that $P(s\overline{\ }_H)$ is the power-set of $P(s)$. It is an initial-structure functor iff P creates products.

227.1+ *On existence Theorems for free objects:*

Proposition 4 is a categorical formulation of Samuel-Bourbaki's Universal Solution Theorem [89]. It was suggested to us by S. Legrand's method for constructing the ordered category reflection of an ordered graph [68]. It was refined for proving the existence of quasi-quotient structured categories, whence the highly technical hypotheses of Propositions 5, 6, 7; for instance, X is introduced because in this application it is easier to consider only structured sub-categories of (C, s) whose object of morphisms is a sub-structure of s. In / 102, 108/, these propositions are adapted to give existence theorems for free objects and adjoint functors.

To compare these results with Freyd's [34], it is better first to eliminate the technicities which conceal the very simple idea: Let C be a category and H a full sub-category (in Propositions 5, 6, 7, C does

227.1... not appear explicitly; it is the sub-category of $\tilde{H}$ formed by H, e, the morphisms $e \to H$). We want to construct a reflection in H of the object e of C.

An auxiliary category $\tilde{H}$ containing C is introduced ($\tilde{H}$ may be thought as the same category than C, but «relative to a larger universe»; for usual concrete categories, the meaning is clear). The family I_e of all «possible reflectors» $g_i : e \to s_i$, $s_i \in H$, is too large for the s_i's to have a product in C, but it is supposed there exists such a product in the larger category $\tilde{H}$; let $\hat{g} : e \to S$ be the factor of the g_i's. Then the reflection of e is a sub-object s of S, which is appropriately generated by $\hat{g}$ and «small enough» to lie in H. In Proposition 5, s is obtained as an image of $\hat{g}$; in Propositions 6, 7, it is a q-sub-structure of S generated by the image of $q(\hat{g})$, where q is a given functor with source $\tilde{H}$. As in many applications, Proposition 7 makes use of the category $\hat{H}$, which is the same category as H relative to a larger universe.

This idea is the «outside - inside» of Freyd's, which can be schemed as follows: Let A be a solution-set which is supposed to admit a product S' in H, preserved by the insertion $H \hookrightarrow C$; let $g: e \to S'$ be the factor of the morphisms into A. Then the reflection s of e is the sub-object of S' generated by g; thanks to the definition of a solution-set, every morphism $e \to H$ (and not only those morphisms into A) factors through s. If A is thought of as «the same category as H relative to a smaller universe», it plays the same role than H in Propositions 5, 6, 7, while C plays the role of $\tilde{H}$.

In the applications, the main point is:

- in Propositions 5, 6, 7 to prove that the generated sub-object s of S is «small enough» to lie in H;
- in Freyd's theorems, to construct a solution-set.

In fact, the same techniques are used in both cases.

227.2. Condition 3 says that each commutative square with k' in K' and k'' in K'' has a «diagonal» g.

$$\begin{tikzcd} {} & {} \arrow[l, "f'"'] \arrow[dl, dashed] \\ {} \arrow[u, "k''"] & {} \arrow[l, "f"] \arrow[u, "k'"'] \end{tikzcd}$$

In the category of sets, g exists iff k' is onto.

In fact, this condition is not necessary in Theorem 1 (cf. Comment 233.3).

228.1. R. $\hat{H}$ i.o. $\tilde{H}$.

228.2. S is in X because the sub-category X is closed by products and it contains each object s' of H (indeed, s' is the target of a $(X, \hat{H})$-kernel of (s', s')).

Theorem 1 may be seen as a «co-dualization theorem», since generated sub-morphisms are codual to quasi-surjections (cf. Comment 222.1). It would be interesting to compare it with the general Wischnewsky's dualization theorem [100].

228.3+ More technical existence theorems for quasi-surjections are proved in / 102, 108/ .

An other kind of existence theorem for quasi-surjections is given by Leroux [70]: *If $P: \hat{H} \to K$ admits a left adjoint Q, and $\hat{H}$ admits pushouts, then a regular epimorphism $f: P(s) \to e$ determines a P-quasi-surjection $j: s \to \hat{s}$* obtained by the following pushout (where η_s is the co-unit of the adjunction):

$$\begin{tikzcd} \hat{s} & {} \arrow[l] \\ s \arrow[u, "j"] & P\,Q(s) \arrow[l, "\eta_s"] \arrow[u, "Q(f)"'] \end{tikzcd}$$

229.1. In other terms, P creates canonical products.

229.2. R. Théorème 2 i.o. théorème 1 .

231.1. R. $\tau(i')$ i.o. $\tau(i)$ (on the upper diagram).

232.1. This results from the proof of Theorem 3, thanks to the pushout:

$$\begin{tikzcd} {} & {} \arrow[l, "k"'] \\ {} \arrow[u, "\tilde{k}(r)"] & {} \arrow[l] \arrow[u, "\tilde{r}"'] \end{tikzcd}$$

232.2. $p^{\ulcorner}_{n} \subset P^{\ulcorner}_{i}$ and p faithful may be replaced by P faithful .

232.3. Erase the initial 2.

232.4. I may be a filtered category in the wider sense of [74].

232.5. Cf. /102, 108/ and Comment 233.3.

233.1+ *Quasi-surjections and co-equalizers:*

Let $p: H \to K$ be a functor. The dual of Comment 221.2 gives:

PROPOSITION A. *Let $h, h': s' \to s$ and $c: s \to \hat{s}$ be morphisms of H and $f: p(s) \to e$ be a co-equalizer of $p(h)$, $p(h')$ in K. When c is a p-quasi-surjection determined by f, it is a co-equalizer of h, h' in H iff $c.h = c.h'$.*

COROLLARY. *If p is faithful, K admits co-equalizers and each co-equalizer $k: p(s) \to e$ determines a p-quasi-surjection with source s, then H admits co-equalizers.*

In particular, if $p: H \to \mathfrak{M}$ is a faithful functor and if $j: s' \to s \times s$ is such that $p(s')$ is an equivalence r on $p(s)$, then $\hat{s}$ is a p-quasi-quotient of s by r iff $\hat{s}$ is the target of a co-equalizer of

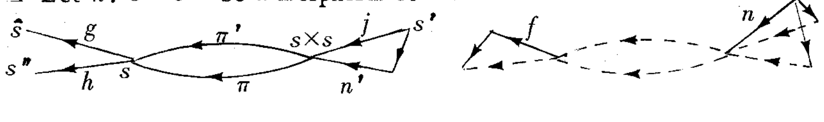
$$\begin{tikzcd} s & s \times s \arrow[l, bend right, "proj_1"'] \arrow[l, bend left, "proj_2"] & s' \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

(take the canonical map $p(s) \to p(s)/r$ for f).

The following proposition, which replaces quasi-quotients by co-equalizers, is useful for adapting constructions by quasi-quotients of the concrete case to internal sketched structures, such as the construction of the free category on a graph, or of the fibration generated by a functor, ... (cf. Thesis of Kempf [60]).

PROPOSITION B. *Suppose $p: H \to K$ is a faithful functor which admits equalizers; let $f: p(s) \to e$ be an effective epimorphism and $j: s' \to s \times s$ a $(p_\iota^{\frown}, H)$-sub-morphism generated by the equalizer n of $f.p(\pi)$ and $f.p(\pi')$, where $\pi, \pi': s \times s \to s$ are the projections. Then there exists a p-quasi-surjection $g: s \to \hat{s}$ determined by f iff g is a co-equalizer of $\pi.j$, $\pi'.j$.*

Δ Let $h: s \to s''$ be a morphism of H.



It suffices to prove that $p(h)$ factors through f iff $h.\pi.j = h.\pi'.j$.
1° If $h.\pi.j = h.\pi'.j$, then $p(h).p(\pi).n = p(h).p(\pi').n$. As f is an effective epimorphism, we have the pullback

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[l, "p(\pi).n"'] \arrow[d, "p(\pi').n"] \\ \cdot & \cdot \arrow[l, "f"] \end{tikzcd} \quad \text{and} \quad \begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "f"'] & \cdot \arrow[l, bend right, "p(\pi).n"'] \arrow[l, bend left, "p(\pi').n"] \end{tikzcd}$$

is a coequalizer diagram. Hence $p(h)$ factors through f.
2° Conversely, let n' be the equalizer of $(h.\pi, h.\pi')$. If $p(h)$ factors through f, we have $p(h).p(\pi).n = p(h).p(\pi').n$, so that n factors through the equalizer $p(n')$ of $(p(h.\pi), p(h.\pi'))$. The faithfulness of p implies n' is a p-injection, so the $(p^{\frown}_i, H)$-sub-morphism j of $s \times s$ generated by n factors through n'; so $h.\pi.j = h.\pi'.j$. ∇

COROLLARY. *Let $p: H \to \mathfrak{M}$ be a faithful functor creating canonical equalizers. If r is an equivalence on $p(s)$ and if $j: s' \to s \times s$ is a $(p^{\frown}_i, H)$-sub-morphism generated by the graph of r, then $\hat{s}$ is a p-quasi-quotient of s by r iff $\hat{s}$ is the target of a co-equalizer of:*

$$\begin{tikzcd} s & s \times s \arrow[l, bend right, "proj_1"'] \arrow[l, bend left, "proj_2"] & s' \arrow[l, "j"'] \end{tikzcd}$$

(Take for f the canonical map $p(s) \to p(s)/r$, which is an effective epimorphism.)

233.2. Cf. / 102 / and Comment 227.1.

233.3+ *Existence theorems for semi-final lifts:*

The theorems of this section 2 may be generalized to obtain semi-final lifts of cocones.

Let $P: \hat{H} \to K$ be a functor and H a full sub-category of $\hat{H}$. A *P-cocone (D, γ)* is the data of a functor $D: A \to \hat{H}$ and of a cocone $\gamma: P \circ D \Rightarrow u$; a cocone $\tilde{\gamma}: D \Rightarrow s$ is called a *(p, H)-semi-final lift of (D, γ)* if it is a universal solution to the problem: find a cocone with base D and vertex in H, mapped by p on a cocone with a factorization through γ (a more precise definition is given below).

If A is a singleton, we have the (P, H)-quasi-surjections; if H

233.3 ... $= \hat{H}$, we have the usual semi-final lifts (cf. [93]).

THEOREM A. *Suppose* P *satisfies the hypotheses of Theorem 1 page 227. Let* $(D: A \to \hat{H}, \gamma)$ *be a* P*-cocone. If* A_0 *is equipotent to a sub-set of* $\bar{H}$, *if* D *takes its values in* $\bar{H}$ *and* γ *in* K', *then* (D, γ) *admits a* (P, H)*-semi-final lift.*

Δ. We first give a formal definition of a semi-final lift, similar to the definition of quasi-surjections. The P-cocones indexed by A are the objects of the comma-category L:

$$(p^A : \hat{H}^A \to K^A) \downarrow (K \hookrightarrow K^A).$$

Let $q: L \to K^A$ be the functor mapping $(\eta, k): (D, \gamma) \to (D', \gamma')$ on η. We identify $\hat{H}$ with the sub-category of L whose objects are the «constant» P-cocones, so that P becomes a restriction of q. Then a (P, H)-semi-final lift of (D, γ) is a reflection of (D, γ) in H. The proof of Theorem 1 shows that q satisfies the conditions of the Proposition 6, whence the result. ∇

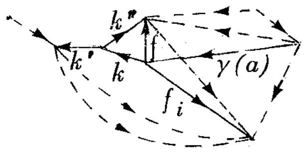
We are going to give a direct proof of this theorem, which mimicks Proposition 6. This leads to a slight modification of the hypotheses (and to a new proof of Theorem 1).

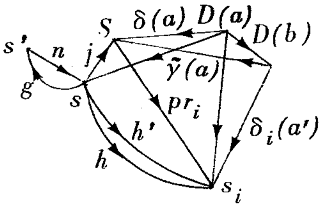
THEOREM B. *Suppose that* P *preserves* $(H, X, \hat{H})$*-kernels and satisfies the conditions of Theorem 1, except that the preliminary conditions 1, 2, 3 are replaced by:*

K'' is a class of monomorphisms of K *containing* $P(X.H_0^{\cdot})$ *and such that each element of* $P(\hat{H}.\bar{H}_0)$ *admits a* (K'', K, K)*-image.*
Let $(D: A \to \hat{H}, \gamma)$ *be a* P*-cocone, where* D *takes its values in* $\bar{H}$. *If* A_0 *is equipotent to a sub-set of* $\bar{H}$, *then* (D, γ) *admits a* (P, H) *semi-final lift.*

Δ . Let I be the class of pairs (f_i, δ_i) such that $\delta_i: D \Rightarrow s_i$ is a cocone with vertex in H and f_i a morphism of K with $f_i \gamma = P\delta_i$. Since $A_0 \hookrightarrow \bar{H}$ and $H.\hat{H}.\bar{H} \subset \bar{H}$, the class I is equipotent to a sub-set of $\bar{H}$; by hypothesis, there exists a product S of $(s_i)_{i \in I}$ in $\hat{H}$ and $P(S)$ is a product of the $P(s_i)$'s. The factors

233.3 ...





$$\delta(a) = [\delta_i(a)]_{i \in I} : D(a) \to S, \quad \text{where } a \in A_0,$$

define a cocone $\delta : D \Rightarrow S$, and the factor $f = [f_i] : u \to P(S)$ satisfies $f\gamma = P\delta$. Let k'' be the (K'', K, K)-image of $f = k''.k$, and $j : s \to S$ the (X, H)-sub-morphism generated by k''; there exists k' such that $P(j).k' = k''$. Since j is a p-injection and

$$P(j).k'.k.\gamma(a) = k''.k.\gamma(a) = f.\gamma(a) = P(\delta(a)),$$

$k'.k.\gamma(a)$ lifts into a unique morphism $\tilde{\gamma}(a) : D(a) \to s$. This defines a cocone $\tilde{\gamma} : D \Rightarrow s$ such that $P\tilde{\gamma} = (k'.k)\gamma$. We say that $\tilde{\gamma}$ is the (P, H)-semi-final lift of (D, γ).

Indeed, for each i we have $\delta_i = (pr_i . j)\tilde{\gamma}$ and $f_i = P(pr_i . j).k'.k$, where $pr_i : S \to s_i$ are the projections of the product. It remains to see the factorization of δ_i is unique. Suppose $h, h' : s \to s_i$ are such that

$$h\tilde{\gamma} = h'\tilde{\gamma} \quad \text{and} \quad P(h).k'.k = P(h').k'.k\ ;$$

they have a $(H, X, \hat{H})$-kernel $n : s' \to s$; $P(n)$ is an equalizer of $P(h)$, $P(h')$. As $P(h)$ and $P(h')$ have the same composite with $k'.k$, this morphism factors through $P(n)$. It follows that $f = P(j).k'.k$ factors through $P(j.n)$; by hypothesis, $P(j.n)$ is in K'' and k'' is an image of f in K'', so that k'' factors through $P(j.n)$. As j is (X, H)-generated by k'' and $j.n \in X$, there exists $g : s \to s'$ such that $(j.n).g = j$; this implies $n.g$ is an identity, hence n invertible and $h = h'$. ∇

COROLLARY 1 *(Existence of colimits). With the hypotheses of Theorem B and if K admits colimits indexed by A, so does H.*

COROLLARY 2. *Let $\mathfrak{M}_0$ and $\hat{\mathfrak{M}}_0$ be universes such that $\mathfrak{M}_0 \in \hat{\mathfrak{M}}_0$. Let $P : \hat{H} \to \hat{\mathfrak{M}}$ be a faithful functor creating canonical limits and $p : H \to \mathfrak{M}$ its restriction to $H = P^{-1}(\mathfrak{M}) \in \hat{\mathfrak{M}}_0$. If P is sub-generating for $\mathfrak{M}$, then:*

- each p-cocone indexed by a category A whose set of morphisms

233.3 ... *is in* $\mathfrak{M}_0$ *admits a p-semi-final lift;*

- *H admits colimits indexed by A.*

(The faithfulness of P is to ensure that an equalizer is a P-injection).

This corollary proves the Note page 232. In more intuitive terms, a concrete functor is a small semi-topological functor ([93], cf. Comment 212.3) as soon as it is the restriction to the universe $\mathfrak{M}_0$ of small sets of a sub-generating functor creating limits relative to the universe $\hat{\mathfrak{M}}_0$ of large sets.

Theorem 3 may also be adapted for semi-final lifts, and be enriched of a reciprocal, as follows:

THEOREM C. *Let $p: H \to K$ be a faithful functor and $(D: A \to H, \gamma)$ a p-cocone. Suppose K admits pushouts and there exist a coproduct S of $(D(a))_{a \in A_0}$ in H, a coproduct e of $(pD(a))_{a \in A_0}$ in K. Then (D, γ) admits a p-semi-final lift $\bar{\gamma}: D \Rightarrow s$ iff there exists a p-quasi-surjection $j: S \to s$ determined by l (defined below).*

Δ. We denote by $\hat{v}_a: D(a) \to S$ and $v_a: pD(a) \to e$, $a \in A_0$, the co-projections into the coproducts. The $(\gamma(a))$'s and the $P(\hat{v}_a)$'s have factors k and k' through the coproduct e, hence a pushout in K:

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, "l'"'] \\ p(S) \arrow[u, "l"] & e \arrow[l, "k'"] \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd}$$

1° There is a one-to-one correspondance between the class C of pairs (δ, d) where $\delta: D \Rightarrow s'$ is a cocone and $p\delta = d\gamma$, and the class B of pairs (h, f) where $h: S \to s'$ is a H-morphism and $p(h) = f.l$.

Indeed, to (δ, d), we associate (h, f), where h is the factor of the $\delta(a)$'s through the coproduct S and f the factor of $(p(h), d)$ through the pushout $(*)$; this last factor exists thanks to the equalities:

$$p(h).k'.v_a = p(\delta(a)) = d.\gamma(a) = d.k.v_a$$

for any a in A_0, which imply $p(h).k' = d.k$.

Conversely, the pair (h, f) in B is associated to $(\delta, f.l')$, where $\delta(a) = h.\hat{v}_a$ for each a; this defines a cocone $\delta: D \Rightarrow s'$ because p is faithful and $p\delta$ is the cocone $(f.l')\gamma$, due to the relations:

233.3 ... $p(\delta(a)) = p(h).p(\hat{v}_a) = f.l.k'.v_a = f.l'.k.v_a = f.l'.\gamma(a)$.

2° If (δ, d) and (δ', d') are in C, a morphism $g: s'' \to s'$ satisfies $\delta = g\delta'$ and $d = p(g).d'$ iff for the corresponding pairs (h, f) and (h', f'), we have $h = g.h'$ and $f = p(g).f'$.

Indeed, $\delta = g\delta'$ implies $h = g.h'$ (unicity of the factor through the coproduct) and $f = p(g).f'$, since

$$f.l = p(h) = p(g).p(h') = p(g).f'.l,$$
$$f.l' = d = p(g).d' = p(g).f'.l',$$

and the factor through the pushout is unique. The converse is evident.

3° It follows that $(\tilde{\gamma}, c)$ is «universal in C» (i.e. $\tilde{\gamma}$ is a p-semi-final lift of γ) iff the corresponding (j, f) is «universal in B» (i.e. j is a p-quasi-surjection determined by l). ∇

COROLLARY 1. *Let $p: H \to K$ be a faithful functor admitting quasi-quotients. If K admits pushouts and coproducts indexed by A_0 and if H admits coproducts indexed by A_0, then every p-cocone indexed by A admits a p-semi-final lift.*

COROLLARY 2 *(Criterion for semi-topologicity). Let $p: H \to K$ be a faithful functor where K is cocomplete. Then p is a (small) semi-topological functor iff p admits quasi-quotients and H (small) coproducts.*

COROLLARY 3 *(Converse of Theorem 3). Let $p: H \to K$ be a faithful functor, where K admits pushouts. Let $D: A \to H$ be a functor such that there exist a coproduct S of $D(a)$, $a \in A_0$ in H, a coproduct e of $pD(a)$, $a \in A_0$ in K, and colimit-cones $\tilde{\gamma}: D \Rightarrow s$ and $\gamma: pD \Rightarrow e$. Then the factor $j: S \to s$ of the $\tilde{\gamma}(a)$'s through S is a p-quasi-surjection.* (Indeed $\tilde{\gamma}$ is a p-semi-final lift of (D, γ).)

234.1. In /63, 66/ they are called H-structured categories.

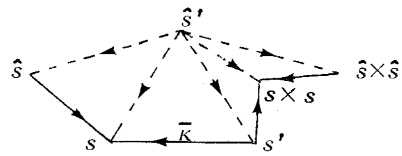
234.2. This condition is added for any homomorphism to be a functor, so that $\mathfrak{S}'(p)$ is full in $\bar{\mathfrak{N}}(p)$; this is needed page 246.

235.1¶ A p-injection may not be a P-injection when it is not an equalizer; hence $\mathfrak{U}(p)$ may not be a full sub-category of $\mathfrak{U}(P)$ in the two cases $\mathfrak{U} = \bar{\mathfrak{N}}$ or $\bar{\mathfrak{N}}'$ (in which the set of composable pairs is not defined as a limit). So, *in all the sequel of this paper, for both these cases, we* *add the hypothesis :*

(1) P is a functor such that $p_\iota^{\ulcorner} \subset P^{\ulcorner}$

(it is satisfied if P is a weakly sub-spreading functor).

235.2¶ The assertions 1-a for $\mathfrak{U} = \overline{\mathfrak{N}}'$ and 1-d are not proved in / 66 / (where only the assertions 2 are proved as well as the fact that $\hat{s}' \vdash s'$ on $\hat{C}^\cdot * \hat{C}^\cdot$ determines a $\hat{p}_{\mathfrak{N}'}$-sub-structure of e). Their proof (cf. / 102 /, Proposition 1-1, Appendix, where some of the results of this paper are refined) lies on the construction of a sub-structure $\hat{s}'$ of s' on $\hat{C}^\cdot * \hat{C}^\cdot$ as the limit of the diagram :



236.1. R. 3 i.o. 13 .

236.2. R. 10 i.o. 8 .

237.1. For the definition of the (maximal) enlargement, cf. Comment 29-2.

237.2¶ The proof is too brief in the case $\mathfrak{U} = \mathfrak{N}$ or $\mathfrak{N}'$, where the only criterion for the existence of sub-structures is condition 2 page 235. However, by hypothesis the full sub-category $\mathfrak{V}(p)$ of $\mathfrak{U}(p)$ must be included in $\overline{\mathfrak{N}}(p)$, so that the object of composable pairs s' of $(C^\cdot, s)$ is a sub-structure of $s \times s$, and similarly $\bar{s}' \vdash \bar{s} \times \bar{s}$. It follows $\bar{s}' \vdash s'$ since $\bar{C}^\cdot * \bar{C}^\cdot \subset C^\cdot * C^\cdot$. Hence Condition 2, page 235, implies that $(\bar{C}^\cdot, \bar{s})$ is a $\hat{q}_{\mathfrak{U}}$-sub-structure of $(C^\cdot, s)$.

238.1. For the (non evident) proof of $\mathfrak{U}(p) \in \hat{\mathfrak{M}}_0$, cf. / 109 / , page 311.

238.2. If $\mathfrak{U}(p) = \mathfrak{N}(p)$ or $\overline{\mathfrak{N}}(p)$ and $\mathfrak{V}(p) \subset \overline{\mathfrak{N}}'(p)$, then $\mathfrak{V}(p)$ is not a full sub-category of $\mathfrak{U}(p)$. However *Theorem 1 extends in this case* ; this is clear on the sketched construction of the quasi-quotient of e (second part of the proof); indeed, $\bar{S}$ is both a product in $\mathfrak{U}(P)$ and $\mathfrak{V}(P)$, and $\hat{e}$ is a $\hat{P}_{\mathfrak{U}}$- and a $\hat{P}_{\mathfrak{V}}$-sub-structure of e (Proposition 3).

241.1. R. $M(C)^\cdot$ désigne le demi-groupe i.o. $M(C)$ désigne le monoïde .

Notice that all the results are valid either if $M(C)$ is the free monoid $\bigcup_{n \geqslant 0} C^n$ or the free semi-group $\bigcup_{n > 0} C^n$ generated by C, except Theorem 4.6 and its corollaries, where $M(C)$ has to be a semi-group (cf. Comment 263.6).

243.1. R. $M(C)^{\cdot}$ i.o. $M(C^{\cdot})$.

243.2. R. p i.o. P .

244.1. R. $[C]^{\cdot} * [C]^{\cdot}$ i.o. $C^{\cdot} * C^{\cdot}$.

245.1. R. $\mathcal{F}_{o} . I_{r(C^{\cdot})}$ i.o. $I_{r(C^{\cdot})}$.

245.2. R. $\mathcal{F}_{\mathcal{G}^{o}} . I_{r_{\mathcal{G}}(C^{\cdot})}$ i.o. $I_{r_{\mathcal{G}}(C^{\cdot})}$.

245.3. These theorems assert the existence of the free groupoid on a graph and of the categories of fractions; cf. Propositions 16, 17 /66/.

245.4. R. S i.o. $S^{\cdot}$.

246.1. Add formée des homomorphismes de $M(C)^{\cdot}$ vers un objet de $\mathfrak{S}'$ compatibles avec $r_{\mathfrak{S}}(C^{\cdot})$.

246.2. R. La preuve du Corollaire 3 i.o. Le corollaire .

246.3¶ R. $\mathfrak{S}'$-compatible i.o. compatible .

This correction is important: the quotient semi-group Q of $M(C)^{\cdot}$ by the compatible relation generated by $r_{\mathfrak{S}}(C^{\cdot})$ may have idempotents which are not identities, so that $S(C^{\cdot})$ is a quotient of Q. For instance, if $C^{\cdot}$ is the monoid with a unique non-identity morphism f and f is idempotent, then $Q = C$ while $S(C^{\cdot})$ is reduced to its identity. However if $C^{\cdot}$ is a groupoid, Q is a group and $S(C^{\cdot}) = Q$.

246.4+ Higgins [49] gives explicit constructions of $S(C)$ when C is a groupoid. For instance, $S(C)$ may be defined as the set of the sequences $g_n \dots g_1$ where $g_i \in C$ is not an identity and, for $i \leq n$, the composite $g_i \cdot g_{i-1}$ is not defined in C. The composition is obtained by juxtaposition followed by reduction to such a sequence: identities are erased and composites computed whenever possible. In this case, Joubert [57] gives still another construction of $S(C)$.

246.5. Replace by $s' = z'(s')$.

247.1+ *Functors with a maximal section are sub-spreading:*

To say z is a maximal section of $q: H \to K$ means that z is a right adjoint of q and the co-unit of the adjunction is the identity. It follows that z, and therefore $z' = z\,p$, preserve products; this is a shorter proof of the first statement of Proposition 1; the second one may be de-

247.1 ... duced from the more general

PROPOSITION. *Let $q : H \to K$ be a functor and z a right adjoint of q such that the co-unit $a(u) : qz(u) \to u$ be monic for each object u of K. Then $z(k)$ is a q-injection for each k in K.*

Δ.

$$\begin{tikzcd} z(u') & \\ & s \arrow[ul, "g"'] \arrow[dl, "f'"] \\ z(u) \arrow[uu, dashed, "z(k)"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u' & \arrow[l, "a(u')"'] \cdot & \\ & & q(s) \arrow[ul, dashed, "q(g)"'] \arrow[dl, "f"] \\ u \arrow[uu, "k"] & qz(u) \arrow[l, "a(u)"] \arrow[uu, dashed] & \end{tikzcd}$$

To prove the universal property of $z(k)$, let $g : s \to z(u')$ be such that $q(g) = qz(k).f$. Since $a(u).f : q(s) \to u$ there exists a unique

$$f' : s \to z(u) \quad \text{satisfying} \quad a(u).q(f') = a(u).f\ ;$$

it follows $q(f') = f$, because $a(u)$ is monic. $z(k).f'$ and g are morphisms $s \to z(u')$ such that

$$q(z(k).f') = q(z(k)).f = q(g)\ ;$$

so they are equal, $z(u')$ being cofree. Hence $z(k)$ is a q-injection. ∇

COROLLARY. *If $p : H \to \mathcal{M}$ is a functor creating canonical pullbacks and admitting a maximal section z, then p is sub-spreading.*

Δ. Let s be an object of H and M a non-void sub-set of $p(s)$. If $k : M \to p(s)$ is the insertion, $z(k)$ is a p-injection (by the proposition) and we have the canonical pullback

$$\begin{tikzcd} zp(s) & z(M) \arrow[l, "z(k)"'] \\ s \arrow[u, "h"] & \hat{s} \arrow[l, "\pi"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

where $p(h)$ is an identity. Hence $\pi : \hat{s} \to s$ is a p-injection whose image $p(\pi)$ is the insertion k.

This corollary proves that *in Proposition 2, Theorem 3 and its corollary, the hypothesis p est ⌐-étalant must be erased*, since it is always verified (cf. also / 102 /, Appendix).

247.2. It is clearer to define $z_{\mathfrak{U}}$ directly (and not $z'_{\mathfrak{U}}$) as follows: it maps

$$C^{\cdot} \text{ onto } \begin{cases} (C^{\cdot}, z(C), z(C^{\cdot} * C^{\cdot})) & \text{if } \mathfrak{U} = \mathfrak{N} \text{ or } \mathfrak{N}' \\ (C^{\cdot}, z(C)) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$(\hat{C}^{\cdot}, f, C^{\cdot})$ onto $(\hat{C}^{\cdot}, z(f), C^{\cdot})$.

Since z preserves products and maps anything on a p-injection $z\mathfrak{U}(C^{\cdot})$ is an object of $\mathfrak{U}(p)$. If e is an object of $\mathfrak{U}(p)$ on $C^{\cdot}$ the identity of C defines a morphism $e \to z\mathfrak{U}(C^{\cdot})$.

248.1. Erase the first sentence (satisfied thanks to Comment 247.1).

248.2. R. $\mathfrak{K}(p)$ i.o. $\mathfrak{K}'(p)$.

Add: Nous supposons $p_i^{\ulcorner} \subset P_i^{\ulcorner}$ lorsque $\mathfrak{U}$ ou $\mathfrak{C}$ est $\mathfrak{N}$ ou $\mathfrak{N}'$.

249.1. This condition means that P preserves the colimit of an increasing sequence of P-sub-structures of s, since this colimit always exists (cf. Corollary 2, Theorem 3.2).

249.2+ *For* $\mathfrak{C} = \mathfrak{K}'$ *or* $\bar{\mathfrak{N}}'$ *the term countably may be omitted.*

Indeed (cf. / 102 /, Proposition 3-2, Appendix), with the notation of the proof, page 249, let us prove that $C_1 = P(s_1)$ is already closed by the source and target maps, so that the construction ends at the first step and $(C_1^{\cdot}, s_1)$ is the sub-structure of $(C^{\cdot}, s)$ generated by M. As P creates pullbacks, there exists a pullback

$$\begin{tikzcd} s_1 & \sigma \arrow[l] \\ s \arrow[u, "\iota"] & s_1 \arrow[l, "\alpha", "s"'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

where

$$P(\sigma) = \{ x \in P(s_1) \mid \alpha(x) \in P(s_1) \} ;$$

since $s_1 \vdash s$, we also have $\sigma \vdash s_1$. Now $P(\sigma)$ contains the sub-neo-category M_1 of $C^{\cdot}$ which generates s_1, and this implies $s_1 \vdash \sigma$. Hence $s_1 = \sigma$ and $P(s_1)$ is closed by α. Similarly it is closed by β. ∇

252.1. R. $M(\underline{j})(M(C))$ i.o. $M(\underline{j})(C)$.

252.2. P_{ps} is also considered in / 69, 66 /. Notice that the description of P_{ps}-sub-structures implies that the supplementary hypothesis (I) introduced in Comment 235.1 is satisfied and the results are valid.

253.1. This terminology is odd, since $\mathfrak{f}$-sub-inductive is stricter than $\mathfrak{f}$-inductive. We recall that the relative join $x' \overset{x}{\cup} x''$ is the join of x', x'' in the poset formed by the elements lesser than x.

253.2. A quasi-inductive map preserves arbitrary relative joins.

255.1. This is a particular case of the assertion of Comment 249.2.

255.2. Add et $A \subset \hat{K}$.

255.3. Quotient ordered categories (with more or less conditions) are constructed in /66/, in Joubert [57] and in S. Legrand [68].

In / 102/ $\mathfrak{f}$-inductive categories are generalized into ζ-inductive categories, where ζ is any ordinal. Thanks to the notion of a ζ-sub-generating functor, Theorem 4 and its corollary are still proved to be valid in this case.

256.1. More intuitively, a $(\mathfrak{O}(p), \hat{p}\mathfrak{q})$-quasi-quotient of $(C^{\cdot}, s)$ by r may be constructed:

- as a quasi-quotient of the $\mathfrak{O}(p)$-reflection of the p-structured graph $([C^{\cdot}], s)$,

- as a quasi-quotient by a non-identifying identities equivalence of the $\mathfrak{O}(p)$-reflection of the structured graph quasi-quotient by r of $([C^{\cdot}], s)$.

256.2. R. $\hat{p}^H_{\mathfrak{K}}(\bar{h}')$ i.o. $\hat{p}^H_{\mathfrak{K}}(h')$.

258.1. R. (twice) $\tilde{C}$ i.o. $\bar{C}$.

260.1. More intuitively, a structured groupoid quasi-quotient of $(C^{\cdot}, s)$ by r may be constructed as a quasi-quotient of the free structured groupoid on a symmetric of the underlying structured graph.

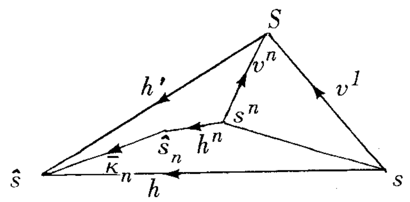
261.1. R. monoïdes i.o. demi-groupes .

261.2. R. demi-groupes i.o. monoïdes .

261.3+ $\bar{\mathfrak{N}}_m(p)$ is the category of *p-structured semi-groups*. Its objects are the pairs of a semi-group $C^{\cdot}$ and an object s of H over C such that the composition κ lifts into a morphism $s \times s \to s$. The objects of $\mathfrak{G}'(p)$ are those p-structured semi-groups such that $C^{\cdot}$ is a monoid without idempotents other than the identity 1 and that the constant map on 1 lifts into a morphism $s \to s$.

$(\hat{C}^{\cdot}, j)$ is a $(\bar{\mathfrak{N}}_m(p), \mathfrak{N}_m(p), \mathfrak{L}_m(p))$-projection iff $\hat{s} = \beta(j)$ is a structure on $\hat{C}$ (without any condition) and every morphism from $s = \alpha(j)$ to a p-structured semi-group factors uniquely through j ; such a projector is constructed in Theorem 4. Then $(\hat{C}^{\cdot}, \hat{s})$ is a p-structured semi-group iff it is a free object generated by s with respect to the forgetful functor $\bar{\mathfrak{N}}_m(p) \to H$ (as it is in Corollary 1, Theorem 4). Notice that the projection constructed in Theorem 4 is on $M(p(s))$. More generally, there exists a projection $(M^{\cdot}, S')$ of s as soon as there exists a coproduct S' of the s_n's on a set M equipped with a bijection $f: M(p(s)) \to M$. Indeed, f lifts into an isomorphism $S \to S'$ in the enlargement $\tilde{p}$ of p (cf. Comment 29.2), and $(M(p(s))^{\cdot}, S)$ is a projection vz. $\tilde{p}$. Now $(M^{\cdot}, S')$ is deduced from $(M(p(s))^{\cdot}, S)$ by the isomorphism f. So Theorem 4, and its Corollary, extend to this case.

263.1. R. où $\bar{\kappa}_1 = \hat{s}$ admet un facteur i.o. admet une somme . We have



263.2. This corollary says (in a complicated way) that $(M(C)^{\cdot}, S)$ is the free p-structured semi-group generated by s. Its hypothesis is satisfied if the partial functor $S \times - : H \to H$ preserves countable coproducts, e.g. if H is cartesian closed.

263.3. R. demi-groupe i.o. monoïde .

263.4. R. dénombrables commutant aux produits, la détermination des monoïdes structurés quasi-quotients d'un graphe .

263.5. R. demi-groupes i.o. monoïdes .

263.6.+ *Free structured monoids :*

A *p-structured monoid* is a p-structured category on a monoid. Let $\hat{M}(C)$ be the free monoid generated by C obtained by adding to $M(C)$ the «void» word as an identity. It may be equipped with the coproduct $\hat{S}$ of the s^n, $n \geq 0$, where s^0 is a terminal object a of H such that $p(a) = \{\emptyset\}$. The proofs of Theorem 4 and its corollary still fit in this case, provided there exists a morphism $\bar{\kappa}_0 : a \to \hat{s}$ mapping $\emptyset$ on 1 whenever $(G^{\cdot}, \hat{s})$ is a p-structured monoid. Hence:

PROPOSITION. *Suppose H «contains the constants» and let s be*

263.6 ... *an object of* H *on* C *such that there exists a coproduct* $\hat{S}$ *of the* s_n, $n \geq 0$ *on* $\hat{M}(C)$. *Then:*

1º *Every morphism from* s *into a* p-*structured monoid (resp. into an object of* $\mathfrak{S}'(p)$) *factors uniquely through* $(\hat{M}(C), \hat{S})$.

2º *If* $\hat{S} \times \hat{S}$ *is a coproduct of* $s^n \times s^{n'}$, $n, n' \geq 0$, *then* $(\hat{M}(C), \hat{S})$ *is the free* p-*structured monoid (resp. the free object of* $\mathfrak{S}'(p)$) *generated by* s.

The hypothesis is satisfied if p is a sub-spreading functor. However, this condition is strong enough and it is better to avoid it by considering the free semi-group i.o. the free monoid.

264.1. Quasi-categories are «categories without the identity axiom»: $f.\alpha(f) = f = \beta(f).f$.

264.2. More briefly: $\hat{L}([C])$ is the free quasi-category on $[C]$, with respect to the forgetful functor $\mathfrak{F}' \to \mathfrak{G}$.

The consideration of $\hat{L}[C]$ has motivated the introduction of the notion of a quasi-category. Indeed, $\hat{L}[C]$ is more easily structured than the category of paths (cp. Proposition 6, Examples page 274).

266.1+ *Internal quasi-categories:*

The category of quasi-categories is equivalent to the category of set-models of the sketch σ_{qc} similar to the sketch of categories (cf. Comment /63/, 55.2) except that $\kappa\gamma_\alpha$ and $\kappa\gamma_\beta$ are not required to be identities. The models of σ_{qc} in any admitting-pullbacks category H are called *internal quasi-categories in* H. Results on internal categories are easily adapted to quasi-categories.

Let $p: H \to \mathfrak{M}$ be a concrete functor creating canonical pullbacks. The p-structured quasi-categories are the concrete internal quasi-categories in H, i.e. those internal quasi-categories which are mapped by p on a usual quasi-category. This definition is a bit more general than Definition 3 which requires that there exists a product $s \times s$, where s is the object of morphisms: however both definitions agree when p creates finite canonical products (as here).

If p creates isomorphisms, the category of p-structured quasi-categories is equivalent to the category of internal quasi-categories.

268.1. R. 1 i.o. 2 .

268.2. It must be noticed that $p(h)$ only defines a homomorphism from the graph C to the graph underlying D, but it may not be compatible with the compositions of $C^{\cdot}$ and $D^{\cdot}$; indeed, $f.\alpha(f) = f$ in $C^{\cdot}$, while $p(f).p(\alpha(f))$ may be different from $p(f)$ in $D^{\cdot}$. The «graph» notation would be clearer.

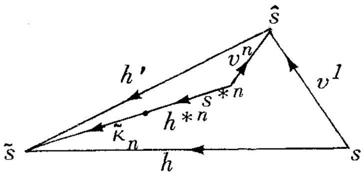
268.3. R. 2 i.o. 1 .

268.4. R. $\mathcal{F}'(p)$ i.o. $\mathcal{O}(p)$.

By definition, $\hat{e}$ is an object of $\mathcal{K}''(p)$ (without any condition) such that each homomorphism from e (considered as a structured graph) to the graph underlying a p-structured quasi-category (D, s') factors uniquely into a morphism $\hat{e} \to (D, s')$. Then $\hat{e}$ is a p-structured quasi-category iff $\hat{e}$ is a free object generated by the graph e with respect to the forgetful functor $\mathcal{F}'(p) \to \mathcal{G}(p)$. For the construction of $\hat{e}$, cf. Theorem 4 and Proposition 6.

This theorem means that the structured category (resp. groupoid) quasi-quotient of an object of $\mathcal{K}''(p)$ may be constructed as a quasi-quotient of the free structured quasi-category on its underlying graph.

270.1. R. où $\tilde{\kappa}_1 = \tilde{s}$ admet un facteur i.o. admet une somme .



270.2¶ In Theorem 4, $\hat{L}(e)$ is constructed when there exists a coproduct $\hat{s}$ of s^{*n}, $n \in \mathrm{N}$, on $\hat{L}[C]$. If H is not saturated over $\mathfrak{M}$, to say that p admits countable coproducts only implies that this family has a coproduct $\hat{s}'$ on a set L equipped with a bijection $g: \hat{L}[C] \to L$. However $\hat{s}$ exists in the enlargement $\tilde{p}$ of p (cf. Comment /63/, 29. 2) and $(\hat{L}([C]), \hat{s})$ has the same universal property vz. $\tilde{p}$. It follows that its image $(L, \hat{s}')$ by g is a $(\mathcal{F}'(p), \mathcal{K}''(p), \mathcal{L}'(p))$-projection of e. Denoting it yet by $\hat{L}(e)$, the end of this section is valid.

270.3. $\hat{L}(e)$ is then the free structured quasi-category generated by e.

Though the proof is given when $\hat{L}(e)$ is on $\hat{L}[C]$, it extends to the general case as in Comment 270.2.

271.1. R. Corollary 2 i.o. corollary .

271.2. Add, after an alinea :

les $e \in \mathfrak{U}(p)_0$ tels que le morphisme $\bar{\kappa} : s' \to s$ structurant la loi de composition soit dans H'', si $\mathfrak{U} = \mathfrak{N}$ ou $\bar{\mathfrak{N}}$.

Hence $\bar{\mathfrak{N}}_1(p) = \bar{\mathfrak{N}}_2(p)$ and $\mathfrak{N}_1(p) = \mathfrak{N}_2(p)$.

272.1. R. $3_i^!$-6 i.o. $4_i^!$-6 and omit $4_i^!$-7 .

(This theorem proves how a statement may become un-readable when concision is sought at any price !)

272.2. R. 5-7 i.o. 5 .

272.3. R. 14, Corollaire 2, i.o. 15 .

272.4. R. p_γ i.o. p .

Condition (E_3) (called (E) in /63/ I-2) is the transport by isomorphism property».

272.5. p_γ well-faithful means p amnestic.

273.1. R. 3-2 i.o. 3-3 .

273.2. Replace all the line by :

et on a $\bar{\iota}.L(\bar{J}_{\mathcal{F}}) = L(\bar{J}'_{\mathcal{F}})$; ainsi $\hat{p}_{\mathcal{F}}(\bar{\iota})$ est une surjection ;

274.1. R. Corollaire 1 i.o. corollaire .

274.2. R. 3_1 i.o. $3_1^!$.

274.3. R. 1, 2 et 3 i.o. 3 et 4 .

275.1. The objects of $\mathfrak{S}'_1(p)$ are only monoids of $\mathfrak{S}'$ equipped with the trivial order.

In [57] , Joubert also constructs a reflection of an ordered groupoid into a group and uses it to obtain a locally simple foliation with a given transversal holonomy pseudogroup.

275.2. R. 3_1-7 (resp. 3_1-6) i.o. 3_1-6.

275.3. R. 7 i.o. 6 .

275.4. Erase 2 .

276.1+ *Multiple category reflection of a multiple neocategory:*

The method used here also leads to the n-fold category (or groupoid reflection of an n-fold neocategory $e = (\overset{\circ}{C}{}^1, \ldots, \overset{\circ}{C}{}^n)$ (this means : $(\overset{\circ}{C}{}^{i}, \overset{\circ}{C}{}^{j})$ is a double neocategory for $i < j \leq n$). For each $k \leqslant n$, we define a category structured by an $(n-1)$-fold neocategory $e_k = (C_k^{\circ k}, \dots, C_k^{\circ n}, C_k^{\circ 1}, \dots, C_k^{\circ k-1})$ with $C_k^{\circ i}$, $i < k$ categories by :

$e_0 = e$ and e_{k+1} is the category (resp. groupoid) structured by an $(n-1)$-fold neocategory reflection of $(C_k^{\circ k+1}, \dots, C_k^{\circ n}, C_k^{\circ 1}, \dots, C_k^{\circ k})$. Then $\hat{e} = e_n$.

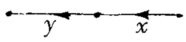
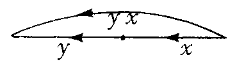
S. Legrand [68] has given a more intricate construction of the multiple category reflection of a multiple neocategory.

276.2. R. Corollaire 1 i.o. corollaire .

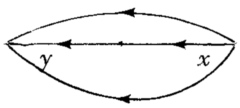
276.3. R. 1 i.o. 2 .

276.4. R. 6 i.o. 7 .

277.1¶ $\overline{e}$ is really on $[\overline{C}]^{\cdot}$, but we have to prove it. Indeed, this does not result from Corollary 2, Proposition 1-6, since $p_{\mathcal{N}'}$ does not preserve pushouts. An example is the cokernel pair of the insertion from

$A =$  to $B =$ 

it is reduced to the identity of B while the cokernel of the underlying map is the insertion of B into



However, we have :

PROPOSITION A. $p_{\mathcal{N}'}$ *preserves the pushout of the insertions from* $A^{\cdot}$ *to* $B^{\cdot}$ *and* $C^{\cdot}$ *when* A *is stable into* $B^{\cdot}$ *and* $C^{\cdot}$.

Δ . Their pushout in the category of sets is $D = B \amalg C / r$ where r is the equivalence :

$$(a, i) \sim (a, j) \quad \text{for } a \text{ in } A, \ i, j = 0 \text{ or } 1.$$

Since A is stable into $B^{\cdot}$ and $C^{\cdot}$, this equivalence is bicompatible on the coproduct neocategory $B^{\cdot} \amalg C^{\cdot}$, so that there exists a quotient neocategory $D^{\cdot}$ of this coproduct by r . Hence the pushout :

$$\begin{tikzcd} D^{\cdot} & B^{\cdot} \arrow[l] \\ C^{\cdot} \arrow[u] & A^{\cdot} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} \quad . \ \nabla$$

PROPOSITION B. *If* $e = ([C], C^{1})$ *is a* $p_{\mathcal{N}'}$*-structured graph, then*

$[C]_0$ is stable in $C^{\perp}$ and the $p_{\mathfrak{N}'}$-symmetric $\overline{e}$ of e is on the symmetric $[\overline{C}]$ of $[C]$.

Δ. If y and x are vertices of $[C]$ and if $y \perp x$ exists, we have :

$$a(y \perp x) = a(y) \perp a(x) = y \perp x,$$

because the source map a of $[C]$ defines a neofunctor $C^{\perp} \to C^{\perp}$, so $y \perp x$ is also a vertex. It follows that the pushout $\overline{C}$ of the insertions of $[C]_0$ into C and into the opposite graph of $[C]$ lifts into a pushout $\overline{C}^{\perp}$ in $\mathfrak{N}'$. So $([\overline{C}], \overline{C}^{\perp})$ is the $p_{\mathfrak{N}'}$-symmetric of e.

277.2. R. $\tilde{e}'$ i.o. $\tilde{e}$.

277.3. R. $\tilde{e}$ i.o. $\tilde{e}'$.

277.4. R. 1 i.o. 3 .

277.5. $(\overline{k}, \overline{h})$ is a $(J(p), \hat{p}_{\mathfrak{F}})$-short exact sequence, or else, $\hat{e}$ is a $(J(p), \hat{p}_{\mathfrak{F}})$-quotient structure of e by e_1 iff $\overline{h}: e_1 \to e$ is a $\hat{p}_{\mathfrak{F}}$-monomorphism, $\overline{k}: e \to \hat{e}$ is a $\hat{p}_{\mathfrak{F}}$-epimorphism and $\overline{k}$ is universal among the p-structured functors $\overline{g}: e \to e'$ such that $\overline{g}.\overline{h}$ is in $J(p)$.

$$\begin{tikzcd} \hat{e} \arrow[d] & & \\ e' & e \arrow[ul, "\overline{k}"'] \arrow[l, "\overline{g}"] & e_1 \arrow[l, "\overline{h}"'] \end{tikzcd}$$

278.1. R. $\hat{C}^{\cdot}$ i.o. $N(\hat{C}^{\cdot})$.

278.2. Cf. also / 102 / .

278.3+ Existence theorems for *colimits of structured categories* may be deduced from the preceding results : With the hypotheses of Corollary, Theorem 1, *$\mathfrak{F}(p)$ admits «small» colimits. If p admits a maximal section, the forgetful functor $\mathfrak{F}(p) \to \mathfrak{F}$ preserves these colimits.*

Moreover, the construction of colimits as quasi-quotients of coproducts and the different constructions of quasi-quotient structured categories given in Sections 4-7 lead to explicit descriptions of colimits in $\mathfrak{F}(p)$, and if p creates isomorphisms, in the equivalent category of internal categories in H.

ON / 112 / : CATEGORIES DE FONCTEURS STRUCTURES.

This Note is a brief summary of / 109/.

ON / 109 / : CATEGORIES DE FONCTEURS STRUCTURES.

282.1. Cf. /63/ Comment 55.2.

283.1. Cf. /66/, where this notion is introduced and the properties recalled here are proved.

283.2. p_γ well-faithful means that p is amnestic.

283.3. The last sentence is not useful since p is faithful.

283.4. The usual terminology is $T: s' \Rightarrow F$ is a cone, or a limit-cone.

284.1. This comes from the fact that $g: s' \to S$ satisfies $h.m.g = h'.m'.g$ iff $p(g)$ factors through the factor w of (v, v').

284.2. The faithfulness of p implies $h.j = h'.j$.

285.1. This isomorphism is the «diagonal embedding».

285.2. $\mathfrak{N}(p)$ is used page 319 with another sense. In our more recent papers, we adopted the standard exponential notation $p^C: H^C \to K^C$. Notice that in H^C the source C and the target H are ordered in the way we find more natural, but is opposite to the order commonly used to denote Hom functors.

288.1. Cf. /66/ Section 3-I and /63/ Comment 29.2.

289.1. This very convenient hypothesis is not too restrictive: if p is a concrete functor which does not create isomorphisms, it may be replaced by its enlargement (cf. /63/ Comment 29.2) and the constructions done in the enlargement are transported back into p by isomorphisms, since the sources of p and of its enlargement are equivalent.

290.1. This last assertion proves that this definition coincides with the definition given in /63, 100/, when p creates canonical products (as it is assumed in these papers).

290.2. Cf. also Theorem 11-II /63/.

293.1. When p creates finite products, this is Theorem 11-II / 63/ (the proof is similar).

294.1. When p creates finite products, the first assertion is proved in Theorem 14-II / 63/, and the second in Theorem 13-II / 66/.

294.2. R. le corollaire 3 de la i.o. la .

297.1. The difference with Proposition 5 is that hypotheses on p are replaced by stronger hypotheses on C'. This proposition comes from a general existence theorem for sub-sketched structures / 106/.

298.1+ The functors $\hat{p}^{o}$, $\hat{p}_{H}$ and $\hat{p}''$ are the evaluation functors (called foncteurs d'omission by Lair [62]) corresponding to the objects 0, 1, 2 of the sketch of categories (cf. Comment 55.2), if a p-structured category is identified to an internal category in H. Hence this proposition comes from a general existence theorem for limits of sketched structures (cf. / 106/ and [62]); only some of its particular cases are proved in / 63, 66, 100/ (with stronger hypotheses).

The first part of the proof consists in deducing from $F: K \to \mathcal{F}(p)$, an internal category in the functor category H^K («drawn» on the diagram at the right). More generally, we have $Cat(H)^K \approx Cat(H^K)$, where $Cat(H)$ is the category of internal categories in $H^{\cdot}$ (which is equivalent to $\mathcal{F}(p)$ since p creates isomorphisms / 104/).

299.1. This last assertion uses the fact that J is monic is H^K since it is a pointwise monic (it is a p^K-injection by Proposition 5.1).

301.1. R. $\overline{p(h)}$ de i.o. de .

302.1. This proposition refines the preceding one; the analogous result for internal categories follows from the fact that the sketch of categories is generated by pullbacks from 1 and by equalizers from 2.

304.1. Cf. also / 100/ Section 2, where this notion is introduced.

304.2. Add $E \neq \emptyset$. (It is called sub-generating functor for $(\mathfrak{M}, X, H)$, in / 100/.)

305.1. Add $\beta(j) = S$ et .

This proof is similar to the proof of Proposition 2-2 / 100/ .

306.1. R. $E \neq \emptyset$ i.o. E.

This proposition is Corollary Proposition 2-2 / 100/.

306.2. R. $E \neq \emptyset$ i.o. E .

307.1. R. si $\emptyset \neq E$ i.o. si E .

307.2. This proposition has the same conclusion as the Proposition 5-2, but P creates equalizers is replaced by P is sub-generating.

308.1. R. si $\emptyset \neq K$ i.o. si K .

308.2. This is Proposition 3-2 / 100/.

309.1. The (non-countability) assertion of this proposition is proved in

Theorem 1-5 / 100 /, but with the stronger hypothesis that P creates finite limits; the existence of pullbacks then renders the construction much simpler.

309.2. R. $E \neq \emptyset$ i.o. E .

311.1. The first assertion is corollary, Theorem 1-5 / 100 / ; the second one may be deduced from it (cf. / 100 / Comment 278.3). We recall the fine constructions of quasi-quotient structured categories in / 100 /.

311.2. Cf. / 100 /, Theorem 2-2 and Corollary 2, Theorem 3-2 where these theorems are first given.

315.1. When p creates finite limits, structured natural transformations are defined in / 64 /, Section 2, as structured functors to a structured category of quartets; the equivalence between these notions is given in Propositions 7, 8 / 64 /, which are similar to Propositions 1, 2 (cf. also Corollary Proposition 3 page 318). However, if p does not create pullbacks, $(\boxminus C^{\cdot}, \square s)$ may not be a structured category, so that the definition adopted here is more general.

316.1. A double p-structured category is just a $\hat{p}$-structured category.

316.2. When p creates finite limits, this proposition reduces to Theorem 15-II / 63 / ; in this case the proof is simpler since $(\boxminus C^{\cdot}, \square s)$ appears as a sub-category of the product structured category of $(C^{\cdot}, s)^2$ with the indiscrete structured category on s.

319.1+ When p creates finite limits, $\mathfrak{N}(p)^{\square}$ is constructed in / 64 /, Section 2 (and denoted by $\mathfrak{N}([H])$); in this paper, the double category of squares of the 2-category $\mathfrak{N}(p)$ (called structured quintets) is defined, but oddly enough, its sub-2-category is not mentioned explicitly.

If p creates pullbacks, Corollary Proposition 3 means that $\mathfrak{N}(p)$ *is a representable 2-category* (in Gray's sense [39]) a representation of e being $\square e$. More generally, if H is a category admitting pullbacks, the 2-category of internal categories in H is representable (cf. / 113, 115 / and Gray [39]).

319.2. $(H^{\cdot}, D)$ is a *p'-dominated category* / 77 / iff $D : H \times H^{op} \to H$ is a functor whose composite with p' is the Hom functor of H (to be read from right to left: $Hom(e', e) = \{ h : e \to e' \}$).

320.1+ This p'*-structured category of morphisms from* s' *to* $(K^{\cdot}, \bar{s})$ is the p'-structured category isomorphic to the internal category in H'

$$\begin{tikzcd} D(\bar{s}_0, s') & & D(\bar{s}, s') \arrow[ll, bend right, "D(\bar{a}, s')"'] \arrow[ll, bend left, "D(\bar{b}, s')"] & D(\bar{s}*\bar{s}, s') \arrow[l, "D(\bar{k}, s')"'] \end{tikzcd}$$

image of the internal category K in H

$$\begin{tikzcd} \bar{s}_0 & & \bar{s} \arrow[ll, bend right, "\bar{a}"'] \arrow[ll, bend left, "\bar{b}"] & \bar{s}*\bar{s} \arrow[l, "\bar{k}"'] \end{tikzcd}$$

corresponding to $(K^{\cdot}, \bar{s})$ by the preserving-pullbacks functor $D(-, s')$. Its object of morphisms is $D(\bar{s}, s')$ and its composition the composite

$$D(\bar{s}, s') * D(\bar{s}, s') \xrightarrow{g} D(\bar{s}*\bar{s}, s') \xrightarrow{D(\bar{k}, s')} D(\bar{s}, s'),$$

where g is the isomorphism from the canonical pullback.

If H' is the category of sets and D the Hom functor of H, we just obtain the fibre over s' of the Grothendieck category object [42] (or indexed category in Paré-Schumacher [82]) associated to K.

321.1. $E(e, e')$ is the *p'-structured category of structured functors from* $e' = (C'^{\cdot}, s')$ *to* e. More generally, the p'-structured category defined in Proposition 5 is the *p'-structured category of lax transformations from* e' *to the structured category of 1-morphisms of* $(K^{\cdot}, K^{\circ}, \bar{s})$.

323.1. In other terms, $E'(e, e')$ is the H'*-object of structured functors from* e' *to* e, and the map $\bar{g} \mapsto \square\, \bar{g}$ lifts into a morphism

$$E'(e, e') \to E'(\square\, e, \square\, e').$$

325.1+ *Enriched categories of structured categories:*

If q is a set-valued functor from a cartesian category L, a strongly dominated category (K, F) corresponds exactly to an L-category (category enriched in L, in Eilenberg-Kelly's sense [31]) F with K_0 as its class of objects and $F(e, e')$ as object of morphisms between e, e' iff the identity and associativity axioms are satisfied. If q is faithful, they always are. (Cf. Comment 26.2.)

It follows that Proposition 8 means that the category $\mathcal{F}(p)$ of structured categories is both underlying:

- the H'*-category* E' *of p-structured functors,*

- the $\mathcal{F}(p')$*-category* E *of p-structured natural transformations* ; indeed, though $\hat{p}'^{o}$ is not faithful, the identity and associativity axioms for E are deduced from the construction of the multiplications k'_{-} of E (Proof, Part 3) as restrictions of the composition of a 2-category and from the fact that p' is faithful.

327.1. In other terms, if e and $\bar{e}$ are structured categories, there is a natural one-to-one correspondence :

$$\frac{\bar{e} \to E(e, e')}{\bar{e} \times e' \to e} \, .$$

330.1. If e and $\bar{e}$ are structured categories and if s' is an object of H identified with a discrete structured category, there is a natural one-to-one correspondence :

$$\frac{\bar{e} \to D(e, s')}{\bar{e} \times s' \to e} \, .$$

331.1¶ To prove that the conditions of Proposition 9 are satisfied, it is still necessary to say that the coliberty morphism

$$j(s): D(s, s') \times s' \to s$$

is applied by p on the evaluation map.

Proposition 10 may be applied for instance to topological cartesian closed categories (cf. Herrlich [48] and Nel [79]); these categories are characterized e.g. as those topological categories in Herrlich's sense (cf. Comment 146.1), for which the partial product functors $- \times a$, for each object a, preserve colimits.

331.2. The result also applies to the category of *Kelley categories*, i.e. the internal categories in the cartesian closed category of Kelley spaces. This case is considered explicitly by Brown-Nickolas [13], who use the construction of the closure functor for computing colimits of Kelley categories, groupoids and groups, and studying free products of k-groups.

331.3+ *Monoidal closed categories of internal categories.*

The conditions of Proposition 10 are very restrictive, for example they are not satisfied by the category of categories. But in fact, they are considerably weakened in / 115 / , where we prove that:

If V is a symmetric monoidal closed category with « enough » limits, the category of internal categories in V is a symmetric monoidal closed category.

This result is deduced (Proposition 26-II / 115 /) from a general statement about sketched structures (using the monoidal closed structure constructed by Day on categories of functors toward V ; cf. also Foltz - Lair's construction which uses costructures).

If the partial tensor product functors of V preserve pullbacks (e. g. if V is cartesian closed), this theorem is alternately proved by a more constructive method (Proposition 29-II / 115 /) suggested by the one given in Proposition 9 (except that ends are used to simplify).

In other papers, we have defined explicit monoidal closed structures on categories of internal categories :

- on the category of topological ringoids in / 118 / ,
- on the category of all multiple categories in / 119 / ,
- on the category of n-fold categories (/120, 121/ , cf. Comment 71.1).

334.1. This is an evidence, not a Corollary of Proposition 6.

335.1. R. 5-4) $\mathfrak{F}(K^{\circ}, C^{\cdot\cdot})$ i.o. 6) $\mathfrak{N}((K^{\circ}, s), e')$.

BIBLIOGRAPHY

ABBREVIATIONS. *AMS* = American Mathematical Society.
CRAS = Compte-rendus Académie Sciences Paris.
CTGD = Cahiers Topologie et Géom. Diff.
LN = Lecture Notes in Math., Springer.

1. J. ADAMEK, H. HERRLICH & G. E. STRECKER, The structure of initial completions, *CTGD* XX-4 (1979), 333-352.
2. P. ANTOINE, Etude élémentaire des catégories d'ensembles structurés, *Bull. Soc. Math. Belgique* 18, 2-4 (1966), 142 and 387.
3. N. BEDNARZ, Noyaux d'espèces de structures. Applications covariantes topologiques, *CTGD* XI-4 (1969), 387-404.
4. J. BENABOU, Catégories avec multiplication, *CRAS* 256 (1963), 1887-1890.
5. J. BENABOU, Critères de représentabilité des foncteurs, *CRAS* 260 (1965), 752.
6. J. BENABOU, Introduction to bicategories, *LN* 47 (1967), 1-77.
7. J. BENABOU, Les distributeurs, *Rapport Inst. Math. Louvain* 33 (1973).
8. J. BENABOU, Fibrations petites et localement petites, *CRAS* 281 (1975), 831.
9. C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris.
10. P. BERNAYS & A. A. FRAENKEL, *Axiomatic set Theory*, North Holland, 1958.
11. R. BÖRGER & W. THOLEN, Remarks on topologically-algebraic functors, *CTGD* XX-2 (1970), 155-178.
12. N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles*, Hermann, Paris.
13. D. BOURN, Triples structurés, *CTGD* XIII-4 (1972), 327-350
14. D. BOURN, Natural anadeses and catadeses, *CTGD* XIV-4 (1973), 371-416.
15. R. BROWN & P. NICKOLAS, Exponential laws for topological categories, groupoids and groups, and mapping spaces of colimits, *CTGD* XX-2 (1979), 179.
16. R. BROWN & C. B. SPENCER, Double groupoids and crossed modules, *CTGD* XVII-4 (1976), 343-362.
17. G. C. L. BRÜMMER, A categorical study of initiality in uniform topology, *Thesis Univ. Cape Town* (1971).
18. A. BURRONI, Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies, *Esquisses Mathématiques* 5 (1970).
19. J. CELEYRETTE, Fibrations et extensions de Kan, *Thèse Univ. Paris-Nord* (1974).
20. D. CHAMAILLARD, Catégories structurées par une catégorie non associative, *Esquisses Mathématiques* 6 (1970).
21. M. CHARTRELLE, Construction de catégories auto-dominées, *CRAS* 274 (1972), 388-391.
22. F. CONDUCHE, Un moyen d'extension aux catégories internes dans *A* des propriétés de la catégorie *A*, *CTGD* XV-1 (1974), 47-60.
23. L. COPPEY, Algèbres de décompositions et précatégories, *Thèse Un. Amiens* (1977).

24. F. CURY, Graphes multiplicatifs enrichis, *Esquisses Math.* 27 (1977).

25. P. DEDECKER & J. MERSCH, Précatégories et relations d'équivalence dans les catégories, *CRAS* 256 (1963), 4811-4814.

26. R. DIACONESCU, Change of base for topos with generators, *J. Pure Appl. Algebra* 6 (1975), 191-218.

27. E. J. DUBUC, Sur les modèles de la géométrie différentielle synthétique, *CTGD* XX-3 (1979), 231-280.

28. A. EHRESMANN (-BASTIANI), Différentiabilité dans les espaces localement convexes. Distructures, *Thèse Univ. Paris* (1962).

29. A. EHRESMANN, Systèmes guidables et problèmes d'optimisation, *Rapport Lab. Automatique Théorique Univ. Caen* (1963-65).

30. A. EHRESMANN, *Théorie des ensembles*, C. D. U., Paris, 1970.

31. S. EILENBERG & G. M. KELLY, Closed categories, *Proc. Conf. on categorical Algebra* La Jolla, Springer, 1966.

32. S. EILENBERG & S. MACLANE, General theory of natural equivalences, *Trans. AMS* 58 (1945), 231-294.

33. F. FOLTZ, Sur la domination des catégories, *CTGD* XII-1 (1971), 93-110 and XII-4, 375-444.

34. P. FREYD, *Abelian categories*, Harper and Row, 1964.

35. P. GABRIEL & M. ZISMAN, *Calculus of fractions and homotopy theory*, Springer, 1967.

36. J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne*, Springer, 1971.

37. R. GODEMENT, *Topologie algébrique et Théorie des faisceaux*, Hermann, 1958.

38. J. W. GRAY, Fibred and cofibred categories, *Proc. Conf. on categorical Algebra* La Jolla, Springer, 1966.

39. J. W. GRAY, The meeting of the Midwest Category Seminar, *LN* 195 (1971).

40. J. W. GRAY, Formal category theory I, *LN* 391 (1974).

41. A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.* 2 (1957), 119-221.

42. A. GROTHENDIECK, Techniques de descente et théorèmes d'existence en Géométrie algébrique, *Sém. Bourbaki* (1959), exposés 190, 195.

43. A. GROTHENDIECK, Catégories fibrées et descente, *Sém. Géom. Alg.* 4, I. H. E. S. (1961).

44. R. GUITART, Remarques sur les machines et les structures, *CTGD* XV-2 (1974), 113-144.

45. R. GUITART & L. VAN DEN BRIL, Décompositions et lax-complétions, *CTGD* XVIII-4 (1977), 333-407.

46. M. HASSE, Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und Gruppoide, *Math. Nachr.* 22, 5-6 (1960), 256-279.

47. H. HERRLICH, Topological functors, *Gen. Topo. and Appl.* 4 (1974), 125-142.

48. H. HERRLICH, Cartesian closed top. cat., *Math. Coll.* IX, Cape Town (1974).

49. P. J. HIGGINS, *Categories and groupoids*, Van Nostrand, 1971.

50. H. J. HOEHNKE, Einige Bemerkungen über Einbettbarkeit von Kategorien in Gruppoide, *Math. Nachr.* 25-3 (1963), 179-190.

51. H. J. HOEHNKE, Zur Theorie der Gruppoide, *Acta Math.* XIII, 1-2 (1962).
52. R. HOFFMANN, Topological completions of faithful functors, *Kategoriensem.* I, Fernuniv. Hagen (1976), 26-37.
53. R. HOFFMANN, Semi-identifying lifts and a generalization of the duality theorem for topological functors, *Math. Nachr.* 74 (1976), 295-307.
54. Y. H. HONG, Studies on categories of universal topological functors, *Thesis Univ. Hamilton* (1974).
55. J. HOUDEBINE, Classes et ensembles, *CTGD* VI (1964).
56. P. JOHNSTONE, *Topos Theory*, Acad. Press, 1977.
57. G. JOUBERT, Contribution à l'étude des catégories ordonnées. Applications aux structures feuilletées, *CTGD* VIII (1966).
58. D. M. KAN, Adjoint functors, *Trans. AMS* 294 (1958), 294-329.
59. G. M. KELLY & R. STREET, Review of the elements for 2-categories, *LN* 420 (1974), 75-130.
60. A.-M. KEMPF, Complétions de foncteurs. Fibrations, *Thèse Univ. Paris VII* (1976).
61. A. KOCK, *Formal manifolds and synthetic theory of jet bundles*, Preprint Aarhus Univ., 1979; and lecture in Séminaire Bénabou, Mars 1980.
62. C. LAIR, Foncteurs d'omission de structures algébriques, *CTGD* XII-2 (1971).
63. J. B. LANGBAUM, Quasi-quotients et application aux catégories structurées, *Esquisses Math.* 22 (1975).
64. F. W. LAWVERE, An elementary theory of the category of sets, *Proc. Conf. on categorical Algebra*, La Jolla, Springer, 1966.
65. F. W. LAWVERE, *Teoria delle categorie sopra un topos di base*, Lecture Notes Univ. Perugia, 1973.
66. M.-C. LEBLOND, Complétions de foncteurs ordonnés et de foncteurs doubles, *Esquisses Math.* 15 (1972).
67. S. LEGRAND, Transformations naturelles généralisées, *CTGD* X-3 (1968), 351.
68. S. LEGRAND, Quelques problèmes universels relatifs aux catégories multiples, *Thèse Univ. Paris* (1969).
69. K. LELLAHI, Catégories préadditives structurées, *CTGD* XII-2 (1971), 187.
70. P. LEROUX, Extension à des catégories de morphismes d'une paire de foncteurs adjoints, *Thèse Univ. Montréal* (1970).
71. S. MACLANE, Natural associativity and commutativity, *Rice Univer. Studies* 49-4 (1963), 28-46.
72. S. MACLANE, Categorical Algebra, *Bull. AMS* 71-1 (1965), 40-106.
73. S. MACLANE, Foundations for categories and sets, *LN* 92 (1969), 146-164.
74. S. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.
75. S. MACLANE, Topos theory by Peter Johnstone, *Bull. AMS* I-6 (1979), 1005.
76. J. MERSCH, Le problème du quotient dans les catégories, *Thèse Univ. Liège* (1963).
77. B. MITCHELL, *Theory of categories*, Academic Press, 1965.
78. G. MOREAU, Catégories doubles à isomorphismes près, *Thèse Univ. Paris VII* (1975).

79. L. D. NEL, Initially structured categories and cartesian closedness, *Canad. Math. J.* 27 (1975), 1361- 1377.
80. NGO VAN QUE, Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales, *Ann. Inst. Fourier* XVII- 1, Grenoble (1967), 157- 224.
81. P.H. PALMQUIST, The double category of adjoint squares, *LN* 195 (1971).
82. R. PARE & D. SCHUMACHER, Abstract families and the adjoint functor theorem, *LN* 661 (1978), 201- 210.
83. J. PENON, Catégories à sommes commutables, *CTGD* XIV- 3 (1973), 227- 290.
84. H. E. PÖRST, Characterization of MacNeille completions and topological functors, *Bull. Australian Math. Soc.* 18 (1978), 201- 210.
85. J. PRADINES, *CRAS* 263 (1966), 907; 264 (1967), 245; 266 (1968), 1194; 267 (1968), 21.
86. D. PÜMPLUN, *Kategorien*, Univ. Münster, 1973.
87. W. V. O. QUINE, *Set theory and its logic*, Harvard Univ. Press, 1963.
88. J. E. ROBERTS, A characterization of topological functors, *J. Algebra* 8 (1968).
89. P. SAMUEL, On universal mappings and free topological groups, *Bull. AMS* 54 (1948), 591- 598.
90. J. SONNER, Universal and special problems, *Math. Zeitschr.* 82 (1963), 200.
91. C. B. SPENCER, An abstract setting for homotopy pushouts and pullbacks, *CTGD* XVIII- 4 (1977), 409- 430.
92. R. STREET, Limits indexed by category-valued 2-functors, *J. Pure Appl. Algebra* 8- 2 (1976), 149- 181.
93. W. THOLEN, Semi-topological functors I, *J. Pure Appl. Algebra* 15 (1979), 53.
94. W. THOLEN, Lifting semifinal liftings, *LN* 719 (1979), 376- 385.
95. W. THOLEN & M. B. WISCHNEWSKY, Semitopological functors II, *J. Pure Appl. Algebra* 16 (1980).
96. V. TRNKOVA, Automata and categories, *Lecture Notes in Computer Sc.* 32, Springer (1975), 132- 152.
97. E. VAUGELADE, Application des bicatégories à l'étude des catégories internes, *Esquisses Math.* 21 (1975).
98. M. B. WISCHNEWSKY, A lifting theorem for right adjoints, *CTGD* XIX- 2 (1978).
99. M. B. WISCHNEWSKY, Topologically-algebraic functors = full reflective or coreflective restrictions of semitopological functors, *CTGD* XX- 3 (1979), 311.
100. M. B. WISCHNEWSKY, A generalized duality theorem for structure functors, *CTGD* XXI- 2 (1980).
101. O. WYLER, Top-categories and categorical topology, *Gen. Topo. and Appl.* 1 (1971), 17- 28.
102. O. WYLER, Quotient maps, *Gen. Topo. and Appl.* 3 (1973), 149- 160.

SYNOPSIS

In the fifties, Charles had encountered many examples of categories whose class of morphisms is equipped with some structure compatible with the source, target and composition maps: Topological categories and differentiable categories in fibre bundles theory and Differential Geometry; local groupoids in his local structures theory for axiomatizing the «gluing together» process; double categories (e.g. the 2-category of natural transformations and the double categories of squares) in his reflections over the definition of a structure. To unify these examples, in 1963 he defined the structured categories (or «concrete» internal categories with respect to a faithful set-valued functor) and their actions, and later on internal categories and internal presheaves (cf. Comments 25.1 and 55.2).

For this, he needed a good notion of «sub-structures», since the structure (or object) of objects must be a sub-structure of the structure of morphisms S and the structure of composable pairs a sub-structure of $S \times S$. So he undertook the study of p-injections. The dual notion of a quotient structure (and its generalization, the quasi-quotients) also proved its efficiency to «internalize» set-constructions. But quasi-quotients may not be easily constructed, so existence theorems were devised.

These ideas are developed in the reprinted papers

/63, 64, 69, 66, 100, 109/

which are summarized in the Notes

/57, 58, 61, 65, 67, 82, 83, 112/.

We are going to point out the main topics of the papers and of some further comments.

1. SPECIES OF STRUCTURES AND HOMOMORPHISMS CATEGORIES.

These notions are not the subject of the present volume (cf. Parts II and III-2). However, they are an important tool since most of the results are about a set-valued homomorphisms functor (or a concrete functor, cf. Comment 29.3). The enlargement theorem (cf. Comment 29.2) replaces a (homomorphisms) functor by a (saturated or) creating-isomorphisms one.

Covariant maps between dominated (or enriched, cf. Comment 26.2) species of structures are triangles of functors commuting up to a natural transformation; they form sub-categories of the category of quintets (/64/), which were initially obtained for «symmetrizing» this situation.

2. SUB-STRUCTURES AND QUOTIENT STRUCTURES.

In /63/, p-sub-structures are defined when p is a concrete functor and its codomain is equipped with an inductive order. The notion is freed from these conditions in /69/, where ordered categories are also studied for pointing out the weak properties of the order really needed in /63/. But the «good» notion of a p-injection, for any functor p, is given only in /66/; later on, it has been generalized into initial lifts of cones (cf. Comment 146.1). Generated sub-structures, considered in /100/, single out the sub-spreading functors (of a «topological type») and the sub-generating functors (of an «algebraic type»).

The p-surjections and quotient structures, defined by dualization, are studied in /66/, where many examples are given: Reflections of a category into a sub-category are obtained when the codomain of p is the category 2: several constructions made in older papers are proved to be reflections, such as the various completions of a prelocal groupoid (cf. Comment 153.1); the categories of fractions (Comment 163.3 and /55/); the free category and the free groupoid on a graph,... Neocategories and their quotients are introduced for a close study of quotient categories (cf. Comment 170.1).

3. QUASI-QUOTIENTS AND EXISTENCE THEOREMS.

Though quotient categories are scarce, the results of /66/ prove that the category reflection of the quotient neocategory has a «good» universal property. Its formulation led to the quasi-surjections and quasi-quotients, which are defined in /100/. Comments 221.2, 212.3, 233.1, 233.3 compare quasi-injections and equalizers on one hand, quasi-surjections, coequalizers and semi-final lifts of cocones on the other hand.

In many cases, existence theorems palliate the lack of explicit constructions for quasi-quotients. Charles's approach is the «outside-inside» of Freyd's (cf. Comment 227.1); to get a reflection in a sub-category H

he uses a large auxiliary category, the «same category as H, relative to a larger universe» (for set-theoretical assumptions, cf. Comments 24.1, 155.1, 211.2). Existence theorems for quasi-quotients and colimits are given in /100/, for semi-final lifts of cocones in the (original) long Comment 233.3. These theorems pointed out the interest of studying special classes of functors (cf. /94/); such a study has been undertaken in the last years especially by German categorists (cf. Comments 146.1 and 212.3).

4. THE GENERAL THEORY OF STRUCTURED CATEGORIES.

Let p be a concrete functor; p-structured categories are defined in /63/, and algebraic properties of the category of structured categories are established: transport by isomorphism, existence of limits, description of sub-structures, ... These results are proved in /63/ when p creates canonical limits, and improved (with more elaborate proofs) in /109/ where p only creates isomorphisms (which is not restrictive).

/66/ originated in the desire of studying quotient structured categories of (C, S). If r is an equivalence on C and if there exists quotients of C and S by r, these data may not define a structured category. But if the object S' of composable pairs admits a quotient $\hat{S}'$ by the equivalence r' induced by $r \times r$, then $(C/r, \hat{S}')$ is a structured neocategory. This weaker notion is introduced in /66/ as well as the auxiliary tools: structured multiplicative classes and graphs. The results of /63/ are extended to them; in fact they come from general theorems on sketched (or internal) structures (cf. Comments 55.2, 182.2, 186.1, 197.1).

In /100/, existence theorems are given for quasi-quotient structured categories, neocategories, ... (whence for colimits), when p is countably sub-generating or a fortiori sub-spreading. Moreover, the constructions of a category or a group from generators and relations are mimicked to get quasi-quotient structured categories or groupoids, monoids or groups, as quasi-quotients of free structured quasi-categories (= categories without the identity axiom, introduced because of a lack of good structurations on free categories) and semi-groups (cf. Comments 266.1 and 263.6).

Structured natural transformations are defined in /64, 109/, leading to the study of the 2-category of structured categories, which is representable (by squares categories) if the source H of p admits pullbacks, and to the double category of its squares, the structured quintets /64/. They help to define enrichments of the category $\mathcal{F}(p)$ of p-structured categories from enrichments of H. In particular (/109/) if H is a cartesian closed category with a generator, $\mathcal{F}(p)$ is cartesian closed. Notice these results have been much refined in /115/, cf. Comment 331.3.

5. EXAMPLES OF STRUCTURED CATEGORIES.

Several papers not reprinted in this volume are wholly devoted to such examples (cf. Parts I and II). Here topological, differentiable and monoidal strict categories are just mentioned (cf. Comments 58.1, 59.2, 60.1). More attention is given to ordered categories (with more or less conditions) and to their quasi-quotients and quotients /63, 69, 66, 100/.

Double and multiple categories are thoroughly studied in /63/; they give an appropriate setting for the theory of lax transformations as we have shown in recent papers /117, 119, 120, 121/ (cf. Comments 68.1, 68.2, 71.1). The main example is the 2-category of categories and the double category of its squares (the quintets), considered in /64/ with some applications. In fact, this double category is a «universal double category» (cf. /121/ and Comment 105.1), in the sense that any double category is isomorphic to a double sub-category of this double category.

SUGGESTED READING.

The terminology of the older papers is a little obsolete; the first part of /63/ is much improved in /66/, and the second part of /66/ is highly technical, except the important Theorem 14 and its applications. /100/ is one of the most interesting and actual papers once its concision and abstraction are overcome. /109/ is more accessible. As a guide:

Part I of /66/ on sub-structures and quotients. Sections 1 and 2 /100/ on quasi-quotients and existence theorems.

Examples of structured categories, e.g. double and ordered categories in /63, 64, 69/. Then /109/ which is the final state of the theory of structured categories, before non-concrete internal categories /104, .../ and, for their (quasi-)quotients, Sections 4 /66/ and 4-8 /100/.

INDEX DU VOLUME III-1

INDEX

Les références renvoient indifféremment au mot français et/ou anglais.

TABLE DES MATIERES DU VOLUME III-1

TABLE DES MATIERES

Le second nombre renvoie à la page correspondante des « Comments ».

Ce livre constitue le

SUPPLEMENT N° 1 au VOLUME XXI (1980) des

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE

publication périodique, créée par Charles EHRESMANN en 1958,
actuellement dirigée et éditée par :

M^{me} A. C. EHRESMANN
U. E. R. de Mathématiques, 33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS CEDEX. FRANCE.

IMPRIMERIE EVRARD. AMIENS.
Dépôt Légal : 2^e Trimestre 1980