Charles Ehresmann œuvres complètes et commentées

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

PARTIES I-1 et I-2

Éditées par Andrée CHARLES EHRESMANN

PUBLIÉES AVEC L'AIDE DE LA MIDIST
DANS LE CADRE DU PROGRAMME MOBILISATEUR N° 6
"PROMOTION DU FRANÇAIS LANGUE SCIENTIFIQUE
ET DIFFUSION DE LA CULTURE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE"

AMIENS 1984

Ce livre constitue les

SUPPLÉMENTS N°1 ET N°2 au VOLUME XXIV (1983) des

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

publication périodique, créée par Charles EHRESMANN en 1958, actuellement dirigée et éditée par

Madame A. C. EHRESMANN
U.E.R. de Mathématiques, 33 rue Saint-Leu
80039 AMIENS CEDEX. FRANCE

IMPRIMERIE EVRARD. AMIENS
Dépôt Légal : 2e trimestre 1984

PLAN DES DIFFÉRENTES PARTIES

I. TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

I.1. Topologie Algébrique
I.2. Géométrie Différentielle. Commentaires sur la Partie I

Contenant : /1 à 46, 48 à 51, 78, 101, 103, 111, 116, 134, 136, 137/. Commentaires par J. Bénabou, G. Choquet, J. Dieudonné, A.C. Ehresmann, R. Guitart, A. Haefliger, R. Hermann, A. Kock, P. Libermann, J. Pradines, G. Reeb, R. Thom, W.T. van Est, M. Zisman.

II. STRUCTURES LOCALES ET CATÉGORIES ORDONNÉES

II.1. Structures locales
II.2. Catégories ordonnées. Applications en Topologie

Contenant : /47, 53 à 56, 68, 71, 75, 76, 81, 86, 92, 110 et 125-126/. Commentaires par A. C. Ehresmann.

III. CATÉGORIES INTERNES ET FIBRATIONS

III.1. Catégories structurées et quotients
III.2. Catégories internes et Fibrations

Contenant : /57 à 67, 69, 70, 72 à 74, 77, 79, 80, 82 à 84, 87, 89 à 91, 93 à 96, 100, 104, 105, 109, 112, 113/. Commentaires par A. C. Ehresmann.

IV. ESQUISSES. COMPLÉTIONS. ENRICHISSEMENTS

IV.1. Esquisses et complétions
IV.2. Structures monoïdales fermées

Contenant : /52, 88, 97 à 99, 102, 106 à 108, 114, 115, 117 à 121, 139, 142 à 144, 146/. Commentaires par A. C. Ehresmann.

* Les numéros renvoient à la "Liste des Publications de Charles Ehresmann" ci-après (pp. XI à XVIII).

REMERCIEMENTS

Cette Partie I a bénéficié d'une aide financière importante de la MIDIST (dans le cadre du programme mobilisateur n° 6 : Promotion du français langue scientifique et diffusion de la culture scientifique et technique). Je l'en remercie bien vivement, ainsi que tous ceux qui m'ont permis d'obtenir cette aide ; en particulier, M. Guy Lengagne, Secrétaire d'Etat, M. le Professeur Duron, Directeur du Conseil Scientifique de l'Université de Picardie et M. le Professeur Figlarz, Délégué Régional à la Recherche et à la Technologie : leur intérêt pour ces Œuvres me touche profondément.

J'exprime toute ma gratitude aux mathématiciens qui ont si gentiment accepté d'écrire des commentaires pour ce volume : Melle P. Libermann, MM. R. Hermann, A. Kock, G. Reeb, J. Pradines, R. Thom, W. T. van Est et M. Zisman ; ainsi qu'à MM. J. Bénabou, G. Choquet, J. Dieudonné, R. Guitart et A. Haefliger dont les textes en l'honneur de Charles après sa mort sont reproduits ici.

Enfin, sur un plan plus personnel, je tiens à associer à l'ensemble de ces Œuvres les Docteurs Jean-François de Frémont, François de la Simone et, plus encore, Jean-Paul Vanbremeersch, sans qui ce travail n'aurait pu exister.

Andrée CHARLES EHRESMANN
Amiens, Juillet 1984

INTRODUCTION

Charles EHRESMANN s'est intéressé à des domaines très variés des Mathématiques. Il a profondément influencé le développement de la Topologie Algébrique, de la Géométrie Différentielle et de la Théorie des Catégories. Ses travaux (de 1932 à 1979, plus de 2.500 pages) sont souvent passés dans le domaine commun, mais beaucoup ne sont plus accessibles matériellement. C'est pourquoi, depuis plusieurs années, nous avions l'intention, Charles et moi, de publier ses œuvres complètes.

Pour ne pas faire seulement un travail de compilation, nous voulions profiter de cette occasion pour mettre en évidence la genèse des idées et les motivations, pour améliorer certains résultats, pour relier les articles entre eux et avec ceux d'autres auteurs, pour indiquer les développements ultérieurs et, éventuellement, des voies non encore exploitées.

Désirant être indépendants et n'engager que notre propre responsabilité (Charles a toujours été très individualiste), nous comptions éditer ces «*Oeuvres complètes et commentées*» sous forme de Suppléments à notre périodique «*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*». C'est pour réaliser ce projet tel qu'il avait été conçu que j'ai décidé, après le décès de Charles, d'entreprendre seule (contrairement à l'usage) cette publication. Je remercie tous ceux qui m'aident, par leur soutien moral ou leur souscription, à mener à bien ce travail dans cet esprit, comme l'avait souhaité Charles.

PLAN GÉNÉRAL.

Il est très difficile de classer les œuvres de Charles. L'ordre chronologique est loin d'être satisfaisant (ainsi les travaux de Géométrie Différentielle s'échelonnent de 1939 à 1973); une division par matières laisse à désirer, beaucoup d'articles contenant des parties très différentes.

Le plan adopté (sans doute peu convaincant) tient compte à la fois de la date de parution et du sujet. Il comporte quatre grandes parties :

I. *Topologie et Géométrie Différentielle.*

II. *Structures locales et catégories ordonnées.*

III. *Catégories internes et Fibrations.*

IV. *Esquisses. Complétions. Enrichissements.*

Chaque partie, divisée en deux volumes, contient :

- La liste des publications de Charles et une courte biographie de la période correspondant en gros à la partie,
- Les travaux originaux, reproduits par procédé photographique (et je remercie tous ceux qui m'ont accordé leurs droits de reproduction) ou recomposés lorsque la présentation n'était pas assez nette ;
- Des commentaires fragmentés (en anglais) avec renvois aux textes, suivis d'un Synopsis guidant dans la lecture des articles et commentaires ;
- Une bibliographie relative aux commentaires et un index dans chaque volume ; parfois des documents annexes éclairant tel ou tel point.

SUR LA PARTIE I.

La Partie I contient les premiers travaux de Charles Ehresmann, sur la Topologie Algébrique et la Géométrie Différentielle : au total 57 articles, dont 32 Notes à l'Académie des Sciences de Paris, presque tous écrits entre 1932 et 1955. Les Parties I-1 (Topologie Algébrique) et I-2 (Géométrie Différentielle) ont été réunies en un seul volume, car la division entre elles est souvent difficile à faire.

La plupart des notions introduites et étudiées dans ces textes font maintenant partie du folklore mathématique (et leur origine est souvent oubliée) : espaces fibrés, structures presque complexes, G-structures (d'abord appelées structures infinitésimales par Charles), variétés feuilletées, jets, espaces localement homogènes, structures locales... Il n'est donc pas utile de faire des commentaires «ponctuels» (du type de ceux que j'ai rédigés pour les autres Parties de ces Œuvres). Les commentaires, écrits par des spécialistes des domaines analysés, portent sur des séries d'articles, qui sont replacés dans leur cadre historique, et surtout dont les développement ultérieurs sont indiqués. Sont également joints plusieurs textes, de nature plus générale, publiés en hommage à Charles après sa mort.

Andrée CHARLES EHRESMANN

Amiens, Juillet 1984

LISTE DES PUBLICATIONS DE CHARLES EHRESMANN

1. TRAVAUX DE RECHERCHE.

1. Les invariants intégraux et la topologie de l'espace projectif réglé, *C. R. A. S. Paris* 194 (1932), 2004-2006.
2. Sur la topologie de certaines variétés algébriques, *C. R. A. S. Paris* 196 (1933), 152-154.
3. Un théorème relatif aux espaces localement projectifs et sa généralisation, *C. R. A. S. Paris* 196 (1933), 1354-1356.
4. Sur la topologie de certains espaces homogènes, *Ann. of Math.* 35 (1934), 396-443. (Thèse Paris 1934.)
5. Groupes d'homologie, *Séminaire de Math.* Paris, III-B (1935), 1-25.
6. Sur les espaces localement homogènes, *Enseignement Math.* 35 (1936), 317-333.
7. Sur la notion d'espace complet en Géométrie différentielle, *C. R. A. S. Paris* 202 (1936), 2033-2035.
8. Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles, *J. de Math.* XVI (1937), 69-100.
9. Les groupes de Lie à r paramètres, *Séminaire de Math.* Paris, IV E et F (1937), 1-61.
10. Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan, *C. R. A. S. Paris* 205 (1938), 1433-1436.
11. Sur les congruences paratactiques et les parallélismes dans les espaces projectifs, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 153-155.
12. Sur la variété des génératrices planes d'une quadrique réelle et sur la topologie du groupe orthogonal à n variables, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 321-323.
13. Sur la topologie des groupes simples clos, *C. R. A. S. Paris* 208 (1939), 1263-1265.
14. Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés, *C. R. A. S. Paris* 212 (1941), 945-948 (avec J. FELDBAU).
15. Espaces fibré associés, *C. R. A. S. Paris* 213 (1941), 762-764.

34. Les prolongements d'une variété différentiable, II: L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 777-779.

35. Les prolongements d'une variété différentiable, III: Transitivité des prolongements, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 1081-1083.

36. Structures locales et structures infinitésimales, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 587-589.

37. Les prolongements d'une variété différentiable, IV: Eléments de contact et éléments d'enveloppe, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 1028-1030.

38. Les prolongements d'une variété différentiable, V: Covariants différentiels, et prolongements d'une structure infinitésimale, *C. R. A. S. Paris* 234 (1952), 1424-1425.

39. Structures locales, *Ann. di Mat.* (1954), 133-142. (Multigraphié Rome et Strasbourg, 1952.)

40. Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie, *Coll. Intern. Géom. Diff. Strasbourg*, C.N.R.S. (1953), 97-110.

41. Extension du calcul des jets aux jets non holonomes, *C. R. A. S. Paris* 239 (1954), 1762-1764.

42. Sur les structures infinitésimales régulières & Sur les pseudogroupes de transformations de Lie, *Proc. Int. Cong.* Amsterdam (1954), II, 478-479.

43. Applications de la notion de jet non holonome, *C. R. A. S. Paris* 240, (1955), 397-399.

44. Les prolongements d'un espace fibré différentiable, *C. R. A. S. Paris* (1955), 1755-1757.

45. Sur les espaces feuilletés: théorème de stabilité, *C. R. A. S. Paris* 243 (1956), 344-346 (avec SHIH WEISHU).

46. Sur les connexions d'ordre supérieur, *Atti V Cong. Un. Mat. Italiana* Pavia-Torino (1956), 326-328.

47. Gattungen von Lokalen Strukturen, *Jahres. d. Deutschen Math.* 60-2 (1957), 49-77. (Traduit en français dans *CTGD* [1] III, 1961.)

48. Sur les pseudogroupes de Lie de type fini, *C. R. A. S. Paris* 246 (1958), 360-362.

49. Sur les appuis d'une pyramide convexe et sur les polyèdres convexes sans sommet, *C. R. A. S. Paris* 249 (1959), 2695-2697 (avec A. EHRESMANN).

50. Catégories topologiques et catégories différentiables, *Coll. Géom. Diff. Globale* Bruxelles, C.B.R.M. (1959), 137-150.

1) *CTGD* se lit «*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*».

51. Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie, *Rev. Un. Mat. Argent.* 19, Buenos-Aires (1960), 48.

52. Catégorie des foncteurs types, *Rev. Un. Mat. Argentina* XX (1960), 194-209.

53. Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier* X, Grenoble (1960), 307-332.

54. Structures feuilletées, *Proc. 5th Can. Math. Cong., Montréal* (1961), 109-172.

55. Elargissements de catégories, *CTGD* III (1961), 25-73.

56. Archimède et la Science moderne, *Celeb. Archimedee*, Syracuse (1961), 25-37.

57. Catégories doubles et catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963) 1198-1201.

58. Catégorie double des quintettes; applications covariantes, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 1891-1894.

59. Catégories structurées d'opérateurs, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 2080-2083.

60. Sous-structures et applications $\mathcal{K}$-covariantes, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 2280-2283.

61. Structures quotient et catégories quotient, *C. R. A. S. Paris* 256 (1963), 5031-5034.

62. Complétion des catégories ordonnées, *C. R. A. S. Paris* 257 (1963), 4110-4113.

63. Catégories structurées, *Ann. Ec. Norm. Sup.* 80, Paris (1963), 349-426.

64. Quintettes et applications covariantes, *CTGD* V (1963), 1-22.

65. Catégories structurées quotient, *CTGD* V (1963), 1-4.

66. Structures quotient, *Comm. Math. Helv.* 38 (1963), 219-283.

67. Teilstrukturen und Faktorstrukturen, *Jahrestagung Deutschen Math. Ver.* Frankfurt (1963), 1.

68. Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Inst. Fourier* XIII-2, Grenoble (1963), 1-60.

69. Sous-structures et catégories ordonnées, *Fund. Math.* LIV (1964), 211-228.

70. Produit croisé de catégories, *C. R. A. S. Paris* 258 (1964), 2461-2464.

71. Complétion des catégories sous-prélocales, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 701-704.

72. Expansion d'homomorphismes en foncteurs, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 1372-1375.

16. Espaces fibrés de structures comparables, *C. R. A. S. Paris* 214 (1942), 144-147.

17. Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 216 (1943), 628-630.

18. Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement, *Bull. Soc. Math. France* 72, Paris (1944), 27-54.

19. Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrables dans une variété continuement différentiable, *C. R. A. S. Paris* 218 (1944), 955-956 (avec G. REEB).

20. Sur la théorie des espaces fibrés, *Coll. Intern. Topo. algébrique Paris*, C.N.R.S. (1947), 3-15.

21. Sur les sections d'un champ d'éléments de contact dans une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 224 (1947), 444-445.

22. Sur les espaces fibrés différentiables, *C. R. A. S. Paris* 224 (1947), 1611-1612.

23. Sur les variétés plongées dans une variété différentiable, *C. R. A. S. Paris* 226 (1948), 1879-1881.

24. Sur les formes différentielles extérieures de degré 2, *C. R. A. S. Paris*, 227 (1948), 420-421 (avec P. LIBERMANN).

25. Sur les extensions de groupes topologiques, *C. R. A. S. Paris* 228 (1949), 1551-1553 (avec L. CALABI).

26. Sur le problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques, *C. R. A. S. Paris* 229 (1949), 697-699 (avec P. LIBERMANN).

27. Sur la notion de connexion infinitésimale dans un espace fibré et sur les espaces à connexion de Cartan, Congrès d'Innsbruck, *Nach. Oest. Math. Gesellschaft* 1949 (non publié).

28. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Coll. de Topo.* Bruxelles, C.B.R.M. (1950), 29-55.

29. Sur les variétés presque complexes, *Proc. Intern. Cong. of Math.* Harvard (1950), Vol. 2, 412-419 (et *Séminaire Bourbaki* 1950).

30. Sur la théorie des variétés feuilletées, *Rend. Mat. e Appl.* Ser. V, X-1-2 Rome (1951), 64-83.

31. Sur les structures presque hermitiennes isotropes, *C. R. A. S. Paris* 232 (1951), 1281-1283 (avec P. LIBERMANN).

32. Les prolongements d'une variété différentiable, *Atti IV Cong. Un. mat. Italiana*, Taormina Ott. (1951), 1-9.

33. Les prolongements d'une variété différentiable, I: Calcul des jets, prolongement principal, *C. R. A. S. Paris* 233 (1951), 598-600.

73. Cohomologie sur une catégorie, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 1683-1686.

74. Sur une notion générale de cohomologie, *C. R. A. S. Paris* 259 (1964), 2050-2053.

75. Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, *Ann. Inst. Fourier* XIV 1, Grenoble (1964), 205-268.

76. Complétion des catégories ordonnées, *Ann. Inst. Fourier* XIV-2, Grenoble (1964), 89-144.

77. Catégories et Structures, Extraits, *CTGD* VI (1964), 1-31.

78. Prolongements des catégories différentiables, *CTGD* VI (1964), 1-8.

79. Expansion générale des foncteurs, *C. R. A. S. Paris* 260 (1965), 30-33.

80. Catégorie quotient d'une catégorie par une sous-catégorie, *C. R. A. S. Paris* 260 (1965), 2116-2119.

81. *Catégories quasi-topologiques et leurs prolongements*, Université Paris (1965), 1-15.

82. Quasi-surjections et structures quasi-quotient, *C. R. A. S. Paris* 261 (1965), 1577-1580.

83. Quasi-catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 261 (1965), 1932-1935.

84. Groupoïdes structurés quasi-quotient et quasi-cohomologie, *C. R. A. S.* 261 (1965), 4583-4586.

85. Espèces de structures sous-inductives, *CTGD* VII (1965), 1-42.

86. Guide des catégories ordonnées, *CTGD* VII (1965), 43-49.

87. Expansion des systèmes de structures dominés, *C. R. A. S. Paris* 262 (1966), 8-11.

88. Adjonction de limites aux catégories structurées, *C. R. A. S. Paris* 263 (1966), 655-658.

89. Quasi-élargissement d'un système de structures structuré, *C.R.A.S.* 263 (1966), 762-765.

90. 1^er^ théorème d'expansion structurée, *C. R. A. S. Paris* 263 (1966), 863-866.

91. Cohomologie à valeurs dans une catégorie dominée, *Coll. Topo. algébrique* Bruxelles, C.B.R.M. (1966), 21-80.

92. Catégories topologiques I, II, III, *Indig. Math.* 28-1 (1966), 133-175.

93. Introduction to the theory of structured categories, *Tech. Report* 10, Un. Kansas, Lawrence (1966), 96 pages.

94. Trends toward unity in Mathematics, *CTGD* VIII (1966), 1-7.

95. 2^e^ théorème d'expansion structurée, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 5-8.

96. Théorème de quasi-expansion régulière, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 56-59.

97. Problèmes universels relatifs aux catégories n-aires, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 273-276.

98. Sur les structures algébriques, *C. R. A. S. Paris* 264 (1967), 840-843.

99. Adjonction de limites à un foncteur fidèle ou à une catégorie, *C. R. A. S. Paris* 265 (1967), 296-299.

100. Structures quasi-quotients, *Math. Ann.* 171 (1967), 293-363.

101. Propriétés infinitésimales des catégories différentiables, *CTGD* IX-1 (1967), 1-9.

102. Sur l'existence de structures libres et de foncteurs adjoints, *CTGD* IX-1-2 (1967), 33-180.

103. Sur les catégories différentiables, *Atti Conv. Int. Geom. Diff.* Bologna (1967), 31-40.

104. Catégories structurées généralisées, *CTGD* X-1 (1968), 139-168.

105. Catégories structurées et catégories différentiables, *Revue Roumaine Math. Pures et Appl.* 7, XIII (1968), 967-977.

106. Esquisses et types de structures algébriques, *Bul. Inst. Polit. Iaşi* XIV-1-2 (1968), 1-14.

107. Prolongements universels d'un foncteur par adjonction de limites, *Dissertationes Math.* LXIV, Varsovie (1969), 1-72.

108. Construction de structures libres, *Lecture Notes in Math.* 92, Springer (1969), 74-104.

109. Catégories de foncteurs structurés, *CTGD* XI-3 (1969), 329-383 (avec A. EHRESMANN).

110. Elargissement complet d'un foncteur local, *CTGD* XI-4 (1969), 405-420.

111. *Espaces fibrés et variétés différentiables,* Univ. Paris VII (1969), 1-44 (avec A. EHRESMANN).

112. Catégories de foncteurs structurés, *Coll. E. Cartan*, Un. Paris VII (1970) 1 page.

113. *Etude des catégories dans une catégorie*, Univ. Paris VII (1972), 1-45 (avec A. EHRESMANN).

114. *Sur le plongement d'un prototype dans un type,* Univ. Paris VII (1972), 1-12 (avec A. EHRESMANN).

115. Categories of sketched structures, *CTGD* XIII-2 (1972), 105-214 (avec A. EHRESMANN).

116. Categories in differential Geometry, Résumés Coll. Amiens 1973, *CTGD* XIV-2 (1973), 175-177.

117. Multiple functors, I: Limits relative to double categories, *CTGD* XV-3 (1974), 215-292 (avec A. EHRESMANN).

118. Tensor products of topological ringoids, *CTGD* XIX-1 (1978), 87-112 (avec A. EHRESMANN).

119. Multiple functors, II: The monoidal closed category of multiple categories, *CTGD* XIX-3 (1978), 295-334 (avec A. EHRESMANN).

120. Multiple functors, III: The cartesian closed category Cat_n, *CTGD* XIX-4 (1978), 387-444 (avec A. EHRESMANN).

121. Multiple functors, IV: Monoidal closed structures on Cat_n, *CTGD* XX-1 (1979), 59-104 (avec A. EHRESMANN).

2. LIVRES.

122. *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965, 375 pages.

123. *Algèbre* (Maîtrise de Math. C3), C.D.U. Paris, 1968, 168 pages.

3. COURS MULTIGRAPHIES.

124. *Cinématique*, Univ. Strasbourg (à Clermont-Ferrand), 1942.

125. *Espaces fibrés et structures infinitésimales*, 1[er] chapitre, Univ. Rio de Janeiro, 1952, 24 pages.

126. *Catégories différentiables et Géométrie différentielle*, Chapitres I et II, Sém. Soc. Can. Math., Montréal, 1961, 118 pages.

127. *Cours de Topologie algébrique*, Univ. Paris VII, 1970, 84 pages (avec A. EHRESMANN).

128. *Topologie algébrique*, Univ. Amiens, 1975, 150 pages (avec A. EHRESMANN).

129. *Histoire et Fondements des Mathématiques* (3 chapitres), Univ. Amiens 1977-1978 (avec A. EHRESMANN).

4. DIVERS.

130. Analyse de l'ouvrage de Seifert & Threlfall: «Lehrbuch der Topologie», *Enseignement Math.* 34 (1935), 404.

131. Analyse de l'ouvrage de Alexandroff & Hopf: «Topologie I», *Enseign. Math.* 35 (1936), 403.

132. Analyse de l'ouvrage de Schouten & Struik: «Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie», *Bull. Sc. Math.* 60 (1936), 129-131.

133. Revue critique des thèses de J. Cavaillès: Méthode axiomatique et formalisme, *Revue Philosophique* 131 (1941), 81-86.

134. Analyse de l'ouvrage d'E. Cartan: «Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques», *Bull. Sc. Math.* 70, Paris (1946), 117-122.

135. Analyse de l'ouvrage d'E. Cartan: «Leçons sur la théorie des espaces de Riemann», *Bull. Sc. Math.* 70, Paris (1946), 149-151.

136. *Travaux scientifiques de C. Ehresmann,* Univ. Strasbourg, 1955, 1-19.

137. Rapport sommaire sur les travaux de M. A. Lichnerowicz, *Atti V Cong. Un. Mat. Italiana* Pavia-Torino (1956), 21-26.

138. Topologie algébrique, *Formulaire de Math. à l'usage des Physiciens et Ingénieurs,* C.N.R.S. (1962), 202-220 (avec G. REEB).

139. Déjà vingt ans ..., *CTGD* XVIII-4 (1977), 431-432 (avec A. EHRESMANN).

5. ÉDITION DE TRAVAUX.

140. Edition de l'ouvrage posthume de J. Cavaillès : Sur la logique et la théorie de la Science, P.U.F., 1947, 1[e] édition (avec G. CANGUILHEM).

141. Edition du Colloque de Géométrie Différentielle de Strasbourg 1953, *Coll. Intern. C. N. R. S.* (1953), 1-198 (avec A. LICHNEROWICZ).

142. Edition des Résumés du Colloque sur l'Algèbre des catégories Amiens 1973, *CTGD* XIV-2 (1973), 153-223 (avec A. EHRESMANN).

143. Edition des Résumés du 2[e] Colloque sur l'Algèbre des Catégories, Amiens 1975, *CTGD* XVI-3 (1975), 217-340 (avec A. EHRESMANN).

144. Edition des Résumés des Journées T.A.C. de Chantilly, *CTGD* XVI-4 (1975), 425-442 (avec A. EHRESMANN).

145. Publication des :
   . *Receuils d'exposés du Colloque de Topologie de Strasbourg*: 1951, 1952 et 1954.
   . *CTGD*, Volumes 1 à 20, depuis 1957 (avec A. EHRESMANN).
   . *Esquisses Mathématiques*, Volumes 1 à 30, depuis 1970, Paris-Amiens (avec A. EHRESMANN).

INÉDITS PUBLIÉS DANS LA PARTIE IV-1.

146_{IV}.1. *Complétion d'un foncteur,* Conférence faite au Colloque Dijon-Paris, 1967.

146_{IV}.2. *Les catégories dans l'enseignement,* Conférence faite à Saint-Quentin, 1972.

A. C. E.

CURRICULUM VITAE

Né à Strasbourg le 19/4/1905, mort à Amiens le 22/9/1979.
Elève de l'Ecole Normale Supérieure de 1924 à 1927.
Agrégé des Sciences Mathématiques en 1927, puis Professeur au Lycée de Rabat (1928-29).
Boursier Arcanoti-Visconti et David Weill, à Paris, sous la direction d'Elie Cartan, et à Goettingen auprès de Hermann Weyl (1932-34).
Visiting fellow à l'Université de Princeton de 1932 à 1934.
Docteur es Sciences Mathématiques en 1934 (thèse sous la direction d'Elie Cartan).

Chargé de recherches au C.N.R.S. (1934-39).
Maître de Conférences puis Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg de 1939 à 1955.
Professeur à la Sorbonne puis à l'Université Paris 7 de 1955 à 1975.
Après sa retraite, Chargé d'Enseignement à l'Université de Picardie.

Visiting Professor à : Universidad do Brasil à Rio de Janeiro (1952), Princeton University (1953-54), Yale University (1955), Tata Institute à Bombay (1956-57), Universités de Mexico (1958), de Buenos-Aires (1959), de São Paulo (1960), de Montréal (cours d'été 1961), Kansas University at Lawrence (1966).
De plus, nombreuses conférences à l'étranger (Europe, Amérique du Nord, Amérique du Sud, Asie).

Prix de l'Académie des Sciences : Prix Francœur, Prix Bordin, Prix Petit d'Ormoy (en 1965).
Docteur Honoris Causa de l'Université de Bologne en 1967.

Crée en 1957 le périodique international «Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, qu'il dirige jusqu'en 1979. Dirige la série de prépublications «Esquisses Mathématiques» à partir de 1970.

CURRICULUM VITAE

Organisateur de Colloques internationaux à : Strasbourg (1953), Grenoble (1963), Paris-Dijon (1967), Amiens (1973 et 1975).
Président de la Société Mathématique de France en 1965.

Directeur de 29 thèses de Doctorat d'Etat, 4 thèses de Doctorat d'Université, 47 thèses de Doctorat de troisième cycle. (Voir la liste de ces thèses à la fin de ce volume.)

Des renseignements biographiques plus détaillés sont donnés dans chaque partie de ces Œuvres :

- Partie I : Notices écrites par MM. Dieudonné et Choquet (ci-après reproduites de l'« Annuaire des Anciens Elèves de l'Ecole Normale Supérieure » 1980) ; voir aussi divers souvenirs personnels et mathématiques dans les commentaires de G. Reeb, P. Libermann, R. Thom, R. Hermann, A. C. Ehresmann (à la fin de ce volume).
- Partie II - 1 : De 1955 à 1962.
- Partie III - 1 : De 1963 à 1970.
- Partie IV - 1 : De 1970 à 1979.

Pour une analyse des travaux mathématiques (dont la liste est donnée ci-avant), voir les articles de A. Haefliger, R. Guitart, J. Bénabou et A. C. Ehresmann reproduits à la fin de ce volume, ainsi que les Synopsis figurant à la fin de chacun des 7 volumes de ces Œuvres (où les résultats sont traduits en langage plus moderne).

A. C. E.

EHRESMANN (CHARLES), *né à Strasbourg le 19 avril 1905, décédé à Amiens le 22 septembre 1979. – Promotion de 1924.*

Le père d'Ehresmann était fils de paysan ; grâce à une de ses sœurs, devenue diaconesse à Strasbourg, il avait obtenu une place de jardinier de la maison de diaconesses à laquelle elle appartenait. Cette maison s'occupait d'une école et d'un hôpital ; elle avait un très grand jardin, dans lequel Charles a passé une grande partie de son enfance. Son grand-père maternel était meunier ; un de ses oncles maternels lui a peut-être donné le goût des voyages : pasteur, il fut missionnaire en Inde jusqu'à la guerre de 1914 ; il était alors rentré en Alsace, où il était pasteur près de Strasbourg.

Les parents d'Ehresmann ne parlaient pas le français ; sa langue maternelle fut donc le dialecte alsacien ; il fit évidemment ses études primaires et le début de ses études secondaires sous le régime allemand, et il garda toute sa vie une légère pointe d'accent alsacien. Brillant élève au lycée Kléber, son passage dans la classe de « taupe » avait laissé des souvenirs qu'on citait encore quelques années plus tard, et à dix-neuf ans il entrait à l'Ecole dans la même promotion que moi : une promotion scientifique qui est toujours restée très unie, et où sa simplicité, son égalité d'humeur et sa droiture eurent vite fait de lui gagner l'affection de tous. A une époque où ce n'était pas la coutume, nous l'appelions tous par son prénom. Lui-même était resté très fidèle à l'Ecole ; il se retrouvait toujours avec plaisir au Pot annuel des promotions 1922-26, et tenait son passage dans notre maison comme un des meilleurs souvenirs de sa vie.

Ce n'est pas qu'il fût très loquace, et sa réserve naturelle faisait contraste avec l'exubérance de beaucoup d'entre nous. Issu d'une famille de protestants convaincus, il avait assez tôt abandonné les pratiques religieuses, mais en était resté très marqué, et son idéalisme et son goût pour la philosophie y puisaient certainement leurs racines ; sous l'influence d'un de ses professeurs de lycée, il avait même un moment été attiré par l'« anthroposophie » ; son héros idéal était Gandhi, dont il savait défendre l'action avec chaleur, et je pense qu'il est resté fidèle à cet idéal de non-violence, espoir d'un monde régénéré qui semble de plus en plus appartenir au royaume des chimères.

Il était confronté à des camarades scientifiques où le scepticisme était la note dominante (ce qui est peut-être excusable chez des jeunes hommes dont l'adolescence s'était passée au temps de la grande tuerie de 1914-18, qui en avaient subi le « bourrage de crânes », et qui voyaient déjà ressurgir la montée des périls, conséquence de l'inguérissable folie humaine) ; aussi se trouvait-il plus à l'aise auprès de philosophes comme Cavaillès (1923) et Canguilhem (1924), et plus tard il se lia d'amitié avec Lautman (1926), le philosophe de notre temps qui s'est le plus intéressé aux mathématiques, et qu'il avait retrouvé à Paris avant 1939.

Son goût pour les voyages, qui devait le mener aux quatre coins du monde, se manifesta dès sa sortie de l'Ecole, car, après son année de service militaire, il demanda un poste au lycée de Rabat, où il resta l'année 1928-29, ce qui lui permit de visiter le Maroc. Mais sa passion pour la recherche mathématique était la plus forte, et dès 1930 il commença à travailler en vue d'une thèse, d'abord à Göttingen en 1930-31, puis à Princeton en 1932-34. Docteur en 1934, il resta au C.N.R.S. comme chargé de recherches jusqu'en 1939, date à laquelle il fut nommé maître de conférences à Strasbourg. Une fois démobilisé, il rejoignit cette Université, alors repliée à Clermont-Ferrand. Par un heureux concours de circonstances, il put échapper à la rafle des professeurs strasbourgeois où, en novembre 1943, beaucoup de ses collègues furent emmenés en déportation ; mais il dut se cacher aux environs de Clermont-Ferrand jusqu'à la Libération. Rentré à Strasbourg en 1945, il y resta jusqu'à sa nomination à Paris en 1955, dans une chaire de Topologie créée pour lui. Son départ à la retraite en 1975 lui fut un déchirement ; il put cependant encore continuer à enseigner comme chargé d'enseignement à l'Université d'Amiens, jusqu'à ce que la maladie le forçât d'interrompre ses cours. A partir de 1952, il avait été invité pour de fréquents séjours de plusieurs mois dans de nombreuses Universités étrangères, jusque vers 1969.

Ce n'est pas le lieu, dans cette notice, d'entreprendre une étude technique des travaux mathématiques d'Ehresmann, mais il faut souligner qu'il a dès à présent sa place dans la galerie des grands mathématiciens de notre temps qui ont créé une nouvelle branche des mathématiques, la Topologie différentielle. Sa thèse, qui, pour la première fois, décrivait l'homologie des grassmanniennes, est restée classique, vu l'importance centrale de ces variétés dans toute la Topologie et la Géométrie différentielle modernes. Dès ses études de licence, il avait été attiré par les profonds travaux d'Elie Cartan dans ces disciplines, tellement en avance sur leur temps qu'ils n'étaent compris que d'un tout petit nombre d'initiés. C'est à Ehresmann que revient en grande partie le mérite d'avoir su dégager de ces difficiles mémoires deux notions qui n'y figuraient que sous forme implicite et dont il fut un des premiers à montrer la fécondité, universellement reconnue aujourd'hui : les espaces fibrés, et surtout les connexions. Et c'est lui qui a été l'initiateur de deux théories en plein essor à l'heure actuelle, celle des « jets », et (en collaboration avec G. Reeb, un de ses premiers élèves) celle des feuilletages.

Dans ces travaux se manifestait une de ses tendances fondamentales, le besoin de comprendre, par-delà les techniques de calcul, la raison profonde des phénomènes mathématiques. Aussi participa-t-il avec ardeur, dès le début, à l'entreprise du groupe de mathématiciens de sa génération connu sous le nom de « collaborateurs de N. Bourbaki », dont le but principal était précisément de mettre en évidence les structures mathématiques simples et fécondes, souvent ensevelies sous un fatras de développements inutiles ou trop particuliers, et d'en faire des outils puissants en vue de recherches nouvelles. Dès avant 1940, il rêvait d'une théorie abstraite de toutes les espèces possibles de structures, ce qui rencontrait quelques réticences au sein du groupe Bourbaki ; lorsqu'il l'eut quitté, il trouva dans la naissante théorie des catégories le climat intellectuel qu'il recherchait, et plus de la moitié des quelque 130 articles qu'il a publiés se rapportent à cette théorie. L'avenir seul dira la portée véritable de ces recherches, insérées pour la plupart dans la publication « Cahiers de Topologie et de Géométrie différentielle » qu'il a dirigée depuis 1957.

Sa vie professionnelle n'a jamais cessé d'être guidée par sa scrupuleuse honnêteté intellectuelle, son désir ardent de l'action créatrice et l'idéalisme candide de sa jeunesse. Très modeste bien que conscient de sa valeur, il avait longuement hésité avant de faire acte de candidature à la Sorbonne. Je ne crois pas qu'il se soit jamais inféodé à un des « clans » qui se forment presque inévitablement dans les Universités, et je ne lui ai jamais connu d'ennemis. Ces tendances permanentes et sa générosité naturelle ne se sont jamais manifestées avec plus d'éclat que dans son rôle de professeur. Il adorait enseigner et, avec Henri Cartan (1923) et André Lichnerowicz (1933), il est sans doute un de ceux qui ont suscité le plus grand nombre de vocations mathématiques ; il a dirigé environ 50 thèses de 3^{e} cycle et aussi 26 thèses de doctorat d'Etat ; plusieurs de ses anciens élèves, français et étrangers, sont devenus des mathématiciens de renommée internationale ; je ne citerai qu'un seul nom, celui de son premier élève, Feldbau, alsacien comme lui, promis à une brillante carrière et victime de la barbarie nazie.

Au dire de ses élèves, les cours d'Ehresmann ne ressemblaient guère aux exposés brillants et impeccables de certains de ses collègues ; il les préparait consciencieusement, mais souvent, au milieu du cours, une idée nouvelle lui venait à l'esprit et il en explorait les conséquences imprévues sans plus se soucier de son plan primitif. Par contre, tous proclament à l'envi l'incomparable stimulant que leur apportaient les conversations privées avec leur maître ; il s'y dépensait sans compter, cherchant toujours à leur communiquer sa passion pour les mathématiques et à les forcer à se dépasser eux-mêmes ; et c'est presque mourant qu'il a encore tenu à assister en partie à la soutenance de thèse de son dernier élève en juin 1979.

Il n'avait jamais été malade et avait gardé jusque dans la vieillesse une allure étonnamment jeune et une énergie indomptable ; en dépit de premiers troubles de santé en 1977 et 1978, il refusait de consulter des médecins. Il fut terrassé en décembre 1978 par une grave crise d'urémie, compliquée quelques jours plus tard d'un œdème du poumon. Ses reins ne fonctionnaient plus et il dut rester sous dialyse permanente ; il résista encore dix mois, s'affaiblissant graduellement sans souffrances, avant que son organisme, épuisé, ne succombât.

Jean DIEUDONNÉ.

Le 22 septembre dernier, Charles Ehresmann quittait ce monde ; depuis le 4 décembre 1978, les soins inlassables de sa femme et le dévouement compétent de ses médecins tentaient en vain de l'arracher au coma et à la mort.

A tous ceux qui l'ont approché Charles Ehresmann laisse un souvenir vivace : la chaleur de son accueil, son ouverture d'esprit et l'éclat de ses yeux bleus sous un large front dégarni. Il était à la fois très humain et passionné par toute discussion concernant les mathématiques ; sa capacité de travail était exceptionnelle : il fut l'organisateur de plusieurs conférences internationales, le co-éditeur de plusieurs grandes revues mathématiques, ne reculant pas devant une tâche assez exceptionnelle : il créa seul, en 1957, puis développa ensuite avec la collaboration de celle qui devait devenir sa femme, les « Cahiers de Topologie et Geométrie différentielle », devenus maintenant l'une des deux seules revues au monde à être consacrées essentiellement aux catégories, et l'une des rares revues mathématiques à vivre sans subvention.

Il laisse une œuvre mathématique considérable, qu'on s'accorde généralement à diviser en deux parties :

La première, réalisée avant 1957, fait de lui l'un des plus grands créateurs de la topologie différentielle : il y développe des notions-clefs, des outils maintenant classiques, et il y exprime déjà ce besoin de comprendre qui, vers 1957, lors de son étude des « structures locales », lui fait introduire ce qu'il appelle les catégories ordonnées. C'est le début de la seconde partie de son œuvre, consacrée presque exclusivement au développement de sa théorie des catégories. Il va y consacrer vingt-deux ans de sa vie, d'abord seul, puis en collaboration avec Andrée Ehresmann, et avec de nombreux jeunes chercheurs ; les soixante mémoires qu'il y consacrera sont publiés, soit dans des revues internationales, soit dans ses *Cahiers de topologie et géométrie différentielle*.

La théorie des catégories, qu'Ehresmann a beaucoup contribué à développer, est l'une de ces nouvelles branches des mathématiques qui, depuis vingt ou trente ans, sont nées ou ont connu un développement explosif. Comme l'ont été la logique et une partie de la théorie des probabilités, elle est l'objet de vives contestations de la part de nombreux mathématiciens. Comme à la logique, on lui reproche de se prêter facilement à de grands développements formels et faciles : mais il est probable que, comme la logique, elle se verra reconnaître droit de cité quand assez de bons esprits y auront travaillé. Le fait qu'un chercheur de la classe d'Ehresmann, reconnu comme un des plus grands en topologie différentielle, ait consacré à cette théorie toute son énergie pendant plus de vingt ans soit dans ses « Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle ».

Pour Ehresmann, la recherche mathématique était une source de joie constante ; pour lui, les mathématiques étaient un art autant qu'une science, et la découverte une création libre dont la valeur réside dans ses possibilités indéfinies d'extension. « Le mathématicien, disait-il, est engagé dans la poursuite d'un rêve sans fin, dont la traduction en formules précises exige un effort extraordinaire ; le vrai but de son rêve perpétuel est de comprendre la structure de toute chose ».

Il pensait que son œuvre était loin d'être achevée et il comptait sur son épouse pour la poursuivre. Le fait que sa vie privée, depuis vingt ans, ait été indissolublement liée à sa vie de mathématicien, et que tous deux aient vécu une exceptionnelle symbiose intellectuelle, permet de penser qu'il ne se trompait pas.

Gustave CHOQUET.

Extrait de l'Annuaire des Anciens Elèves de
l'Ecole Normale Supérieure, 1980.

PARTIE I - 1

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE

Rapport sur les travaux de Jacques Feldbau.

FELDBAU

par Mr Charles Ehresmann

J. Feldbau a poursuivi ses recherches de mathématiques sous la direction de C. Ehresmann, à l'Université de Strasbourg, de 1939 à 1943, d'abord à Strasbourg et, après l'armistice de 1940, à Clermont-Ferrand. Arrêté et déporté en Allemagne en 1943, il n'a pu terminer la rédaction de sa thèse, mais les résultats qu'il avait obtenus, et qu'il avait publiés partiellement, ou exposés dans le Séminaire de C. Ehresmann, auraient été suffisants pour faire l'objet d'une excellente thèse de doctorat ès-sciences mathématiques. Il en avait tracé le plan général et commencé la rédaction, et il comptait soutenir sa thèse avant ~~la fin~~ de l'année scolaire 1943-44

EHRESMANN

Dans ses recherches J. Feldbau s'est intéressé principalement à la théorie des espaces fibrés et à la théorie de l'homotopie, qui étaient encore à leurs débuts en 1939. La notion d'espace fibré a été introduite d'une façon explicite par Seifert en 1933 dans le cas des variétés à trois dimensions fibrées par des cercles. Elle a été généralisée

SEIFERT

WHITNEY
par Whitney pour le cas des variétés fibrées en sphères euclidiennes. Feldbau aborde l'étude des espaces fibrés à fibres quelconques. La Note qu'il a publiée en collaboration avec C. Ehresmann, en 1941, donne la définition générale d'un espace fibré à groupe structural G. La première Note de J. Feldbau publiée en 1939, contient le théorème important suivant : Un espace fibré dont l'espace de base est un simplexe est isomorphe au produit de ce simplexe par une fibre.

Dans le premier chapitre de sa thèse, J. Feldbau comptait exposer en détail la théorie des groupes d'homotopie de Hurewicz, qui était connue à cette époque seulement par quelques courtes notes. Les propriétés d'homotopie des espaces fibrés forment l'objet principal de la Note publiée en collaboration avec C. Ehresmann. On y trouve essentiellement le théorème du relèvement des homotopies et la suite exacte d'homotopie des espaces fibrés.

Dans un article du Bulletin de la Société Mathématique de France, publié sous le nom de J. Laboureur, J. Feldbau étudie les espaces

3. fibrés sur une sphère S_n. Il montre que chaque classe d'isomorphie de ces espaces fibrés correspond à une ou plusieurs classes d'homotopie d'applications de S_{n-1} dans le groupe structural topologique G. Il est conduit en même temps à l'étude des sphères parallélisables.

Dans un autre article du Bulletin de la Société Mathématique de France, J. Feldbau aborde le problème suivant : Pour une structure fibrée à fibres sphériques, est-il possible de réduire le groupe structural au groupe orthogonal ? Il pensait pouvoir répondre affirmativement à cette question, mais sa démonstration contient une lacune concernant la topologie du groupe des automorphismes d'une sphère. La publication de Feldbau a cependant eu le mérite de susciter des recherches approfondies sur ce problème très important.

Le dernier manuscrit préparé par Feldbau concerne les classe d'homotopie des applications d'un produit de sphères $S_p \times S_q$ dans un espace E. Il n'a pas été publié, mais l'auteur en a exposé les résultats dans le Séminaire de C. Ehresmann en 1943. Lorsque le manuscrit a été retrouvé après la fin de la guerre, ces résultats étaient dépassés par des publications de J.H.C. Whitehead WHITEHEAD et Fox FOX.

Dans ce manuscrit, Feldbau étudie la loi de composition entre éléments de deux groupes d'homotopie $\pi_p(E)$ et $\pi_q(E)$, connue actuellement sous le nom de produit de Whitehead.

L'idée lui en avait été indiquée sommairement par A. Weil, mais l'article de Whitehead de 1941 était inaccessible à Clermont-Ferrand en 1943. Cette loi de composition permet à Feldbau de caractériser la structure de l'ensemble des classes d'applications de $S_p \times S_q$ dans E et il est ainsi conduit en particulier aux groupes d'homotopie toroïdaux, dont l'idée est suggérée vaguement dans l'introduction du livre de de Kerékjarto KÉRÉKJARTO et qui ont fait, après la guerre, l'objet d'une publication de Fox.

Les recherches de J. Feldbau concernent des problèmes qui ont fini par attirer l'intérêt d'un très grand nombre de mathématiciens depuis une dizaine d'années. Ses résultats ont été très remarqués, et ont exercé une influence certaine sur le développement de la théorie des espaces fibrés.

4 février 1958

fin de la guerre, ces résultats étaient dépassés par des publications de J.H.C. Whitehead et Fox.

Dans ce moment, Feldbau étudie la loi de composition entre éléments de deux groupes d'homotopie $\pi_p(E)$ et $\pi_q(E)$, connue actuellement sous le nom de produit de Whitehead.

L'idée lui en avait été indiquée sommairement par A. Weil, mais l'article de Whitehead de 1941 était inaccessible à Clermont-Ferrand en 1943. Cette loi de composition permet à Feldbau de caractériser la structure de l'ensemble des classes d'application de $S_p \times S_q$ dans E et il est ainsi conduit en particulier aux groupes d'homotopie toroïdaux, dont l'idée est suggérée vaguement dans l'introduction du livre de de Kérékjártó et qui ont fait, après la guerre, l'objet d'une publication de Fox.

Les recherches de J. Feldbau concernent des problèmes qui ont fini par attirer l'intérêt d'un très grand nombre de mathématiciens depuis une dizaine d'années. Ses résultats ont été très remarqués, et ont exercé une influence certaine sur le développement de la théorie des espaces fibrés.

4 février 1958

Cette Partie I-1 contient une reproduction photographique des articles originaux de Topologie Algébrique, à l'exception de l'exposé /5/ et des Notes aux CRAS qui, pour des raisons typographiques (format plus grand) figurent dans la Partie I-2. Les commentaires sur les travaux des Parties I-1 et I-2 sont réunis à la fin de la Partie I-2.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR M. CHARLES EHRESMANN

1re THÈSE — **SUR LA TOPOLOGIE DE CERTAINS ESPACES HOMOGÈNES**

2e THÈSE — **ÉTUDE DES POTENTIELS**

SOUTENUES LE 9 JUILLET 1934 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN :

MM. CARTAN, PRÉSIDENT

JULIA
GARNIER } EXAMINATEURS

Faculté des Sciences de l'Université de Paris

MM.

Doyen honoraire ..... M. Molliard.

Doyen .... C. Maurain, *Professeur*, Physique du globe.

Professeurs honoraires
H. Le Chatelier.
H. Lebesgue.
A. Fernbach.
A. Leduc.
Émile Picard.
Rémy Perrier.
Léon Brillouin.
Goursat.
Wallerant.
Guillet.
Pechard.
Freundler.

PROFESSEURS

P. Janet ....Électrotechnique générale.
G. Bertrand ......Chimie biologique.
Mme P. Curie .....Physique générale.
M. Caullery .....Zoologie (Évolution des êtres organisés).
G. Urbain ....Chimie générale.
Émile Borel ......Calcul des probabilités et Physique mathém.
L. Marchis ....Aviation.
Jean Perrin ......Chimie physique.
H. Abraham ......Physique.
E. Cartan ....Géométrie supérieure.
M. Molliard ......Physiologie végétale.
L. Lapicque ....Physiologie générale.
E. Vessiot ....Théorie des fonctions et théorie des transformations.
A. Cotton ....Physique.
J. Drach ....Analyse supérieure.
Charles Fabry .....Physique.
Charles Pérez .....Zoologie.
Léon Bertrand ....Géologie structurale et géologie appliquée.
É. Blaise ....Chimie organique.
R. Lespieau ......Théories chimiques.
P. Portier ....Physiologie comparée.
E. Rabaud ....Biologie expérimentale.
P.-A. Dangeard ....Botanique.
V. Auger ....Chimie appliquée.
M. Guichard .....Chimie minérale.
Paul Montel .....Mécanique rationnelle.
P. Wintrebert ....Anatomie et histologie comparées.
L. Blaringhem ...Botanique.
O. Duboscq ....Biologie maritime.
G. Julia ....Mécanique analytique.
C. Mauguin ......Minéralogie.
A. Michel-Lévy...Pétrographie.
H. Bénard ....Mécanique expérimentale des fluides.
A. Denjoy ....Calcul différentiel et calcul intégral.
L. Lutaud ....Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène Bloch ....Physique théorique et physique céleste.
G. Bruhat ....Physique.
E. Darmois ....Physique.
A. Debierne ......Radioactivité.
A. Dufour ....Physique (P. C. N.).
L. Dunoyer ......Optique appliquée.
A. Guilliermond..Botanique (P. C. N.).
M. Javillier ......Chimie biologique.
L. Joleaud ....Paléontologie.
Robert-Lévy ......Zoologie.
H. Mouton ....Chimie physique.
F. Picard ....Zoologie (Évolution des êtres organisés).
Henri Villat ......Mécanique des fluides et applications.
Ch. Jacob ....Géologie.
P. Pascal ....Chimie minérale.
M. Fréchet ....Calcul des Probabilités et Physique mathématique.
E. Esclangon .....Astronomie.
Mlle Ramart-Lucas Chimie organique.
H. Béghin ....Mécanique physique et expérimentale.
Foch ....Mécanique expérimentale des fluides.
Pauthenier ......Physique (P. C. N.).
De Broglie ....Théories physiques.
Chrétien ....Optique appliquée.
P. Job ....Chimie générale.
Labrouste ....Physique du Globe.
Prenant ....Zoologie.
Villey ....Mécanique physique et expérimentale.
Bohn ....Zoologie (P. C. N.).
Combes ....Sciences naturelles (P. C. N.).
Garnier ....Mécanique rationnelle.
Pérès ....Mécanique des fluides.
Hackspill ....Chimie (P. C. N.).
Laugier ....Physiologie générale.
Toussaint ....Technique Aéronautique.
M. Curie ....Physique (P. C. N.).
G. Ribaud ....Hautes températures.
M. Chazy ....Mathématiques.
M. Gault ....Chimie (P. C. N.).
M. Croze ....Physique.
Dupont ....Chimie (P. C. N.)

Sécrétaire ....A. Pacaud
Sécrétaire Honoraire ....D. Tombeck

A

MONSIEUR ÉLIE CARTAN

MEMBRE DE L'INSTITUT

HOMMAGE DE RESPECTUEUSE ADMIRATION

ANNALS OF MATHEMATICS
Vol. 35, No. 2, April, 1934

/4/

PREMIÈRE THÈSE

SUR LA TOPOLOGIE DE CERTAINS ESPACES HOMOGÈNES

Préface. Les propriétés d'un espace homogène dans lequel opère un groupe transitif de Lie expriment simplement les propriétés de ce groupe. Il serait intéressant de savoir les relations entre la topologie d'un tel espace et les propriétés de son groupe de structure. Nos connaissances à ce sujet sont encore très incomplètes. Cependant, dans ses recherches concernant les groupes simples et les espaces homogènes symétriques, M. E. Cartan est arrivé à des résultats remarquables qui font connaître certaines de ces relations. Un des résultats les plus surprenants ramène la détermination des nombres de Betti d'un espace riemannien symétrique clos à un problème purement algébrique concernant le groupe linéaire d'isotropie de cet espace. Il existe une classe d'espaces riemanniens symétriques clos qui sont réalisés par des variétés algébriques complexes. Dans ce mémoire nous nous proposons d'étudier les propriétés topologiques des espaces de cette classe. La méthode indiquée par M. E. Cartan pour calculer les nombres de Betti revient, pour ces espaces, à décomposer certains groupes linéaires en groupes irréductibles. Ce sera l'une des méthodes employées. Comme les espaces considérés ont des définitions géométriques simples, nous avons cherché une deuxième méthode, qui utilise des procédés habituels à la topologie, à savoir les déformations et les subdivisions en cellules. Par cette deuxième méthode on peut déterminer d'une façon élémentaire les bases d'homologie et les groupes de Poincaré. Nous étudierons ainsi tous les espaces de la classe considérée et nous appliquerons la deuxième méthode à certaines autres familles de variétés algébriques. Nous démontrerons par la topologie certaines formules de géométrie énumérative, en particulier une formule importante due à H. Schubert.

Pour faciliter la lecture de ce mémoire, nous rappelons dans la première section quelques notions et quelques résultats qui jouent un rôle fondamental dans les travaux déjà mentionnés de M. E. Cartan. En ce qui concerne la topologie, nous renvoyons à un ouvrage de M. S. Lefschetz: "*Topology*" (voir l'index bibliographique). Au sujet des propriétés classiques des variétés étudiées, on trouvera des renseignements très complets dans un article de C. Segre: *Mehrdimensionale Räume.*

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. Elie Cartan et à M. Salomon Lefschetz qui ont bien voulu montrer de l'intérêt pour mon travail. Leurs critiques et leurs suggestions m'ont grandement aidé au cours de mes recherches.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

CARTAN, E.: a. *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs* (Memorial Sc. math., fasc. XLII, 1930).

b. *Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces* (Ann. Soc. pol. Math., 8, 1929, p. 181–225).

c. *Les espaces riemanniens symétriques* (Verh. internat. Math.-Kongr. 1, p. 152-161, 1932).

d. *La géométrie des groupes simples* (Annali di Mat., 4, 1927, p. 209–256).

e. *Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple* (Ann. Ec. Norm., 44, 1927, p. 345–467).

f. *Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane* (Bull. Soc. Math. France, 41, 1913, p. 53-96).

g. *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes* (Publ. math. Univ. Belgrade 1, p. 55–74, 1932).

EHRESMANN, C.: a. *Les invariants intégraux et la topologie de l'espace projectif réglé* (C. R. Acad. Sci. Paris, 194, 1932, p. 2004–2006).

b. *Sur la topologie de certaines variétés algébriques* (C. R. Acad. Sci. Paris, 196, 1933, p. 152–154).

KOOPMAN, B. O., AND BROWN, A. B.: a. *On the covering of analytic loci by complexes* (Trans. Am. Math. Soc., 34, 1932, p. 231–251).

LEFSCHETZ, S.: a. *Topology* (Am. Math. Soc. Colloquium, Publ. New York, 1932).

b. *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques* (Mémorial Sc. Math. fasc. XL, 1929).

LEFSCHETZ, S., AND WHITEHEAD, J. H. C.: a. *On analytical complexes* (Trans. Am. Math. Soc., 35, 1933, p. 510–517).

DE RHAM, G.: a. *Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions* (J. Math. pures et appl., 10, 1931, p. 115–200).

SCHUBERT, H.: a. *Lösung des Charakteristiken—Problems für lineare Räume beliebiger Dimension* (Mitteil. Math. Ges. Hamburg 1, 1886).

b. *Kalkül der abzählenden Geometrie* (Leipzig, Teubner 1879).

SEGRE, C.: a. *Mehrdimensionale Räume* (Encyklop. d. math. Wissensch. III 2 C 7).

SEVERI, F.: a. *Sulla varieta que rappresenta gli spazi subordinati di date dimensione, immersi in uno spazio lineare* (Annali di Math., 1915).

b. *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche* (Atti del R. Instituto Veneto di Sc. L. ed A., 1916).

c. *Le coincidenze di una seri algebrica di coppie di spazi a k dimensioni*, etc. (Rendiconti d. R. Accad. dei Lincei, vol. IX, p. 321-326).

TUCKER, A. W.: a. *An abstract approach to manifolds* (Ann. of Math. 2, vol. 34, p. 191–243).

VANEY, F.: a. *Le parallélisme absolu dans les espaces elliptiques réels à 3 et à 7 dimensions etc.* (Thèse, Paris, Gauthier-Villars, 1929).

VAN DER WAERDEN, B. L.: a. *Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie* (Math. Ann., 102, 1929, p. 337-362).

b. *Zur algebraischen Geometrie IV* (Math. Ann., 109, 1933, p. 7-12).

WEYL, H.: a. *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen I* (Math. Zeitschr., 23, 1925, p. 271–309).

I. Généralités sur les espaces homogènes[1]

1. **Définitions et propriétés générales.** Un *espace homogène* du type le plus général est un espace topologique dont le groupe des *homéomorphies* est

[1] Voir E. Cartan, *a* et *b*. Pour les titres complets des articles et des ouvrages cités voir l'index bibliographique.

transitif. Dans la suite nous réservons le nom d'espace homogène à une variété topologique à n dimensions qui est transformée transitivement par un groupe fini et continu G. Ce groupe sera appelé le *groupe de structure* de l'espace et nous supposerons que c'est un groupe fini et continu de Lie.

Soit E un tel espace homogène, G son groupe de structure et g le plus grand sous-groupe de G qui laisse invariant un point O de l'espace. g est un sous-groupe fermé dans G. En outre g ne contient pas de sous-groupe invariant dans G, si aucune transformation de G ne laisse fixes tous les points de E. G est supposé connexe. Le groupe g s'appelle *groupe d'isotropie* ou groupe des rotations autour de O.

A un point M arbitraire de E on peut faire correspondre l'ensemble Sg de toutes les transformations de G amenant O en M. On les obtient en effectuant successivement une transformation arbitraire de g et une transformation particulière S qui amène O en M. Réciproquement étant donné un groupe G, soit g un sous-groupe fermé dans G. L'ensemble de G et de g peut servir à définir un espace homogène E dont les points correspondent aux ensembles de transformations Sg de G. Il y aura une correspondance ponctuelle entre les points de E et les points de la variété du groupe G. Un point de G a pour image un point unique M de E, mais un point M de E correspond à un ensemble de points Sg de G. Un voisinage du point M dans E se compose des images des ensembles sSg, où s est un élément arbitraire d'un voisinage V_0 de l'élément unité dans G. Ainsi un voisinage du point O se compose des images des ensembles sg. Supposons que les paramètres dans une région autour de l'élément unité de G soient des paramètres canoniques. Chaque transformation dans cette région est alors représentée d'une manière et d'une seule par le symbole $e_1X_1 + e_2X_2 + \cdots + e_nX_n + e_{n+1}X_{n+1} + \cdots + e_rX_r$. Le sous-groupe g, qui est fermé dans G, est un groupe de Lie et nous supposerons que sa partie connexe contenant l'élément unité est engendrée par $X_{n+1}, \cdots, X_{r-1}, X_r$. Si V_0 est suffisamment petit, tout élément s de V_0 est le produit d'une transformation bien déterminée de g par une transformation bien déterminée t de V_0 représentée par $e_1X_1 + e_2X_2 + \cdots + e_nX_n$. Cela veut dire que la variété sg coupe l'hyperplan $e_{n+1} = e_{n+2} = \cdots = e_r = 0$ en un seul point t à l'intérieur de V_0. Le point P qui représente dans E l'ensemble sg est en correspondance biunivoque avec le point t de paramètres $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Tout autre point de G correspondant au point P est représenté d'une manière et d'une seule par un produit tg. Donc la région de G qui a pour image sur E un voisinage V_0' suffisamment petit de O est le produit topologique de V_0' et de g.

Une transformation T de G fait correspondre au point M, image de Sg, le point M', image de TSg. En particulier S^{-1} transforme le voisinage V_0Sg du point M en un voisinage $S^{-1}V_0Sg$ du point O. Les points de ce dernier voisinage sont encore en correspondance biunivoque avec des points t de paramètres $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. En revenant au point M par la transformation S, on voit qu'un voisinage V_0' de M a pour image dans G le produit topologique de V_0' et de g. Cette propriété a lieu pour un voisinage suffisamment petit d'un point quelconque de E; mais, en général, la variété de G n'est pas globalement le produit topologique de E et de g. E est un espace de décomposition pour la variété G. Les propriétés d'un espace homogène ne traduisent ou ne révèlent que des propriétés de son groupe de structure. Cette remarque s'applique en particulier aux propriétés *topologiques*. L'existence même de la décomposition de la variété G qui fournit l'espace homogène E est une propriété topologique de G, qui permettrait peut-être d'arriver encore à de nouveaux résultats.

2. **Groupe de Poincaré d'un espace homogène.** Le groupe de Poincaré de l'espace homogène E dépend d'une façon assez simple des propriétés de l'ensemble de G et de g.

Toute courbe dans G a pour image une courbe dans l'espace homogène E. Tout arc OM dans E peut être recouvert par un nombre fini de voisinages V_0 dont chacun a pour image dans G une région qui est le produit topologique de ce voisinage avec g. On obtient alors sans peine un arc continu IS dans G qui a pour image l'arc OM. On peut aussi trouver dans G deux arcs voisins ayant pour images dans E deux arcs voisins donnés. Si l'on déforme l'arc OM d'une façon continue en laissant les points O et M fixes, on peut définir une déformation correspondante de l'arc IS, I restant fixe et S se déplaçant en général sur l'ensemble Sg. Etant donnée dans E une courbe fermée orientée C partant de O et y revenant, il lui correspond dans G une courbe orientée allant de l'élément unité I à un point J de g.

Le sous-groupe g peut se composer de plusieurs parties connexes $g_0, g_1, \cdots, g_k$. La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe C soit réductible à O par déformation continue est qu'il lui corresponde dans G une courbe IJ qui soit déformable en une courbe située sur g_0, le point I étant fixe et J pouvant se déplacer d'une façon continue sur g. Le point J se trouvera alors nécessairement sur g_0. On peut alors définir dans la variété de G un groupe Γ isomorphe au groupe de Poincaré de l'espace E. Une courbe allant de I à un point J_α de la variété g_α représente un élément du groupe. Soient deux courbes IJ_α et IJ_β. Si S est le point général de la courbe IJ_β, le point SJ_α décrit une courbe $J_\alpha J_\gamma$ allant du point J_α au point $J_\gamma = J_\beta J_\alpha$. La courbe composée de IJ_α et $J_\alpha J_\gamma$ représentera le produit des deux éléments de Γ correspondant à IJ_α et IJ_β. L'élément unité du groupe sera représenté par toutes les courbes IJ_0 qui sont déformables en des courbes situées sur g_0, en supposant I fixe et J_0 mobile sur g_0. Le groupe Γ a pour sous-groupe invariant le groupe Γ_0 représenté par les courbes IJ_0. Le groupe quotient Γ/Γ_0 est isomorphe au groupe quotient g/g_0. En particulier, *si g est connexe le groupe Γ se réduit à Γ_0. Si le groupe G est simplement connexe, Γ se réduit à g/g_0.*

Si G n'est pas simplement connexe, on peut considérer la variété simplement connexe de recouvrement de G. C'est la variété d'un groupe $\bar{G}$. g_0 a pour image dans $\bar{G}$ une variété $\bar{g}_0$ formant un sous-groupe de $\bar{G}$. $\bar{g}_0$ n'est pas nécessairement connexe. Si $\bar{g}_0'$ est la partie connexe de $\bar{g}_0$ contenant l'élément unité, le groupe discontinu $\bar{g}_0/\bar{g}_0'$ est isomorphe au groupe Γ_0. Si $\bar{g}$ est le plus grand sous-groupe de $\bar{G}$ recouvrant g, le groupe Γ est isomorphe au groupe quotient $\bar{g}/\bar{g}_0'$.

3. **Espaces homogènes orientables et non orientables.** Considérons un point P infiniment voisin de O. Il définit un vecteur infiniment petit $\overrightarrow{OP}$ ou une direction issue de O. Le point P se déduit de O par une transformation infinitésimale $e_1X_1 + \cdots + e_nX_n$ bien déterminée et les quantités $e_1, e_2, \cdots, e_n$ peuvent être considérées comme les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$. Etant donnés n vecteurs infiniment petits $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \cdots, \overrightarrow{OP_n}$, nous dirons que le simplexe $OP_1P_2 \cdots P_n$ est de sens positif lorsque le déterminant $|e_i^{(j)}|$ des composantes de ces vecteurs est positif. Si le déterminant a une valeur négative, le simplexe est dit de sens négatif. Etant donnée une courbe allant de O à M, on peut la considérer comme image d'une courbe dans la variété G allant de l'élément unité I à un élément S. La courbe IS définit un déplacement continu le long de la courbe OM amenant le simplexe $OP_1P_2 \cdots P_n$ en un simplexe $MQ_1Q_2 \cdots Q_n$. Soit en particulier une courbe fermée (C) passant par O. On peut lui faire correspondre dans G une courbe allant de I à un élément R qui appartient à g. Le déplacement le long de la courbe (C) amène le simplexe $OP_1P_2 \cdots P_n$ en un simplexe $OQ_1Q_2 \cdots Q_n$. Un point P correspondant à une transformation infinitésimale s est amené au point Q correspondant à la transformation Rs ou $(RsR^{-1})R$. Le point Q est donc défini par la transformation infinitésimale RsR^{-1} qui se déduit de s par une opération du groupe adjoint linéaire de G. Lorsque R varie d'une façon quelconque dans g, cette opération engendre un sous-groupe du groupe adjoint linéaire. Comme elle laisse invariantes les transformations infinitésimales de g, les variables $e_1, \cdots, e_n$ sont transformées entre elles suivant les transformations d'un groupe linéaire γ. Ce groupe indique simplement comment le groupe g transforme entre eux les vecteurs infiniment petits d'origine O. Nous l'appellerons *groupe linéaire d'isotropie*. Si le déterminant de l'opération de γ correspondant à R est positif, le simplexe $OQ_1Q_2 \cdots Q_n$ a le même sens que le simplexe primitif. Si ce déterminant est négatif, le déplacement le long de la courbe fermée (C) ramène le simplexe au point O avec un sens opposé.

L'espace E sera orientable lorsque le déterminant de γ est toujours positif. Il sera non orientable lorsque ce déterminant n'a pas son signe constant. En particulier si g est connexe, le déterminant de γ ne peut pas changer de signe et l'espace E est orientable. Ainsi la variété d'un groupe est toujours orientable.

Le groupe γ est en relation avec d'autres propriétés de l'espace E. Rappelons que l'existence dans E d'une métrique riemannienne invariante par G revient à l'existence d'une forme quadratique définie positive en $e_1, e_2, \cdots, e_n$ invariante par le groupe γ.

4. **Les invariants intégraux d'un espace homogène à groupe fondamental clos.**[2] Un invariant intégral de degré p de l'espace homogène E est une intégrale $\int\Omega$ de degré p dont l'élément Ω est invariant par G. Ω est une forme extérieure $\Sigma A_{i_1i_2\cdots i_p}[dx_{i_1}\, dx_{i_2} \cdots dx_{i_p}]$ dont les coefficients $A_{i_1i_2\cdots i_p}$ sont des fonctions

[2] Voir E. Cartan, *b*.

uniformes des coordonnées x_1, x_2, $\cdots$, x_n d'un point M dans l'espace E. Les produits extérieurs $[dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_p}]$ sont les composantes d'un p-vecteur formé de p vecteurs infiniment petits d'origine M.

La forme Ω sera complètement déterminée par sa valeur Ω^0 au point O, soit $\Omega^0 = \Sigma A^0_{i_1 i_2 \cdots i_p} [dx_{i_1} dx_{i_2} \cdots dx_{i_p}]$. On peut considérer comme composantes d'un vecteur infiniment petit $\overrightarrow{OP}$ soit les différentielles correspondantes $dx_1, \cdots, dx_n$, soit les paramètres ω_1, ω_2, $\cdots$, ω_n de la transformation infinitésimale $\omega_1 X_1 + \omega_2 X_2 + \cdots + \omega_n X_n$ qui amène O en P. Les ω_i sont des formes linéaires indépendantes par rapport aux dx_i. Donc Ω^0 peut se mettre sous la forme $\Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_p}]$. Une transformation R du groupe des rotations g amène le vecteur $\overrightarrow{OP}$ de composantes ω_i en un vecteur $\overrightarrow{OP'}$ dont les composantes $\bar{\omega}_i$ se déduisent des ω_i par une transformation du groupe linéaire γ. Le fait que Ω^0 est invariant par g se traduit par l'égalité:

$$\Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\bar{\omega}_{i_1} \bar{\omega}_{i_2} \cdots \bar{\omega}_{i_p}] = \Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_p}]$$

c'est-à-dire la forme $\Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_p}]$ est une forme extérieure à coefficients constants invariante par le groupe linéaire γ.

Réciproquement toute forme extérieure $\Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_p}]$ à coefficients constants invariante par γ définit un invariant intégral Ω de l'espace E.

Donc *la recherche des invariants intégraux de l'espace homogène E revient à la recherche des formes extérieures $\Sigma B_{i_1 i_2 \cdots i_p} [\omega_{i_1} \omega_{i_2} \cdots \omega_{i_p}]$ invariantes par le groupe linéaire γ.*

Si le groupe de structure G de l'espace E est clos on a deux théorèmes importants démontrés par M. E. Cartan:

a) *Toute intégrale de différentielle exacte est équivalente à un invariant intégral.*

b) *Tout invariant intégral équivalent à zéro est la dérivée extérieure d'un invariant intégral dont le degré est moindre d'une unité.*

Les intégrales que l'on considère sont des intégrales multiples $\int \Omega$ régulières[3] dans tout l'espace. Rappelons qu'une telle intégrale $\int \Omega$ est dite intégrale de différentielle exacte, si la dérivée extérieure Ω' de Ω est identiquement nulle. L'intégrale $\int \Omega$ est dite équivalente à zéro, si la forme Ω est la dérivée extérieure d'une forme Π dont le degré est moindre d'une unité. Plusieurs intégrales de différentielles exactes sont dites linéairement indépendantes, lorsqu'aucune combinaison linéaire de ces intégrales n'est équivalente à zéro.

Il résulte des théorèmes (*a*) et (*b*) que, si l'espace E admet en tout n_p formes invariantes de degré p, linéairement indépendantes au sens algébrique ordinaire, et si ν_p de ces formes sont à dérivée extérieure nulle, *le nombre d'intégrales de différentielles exactes linéairement indépendantes de degré p est égal à $\nu_p + \nu_{p-1} - n_{p-1}$.*

Un espace homogène E dont le groupe de structure est un groupe de Lie forme une variété analytique sans singularités. Il en existe par suite une subdivision polyédrale définissant une multiplicité (en anglais "manifold") du point

[3] Voir G. de Rham, *a*.

de vue de la topologie combinatoire.[4] G étant clos, l'espace E forme une variété analytique close à n dimensions dont une subdivision polyédrale fournit un complexe analytique fini. Cette variété rentre dans la catégorie des variétés closes au sujet desquelles M. G. de Rham a démontré le résultat fondamental suivant:[5]

Le nombre d'intégrales de différentielles exactes de degré p linéairement indépendantes est égal au nombre de Betti relatif à la dimension p.

La considération des invariants intégraux fournit ainsi une méthode pour déterminer les nombres de Betti d'un espace homogène à groupe fondamental clos. Soit R_p le nombre de Betti relatif à la dimension p. On a: $R_p = \nu_p + \nu_{p-1} - n_{p-1}$. Cette méthode se simplifie dans le cas des espaces homogènes symétriques.

5. **Les espaces homogènes symétriques.**[6] Un espace homogène E qui a G pour groupe de structure et g pour groupe d'isotropie au point O est dit *symétrique* s'il existe une transformation ponctuelle σ_0 de cet espace ayant les propriété suivantes:

1. σ_0 est involutive.
2. O est un point invariant isolé pour σ_0.
3. σ_0 est une automorphie de G.
4. La partie connexe de g contenant la transformation identique est le plus grand sous-groupe continu de G dont toutes les transformations sont invariantes par σ_0. —L'existence d'une "*symétrie*" σ_0 par rapport au point O entraîne l'existence d'une symétrie analogue par rapport à un point quelconque de l'espace et toutes ces symétries sont transformées entre elles par le groupe G.

Les résultats rappelés au §4 se simplifient ici en vertu du théorème suivant:

Tout invariant intégral d'un espace homogène symétrique est une intégrale de différentielle exacte.

Donc si l'espace homogène symétrique E est *clos, le nombre d'intégrales de différentielles exactes linéairement indépendantes de degré p, ou encore le nombre de Betti R_p, est égal au nombre d'invariants intégraux de degré p linéairement indépendants dans le sens algébrique ordinaire.* On connaîtra les nombres de Betti si l'on sait trouver le nombre d'invariants linéaires du groupe linéaire γ_p qui indique comment les formes extérieures $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_p}]$ sont transformées par le groupe linéaire d'isotropie γ.

γ étant un groupe clos, il existe une forme quadratique définie positive invariante par γ et par suite une métrique riemannienne à ds^2 défini positif invariante par G.

La détermination des espaces riemanniens symétriques se ramène à la détermination de ceux que sont dits *irréductibles.* Pour un espace irréductible, le

---

[4] Voir au sujet de cette subdivision: S. Lefschetz, *a*, p. 364–366. S. Lefschetz and J. H. C. Whitehead, *a*. B. O. Koopman and A. B. Brown, *a*.

[5] G. de Rham, *a*, chap. III, p. 73.

[6] Voir E. Cartan, *a*, *b* et *c*.

groupe irréductible dans le domaine réel des variables.[7] Laissons de côté les espaces riemanniens symétriques ouverts, qui sont tous homéomorphes à l'espace euclidien. Les espaces symétriques irréductibles clos se répartissent en deux catégories. La première catégorie comprend les *espaces des groupes simples clos*. La deuxième catégorie[8] comprend les *espaces dont le groupe de structure G est un groupe simple clos, le groupe d'isotropie g*, ou plutôt sa partie connexe contenant l'élément unité, *étant le plus grand sous-groupe continu de G dont toutes les transformations sont invariantes par une automorphie involutive de G.*

Pour les espaces de la deuxième catégorie, deux cas peuvent se présenter. Dans le premier cas, le groupe linéaire d'isotropie est un groupe linéaire simple ou semi-simple et *irréductible* même dans le domaine *complexe* des variables $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Dans le deuxième cas, le groupe linéaire γ, qui est toujours irréductible dans le domaine réel des variables $e_1, e_2, \cdots, e_n$, est *réductible* dans le domaine *complexe* de ces variables. Il transforme entre elles $n/2$ variables $u_1, u_2, \cdots, u_{n/2}$, combinaisons linéaires à coefficients complexes des $e_1, e_2, \cdots, e_n$ ainsi que les $n/2$ variables $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_{n/2}$, combinaisons linéaires de $e_1, e_2, \cdots, e_n$ à coefficients complexes conjugués des précédents. Le groupe γ, opérant sur ces nouvelles variables, laisse invariante la forme d'Hermite

$$u_1\bar{u}_1 + u_2\bar{u}_2 + \cdots + u_{n/2}\bar{u}_{n/2}$$

et contient toujours le groupe à un paramètre $u_k' = e^{i\theta}u_k$. γ sera le produit direct de ce groupe à un paramètre et d'un groupe simple ou semi-simple γ'. Les espaces correspondant à ce deuxième cas forment une *classe d'espaces riemanniens symétriques clos qu'on peut considérer comme analytiques complexes*. Considérons particulièrement les espaces de cette dernière classe.

Pour déterminer les nombres de Betti d'un tel espace, il faut déterminer le nombre d'invariants linéaires du groupe γ_p qui indique comment γ transforme les formes extérieures $[e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_p}]$, ou $[u_{i_1} \cdots u_{i_\alpha} \bar{u}_{i_{\alpha+1}} \cdots \bar{u}_{i_p}]$ avec les variables u_i et $\bar{u}_i$. Une combinaison linéaire de ces formes n'est invariante par la transformation

$$u_k' = e^{i\theta}u_k$$

que si elle se compose de formes ayant autant de variables u_i que de variables $\bar{u}_i$. En particulier il n'existe pas de forme extérieure invariante de degré impair. Donc les nombres de Betti relatifs aux dimensions impaires sont nuls.

Considérons alors les formes extérieures de degré $2s$, combinaisons linéaires des formes $[u_{i_1} \cdots u_{i_s} \bar{u}_{j_1} \cdots \bar{u}_{j_s}]$. Elles sont transformées par γ suivant un certain groupe linéaire γ_{2s}. Le nombre de formes de degré $2s$ invariantes par γ, c'est-à-dire le nombre d'invariants linéaires du groupe γ_{2s}, est égal à la valeur

[7] Voir E. Cartan, *d*.
[8] Voir E. Cartan, *e*.

moyenne du caractère de γ'_{2s}.[9] On voit que le caractère de γ'_{2s} est le produit des caractères des groupes linéaires γ''_s et $\bar{\gamma}''_s$ qui indiquent comment γ' transforme les formes $[u_{i_1} u_{i_2} \cdots u_{i_s}]$ et $[\bar{u}_{i_1} \bar{u}_{i_2} \cdots \bar{u}_{i_s}]$. Donc le caractère de γ'_{2s} est égal au carré du module du caractère de γ''_s. Pour en trouver la valeur moyenne, on peut décomposer le groupe linéaire γ''_s en groupes linéaires irréductibles. Si l'on obtient k groupes linéaires irréductibles non équivalents entre eux, ces groupes figurant respectivement ν_1 fois, ν_2 fois, $\cdots$, ν_k fois dans la décomposition, la valeur moyenne du carré du module du caractère de γ''_s est égale à

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \cdots + \nu_k^2.$$

C'est aussi le nombre de Betti R_{2s}.

En particulier γ''_1 est irréductible et par suite les nombres de Betti R_2 et R_{n-2} sont égaux à l'unité.

Abstraction faite de deux espaces exceptionnels correspondant à un groupe simple de type exceptionnel, cette dernière classe d'espaces symétriques clos comprend les espaces suivants:

L'espace projectif complexe.

L'espace des variétés planes à p dimensions de l'espace projectif complexe à n dimensions.

La quadrique complexe non dégénérée.

L'espace des variétés planes à p dimensions génératrices de la quadrique complexe à 2p dimensions.

L'espace des variétés planes à p dimensions qui appartiennent à un complexe linéaire non dégénéré de l'espace projectif complexe à $2p + 1$ dimensions.

L'étude des espaces de cette classe sera l'objet principal de ce mémoire. Nous appliquerons la méthode que nous venons de rappeler et qui conduit à des problèmes intéressants concernant certains groupes linéaires.[10] Comme tous les espaces de cette classe ont une définition géométrique très simple, il sera intéressant d'étudier leur topologie aussi par une méthode plus directe qui donne des renseignements plus précis et qui s'applique à un grand nombre d'autres variétés algébriques.

II. Les variétés de Grassmann considérées comme des espaces homogènes symétriques

6. **Le groupe de structure et le groupe d'isotropie.** L'ensemble des variétés planes à k dimensions d'un espace projectif complexe à n dimensions définit une variété algébrique V appelée *variété de Grassmann*. En définissant chaque variété plane à k dimensions par l'ensemble de ses $\binom{n+1}{k+1}$ coordonnées plückeriennes homogènes $p_{i_0 i_1 \ldots i_k}$, on obtient une représentation biunivoque de la

---

[9] Voir pour la théorie des caractères: H. Weyl, *a*.

[10] Au sujet de l'application de cette méthode à l'espace projectif complexe, à l'espace des droites de l'espace projectif à 3 dimensions et à la quadrique complexe, voir E. Cartan, *b* et *g*.

variété V par une variété algébrique sans singularités de l'espace projectif à $\binom{n+1}{k+1} - 1$ dimensions. (Nous désignons par $\binom{a}{b}$ le nombre de combinaisons b à b de a éléments.) La variété V est connexe, car elle est transformée transitivement par le groupe projectif complexe, qui est connexe.

La variété V peut être considérée comme un espace homogène symétrique clos. Considérons en effet le groupe hermitien elliptique, c'est-à-dire le groupe projectif G

$$x'_i = \Sigma\, a_{ij}\, x_j \qquad (i, j, = 0, 1, \cdots, n) \tag{1}$$

qui laisse invariante la forme d'Hermite $x_0 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_1 + \cdots + x_n \bar{x}_n$. Si A est la matrice de la transformation (1) et $\bar{A}^*$ la matrice imaginaire conjuguée transposée, on a: $A\, \bar{A}^* = 1$. Nous pouvons supposer $|A| = 1$. Les transformations infinitésimales sont:

$$\delta x_i = \Sigma\, \alpha_{ij}\, x_j, \qquad \alpha_{ij} + \bar{\alpha}_{ji} = 0.$$

Nous désignerons toujours par $[k]$ une variété plane à k dimensions. Soit la variété plane $[k]_0$ définie par les équations $x_{k+1} = x_{k+2} = \cdots = x_n = 0$. En appelant $y_0, y_1, \cdots, y_q$ les $n - k$ dernières variables $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_n$, le plus grand sous-groupe g de G qui laisse invariante la variété plane $[k]_0$ a pour équations:

$$\text{(g)} \qquad \begin{aligned} x'_{j'} &= \Sigma\, a_{j'j}\, x_j \qquad && (j, j' = 0, 1, \cdots, k) \\ y'_{i'} &= \Sigma\, b_{i'i}\, y_i \qquad && (i, i' = 0, 1, \cdots, q) \end{aligned}$$

C'est aussi le plus grand sous-groupe continu de G qui soit invariant par l'involution:

$$x'_0 = x_0,\ x'_1 = x_1,\ \cdots,\ x'_k = x_k,\ y'_0 = -\,y_0,\ y'_1 = -\,y_1, \cdots, y'_q = -\,y_q.$$

Cette involution est une automorphie involutive de G. L'ensemble de G et de g définit donc un espace homogène symétrique clos.

Chaque transformation infinitésimale de G se décompose d'une manière et d'une seule en une transformation infinitésimale de g et une transformation infinitésimale de la forme:

$$\begin{aligned} \delta x_j &= -\,\Sigma\, \bar{\omega}_{ij}\, y_i \qquad && (i = 0, 1, \cdots, q) \\ \delta y_i &= \Sigma\, \omega_{ij}\, x_j \qquad && (j = 0, 1, \cdots, k) \end{aligned}$$

Celle-ci transforme la variété $[k]_0$ d'équations $y_0 = y_1 = \cdots = y_q = 0$ en une variété $[k]$ d'équations:

$$y_i = \omega_{ij}\, x_j. \tag{2}$$

Les $(k + 1)\,(n - k)$ paramètres complexes ω_{ij} peuvent être considérés comme les coordonnées complexes de cette variété plane. Les équations de toute variété plane $[k]$ voisine de $[k]_0$ peuvent se mettre sous la forme (2). Le groupe G est donc transitif dans la variété de Grassmann V au voisinage de l'élément $[k]_0$. Les transformés de $[k]$ par le groupe clos G engendrent une variété close

V', qui devra être une région de V n'ayant pas de frontière dans V. Par suite V' est confondu avec V. *La variété de Grassmann V peut donc être considérée comme l'espace riemannien symétrique clos défini par G et g.*

Sous forme symbolique, les équations de g s'écrivent:

$$(x') = (a)\ (x)$$

$$(y') = (b)\ (y)$$

avec les conditions: $(a)\ (\bar{a})^* = 1$, $(b)\ (\bar{b})^* = 1, |a| \cdot |b| = 1$. Soit (ω) la matrice des paramètres ω_{ij}. Etant donnée la transformation infinitésimale

$$(\delta y) = (\omega)\ (x),$$

cherchons sa transformée par une transformation de g. On aura:

$$(\delta y') = (b)\ (\delta y) = (b)\ (\omega)\ (x) = (b)\ (\omega)\ (a)^{-1}\ (x').$$

La transformation infinitésimale cherchée est donc définie par la matrice (ω'):

$$(\omega') = (b)\ (\omega)\ (a)^{-1} = (b)\ (\omega)\ (\bar{a})^*.$$

La matrice (ω) est donc transformée comme la matrice dont les éléments sont les produits $y_i\ \bar{x}_j$. Posons

$$(a) = e^{i\varphi}\ (a_1), \qquad\qquad (b) = e^{i\psi}\ (b_1),$$

les matrices (a_1) et (b_1) étant unimodulaires. On aura: $e^{i(k+1)\varphi+i(q+1)\psi} = 1$.

$$(\omega') = e^{i(\psi-\varphi)}\ (b_1)\ (\omega)\ (\bar{a}_1)^* = e^{i\theta}\ (b_1)\ (\omega)\ (\bar{a}_1)^*. \tag{3}$$

Le groupe linéaire d'isotropie est le groupe linéaire γ qui opère sur les paramètres ω_{ij} et $\bar{\omega}_{ij}$ et qui est défini par l'équation (3). Il est du type considéré à la fin du §5. Le groupe linéaire qui opère sur les ω_{ij} seuls est le produit du groupe d'équation $(\omega') = e^{i\theta}\ (\omega)$ et du groupe γ'' défini par:

$$(\omega') = (b_1)\ (\omega)\ (\bar{a}_1)^*.$$

Désignons par $\mathfrak{g}_k$ et $\mathfrak{g}_q$ les groupes linéaires unimodulaires unitaires opérant respectivement sur les variables $x_0, \cdots, x_k$ et sur les variables $y_0, \cdots, y_q$. *Le groupe γ'' est identique au groupe suivant lequel sont transformés les produits $y_i\ x_j$ lorsque les variables x_j et y_i subissent respectivement les transformations des groupes $\mathfrak{g}_k$ et $\mathfrak{g}_q$.*

7. **Détermination des invariants intégraux et des nombres de Betti.** Déterminons les invariants intégraux de l'espace riemannien symétrique réalisé par la variété de Grassmann V. D'après le §5, il suffit de déterminer les formes extérieures à coefficients constants des variables ω_{ij} et $\bar{\omega}_{ij}$, ces formes étant invariantes par γ. Il n'y a pas de forme extérieure invariante de degré impair, c'est-à-dire *les nombres de Betti relatifs aux dimensions impaires sont nuls.* Pour chercher les formes invariantes de degré $2s$, nous décomposons en groupes irréductibles le groupe γ''_s qui opère sur les formes extérieures $[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}]$

lorsque les variables ω_{ij} subissent les transformations de γ''. Nous employons la *méthode des poids dominants de M. E. Cartan.*[11]

γ'' est une représentation linéaire irréductible du groupe semi-simple $\mathfrak{g}_k \times \mathfrak{g}_q$, produit direct de $\mathfrak{g}_k$ et de $\mathfrak{g}_q$. Nous considérons le sous-groupe abélien de γ'' correspondant aux transformations infinitésimales:

$$\delta x_j = \lambda_j x_j, \qquad (j = 0, 1, \cdots, k)$$

$$\delta y_i = \mu_i y_i, \qquad (i = 0, 1, \cdots, q)$$

où les λ_j et les μ_i sont imaginaires pures et satisfont aux relations $\sum_j \lambda_j = 0$ et $\sum_i \mu_i = 0$. Par rapport à ce sous-groupe abélien, la variable x_j est de poids λ_j, y_i est de poids μ_i et ω_{ij} est de poids $\lambda_j + \mu_i$. La variable $[\omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_s j_s}]$ est de poids $\lambda_{j_1} + \cdots + \lambda_{j_s} + \mu_{i_1} + \cdots + \mu_{i_s}$. Ce poids est une forme linéaire à coefficients entiers:

$$\Pi(\lambda, \mu) = m_0 \lambda_0 + \cdots + m_k \lambda_k + n_0 \mu_0 + \cdots + n_q \mu_q$$

où $m_0 + m_1 + \cdots + m_k = n_0 + n_1 + \cdots + n_q = s$. Le poids $\Pi(\lambda, \mu)$ est dit *plus haut* qu'un autre poids $\Pi'(\lambda, \mu)$ défini par des entiers m'_j et n'_i lorsque:

$$m_j - m_k \geqq m'_j - m'_k, \qquad (j = 0, 1, \cdots, k - 1)$$

$$n_i - n_q \geqq n'_i - n'_q, \qquad (i = 0, 1, \cdots, q - 1),$$

l'une au moins de ces conditions étant une inégalité. D'après un théorème fondamental de M. E. Cartan, *tout groupe irréductible* Γ_s *contenu dans* γ''_s *est complètement déterminé par sa variable dominante.* Pour qu'une variable u, c'est-à-dire une combinaison linéaire de formes extérieures $[\omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_s j_s}]$, soit la variable dominante d'un groupe irréductible Γ_s, il faut et il suffit que le poids de u soit plus haut que le poids de n'importe quelle variable transformée de u.

Au lieu de considérer seulement les transformations des groupes unitaires $\mathfrak{g}_k$ et $\mathfrak{g}_q$, appliquons aux variables x_j et y_i les transformations des deux groupes linéaires unimodulaires à coefficients complexes arbitraires. Les produits $x_j y_i$ subissent alors les transformations d'un groupe semi-simple γ'''. C'est le groupe à paramètres complexes qui a la même structure que le groupe unitaire γ''. Toute représentation linéaire Γ de γ'' peut être élargie en une représentation linéaire Γ' de γ'''. Si Γ' est irréductible, Γ l'est également, et réciproquement.[12] Appliquons donc aux variables ω_{ij} les transformations du groupe γ'''. Pour que u soit une variable dominante, il faut et il suffit que son poids soit plus haut que le poids de toute variable transformée. Il suffit de considérer les transformations infinitésimales de γ''' qui correspondent aux transformations infinitésimales $x_{j'}\, \partial f/\partial x_j$ et $y_{i'}\, \partial f/\partial y_i$. A une variable de poids Π elles font correspondre une variable de poids $\Pi + \lambda_{j'} - \lambda_j$ ou $\Pi + \mu_{i'} - \mu_i$. Ainsi pour que

[11] Voir E. Cartan, *f* et H. Weyl, *a*.
[12] Voir H. Weyl, *a*, p. 289–290.

u soit variable dominante, il faut et il suffit que les transformées de u par $x_{j'}\ \partial f/\partial x_j$ ou $y_{i'}\ \partial f/\partial y_i$ soient identiquement nulles lorsque $j' < j$ ou $i' < i$.

Soit u une combinaison linéaire de formes extérieures $[\omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_s j_s}]$. Pour que u soit une variable de poids $\Pi(\lambda, \mu)$, il faut et il suffit qu'elle ne soit composée que de formes extérieures de poids $\Pi(\lambda, \mu)$. Si $\Pi(\lambda, \mu)$ est le poids dominant d'un groupe irréductible Γ_s, on a:

$$m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots \geqq m_k, \qquad n_0 \geqq n_1 \geqq \cdots \geqq n_q,$$

car en permutant les λ_j entre eux et les μ_i entre eux, on obtient encore des poids de Γ_s. En permutant convenablement les ω_{ij} dans chacune des formes extérieures $[\omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_s j_s}]$, on peut d'abord écrire les m_0 variables ω_{ij} dont l'indice j est égal à 0, puis les m_1 variables ω_{ij} dont l'indice j est égal à 1, etc. On arrangera les variables ω_{ij} qui correspondent à une même valeur de j de telle façon que leurs indices i soient rangés par ordre croissant de gauche à droite. u aura alors la forme suivante:

$$u = \Sigma \alpha_P P_{(i)} [\omega_{i_1 0} \cdots \omega_{i_{m_0} 0}\, \omega_{i_{m_0+1} 1}\, \omega_{i_{m_0+2} 1} \cdots].$$

Dans cette expression, $P_{(i)}$ désigne une permutation P à effectuer sur les indices $i_1, i_2, \cdots, i_s$, et α_P est un coefficient dépendant de la permutation P. Nous allons ranger les termes de cette expression dans un ordre bien déterminé. Prenons d'abord les termes dans lesquels le premier indice i a la plus petite valeur. Parmi ceux-ci prenons les termes dans lesquels le deuxième indice i a la plus petite valeur. En continuant la sélection d'après le même principe, on arrive finalement à un terme bien déterminé, qui sera pris comme premier terme. Le deuxième terme sera obtenu de la même façon parmi les termes restants. On voit qu'on pourra ainsi ranger tous les termes.

Soit $[\omega_{i_1 0} \cdots \omega_{i_{m_0} 0}\, \omega_{i_{m_0+1} 1} \cdots]$ le premier terme. Nous allons montrer qu'il est égal à la forme extérieure

$$[\omega_{00}\, \omega_{10} \cdots \omega_{m_0-1\, 0}\, \omega_{01}\, \omega_{11} \cdots \omega_{m_1-1\, 1} \cdots],$$

que nous designons par v. Soit i_h le premier des indices $i_1, \cdots, i_{m_0}$ tel que $i_h > h - 1$. Posons $i_h = p$ et appliquons la transformation infinitésimale $y_{h-1}\ \partial f/\partial y_p$. La variable transformée de u doit être identiquement nulle. Or c'est la somme des termes qu'on déduit des termes de u en remplaçant par $h - 1$ un quelconque des indices i qui est égal à p. En particulier, en remplaçant dans le premier terme de u l'indice i_h par $h - 1$, on obtient une forme extérieure qui ne peut figurer qu'une fois dans la variable transformée de u. Par conséquent il n'y a pas d'indice i_h tel que $i_h > h - 1$. Ce raisonnement montre que le premier terme de u est égal à v. Or v est une variable dominante de poids $\Pi(\lambda, \mu)$. Donc $u - v$ est une variable dominante de poids $\Pi(\lambda, \mu)$. Ainsi le deuxième terme de u devrait être un multiple de v, c'est-à-dire la variable u se réduit simplement à la forme extérieure v.

A tout ensemble d'entiers $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$, tel que

$$m_0 + m_1 + \cdots + m_k = s, \qquad q + 1 = n - k \geqq m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots \geqq m_k \geqq 0$$

correspond une variable dominante, $[\omega_{00}\omega_{10} \cdots \omega_{m_0-1\,0}\omega_{01} \cdots]$, et par suite un groupe irréductible Γ_s bien déterminé. A deux ensembles distincts $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$ et $(m_0', m_1', \cdots, m_k')$ correspondent deux groupes irréductibles Γ_s et Γ_s' qui ne sont pas équivalents. Donc la valeur moyenne du carré du module du caractère de γ_s'' est égal au nombre de ces ensembles d'entiers $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$. Donc:

THÉORÈME. *Etant donné l'espace riemannien symétrique réalisé par la variété de Grassmann V, le nombre de ses invariants intégraux de degré $2s$ est égal au nombre d'ensembles de $k + 1$ entiers $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$ tels que $m_0 + m_1 + \cdots + m_k = s$ et $n - k \geqq m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots \geqq m_k \geqq 0$. Ce nombre est aussi le nombre de Betti R_{2s} de la variété V.*

Pour connaître les variables qui sont transformées par le groupe Γ_s correspondant aux entiers $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$, on peut utiliser le schéma $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$ qui caractérise d'après M. H. Weyl,[13] la représentation linéaire irréductible du groupe $\mathfrak{g}_k$ de poids dominant $m_0\lambda_0 + m_1\lambda_1 + \cdots + m_k\lambda_k$.

1	2	.	.	.	m_0	
$m_0 + 1$	.	.	$m_0 + m_1$			schéma $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$
.	.	.				

Le schéma définit un certain arrangement des s premiers nombres entiers. Dans la première ligne nous écrivons les m_0 premiers nombres, dans la deuxième ligne les m_1 nombres suivants, etc. Le coefficient n_i du poids dominant de Γ_s est le nombre d'entiers contenus dans la $i^{\text{ième}}$ colonne du schéma. En échangeant les lignes avec les colonnes, on obtient un deuxième schéma qui caractérise la représentation linéaire de $\mathfrak{g}_q$ de poids dominant $n_0\mu_0 + n_1\mu_1 + \cdots + n_q\mu_q$. Γ_s est équivalent au produit des deux représentations linéaires correspondant à ces deux schémas.

Soit P une permutation des nombres du schéma $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$. Soit A une permutation par laquelle les nombres de chaque colonne sont permutés entre eux. Soit B une permutation par laquelle les nombres de chaque ligne sont permutés entre eux. Si P peut se mettre sous la forme AB (on effectue d'abord la permutation B, ensuite la permutation A), nous posons $\epsilon_P =$ signe de la permutation A; sinon $\epsilon_P = 0$. Si P peut se mettre sous la forms BA, nous posons $\epsilon_P' =$ signe de B, sinon $\epsilon_P' = 0$. Les variables du groupe Γ_s sont alors les quantités $\sum_P \epsilon_P P_{(j)}[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}]$. On a en effet:

$$\sum_P \epsilon_P P_{(j)}[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}] = \sum_P \epsilon_P' P_{(i)}[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}].$$

On en conclut que les quantités $\sum_P \epsilon_P P_{(j)}[\omega_{i_1j_1} \cdots \omega_{i_sj_s}]$ sont transformées entre

[13] Voir H. Weyl, *a*.

elles par les operations de Γ_s qui correspondent soit aux transformations de $\mathfrak{g}_k$; soit aux transformations de $\mathfrak{g}_q$. Par suite ces quantités sont bien transformées entre elles par le groupe Γ_s.

Le groupe Γ_s étant clos, il laisse invariante une forme d'Hermite définie positive. En remplaçant dans cette forme d'Hermite les produits ordinaires par des produits extérieurs, on obtient une forme extérieure invariante par γ. La forme d'Hermite est déterminée à un facteur constant près, car il n'y a qu'une forme extérieure invariante par Γ_s. L'invariant intégral le plus général est défini par une combinaison linéaire arbitraire des formes extérieures invariantes qui correspondent aux différents groupes Γ_s.

Ainsi l'invariant intégral de second ordre est défini par $\Sigma[\omega_{ij}\bar{\omega}_{ij}]$. Il est facile d'en donner l'expression explicite en fonction des coordonnées plückeriennes $p_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}$. Le groupe hermitien elliptique G transforme les variables $p_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}$ suivant un groupe linéaire irréductible clos, qui laisse invariante une certaine forme d'Hermite. Comme chaque terme de cette forme doit avoir un poids nul par rapport aux transformations infinitésimales $\delta x_i = \lambda_i x_i$, où $i = 0, 1, \cdots, n$ et où les λ_i sont imaginaires pures, on trouve que la forme d'Hermite invariante est $\Sigma p_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k} \bar{p}_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}$. Imposons aux variables $p_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}$ la condition $\Sigma p_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k} \bar{p}_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k} = 1$. L'invariant intégral du second degré sera $\int \Sigma[dp_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k} d\bar{p}_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}]$. On en déduit un invariant intégral de degré $2s$, à savoir $\int (\Sigma[dp_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k} d\bar{p}_{\alpha_0\alpha_1 \cdots \alpha_k}])^s$. En général il y aura encore d'autres invariants intégraux de degré $2s$.

Si V est l'espace projectif $[n]$ lui-même, c'est-à-dire si $k = 0$, on obtient ainsi tous les invariants intégraux. On a $R_{2s} = 1$. On peut imposer aux coordonnées $x_0, \cdots, x_n$ la condition $\Sigma x_i\bar{x}_i = 1$. L'invariant intégral de degré $2s$ sera $\int (\Sigma[dx_i d\bar{x}_i])^s$.

Vérification. Donnons une vérification des résultats précédents en utilisant un théorème[14] de topologie dû à M. S. Lefschetz. D'après ce théorème, le nombre de points fixes d'une déformation d'une multiplicité orientable V_n est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré multipliée par $(-1)^n$. La variété de Grassmann V est une multiplicité orientable, parce que c'est une variété algébrique sans singularités, on encore parce que le groupe d'isotropie g est connexe. D'après les résultats précédents, la caractéristique d'Euler-Poincaré est égale à la somme des nombres de Betti R_{2s}. C'est le nombre d'ensembles d'entiers $(m_0, m_1, \cdots, m_k)$ tels que $n - k \geqq m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots \geqq m_k = 0$. En remplaçant m_i par $l_i = m_i + k - i$, on obtient les ensembles d'entiers $(l_0, l_1, \cdots, l_k)$ tels que $n \geqq l_0 > l_1 > \cdots > l_k \geqq 0$. La caractéristique d'Euler-Poincaré est donc égale à $\binom{n+1}{k+1}$.

D'autre part, le groupe projectif complexe étant connexe, toute transformation projective de $[n]$ est une déformation de $[n]$. Etant donnée une transformation

[14] Voir S. Lefschetz, *a*, p. 272.

projective générale, le nombre de points fixes est $n + 1$ et le nombre d'éléments $[k]$ fixes est $\binom{n+1}{k+1}$. On retrouve bien la valeur de la caractéristique d'Euler-Poincaré. Cependant il reste à démontrer que tout élément fixe doit être compté avec l'ordre de multiplicité égal à $+1$. Ceci résulte du théorème général suivant:

THÉORÈME. *Etant donné un groupe continu de Lie G opérant transitivement dans une variété analytique complexe V, les transformations de G étant définies par des équations analytiques par rapport à des variables et des paramètres complexes, tout point fixe isolé d'une transformation de G doit être compté avec un ordre de multiplicité égal à $+1$.*

En effet, soit O un point fixe isolé d'une transformation T de G. Un système de paramètres canoniques de G sera fourni par un système de r paramètres complexes $e_1, \cdots, e_r$. Supposons que les $r - n$ dernières transformations infinitésimales de base engendrent le groupe d'isotropie relatif à O. L'ensemble des n paramètres complexes $e_1, e_2, \cdots, e_n$ constitue un système de coordonnées pour un voisinage v_0 de O. (Voir §1.) Dans v_0 la transformation T est représentée par des équations linéaires par rapport aux variables $e_1, e_2, \cdots, e_n$. Pour définir la multiplicité du point fixe O, on considère le produit topologique $v_0 \times v_0$, c'est-à-dire le domaine défini par le système de coordonnées $e_1, e_2, \cdots, e_n, e_1', e_2', \cdots, e_n'$. Dans ce système de coordonnées, la transformation T et la transformation identique sont représentées par des variétés planes complexes qui se coupent seulement au point $e_i = e_i' = 0$. L'indice de Kronecker de ce point d'intersection est égal à $+1$, ce qui prouve le théorème énoncé.

III. Etude directe de la topologie des variétés de Grassmann[15]

8. **Démonstration d'un lemme.** Comme les variétés de Grassmann ont une définition géométrique très simple, il est naturel d'étudier leurs propriétés topologiques sans passer par l'intermédiaire des intégrales de différentielles exactes. On peut chercher à les décomposer en *cellules.* Il n'est pas nécessaire d'arriver à une subdivision en *simplexes;* en ce qui concerne l'homologie et l'homotopie, des cellules d'une espèce plus générale peuvent remplir le même rôle que les simplexes. L'intérieur des cellules que nous aurons à considérer sera homéomorphe à l'intérieur d'une sphère ordinaire, mais la frontière ne sera pas nécessairement homéomorphe à la surface de cette sphère. L'emploi de cellules de cette espèce est justifié à cause du lemme suivant:

LEMME. *Etant donnés un complexe K et un sous-complexe L dans K, si K–L est homéomorphe à une cellule ouverte, toute chaîne sur K, de dimension inférieure à la dimension de K–L, peut être déformée d'une façon continue en une chaîne sur L. Pendant la déformation les points de L peuvent être maintenus fixes.*

L'expression "*cellule ouverte*" désignera toujours un ensemble de points

[15] On trouvera un résumé de cette méthode et l'indication des variétés auxquelles nous l'avons appliquée dans une note des Comptes Rendus: C. Ehresmann, *b.*

homéomorphe à l'intérieur d'une sphère ordinaire. Les complexes considérés sont formés de simplexes. Si L est un sous-complexe du complexe K, nous appelons K–voisinage de L l'ensemble des simplexes de K dont la frontière a une partie commune avec L. Soit N_K^L ce K–voisinage. K–N_K^L est l'ensemble des éléments de K qui n'ont pas de partie commune avec L. K–N_K^L est un complexe fermé, N_K^L est un ensemble ouvert. Le K–voisinage est dit *normal*, si tout simplexe de K qui a tous ses sommets sur L est situé entièrement sur L. Si le K–voisinage n'est pas normal, on peut considérer le complexe dérivé K' de K et le K'–voisinage de L sera normal.[16] Nous pouvons donc supposer dans la suite que le K–voisinage de L est normal.

Si K–L est homéomorphe à une cellule, toute chaîne sur K–L est déformable en une chaîne sur N_K^L, à condition que la dimension de la chaîne soit inférieure à celle de K–L. Soit, en effet, C_p une chaîne sur K, c'est-à-dire C_p est l'image continue et uniforme d'une chaîne formée de simplexes à p dimensions. D'après le théorème fondamental[17] de la déformation des chaînes sur un complexe, la chaîne C_p peut être déformée en une sous-chaîne de K. Cette opération effectuée, nous supposerons que C_p ne contient pas tous les simplexes de K–L, ce qui a lieu en particulier si p est inférieur à la dimension de K–L. Il existe alors un point O de K–L qui est extérieur à C_p. Considérons l'homéomorphie représentant K–L sur l'intérieur d'une sphère S. Il existe une sphère S' intérieure à S et contenant à son intérieur l'image $\bar{O}$ du point O ainsi que l'image de l'ensemble fermé K–N_K^L. On effectue alors la déformation suivante de l'image $\bar{C}_p$ de la partie de la chaîne C_p intérieure à K–L: Les points de $\bar{C}_p$ extérieurs à S' et situés sur S' sont laissés fixes. Les points de $\bar{C}_p$ intérieurs à S' sont déplacés le long des rayons issus de O et sont finalement projetés sur S'. Après cette déformation la chaîne C_p se trouvera complètement à l'intérieur de N_K^L.

Dans le raisonnement précédent, on aurait pu considérer aussi bien le K'–voisinage $N_{K'}^L$, où K' est une subdivision normale de K. Nous supposerons donc C_p déformé en une chaîne sur $N_{K'}^L$. Il existe une déformation continue du complexe K qui réduit $N_{K'}^L$ à L et qui réduit par suite C_p à une chaîne sur L. En effet, comme le K–voisinage de L est normal, tout simplexe E_q de N_K^L a en commun avec L un simplexe $E'_{q'}$ bien déterminé. Pour faire la subdivision normale de K, nous introduisons un sommet M à l'intérieur de E_q et un sommet M' à l'intérieur de $E'_{q'}$. Les points M sont les sommets des simplexes de $N_{K'}^L$. Le segment rectiligne $M\,M'$ est bien défini à l'intérieur du simplexe E_q. Faisons correspondre à tout point M le point M' correspondant tandis que les sommets de K–N_K^L se correspondent à eux-mêmes. Nous définissons ainsi une transformation barycentrique du complexe K' et les segments $M\,M'$ définissent une déformation barycentrique qui réduit $N_{K'}^L$ à L. Seuls les simplexes de N_K^L–L subissent une déformation; en particulier les points de L restent fixes.

[16] Comparer S. Lefschetz, *a*, p. 91.

[17] Voir S. Lefschetz, *a*, p. 86.

Il existe donc bien une déformation continue satisfaisant à l'énoncé du lemme. En particulier la frontière de la cellule ouverte K–L est toujours connexe.

Le fait qu'une chaîne contenue dans un voisinage N^L de L peut être déformée en une chaîne sur L, a été démontré par M. S. Lefschetz[18] avec des hypothèses moins restrictives. Il suffit de supposer qu'il existe une métrique dans K et que K et L sont clos et localement connexes. Le lemme démontré ici est valable si l'on suppose de plus que K–L est une cellule ouverte. Mais nous n'aurons qu'à considérer le cas où K et L sont des complexes.

9. **Conséquences du lemme**. Soit K un complexe formé de simplexes. Les points d'un simplexe qui n'appartiennent pas à la chaîne-frontière de celui-ci seront appelés points intérieurs du simplexe. L'ensemble de plusieurs simplexes sera considéré comme une cellule lorsque l'ensemble de leurs points intérieurs est homéomorphe à l'intérieur d'une sphère. Les simplexes qui composent une telle cellule forment une multiplicité combinatoire ouverte, en vertu d'un théorème de M. E. R. van Kampen. La frontière de la cellule sera aussi composée de simplexes. On peut fixer une orientation de la cellule, ce qui détermine en même temps une orientation de ses simplexes de dimension maximum. La cellule orientée définit alors une chaîne bien déterminée, somme de ses simplexes orientés, et par suite une chaîne-frontière bien déterminée.

Supposons que le complexe K puisse être considéré comme un assemblage de cellules du type considéré satisfaisant aux conditions suivantes: 1. *Tout point de K est intérieur à une cellule et une seule*; 2. *La frontière de chaque cellule est un ensemble de points formé par la somme d'un certain nombre de cellules de dimension inférieure*. Désignons par E_p^i les cellules orientées à p dimensions ou également les chaînes de simplexes définies par ces cellules orientées. Comme la chaîne-frontière d'une cellule E_p^i est un cycle orienté, elle contient toute la chaîne définie par une cellule E_{p-1}^j, dès qu'elle en contient un simplexe. D'une façon plus précise, les chaînes-frontières des cellules E_p^i sont des combinaisons linéaires des chaînes E_{p-1}^j, ce qu'on écrit sous la forme:

$$E_p^i \to \Sigma\, \mu_{i\,j}^{p-1}\, E_{p-1}^j. \tag{1}$$

Soit K_p le complexe formé par toutes les cellules de K dont la dimension est inférieure ou égale à p. Le lemme du paragraphe précédent entraine alors la conséquence suivante:

a. Toute chaîne C_p sur le complexe K peut être déformée d'une façon continue en une chaîne sur le complexe K_p.

La preuve par induction est évidente.

En particulier tout cycle Γ_p sur K peut être déformé en un cycle sur K_p. Une nouvelle déformation de ce cycle fournit ensuite un cycle formé de simplexes de K_p. D'après une remarque déjà faite, le cycle sera déformé en une

[18] Voir S. Lefschetz, *a*, p. 92–94.

combinaison linéaire des chaînes E_p^i plus des simplexes dégénérés le cas échéant. Donc:

b. Tout cycle Γ_p est homologue à une combinaison linéaire des cellules E_p^i.

Soit Γ_p un cycle homologue à zéro. Il existe une chaîne C_{p+1} telle que: $C_{p+1} \rightarrow \Gamma_p$. Supposons Γ_p déformé en une combinaison linéaire de cellules E_p^i. D'après le lemme, nous pouvons laisser fixes les points de Γ_p et déformer C_{p+1} en une chaîne C'_{p+1} sur K_{p+1}. Nous pouvons supposer que C'_{p+1} est formé de simplexes de K_{p+1}. Comme C'_{p+1} est un cycle (mod K_p), en d'autres termes comme sa frontière est sur K_p, C'_{p+1} sera une combinaison linéaire de cellules E_{p+1}^i. L'homologie $\Gamma_p \sim 0$ sera une combinaison linéaire des homologies $\Sigma \mu_{ij}^p E_p^j \sim 0$. Par conséquent:

c. Les bases d'homologie, les nombres de Betti et les coefficients de torsion s'obtiennent simplement par la réduction des systèmes de relations (1) *à la forme canonique habituelle.*[19]

Les considérations précédentes permettent d'étudier la structure topologique d'un grand nombre de variétés algébriques. Rappelons que toute variété algébrique, réelle ou complexe, admet une subdivision en simplexes.[20] Un domaine ouvert d'une variété analytique sera appelé une cellule analytique, s'il est homéomorphe à l'intérieur d'une sphère et si sa frontière est composée d'éléments analytiques. L'ensemble d'une cellule analytique et de sa frontière peut être subdivisé en simplexes de telle façon que le complexe formé par cette subdivision admet un sous-complexe recouvrant exactement la frontière. Donc le lemme du paragraphe précédent s'applique et toute chaîne C_q sur la cellule analytique à p dimensions peut être déformée en une chaîne sur la frontière de la cellule, à condition que q soit inférieur à p. Comme nous n'aurons qu'à considérer des variétés algébriques, il sera commode d'utiliser l'expression "*cellule algébrique*" pour désigner un *domaine ouvert d'une variété algébrique, ce domaine étant homéomorphe à une cellule ouverte et sa frontière étant composée d'éléments de variétés algébriques.* Un point sera considéré comme une cellule algébrique de dimension zéro.

Etant donnée une variété algébrique V, supposons qu'on sache trouver un système de variétés algébriques contenues dans V et fournissant une subdivision de V en cellules algébriques E_p^i. Cette subdivision devra satisfaire aux conditions suivantes: 1. Tout point de V appartient à une cellule E et une seule; 2. La frontière de chaque cellule E_p^i est la somme d'un certain nombre de cellules de dimension inférieure à p. Il existe dans ces conditions un complexe formé de simplexes recouvrant la variété V et tel que chaque cellule algébrique E_p^i soit subdivisée par un sous-complexe de ce complexe. Alors le lemme du paragraphe précédent est applicable et le complexe formé des cellules algébriques E_p^i jouit des propriétés a, b et c.

---

[19] Ceci est à rapprocher d'un résultat de topologie combinatoire qui indique dans quelles conditions un agrégat de cellules peut être traité comme une cellule unique dans le calcul des nombres de Betti et des coefficients de torsion. Voir A. W. Tucker, *a*.

[20] Voir B. L. van der Waerden, *a*.

Les variétés algébriques considérées ici peuvent être supposées réelles ou complexes. En ce qui concerne les variétés algébriques *complexes*, on arrive ainsi à des propriétés topologiques particulièrement simples. Une cellule algébrique complexe a un nombre pair de dimensions réelles; sa frontière, qui est par hypothèse formée de parties de variétés algébriques complexes, sera au plus à $2p - 2$ dimensions réelles, si la cellule est à $2p$ dimensions réelles. Une cellule algébrique complexe définit donc un cycle. On sait qu'une variété algébrique complexe V est toujours orientable et qu'il existe une orientation naturelle bien déterminée pour V et pour toute variété algébrique contenue dans V.[21] Supposons que par un système de variétés algébriques complexes on sache décomposer la variété V en cellules algébriques complexes E^i_{2p}. La structure topologique de V sera alors très simple et très particulière. Chaque cellule E^i_{2p} définira un cycle orienté bien déterminé. Tout cycle Γ_{2p+1} sur V pourra être déformé en un cycle Γ'_{2p+1} sur le complexe K_{2p} défini par l'ensemble des cellules algébriques dont la dimension est inférieure ou égale à $2p$. Ce cycle Γ'_{2p+1} est uniquement formé d'éléments dégénérés; *donc tout cycle* Γ_{2p+1} *est homologue à zéro.* Il n'y aura aucune homologie liant les cycles algébriques définis par les cellules E^i_{2p}. *Donc ces cycles formeront une base minima du groupe d'homologie relatif à la dimension* $2p$ *et il n'y aura pas de coefficients de torsion.*

Une cellule algébrique à une dimension complexe a pour frontière un point unique. Donc si la variété V est connexe, le complexe de ses cellules algébriques n'a qu'un élément E_0, formé par un point unique. Toute courbe fermée dans V peut être réduite à ce point par déformation continue. *Le groupe de Poincaré se réduit à l'identité.*

Un exemple classique d'une variété algébrique de cette nature est fourni par *l'espace projectif complexe* $[n]$. Il suffit de considérer une suite de variétés planes $[n-1]$, $[n-2]$, $\cdots$, $[2]$, $[1]$, $[0]$ satisfaisant aux conditions:

$$[n] \supset [n-1] \supset \cdots \supset [p] \supset [p-1] \supset \cdots \supset [2] \supset [1] \supset [0].$$

Les cellules algébriques sont $[p] - [p-1]$. Si $[p]$ a pour équations

$$x_{p+1} = x_{p+2} = \cdots = x_n = 0$$

une chaîne C_s, où $s \leqq 2p + 1$, peut être déformée en une chaîne sur $[p]$ par la déformation homographique:

$$x'_i = x_i \qquad (i = 0, 1, \cdots, p)$$

$$x'_j = \lambda x_j, \qquad (j = p+1, p+2, \cdots, n)$$

le facteur λ variant d'une façon continue de 1 à O; par une petite déformation préalable il faudrait pourtant faire disparaître les points d'intersection éventuels de C_s avec la variété plane d'équations: $x_0 = x_1 = \cdots = x_p = 0$.

[21] Voir S. Lefschetz, *a*, ch. VII.

Nous allons voir que la réduction en cellules algébriques réussit pour un grand nombre de variétés algébriques; en particulier l'étude de la topologie des variétés de Grassmann devient par là d'une simplicité extrême.

10. **Les bases d'homologie des variétés de Grassmann.** Nous considérons la variété V de tous les $[k]$ d'un espace projectif complexe $[n]$. Pour éviter les confusions, nous représentons par $\{k\}$ une variété plane $[k]$ qui est considérée comme élément générateur d'une certaine variété. Introduisons les symboles de Schubert $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$. Etant données $k + 1$ variétés $[a_0], [a_1], \cdots, [a_k]$ satisfaisant aux conditions:

$$0 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_k \leqq n, \qquad [a_0] \subset [a_1] \subset \cdots \subset [a_k] \subset [n],$$

le symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ représente la variété des $\{k\}$ contenus dans $[a_k]$ et ayant en commun avec $[a_i]$ une variété plane à i dimensions au moins. Les variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ seront appelées *variétés fondamentales de Schubert.*[22]

Ainsi $[0, 1, \cdots, k]$ représente un élément $\{k\}$ unique; la variété V elle-même a pour symbole $[n - k, n - k - 1, \cdots, n]$.

La variété fondamentale $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est une variété algébrique contenue dans V. On montre facilement que sa dimension complexe est $a_0 + a_1 + \cdots + a_k - \dfrac{k(k+1)}{2}$. La variété $[a_i]$ qui intervient dans la définition de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est parfaitement déterminée, sauf dans le cas où $a_{i+1} - a_i = 1$. Un $\{k\}$ sera un élément singulier de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, s'il coupe l'un des $[a_i]$ suivant un $[i + 1]$, pourvu qu'on ait $a_{i+1} - a_i > 1$. Le lieu des éléments singuliers sera composé d'un certain nombre de variétés fondamentales dont les symboles s'obtiennent à partir de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ en exprimant que l'élément $\{k\}$ coupe suivant un $[i + 1]$ l'une des variétés $[a_i]$ pour laquelle $a_{i+1} - a_i > 1$. Par exemple, le lieu des éléments singuliers de $[1, 3, 4, 6]$ est composé de $[0, 1, 4, 6]$ et $[1, 2, 3, 4]$. Une variété fondamentale moins le lieu de ses éléments singuliers est une variété homogène transformée transitivement par un groupe projectif de l'espace $[n]$. Les seules variétés fondamentales qui n'ont pas d'éléments singuliers sont les variétés de tous les $\{k\}$ contenus dans un $[m]$, ou les variétés de tous les $\{k\}$ contenus dans $[m]$ et passant par $[r]$. Ce sont des variétés de Grassmann; la variété des $\{k\}$ contenus dans $[m]$ et passant par $[r]$ est, en effet, en correspondance biunivoque avec la variété des $[k - r - 1]$ d'un espace $[m - r - 1]$.

Ceci étant, nous allons montrer que la variété V peut être décomposée en cellules algébriques par un système de variétés fondamentales de Schubert. Prenons dans $[n]$ une suite de variétés planes $[n - 1], [n - 2], \cdots, [1], [0]$ satisfaisant aux conditions:

$$[n] \supset [n-1] \supset [n-2] \supset \cdots \supset [1] \supset [0] \tag{1}$$

[22] *H. Schubert*, *a* et *b*; *C. Segre*, *a*, p. 795.

et considérons toutes les variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ définies à l'aide des $[a_i]$ de cette suite. Démontrons par récurrence la règle suivante:

La variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ devient homéomorphe à une cellule ouverte, lorsqu'on en retranche toutes les variétés fondamentales dont les symboles se déduisent du symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ en y remplaçant un des nombres a_i par $a_i - 1$. Si un symbole obtenu de cette façon n'a pas de sens, on le néglige.

Supposons la règle démontrée pour les variétés fondamentales engendrées par des $\{k - 1\}$ et montrons qu'elle est alors également vérifiée pour les variétés fondamentales engendrées par des $\{k\}$. Comme elle est vérifiée pour $k = 0$ (espace projectif), elle sera démontrée pour tous les cas.

Considérons la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$. Un élément général $\{k\}$ de cette variété rencontre $[a_0]$ en un point M et coupe suivant un $\{k - 1\}$ un hyperplan général $[n - 1]'$. Nous pouvons choisir l'hyperplan $[n - 1]'$ de telle façon qu'il satisfait aux conditions suivantes: $[a_0]$ est coupé par $[n - 1]'$ suivant $[a_0 - 1]$; les variétés $[a_0 + 1], [a_0 + 2], \cdots, [n - 1]$ de la suite (1) sont coupées par $[n - 1]'$ respectivement suivant des variétés $[a_0]', [a_0 + 1]', \cdots, [n - 2]'$ distinctes des variétés planes de la suite (1). L'élément $\{k\}$ de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ correspond d'une façon biunivoque à l'ensemble d'un point M de $[a_0]$ et d'un $\{k - 1\}$ de l'hyperplan $[n - 1]'$, pourvu que $\{k\}$ ne rencontre pas la variété $[a_0 - 1]$. L'élément $\{k - 1\}$ n'est pas arbitraire dans $[n - 1]'$. En effet, si $\{k\}$ coupe $[a_i]$ suivant un $[i]$, il coupe $[a_i - 1]'$ suivant un $[i - 1]$. Réciproquement, si $\{k\}$ coupe $[a_i - 1]'$ suivant un $[i - 1]$, il coupera $[a_i]$ suivant un $[i]$, à condition que le point d'intersection M de $\{k\}$ et de $[a_0]$ ne soit pas sur $[a_0 - 1]$. Donc les $\{k\}$ qui ne rencontrent pas $[a_0 - 1]$ correspondent aux $\{k - 1\}$ de la variété $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_k - 1]' - [a_0 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_k - 1]'$, définie à l'aide des variétés planes de la suite $[a_0 - 1], [a_0]', [a_0 + 1]', \cdots, [n - 1]'$. Or par hypothèse la variété $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_k - 1]'$ se réduit à une cellule ouverte lorsqu'on en retranche toutes les variétés dont le symbole se déduit du symbole $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_k - 1]'$ en remplaçant un des nombres $a_i - 1$ par $a_i - 2$. Lorsque $\{k - 1\}$ décrit cette cellule ouverte pendant que M décrit la cellule ouverte $[a_0] - [a_0 - 1]$, l'élément $\{k\}$ déterminé par l'ensemble de $\{k - 1\}$ et de M engendre une variété homéomorphe au produit topologique des deux cellules ouvertes; c'est-à-dire $\{k\}$ engendre une cellule ouverte.

La cellule ouverte ainsi engendrée par $\{k\}$ est la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ dont on a enlevé les variétés suivantes: 1°. La variété $[a_0 - 1, a_1, \cdots, a_k]$ pour laquelle le point M se trouve sur $[a_0 - 1]$. 2°. Les variétés des $\{k\}$ qui coupent l'hyperplan $[n - 1]'$ suivant les $\{k - 1\}$ générateurs des variétés $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_i - 2, \cdots, a_k - 1]'$, où i est l'un quelconque des indices $1, 2, \cdots, k$, le point M étant arbitraire sur $[a_0]$. Si $\{k - 1\}$ coupe $[a_0 + s]'$ suivant un $[r]$, l'élément $\{k\}$, déterminé par $\{k - 1\}$ et un point M extérieur à $[a_0 - 1]$, coupe $[a_0 + s + 1]$ suivant un $[r + 1]$. Donc la variété $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_i - 2, \cdots, a_k - 1]'$ correspond à la variété $[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_i - 1, \cdots, a_k]$ engendrée par des $\{k\}$. Certains symboles qu'on serait ainsi conduit à écrire peuvent ne pas avoir de sens. Par hypothèse, nous n'avons pas à tenir compte des symboles $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_i - 2, \cdots, a_k - 1]'$ qui n'ont pas de sens. Si $a_0 = a_1 - 1$, le symbole $[a_0, a_1 - 1, \cdots, a_k]$ n'a pas de sens. On voit qu'il suffit de le remplacer également par zéro.

Le raisonnement précédent suppose que $a_0 > 0$. Il reste à considérer le cas d'une variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, où $a_r = r$ et $a_{r+1} > r + 1$. Soit $[n - r - 1]'$ une variété qui ne coupe pas $[a_r]$ et qui coupe $[a_r + 1], [a_r + 2], \cdots, [n - 1]$ suivant des variétés $[0]', [1]', \cdots, [n - r - 2]'$. Tout $\{k\}$ de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est bien déterminé par son intersection avec $[n - r - 1]'$. Cette intersection est un élément $\{k - r - 1\}$ engendrant la variété

$$[a_{r+1} - r - 1, \cdots, a_i - r - 1, \cdots, a_k - r - 1]'$$

définie à l'aide des variétés de la suite $[0]', [1]', \cdots, [n - r - 1]'$. Comme la règle énoncée est vérifiée pour cette variété engendrée par des $\{k - r - 1\}$, on voit qu'elle est encore vérifiée pour la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$. Ceci prouve la règle dans tous les cas.

D'après cette règle, *l'ensemble des variétés fondamentales* $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ *fournit une subdivision de la variété de Grassmann V en cellules algébriques.* Nous avons un complexe de cellules algébriques auquel nous pouvons appliquer les résultats du §9.

La variété V est une multiplicité orientable à $(k + 1)(n - k)$ dimensions complexes. Chaque variété fondamentale $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ définit un cycle avec une orientation bien déterminée; ce cycle sera représenté par le même symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$. Nous pouvons énoncer les théorèmes:

THÉORÈME. *Tout cycle Γ_{2s} ou Γ_{2s+1} sur la variété V peut être déformé en un cycle qui recouvre complètement un certain nombre de variétés fondamentales* $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, *où* $a_0 + a_1 + \cdots + a_k - \dfrac{k(k+1)}{2} \leqq s$. *En particulier, la variété V est simplement connexe.*

THÉORÈME. *Les cycles algébriques* $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, *à s dimensions complexes, forment une base minima du groupe d'homologie pour la dimension $2s$. Il n'y a pas de coefficients de torsion. Les nombres de Betti relatifs aux dimensions impaires sont tous nuls.*

11. **Intersection de deux cycles de dimensions complémentaires.** Nous dirons que deux cycles sur la variété de Grassmann V ont des dimensions complémentaires, lorsque la somme de leurs dimensions est égale à la dimension réelle de V, c'est-à-dire égale à $2(k + 1)(n - k)$. Ainsi deux variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et $[b_0, b_1, \cdots, b_k]$ sont de dimensions complémentaires lorsque:

$$(1) \qquad a_0 + a_1 + \cdots + a_k + b_0 + b_1 + \cdots + b_k = (k + 1)n.$$

Etant données deux variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et $[a_0, a_1, \cdots, a_k]'$ dont les symboles sont composés des mêmes nombres, il existe une transformation projective de $[n]$, et par suite une déformation continue, qui transforme la première variété en la deuxième. Ces deux variétés définissent toujours des cycles algébriques homologues. Soient $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et $[b_0, b_1, \cdots, b_k]$ deux variétés fondamentales de dimensions complémentaires. Par une transformation projective, amenons la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ en une position telle que les variétés $[a_0], \cdots, [a_k]$ aient des positions générales par rapport aux variétés $[b_0], \cdots, [b_k]$ qui servent à définir $[b_0\ b_1, \cdots, b_k]$. Pour qu'il existe alors un élément d'intersection de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et de $[b_0, b_1, \cdots, b_k]$, il faut qu'il existe un $\{k\}$ qui coupe $[a_i]$ suivant un $[i]$ et qui coupe $[b_{k-i}]$ suivant un $[k - i]$. Or les variétés $[i]$ et $[k - i]$ ont un point d'intersection sur $\{k\}$; donc $[a_i]$ et $[b_{k-i}]$ ont un point d'intersection. Comme $[a_i]$ a une position générale par rapport à $[b_{k-i}]$, il en résulte que $a_i + b_{k-i} \geqq n$. Mais en vertu de l'équation (1) on a alors $a_i + b_{k-i} = n$, quel que soit i, et le symbole de la variété $[b_0, b_1, \cdots, b_k]$ est $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$. Réciproquement les deux variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$ ont un élément d'intersection et un seul, si l'on a donné à la première variété une position générale par rapport à la deuxième. Cet élément d'intersection est l'élément $\{k\}$ déterminé par les $k + 1$ points d'intersection $[a_i] \cdot [n - a_i]'$, en supposant que $[a_i]$ et $[n - a_i]'$ servent à définir respectivement les deux variétés fondamentales considérées.

Le cycle d'intersection de deux cycles quelconques sur une multiplicité a été défini par M. S. Lefschetz.[23] Dans le cas de deux cycles de dimensions complémentaires, on peut définir le *nombre algébrique de points d'intersection* ou *l'indice de Kronecker des deux cycles*. Si A et B sont deux variétés algébriques de dimensions complémentaires contenues dans la multiplicité K formée par une variété algébrique sans singularités, l'ordre de multiplicité d'un point d'intersection isolé de A et de B est le nombre algébrique de points qu'il représente quand on évalue l'indice de Kronecker des cycles algébriques A et B. Rappelons que cet ordre de multiplicité est positif lorsque K, A et B sont des variétés complexes.

Soit M un point d'intersection isolé de A avec B, les variétés A, B et K étant supposées complexes. M admet dans K un voisinage formé par une cellule analytique complexe E, dont les points sont définis par un système de coordonnées complexes $u_1, u_2, \cdots, u_\alpha$. A l'intérieur de E, les voisinages de M sur les deux variétés A et B sont des domaines de variétés complexes qui sont représentées par des variétés analytiques complexes a et b dans le domaine des coordonnées $u_1, u_2, \cdots, u_\alpha$. Si le point M est un point ordinaire de a et de b, c'est-à-dire s'il admet sur chacune des deux variétés sécantes un voisinage formant une cellule analytique complexe, l'ordre de multiplicité de M est égal à $+1$, à condition que M soit le seul point d'intersection des deux plans tangents en M aux variétés a et b. Dans le cas général on fera subir à b une petite déformation définie par une translation arbitraire dans le domaine des variables $u_1, u_2, \cdots, u_\alpha$. Après cette déformation, les variétés a et b se couperont en h points d'intersection voisins de M et tels qu'en chacun de ces points

[23] Voir S. Lefschetz, *a*, ch. IV.

l'intersection sera du type simple qu'on vient de considérer. L'ordre de multiplicité de M sera alors égal à h.

Ceci posé, il est facile de démontrer d'une façon rigoureuse que *l'indice de Kronecker des deux variétés fondamentales* $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ *et* $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$ *est égal à* $+1$. Désignons comme au §6 par $x_0, x_1, \cdots, x_k, y_0, y_1, \cdots, y_q$ les coordonnées homogènes des points de $[n]$, et soit $[k]_0$ la variété définie par les équations: $y_0 = y_1 = \cdots = y_q = 0$. Un élément $\{k\}$ voisin de $\{k\}_0$ a pour équations:

$$(2) \qquad y_i = \omega_{ij} x_j \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \cdots, q \\ j = 0, 1, \cdots, k \end{pmatrix}.$$

C'est l'élément défini par $k + 1$ points $P_0, P_1, \cdots, P_k$, le point P_j ayant pour coordonnées

$$x_j = 1, \qquad x_{j'} = 0, \qquad y_i = \omega_{ij} \qquad (j' \neq j).$$

Les équations (2) sont valables tant que $\{k\}$ ne rencontre pas la variété $[n - k - 1]$ d'équations: $x_0 = x_1 = \cdots = x_k = 0$. Les $(k + 1)(n - k)$ quantités ω_{ij} forment un système de coordonnées complexes pour la cellule ouverte $[n - k, n - k + 1, \cdots, n] - [n - k - 1, n - k + 1, \cdots, n]$.

Considérons une variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ contenant l'élément $\{k\}_0$. Nous supposons que $\{k\}_0$ est un élément général de cette variété c'est-à-dire que son intersection avec la variété $[a_r]$ qui intervient dans la définition de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est une variété plane à r dimensions exactement. Par une transformation projective de $[n]$ laissant invariant l'élément $\{k\}_0$, on pourra amener les variétés $[a_r]$ en coïncidence avec les variétés suivantes:

$$\begin{array}{lrl} [a_k] & y_{m_0} = y_{(m_0+1)} = \cdots = y_q = 0, & a_k = m_0 + k \\ [a_{k-1}] & x_0 = y_{m_1} = y_{(m_1+1)} = \cdots = y_q = 0, & a_{k-1} = m_1 + k - 1 \\ [a_{k-r}] & x_0 = x_1 = \cdots = x_{r-1} = y_{m_r} = y_{(m_r+1)} = \cdots = y_q = 0, & a_{k-r} = m_r + k - r \\ [a_0] & x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-1} = y_{m_k} = y_{(m_k+1)} = \cdots = y_q = 0, & a_0 = m_k \end{array}$$

Les inégalités $n \geqq a_k > a_{k-1} > \cdots > a_1 > a_0 \geqq 0$ entraînent les inégalités $n - k \geqq m_0 \geqq m_1 \geqq \cdots \geqq m_k \geqq 0$. Soit $\{k\}$ un élément général de $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ défini par les équations (2). La condition que les variétés planes $\{k\}$ et $[a_{k-r}]$ se coupent suivant une variété plane à $k - r$ dimensions entraîne $\omega_{ij} = 0$ pour tous les ensembles d'indices i et j vérifiant les inégalités $i \geqq m_r$, $j \geqq r$. Dans l'espace des variables complexes ω_{ij}, la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est donc représentée par une variété plane dont les équations sont:

$$\omega_{ij} = 0 \qquad \text{pour } i \geqq m_j.$$

Ceci prouve, en passant, que la dimension complexe de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ est

$$m_0 + m_1 + \cdots + m_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_k - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Considérons maintenant la variété d'éléments $\{k\}$ ayant pour équations: $\omega_{ij} = 0$ pour $i < m_j$. C'est une variété fondamentale de symbole $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$ définie par les variétés planes suivantes:

$$\begin{array}{lr}
[n - a_0] & y_0 = y_1 = \cdots = y_{(m_k - 1)} = 0 \\
[n - a_1] & x_k = y_0 = y_1 = \cdots = y_{(m_{k-1} - 1)} = 0 \\
[n - a_{k-r}] & x_{r+1} = \cdots = x_k = y_0 = y_1 = \cdots = y_{m_r} = 0 \\
[n - a_k] & x_1 = \cdots = x_k = y_0 = y_1 = \cdots = y_{m_0} = 0.
\end{array}$$

Les deux variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ et $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$ sont représentées dans l'espace des variables ω_{ij} par deux variétés planes qui n'ont qu'un point d'intersection, $\omega_{ij} = 0$; c'est le point représentatif de l'élément $\{k\}_0$. Cet élément doit donc être compté avec l'ordre de multiplicité égal à $+1$ dans l'intersection des deux variétés. Comme il n'y a pas d'autre élément d'intersection, l'indice de Kronecker des deux variétés est égal à $+1$:

$$[a_0, a_1, \cdots, a_k] \cdot [n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0] = +1,$$

en désignant par $A \cdot B$ l'indice de Kronecker de deux cycles A et B.

Pour chaque dimension $2s$ nous avons une base minima du groupe d'homologie formée par R_{2s} cycles fondamentaux $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$, où $a_0 + a_1 + \cdots + a_k - \dfrac{k(k+1)}{2} = s$. La matrice des nombres d'intersection des cycles fondamentaux de dimension $2s$ avec les cycles fondamentaux de dimension complémentaire est égale à la matrice-unité, à condition d'écrire ces cycles dans un ordre convenable. Soit Γ_{2s} un cycle quelconque sur V. On a l'homologie:

$$(3) \qquad \Gamma_{2s} \sim \Sigma(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)\, [a_0, a_1, \cdots, a_k].$$

Le coefficient $(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)$ dans cette homologie est le nombre d'intersections de Γ_{2s} et de $[n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0]$:

$$(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0) = \Gamma_{2s} \cdot [n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0].$$

Soit $\Gamma'_{2s'}$ un cycle de dimension complémentaire, $s' = (k + 1)(n - k) - s$. On aura:

$$\Gamma'_{2s'} \sim \Sigma(a_0, a_1, \cdots, a_k)' [n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0],$$

où:

$$(a_0, a_1, \cdots, a_k)' = \Gamma'_{2s'} \cdot [a_0, a_1, \cdots, a_k].$$

Le nombre d'intersections de Γ_{2s} et de $\Gamma'_{2s'}$ sera:

$$(4) \qquad \Gamma_{2s} \cdot \Gamma'_{2s'} = \Sigma(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)(a_0, a_1, \cdots, a_k)'.$$

En particulier si Γ_{2s} est le cycle défini par une variété algébrique A, les coefficients $(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)$ sont des nombres positifs. H. Schubert, qui les a déjà considérés dans ses recherches de géométrie énumérative, les a appelés les *degrés* (en allemand *Gradzahlen*) de la variété A. Si l'on a deux variétés algébriques A et B de dimensions complémentaires, les degrés de A

étant les nombres $(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)$ et ceux de B étant les nombres $(a_0, a_1, \cdots, a_k)'$, le nombre d'intersections de A et de B sera:

$$(4)' \qquad A \cdot B = \Sigma(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)(a_0, a_1, \cdots, a_k)'.$$

Cette formule constitue une généralisation du *théorème de Bézout*. En effet, soit V *l'espace projectif complexe* $[n]$, qui est un cas particulier des variétés de Grassmann. Si $A_{(s)}$ est une variété algébrique contenue dans $[n]$, de dimension complexe s, on a l'homologie: $A_{(s)} \sim (n - s)[s]$. Le nombre $(n - s)$ est le degré de A d'après la définition ordinaire de cette notion. Soit $B_{(n-s)}$ une variété algébrique à $n - s$ dimensions complexes. On a: $B_{(n-s)} \sim (s)'[n - s]$, où $(s)'$ est le degré de $B_{(n-s)}$. Il en résulte: $A_{(s)} \cdot B_{(n-s)} = (n - s)(s)'$, ce qui constitue le théorème de Bézout.

Considérons aussi le cas particulier des *variétés de droites*. V est la variété des droites de $[n]$, $A_{(s)}$ et $B_{(s')}$ sont des variétés algébriques engendrées par des droites. Supposons $s + s' = 2n - 2$. Alors les formules précédentes deviennent:

$$A_{(s)} \sim \Sigma(n - q, n - p)\,[p, q], \qquad p + q = s$$

$$B_{(s')} \sim \Sigma(p, q)'\,[n - q, n - p],$$

$$A_{(s)} \cdot B_{(s')} = \Sigma(n - q, n - p)\,(p, q)'.$$

Un complexe de droites, c'est-à-dire une variété algébrique $A_{(2n-3)}$ contenue dans V, n'a qu'un degré: $A_{(2n-3)} \sim (0, 2)\,[n - 2, n]$, où $(0, 2) = A_{(2n-3)} \cdot [0, 2]$. Si $(0, 2) = 1$, $A_{(2n-3)}$ est un complexe linéaire. Une surface réglée, c'est-à-dire une variété $B_{(1)}$, a aussi un seul degré; c'est le nombre $(n - 2, n) = B_{(1)} \cdot [n - 2, n]$. Le nombre de droites communes à $A_{(2n-3)}$ et $B_{(1)}$ est égal au produit de leurs degrés.

Les bases d'homologie de la variété des droites de l'espace projectif [3] sont:

[2, 3]		$R_8 = 1$
[1, 3]		$R_6 = 1$
[0, 3]	[1, 2]	$R_4 = 2$
[0, 2]		$R_2 = 1$
[0, 1]		$R_0 = 1.$

Considérons deux congruences de droites $A_{(2)}$ et $B_{(2)}$. On a:

$$A_{(2)} \sim (0, 3)\,[0, 3] + (1, 2)\,[1, 2]$$

$$B_{(2)} \sim (0, 3)'\,[0, 3] + (1, 2)'\,[1, 2].$$

Le nombre de droites communes sera:

$$A_{(2)} \cdot B_{(2)} = (0, 3)(0, 3)' + (1, 2)(1, 2)'.$$

Cette égalité constitue le théorème de Halphen relatif aux congruences de droites.

12. **Remarque au sujet du problème des caractéristiques de Schubert.** La formule (4)′ du paragraphe précédent exprime un résultat de géométrie énumérative déjà obtenu par Schubert.[24] Cependant le raisonnement de Schubert ne peut pas être considéré comme rigoureux, car il ne s'appuie pas sur une définition précise et générale de l'ordre de multiplicité d'un point d'intersection et il manque de précision en ce qui concerne une certaine déformation de variétés algébriques.

Rappelons que la topologie fournit une interprétation et une justification du *calcul symbolique de Schubert*.[25] Elle permet aussi de montrer que le *problème des caractéristiques* pour une variété algébrique sans singularités admet toujours une solution.

Etant donnée la variété de Grassmann V engendrée par les $[k]$ de l'espace $[n]$, les bases d'homologie pour les cycles algébriques sont fournies par les variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$. Soit $A_{(s)}$ une variété algébrique à s dimensions contenue dans V. Elle définit un cycle algébrique $A_{(s)}$. La relation (3) du paragraphe précédent entraîne une égalité symbolique de Schubert:

$$A_{(s)} = \Sigma(n - a_k, \cdots, n - a_1, n - a_0)[a_0, a_1, \cdots, a_k].$$

Cette égalité fournit la solution du problème des caractéristiques. Les différentes variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_k]$ ne sont liées par aucune égalité symbolique de Schubert. *Dans une variété de Grassmann l'égalité symbolique de Schubert $A_{(s)} = B_{(s)}$ et l'homologie $A_{(s)} \sim B_{(s)}$ sont donc deux relations équivalentes.*

13. **Remarque à propos d'un théorème de M. F. Severi.** Nos résultats topologiques sont à rapprocher d'un théorème démontré par M. F. Severi. Considérons la variété de Grassmann engendrée par les $\{k\}$ de $[n]$ et soit $V_{(d)}$ sa représentation à l'aide des coordonnées plückeriennes $p_{i_0 i_1 \cdots i_k}$ dans l'espace projectif $[r]$, où $r = \binom{n+1}{k+1} - 1$. Pour la dimension complexe $d - 1$, la base d'homologie est formée par la variété $[n - k - 1, n - k + 1, \cdots, n]$ dont l'équation peut se ramener à $p_{01 \cdots k} = 0$. C'est une section hyperplane particulière de $V_{(d)}$. Soit C une section de $V_{(d)}$ par un $[r - 1]$ général. La variété $[0, 1, \cdots, k - 1, k + 1]$ est représentée sur $V_{(d)}$ par une droite. Donc $C \cdot [0, 1, \cdots, k - 1, k + 1] = 1$ et par suite $C \sim [n - k - 1, n - k + 1, \cdots, n]$. Un complexe algébrique, $A_{(d-1)}$, est une variété algébrique à $d - 1$ dimensions complexes contenue dans $V_{(d)}$. On aura $A_{(d-1)} \sim \lambda C$, où λ est le degré du complexe. D'après un théorème de M. S. Lefschetz,[26] cette homologie entraîne l'équivalence algébrique $A_{(d-1)} \equiv \lambda C$. Ainsi C forme la base minima de Severi,

---

[24] Voir H. Schubert, *a*. Une autre démonstration se trouve dans F. Severi, *c*. Il y a de nombreux travaux de géométrie énumérative concernant les variétés fondamentales de Schubert. On pourra consulter à ce sujet C. Segre, *a*.

[25] Voir B. L. van der Waerden, *a*. Voir également F. Severi, *b*.

[26] S. Lefschetz, *b*, p. 25 et 48.

et les complexes de degré λ forment un système continu complet. Comme le nombre de Betti relatif à la dimension 1 est nul, la variété $V_{(d)}$ est régulière et par suite $A_{(d-1)}$ et λC sont des variétés génériques d'un même système linéaire. Donc *les complexes algébriques de degré λ forment un système linéaire complet* qui contient évidemment le système linéaire des intersections complètes de $V_{(d)}$ par les hypersurfaces de degré λ de $[r]$. Dans son mémoire consacré aux variétés de Grassmann, M. F. Severi[27] démontre une propriété plus précise, à savoir que tout complexe algébrique est l'intersection complète de $V_{(d)}$ par une hypersurface de $[r]$.

IV. Etude des autres familles de variétés algébriques de la classe considérée

14. **La quadrique complexe non dégénérée à n dimensions complexes.** Nous nous proposons de montrer comment notre méthode élémentaire permet d'étudier la topologie des variétés algébriques qui sont classées au §5 avec les variétés de Grassmann comme fournissant des espaces homogènes symétriques.[28]

Rappelons quelques propriétés classiques d'une quadrique non dégénérée Q_n appartenant à un espace $[n + 1]$.[29] En supposant $n = 2p$ ou $n = 2p + 1$, la quadrique Q_n contient une infinité de variétés planes à p dimensions, mais ne contient pas de variétés planes de dimension supérieure à p. Si $n = 2p + 1$, ces génératrices planes à p dimensions forment une seule famille continue. Si $n = 2p$, les génératrices planes à p dimensions forment deux familles distinctes. Deux génératrices $[p]$ et $[p]'$ de même famille se coupent suivant une variété plane à $p - 2s$ dimensions. Deux génératrices $[p]$ et $[p]'$ qui n'appartiennent pas à la même famille se coupent suivant une variété plane à $p - 2s - 1$ dimensions. s est un entier tel que $p - 2s \geqq -1$ et $p - 2s - 1 \geqq -1$. On convient de considérer une intersection nulle comme une intersection de dimension -1. En général, deux génératrices $[p]$ et $[p]'$ de même système (de systèmes différents) ont un point commun si p est pair (impair), et n'ont pas de point commun si p est impair (pair).

Soit O un point de la quadrique non dégénérée Q_n. Soit $[n]$ l'hyperplan tangent en O. $[n]$ coupe Q_n suivant un cône Q_{n-1} de sommet O. Soit $[n]'$ un hyperplan ne passant pas par O et coupant $[n]$ suivant $[n - 1]'$. Par projection centrale de centre O on met $Q_n - Q_{n-1}$ en correspondance biunivoque avec la cellule ouverte $[n]' - [n - 1]'$. *Donc $Q_n - Q_{n-1}$ est une cellule algébrique ouverte.*

Soit $[k]$ une génératrice plane de Q_n. Supposons $k < p$. $[k]$ admet une variété conjuguée $[n - k]$ qui coupe Q_n suivant une quadrique Q_{n-k-1}; celle-ci est $k + 1$ fois dégénérée et admet $[k]$ comme lieu de ses points doubles. Soit O' un point de Q_{n-k-1} non situé sur $[k]$. L'ensemble de O' et de $[k]$ détermine une génératrice $[k + 1]$ dont la variété conjuguée est une variété $[n - k - 1]$.

---

27 Voir F. Severi, *a*.

28 Les résultats relatifs aux quadriques complexes sont connus. Voir E. Cartan, *g* et B. L. van der Waerden, *b*.

29 Voir C. Segre, *a*.

Q_n est coupé par $[n - k - 1]$ suivant une quadrique Q_{n-k-2}. Tout point de $Q_{n-k-1} - Q_{n-k-2}$ correspond d'une façon biunivoque à une droite de $[n - k]$ qui passe par O' et qui n'est pas située dans $[n - k - 1]$. *Donc* $Q_{n-k-1} - Q_{n-k-2}$ *est une cellule algébrique ouverte.*

Supposons $n = 2p + 1$. Prenons une génératrice $[p]$ de Q_{2p+1} et considérons dans $[p]$ des variétés $[p - 1], \cdots, [1], [0]$ telles que $[p] \supset [p - 1] \supset \cdots \supset [1] \supset [0]$. Nous faisons correspondre à une variété $[k]$ de cette suite la quadrique Q_{n-k-1}, intersection de Q_n par la variété conjuguée de $[k]$. Si $k = p$, Q_{n-p-1} se réduit à $[p]$. On a ainsi une suite de variétés:

$$Q_{2p+1} \supset Q_{2p} \supset \cdots \supset Q_{p+1} \supset [p] \supset [p - 1] \supset \cdots \supset [1] \supset [0].$$

La différence entre deux variétés successives forme une cellule algébrique ouverte. *Ces variétés forment les bases d'homologie. Il n'y a pas de coefficients de torsion. L'indice de Kronecker* $[k] \cdot Q_{n-k}$ *est égal à* 1.

Supposons $n = 2p$. Considérons sur Q_{2p} la suite des variétés planes:

$$[p] \supset [p - 1] \supset \cdots \supset [1] \supset [0].$$

A une variété $[k]$ de cette suite nous faisons encore correspondre une quadrique Q_{n-k-1}. Pour $k = p - 1$, Q_{n-k-1} se réduit à deux génératrices $[p]$ et $[p]'$, de systèmes différents, qui se coupent suivant $[p - 1]$. *Les bases d'homologie sont encore formées par* $Q_{2p}, Q_{2p-1}, \cdots, Q_{p+1}, [p], [p]', [p - 1], \cdots, [1], [0]$. Remarquons qu'il y a deux variétés de base pour la dimension p. *Il n'y a pas de coefficients de torsion.* On a encore: $[k] \cdot Q_{n-k} = 1$ pour $k \neq p$. Si p est impair: $[p] \cdot [p]' = 1$, $[p] \cdot [p] = [p]' \cdot [p]' = 0$. Si p est pair:

$$[p] \cdot [p] = [p]' \cdot [p]' = 1, \qquad [p] \cdot [p]' = 0.$$

15. **La variété des génératrices planes à p dimensions d'une quadrique complexe non dégénérée Q_{2p}.** Considérons sur la quadrique complexe non dégénérée Q_{2p} les génératrices planes à p dimensions appartenant à l'un des deux systèmes de génératrices à p dimensions. Elles engendrent une variété algébrique V à $p(p + 1)/2$ dimensions complexes. Un élément quelconque de V sera designé par $\{p\}$. Nous nous proposons de subdiviser V en cellules algébriques.

Supposons d'abord $p = 2$. Les points de Q_4 représentent les droites complexes d'un espace projectif [3]. Une génératrice plane de Q_4 représente les droites de [3] qui passent par un point ou les droites de [3] qui sont situées dans un plan. Les éléments $\{2\}$ de la variété V sont donc en correspondance biunivoque avec les points de [3]. Cette remarque conduit aux résultats suivants: Soit $\{2\}_0$ un élément particulier de V. C'est une variété plane $[2]_0$ contenue dans Q_4. Prenons dans la variété $[2]_0$ une droite [1] et un point [0] sur cette droite. Tout élément $\{2\}$ de V a un point en commun avec $[2]_0$. Considérons la variété des éléments de V qui rencontrent la droite [1]. Nous la représentons par $[1, \cdot, \cdot]$. La variété des éléments de V qui contiennent le point $[0]$ sera représentée par $[0, \cdot, \cdot]$. Représentons par $[0, 1, 2]$ l'élément particulier $\{2\}_0$ et par $[2, \cdot, \cdot]$ la variété totale V. On reconnait alors que $[2, \cdot, \cdot] - [1, \cdot, \cdot]$ est une cellule algébrique ouverte. Il en est de même pour $[1, \cdot, \cdot] - [0, \cdot, \cdot]$ et pour $[0, \cdot, \cdot] - [0, 1, 2]$.

Passons à l'étude du cas général. Considérons sur la quadrique Q_{2p} une variété plane $[p]_0$ formant un élément particulier $\{p\}_0$ de la variété V lorsque p est pair, et n'appartenant pas à V lorsque p est impair. L'intersection d'un élément $\{p\}$ de V avec $[p]_0$ a toujours un nombre pair de dimensions; en général ce sera un point. Introduisons dans $[p]_0$ une suite de variétés $[p-1], [p-2], \cdots, [0]$ telles que:

$$[p]_0 \supset [p-1] \supset [p-2] \supset \cdots \supset [0]. \tag{1}$$

Considérons $2i + 1$ variétés de cette suite: $[a_0] \subset [a_1] \subset \cdots \subset [a_{2i}]$. Le symbole $[a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2i}, \cdot, \cdot\cdot]$ représentera la variété des éléments $\{p\}$ de V qui coupent $[a_s]$ suivant une variété à s dimensions. Dans le symbole nous mettons $p - 2i$ points à la suite du dernier nombre a_{2i} pour indiquer que l'élément générateur est une variété plane à p dimensions. La variété V elle-même est représentée par $[p, \cdot, \cdot\cdot\cdot\cdot]$. Nous allons démontrer le lemme suivant:

LEMME. *La variété $[a_0, a_1, \cdots, a_{2i}, \cdot, \cdot\cdot]$ devient une cellule algébrique ouverte lorsqu'on en retranche les variétés représentées par les symboles qu'on obtient en diminuant d'une unité un quelconque des nombres du symbole donné, ou en remplaçant, dans le cas où $a_{2i} < p - 1$, les deux premiers points qui suivent a_{2i} par $p - 1$ et p. Tout symbole qui n'a pas de sens devra être remplacé par zéro.*

Le lemme est bien vérifié pour $p = 1$ et $p = 2$. En le supposant exact pour une quadrique Q_{2p-2}, nous allons le démontrer pour une quadrique Q_{2p}.

La quadrique Q_{2p} appartient à un espace $[2p + 1]$. Soit $[2p]'$ un hyperplan ne passant pas par le point $[0]$ de la suite (1). L'hyperplan tangent à Q_{2p} au point $[0]$ coupe $[2p]'$ suivant une variété $[2p - 1]'$. L'intersection de Q_{2p} avec $[2p - 1]'$ est une quadrique non dégénérée Q_{2p-2}. Soit $\{p\}$ une génératrice de Q_{2p} appartenant à la variété V. Si $\{p\}$ ne passe pas par $[0]$, la projection stéréographique de centre $[0]$ lui fait correspondre d'une façon biunivoque une variété plane $\{p\}'$ de l'hyperplan $[2p]'$. $\{p\}'$ coupe $[2p - 1]'$ suivant une génératrice $\{p - 1\}'$ de la quadrique Q_{2p-2}. $\{p - 1\}'$ engendre un des systèmes de génératrices de Q_{2p-2}. Tout $\{p\}'$ appartenant à $[2p]'$ et coupant $[2p - 1]'$ suivant une telle génératrice $\{p - 1\}'$ correspond à une génératrice $\{p\}$ ne passant pas par $[0]$.

Les variétés de la suite (1) sont coupées par $[2p - 1]'$ suivant des variétés $[p - 1]_0'$, $[p - 2]'$, $\cdots$, $[0]'$ telles que:

$$[p - 1]_0' \supset [p - 2]' \supset \cdots \supset [0]'. \tag{2}$$

Considérons la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_{2i}, \cdot, \cdot\cdot]$ et supposons $a_0 > 0$. Les $\{p\}$ de cette variété qui ne contiennent pas $[0]$ se projettent suivant les $\{p\}'$ de $[2p]'$ qui coupent $[2p - 1]'$ suivant des génératrices $\{p - 1\}'$ de Q_{2p-2}. Ces génératrices $\{p - 1\}'$ engendrent la variété $[a_0', a_1', \cdots, a_{2i}', \cdot, \cdot\cdot]'$ définie à l'aide des variétés de la suite (2), le nombre a_s' étant égal à $a_s - 1$. Nous pouvons appliquer le lemme à la variété $[a_0', a_1', \cdots, a_{2i}', \cdot, \cdot\cdot]'$. Celle-ci devient une cellule algébrique ouverte A lorsqu'on en retranche les variétés indiquées dans l'énoncé du lemme. Il reste à démontrer que les $\{p\}'$ de l'hyperplan $[2p]'$ qui coupent $[2p - 1]'$ suivant les éléments $\{p - 1\}'$ de A forment une cellule ouverte.

Les nombres $a_0', a_1', \cdots, a_{2i}'$ sont des nombres de la suite $0, 1, \cdots, p - 1$; désignons par $b_0', b_1', \cdots, b_j'$ les autres nombres de cette suite. Considérons sur Q_{2p-2} une génératrice $[p - 1]_0''$ qui coupe $[p - 1]_0'$ suivant une variété $[j]$. Nous choisissons $[p - 1]_0''$ de telle façon que $[j]$ appartienne à la variété fondamentale de Schubert de symbole $[b_0', b_1', \cdots, b_j']$ définie à l'aide de variétés de la suite (2). Nous supposons que $[j]$ occupe une position générale dans $[b_0', b_1', \cdots, b_j']$. Les variétés $[p - 1]_0'$ et $[p - 1]_0''$ sont des génératrices de Q_{2p-2} qui n'appartiennent pas au même système, car leur intersection est à $j = p - 1 - (2i + 1)$ dimensions. Soit $\{p - 1\}'$ un élément quelconque de la cellule ouverte A. Montrons que $\{p - 1\}'$ n'a pas de point commun avec $[p - 1]_0''$. On voit d'abord que $\{p - 1\}'$ n'a pas de point commun avec $[j]$; sinon $\{p - 1\}'$ appartiendrait à une des variétés-frontières de la cellule A. Soit $[2p - 2 - j]$ la variété conjuguée de $[j]$ par rapport à la quadrique Q_{2p-2}. Les variétés $[2p - 2 - j]$ et $\{p - 1\}'$ ne peuvent pas appartenir à un même hyperplan de l'espace $[2p - 1]'$, comme leurs variétés conjuguées n'ont pas de point commun. Donc l'intersection de $[2p - 2 - j]$ et $\{p - 1\}'$ est à $p - 2 - j = 2i$ dimensions; c'est précisément l'intersection de $\{p - 1\}'$ avec $[p - 1]_0'$. La variété $[p - 1]_0''$ appartient à $[2p - 2 - j]$. Il en résulte bien que $\{p - 1\}$ et $[p - 1]_0''$ n'ont pas de point commun.

Soit $[p]_0''$ une variété contenue dans $[2p]'$ et coupant $[2p - 1]'$ suivant $[p - 1]_0''$. Soit $\{p\}'$ une variété plane à p dimensions contenue dans $[2p]'$ et coupant $[2p - 1]'$ suivant $\{p - 1\}'$. L'intersection de $\{p\}'$ avec $[p]_0''$ est un point non situé sur $[p - 1]_0''$. Par conséquent, la variété des $\{p\}'$ est homéomorphe au produit topologique de la cellule ouverte A par la cellule ouverte $[p]_0'' - [p - 1]_0''$. Par projection stéréographique de centre [0], il lui correspond sur Q_{2p} une variété d'éléments $\{k\}$ qui forme bien une cellule algébrique ouverte. On voit facilement que la frontière de cette cellule est formée par les variétés indiquées dans l'énoncé du lemme.

Si $a_0 = 0$, on vérifie le lemme en remarquant que la variété des génératrices $\{p\}$ de Q_{2p} qui passent par le point [0] correspond d'une façon biunivoque à la variété des génératrices $\{p - 1\}$ de Q_{2p-2}.

Nous dirons que les variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_{2i}, \cdot, \cdot\cdot]$ *sont les variétés fondamentales de* V. *En vertu du lemme, elles subdivisent* V *en cellules algébriques complexes. Elles forment donc les bases d'homologie pour les dimensions paires. Les nombres de Betti pour les dimensions impaires sont nuls, et il n'y a pas de coefficients de torsion.*

Donnons explicitement les bases d'homologie pour la variété V engendrée par les génératrices $\{3\}$ d'une quadrique Q_6.

$[3, \cdot, \cdot, \cdot]$	$R_{12} = 1$
$[2, \cdot, \cdot, \cdot]$	$R_{10} = 1$
$[1, \cdot, \cdot, \cdot]$	$R_8 = 1$
$[0, \cdot, \cdot, \cdot]$ $[1, 2, 3, \cdot]$	$R_6 = 2$
$[0, 2, 3, \cdot]$	$R_4 = 1$
$[0, 1, 3, \cdot]$	$R_2 = 1$
$[0, 1, 2, \cdot]$	$R_0 = 1.$

On reconnaît que V a la même dimension et les mêmes constantes topologiques que Q_6. V et Q_6 sont effectivement homéomorphes. On connaît, en effet, une correspondance biunivoque entre les points de la quadrique Q_6 et ses génératrices de l'un des deux systèmes de génératrices à 3 dimensions.[30]

Remarquons qu'on pourrait remplacer les symboles $[a_0, \cdots, a_{2i}, \cdot, \cdot\cdot]$ par des symboles légèrement différents. Soit $[p]_1$ une génératrice de Q_{2p} coupant $[p]_0$ suivant la variété $[p - 1]$ de la suite (1). $[p]_0$ et $[p]_1$ sont des génératrices de systèmes différents. Considérons la suite de variétés planes:

$$(1)' \qquad [p]_1 \supset [p - 1] \supset \cdots \supset [1] \supset [0].$$

Si $\{p\}$ est un élément de V, son intersection avec $[p]_1$ est nulle ou a un nombre impair de dimensions. Prenons $2i$ variétés appartenant à la suite (1)': $[a_0] \subset [a_1] \subset \cdots \subset [a_{2i-1}]$. Le symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_{2i-1}, \cdot, \cdot\cdot]$ représentera la variété des éléments $\{p\}$ qui coupent $[a_s]$ suivant une variété à s dimensions. La variété V elle-même serait ainsi représentée par $[\cdot, \cdot, \cdots]$, où figurent seulement $p + 1$ points. Nous dirons qu'un symbole est de *première* ou de *seconde* espèce, suivant qu'il contient $2i + 1$ ou $2i$ nombres. Toute variété fondamentale est représentée par un symbole de première espèce et par un symbole de seconde espèce. Ces deux symboles contiennent les mêmes nombres inférieurs à p; le nombre p figure toujours dans l'un des symboles et ne figure pas dans l'autre. Par exemple, $[0, 2, 3, \cdot, \cdot]$ et $[0, 2, 3, 4, \cdot]$ représentent la même variété; de même $[1, 3, 4, \cdot, \cdot]$ et $[1, 3, \cdot, \cdot, \cdot]$ représentent la même variété. Le lemme s'énonce de la même façon quand on emploie des symboles de seconde espèce.

La dimension complexe de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ est égale à $\dfrac{p(p+1)}{2} - (p - a_0) - (p - a_1) - \cdots - (p - a_s)$. En effet, cette expression diminue d'une unité quand on remplace un des nombres a_j par $a_j - 1$ ou quand on remplace deux points qui suivent a_s par $p - 1$ et p. D'autre part elle prend toutes les valeurs entières de $p(p + 1)/2$ à 0. Remarquons qu'on peut associer à toute variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ la variété $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ telle que les nombres $a_0, a_1, \cdots, a_s, b_0, b_1, \cdots, b_t$ soient, à l'ordre près, les nombres de

[30] Ceci est lié à l'existence d'un parallélisme absolu dans l'espace elliptique réel à 7 dimensions. Voir: F. Vaney, *a*.

la suite $0, 1, \cdots, p$. Les deux variétés sont de dimensions complémentaires et les deux symboles seront dits *symboles associés*.

Démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME. *Etant données deux variétés fondamentales de dimensions complémentaires, leur indice de Kronecker est égal à* 1 *lorsqu'elles sont représentées par deux symboles associés; sinon il est égal à zéro.*

Soient $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ et $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ deux symboles associés, le premier étant de première espèce. Considérons les variétés planes de la suite (1) ainsi que leurs variétés conjuguées par rapport à Q_{2p}; soit $[2p - k]$ la variété conjugée de $[k]$. Nous avons alors une suite de variétés planes:

$$(3) \qquad [2p + 1] \supset [2p] \supset \cdots \supset [p]_0 \supset [p - 1] \supset \cdots \supset [0].$$

Montrons que les éléments $\{p\}$ de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ appartiennent à la variété fondamentale de Schubert définie par le symbole

$$[a_0, a_1, \cdots, a_s, n - b_t, \cdots, n - b_1, n - b_0]$$

à l'aide de $p + 1$ variétés de la suite (3); nous avons posé $n = 2p + 1$. En effet, comme un tel élément $\{p\}$ coupe $[a_i]$ suivant une variété à i dimensions, il coupe la variété conjuguée $[2p - a_i]$ suivant une variété à $\varphi(i)$ dimensions, où $\varphi(i) = p - a_i + i$. On a: $\varphi(i) - \varphi(i + 1) = a_{i+1} - a_i - 1$. La différence $\varphi(j) - \varphi(i)$ indique combien des nombres $b_0, b_1, \cdots, b_t$ sont compris entre a_j et a_i. Si dans le symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ tous les nombres de a_j à a_i sont des nombres consécutifs, on a $\varphi(i) = \varphi(j)$. Soit a_i un nombre du symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ tel que $a_i + 1$ soit égal à un nombre $b_{i'}$ du symbole $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$. L'élément $\{p\}$ coupe $[n - b_{i'}]$ suivant une variété à $\varphi(i)$ dimensions. Remarquons que $\varphi(i) = p - (a_i - i) = p - i'$. Il en résulte bien que $\{p\}$ fait partie de la variété fondamentale de Schubert de symbole

$$[a_0, a_1, \cdots, a_s, n - b_t, \cdots, n - b_1, n - b_0].$$

De même les éléments $\{p\}$ de la variété $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ font partie d'une variété de Schubert de symbole $[b_0, b_1, \cdots, b_t, n - a_s, \cdots, n - a_1, n - a_0]$. Si $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ est de seconde espèce, il faut considérer à la place de la suite (3) l'ensemble des variétés de la suite (1)' et de leurs conjuguées par rapport à Q_{2p}. En déplaçant la génératrice $[p]_0$, nous pouvons donner à la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ une position générale par rapport à la variété $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$. Ces deux variétés sont alors contenues dans deux variétés de Schubert qui ont un élément commun. On reconnaît que cet élément commun appartient à Q_{2p}. Donc l'indice de Kronecker des deux variétés associées est bien égal à 1.

Soit $[c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdot, \cdot\cdot]$ une autre variété fondamentale dont la dimension est complémentaire à celle de $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$. Nous supposons que les variétés planes qui servent à définir $[c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdot, \cdot\cdot]$ appartiennent à une suite $[p]' \supset [p - 1]' \supset \cdots \supset [0]'$, où $[p]'$ est une génératrice qui n'a pas de point commun avec $[p]_0$. Si $r + s > p - 1$, les deux variétés

$[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ et $[c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdot, \cdot\cdot]$ n'ont pas d'élément commun; sinon $[a_s]$ et $[c_r]'$ auraient un point commun, ce qui est impossible. Supposons $s + r \leqq p - 1$; d'où $r \leqq t$. Comme $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ et $[c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdot, \cdot\cdot]$ ont la même dimension, on a:

$$p - b_0 + p - b_1 + \cdots + p - b_t = p - c_0 + p - c_1 + \cdots + p - c_r.$$

Au moins un des nombres $c_0, c_1, \cdots, c_r$ est donc inférieur au nombre de même rang de la suite $b_0, b_1, \cdots, b_t$; soit $c_i < b_i$. Alors les variétés $[n - b_i]$ et $[c_i]'$ n'ont pas de point commun. Donc les variétés $[c_0, c_1, \cdots, c_r, \cdot, \cdot\cdot]$ et $[a_0, a_1, \cdots, a_s, n - b_t, \cdots, n - b_1, n - b_0]$ n'ont pas d'élément commun.

Du théorème ainsi démontré il résulte que tout cycle Γ_{2k} de la variété V s'exprime par une homologie de la forme:

$$\Gamma_{2k} \sim \Sigma\, (b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot)\, [a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot],$$

où $(b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot)$ est l'indice de Kronecker de Γ_{2k} avec la variété fondamentale associée à $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$.

16. **L'espace des variétés planes à p dimensions qui appartiennent à un complexe linéaire non dégénéré d'un espace projectif à $2p + 1$ dimensions complexes.** Soit C un complexe linéaire de droites défini dans l'espace projectif complexe $[2p + 1]$. Nous supposons que C est non dégénéré. Les droites de C qui passent par un point M remplissent un hyperplan $[2p]$, qui est appelé hyperplan conjugué de M. A une variété $[i]$ est associée une variété conjuguée $[2p - i]$; c'est la variété commune à tous les hyperplans conjugués des points de $[i]$. Si $i < p$, il y a des variétés $[i]$ qui sont contenues dans leurs variétés conjuguées. Nous disons qu'une telle *variété $[i]$ appartient au complexe*; toute droite de $[i]$ est alors une droite du complexe. Une variété $[p]$ qui appartient au complexe est confondue avec sa conjuguée. Soit V la variété des $[p]$ qui appartiennent au complexe. Les propriétés de V ressemblent à celles de la variété des génératrices à p dimensions d'une quadrique Q_{2p}.[31] Désignons par $\{p\}$ un élément quelconque de V et soit $[p]_0$ un élément particulier de V. Nous allons démontrer le lemme suivant:

LEMME I. *La variété V devient une cellule algébrique ouverte lorsqu'on en enlève tous les $\{p\}$ qui rencontrent $[p]_0$.*

La démonstration se fait de nouveau par induction. Soit O un point de $[p]_0$ et soit $[2p]_0$ l'hyperplan conjugué de O. $[2p]_0$ contient $[p]_0$. Tout $\{p\}$ qui ne rencontre pas $[p]_0$ coupe $[2p]_0$ suivant une variété $\{p - 1\}$ qui ne rencontre pas $[p]_0$. Soit $\{p + 1\}$ la variété conjuguée de $\{p - 1\}$. Les éléments $\{p\}$ qui passent par $\{p - 1\}$ sont les variétés planes à p dimensions qui passent par $\{p - 1\}$ et qui sont contenues dans $\{p + 1\}$. Considérons une variété $[p - 1]_0$ contenue dans $[p]_0$ et ne passant pas par O. La variété $[p + 1]_0$, conjuguée de

[31] Pour les propriétés classiques d'un complexe linéaire, voir C. Segre, *a*.

$[p-1]_0$, coupe $[2p]_0$ suivant $[p]_0$. $\{p+1\}$ et $[p+1]_0$ se coupent suivant une droite passant par O. Tout élément $\{p\}$ passant par $\{p-1\}$ coupe $[p+1]_0$ suivant un point et correspond ainsi d'une façon biunivoque à une variété $[p]'$ passant par $[p-1]_0$ et contenue dans $[p+1]_0$. Les éléments $\{p\}$ qui passent par $[p-1\}$ engendrent une cellule ouverte lorsqu'on enlève l'élément qui passe par O. Le lemme sera donc démontré quand on aura montré que les variétés $\{p-1\}$ qui ne rencontrent pas $[p]_0$ forment une cellule ouverte.

Considérons dans $[2p]_0$ une variété $[2p-1]_0$ qui coupe $[p]_0$ suivant $[p-1]_0$. Les droites du complexe C qui sont contenues dans $[2p-1]_0$ engendrent un complexe linéaire non dégénéré C'. Par projection centrale de centre O, toute variété $\{p-1\}$ dans $[2p]_0$ qui appartient au complexe C et qui ne rencontre pas $[p]_0$ se projette sur $[2p-1]_0$ suivant une variété $\{p-1\}'$ qui appartient au complexe C' et qui ne rencontre pas $[p-1]_0$. Par hypothèse, les variétés $\{p-1\}'$ engendrent une cellule algébrique ouverte. Les variétés $\{p-1\}$ qui se projettent suivant une variété $\{p-1\}'$ donnée et qui ne passent pas par O engendrent une cellule ouverte. On peut les mettre en correspondance biunivoque avec les variétés $[2p-1]$ qui sont déterminées par $\{p-1\}$ et $[p-1]_0$. Donc les $\{p-1\}$ qui ne rencontrent pas $[p]_0$ engendrent bien une cellule ouverte.

Le lemme se démontre directement pour $p = 1$ en appliquant les réflexions précédentes; il est donc prouvé quel que soit p.

Considérons dans $[p]_0$ une suite de variétés planes:

$$[p]_0 \supset [p-1]_0 \supset \cdots \supset [1]_0 \supset [0]_0.$$

Le symbole $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$, où $0 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_s \leqq p$, représentera la variété des éléments $\{p\}$ de V qui coupent $[a_i]_0$ suivant une variété à i dimensions. On a ajouté $p - s$ points à la suite de a_s, pour indiquer que l'élément générateur est à p dimensions.

Lemme II. *La variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ devient une cellule algébrique ouverte lorsqu'on en enlève l'ensemble des variétés représentées par les symboles qu'on obtient en diminuant d'une unité un des nombres du symbole donné ou en écrivant le nombre p à la suite de a_s, si $a_s < p$. Tout symbole qui n'a pas de sens est remplacé par zéro.*

Nous raisonnons de nouveau par induction par rapport à p. Le lemme se vérifie immédiatement pour $p = 1$. Soit $[2p]'$ une variété plane qui coupe $[a_0]_0$ suivant $[a_0 - 1]_0$ et les variétés $[a_0+1]_0$, $[a_0+2]_0$, $\cdots$, $[p]_0$ suivant des variétés $[a_0]'$, $[a_0+1]'$, $\cdots$, $[p-1]'$. Considérons un élément général $\{p\}$ de la variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$. Il est déterminé par un point M de $[a_0]_0$ et une variété $\{p-1\}$ contenue dans $[2p]'$. Nous supposons que M n'appartient pas à $[a_0-1]_0$. L'hyperplan conjugué de M coupe $[2p]'$ suivant une variété $[2p-1]'$. Les droites du complexe C qui sont contenues dans $[2p-1]'$ engendrent un complexe linéaire C'. La variété $\{p-1\}$ appartient au complexe C' et engendre, pour un point M donné, la variété de symbole

$$[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_s - 1, \cdot, \cdot\cdot]'$$

définie à l'aide des variétés $[a_1 - 1]'$, $[a_2 - 1]'$, $\cdots$, $[a_s - 1]'$. Par hypothèse on peut appliquer le lemme à la variété $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_s - 1, \cdot, \cdot\cdot]'$. Faisons décrire à M la cellule ouverte $[a_0]_0 - [\dot{a}_0 - 1]_0$. A deux points M_1 et M_2 correspondent deux hyperplans conjugués qui coupent $[2p]'$ suivant des variétés $[2p - 1]_1'$ et $[2p - 1]_2'$. Celles-ci ne contiennent pas le pôle I de l'hyperplan $[2p]'$. Les variétés $\{p - 1\}$ dans $[2p - 1]_1'$ et $[2p - 1]_2'$ peuvent être mises en correspondance biunivoque par projection centrale de centre I. La variété $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ dont on a enlevé les éléments qui rencontrent $[a_0 - 1]_0$ est donc le produit topologique de $[a_0]_0 - [a_0 - 1]_0$ par la variété $[a_1 - 1, a_2 - 1, \cdots, a_s - 1, \cdot, \cdot\cdot]'$. Le lemme résulte de cette propriété.

Nous dirons encore que les variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ *sont les variétés fondamentales de* V. *Elles subdivisent* V *en cellules algébriques et forment par suite les bases d'homologie.*

La dimension complexe de V est $(p + 1)(p + 2)/2$. En raisonnant comme au §15, on trouve que la dimension complexe de $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$ est

$$\frac{(p + 1)(p + 2)}{2} - (p + 1 - a_0) - (p + 1 - a_1) - \cdots - (p + 1 - a_s).$$

Soient $b_0, b_1, \cdots, b_t$ les nombres de la suite $0, 1, \cdots, p$ qui ne figurent pas parmi la suite $a_0, a_1, \cdots, a_s$. La variété $[b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot]$ sera dite *associée* à $[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot]$. Deux variétés associées sont de dimensions complémentaires. On montre comme au §15 que *l'indice de Kronecker de deux variétés associées est égal à* 1. *Si deux variétés de dimensions complémentaires ne sont pas des variétés associées, leur indice de Kronecker est nul.* Par conséquent tout cycle Γ_{2k} s'exprime par une homologie de la forme:

$$\Gamma_{2k} \sim \Sigma(b_0, b_1, \cdots, b_t, \cdot, \cdot\cdot)[a_0, a_1, \cdots, a_s, \cdot, \cdot\cdot],$$

les notations étant les mêmes qu'au §15.

Il y a une analogie frappante entre la variété des génératrices $\{p + 1\}$ d'une quadrique Q_{2p+2} et la variété des éléments $\{p\}$ appartenant à un complexe linéaire de l'espace $[2p + 1]$. Dans les deux cas, toute variété fondamentale est définie par un ensemble d'entiers $(a_0, a_1, \cdots, a_s)$ tels que $0 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_s \leqq p$; le nombre $p + 1$ qui peut figurer dans les symboles des variétés fondamentales du premier cas ne joue pas un rôle essentiel. Les invariants topologiques ordinaires (nombres de Betti, coefficients de torsion, groupe de Poincaré) sont les mêmes. Cependant les deux variétés ne sont pas homéomorphes. Soit, en effet, le cas $p = 1$. La variété des génératrices $\{2\}$ d'une quadrique Q_4 est homéomorphe à l'espace projectif $[3]$. La variété des droites d'un complexe linéaire de $[3]$ est homéomorphe à une quadrique Q_3. On voit facilement que les variétés $[3]$ et Q_3 ne sont pas homéomorphes. Il suffit de considérer dans les deux cas l'intersection avec lui-même du cycle de base à 2 dimensions complexes.

17. **Application de la méthode des invariants intégraux.** Il est intéressant de retrouver certains des résultats précédents par la méthode des invariants intégraux[32] du §5.

Considérons la quadrique Q_{2p} d'équation:

$$x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_p y_p = 0. \tag{1}$$

Soit $\{p\}_0$ la génératrice $x_0 = x_1 = \cdots = x_p = 0$. Les génératrices $\{p\}$ voisines de $\{p\}_0$ sont représentées par:

$$x_i = \sum_i a_{ij} y_i, \qquad a_{ij} + a_{ji} = 0.$$

La variété V des génératrices $\{p\}$ de même système que $\{p\}_0$ est transformée transitivement par le groupe projectif G qui laisse invariantes la quadrique (1) et les relations $y_i = \bar{x}_i$. G est équivalent au groupe orthogonal à paramètres réels et à $2p + 2$ variables. Le groupe d'isotropie g relatif à l'élément-origine $\{p\}_0$ est défini par:

$$(g) \qquad \begin{aligned} (x') &= (a)\,(x) \\ (y') &= (\bar{a})\,(y) \end{aligned} \qquad (a)(\bar{a})^* = 1.$$

V peut être considéré comme l'espace riemannien symétrique défini par G et g, la symétrie par rapport à l'élément $\{p\}_0$ étant définie par:

$$(x') = -(x), \qquad (y') = (y).$$

Le groupe linéaire d'isotropie γ opère sur des variables complexes ω_{ij} et sur les variables complexes conjuguées $\bar{\omega}_{ij}$. On a $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$. Les ω_{ij} se transforment comme les formes extérieures $[x_i\, x_j]$, en supposant que les variables $x_0, x_1, \cdots, x_p$ subissent les transformations du groupe unitaire $(x') = (a)\,(x)$, où $(a)\,(\bar{a})^* = 1$. Aux transformations unimodulaires de ce dernier groupe correspond un groupe linéaire γ'' opérant sur les ω_{ij}. On est de nouveau conduit à décomposer en groupes irréductibles le groupe γ_s'' qui opère sur les formes extérieures $[\omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_s j_s}]$. En répétant les raisonnements du §7, on obtient facilement les variables dominantes de ces groupes irréductibles. Considérons le tableau des variables ω_{ij} qui s'obtient en gardant dans la matrice (ω_{ij}) seulement les éléments placés au-dessus de la diagonale principale. Etant donné un ensemble d'entiers $l_0, l_1, \cdots, l_k$ tels que $p \geqq l_0 > l_1 > \cdots > l_k > 0$ et tels que $l_0 + l_1 + \cdots + l_k = s$, prenons les l_0 premiers éléments de la première ligne du tableau des ω_{ij}, puis les l_1 premiers éléments de la seconde ligne, etc. Le produit extérieur de tous ces éléments, $[\omega_{01}\, \omega_{02} \cdots \omega_{0 l_0}\, \omega_{12}\, \omega_{13} \cdots]$, est une des variables dominantes cherchées. Toute variable dominante s'obtient ainsi. Donc:

[32] Pour ce qui concerne les quadriques complexes, voir E. Cartan, *g*.

THÉORÈME. *Le nombre d'invariants intégraux de degré* $2s$, *ou le nombre de Betti* R_{2s}, *est égal au nombre d'ensembles d'entiers* $(l_0, l_1, \cdots, l_k)$ *tels que*:

$$p \geqq l_0 > l_1 > \cdots > l_k \geqq 0, \qquad l_0 + l_1 + \cdots + l_k = s.$$

Considérons de même le complexe linéaire défini par l'équation:

$$[x_0\, y_0] + [x_1\, y_1] + \cdots + [x_p\, y_p] = 0. \tag{2}$$

La variété $x_0 = x_1 = \cdots = x_p = 0$ est une variété $\{p\}_0$ appartenant au complexe linéaire. Soit $\{p\}$ une variété quelconque appartenant au complexe linéaire. Les variétés $\{p\}$ voisines de $\{p\}_0$ sont représentées par:

$$x_i = \sum_j a_{ij}\, y_j, \qquad a_{ij} = a_{ji}.$$

La variété W engendrée par les $\{p\}$ est transformée transitivement par le groupe linéaire G qui laisse invariants le premier membre de l'équation (2) ainsi que la forme d'Hermite $\sum_i x_i \bar{x}_i + \sum_i y_i \bar{y}_i$. Le sous-groupe g qui laisse invariant $\{p\}_0$ est de nouveau défini par:

$$(x') = (a)(x), \qquad (y') = (\bar{a})(y), \qquad (a)(\bar{a})^* = 1.$$

Le groupe linéaire d'isotropie γ opère sur des variables complexes ω_{ij} et $\bar{\omega}_{ij}$ telles que $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. ω_{ij} est transformé comme le produit $x_i\, x_j$ lorsque les variables x_i subissent les transformations du groupe $(x') = (a)(x)$, où $(a)(\bar{a})^* = 1$. On peut encore considérer le tableau des ω_{ij} obtenu en supprimant dans la matrice (ω_{ij}) les éléments placés *au-dessous* de la diagonale principale. On trouvera par la même règle les variables dominantes appartenant aux groupes γ_s'' et on a le même théorème que dans le cas précédent, les entiers $(l_0, l_1, \cdots, l_k)$ satisfaisant maintenant aux conditions: $p + 1 \geqq l_0 > l_1 > \cdots > l_k \geqq 0$, $l_0 + l_1 + \cdots + l_k = s$.

V. Les propriétés topologiques d'une classe de variétés ayant comme élément générateur une figure formée de plusieurs variétés planes

18. **Définitions et propriétés générales.** Les raisonnements des paragraphes précédents peuvent s'appliquer à une classe étendue de variétés algébriques qu'on peut considérer comme des généralisations des variétés de Grassmann. L'exemple le plus simple est fourni par la variété des éléments linéaires de l'espace projectif complexe $[n]$, en appelant élément linéaire l'ensemble d'un point et d'une droite passant par ce point. On peut considérer plus généralement l'ensemble d'une variété $[\alpha]$ et d'une variété $[\beta]$, où l'on suppose $\alpha < \beta$ et $[\alpha] \subset [\beta]$. Cette figure peut être prise comme élément générateur d'une variété et sera représentée par le symbole $\{\alpha, \beta\}$. Ainsi un élément linéaire est représenté par $\{0, 1\}$. On peut encore considérer des variétés ayant comme élément générateur la figure formée par $k + 1$ variétés $[\alpha_0], [\alpha_1], \cdots, [\alpha_k]$ telles que:

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k; \qquad [\alpha_0] \subset [\alpha_1] \subset \cdots \subset [\alpha_k] \subset [n].$$

Un tel élément générateur sera représenté par $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$. Remarquons que chaque élément $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ définit aussi une variété fondamentale de Schubert.

Soit V la variété de tous les éléments $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ contenus dans $[n]$, les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ étant des nombres donnés. D'après le théorème fondamental de la géométrie projective, il existe une transformation homographique de $[n]$ qui transforme un élément arbitraire $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}_1$ en un autre élément arbitraire $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}_2$. La variété V est donc transformée transitivement par le groupe projectif de $[n]$. En raisonnant comme dans le cas des variétés de Grassmann, on montre que V est aussi transformée transitivement par le groupe hermitien elliptique. V définit donc encore un espace homogène clos ayant pour groupe de structure le groupe hermitien elliptique. Mais cet espace homogène n'est pas symétrique.

La dimension complexe de V est égale à

$$(\alpha_0 + 1)(\alpha_1 - \alpha_0) + (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 - \alpha_1) + \cdots + (\alpha_k + 1)(n - \alpha_k).$$

La caractéristique d'Euler-Poincaré de V s'obtient encore en appliquant le théorème de M. S. Lefschetz. Une homographie générale de $[n]$ laisse fixes les $n + 1$ sommets d'un simplexe non dégénéré. Le nombre d'éléments $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ qui sont fixes par l'homographie est égal à

$$\binom{n+1}{\alpha_k + 1}\binom{\alpha_k + 1}{\alpha_{k+1} + 1} \cdots \binom{\alpha_1 + 1}{\alpha_0 + 1}.$$

Ce nombre est égal à la caractéristique d'Euler-Poincaré, car en vertu du théorème démontré à la fin du §7, chaque élément fixe doit être compté avec une multiplicité égale à 1.

19. **La variété des éléments $\{\alpha, \beta\}$ de $[n]$.** La variété de tous les éléments (α, β) de $[n]$ est une variété algébrique V contenue dans le produit topologique de la variété des éléments $\{\alpha\}$ par la variété des éléments $\{\beta\}$ de $[n]$. Considérons de nouveau une suite de variétés planes $[n-1], [n-2], \cdots, [1], [0]$ telles que:

$$(1) \qquad [n] \supset [n-1] \supset [n-2] \supset \cdots \supset [1] \supset [0].$$

Elles déterminent les variétés fondamentales $[a_0, a_1, \cdots, a_\alpha]$ engendrées par des éléments $\{\alpha\}$ et les variétés fondamentales $[b_0, b_1, \cdots, b_\beta]$ engendrées par des éléments $\{\beta\}$. Le symbole $\begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\alpha \\ b_0, b_1, \cdots, b_\alpha, \cdots, b_\beta \end{bmatrix}$ représentera la variété des éléments $\{\alpha, \beta\}$ définis par l'ensemble d'un $\{\alpha\}$ appartenant à $[a_0, a_1, \cdots, a_\alpha]$ et d'un $\{\beta\}$ appartenant à $[b_0, b_1, \cdots, b_\beta]$. Pour que $\{\alpha\}$ et $\{\beta\}$ puissent être des éléments généraux des variétés $[a_0, a_1, \cdots, a_\alpha]$ et $[b_0, b_1, \cdots, b_\beta]$, il faut et il suffit que tout nombre a_i soit égal à un nombre b_j dont l'indice j est supérieur ou égal à i. Lorsque cette condition est satisfaite, le symbole considéré sera dit irréductible et représentera une variété irréductible que nous appellerons *variété fondamentale*. Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, le symbole est réductible et représente, en général, la somme de plusieurs variétés fondamentales. Soit, en effet, a_i le premier nombre de la première ligne du symbole qui ne figure pas parmi les nombres b_j de la deuxième ligne. Supposons a_i compris entre b_j et b_{j+1} et soit $\{\alpha, \beta\}$ un élément de la variété défini par le symbole donné. Si l'intersection de $[a_i]$ et de $\{\alpha\}$ ne se trouve pas entièrement dans $[b_j]$, la variété $\{\beta\}$ coupera $[a_i]$ suivant une variété $[j + 1]$. Ceci montre qu'on peut remplacer le symbole donné par la somme des deux symboles obtenus en remplaçant soit a_i par b_j, soit b_{j+1} par a_i. Cependant lorsque $b_j = a_{i-1}$, il faudra remplacer a_i par b_j et diminuer d'une unité un ou plusieurs des nombres qui précèdent a_i. Ainsi $\begin{bmatrix} 2, 3 \\ 0, 2, 4 \end{bmatrix}$ doit être remplacé par $\begin{bmatrix} 2, 3 \\ 0, 2, 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1, 2 \\ 0, 2, 4 \end{bmatrix}$. Si les symboles obtenus ne sont pas irréductibles, on applique la même opération jusqu'à ce qu'on arrive à une somme de symboles irréductibles.

Nous allons montrer que les variétés fondamentales fournissent une subdivision de V en cellules algébriques. Pour éviter des longueurs, nous supposerons que V est la variété des éléments $\{1, 6\}$ de l'espace $[n]$; on reconnaîtra immédiatement que le raisonnement est général. Soit $\begin{bmatrix} a_0, a_1 \\ b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6 \end{bmatrix}$ le symbole d'une variété fondamentale F. Nous choisissons dans $[n]$ une variété $[n - 2]'$ qui ne rencontre pas les droites générales de $[a_0, a_1]$. Il faudra donc que $[n - 2]'$ coupe $[a_0]$ suivant $[a_0 - 1]$ et $[a_1]$ suivant une variété $[a_1 - 2]'$ qui n'appartient pas à la suite (1) mais qui est contenue dans $[a_1 - 1]$. Alors $[n - 2]'$ contient $[b_0]$ et coupe les variétés $[b_2]$, $[b_3]$, $[b_5]$, $[b_6]$ suivant des variétés $[b_2 - 1]'$, $[b_3 - 1]'$, $[b_5 - 2]'$, $[b_6 - 2]'$. Soit $\{1, 6\}$ un élément de la variété F. Il est composé d'une droite $\{1\}$ et d'une variété $\{6\}$. Nous supposons que la droite $\{1\}$ n'appartient pas à $[a_0, a_1 - 1] + [a_0 - 1, a_1]$. Il s'en suit que $\{1\}$ ne rencontre pas la variété $[n - 2]'$. L'intersection de $\{6\}$ et de $[n - 2]'$ sera une variété $\{4\}$ qui appartient à la variété $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$ définie à l'aide de $[b_0]$, $[b_2 - 1]'$, $[b_3 - 1]'$, $[b_5 - 2]'$, $[b_6 - 2]'$. Réciproquement, l'ensemble d'une droite $\{1\}$ appartenant à $[a_0, a_1] - [a_0, a_1 - 1] - [a_0 - 1, a_1]$ et d'un élément $\{4\}$ de la variété $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$ détermine un élément $\{1, 6\}$ appartenant à la variété F. Donc si l'on enlève de F les éléments $\{1, 6\}$ dont la droite $\{1\}$ appartient à $[a_0, a_1 - 1] + [a_0 - 1, a_1]$, on obtient une variété qui est le produit topologique de la cellule ouverte $[a_0, a_1] - [a_0, a_1 - 1] - [a_0 - 1, a_1]$ et de la variété $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$. Pour faire de cette dernière variété une cellule ouverte, il faut en enlever des variétés ayant pour symboles $[b_0 - 1, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$, $[b_0, b_2 - 2, \cdots]'$, $\cdots$, $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 3, b_6 - 2]'$, $\cdots$. Les variétés planes qui servent à définir ces symboles sont les intersections des variétés de la suite (1) avec la variété $[n - 2]'$. Les éléments $\{6\}$ qu'on a enlevés de cette façon sont les éléments des variétés représentées par les symboles obtenus à partir de $[b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6]$ en diminuant d'une unité un des nombres b_0, b_2, b_3, b_5, b_6. Une circonstance exceptionnelle se présente lorsque $b_2 - 1 = a_0$ ou $b_5 - 1 = a_1$.

Si $b_2 - 2 = b_0$, on n'a pas à considérer le symbole obtenu en remplaçant b_2 par $b_2 - 1$. Mais si $b_2 - 1 > b_0 + 1$, il faut remplacer a_0 et b_2 par $a_0 - 1$ et a_0. Ce qui précède permet d'énoncer, pour tous les cas, la règle suivante:

La variété fondamentale F de symbole $\begin{bmatrix} a_0, a_1 \\ b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6 \end{bmatrix}$ *devient une cellule algébrique ouverte lorsqu'on en enlève les variétés représentées par les symboles qui se déduisent du symbole de F en diminuant d'une unité un des nombres de la première ou de la deuxième ligne. On ne garde que les symboles qui ont un sens et on les décompose en symboles irréductibles.*

On reconnaît que notre raisonnement est tout à fait général; la même règle s'applique donc dans le cas des variétés fondamentales engendrées par un élément $\{\alpha, \beta\}$ quelconque. Par conséquent:

Les variétés fondamentales $\begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\alpha \\ b_0, b_1, \cdots\cdots, b_\beta \end{bmatrix}$ *subdivisent la variété V en cellules algébriques et fournissent les bases d'homologie. Il n'y a pas de coefficients de torsion et les nombres de Betti* R_{2s+1} *sont nuls.*

M. E. Cartan a bien voulu m'indiquer une autre manière de représenter les variétés fondamentales et de définir les cellules algébriques correspondantes. D'après ce qui précède, on voit que la dimension complexe de la variété $\begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\alpha \\ b_0, b_1, \cdots\cdots, b_\beta \end{bmatrix}$ est égale à $\sum_i (a_i - i) + \sum_j (b_j - j)$, où $i = 0, 1, \cdots, \alpha$, tandis que j ne prend que les valeurs des indices des nombres b_λ qui ne figurent pas dans la première ligne du symbole. La variété est complètement définie par l'ensemble des nombres $(a_i - i)$ et $(b_j - j)$, c'est-à-dire par $\beta + 1$ nombres entiers dont les $\alpha + 1$ premiers ne dépassent pas $n - \alpha$ et sont rangés par ordre non décroissant, tandis que les $\beta - \alpha$ nombres suivants ne dépassent pas $n - \beta$ et sont rangés par ordre non décroissant. Ainsi la variété $\begin{bmatrix} 2, 4 \\ 1, 2, 3, 4, 6 \end{bmatrix}$ serait définie par le système d'entiers $(2, 3 \mid 1, 1, 2)$; sa dimension est égale à 9. La cellule ouverte correspondante est définie de la façon suivante: Considérons les sommets $A_0, A_1, \cdots, A_n$ d'un simplexe de référence, les $p + 1$ premiers points définissant la variété $[p]$ de la suite (1). Formons le tableau suivant:

$A_0A_1A_2$	$2 + 1$ points
$A_0A_1A_3A_4$	$3 + 1$ points
A_0A_1	$1 + 1$ points
A_0A_3	$1 + 1$ points
$A_0A_5A_6$	$2 + 1$ points.

Dans chaque ligne nous évitons d'écrire les derniers points des lignes précédentes. La droite de l'élément $\{1, 4\}$ qui engendre la cellule ouverte est définie par les points $A_2 + (A_0A_1)$ et $A_4 + (A_0A_1A_3)$. La variété $\{4\}$ correspondante est définie par les points précédents plus les trois points $A_1 + (A_0)$, $A_3 + (A_0)$ et $A_6 + (A_0A_5)$. Ici $(A_iA_jA_k)$ représente une combinaison linéaire à coefficients arbitraires des points A_i, A_j, A_k. Les derniers indices des différentes lignes du tableau sont les nombres qui composent le symbole $\begin{bmatrix} 2, 4 & \\ 1, 2, 3, 4, 6 \end{bmatrix}$.

Il est facile d'obtenir *l'indice de Kronecker de deux variétés fondamentales de dimensions complémentaires.* Soient

$$\begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\alpha & \\ b_0, b_1, \cdots, b_\alpha, \cdots, b_\beta \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} a_0', a_1', \cdots, a_\alpha' & \\ b_0', b_1', \cdots, b_\alpha', \cdots, b_\beta' \end{bmatrix}$$

les symboles irréductibles des deux variétés considérées. Donnons à la deuxième variété une position générale par rapport à la première; c'est-à-dire nous supposons que les variétés $[b_i']$ qui servent à définir la deuxième variété fondamentale ont une position générale par rapport aux variétés $[b_j]$ qui servent à définir la première. Pour qu'il y ait un élément $\{\alpha, \beta\}$ commun aux deux variétés il faut qu'on ait, d'après un raisonnement déjà fait à propros des variétés de Grassmann:

$$a_0 + a_\alpha' \geqq n, \qquad a_1 + a_{\alpha-1}' \geqq n, \cdots, a_\alpha + a_0' \geqq n$$

$$b_0 + b_\beta' \geqq n, \qquad b_1 + b_{\beta-1}' \geqq n, \cdots, b_\beta + b_0' \geqq n.$$

En particulier, si la deuxième variété fondamentale a pour symbole

$$\begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 & \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots, n - b_1, n - b_0 \end{bmatrix},$$

il y a un élément et un seul commun aux deux variétés. Les nombres a_j' et b_j' devront être supérieurs ou égaux aux nombres correspondants dans le symbole $\begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 & \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots, n - b_1, n - b_0 \end{bmatrix}$. Or quand on a deux variétés fondamentales F_1 et F_2, définies à l'aide des variétés planes de la suite (1), F_1 est contenu dans F_2 lorsque les nombres du symbole irréductible de F_2 sont supérieurs ou égaux aux nombres correspondants du symbole irréductible de F_1. Dans ces conditions, les deux variétés F_1 et F_2 ne peuvent avoir des dimensions égales que lorsque leurs symboles irréductibles sont identiques. Donc le symbole d'une variété fondamentale ayant un indice de Kronecker non nul par rapport à $\begin{bmatrix} a_0, \cdots, a_\alpha & \\ b_0, \cdots\cdots, b_\beta \end{bmatrix}$ ne peut être que $\begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 & \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots, n - b_0 \end{bmatrix}$.

Montrons que:

$$\begin{bmatrix} a_0, \cdots, a_\alpha & \\ b_0, \cdots\cdots, b_\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 & \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots, n - b_0 \end{bmatrix} = 1.$$

Pour cela nous considérons seulement l'exemple des variétés:

$$\begin{bmatrix} a_0, a_1 & \\ b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6 \end{bmatrix} \text{et} \begin{bmatrix} n - a_1, n - a_0 & \\ n - b_6, n - b_5, n - a_1, n - b_3, n - b_2, n - a_0, n - b_0 \end{bmatrix}.$$

On verra que le raisonnement est général. Nous avons considéré une variété $[n-2]'$ coupant $[a_0]$ suivant $[a_0 - 1]$ et $[a_1]$ suivant une variété $[a_1 - 2]'$ contenue dans $[a_1 - 1]$. La variété des éléments $\{1, 6\}$ de $\begin{bmatrix} a_0, a_1 & \\ b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6 \end{bmatrix}$ dont la droite ne rencontre pas $[n - 2]'$ est alors le produit topologique de $[a_0, a_1] - [a_0 - 1, a_1] - [a_0, a_1 - 1]$ par une variété $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$ définie dans $[n - 2]'$. Nous pouvons aussi considérer une variété $[n - 2]''$ coupant $[n - a_1]$ suivant $[n - a_1 - 1]$ et $[n - a_0]$ suivant une variété $[n - a_0 - 2]''$ contenue dans $[n - a_0 - 1]$. Alors la variété des éléments $\{1, 6\}$ de $\begin{bmatrix} n - a_1, n - a_0 & \\ n - b_6, n - b_5, n - a_1, n - b_3, n - b_2, n - a_0, n - b_0 \end{bmatrix}$ dont la droite ne rencontre pas $[n - 2]''$ est le produit topologique de

$$[n - a_1, n - a_0] - [n - a_1 - 1, n - a_0] - [n - a_1, n - a_0 - 1]$$

par une variété $[n - b_6, n - b_5, n - b_3 - 1, n - b_2 - 1, n - b_0 - 2]''$ définie dans $[n - 2]''$. Par une transformation homographique, nous pouvons amener $\begin{bmatrix} n - a_1, n - a_0 & \\ n - b_6, n - b_5, n - a_1, n - b_3, n - b_2, n - a_0, n - b_0 \end{bmatrix}$ en une position générale par rapport à $\begin{bmatrix} a_0, a_1 & \\ b_0, a_0, b_2, b_3, a_1, b_5, b_6 \end{bmatrix}$ de telle façon que $[n - 2]''$ vienne en coïncidence avec $[n - 2]'$. Nous indiquons par un indice inférieur égal à 1 tout ce qui se rapporte à la variété qu'on a déplacée. Nous pouvons supposer que les variétés $[n - a_1 - 1]$ et $[n - a_0 - 2]''$ viennent en coïncidence avec des variétés $[n - a_1 - 1]_1$ et $[n - a_0 - 2]_1''$ de $[n - 2]'$ telles que $[a_0 - 1]$ et $[n - a_0 - 2]_1''$ ne se rencontrent pas et telles que $[a_1 - 2]'$ et $[n - a_1 - 1]_1$ ne se rencontrent pas. Alors les deux variétés fondamentales considérées ne peuvent avoir aucun élément d'intersection $\{1, 6\}$ dont la droite $\{1\}$ rencontre $[n - 2]'$. En ce qui concerne l'indice de Kronecker des deux variétés, il suffit donc d'en considérer les parties engendrées par des éléments $\{1, 6\}$ dont la droite ne rencontre pas $[n - 2]'$. Les deux variétés dont il faut chercher l'indice de Kronecker sont donc le produit topologique de $[a_0, a_1] - [a_0 - 1, a_1] - [a_0, a_1 - 1]$ par $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$ et le produit topologique de

$$[n - a_1, n - a_0]_1 - [n - a_1 - 1, n - a_0]_1 - [n - a_1, n - a_0 - 1]_1$$

par $$[n - b_6, n - b_5, n - b_3 - 1, n - b_2 - 1, n - b_0 - 2]_1''.$$

La variété totale des éléments $\{1, 6\}$ dont la droite ne rencontre pas $[n - 2]'$ est le produit topologique de la variété des droites qui ne rencontrent pas $[n - 2]'$ par la variété des $\{4\}$ de $[n - 2]'$. De tout cela il résulte que l'indice de Kronecker cherché est égal à $+1$, car l'indice de Kronecker de $[a_0, a_1]$ avec $[n - a_1, n - a_0]_1$ est égal à $+1$ et l'indice de Kronecker de $[b_0, b_2 - 1, b_3 - 1, b_5 - 2, b_6 - 2]'$ avec $[n - b_6, n - b_5, n - b_3 - 1, n - b_2 - 1, n - b_0 - 2]_1''$ est égal à $+1$.

Soit Γ_{2s} un cycle sur V de dimension $2s$. On aura l'homologie:

$$\Gamma_{2s} \sim \Sigma \begin{pmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 & \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots\cdots, & n - b_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0, \cdots, a_\alpha & \\ b_0, \cdots\cdots, & b_\beta \end{bmatrix},$$

le facteur $\begin{pmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 \\ n - b_\beta, \cdots\cdots, n - b_0 \end{pmatrix}$ étant l'indice de Kronecker de Γ_{2s} et de $\begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 \\ n - b_\beta, \cdots\cdots, n - b_0 \end{bmatrix}$. *Ceci résout en même temps le problème des caractéristiques de Schubert et donne le nombre d'intersections de deux cycles quelconques de dimensions complémentaires.*

20. **La variété des éléments $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ contenus dans $[n]$.** Considérons le cas d'un élément générateur $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ composé de trois variétés planes $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$. Soit V la variété de tous les éléments $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ de $[n]$. Considérons de nouveau une suite de variétés planes $[n - 1], \cdots, [1], [0]$ telles que:

$$[n] \supset [n-1] \supset \cdots \supset [1] \supset [0]. \tag{1}$$

En prenant dans cette suite $\alpha + 1$ variétés $[a_i]$, $\beta + 1$ variétés $[b_j]$ et $\gamma + 1$ variétés $[c_k]$, le symbole

$$\begin{bmatrix} a_0, a_1, \cdots, a_\alpha \\ b_0, b_1, \cdots\cdots, b_\beta \\ c_0, c_1, \cdots\cdots\cdots, c_\gamma \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 \leqq a_0 < a_1 < \cdots < a_\alpha \leqq n \\ 0 \leqq b_0 < b_1 < \cdots < b_\beta \leqq n \\ 0 \leqq c_0 < c_1 < \cdots < c_\gamma \leqq n \end{matrix} \tag{2}$$

représentera la variété des éléments $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ composés d'un élément $\{\alpha\}$ appartenant à $[a_0, a_1, \cdots, a_\alpha]$, d'un élément $\{\beta\}$ appartenant à $[b_0, b_1, \cdots, b_\beta]$ et d'un élément $\{\gamma\}$ appartenant à $[c_0, c_1, \cdots, c_\gamma]$. Pour que les éléments $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ et $\{\gamma\}$ qui composent l'élément général $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ de la variété (2) soient des éléments généraux de leurs variétés respectives, il faut et il suffit que tout nombre a_i soit égal à un nombre b_j, où $i \leqq j$, et que tout nombre b_j soit égal à un nombre c_k, où $j \leqq k$. Lorsque ces conditions sont satisfaites, le symbole (2) sera dit irréductible et la variété qu'il définit sera appelée variété fondamentale. Cette variété fondamentale moins le lieu de ses éléments singuliers est transformée transitivement par un groupe projectif continu, un élément $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ étant dit singulier lorsqu'un de ses éléments composants, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$, est singulier dans sa variété respective. Les variétés fondamentales sont par suite des variétés algébriques irréductibles. Lorsqu'un symbole n'est pas irréductible, on peut le remplacer par un ou plusieurs symboles irréductibles en procédant selon les indications du paragraphe précédent.

Considérons dans V toutes les variétés fondamentales qu'on peut définir à l'aide des variétés planes de la suite (1). Elles définissent une subdivision de V en cellules algébriques. On a, en effet, la règle suivante:

Si (2) est le symbole irréductible d'une variété fondamentale, on considère tous les symboles qu'on peut en déduire en diminuant d'une unité un des nombres a_i, b_j ou c_k. On décompose les symboles ainsi obtenus en symboles irréductibles. La variété fondamentale (2) devient une cellule algébrique ouverte lorsqu'on en *enlève l'ensemble des variétés fondamentales représentées par ces symboles irréductibles.*

Pour prouver la règle, il suffit de remarquer que la variété qui reste, après l'enlèvement de ces variétés-frontières, est le produit topologique d'une cellule algébrique engendrée par des éléments $\{\alpha, \beta\}$ et d'une cellule algébrique engendrée par des éléments $\{\gamma - \beta - 1\}$ d'une certaine variété $[n - \beta - 1]'$. En ce qui concerne *l'indice de Kronecker de deux variétés fondamentales de dimensions complémentaires*, on montre encore que:

$$\begin{bmatrix} a_0, \cdots, a_\alpha \\ b_0, \cdots\cdots, b_\beta \\ c_0, \cdots\cdots\cdots, c_\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots\cdots, n - b_0 \\ n - c_\gamma, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, n - c_0 \end{bmatrix} = 1$$

Si les symboles de deux variétés fondamentales ne se correspondent pas de cette façon, l'indice de Kronecker correspondant est nul. Donc si Γ_{2s} est un cycle sur V, on a l'homologie:

$$\Gamma_{2s} \sim \Sigma \begin{pmatrix} n - a_\alpha, \cdots, n - a_0 \\ n - b_\beta, \cdots\cdots\cdots\cdots, n - b_0 \\ n - c_\gamma, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, n - c_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0, \cdots, a_\alpha \\ b_0, \cdots\cdots, b_\beta \\ c_0, \cdots\cdots\cdots, c_\gamma \end{bmatrix},$$

les notations étant analogues à celles des paragraphes précédents. Ceci résout en même temps le problème des caractéristiques de Schubert.

Il est bien clair qu'on a des résultats tout à fait analogues dans le cas de la variété des éléments $\{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ contenus dans $[n]$.

A titre d'exemple, donnons les bases d'homologie de la variété des éléments $\{0, 1, 2\}$ contenus dans [3].

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2,3 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \qquad R_{12} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2,3 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1,3 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2,3 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \qquad R_{10} = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1,3 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1,2 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2,3 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0,3 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1,3 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \qquad R_8 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,3 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 1,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,3 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0,2 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0,3 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1,2 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \qquad R_6 = 6$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0,2,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,3 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1,2 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0,2 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \qquad R_4 = 5$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0,1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,1 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \qquad R_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0,1,2 \end{bmatrix} \qquad R_0 = 1$$

La somme des nombres de Betti est toujours égale à la valeur de la caractéristique d'Euler-Poincaré qui a été déterminée au §18.

21. **Remarque sur la topologie du groupe de la géométrie hermitienne elliptique.** Les variétés de Grassmann et les variétés plus générales qu'on vient d'étudier sont transformées transitivement par le groupe hermitien elliptique G et peuvent donc être considérées comme des espaces de décomposition de la variété de G. Il ne semble pas facile de subdiviser la variété de G en cellules et de déterminer de cette façon les invariants topologiques de G.[33] Cependant on arrive à une représentation assez concrète de cette variété en considérant la variété V des éléments $\{0, 1, \cdots, n - 1\}$ de l'espace projectif $[n]$. Nous supposons que G est le groupe projectif de $[n]$ qui laisse invariante la forme d'Hermite $x_0 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_1 + \cdots + x_n \bar{x}_n$. Nous prenons comme élément-origine de V l'élément $\{0, 1, \cdots, n - 1\}_0$ composé des variétés $[\alpha]$ d'équations $x_k = 0$ pour $k > \alpha$, α étant un des nombres $0, 1, \cdots, n - 1$. Le sous-groupe g qui laisse invariant l'élément-origine a pour équations:

$$x_k' = e^{i\varphi_k} x_k \qquad (k = 0, 1, \cdots, n). \tag{1}$$

La variété de g est homéomorphe à un tore à n dimensions (produit topologique de n cercles).

La topologie de V est connue. A chaque point de V correspond dans G une variété homéomorphe à un tore à n dimensions. A un domaine suffisamment petit de V correspond dans G le produit topologique de ce domaine par le tore à n dimensions. G n'est pas intégralement le produit topologique de V par le tore à n dimensions; car s'il en était ainsi, le groupe de Poincaré de G serait infini. Or M. E. Cartan a démontré[34] que le groupe de Poincaré de G est le groupe cyclique d'ordre $n + 1$, le groupe simplement connexe $\bar{G}$ localement isomorphe à G étant le groupe linéaire unimodulaire de la forme d'Hermite $x_0 \bar{x}_0 + \cdots + x_n \bar{x}_n$.

A l'aide des résultats du §2, nous pouvons vérifier que V est simplement

[33] Une formule théorique pour le calcul des nombres de Betti a été donnée par M. E. Cartan, *b*, p. 218–222.

[34] Voir E. Cartan, *d*.

connexe. A g correspond, en effet, dans $\bar{G}$ un groupe connexe $\bar{g}$ également homéomorphe à un tore à n dimensions. Il en résulte que toutes les variétés algébriques considérées jusqu'ici sont simplement connexes, car, après un choix convenable de l'élément-origine, leurs groupes d'isotropie, qui sont connexes, contiennent toujours le groupe d'isotropie g de V.

La variété V peut aussi être considérée comme un espace de décomposition du groupe $\bar{G}$, à tout point de V correspondant encore dans $\bar{G}$ un tore à n dimensions.

22. **Remarques finales.** Toutes les variétés algébriques que nous avons étudiées dans ce mémoire sont des variétés rationnelles. Chacune d'elles constitue, en effet, une cellule algébrique dont l'intérieur admet une représentation birationnelle et biunivoque sur l'espace euclidien tout entier. Il est probable que certaines des propriétés topologiques rencontrées sont des propriétés communes à toutes les variétés rationnelles. En particulier, il serait intéressant de savoir si pour toute variété rationnelle sans singularités les nombres de Betti relatifs aux dimensions impaires sont nuls et s'il n'y a pas de coefficients de torsion. On démontre facilement que *toute variété rationnelle sans singularités est simplement connexe.* D'une façon plus générale:

Deux variétés algébriques sans singularités qui se correspondent par une transformation birationnelle ont des groupes de Poincaré isomorphes.

Ceci résulte du fait que l'ensemble des points fondamentaux (c'est-à-dire des points dont chacun correspond à une infinité de points) constitue une variété dont la dimension complexe est inférieure à $d - 1$, d étant la dimension complexe des variétés données.

Il faudrait aussi étudier la topologie des *nappes réelles* des variétés de Grassmann et de leurs généralisations. On a immédiatement une subdivision de ces variétés en cellules algébriques réelles. Les variétés analogues aux variétés fondamentales introduites ici fournissent les bases pour l'homologie (mod 2). Pour certains cas il est facile de déterminer les nombres de Betti et les coefficients de torsion. Nous développerons ces résultats dans un autre article.

La méthode que nous avons employée permet d'étudier encore d'autres variétés algébriques. Elle conduit à des solutions simples et rigoureuses de certains problèmes de géométrie énumérative. Elle s'applique en particulier à la variété des coniques ou des quadriques de l'espace projectif $[n]$.

Journ. de Math., tome XVI. — Fasc. I, 1937

/8/

Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles ;

PAR CHARLES EHRESMANN

(Paris).

INTRODUCTION. — Dans un travail récent, cité par la suite sous le nom de *Topologie d'espaces homogènes* (1), j'ai exposé une méthode pratique pour étudier la topologie de certaines variétés. J'ai appliqué cette méthode à plusieurs classes de variétés algébriques complexes. Je me propose de montrer ici que les nappes réelles de ces variétés algébriques complexes peuvent être étudiées de la même façon. Je me bornerai à l'étude des variétés suivantes :

I. *Variétés de Grassmann réelles.*

II. *Variétés engendrées par des éléments composés* $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$.

On appelle variété de Grassmann réelle la variété algébrique réelle définie par l'ensemble des variétés planes à k dimensions d'un espace projectif réel à n dimensions. En représentant par $[p]$ une variété plane réelle à p dimensions, le symbole $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ représente la figure formée par $k+1$ variétés planes, $[p_0]$, $[p_1]$, ..., $[p_k]$, telles que

$$p_0 < p_1 < \ldots < p_k, \qquad [p_0] \subset [p_1] \subset \ldots \subset [p_k].$$

Mon but est la détermination effective des bases d'homologie. Je démontre aussi un théorème sur la déformation des chaînes, d'où l'on peut déduire en particulier le groupe de Poincaré de chacune des

(1) C. EHRESMANN, *Sur la topologie de certains espaces homogènes* (*Ann. of Math.*, vol. 35, 2, 1934, p. 396-443).

variétés considérées. Comme application des propriétés de la variété des éléments linéaires d'un espace projectif, je montre qu'on ne peut pas définir un parallélisme absolu dans l'espace projectif à n dimensions, si n est différent de 3, de 7 ou de $16\,r - 1$. J'indique enfin une démonstration élémentaire du fait connu suivant : le groupe orthogonal à n variables forme une variété close dont le groupe de Poincaré est d'ordre 2.

La méthode suivie consiste à subdiviser les variétés en cellules d'une espèce très générale. On appellera cellule un ensemble de points, E_p, d'un espace topologique, cet ensemble de points jouissant des propriétés suivantes : 1. E_p est homéomorphe à l'intérieur d'un simplexe à p dimensions; 2. l'ensemble $E_p + L$, où L est la frontière de E_p, peut être recouvert par un complexe simplicial tel que L soit recouvert par un sous-complexe de ce complexe. On aura subdivisé une variété V en cellules, lorsqu'on aura défini sur V un ensemble de cellules tel que tout point de V appartienne à une cellule et à une seule et tel que la frontière de chaque cellule soit la somme d'un nombre fini des cellules considérées. Au point de vue de l'homologie et de l'homotopie, une telle subdivision en cellules jouit des mêmes propriétés qu'une subdivision en simplexes. En particulier, dans une variété algébrique, réelle ou complexe, tout domaine homéomorphe à l'intérieur d'un simplexe et dont la frontière est la somme d'un nombre fini de domaines de variétés algébriques constitue une cellule.

Pour les notations et la terminologie ainsi que pour plusieurs démonstrations nous renvoyons au mémoire déjà cité. Il sera toujours sous-entendu que les variétés algébriques considérées sont réelles.

I. — Variétés de Grassmann réelles.

1. L'espace projectif réel à n dimensions sera désigné par $[n]$; une variété plane à k dimensions contenue dans $[n]$ sera désignée par $[k]$. L'ensemble des variétés $[k]$ contenues dans $[n]$ définit une variété algébrique réelle, V, appelée variété de Grassmann réelle. Étant données $k+1$ variétés planes, $[a_0]$, $[a_1]$, ..., $[a_k]$, telles que

$$0 \leqq a_0 < a_1 < \ldots < a_k \leqq n, \qquad [a_0] \subset [a_1] \subset \ldots \subset [a_k] \subset [n],$$

le symbole $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ représente la variété définie par l'ensemble des variétés $[k]$ dont l'intersection avec $[a_i]$ est à i dimensions au moins, où $i = 0, 1, \ldots, k$. Soit (S) une suite de variétés planes, $[n], [n-1]_0, [n-2]_0, \ldots, [1]_0, [0]_0$, satisfaisant à

$$[n] \supset [n-1]_0 \supset \ldots \supset [1]_0 \supset [0]_0.$$

Considérons toutes les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ qu'on peut définir à l'aide de $k+1$ variétés de la suite (S); à chaque symbole correspond ainsi une variété bien déterminée. D'après le raisonnement fait à propos des variétés de Grassmann complexes (1), la variété

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k] - \sum_{i=0}^{i=k} [a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]$$

est une cellule que nous désignons par $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$. Nous convenons une fois pour toutes de remplacer par zéro tout symbole qui n'a pas de sens. Les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ subdivisent V en cellules. Soit K le complexe défini par l'ensemble des cellules $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ et soit K_p le complexe défini par l'ensemble des cellules de dimension inférieure ou égale à p. Considérons sur V un complexe singulier C_p ou une chaîne singulière Γ_p (2). On a alors le théorème suivant (3) :

Tout complexe C_p ou toute chaîne Γ_p sur V peut être déformé d'une façon continue en un complexe ou une chaîne sur K_p.

Il en résulte le corollaire suivant :

Le groupe de Poincaré de V est le groupe cyclique d'ordre 2; son élément générateur est défini par le cycle linéaire $[0, 1, \ldots, p-1, p+1]$.

En effet, K_1 se réduit à $[0, 1, \ldots, k-1, k+1]$, K_0 se réduit au point O défini par l'élément $[0, 1, \ldots, k]$. Considérons les cycles linéaires d'origine et d'extrémité O et soit a le cycle défini par

(1) *Voir* C. EHRESMANN, *loc. cit.*, p. 417.

(2) *Voir* S. LEFSCHETZ, *Topology* (*Am. Math. Soc. Colloquium Publ.*, New-York, 1932), p. 73 ou H. SEIFERT und W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie* (Leipzig und Berlin, Teubner, 1934), § 25-26.

(3) *Voir* C. EHRESMANN, *loc. cit.*, p. 413.

$[0, 1, \ldots, k-1, k+1]$ parcouru dans un certain sens. Par une déformation laissant fixe le point O, tout autre cycle peut être déformé en une puissance de a. Pour qu'un cycle a^r puisse être réduit au point O par déformation continue, il faut et il suffit qu'il existe sur V une cellule singulière dont la frontière soit a^r. On pourra déformer cette cellule en une cellule singulière sur K_2 tout en laissant fixes les points de a. Donc le groupe de Poincaré de V est le même que celui de K_2. En écrivant que le cycle défini par le bord de chaque cellule E_2 de K_2 est équivalent à l'élément unité, on obtient toutes les relations de définition du groupe de Poincaré [1]. Le complexe K_2 se compose de deux cellules à deux dimensions $[0, 1, \ldots, k-1, k+2]^*$ et $[0, 1, \ldots, k-2, k, k+1]^*$. Les deux surfaces fermées correspondantes sont homéomorphes au plan projectif. Donc on arrive à la relation unique $a^2 = 1$.

2. La variété V admet une subdivision en simplexes telle que chaque cellule de K soit subdivisée en simplexes. La cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$, munie d'une certaine orientation, définit une chaîne bien déterminée, à savoir la somme des simplexes orientés qui recouvrent la cellule considérée, l'orientation de chaque simplexe étant définie par l'orientation de la cellule. D'après « *Topologie d'espaces homogènes* », paragraphe **9**, nous aurons des relations d'incidence de la forme

$$(1) \qquad [a_0, a_1, \ldots, a_k]^* \to \Sigma\lambda_i[a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]^*.$$

Le symbole qui est multiplié par λ_i se déduit de $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ en remplaçant a_i par $a_i - 1$; les coefficients λ_i sont appelés les nombres d'incidence de K. Tout cycle Γ_p sur V est homologue à une combinaison linéaire des cellules $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ de dimension p. D'autre part, si Γ_p est une telle combinaison linéaire et si $\Gamma_p \sim 0$, il existe une combinaison linéaire, C_{p+1}, des cellules de dimension $p+1$ telle que $C_{p+1} \to \Gamma_p$. *Pour déterminer les bases d'homologie de* V, *il suffit donc de connaître les relations* (1).

Considérons la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ et soit W la variété des éléments $[k]$ qui coupent une des variétés $[a_i]$ suivant une variété plane à

(1) *Voir* H. SEIFERT und W. THRELFALL, *loc cit.*, § 46.

$i+1$ dimensions au moins. Si $[k]$ appartient à $[a_0, a_1, \ldots, a_k] - W$, l'intersection de $[k]$ avec $[a_i]$, pour $i = 0, 1, \ldots, k$, a exactement i dimensions. En particulier la cellule ouverte $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$ est contenue dans $[a_0, a_1, \ldots, a_k] - W$. Or il existe un groupe projectif qui transforme transitivement les éléments de $[a_0, a_1, \ldots, a_k] - W$. Par conséquent la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k] - W$ est homogène. Sa subdivision en simplexes est une variété *combinatoire* ouverte, car chaque élément admet un voisinage euclidien ([1]). Chaque simplexe de dimension maximum qui appartient à $[a_0, a_1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]^*$ est donc sur la frontière de deux simplexes appartenant à $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$. Il en résulte que tout nombre d'incidence λ_i est égal à 0, $+2$ ou -2.

Faisons abstraction de l'orientation, c'est-à-dire considérons les chaînes mod 2. On aura

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k]^* \to 0 \qquad (\text{mod } 2).$$

Les cellules de K, ou encore les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$, définissent donc des cycles mod 2. Si Γ_p est une combinaison linéaire de ces cycles mod 2, il n'existe pas de combinaison linéaire C_{p+1} des cellules de K telles que $C_{p+1} \to \Gamma_p$ (mod 2). Par conséquent les cycles mod 2 définis par les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ sont linéairement indépendants (mod 2). Donc

THÉORÈME. — *Les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ de dimension p forment une base minima du groupe d'homologie* mod 2 *relatif à la dimension p.*

La variété V, qui est une variété homogène, est une variété combinatoire. On peut donc définir le nombre d'intersection de deux cycles mod 2. Comme dans *Topologie d'espaces homogènes*, paragraphe **11**, on peut montrer que

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k].[n - a_k, \ldots, n - a_1, n - a_0] = 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

Le nombre d'intersection de $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ avec un cycle de base différent de $[n - a_k, \ldots, n - a_1, n - a_0]$ est nul.

5. Arrivons à la détermination des nombres d'incidence et consi-

([1]) *Voir* S. LEFSCHETZ, *loc. cit.*, p. 155.

dérons d'abord la relation suivante :

$$[n-k, n-k+1, \ldots, n]^* \to \lambda [n-k-1, n-k+1, \ldots, n]^*.$$

On a $\lambda = 0$ si V est orientable et $\lambda = \pm 2$ si V est non orientable.

Pour voir si V est orientable ou non orientable, nous nous servons du fait que les éléments de V sont transformés transitivement entre eux par le groupe continu des homographies de $[n]$. Soit G ce groupe. Considérons dans $[n]$ des coordonnées projectives que nous appelons $x_0, x_1, \ldots, x_k, y_0, y_1, \ldots, y_{n-k-1}$. Nous prenons pour élément origine dans V l'élément $[k]_0$ défini par $y_0 = y_1 = \ldots = y_{n-k-1} = 0$. Le sous-groupe g de G qui laisse fixe $[k]_0$ est alors défini par

$$(2) \qquad \begin{cases} (x') = (a)(x) + (c)(y), \\ (y') = \phantom{(a)(x) + {}} (b)(y), \qquad |a|.|b| > 0, \end{cases}$$

où (x) et (y) sont les matrices à une colonne dont les éléments sont respectivement $x_0, \ldots, x_k$ et $y_0, \ldots, y_{n-k-1}$. Tout élément $[k]$ infiniment près de $[k]_0$ se déduit de $[k]_0$ par une transformation infinitésimale de la forme

$$(\delta x) = 0, \qquad (\delta y) = (\omega)(x),$$

où (ω) est une matrice à $k+1$ colonnes et à $n-k$ lignes. Les éléments ω_{ij} de (ω) peuvent être considérés comme des coordonnées de $[k]$. Une transformation de g de la forme (2) transforme $[k]$ en un élément $[k]'$ défini de la même façon par une matrice (ω'), et l'on a

$$(\omega') = (b)(\omega)(a^{-1}).$$

Cette relation définit un groupe linéaire γ opérant sur les quantités ω_{ij}. C'est le groupe linéaire d'isotropie. Si le déterminant de ce groupe est toujours positif, la variété V est orientable, sinon V est non orientable (1). Comme ce déterminant garde un signe constant pour chaque partie connexe de γ, il suffit de considérer une transformation particulière telle que $|a| < 0$, $|b| < 0$; par exemple la transformation

(1) *Voir* E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs* (*Mémorial Sc. math.*, fasc. XLII, 1930), p. 29.

correspondant à

$$
\begin{array}{llll}
x'_0 = -x_0, & x'_1 = x_1, & \ldots, & x'_k = x_k; \\
y'_0 = -y_0, & y'_1 = y_1, & \ldots, & y'_{n-k-1} = y_{n-k-1}.
\end{array}
$$

Par cette transformation, $n-1$ des quantités ω_{ij} changent de signe, les autres restant invariantes. Donc

La variété V *est orientable si* n *est impair, est non orientable si* n *est pair.*

4. Soit A la variété de symbole $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ et soit A_h la variété dont le symbole se déduit du symbole précédent en remplaçant a_h par $a_h - 1$. Les cellules orientées correspondantes seront désignées par A^* et A^*_h. La relation (1) s'écrit alors : $A^* \to \Sigma \lambda_i A^*_i$. Pour déterminer λ_i, nous considérons la variété $A' = A - A_0 - A_1 - \ldots - A_{i-1}$. Un élément $[k]$ de A' coupe $[a_{i-1}]_0$ suivant une variété $[i-1]$ qui appartient à la cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}]^*$. Considérons une variété plane $[n-1]'_0$ qui appartient à la cellule $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-i}]^*$, où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-i}$ sont les nombres de la suite $0, 1, \ldots, n$ qui ne figurent pas dans la suite a_0, $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Montrons que $[i-1]$ n'a pas de point commun avec $[n-i]'_0$. Supposons, en effet, qu'il existe un point commun M. Soit b le plus petit entier telle que la variété $[b]_0$ de la suite (S) contienne M. Comme M appartient à $[i-1]$, le nombre b ne peut être qu'un des nombres a_0, $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Comme M appartient à $[n-i]'_0$, le nombre b ne peut être qu'un des nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-i}$. Par conséquent il n'y a pas de point commun à $[i-1]$ et à $[n-i]'_0$. L'intersection de $[k]$ avec $[n-i]'_0$ est par suite une variété $[k-i]'$. La variété $[n-i]'_0$ coupe $[a]_0$ suivant une variété $[a']'_0$. On a $a' = a - \varphi(a)$, où $\varphi(a)$ est le nombre des entiers $a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$ qui sont inférieurs ou égaux à a. Les variétés $[a']'_0$, où a' prend toutes les valeurs entières de 0 à $n-i$, forment dans $[n-i]'_0$ une suite (S′) analogue à (S). La variété $[k-i]'$ est un élément quelconque de la variété

$$
B = [a_i - i, a_{i+1} - i, \ldots, a_k - i]' - [a_{i-1} - i, a_{i+1} - i, \ldots, a_k - i]',
$$

où les symboles sont définis à l'aide de variétés planes de la suite (S′). La variété A' est ainsi le produit topologique de $[a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}]^*$ par B. La cellule A^*_h, pour $h \geqq i$, est le produit topologique de

$[a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}]^*$ par $[a_i - i, \ldots, a_h - i - 1, a_k - i]'^*$; cependant pour que A_i^* existe, nous supposerons $a_i > a_{i-1} - 1$. Avec une orientation donnée des cellules, on a la relation d'incidence

$$(3) \qquad [a_i - i, a_{i+1} - i, \ldots, a_k - i]^* \to \sum_{h=i}^{h=k} \lambda'_h [a_i - i, \ldots, a_h - i - 1, \ldots, a_k - i]'^*,$$

qui a lieu aussi bien dans la variété ouverte B que dans la variété fermée $[a_i - i, a_{i+1} - i, \ldots, a_k - 1]'$. Dans la variété ouverte A′ on a d'autre part

$$A^* \to \sum_{h=i}^{h=k} \lambda_h A_h^* \qquad (\mathrm{mod}\ A - A').$$

D'après les propriétés du produit de deux complexes, les valeurs absolues de λ_h et de λ'_h sont les mêmes. En particulier $|\lambda_i| = |\lambda'_i|$; on est donc ramené à la détermination du premier coefficient de la relation (3).

Pour déterminer λ_0, nous transformons la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ par une corrélation qui permute entre elles les variétés planes de la suite (S), la variété $[a]_0$ étant transformée en $[n - a - 1]_0$. Soit $[k]$ un élément de $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$. La variété $[k]$, qui détermine avec $[a_i]_0$ une variété plane à $a_i + k - i$ dimensions au plus, est transformée en une variété $[n - k - 1]$ qui coupe $[n - a_i - 1]_0$ suivant une variété plane à i' dimensions au moins, où

$$i' = n - (a_i + k - i) - 1 = n - k - 1 - (a_i - i).$$

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k-1}$ les entiers de la suite $0, 1, \ldots, n$ qui ne figurent pas dans la suite $a_0, a_1, \ldots, a_k$. La différence $a_i - i$ est égale au nombre des entiers α_h qui sont inférieurs à a_i. Par conséquent le premier nombre de la suite $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k-1}$ qui soit supérieur à a est α_{i_1}, où $i_1 = n - k - 1 - i'$, et parmi les variétés de la suite (S), $[n - \alpha_{i_1}]$ est la variété de plus petite dimension dont l'intersection avec $[n - k - 1]$ est à i' dimensions au moins. La variété corrélative de $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ est donc la variété $[n - \alpha_{n-k-1}, \ldots, n - \alpha_1, n - \alpha_0]$.

Dans ce dernier symbole, les a_0 derniers nombres sont les nombres consécutifs $n - a_0 + 1, \ldots, n - 1, n$. Si l'on y remplace $n - a_0 + 1$

par $n - a_0$, on obtient le symbole de la variété corrélative de $[a_0 - 1, a_1, \ldots, a_k]$. Le nombre λ_0 est aussi au signe près le nombre d'incidence entre les deux cellules

$$[n - \alpha_{n-k-1}, \ldots, n - a_0 + 1, \ldots, n - 1, n]^*$$

et

$$[n - \alpha_{n-k-1}, \ldots, n - a_0, n - a_0 + 2, \ldots, n - 1, n]^*.$$

Or nous venons de prouver qu'on obtient le même nombre d'incidence au signe près, en supprimant dans ces deux symboles les $n - k - a_0$ premiers nombres et en retranchant des autres le nombre $n - k - a_0$. Par suite λ_0 est au signe près le nombre d'incidence entre les cellules

$$[k+1, k+2, \ldots, k+a_0]^* \quad \text{et} \quad [k, k+2, \ldots, k+a_0]^*.$$

D'après le résultat du paragraphe **3**, on a donc $\lambda_0 = 0$, si $k + a$ est impair; $\lambda_0 = \pm 2$, si $k + a_0$ est pair.

En appliquant ce résultat au premier coefficient dans la relation (3), on trouve : $\lambda'_i = 0$, si $k + a_i$ est impair; $\lambda'_i = \pm 2$, si $k + a_i$ est pair. Nous arrivons ainsi au résultat général suivant :

$$\lambda_i = 0, \text{ si } k + a_i \text{ est impair,}$$
$$\lambda_i = \pm 2, \text{ si } k + a_i \text{ est pair.}$$

5. Il reste à déterminer le signe des nombres d'incidence pour une orientation donnée des cellules. Considérons dans $[n]$ un simplexe de référence $P_0P_1, \ldots, P_kQ_0Q_1, \ldots, Q_{n-k-1}$, les coordonnées projectives correspondantes étant $x_0, x_1, \ldots, x_k, y_0, y_1, \ldots, y_{n-k-1}$. Représentons par $[M_0, M_1, \ldots, M_h]$ la variété plane déterminée par les points $M_0, M_1, \ldots, M_h$. Toute variété $[k]$ qui ne rencontre pas la variété $[Q_0Q_1, \ldots, Q_{n-k-1}]$ peut être définie par des équations de la forme

$$y_i = \omega_{ij} x_j \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, n-k-1 \\ j = 0, 1, \ldots, k \end{pmatrix}.$$

Les quantités ω_{ij} forment un système de coordonnées pour $[k]$. Considérons la variété de symbole $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ qui est définie par les $k+1$ variétés planes suivantes :

$$[a_0] = [P_0Q_0Q_1, \ldots, Q_{a_0-1}], \qquad [a_1] = [P_0P_1Q_0, \ldots, Q_{a_1-2}],$$

et d'une façon générale

$$[a_i] = [P_0 P_1, \ldots, P_i Q_0, \ldots, Q_{a_i-i-1}].$$

Chaque symbole $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ définit ainsi une variété bien définie de V. En ne considérant que les éléments $[k]$ qui peuvent être définis par les coordonnées ω_{ij}, les éléments de la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ correspondent à une matrice (ω) dans laquelle certains éléments sont identiquement nuls. Les éléments ω_{ij} qui ne sont pas identiquement nuls sont les m_j premiers éléments de la $j^{\text{ième}}$ colonne, où $j = 0, 1, \ldots, k$ et où l'on a posé $m_j = a_j - j$. Ceci montre en passant que la dimension de la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ est $\sum_{i=0}^{i=k} (a_i - i)$.

La variété

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k] - \sum_{i=0}^{i=k} [a_0, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k],$$

est de nouveau une cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^*$, qui est projectivement équivalente à la cellule de même symbole définie au paragraphe **1**. L'ensemble de ces cellules forme un complexe K′ qui subdivise la variété V. Le complexe K′ n'est pas projectivement équivalent au complexe K étudié dans les paragraphes précédents. Cependant il résulte du théorème du paragraphe **1** que le complexe K′ peut être déformé de façon que toute cellule de K′ soit déformée en la cellule de même symbole du complexe K. En effet, en reprenant les notations du paragraphe **1**, supposons que K'_p puisse être déformé en K_p, les chaînes définies par les cellules de K'_p étant déformées en les chaînes correspondantes de K_p. On peut alors trouver une déformation de K'_{p+1} qui entraîne la déformation précédente de K'_p en K_p [1]. Cette déformation effectuée, le complexe K'_{p+1} peut être déformé en un complexe recouvrant K_{p+1} de telle façon que les points de K_p restent fixes. Nous pouvons supposer que les simplexes d'une certaine subdivision de K'_{p+1} sont déformés ainsi en des simplexes d'une subdivision de K_{p+1}. Une cellule E'_{p+1} de K'_{p+1} est un cycle mod 2, qui est homologue au cycle mod 2 défini par la cellule correspondante de K_{p+1}. Nous

[1] *Voir* S. Lefschetz, *loc cit.*, p. 80.

avons déformé la chaîne E'_{p+1} en une combinaison linéaire des cellules à $p+1$ dimensions de K_{p+1}. Comme ces dernières cellules sont des cycles mod 2 linéairement indépendants, la chaîne E'_{p+1} se trouve déformée en la cellule correspondante de K_{p+1}. Par induction on voit donc qu'il existe une déformation de K' qui déforme les cellules de K' en les cellules correspondantes de K. On peut donc orienter les cellules de K' et de K de façon que les nombres d'incidence correspondants soient égaux deux à deux.

On définit facilement une orientation pour chaque cellule de la subdivision K'. Dans le voisinage de l'élément $[k_0]$ défini par $(\omega)=0$, tout élément $[k]$ est défini par les coordonnées ω_{ij}, que nous nous représentons comme des coordonnées dans un espace euclidien. Soit O le point défini par $(\omega)=0$ et soit M_{ij} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf ω_{ij} qui est égal à 1. La variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ correspond à une matrice (ω) dont les éléments non identiquement nuls définissent un système de coordonnées dans cette variété. Rangeons ces coordonnées dans un ordre linéaire en écrivant d'abord les m_0 éléments de la première colonne, puis les m_1 éléments de la deuxième colonne, etc. Écrivons dans le même ordre les points M_{ij} correspondant à ces coordonnées ω_{ij}. Soit σ_r le simplexe orienté dont les sommets sont le point O et les points M_{ij} appartenant à la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$, ces derniers points étant écrits suivant l'ordre indiqué. Le simplexe σ_r appartient à la cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star$ et définit une orientation de cette cellule. Définissons de la même façon l'orientation de chaque cellule de K'. Les sommets de σ_r moins le sommet $M_{m_i-1,i}$ définissent le simplexe orienté σ_{r-1} correspondant à la cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_i-1, \ldots, a_k]^\star$. Le nombre d'incidence de σ_r avec σ_{r-1} est égal à

$$(-1)^{m_0+m_1+\ldots+m_i}=(-1)^{a_0+a_1+\ldots+a_i-\frac{i(i+1)}{2}}.$$

Le nombre d'incidence entre les deux cellules correspondantes est donc égal à 0 ou à

$$2(-1)^{a_0+a_1+\ldots+a_i-\frac{i(i+1)}{2}}.$$

Pour une certaine orientation des cellules de K, le coefficient λ_i de la relation (1) a donc la valeur suivante :

$$\lambda_i = 0 \qquad (\text{si } k + a_i \text{ est impair}),$$
$$\lambda_i = 2.(-1)^{a_0+a_1+\ldots+a_i-\frac{i(i+1)}{2}} \qquad (\text{si } k + a_i \text{ est pair}).$$

6. Appliquons les résultats précédents à la variété des droites de l'espace projectif $[n]$. Cette variété est orientable ou non orientable suivant que n est impair ou pair. Les variétés $[p, q]$ forment les bases minima pour l'homologie mod 2. Les relations d'incidence sont

$$[2p, 2q]^\star \to 0, \qquad [2p, 2p+1]^\star \to 0,$$
$$[2p, 2q+1]^\star \to 2[2p, 2q]^\star, \qquad [2p+1, 2q]^\star \to -2[2p, 2q]^\star,$$
$$[2p+1, 2q+1]^\star \to -2[2p, 2q+1]^\star - 2[2p+1, 2q]^\star.$$

Tout cycle Γ_{2s-1} est homologue à une combinaison linéaire des cycles $[2p, 2q]$, où $p+q=s$. Tout cycle Γ_{2s} est homologue à une combinaison linéaire des cycles $[2p, 2q+1]^\star + [2p+1, 2q]^\star$, où $p+q=s$, et du cycle $[2r, 2r+1]$, si $s=2r$. Les cycles

$$[2p, 2q] \quad \text{et} \quad [2p, 2q+1]^\star + [2p+1, 2q]^\star$$

forment les bases minima des groupes de torsion. Tout cycle d'ordre fini qui n'est pas homologue à 0 est d'ordre 2. Tous les coefficients de torsion sont égaux à 2. Le cycle $[2r, 2r+1]$ forme la base du groupe de Betti pour la dimension $4r$. Les nombres de Betti relatifs aux dimensions $4r$ sont égaux à 1 ; les autres sont nuls.

7. Des relations d'incidence (1) on déduit de même les bases d'homologie de la variété V engendrée par les variétés $[k]$ de $[n]$. Appelons $F[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star$ le cycle défini par

$$[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star \to 2F[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star.$$

Soit Γ_p un cycle défini par une combinaison linéaire de cellules de K. Enlevons de Γ_p les cellules qui sont elles-mêmes des cycles, et soit Γ'_p le cycle qui reste. Il sera commode de dire que la cellule $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star$ est de rang inférieur à la cellule $[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$ lorsque $a_i < b_i$, l'indice i étant le plus petit indice tel que $a_i \neq b_i$. Considérons parmi les cellules qui figurent dans Γ'_p la cellule de rang minimum; soit $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star$ cette cellule. Soit $[a_0, a_1, \ldots, a_i-1, \ldots, a_k]^\star$ la cellule de rang minimum qui figure dans $F[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star$. Pour que cette cellule s'élimine dans la chaîne-frontière de Γ'_p, il faut que Γ'_p contienne également une cellule de symbole $[a_0, \ldots, a_h + 1, \ldots, a_i - 1, \ldots, a_k]^\star$, où $h < i$ et où $k + a_h$ est impair. Si l'on retranche de Γ'_p un multiple convenable du cycle $F[a_0, \ldots, a_h + 1, \ldots, a_i, \ldots, a_k]^\star$, on obtient un cycle Γ''_p qui ne contient plus que des cellules de rang supérieur à $[a_0, a_1, \ldots, a_k]^\star$. On peut recommencer le même raisonnement sur le cycle Γ''_p et l'on voit finalement que Γ'_p est une combinaison linéaire de cellules de forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$. Une cellule qui définit à elle seule un cycle ou bien est de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$ ou bien ne figure dans aucun cycle de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$. Soit $[c_0, c_1, \ldots, c_k]^\star$ une cellule de cette dernière espèce. Alors le symbole qu'on obtient en remplaçant c_i par $c_i + 1$ n'a pas de sens lorsque $k + c_i$ est impair, et le symbole qu'on obtient en remplaçant c_j par $c_j - 1$ n'a pas de sens lorsque $k + c_j$ est pair. Tout cycle Γ_p est une combinaison linéaire des cellules de cette espèce et des cycles de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$. Les cycles de même espèce que $[c_0, c_1, \ldots, c_k]^\star$ sont linéairement indépendants, puisqu'ils ne figurent dans aucun cycle de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$. Comme tout cycle de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$ est d'ordre 2, on a le

Théorème. — *Les cycles à p dimensions de même espèce que* $[c_0, c_1, \ldots, c_k]^\star$ *forment une base minima du groupe de Betti relatif à la dimension p. Les cycles à p dimensions de la forme* $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$ *forment une base du groupe de torsion relatif à la dimension p. Tous les coefficients de torsion sont égaux à 2.*

Les cycles à p dimensions de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]^\star$ ne sont pas en général des combinaisons linéaires indépendantes des cellules à p dimensions. Soit η_p la matrice des coefficients correspondant à l'ensemble de ces cycles. Les diviseurs élémentaires de η_p qui sont différents de 0 sont égaux à 1. Soit ρ_p le rang de η_p. Comme le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre ρ_p est égal à 1, au moins un de ces mineurs est impair. Supposons que ce soit le mineur formé par les ρ_p premières lignes et les ρ_p premières colonnes de η_p. Les ρ_p premiers cycles de la forme $F[b_0, b_1, \ldots, b_k]$ forment alors une base minima du groupe de torsion relatif à la dimension p.

II. — Variétés engendrées par des éléments composés $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$.

8. Le symbole $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ représente une figure formée par $k+1$ variétés planes $[p_0]$, $[p_1]$, $\ldots$, $[p_k]$, telles que

$$p_0 < p_1 < \ldots < p_k; \qquad [p_0] \subset [p_1] \subset \ldots [p_k].$$

Une telle figure sera l'élément générateur des variétés que nous allons considérer. Comme exemple le plus simple nous avons la variété des éléments linéaires de $[n]$, un élément linéaire étant une figure désignée par $\{0, 1\}$. Nous nous proposons d'étudier la variété de tous les éléments $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ de $[n]$. Le raisonnement fait dans *Topologie d'espaces homogènes*, § 18-20, à propos des variétés complexes analogues s'applique aussi bien dans le cas actuel et fournit immédiatement une subdivision en cellules. Considérons d'abord les variétés engendrées par des éléments $\{p, q\}$.

Soit V la variété de tous les éléments $\{p, q\}$ de $[n]$. Considérons le symbole suivant :

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} a_0, a_1, \ldots, a_p \\ b_0, b_1, \ldots\ldots, b_q \end{bmatrix},$$

où

$$0 \leqq a_0 < a_1 < \ldots < a_p \leqq n, \qquad 0 \leqq b_0 < b_1 < \ldots < b_q \leqq n,$$

et où tout nombre a_i est égal à un nombre $b_{i'}$ tel que $i' \geqq i$. Le symbole (4) représente la variété A engendrée par les éléments $\{p, q\}$ qui se composent d'un élément p de la variété $[a_0, a_1, \ldots, a_p]$ et d'un élément $[q]$ de la variété $[b_0, b_1, \ldots, b_q]$, ces deux dernières variétés étant définies par rapport à la suite (S) du paragraphe **1**. En remplaçant dans (4) le nombre a_i par $b_{i'-1}$, l'indice i' étant tel que $a_i = b_{i'}$, on obtient le symbole d'une variété A_i. Soit b_j un nombre de la deuxième ligne de (4) qui ne figure pas dans la première. Si $b_j - 1 > b_{j-1}$, on obtient le symbole d'une variété A'_j en remplaçant b_j par $b_j - 1$. D'une façon générale, soit h le plus petit indice inférieur à j tel que les nombres $b_h, b_{h+1}, \ldots, b_j$ soient des nombres consécutifs et figurent à l'exception de b_j dans la première ligne du symbole (4). En diminuant d'une unité tous les nombres $b_h, b_{h+1}, \ldots, b_j$, on obtient le symbole d'une variété désignée par A'_j. En remplaçant deux nombres a_i et $b_{i'}$, tels que $a_i = b_{i'}$, par $a_i - 1$ et $b_{i'} - 1$, on obtient le symbole d'une variété A''_i. Nous convenons toujours de remplacer par zéro tout symbole qui n'a pas de sens. Rappelons que la dimension de A est

$$\sum (a_i - i) + \sum (b_j - j),$$

où j ne prend que des valeurs telles que b_j ne figure pas dans la première ligne du symbole (4). La dimension de A_i, A'_j ou A''_i est inférieure d'une unité à celle de A. La variété A devient une cellule A^* lorsqu'on en retranche toutes les variétés A_i, A'_j et A''_i. L'ensemble des cellules A^* forme un complexe K qui subdivise la variété V.

Avec les notations du paragraphe **1**, on a le théorème :

On peut déformer tout complexe C_p ou toute chaîne Γ_p sur V en un complexe ou une chaîne sur K_p.

Le groupe de Poincaré de V s'en déduit très simplement. D'après le paragraphe **1**, c'est en effet le groupe de Poincaré du complexe K_2. Le complexe K_0 se réduit à un seul élément. Le complexe K_1 est formé par deux courbes fermées a et b de symboles

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p \\ 0, 1, \ldots\ldots, q-1, q+1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-1, p+1 \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, q \end{bmatrix}.$$

Ces deux courbes a et b définissent des éléments générateurs du groupe de Poincaré. Chaque cellule à deux dimensions de K_2 fournit une relation entre ces éléments, et l'on obtient ainsi toutes les relations.

Supposons $q > p + 1$. Écrivons les relations correspondant aux différentes cellules de K_2 :

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-1, p+2 \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, q \end{bmatrix}^* \qquad\qquad b^2 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-2, p, p+1 \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, q \end{bmatrix}^* \quad (\text{si } p > 0) \qquad b^2 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p \\ 0, 1, \ldots\ldots, q-1, q+2 \end{bmatrix}^* \quad (\text{si } n > q+1) \qquad a^2 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p \\ 0, 1, \ldots\ldots, q-2, q, q+1 \end{bmatrix}^* \qquad\qquad a^2 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-1, p+1 \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, q-1, q+1 \end{bmatrix}^* \qquad\qquad ab = ba.$$

Le groupe de Poincaré est donc le produit direct de deux groupes d'ordre 2.

Supposons $q = p + 1$. On a alors les cellules et les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-2, p, p+1 \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, p, p+1 \end{bmatrix}^* \quad (\text{si } p > 0) \qquad b^2 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p \\ 0, 1, \ldots, p, p+3 \end{bmatrix}^* \quad (\text{si } n > p+2) \qquad a^2 = 1;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-1, p+2 \\ 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, p, p+2 \end{bmatrix}^* \qquad bab = a;$$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, \ldots, p-1, p+1 \\ 0, 1, \ldots, p-1, p+1, p+2 \end{bmatrix}^* \qquad aba = b.$$

Pour trouver ces deux dernières relations, il faut remarquer que les deux dernières cellules sont homéomorphes respectivement à $\begin{bmatrix} 2 \\ 0, 2 \end{bmatrix}^*$ et à $\begin{bmatrix} 1 \\ 1, 2 \end{bmatrix}^*$, les courbes a et b correspondant respectivement à $\begin{bmatrix} 0 \\ 0, 2 \end{bmatrix}^*$ et à $\begin{bmatrix} 1 \\ 0, 1 \end{bmatrix}^*$. On voit alors facilement que le bord de la cellule $\begin{bmatrix} 2 \\ 0, 2 \end{bmatrix}^*$, par exemple, est $baba^{-1}$. Le groupe de Poincaré est encore le produit direct de deux groupes d'ordre 2, sauf dans le cas de la variété des éléments linéaires du plan projectif. Dans ce dernier cas, le groupe de Poincaré, G, est défini par les relations

$$bab = a, \qquad aba = b.$$

On en déduit

$$c = aba^{-1}b^{-1} = bab^{-1}a^{-1} = a^2 = a^{-2} = b^2 = b^{-2}.$$

L'élément c engendre un sous-groupe, C, d'ordre 2, qui est le groupe commutateur de G. Le groupe G/C est de nouveau le produit direct de deux groupes d'ordre 2. Donc G est un groupe d'ordre 8. On peut identifier ce groupe avec le groupe quaternionien [1].

---

[1] La détermination du groupe G a été faite par plusieurs auteurs. Voir *Jahresb. deutsch. Math. Ver.*, 42, 9-12 Heft, 1933, p. 112-117.

9. Les relations d'incidence du complexe K sont de la forme

$$A^* \to \sum_i \lambda_i A_i^* + \sum_j \lambda'_j A'^*_j + \sum_i \lambda''_i A''^*_i.$$

Les nombres d'incidence λ_i, λ_j, λ''_i sont donnés par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Dans la relation d'incidence*

$$A^* \to \sum_i \lambda_i A_i^* + \sum_j \lambda'_j A'^*_j + \sum_i \lambda''_i A''^*_i,$$

on a

$$\lambda_i = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda_i = \pm 2,$$

suivant que $p + i'$ *est impair ou pair,*

$$\lambda'_j = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda_j = \pm 2,$$

suivant que $b_j - \varphi(b_j) + q - p - 1$ *est impair ou pair,*

$$\lambda''_i = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda''_i = \pm 2,$$

suivant que $b_{i'} - i' + q - i$ *est impair ou pair.*

Le nombre i' *désigne l'entier tel que* $a_i = b_{i'}$ *et* $\varphi(b_j)$ *désigne le nombre des entiers* $a_0, a_1, \ldots, a_p$ *qui sont inférieurs à* b_j.

Je ne reproduis pas la démonstration de ce théorème, car elle est assez longue et elle ne s'appuie que sur des raisonnements analogues à ceux du paragraphe **4**.

10. Les bases d'homologie sur V peuvent se déduire des relations d'incidence du complexe K. Tout cycle sur V est, en effet, homologue à un sous-cycle de K, c'est-à-dire à une combinaison linéaire des cellules de K, et tout sous-cycle de K qui est homologue à 0 est le cycle-frontière d'une sous-chaîne de K. Ceci s'applique également aux cycles (mod 2) et à l'homologie (mod 2). Nous allons donc considérer seulement des sous-cycles de K. En particulier toute cellule A^* est un cycle (mod 2); on a par suite le théorème suivant :

Les variétés A *représentées par les symboles* (4) *définissent des cycles (mod* 2) *qui forment les bases minima des groupes d'homologie (mod* 2).

Relativement aux nombres d'intersections des cycles (mod 2) de dimensions complémentaires on montre, comme dans *Topologie d'espaces homogènes*, paragraphe 19, que

$$\begin{bmatrix} a_0, a_1, \ldots, a_p \\ b_0, b_1, \ldots\ldots, b_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n-a_p, \ldots, n-a_1, n-a_0 \\ n-b_q, \ldots\ldots\ldots\ldots, n-b_1, n-b_0 \end{bmatrix} = 1 \qquad (\text{mod } 2),$$

tandis que pour deux cycles de base dont les symboles ne se correspondent pas de cette façon le nombre d'intersection est nul.

11. Le théorème du paragraphe 9 ne détermine pas complètement les relations d'incidence et ne suffit donc pas pour déterminer les bases d'homologie du complexe K. Il est facile d'étudier complètement le cas où V est la variété des éléments $\{0, q\}$ de $[n]$. J'indique les résultats sans donner explicitement les démonstrations. Soit A^* la cellule définie par

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0, b_1, \ldots, b_q \end{bmatrix}^*$$

et soit $F(A^*)$ le cycle défini par $A^* \to 2F(A^*)$. En s'appuyant sur le théorème du paragraphe **9**, on démontre la propriété suivante :

Tout cycle qui est une combinaison linéaire des cellules figurant dans $F(A^*)$ *est un multiple de* $F(A^*)$, *à moins que* $F(A^*)$ *ne soit la somme de deux cellules définissant chacune un cycle.*

Dans le cas où $F(A^*)$ est la somme de deux cellules définissant chacune un cycle, on a

$$(5) \qquad F(A^*) = \pm A_0^* \pm A'^*_{h+1},$$

où

$$a_0 = b_h, \qquad b_{h+1} = b_h + 1.$$

L'ensemble des relations de la forme (5) se partage en groupes de relations de la forme

$$(6) \qquad \begin{cases} F({}^1A^*) = \pm {}^1A_0^* \pm {}^1A'^*_{h+1}, \\ F({}^2A^*) = \qquad \pm {}^2A_0^* \pm {}^2A'^*_{h+3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F({}^rA^*) = \qquad\qquad \pm {}^rA_0^* \pm {}^rA'^*_{h+2r-1}, \end{cases}$$

où les symboles qui figurent dans une même colonne représentent la même cellule. Il en résulte qu'avec un choix convenable de l'orientation des cellules tous les coefficients dans les relations de la forme (5) sont égaux à $+1$.

Ce qui précède permet de déterminer les nombres d'incidence du complexe K_{s+1} lorsqu'on connaît les nombres d'incidence du complexe K_s. Nous écrirons d'abord les relations

$$F(A^\star) = A_0^\star + A_{n+1}'^\star,$$

où $A^\star$ est une cellule de dimension $s+1$ telle que $A_0^\star$ et $A_{n-1}'^\star$ soient des cycles. Soit ensuite $C^\star$ une cellule de dimension $s+1$ qui n'est pas de cette espèce. Si $C^\star$ n'est pas un cycle, $F(C^\star)$ est déterminé au signe près par la condition $F(C^\star) \to 0$. En choisissant un signe quelconque, on fixe l'orientation de la cellule $C^\star$. Par récurrence on détermine ainsi tous les nombres d'incidence du complexe K.

Par une méthode analogue à celle du paragraphe 7, on montre que tout sous-cycle de K est une combinaison linéaire des cycles des trois espèces suivantes :

1° *Les cycles de la forme* $F(A^\star)$;

2° *Les cycles qui sont définis par une seule cellule, mais qui ne sont pas de la forme* $F(A^\star)$;

3° *Les cycles de la forme* $A^\star \pm C^\star$, *où*

$$A^\star = \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ a_0, & a_0+1, & b_2, & \ldots, & b_q \end{bmatrix}^\star,$$

$$C^\star = \begin{bmatrix} b_2 & & & & \\ a_0-1, & a_0, & b_2, & \ldots, & b_q \end{bmatrix}^\star,$$

$$F(A^\star) = \pm F(C^\star) = \pm \begin{bmatrix} a_0 & & & & \\ a_0-1, & a_0, & b_2, & \ldots, & b_q \end{bmatrix}^\star.$$

Considérons tous les cycles $F(A^\star)$, où $A^\star$ est une cellule quelconque de dimension $s+1$. Soit η_s la matrice des coefficients dans les formes linéaires $F(A^\star)$ et soit ρ_s le rang de η_s. On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Une base minima du groupe de torsion relatif à la dimension s est formée par* ρ_s *cycles de la forme* $F(A^\star)$. *Tous les coeffi-*

cients de torsion sont égaux à 2. Une base minima du groupe de Betti relatif à la dimension s est formée par un certain nombre de cycles de seconde espèce et par les cycles de troisième espèce de dimensions s.

12. Appliquons les résultats précédents à la variété des éléments linéaires de $[n]$. Cette variété a pour symbole $\begin{bmatrix} n \\ n-1, n \end{bmatrix}$. La subdivision en cellules est obtenue à l'aide des variétés

$$\begin{bmatrix} p \\ p, q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} q \\ p, q \end{bmatrix},$$

qui forment aussi les bases minima des groupes d'homologie mod 2. Les relations d'incidence qui définissent le complexe K sont

$$\begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q \end{bmatrix}^* \to 0, \qquad \begin{bmatrix} 2q+1 \\ 2p+1, 2q+1 \end{bmatrix}^* \to 0, \qquad \begin{bmatrix} 2q \\ 2q-1, 2q \end{bmatrix}^* \to 0,$$
$$\begin{bmatrix} 2q+1 \\ 0, 2q+1 \end{bmatrix}^* \to 0, \qquad \begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q+1 \end{bmatrix}^* \to 2 \begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q \end{bmatrix}^*,$$
$$\begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2p+1 \end{bmatrix}^* \to 2 \begin{bmatrix} 2p \\ 2p-1, 2p \end{bmatrix}^*, \qquad \begin{bmatrix} 2p+1, \\ 2p+1, 2q \end{bmatrix}^* \to 2 \begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q \end{bmatrix}^*,$$
$$\begin{bmatrix} 2p+1 \\ 2p+1, 2q+1 \end{bmatrix}^* \to 2 \begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q+1 \end{bmatrix}^* - 2 \begin{bmatrix} 2p+1 \\ 2p+1, 2q \end{bmatrix}^*,$$
$$\begin{bmatrix} 2q-1 \\ 2p, 2q-1 \end{bmatrix}^* \to 2 \begin{bmatrix} 2q-1 \\ 2p-1, 2q-1 \end{bmatrix}^*,$$
$$\begin{bmatrix} 2q \\ 2p-1, 2q \end{bmatrix}^* \to 2 \begin{bmatrix} 2q-1 \\ 2p-1, 2q-1 \end{bmatrix}^*,$$
$$\begin{bmatrix} 2q \\ 2p, 2q \end{bmatrix}^* \to 2 \begin{bmatrix} 2q-1 \\ 2p, 2q-1 \end{bmatrix}^* - 2 \begin{bmatrix} 2q \\ 2p-1, 2q \end{bmatrix}^*.$$

La variété $\begin{bmatrix} n \\ n-1, n \end{bmatrix}$ est orientable ou non orientable suivant que n est pair ou impair. Les seuls cycles de base des groupes de Betti sont les cycles $\begin{bmatrix} 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} n \\ n-1, n \end{bmatrix}$, si n est pair, et les cycles $\begin{bmatrix} 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} n \\ 0, n \end{bmatrix}$, si n est impair. Les bases minima des groupes de torsion sont formées par les cycles suivants :

$$\begin{bmatrix} 2p \\ 2p, 2q \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2q+1 \\ 2p+1, 2q+1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2q \\ 2q-1, 2q \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 2q+1 \\ 0, 2q+1 \end{bmatrix}, \qquad \left(\text{sauf} \begin{bmatrix} n \\ 0, n \end{bmatrix}\right)$$

et

$$\begin{bmatrix} 2p & \\ 2p, & 2q+1 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} 2p+1 & \\ 2p+1, & 2q \end{bmatrix}^*, \qquad \begin{bmatrix} 2q-1 & \\ 2p, & 2q-1 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} 2q & \\ 2p-1, & 2q \end{bmatrix}^*.$$

Dans le tableau suivant, que l'on prolongerait facilement, les symboles de la $(s+1)^{\text{ième}}$ ligne représentent les cellules de dimensions s; les symboles qui ne sont pas marqués d'une astérisque définissent des cycles; de même deux symboles reliés par un trait définissent deux cellules dont la différence est un cycle; on a ainsi tous les cycles de base.

$$\left\{\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 1 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 3 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 2 \end{bmatrix}^* \quad \begin{bmatrix} 2 & \\ 0, & 2 \end{bmatrix}^*, \\
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 3 \end{bmatrix}^* \quad \begin{bmatrix} 2 & \\ 1, & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & \\ 0, & 3 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 5 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 4 \end{bmatrix}^* \quad \begin{bmatrix} 2 & \\ 2, & 3 \end{bmatrix}^* \quad \begin{bmatrix} 3 & \\ 1, & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & \\ 0, & 4 \end{bmatrix}^*, \\
\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 5 \end{bmatrix}^* \quad \begin{bmatrix} 2 & \\ 2, & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & \\ 2, & 3 \end{bmatrix}^* - \begin{bmatrix} 4 & \\ 1, & 4 \end{bmatrix}^* \quad \begin{bmatrix} 5 & \\ 0, & 5 \end{bmatrix}.
\end{array}\right. \tag{7}$$

13. Connaissant la topologie de la variété des éléments linéaires de l'espace projectif $[n]$, nous pouvons étudier la question suivante : pour quelles valeurs de n peut-on définir un parallélisme absolu dans l'espace $[n]$? Étant donné l'espace $[3]$, on peut y introduire une métrique pour en faire un espace elliptique à trois dimensions. Le parallélisme de Clifford, de première espèce par exemple, jouit alors de la propriété suivante : par un point donné M il passe une parallèle et une seule à une droite donnée. On peut définir un parallélisme satisfaisant à la même condition dans l'espace elliptique à 7 dimensions; cet espace admet même deux familles continues de parallélismes de ce genre [1]. D'une façon générale, nous appelons parallélisme absolu

[1] *Voir* F. VANEY, *Le parallélisme absolu dans les espaces elliptiques réels à 3 et à 7 dimensions et le principe de trialité dans l'espace elliptique à 7 dimensions* (*Thèse*, Paris, Gauthier-Villars, 1929).

dans l'espace projectif $[n]$ une correspondance entre les éléments linéaires de $[n]$ qui satisfait aux conditions suivantes : 1° à tout élément linéaire défini par un point M et une droite Δ correspond, quel que soit M′, un élément linéaire *parallèle* défini par M′ et une droite Δ'; 2° les points M et M′ étant donnés, la correspondance entre Δ et Δ' est biunivoque et réciproque; 3° deux éléments linéaires qui sont parallèles à un troisième élément linéaire sont parallèles entre eux: 4° si Δ et M′ varient d'une façon continue, Δ' varie d'une façon continue. On peut définir de la même façon le parallélisme absolu dans une variété dérivable quelconque, car à une telle variété correspond une variété d'éléments linéaires bien définie (¹).

Pour qu'on puisse définir dans $[n]$ un parallélisme absolu, il faut évidemment que la variété des éléments linéaires de $[n]$ soit le produit topologique de $[n]$ par une variété $[n-1]'$; mais nous ignorons si cette condition est suffisante. Le produit topologique de $[n]$ par $[n-1]'$ est toujours non orientable. Si n est pair, on ne peut donc pas définir un parallélisme absolu dans $[n]$, car la variété $\begin{bmatrix} n \\ n-1,\ n \end{bmatrix}$ est orientable. Si n est impair, la variété $\begin{bmatrix} n \\ n-1,\ n \end{bmatrix}$ a les mêmes invariants d'homologie et le même groupe de Poincaré que le produit topologique de $[n]$ par $[n-1]'$. En effet, considérons dans $[n]$ une suite de variétés planes

$$[n] \supset [n-1] \supset [n-2] \supset \ldots \supset [0].$$

Considérons de même dans $[n-1]'$ une suite de variétés planes

$$[n-1]' \supset [n-2]' \supset [n-3]' \supset \ldots \supset [0]'.$$

Désignons par $[p.q]$ le produit topologique de $[p]$ par $[q]'$. La variété $[n, n-1]$ est subdivisée en cellules par l'ensemble des variétés $[p.q]$; à la variété $[p.q]$ correspond la cellule

$$[p.q]^* = [p.q] - [p-1.q] - [p.q-1].$$

(¹) *Sur la notion de parallélisme absolu, voir* E. CARTAN, *Notice historique sur la notion de parallélisme absolu* (*Math. Ann.*, 102, 5, p. 698-706). La définition de M. E. Cartan fait intervenir la notion de vecteurs infiniment petits équipollents et ne coïncide donc pas avec la définition donnée ci-dessus.

Les variétés $[p.q]$ forment les bases d'homologie (mod 2). On a un tableau analogue au tableau (7)

$$\begin{array}{llllll}
[0.0], & & & & & \\
[0.1] & [1.0], & & & & \\
[0.2]^* & [1.1] & [2.0]^*, & & & \\
[0.3] & [1.2]^*-[2.1]^* & [3.0], & & & \\
[0.4]^* & [1.3] & [2.2]^* & [3.1] & [4.0]^*, & \\
[0.5] & [1.4]^*-[2.3]^* & [3.2]^*-[4.1]^* & [5.0]. & & \\
\ldots\ldots & & & & &
\end{array}$$

Tout symbole qui n'est pas marqué d'une astérisque correspond à un cycle orienté; il en est de même de la différence de deux cellules dont les symboles sont reliés par un trait. Les bases d'homologie sont formées par l'ensemble de ces cycles. On vérifie alors facilement que les variétés $\begin{bmatrix} n & \\ n-1, & n \end{bmatrix}$ et $[n.n-1]$ ne se distinguent pas par leurs groupes d'homologie, lorsque n est impair. De plus le groupe de Poincaré est pour les deux variétés le produit direct de deux groupes d'ordre 2, si $n > 2$.

On est amené alors à rechercher si les deux variétés se distinguent par les invariants d'intersection relatifs aux cycles (mod 2).

Supposons $n = 2q+1$ et considérons dans la variété $\begin{bmatrix} n & \\ n-1, & n \end{bmatrix}$ les cycles (mod 2) de dimension $2q+1$. Désignons par $C_1, C_2, \ldots, C_{2q+1}$ les cycles de base (mod 2) dont les symboles sont

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 2q+1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & \\ 2, & 2q \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} q & \\ q, & q+\mathbf{2} \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} q+1 & \\ & q, \; q+1 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} 2q & \\ & 1, \; 2q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2q+1 & \\ & 0, \; 2q+1 \end{bmatrix}.$$

Désignons de même par a et b les cycles de symboles $\begin{bmatrix} 0 & \\ 0, & 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & \\ 0, & 1 \end{bmatrix}$. Considérons la matrice (T) dont les éléments sont les cycles d'intersection (mod 2) de la forme $C_i.C_j$. On a

$$C_i.C_j = \mu_{ij}^1 a + \mu_{ij}^1 b.$$

Étant donnés C_i et C_j, on peut par une transformation projective de $[n]$ amener C_j en une position générale par rapport à C_i. On voit alors que $C_i.C_j = 0$, si $i+j < 2q+1$. Supposons

$$C_i = \begin{bmatrix} i & \\ i, & 2q+2-i \end{bmatrix}, \qquad C_j = \begin{bmatrix} j & \\ 2q+1-j, & j \end{bmatrix} \qquad (i+j \geqq 2q+1).$$

Pour qu'il y ait un élément linéaire commun à C_i et à C_j, il faut avoir

$$2q+2-i+2q+1-j \leqq 2q+1; \qquad \text{d'où} \qquad i+j \geqq 2q+2.$$

Supposons de même

$$C_i = \begin{bmatrix} i & \\ 2q+1-i, & i \end{bmatrix}, \qquad C_j = \begin{bmatrix} j & \\ 2q+1-j, & j \end{bmatrix} \qquad (i, j \geqq q+1).$$

$C_i.C_j$ est nul, sauf si l'on a

$$2q+1-i+j \geqq 2q+1, \qquad 2q+1-j+i \geqq 2q+1,$$

c'est-à-dire si l'on a $i=j$. Le cycle $C_i.C_j$ ne sera pas nul dans les cas suivants :

$$C_i = \begin{bmatrix} i & \\ i, & 2q+2-i \end{bmatrix}, \quad C_j = C_{2q+1-i} = \begin{bmatrix} 2q+1-i & \\ & i, \; 2q+1-i \end{bmatrix} \quad (i \leqq q);$$

$$C_i = \begin{bmatrix} i & \\ i, & 2q+2-i \end{bmatrix}, \quad C_j = C_{2q+2-i} = \begin{bmatrix} 2q+2-i & \\ & i-1, \; 2q+2-i \end{bmatrix} \quad (i \leqq q);$$

$$C_i = \begin{bmatrix} i & \\ 2q+1-i, & i \end{bmatrix}, \quad C_j = C_i \qquad (i \geqq q+1).$$

A ces trois cas correspondent les cycles d'intersection suivants :

$$\begin{array}{lll} C_i.C_j = a & \text{si} & i+j = 2q+1 \\ C_i.C_j = a+b & \text{si} & i+j = 2q+2 \qquad (i \neq q+1), \\ C_i.C_i = b & \text{si} & i \geqq q+1. \end{array}$$

Dans tous les autres cas on a

$$C_i.C_j = 0.$$

En ce qui concerne le deuxième cas, qui est le cas le moins simple, nous remarquons que les éléments linéaires communs à C_i et à C_j sont définis chacun par un point arbitraire d'une droite fixe et par une droite qui passe par un point fixe. Le cycle d'intersection a donc un élément commun avec chacun des cycles

$$\begin{bmatrix} 2q+1 \\ 2q-1, 2q+1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 2q \\ 2q, 2q+1 \end{bmatrix};$$

d'où il résulte bien $C_i.C_j = a + b$.

Considérons de même dans la variété $[2q+1.2q]$ les cycles mod 2 de dimension $2q+1$:

$$[1.2q], \quad [2.2q-1], \quad \ldots, \quad [2q+1.0];$$

nous les désignons respectivement par C'_1, C'_2, ..., C'_{2q+1}, et nous désignons par a' et b' les cycles $[0.1]$ et $[1.0]$. Nous considérons de même la matrice (T') dont les éléments sont les cycles d'intersection de la forme $C'_i.C'_j$. On montre facilement que

$$\begin{array}{lll} C'_i.C'_j = a' & \text{si} & i+j = 2q+1, \\ C'_i.C'_j = b' & \text{si} & i+j = 2q+2, \\ C'_i.C'_j = 0 & \text{si} & i+j \neq 2q+1, \qquad i+j \neq 2q+2. \end{array}$$

Pour que les variétés

$$\begin{bmatrix} 2q+1 \\ 2q, 2q+1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [2q+1.2q]$$

soient homéomorphes, il faut que l'on puisse transformer (T) en (T') en effectuant sur les éléments de base C_1, C_2, ..., C_{2q+1} ainsi que sur les éléments de base a et b des substitutions linéaires dont les coefficients sont 0 ou 1 et dont les déterminants sont égaux à 1 mod 2.

Si l'espace $[2q+1]$ admet un parallélisme absolu, il y a des substitutions de forme plus particulière qui transforment la matrice (T) en (T'). En effet, supposons que l'on connaisse un parallélisme absolu dans $[2q+1]$. La variété des éléments linéaires dont chacun est défini par un point fixe O et par une droite passant par O peut être considérée comme une variété $[2q]'$. Les éléments linéaires définis chacun par le point O et par une droite qui appartient à une variété plane $[r+1]$ engendrent une variété qu'on peut considérer comme une variété plane $[r]'$ de $[2q]'$. Considérons alors dans $[2q]'$ une suite de variétés planes

$$[2q]', \quad [2q-1]', \quad [2q-2]', \quad \ldots, \quad [0]'.$$

Considérons de même dans $[2q+1]$ une suite analogue

$$[2q+1], \quad [2q], \quad \ldots, \quad [o].$$

Étant donné un élément linéaire défini par un point M et par une droite passant par M, supposons que M soit un point quelconque de $[p]$ et que l'élément linéaire soit parallèle à un élément linéaire quelconque de la variété $[r]'$. Les éléments linéaires qui satisfont à ces conditions engendrent une variété que nous désignons par $[p.r]$. Appelons a', b', $C'_1, \ldots, C'_{2q+1}$ les cycles (mod 2) qui correspondent respectivement à

$$[o.1], \quad [1.o], \quad [1.2q], \quad [2.2q-1], \quad \ldots, \quad [2q+1.o].$$

La matrice dont les éléments sont les cycles d'intersection (mod 2) de la forme $C'_i.C'_j$ est précisément la matrice (T') déjà considérée. On a les homologies suivantes :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} a' &\sim a, \\ b' &\sim \lambda a + b, \\ C'_1 &\sim C_1; \\ C'_2 &\sim \lambda_{21} C_1 + C_2, \\ C'_3 &\sim \lambda_{31} C_1 + \lambda_{32} C_2 + C_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C'_{2q+1} &\sim \lambda_{2q+1,1} C_1 + \ldots + \lambda_{2q+1,2q} C_{2q} + C_{2q+1} \\ &\qquad (\mathrm{mod}\ 2). \end{aligned}\right.$$

Pour démontrer ces homologies, il faut remarquer que le cycle de symbole $[o.r]$ reste, d'après la définition du parallélisme absolu, homotope à lui-même, lorsqu'on déplace le point $[o]$. Or quand le point $[o]$ est confondu avec le point O, le cycle de symbole $[o.\ r]$ est confondu avec un cycle de symbole $\begin{bmatrix} o & \\ o, & r+1 \end{bmatrix}$. Donc

$$[o.r] \sim \begin{bmatrix} o & \\ o, & r+1 \end{bmatrix}.$$

La deuxième homologie de (12) s'obtient alors en cherchant les nombres d'intersection (mod2) de b avec $\begin{bmatrix} 2q+1 & \\ 2q-1, & 2q+1 \end{bmatrix}$ et avec $\begin{bmatrix} 2q & \\ 2q, & 2q+1 \end{bmatrix}$. Le coefficient λ_{ij} est le nombre d'intersection mod2 de C'_i avec le $j^{\text{ième}}$ cycle de la suite :

$$\begin{bmatrix} 2q & \\ 0, & 2q \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2q-1 & \\ 1, & 2q-1 \end{bmatrix}, \quad \ldots,$$
$$\begin{bmatrix} q & \\ q, & q+1 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{bmatrix} 0, & \\ 0, & 2q+1 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte bien $\lambda_{ii} = 1$ et $\lambda_{ij} = 0$, si $j > i$. S'il existe un parallélisme absolu dans $[2q+1]$, on doit pouvoir déterminer les coefficients λ et λ_{ij} de façon que les relations (8) définissent une substitution qui transforme (T) en (T').

Supposons d'abord que l'on puisse avoir $\lambda = 1$. Considérons les équations

$$C'_1 . C'_{2q+1} = a + b = a + b + \lambda_{2q+1.2q}\, a \pmod 2;$$

d'où

$$\lambda_{2q+1.2q} = 0,$$

$$C'_2 . C'_{2q+1} = 0 = \lambda_{21}(a+b) + \lambda_{2q+1.2q-1}\, a \pmod 2;$$

d'où

$$\lambda_{21} = \lambda_{2q+1.2q-1} = 0.$$

La résolution successive des équations

$$C'_i . C'_{2q+1} = 0 \qquad (i = 3, 4, \ldots, q)$$

donne $\lambda_{i1} = 0$ pour $i \leqq q$, et $\lambda_{2q+1,j} = 0$, pour $j \geqq q+1$. On a alors l'équation

$$C'_{2q+1} . C'_{2q+1} = 0 = b \pmod 2;$$

qui est impossible. Il en résulte que l'on a forcément $\lambda = 0$. Étudions d'abord le cas $n = 5$. On a les équations suivantes :

$$C'_1 . C'_5 = b = a + b + \lambda_{54}\, a \pmod 2;$$

d'où $\lambda_{54} = 1$.

$$C'_2 . C'_5 = 0 = \lambda_{21}(a + b + a) + a + b + \lambda_{53}\, a \pmod 2;$$

d'où $\lambda_{53} = 1$. On arrive ensuite à une équation impossible :

$$C'_5 . C'_5 = 0 = b \pmod 2.$$

Donc on ne peut pas définir un parallélisme absolu dans l'espace projectif $[5]$. Comme il existe un parallélisme absolu pour $n = 7$, il reste à étudier le cas $n = 2q+1 > 7$. On peut encore commencer la détermination des coefficients λ_{ij} par la résolution successive d'équations linéaires. Je ne reproduis pas les calculs qui sont assez longs et j'indique seulement les résultats. On peut d'abord montrer que

$$\lambda_{2q+1,2q} = \lambda_{2q+1,2q-1} = \ldots = \lambda_{2q+1,q+1} = 1.$$

On en déduit :

$$C'_{2q+1} \cdot C'_{2q+1} = (q+1)\, b = 0 \qquad (\operatorname{mod} 2).$$

Donc q doit être impair. En supposant $q = 2q' - 1$, on trouve

$$\lambda_{2q,2q-1-2k} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, q' - 2;$$
$$\lambda_{2q,2q-2k} = 1, \qquad k = 0, 1, \ldots, q' - 1.$$

D'où :

$$C'_{2q} \cdot C'_{2q} = q'\, b = 0 \qquad (\operatorname{mod} 2).$$

On a donc $q' = 2q''$. On montre ensuite que les seuls coefficients $\lambda_{2q-2,j}$, pour $j \geqq q+1$, qui sont égaux à 1 sont de la forme $\lambda_{2q-2,2q-2-4r}$, où $k = 0, 1, \ldots, q'' - 1$. Donc

$$C'_{2q-2} \cdot C'_{2q-2} = q''\, b = 0 \qquad (\operatorname{mod} 2),$$

c'est-à-dire $q'' = 2r$ ou $n = 16r - 1$. Pour $n = 15$, on peut effectivement calculer les coefficients λ_{ij}, de sorte que le raisonnement précédent ne permet plus de conclure à l'impossibilité d'un parallélisme absolu lorsque $n = 16r - 1$. Nous avons donc le résultat suivant :

Pour qu'on puisse définir dans $[n]$ *un parallélisme absolu, il faut que* n *soit égal à* 3 *ou à* 7 *ou à* $16r - 1$.

Il serait intéressant de savoir s'il existe effectivement un parallélisme absolu pour $n = 16r - 1$; mais cette question paraît difficile à résoudre [1].

14. Les résultats des paragraphes précédents peuvent être étendus aux variétés engendrées par des éléments de la forme $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$.

---

[1] M. E. Stiefel m'a appris qu'il a étudié également le problème du parallélisme dans les espaces projectifs. Sa méthode est toute différente et conduit à un résultat un peu plus complet qu'il annonce dans *Ein Problem aus der linearen Algebra und seine topologische Behandlung* (*Verh. der Schweiz. Naturf. Gesellschaft*, Zürich, 1935).

Par exemple, soit V la variété des éléments $\{p, q, r\}$ contenus dans $[n]$. L'élément $\{p, q, r\}$ étant composé de trois variétés planes $[p]$, $[q]$ et $[r]$, supposons que ces variétés planes engendrent respectivement les variétés $[a_0, a_1, \ldots, a_p]$, $[b_0, b_1, \ldots, b_q]$ et $[c_0, c_1, \ldots, c_r]$ qui sont définies à l'aide de la suite (S). L'élément $\{p, q, r\}$ engendre alors une variété que nous représentons par le symbole

$$\begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots, & a_p \\ b_0, & b_1, & \ldots, & b_q \\ c_0, & c_1, & \ldots, & c_r \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Nous supposerons de plus que chacun des nombres de la première ligne de ce symbole figure aussi dans la deuxième ligne et que chacun des nombres de la deuxième ligne figure aussi dans la troisième ligne. La variété de symbole (9) est alors une variété irréductible; sa dimension est égale à

$$\sum_i (a_i - i) + \sum_j (b_j - j) + \sum_k (c_k - k),$$

où j est un indice quelconque tel que b_j ne figure pas dans la première ligne et où k est un indice quelconque tel que c_k ne figure pas dans la deuxième ligne. L'ensemble de ces variétés subdivise V en cellules. Cette subdivision définit un complexe analogue au complexe étudié dans les paragraphes **8-12**. On démontre facilement que les coefficients d'incidence relatifs à ce complexe sont égaux à o, $+2$ ou -2. Donc les variétés représentées par les symboles (9) sont des cycles (mod 2) et forment encore les bases minima des groupes d'homologie (mod 2). Bien qu'on ne rencontre aucune difficulté théorique nouvelle, la démonstration d'un théorème général analogue à celui du paragraphe **9** serait un peu longue. Dans chaque cas particulier donné on pourra déterminer effectivement les nombres d'incidence et par suite les bases d'homologie. Le théorème sur la déformation des chaînes (§ **8**) est toujours valable et permet en particulier de trouver le groupe de Poincaré de la variété V.

Si l'on considère la variété engendrée par les éléments $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$, il faut introduire des symboles à $k+1$ lignes analogues au symbole (9); ce qui précède se généralise alors immédiatement.

15. Il est intéressant de chercher le groupe de Poincaré de la variété V engendrée par les éléments $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ de l'espace projectif $[n]$. Comme cette variété est recouverte 2^n fois par la variété du groupe orthogonal, R, à $n+1$ variables, on peut déterminer ainsi le groupe de Poincaré de la variété du groupe R.

Considérons le symbole à n lignes

$$
(10) \qquad \left|\begin{array}{lllll}
0, & & & & \\
0, & 1, & & & \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots & \\
0, & 1, & 2, & \ldots, & n-1
\end{array}\right|
$$

où la $i^{\text{ième}}$ ligne contient les nombres $0, 1, \ldots, i-1$. Ce symbole définit un élément de V que nous considérons comme élément-origine de V. En remplaçant dans la $i^{\text{ième}}$ ligne le nombre $i-1$ par i, on obtient le symbole d'une courbe fermée A_i. Les courbes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont les éléments générateurs du groupe de Poincaré, G, de la variété V. Nous considérons toutes les cellules à deux dimensions de la subdivision de V qui a été définie au paragraphe précédent. A chacune de ces cellules correspond une relation entre les éléments générateurs $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et l'ensemble de ces relations définit le groupe G. Si $j-i>1$, les courbes A_i et A_j constituent la frontière de la cellule formée par un domaine de la variété

$$
(11) \qquad \left|\begin{array}{lllllll}
\ldots, & \ldots, & \ldots; & & & & \\
0, & 1, & \ldots, & i-2, & i, & & \\
\ldots, & \ldots, & \ldots; & \ldots, & \ldots, & & \\
0, & 1, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & j-2, & j \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; & .
\end{array}\right|,
$$

où les lignes non écrites explicitement sont les mêmes que les lignes correspondantes de (10). Chaque élément de cette variété correspond d'une façon biunivoque à l'ensemble d'un élément de $[0, 1, \ldots, i-2, i]$ et d'un élément de $[0, 1, \ldots, j-2, j]$. La variété (11) est donc homéomorphe à un tore, de sorte qu'on a la relation

$$A_i A_j = A_j A_i.$$

Il y a deux cellules dont les frontières sont constituées par les courbes A_i et A_{i+1}. L'une d'elles est formée par un domaine de la variété

$$\begin{vmatrix} \cdot, & \cdot, & \ldots, & \ldots, & \ldots & \\ 0, & 1, & \ldots, & i-2, & i+1, & \\ 0, & 1, & \ldots, & i-2, & i-1, & i+1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots, & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

l'autre est formée par un domaine de la variété

$$\begin{vmatrix} \cdot, & \cdot, & \ldots & \ldots & & \\ 0, & 1, & \ldots, & i-2, & i, & \\ 0, & 1, & \ldots, & i-2, & i, & i+1 \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots & \cdot\cdot & \ldots \end{vmatrix}.$$

Ces deux variétés sont respectivement homéomorphes à $\begin{bmatrix} 2 & \\ 0, & 2 \end{bmatrix}$ et à $\begin{bmatrix} 1 & \\ 1, & 2 \end{bmatrix}$, de sorte qu'on a, d'après le paragraphe **8**, les relations

$$A_i A_{i+1} A_i = A_{i+1},$$
$$A_{i+1} A_i A_{i+1} = A_i.$$

De ces relations on déduit

$$A_i A_{i+1} A_i^{-1} A_{i+1}^{-1} = A_{i+1} A_i A_{i+1}^{-1} A_i^{-1} = A_i^2 = A_i^{-2} = A_{i+1}^2 = A_{i+1}^{-2}.$$

En posant $H = A_1^2 = A_2^2 = \ldots = A_n^2$, on a $H^2 = 1$. Le groupe commutateur de G est donc le sous-groupe h, d'ordre 2, engendré par H. Le groupe G/h, qui n'est autre que le groupe d'homologie relatif à la dimension 1, est le produit direct de n groupes d'ordre 2. Donc l'ordre du groupe G/h est égal à 2^n et l'ordre de G est égal à 2^{n+1}.

Le groupe R est le groupe des transformations linéaires homogènes qui laissent invariante la forme $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$, le déterminant de chaque transformation étant égal à $+1$. En considérant x_0, x_1, $\ldots$, x_n comme des coordonnées projectives dans $[n]$, chaque transformation de R définit une transformation projective de $[n]$. Si les coordonnées sont convenablement choisies, les transformations de R qui laissent invariant l'élément-origine de V sont définies par

$$x'_i = \varepsilon_i x_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

où l'on a $\varepsilon_i = \pm 1$ et $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n = 1$. Ces transformations forment un sous-groupe d'ordre 2^n qui est comme G/h le produit direct de n groupes d'ordre 2. A chaque élément de V correspondent 2^n transformations de R, à savoir celles qui transforment l'élément-origine en l'élément considéré. La variété R recouvre donc 2^n fois la variété V.

Le groupe de Poincaré de la variété R est isomorphe à un sous-groupe de G, l'ordre de ce sous-groupe étant égal à l'ordre de G divisé par 2^n. Donc le groupe de Poincaré de R est le groupe d'ordre 2. A la courbe A_i^2 correspond dans R une courbe fermée non réductible à zéro; celle-ci définit un sous-groupe clos à un paramètre, à savoir le groupe dont les équations sont

$$\begin{aligned} x'_{i-1} &= x_{i-1}\cos t - x_i \sin t, \\ x'_i &= x_{i-1}\sin t + x_i \cos t, \\ x'_k &= x_k \qquad (k \neq i-1,\ i). \end{aligned}$$

A l'élément générateur H de G correspond ainsi un élément générateur $\overline{H}$ du groupe de Poincaré de la variété R. Donc:

Le groupe de Poincaré de la variété R *est le groupe d'ordre* 2 *défini par l'élément générateur* $\overline{H}$ *et par la relation* $\overline{H}^2 = 1$.

Ce résultat est bien connu ([1]), mais la démonstration précédente ne fait pas intervenir comme celle de M. H. Weyl la théorie de la structure des groupes simples. A la subdivision de V en cellules correspond une subdivision de R en un nombre fini de cellules. Ceci démontre en particulier que le groupe R est un groupe clos. La subdivision en cellules pourrait sans doute servir à la recherche de propriétés topologiques du groupe R, mais ceci nécessiterait une étude approfondie des relations entre un complexe et ses complexes de recouvrement.

([1]) *Voir* H. WEYL, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (*Math. Zeitschr.*, 24, 1925, p. 380); *voir* aussi E. CARTAN, *La Géométrie des groupes simples* (*Ann. di Mat.*, 1926-1927, p. 211-218).

Extrait de l'*Enseignement mathématique*, N^os 5-6, 35^e année, 1936.

/6/

SUR LES ESPACES LOCALEMENT HOMOGÈNES [1]

PAR

Charles Ehresmann (Paris).

Les espaces qui formeront l'objet de cette conférence sont des espaces analogues aux formes spatiales de Clifford-Klein. Je rappelle qu'une forme spatiale de Clifford-Klein est un espace de Riemann à courbure constante; suivant que cette courbure est nulle, positive ou négative, on aura un espace localement euclidien, localement sphérique ou localement hyperbolique. Etant donné un espace localement euclidien, par exemple, celui-ci est aussi caractérisé par le fait que les déplacements euclidiens voisins de la transformation identique sont définis dans un voisinage suffisamment petit de chaque point. Une généralisation immédiate de cette dernière définition s'obtient en remplaçant le groupe des déplacements euclidiens par un groupe de transformations continu et transitif quelconque, en particulier par un groupe continu et transitif de Lie. On définit ainsi les espaces localement homogènes que nous allons étudier. Bien que les résultats que je pourrai indiquer soient encore incomplets, il m'a semblé que ce sujet méritait d'être traité ici, parce qu'il touche à la fois à la théorie des groupes et à la topologie et parce qu'il conduit à des relations entre les propriétés infinitésimales et les propriétés globales d'un espace.

1. — Avant de préciser la notion d'espace localement homogène, il sera utile de rappeler la *définition d'un groupe de trans-*

[1] Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève: série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*

formations de Lie au sens local ou au sens global. Soit V une variété à n dimensions, c'est-à-dire un espace topologique régulier admettant un système de voisinages dont chacun est homéomorphe à l'intérieur d'un simplexe à n dimensions. Soit G un ensemble de transformations topologiques dont chacune est définie pour tout point d'un domaine D de V, les point de D étant transformés en des points de V qui n'appartiennent pas forcément à D. L'ensemble G forme un groupe continu à r paramètres au sens local lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes:

a) Les éléments de G peuvent être mis en correspondance biunivoque avec les points d'une variété à r dimensions, que nous désignerons par (G), telle que, si $M' = \varphi(M, s)$ est la transformation correspondant au point s de (G), la fonction $\varphi(M, s)$ soit continue par rapport à l'ensemble des points M et s.

b) L'ensemble G contient la transformation identique; soit i le point correspondant de (G).

c) Il existe dans (G) un voisinage Δ du point i tel qu'on ait les propriétés suivantes: Si a est un point de Δ, il existe dans D des points M dont les transformés $M' = \varphi(M, a)$ appartiennent à D; pour tout point M de cette espèce et pour tout point b de Δ, on a:

$$M'' = \varphi[\varphi(M, a), b] = \varphi(M, c) .$$

Le point c de (G) qui correspond ainsi à l'ensemble des points a et b est défini par une fonction $c = \psi(a, b)$.

d) Soit a un point de Δ et M un point quelconque de D tel que le point $M' = \varphi(M, a)$ appartienne à D. Il existe dans (G) un point a^{-1} tel que $M = \varphi(M', a^{-1})$.

e) La fonction $\psi(a, b)$ est continue par rapport à l'ensemble des points a et b; le point a^{-1} est une fonction continue du point a.

Un groupe G satisfaisant aux conditions précédentes est appelé *groupe de Lie au sens local* s'il existe, dans un voisinage du point i, un système de coordonnées tel que les coordonnées du point $c = \psi(a, b)$ soient des fonctions analytiques par rapport aux coordonnées des points a et b.

Le groupe G est dit transitif dans D si tout point M de D admet un voisinage tel que, M' étant un point quelconque de ce voisinage, il existe au moins une transformation de G qui transforme M en M'. Si G est un groupe continu transitif de Lie au sens local, il existe des systèmes de coordonnées définis respectivement dans un voisinage de M_0 et dans un voisinage de i tels que les coordonnées du point $M' = \varphi(M, a)$ soient des fonctions analytiques par rapport à l'ensemble des coordonnées de M et de a, en supposant que M et a appartiennent à des voisinages suffisamment petits de M_0 et de i. Deux systèmes de coordonnées qui sont définis dans un voisinage de M_0 et qui jouissent de la propriété précédente se déduisent l'un de l'autre par une transformation analytique.

Un ensemble de transformations topologiques, G, forme un *groupe continu à* r *paramètres au sens global* lorsqu'il satisfait aux conditions a), ..., e), en supposant que dans l'énoncé de ces conditions D soit remplacé par V et Δ par (G). L'ensemble G forme un *groupe de Lie au sens global* lorsqu'il définit un groupe continu à r paramètres au sens global et un groupe de Lie au sens local. Je signale le théorème suivant:

Etant donné un groupe continu à r *paramètres au sens local dont les transformations sont définies pour tous les points de la variété* V (c'est-à-dire le domaine D est confondu avec V), *l'ensemble des transformations dont chacune est le produit d'un nombre fini de transformations appartenant au voisinage* Δ *de* i *forme un groupe continu à* r *paramètres au sens global.*

2. — Appelons *espace homogène de Lie* une variété à n dimensions dans laquelle est défini un groupe de transformations continu et transitif de Lie au sens global.

Appelons *espace localement homogène de Lie* (en général nous dirons simplement espace localement homogène) une variété E à n dimensions jouissant des propriétés suivantes:

a) Chaque point M de E appartient à un voisinage V_M à l'intérieur duquel est défini un groupe continu et transitif de Lie au sens local qui transforme les points de V_M en des points de E; le voisinage V_M sera appelé voisinage élémentaire.

b) Soit d un domaine commun à deux voisinages élémentaires. Etant donnés les deux groupes de Lie au sens local attachés à ces voisinages, il existe dans chacun d'eux un voisinage de la transformation identique tel que les transformations de l'un de ces voisinages soient en correspondance biunivoque avec celles de l'autre, deux transformations correspondantes opérant de la même façon sur les points de d.

Un espace localement homogène de Lie peut encore être défini comme étant une variété E à n dimensions qui jouit des propriétés suivantes:

a) Chaque point M de E appartient à un voisinage V_M dans lequel on a défini un système de coordonnées et un ensemble de r transformations infinitésimales linéairement indépendantes qui engendrent un groupe transitif de Lie au sens local.

b) Soit d un domaine commun à deux voisinages élémentaires V_M et $V_{M'}$. Le changement de coordonnées défini pour les points de d transforme les r transformations infinitésimales définies dans V_M en r combinaisons linéaires des transformations infinitésimales définies dans $V_{M'}$.

Remarquons qu'un espace homogène de Lie est aussi un espace localement homogène de Lie.

Etant donnés deux points M et M' d'un voisinage élémentaire, appelons transformation élémentaire de M en M' toute transformation qui transforme M en M' et qui appartient au groupe de Lie au sens local attaché à ce voisinage. Si A et B sont deux points quelconques de E, on montre que A peut être transformé en B par la succession d'un nombre fini de transformations élémentaires. Il en résulte que les groupes de Lie, au sens local, définis respectivement au voisinage de A et au voisinage de B sont semblables.

La variété d'un espace localement homogène est une variété analytique. En effet, dans chaque voisinage élémentaire on peut introduire un système de coordonnées tel que le groupe de Lie, au sens local correspondant, soit analytique par rapport à ces coordonnées et par rapport aux paramètres. Le changement de coordonnées qui en résulte pour un domaine commun à deux voisinages élémentaires est alors également analytique.

3. — Deux espaces localement homogènes E et E' sont dits *équivalents* lorsqu'il existe une transformation topologique de E en E' telle que, M et M' étant deux points correspondants, les

transformations infinitésimales définies au voisinage de M soient transformées en les transformations infinitésimales définies au voisinage de M'. Les deux espaces E et E' sont dits *localement équivalents* lorsqu'il existe un voisinage élémentaire dans E qui soit équivalent à un voisinage élémentaire dans E'. Le problème général que nous nous proposons d'étudier s'énonce maintenant de la façon suivante:

Trouver tous les espaces localement homogènes qui soient localement équivalents à un espace localement homogène donné: en d'autres termes, *trouver tous les espaces localement homogènes qui soient le prolongement d'un élément d'espace localement homogène donné.*

Une question intéressante qui se pose aussitôt est la suivante: *Existe-t-il toujours un espace homogène qui soit localement équivalent à un espace localement homogène donné ?*

Pour répondre à cette question, je rappelle les propriétés suivantes: Soit H un espace homogène de Lie et G le groupe de Lie correspondant. Soit g le sous-groupe formé par l'ensemble des transformations de G qui laissent invariant un point O de H. Le sous-groupe g est fermé dans G et n'admet aucun sous-groupe invariant dans G. Réciproquement étant donnés un groupe abstrait de Lie, G, et un sous-groupe g qui est fermé dans G et qui ne contient aucun sous-groupe invariant dans G, on peut définir un espace homogène H dont le groupe de transformations G_1 est isomorphe à G, le sous-groupe de G_1 qui correspond à g étant le plus grand sous-groupe dont les transformations laissent invariant un point O de H.

Si G est un groupe transitif de Lie au sens local, il existe dans G un voisinage Δ de la transformation identique tel que les transformations qui appartiennent à Δ et qui laissent invariant un point O forment un sous-groupe continu de Lie au sens local. Réciproquement soit (G) un groupe abstrait de Lie au sens local et soit (g) un sous-groupe continu de Lie au sens local. Si (g) n'admet aucun sous-groupe continu invariant dans (G), il existe un groupe de transformations continu et transitif de Lie au sens local, que nous désignerons par G_1, tel que ce groupe soit localement isomorphe à (G), son sous-groupe qui correspond par cette isomorphie à (g) étant le plus grand sous-groupe continu qui laisse invariant un certain point. D'après le troisième théorème fondamental de Lie démontré du point de vue global par M. E. Cartan, la variété (G) peut être considérée comme un voisinage de l'élément unité d'un groupe abstrait de Lie au sens global. Désignons ce groupe par (G'); on peut le supposer simplement connexe; sinon on le remplacerait par son groupe de recouvrement simplement connexe. Le sous-groupe (g) au sens local se prolonge dans (G') en un sous-groupe continu de Lie au sens global; soit (g') ce prolongement. Pour que le groupe G_1 puisse être prolongé en un groupe transitif de Lie au sens global, il faut et il suffit que (g') soit fermé dans (G'). Or on sait qu'un groupe de Lie (G') simplement connexe peut avoir des sous-groupes continus qui ne sont pas fermés dans (G'). Par exemple, un groupe simple clos, simplement connexe et de rang supérieur à 1 admet des sous-groupes ouverts à un paramètre; un tel sous-groupe n'admet évidemment aucun sous-groupe continu invariant dans le groupe simple donné. Donc *il existe effectivement des espaces localement homogènes qui ne sont localement équivalents à aucun espace homogène.*

Pratiquement il est difficile de reconnaître si un groupe transitif de Lie au sens local défini dans un certain domaine par r transformations infinitésimales données peut être prolongé en un groupe de Lie au sens global. Remarquons seulement qu'une condition suffisante pour que ce prolongement existe est que le plus grand sous-groupe au sens local qui laisse invariant un point O ne laisse invariant aucun autre point dans un voisinage suffisamment petit de O. M. E. Cartan a déterminé tous les espaces homogènes de Lie à deux dimensions. On constate que tout espace localement homogène à deux dimensions est localement équivalent à un espace homogène. La même question n'est pas encore résolue dans le cas de trois dimensions et on n'a jamais déterminé tous les espaces homogènes de Lie à trois dimensions.

4. — Je signale le théorème suivant:

Si un espace localement homogène de Lie est clos et simplement connexe, il est équivalent à un espace homogène de Lie.

On en déduit que tout espace localement homogène clos, dont le groupe de Poincaré est fini, est localement équivalent à un espace homogène. Pour démontrer le théorème énoncé, on applique surtout la propriété suivante: *Etant donné un espace localement homogène* E, *tout arc* AB *établit un isomorphisme local bien déterminé entre les groupes de Lie, au sens local, définis respectivement au voisinage de* A *et au voisinage de* B ; *cet isomorphisme ne varie pas lorsqu'on déforme l'arc* AB, *les extrémités* A *et* B *restant fixes.* En particulier, si l'espace E est simplement connexe, il existe un isomorphisme local bien déterminé entre les groupes de Lie au sens local définis respectivement dans les voisinages de deux points quelconques de E.

5. — Par la suite nous porterons notre attention sur les espaces localement homogènes qui sont localement équivalents à un espace homogène donné. Soit H un espace homogène de Lie et G le groupe de transformations correspondant. On démontre alors le fait suivant:

Si $\overline{\mathrm{H}}$ *est la variété de recouvrement simplement connexe de* H, *cette variété* $\overline{\mathrm{H}}$ *définit un espace homogène localement équivalent à* H ; *le groupe* $\overline{\mathrm{G}}$ *correspondant à* $\overline{\mathrm{H}}$ *est un groupe de recouvrement (pas forcément simplement connexe) de* G.

Appelons automorphisme de l'espace homogène H une transformation topologique T de H en lui-même telle que la transformée par T de toute transformation de G appartienne encore à G. Appelons automorphisme local une transformation topologique qui transforme un voisinage d'un point A de H en un voisinage d'un point B de H de telle façon que la transformée de toute transformation infinitésimale de G soit encore une transformation infinitésimale de G. On démontre alors le théorème suivant:

Tout automorphisme local d'un espace homogène simplement connexe se prolonge en un automorphisme global de cet espace.

La démonstration de ce théorème repose sur le fait suivant: *Si* G *est un groupe abstrait de Lie au sens global, tout auto-*

morphisme local de (G) *se prolonge en un automorphisme global de* (G).

Soit E un espace localement homogène que nous supposons localement équivalent à un espace homogène simplement connexe H. Définissons le *développement sur* H *d'un arc de l'espace* E. Nous appelons arc la figure décrite par un point qui est une fonction continue d'un paramètre variant de 0 à 1. Soit OA un arc de E. Tout point M de E appartient à un voisinage élémentaire qui est équivalent à un voisinage d'un point $\overline{M}$ de H. En vertu du lemme de Borel-Lebesgue, on peut recouvrir l'arc OA par une suite d'un nombre fini d'arcs partiels telle que deux arcs partiels successifs empiètent l'un sur l'autre et telle que tout arc partiel soit contenu dans un voisinage élémentaire équivalent à un voisinage dans l'espace H. Soit V_0, V_1, ..., V_k cette suite de voisinages; nous pouvons supposer que deux voisinages successifs n'aient qu'un seul domaine en commun. Une suite de voisinages de cette espèce sera appelée une chaîne de voisinages recouvrant l'arc OA. Le voisinage V_0 du point O peut être représenté sur un voisinage $\overline{V}_0$ d'un point $\overline{O}$ de H. Le voisinage V_1 est équivalent à un voisinage $\overline{V}_1'$ dans H. Soit d le domaine commun à V_0 et à V_1. Il est représenté d'une part sur un domaine $\overline{d}$ de $\overline{V}_0$ et d'autre part sur un domaine $\overline{d}'$ de $\overline{V}_1'$. L'automorphisme local qui transforme $\overline{d}'$ en $\overline{d}$ se prolonge en un automorphisme global qui transforme $\overline{V}_1'$ en un voisinage $\overline{V}_1$. En répétant cette opération, on pourra représenter la chaîne de voisinage V_0, V_1, ..., V_k sur une chaîne de voisinages $\overline{V}_0$, $\overline{V}_1$, ..., $\overline{V}_k$. L'arc OA sera représenté sur un arc $\overline{O}\overline{A}$ recouvert par la chaîne de voisinages $\overline{V}_0$, $\overline{V}_1$, ..., $\overline{V}_k$. Nous dirons que l'arc $\overline{O}\overline{A}$ est un développement sur H de l'arc OA; de même l'arc OA sera appelé un développement sur E de l'arc $\overline{O}\overline{A}$. On a ainsi le résultat suivant:

Un voisinage du point O *de* E *étant représenté sur un voisinage d'un point* $\overline{O}$ *de* H, *tout arc* OA *de* E *admet un développement bien déterminé suivant un arc* $\overline{O}\overline{A}$ *de* H. *Si deux arcs d'origine* O *et d'extrémité* A *sont réductibles l'un à l'autre par déformation continue, leurs développements conduisent de* $\overline{O}$ *au même point* $\overline{A}$.

La dernière partie de cet énoncé se démontre en appliquant le lemme de Borel-Lebesgue à une famille continue d'arcs d'origine O et d'extrémité A. On démontre de même le théorème suivant:

Un voisinage de O *étant représenté sur un voisinage de* $\overline{\mathrm{O}}$, *soit* $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{A}}$ *un arc quelconque de* H. *Ou bien l'arc* $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{A}}$ *se développe suivant un arc bien déterminé* OA *de* E, *ou bien il existe sur l'arc* $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{A}}$ *un point* $\overline{\mathrm{C}}$ *tel que l'arc* $\overline{\mathrm{O}}\overline{\mathrm{C}}$ *moins le point* $\overline{\mathrm{C}}$ *se développe suivant une ligne divergente sur l'espace de recouvrement simplement connexe de* E. *Etant donnée sur* H *une famille continue d'arcs d'origine* $\overline{\mathrm{O}}$ *et d'extrémité* $\overline{\mathrm{A}}$ *telle que chacun de ces arcs admette sur* E *un développement issu de* O, *ce développement conduit toujours au même point* A.

Les propriétés précédentes conduisent aux résultats suivants:

Si l'espace localement homogène E *est clos et simplement connexe, il est équivalent à l'espace homogène* H. *Si* E *est clos et admet un groupe de Poincaré fini, l'espace de recouvrement simplement connexe de* E *est équivalent à* H. *Si* E *est clos et* H *ouvert, le groupe de Poincaré de* E *est infini.*

Soit H′ *un espace homogène localement équivalent à* H; *si* H′ *est simplement connexe, il est équivalent à* H; *si* H′ *n'est pas simplement connexe, son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent à* H.

6. — Considérons maintenant une classe particulièrement intéressante d'espaces localement homogènes. Un espace E de cette classe satisfait à la condition suivante qui sera appelée *condition de normalité:* L'espace E est localement équivalent à un espace homogène H que nous supposerons simplement connexe, et toute ligne divergente sur l'espace de recouvrement simplement connexe de E se développe suivant une ligne divergente de H. L'espace E sera appelé *espace localement homogène normal* ou encore *forme de Clifford* de l'espace homogène H. En particulier, tout espace homogène localement équivalent à H est normal; on l'appelle *forme de Klein* de l'espace homogène H.

De même tout espace localement homogène clos dont le groupe de Poincaré est fini satisfait à la condition de normalité. On démontre facilement le théorème suivant:

Soit E *un espace normal localement équivalent à l'espace homogène simplement connexe* H; *l'espace* H *est équivalent à l'espace de recouvrement simplement connexe de* E.

Un voisinage du point O de E étant représenté sur un voisinage équivalent du point $\overline{O}$ de H, tout arc OM de E se développe suivant un arc déterminé $\overline{O}\overline{M}$ de H. La correspondance entre M et $\overline{M}$ jouit alors des propriétés suivantes: A tout point $\overline{M}$ de H correspond un point déterminé M de E. Les points de H qui correspondent à un même point M de E forment un ensemble de points équivalents par rapport à un groupe d'automorphismes de l'espace H. Ce groupe s'appelle le groupe d'holonomie de l'espace E. Il est isomorphe au groupe de Poincaré de l'espace E. De plus il est proprement discontinu dans tout l'espace H et aucune de ses opérations n'admet de points invariants dans H. La recherche des formes de Clifford de l'espace H revient ainsi à la recherche des groupes d'automorphismes de H qui peuvent être considérés comme des groupes d'holonomie.

Soit Γ un groupe d'automorphismes de H. Pour que Γ soit le groupe d'holonomie d'un espace localement homogène normal il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:

a) Γ est proprement discontinu dans tout l'espace H.

b) Aucune opération de Γ n'admet des points invariants.

c) Considérons dans H deux voisinages quelconques v et v', distincts ou confondus. Parmi les voisinages transformés de v par Γ, il y a au plus un nombre fini de voisinages qui ont des points communs avec v'.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, les ensembles de points équivalents par rapport à Γ peuvent être considérés comme les points d'un espace E qui sera une forme de Clifford de H.

La condition *c*) est vérifiée d'elle-même lorsque Γ est un groupe fini. Cette condition est une conséquence des conditions *a*) et *b*) lorsque Γ laisse invariante une métrique définie dans H. En particulier, supposons que H soit un espace riemannien dont la métrique est invariante par le groupe G qui opère transitivement dans H. Lorsqu'un groupe d'automorphismes Γ laisse invariante cette métrique riemannienne et satisfait aux conditions *a*) et *b*), c'est le groupe d'holonomie d'un espace riemannien localement équivalent à H, c'est-à-dire localement applicable sur H. Il serait intéressant de savoir si la condition *c*) est toujours une conséquence des conditions *a*) et *b*), lorsque le groupe Γ est un groupe d'automorphismes de H. J'ignore la réponse à cette question. On sait seulement que la condition *c*) n'est pas nécessairement une conséquence des conditions *a*) et *b*) lorsque Γ se compose de transformations topologiques quelconques de H.

7. — La condition de normalité, pour un espace localement homogène E, peut être remplacée, dans certains cas, par des conditions plus simples. Considérons en particulier les espaces riemanniens localement homogènes. On voit facilement que la condition de normalité est équivalente dans ce cas à la condition suivante: *Dans l'espace* E, *toute ligne divergente localement rectifiable a une longueur infinie.* Cette condition est encore équivalente à d'autres conditions, par exemple à la condition suivante: *Sur tout rayon géodésique on peut reporter, à partir de son origine, une longueur donnée arbitraire.* L'équivalence des deux conditions précédentes s'établit facilement dans le cas d'un espace riemannien localement homogène. M. Hopf et M. Rinow ont même démontré cette équivalence pour un espace de Riemann quelconque.

Dans le cas des espaces localement affines, c'est-à-dire localement équivalents à l'espace affine, la condition de normalité peut être remplacée par la suivante: *Etant donnée une géodésique quelconque de l'espace localement affine, un point* M *qui décrit la géodésique peut être défini en fonction d'un paramètre* s *tel que, dans tout système de coordonnées affines locales, les coordonnées de* M *soient des fonctions linéaires de* s; *l'espace considéré sera alors normal si à toute valeur de* s *somprise entre* $-\infty$ et $+\infty$ *correspond un point* M *de la géodésique donnée.*

8. — Lorsqu'un espace riemannien localement équivalent à un espace riemannien homogène est clos, il est normal; car il n'y

a pas de lignes divergentes dans cet espace. Mais dans le cas général, un espace localement homogène clos n'est pas forcément normal. Les espaces localement homogènes normaux ainsi que les espaces localement homogènes clos font partie de la classe plus générale des espaces localement homogènes non prolongeables. Un espace localement homogène E est dit non prolongeable lorsqu'il n'est pas équivalent à un domaine D d'un espace localement homogène E', le domaine D ayant des points frontières dans E'. On démontre facilement le théorème suivant:

Tout espace homogène est non prolongeable.

Il suffit d'appliquer le théorème qui dit que tout arc d'un espace localement équivalent à un espace homogène H admet un développement sur H. Il résulte immédiatement de ce théorème que *tout espace localement homogène normal est non prolongeable.* De même il est clair que tout espace clos est non prolongeable. Il existe des espaces localement homogènes non prolongeables (même simplement connexes ou clos) qui ne sont pas normaux. Par exemple, soit H un espace homogène à 3 dimensions et considérons un nœud dans cet espace. Tout espace de recouvrement à plusieurs feuillets de l'espace complémentaire du nœud est non prolongeable. D'une façon générale, le théorème relatif au développement d'un arc sur un espace homogène permet de reconnaître si un espace localement homogène donné est prolongeable ou non prolongeable. Il serait intéressant de savoir si tout espace prolongeable est équivalent à un domaine d'un espace non prolongeable.

9. — Donnons quelques applications des notions et propriétés générales qui précèdent. Je ne parlerai pas des espaces localement euclidiens ou localement non euclidiens, car ce sujet est bien connu. Je signale que les formes de Clifford ou de Klein des espaces riemanniens homogènes, en particulier des espaces riemanniens symétriques, ont été considérées par M. E. Cartan dans plusieurs de ses travaux. Je me propose d'indiquer seulement quelques propriétés des espaces localement projectifs.

Un *espace localement projectif* est un espace localement équivalent à un espace projectif réel. On peut encore le définir de la façon suivante: Un espace localement projectif E est une variété à n dimensions sur laquelle on a défini un système de courbes appelées géodésiques tel que chaque point de E appartient à un voisinage qui admet une représentation topologique sur un domaine de l'espace projectif, les arcs de géodésiques étant représentés par des segments de droites.

Tout espace localement euclidien, localement non-euclidien ou localement affine est évidemment un espace localement projectif. D'une façon générale, si H est un espace homogène et G le groupe de transformations correspondant, tout sous-groupe continu G′ qui est localement transitif dans un domaine de H définit un espace homogène H′, et tout espace localement équivalent à H′ définit aussi un espace localement équivalent à H.

Soit S l'espace de recouvrement simplement connexe de l'espace projectif à n dimensions. L'espace S est homéomorphe à la sphère à n dimensions et recouvre deux fois l'espace projectif. Un point de S est représenté par l'ensemble de $n + 1$ quantités $\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n$, non toutes nulles, le nombre λ étant un nombre positif quelconque. Le groupe d'automorphismes (A) de l'espace S est le groupe dont la transformation générale est:

$$x'_i = a_{ij} x_i , \qquad \text{déterminant } |a_{ij}| = \pm 1 .$$

L'application d'un résultat général au cas présent donne le théorème suivant:

Tout espace localement projectif clos et à groupe de Poincaré fini admet l'espace S *pour espace de recouvrement simplement connexe.*

Les espaces de cette classe sont les espaces localement projectifs normaux. Un espace localement projectif normal peut aussi être caractérisé par la propriété suivante: *Toute géodésique de l'espace est une courbe fermée.*

Tout espace localement projectif normal est défini par un groupe formé d'un nombre fini de transformations du groupe (A), chacune de ces transformations étant sans points invariants dans S. Réciproquement tout groupe fini de cette espèce définit un espace localement projectif normal. Or tout groupe fini de transformations de (A) laisse invariante au moins une forme quadratique définie en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, que nous pouvons supposer être la forme $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Le groupe considéré est donc un groupe de déplacements sphériques. Donc

THÉORÈME: *Tout espace localement projectif normal est équivalent à un espace localement sphérique normal* (forme spatiale de Clifford à courbure constante positive). *En particulier, tout espace homogène localement équivalent à l'espace projectif est équivalent à l'espace projectif ou à l'espace sphérique.*

Les espaces localement euclidiens ou localement hyperboliques sont des espaces localement projectifs qui ne sont pas normaux. Si les géodésiques d'un espace localement projectif sont les géodésiques d'une métrique riemannienne, cet espace est localement euclidien ou non-euclidien. Il existe des espaces localement projectifs, même clos, qui ne sont pas équivalents à des espaces localement euclidiens ou non-euclidiens. Considérons, par exemple, dans le plan projectif la transformation $x_0^1 = \lambda x_0$, $x_1^1 = x_1$, $x_2^1 = x_2$ et le groupe Γ engendré par cette transformation. Dans le domaine obtenu en enlevant du plan projectif la droite $x_0 = 0$ et le point $x_1 = x_2 = 0$, le groupe Γ a les caractères d'un groupe d'holonomie et définit un espace localement projectif E. On peut prendre pour domaine fondamental du groupe Γ le domaine compris entre les deux coniques $x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0$ et $x_1^2 + x_2^2 - \lambda^2 x_0^2 = 0$. On voit donc que l'espace E est homéomorphe au tore, mais les géodésiques de cet espace ne peuvent pas être les géodésiques d'une métrique riemannienne. De plus ces géodésiques ne satisfont pas à la condition suivante que nous appellerons condition de convexité: *Supposons donnée une famille continue d'arcs géodésiques* AB_t, *l'origine* A *étant fixe et l'extrémité* B_t *étant une fonction continue d'un paramètre* t, *définie pour* $0 \leq t < 1$; *si* B_t *tend vers un point* B_1 *lorsque* t *tend vers* 1, *l'arc géodésique* AB_t *tend vers un arc géodésique* AB_1. Remarquons que les géodésiques d'un espace riemannien normal satisfont à cette condition ainsi que les géodésiques d'un espace localement projectif normal ou d'un espace localement affine normal. Un espace localement projectif qui satisfait à la condition de convexité sera appelé convexe.

Les géodésiques issues d'un point remplissent tout l'espace. On peut démontrer le théorème suivant:

L'espace de recouvrement simplement connexe d'un espace localement projectif convexe est équivalent à l'espace sphérique S *ou bien à un domaine convexe de l'espace projectif.*

Réciproquement, soit D un domaine convexe de l'espace projectif, c'est-à-dire un domaine satisfaisant à notre condition de convexité. Soit Γ un groupe de transformations projectives qui transforme D en lui-même, qui est proprement discontinu dans D et dont les transformations n'admettent pas de points invariants dans D. On sait qu'on peut définir dans D une métrique en prenant pour distance de deux points M et M′ le logarithme du rapport anharmonique des points M, M′ et des deux points d'intersection de la droite MM′ avec la frontière de D. Cette métrique est invariante par Γ. L'ensemble des points équivalents à un point de D par rapport au groupe Γ peut donc être considéré comme le point général d'un espace localement projectif; celui-ci sera convexe et admettra D pour espace de recouvrement simplement connexe. Dans ce raisonnement on a supposé que D n'est pas l'espace affine.

10. — Considérons plus spécialement les espaces localement projectifs convexes à deux dimensions. Faisons abstraction des espaces localement projectifs normaux, c'est-à-dire de l'espace sphérique à deux dimensions et du plan projectif. Soit E un espace localement projectif clos. Son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent à un domaine convexe D du plan projectif; appelons C la frontière de D. L'espace E sera défini par un groupe projectif Γ qui a les caractères d'un groupe d'holonomie dans le domaine D; ce groupe Γ est d'ailleurs infini. On montre alors que les seuls cas qui peuvent se présenter sont les suivants: 1° C est une droite et D est le plan affine; 2° C se compose de deux droites et D est le demi-plan affine; 3° C se compose de trois segments de droites et D est l'intérieur d'un triangle; 4° C se compose d'un segment de droite et d'un arc de courbe tel que les transformés par Γ de tout point de cet arc forment un ensemble partout dense sur cet arc; 5° les transformés de tout point de C (peut-être à l'exception d'un point)

forment un ensemble partout dense sur C. Supposons que C soit composé d'arcs analytiques. Alors la partie non rectiligne de C est à courbure projective constante. On peut en déduire que les seuls cas possibles sont les trois premiers cas et le cinquième cas où D est l'intérieur d'une conique. On a par conséquent le résultat suivant:

Si un espace localement projectif à deux dimensions est convexe et clos, il est équivalent à l'espace sphérique, ou bien à l'espace projectif, ou bien à un espace localement hyperbolique, ou bien à un espace localement affine normal, ou bien son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent soit au demi-plan affine, soit à l'intérieur d'un triangle, soit à un domaine convexe du plan projectif dont la frontière contient des arcs non analytiques.

Il paraît probable que le dernier cas ne peut pas se présenter. On a de même le résultat suivant:

Si un espace localement affine à deux dimensions est convexe et clos, il est normal, ou bien son espace de recouvrement simplement connexe est équivalent soit au demi-plan affine, soit à un domaine du plan affine limité par deux demi-droites issues d'un point, soit à un domaine convexe du plan affine dont la frontière contient des arcs non analytiques.

Plus généralement on peut démontrer que les deux énoncés précédents sont encore valables pour les espaces localement projectifs ou pour les espaces localement affines qui sont *convexes* et *non prolongeables.* Remarquons cependant qu'un espace localement hyperbolique normal est prolongeable en tant qu'espace localement projectif lorsque le groupe Γ correspondant est proprement discontinu sur la conique C.

11. — Il est intéressant de considérer également les espaces localement projectifs complexes. L'espace projectif complexe est simplement connexe. Dans le cas d'un nombre pair de dimensions, l'espace projectif complexe n'admet pas de forme de Clifford autre que lui-même. Dans le cas d'un nombre impair de dimensions complexes, il existe une forme de Clifford distincte de l'espace projectif complexe. Cette forme de Clifford est

non orientable, et elle peut aussi être considérée comme une forme de Clifford de l'espace hermitien elliptique.

On détermine encore facilement les espaces localement conformes normaux. *On peut démontrer que ceux-ci sont aussi équivalents aux espaces localement sphériques normaux.*

Pour terminer remarquons que les espaces localement homogènes considérés sont des cas particuliers des espaces non holonomes définis d'une façon générale par M. E. Cartan. Ce sont les espaces non holonomes correspondant à un groupe transitif de Lie G tels que les déplacements infinitésimaux attachés aux différents vecteurs infinitésimaux de l'espace satisfont aux équations de structure du groupe G. L'étude des espaces localement homogènes est ainsi le premier pas dans l'étude des propriétés globales des espaces non holonomes.

BIBLIOGRAPHIE

E. Cartan. *a*) L'application des espaces de Riemann et l'analysis situs (*Ass. fr. p. l'Avancement d. sciences*, 50$^{\text{me}}$ session, Lyon, 1926);
b) La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs (*Mémorial sc. math.*, fasc. XLII, 1930).

C. Ehresmann. Un théorème relatif aux espaces localement projectifs et sa généralisation (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 196, 1933, p. 1354-1355).

H. Hopf. *a*) Differentialgeometrie und topologische Gestalt (*Jahresb. d. deutsch. Math. Ver.*, XLI, 1932, p. 209-229),
b) Géométrie infinitésimale et Topologie (*L'Enseign. math.*, 30, 1931, p. 233-240).

J. H. C. Whitehead. Locally homogeneous spaces in differential Geometry (*Ann. of Math.*, 2, 33, 1932, p. 681-687).

Sur les formes spatiales de Clifford-Klein, consulter la bibliographie dans H. Hopf, *a*) ou *b*).

/18/

SUR LES APPLICATIONS CONTINUES D'UN ESPACE DANS UN ESPACE FIBRÉ OU DANS UN REVÊTEMENT;

PAR M. CHARLES EHRESMANN.

1. Introduction. — Dans le présent Mémoire, je généralise un résultat indiqué dans une Note aux *Comptes rendus* (1) et qui peut s'énoncer sommairement de la façon suivante :

Soit E un espace fibré et B son espace de base; si une application continue f d'un complexe fini K dans B est la projection d'une application continue f' de K dans E, toute déformation continue de f est la projection d'une déformation continue de f'.

Le théorème 1 ci-dessous affirme que ce résultat est encore valable en supposant que K est un complexe quelconque (pas nécessairement fini). Le théorème 2 concerne le cas particulier où E est un revêtement de B. Le résultat précédent est alors valable en supposant que K est un espace topologique quelconque. B. Eckmann (2) a démontré indépendamment la proposition analogue correspondant aux hypothèses suivantes : E et K sont des espaces métriques compacts; l'espace E n'est pas muni d'une fibration, mais d'une partition *rétractile*.

J'indiquerai une série de résultats, en partie connus, qui sont des applications presque immédiates des théorèmes 1 et 2. Il s'agit surtout de conditions pour qu'un espace fibré soit isomorphe à un produit topologique, pour qu'une application dans B soit inessentielle ou pour que deux applications soient homotopes. Le théorème 3 donne une caractérisation des classes d'applications d'un espace A dans un espace localement euclidien ou localement non euclidien hyperbolique, en particulier dans une surface quelconque à l'exception de la sphère et du plan projectif.

---

(1) C. EHRESMANN et J. FELDBAU, *Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés* (*C. R. Acad. Sc.*, 211, 1941, p. 945-948).

(2) B. ECKMANN, *Zur Homotopietheorie gefaserter Räume* (*Commentarii math. helv.*, 1941-1942, p. 141-192).

La terminologie et les notations sont celles des *Éléments de Mathématique* de N. Bourbaki [1].

2. **Un théorème sur les espaces fibrés et ses applications.** — Rappelons la définition suivante de la notion d'espace fibré :

Définition 1. — Soit r une relation d'équivalence dans un espace topologique E; soient B l'espace quotient E/r et p la projection canonique de E sur B. Désignons par F_x la classe d'équivalence $\overset{-1}{p}(x)$ correspondant à $x \in B$. Supposons que toutes les classes d'équivalence soient homéomorphes à un espace topologique F. Chaque classe F_x sera appelée une fibre et F sera appelé la fibre type. L'espace E muni de la relation d'équivalence r sera appelé espace fibré et B son espace de base ou espace des fibres, lorsque la condition suivante sera vérifiée : Tout point x de B admet un voisinage U_x, appelé voisinage distingué, tel qu'il existe un homéomorphisme de $\overset{-1}{p}(U_x)$ sur le produit topologique $U_x \times F$ appliquant F_y sur $\{y\} \times F$ pour tout $y \in U_x$.

Si p est la projection canonique de l'espace fibré E sur l'espace de base B et f' une application d'un espace K dans E, l'application composée $f = p \circ f'$ de K dans B sera appelée *projection* dans B de f'.

Rappelons encore qu'une *déformation* d'une application continue f de K dans B est une famille $(f_t)_{t \in I}$ d'applications continues de K dans B telle que $f_0 = f$ et que l'application φ de $K \times I$ dans B, définie par $\varphi(x, t) = f_t(x)$, $x \in K$, $t \in I$, soit continue, I désignant l'intervalle $[0, 1]$ de la droite numérique. Lorsque les restrictions de f_t et de f à une partie K' de K sont identiques, quel que soit $t \in I$, on a une *déformation modulo* K'. Les applications f_0 et f_1 sont dites *homotopes modulo* K', lorsqu'il existe une déformation $(f_t)_{t \in I}$ modulo K' de f_0 à f_1.

Théorème 1. — Soit f' une application continue d'un complexe simplicial K dans l'espace fibré E et soit $f = p \circ f'$ la projection

---

[1] Paris, Hermann, 1939, 1940, 1942.

de f' dans B. En désignant par g et g' respectivement les restrictions de f et f' à un sous-complexe L de K, soit $(g'_t)_{t\in I}$ une déformation de g' dont la projection dans B est la déformation $(g_t)_{t\in I}$ de g (c'est-à-dire $g_t = p \circ g'_t$ pour tout $t \in I$). Étant donnée une déformation $(f_t)_{t\in I}$ de f telle que la restriction de f_t à L soit g_t, il existe une déformation $(f'_t)_{t\in I}$ de f' telle que sa projection dans B soit la déformation $(f_t)_{t\in I}$ et que la restriction de f'_t à L soit g'_t.

Démontrons d'abord le théorème dans le cas particulier suivant : le complexe K est formé par un simplexe e^n, de dimension n, et par l'ensemble de ses faces ; L est donc formé par un ensemble de faces de e^n.

La déformation $(f_t)_{t\in I}$ est définie par une application continue φ de $K \times I$ dans B. On peut trouver une subdivision simpliciale K′ de K et une subdivision de I en r intervalles $I_k = \left[\frac{k-1}{r}, \frac{k}{r}\right]$, où k est un entier de l'intervalle $[1, r]$, telles que, pour tout simplexe e_i^n de K′ et pour tout entier $k \in [1, r]$, l'image par φ de $e_i^n \times I_k$ soit contenue dans un voisinage distingué d'un point de B. En effet, l'ensemble des images réciproques par φ des voisinages distingués ouverts de B forme un recouvrement de $K \times I$ par des ensembles ouverts. Si e^n est supposé plongé dans R^n, l'espace $e^n \times I$ peut être considéré comme un sous-espace, appelé prisme, de l'espace numérique $R^n \times R = R^{n+1}$. C'est donc un espace métrique compact, la métrique étant la métrique euclidienne induite. Par suite il existe (¹) un nombre $\tau > 0$ tel que toute partie de $e^n \times I$, de diamètre $\leqq \tau$, soit contenue au moins dans un des ensembles ouverts du recouvrement considéré de $K \times I$. On peut bien trouver une subdivision K′ de K et un entier r tels que les diamètres de tous les ensembles $e_i^n \times I_k$ soient $\leqq \tau$, ce qui démontre notre affirmation.

Les simplexes de dimension n de K′ seront désignés par e_i^n, où l'indice i est un entier quelconque de l'intervalle $[1, a]$, a entier. Soit $M_{h,j}$ la réunion des produits $e_i^n \times I_k$ tels que $k \leqq h - 1$, $i \leqq a$, où $k = h$, $i \leqq j$, les entiers h et j vérifiant les conditions $1 \leqq h \leqq r$.

(¹) *Voir* Alexandroff-Hopf, *Topologie*, I, p. 100, Théorème IV.

$1 \leqq j \leqq a$. L'ensemble $M_{h,a}$ sera aussi désigné par $M_{h+1,0}$ et la partie vide de $K' \times I$ sera désignée par $M_{1,0}$. Nous allons définir par récurrence une application continue φ' de $K' \times I$ dans E telle que $\varphi = p \circ \varphi'$ et que la restriction de φ' à $L \times I$ soit l'application ψ' correspondant à la déformation donnée $(g'_t)_{t \in I}$. Soit $\varphi_{h,j}$ la restriction de φ à $M_{h,j}$. Soit $N_{h,j}$ l'intersection de $M_{h,j}$ avec $L \times I$ et soit $\psi'_{h,j}$ la restriction de ψ' à $N_{h,j}$. Supposons qu'on ait défini une application continue $\varphi'_{h,j}$ de $M_{h,j}$ dans E telle que $\varphi_{h,j} = p \circ \varphi'_{h,j}$ et que la restriction de $\varphi'_{h,j}$ à $N_{h,j}$ soit $\psi'_{h,j}$. En supposant $0 \leqq j \leqq a - 1$, définissons un prolongement $\varphi'_{h,j+1}$ de $\varphi'_{h,j}$, défini dans $M_{h,j+1}$, tel que $\varphi_{h,j+1} = p \circ \varphi'_{h,j+1}$ et que la restriction de $\varphi'_{h,j+1}$ à $N_{h,j+1}$ soit $\psi'_{h,j+1}$. Il suffit de définir une application continue $\varphi''_{h,j+1}$ de $e^n_{j+1} \times I_h$ dans E telle que : 1° $p \circ \varphi''_{h,j+1} =$ restriction $\overline{\varphi}_{h,j+1}$ de φ à $e^n_{j+1} \times I_h$; 2° $\varphi''_{h,j+1}$ coïncide avec $\varphi'_{h,j}$ sur l'intersection de $e^n_{j+1} \times I_h$ avec $M_{h,j}$, et coïncide avec ψ' sur l'intersection de $e^n_{j+1} \times I_h$ avec $L \times I$. La condition 2° exprime que $\varphi''_{h,j+1}$ est un prolongement au prisme $e^n_{j+1} \times I_h$ d'une application continue donnée $\theta_{h,j+1}$ d'un certain sous-complexe $M''_{h,j+1}$ de ce prisme. Ce sous-complexe, lorsqu'il est différent du prisme tout entier, est formé de la base *inférieure* $e^n_{j+1} \times \left\{ \frac{h-1}{r} \right\}$ et d'un ensemble de faces latérales de ce prisme. L'application $p \circ \theta_{h,j+1}$ est la restriction de φ à $M''_{h,j+1}$. Comme le prisme est appliqué par φ dans un voisinage distingué U d'un point de B, il sera appliqué par $\varphi''_{h,j+1}$ dans $\overset{-1}{p}(U)$, qu'on peut identifier avec $U \times F$. Soit p' la projection canonique de $U \times F$ sur F. L'application $\varphi''_{h,j+1}$ sera définie lorsqu'on aura défini les deux applications continues $p \circ \varphi''_{h,j+1}$ et $p' \circ \varphi''_{h,j+1}$. Or $p \circ \varphi''_{h,j+1}$ est l'application connue $\overline{\varphi}'_{h,j+1}$. L'application $p' \circ \varphi''_{h,j+1}$ doit être un prolongement continu au prisme de l'application connue $p' \circ \theta_{h,j+1}$. D'après le lemme que nous démontrerons un peu plus loin, $M''_{h,j+1}$ est un rétracte du prisme; c'est-à-dire il existe une application continue π du prisme sur $M''_{h,j+1}$ telle que sa restriction à $M''_{h,j+1}$ soit l'application identique. L'application $p' \circ \theta_{h,j+1} \circ \pi$ est un prolongement au prisme de $p' \circ \theta_{h,j+1}$. Le couple d'applications $(\overline{\varphi}_{h,j+1}, p' \circ \theta_{h,j+1} \circ \pi)$ définit une application $\varphi''_{h,j+1}$ vérifiant les conditions (1°) et (2°). La réunion des deux applications $\varphi'_{h,j}$ et $\varphi''_{h,j+1}$ définit l'application continue cherchée $\varphi'_{h,j+1}$.

La définition précédente s'applique lorsque $h = 1$ et $j = 0$, $\varphi'_{1,0}$ désignant l'application *vide* (c'est-à-dire de la partie vide $M_{1,0}$). Par récurrence nous avons donc défini une application φ' de $K' \times I$ dans E, qui détermine une déformation $(f'_t)_{t \in I}$ vérifiant les conditions de l'énoncé.

Démontrons maintenant le théorème en supposant le complexe simplicial K absolument quelconque. Soit φ l'application de $K \times I$ dans B qui définit la déformation donnée $(f_t)_{t \in I}$ et soit ψ' l'application de $L \times I$ dans E qui définit la déformation donnée $(g'_t)_{t \in I}$. Soit A l'ensemble des applications dans E vérifiant les conditions suivantes :

1. Chaque application $a \in A$ est définie dans $M \times I$, où M est un sous-complexe arbitraire de K.
2. L'application $p \circ a$ est la restriction de φ à $M \times I$.
3. Les restrictions de a et de ψ' à $L' \times I$, où $L' = M \cap L$, sont identiques.

L'ensemble A est ordonné par la relation $a \subset a_1$ qui signifie que a_1 est un prolongement de a. L'ensemble ordonné A est inductif ([1]). En effet, soit A' une partie totalement ordonnée de A et soit $M' \times I$ la réunion de l'ensemble des parties de $K \times I$ dans lesquelles sont définies les applications appartenant à A'. M' est un sous-complexe de K, car c'est une réunion de sous-complexes. Soit b l'application de $M' \times I$ dans E qu'on peut appeler réunion de la famille d'applications A' et qui est définie de la façon suivante : $b(x) = a(x)$, quel que soit $x \in M' \times I$ et quel que soit $a \in A'$ tel que $a(x)$ soit défini ; l'élément $b(x)$ est bien unique, car si $a(x)$ et $a'(x)$ sont définis et si a et a' appartiennent à A', on a $a(x) = a'(x)$ en remarquant que $a \subset a'$ ou $a' \subset a$. L'application b vérifie les trois conditions (1), (2) et (3) ; c'est évidemment la borne supérieure de A' dans A. L'existence de cette borne supérieure signifie que A est inductif. En vertu du théorème de Zorn, l'ensemble A possède au moins un élément maximal.

Soit φ' un élément maximal de A. Supposons φ' défini dans $K_1 \times I$ et montrons que $K_1 = K$. Soit e^n un simplexe quelconque de K. Soit L_1 le sous-complexe de e^n formé par

---

[1] *Voir* Bourbaki, *Th. des Ensembles* (fasc. de Résultats), p. 36 et 37.

$(K_1 \cap e^n) \cup (L \cap e^n)$. Soit ψ'_1 l'application continue de $L_1 \times I$ dans E qui coïncide avec φ' sur $(K_1 \cap e^n) \times I$ et avec ψ' sur $(L \cap e^n) \times I$; ces deux conditions sont compatibles, parce que φ' vérifie la condition (3). D'après le cas particulier du théorème 1, déjà démontré ci-dessus, il existe une application continue φ'_1 de $e^n \times I$ dans E telle que $p \circ \varphi'_1$ soit la restriction de φ à $e^n \times I$ et que la restriction de φ'_1 à $L_1 \times I$ soit égale à ψ'_1. Comme les restrictions de φ' et φ'_1 à $(K_1 \cap e^n) \times I$ sont identiques, la réunion des applications φ' et φ'_1 définit une application φ'' de $K_2 \times I$ dans E, où $K_2 = K_1 \cup e^n$. Cette application φ'' est continue, ses restrictions aux deux ensembles fermés $K_1 \times I$ et $e^n \times I$ étant continues. Elle vérifie d'autre part les conditions (1), (2) et (3) et prolonge φ'. Comme φ' est maximal, on a $\varphi' = \varphi''$. Donc $K_2 = K_1$, c'est-à-dire e^n appartient à K_1. Donc $K_1 = K$. L'application φ' définit bien une déformation de f' vérifiant les conditions de l'énoncé du théorème.

Dans la démonstration précédente nous avons utilisé le lemme suivant :

Lemme. — Soit e^n un simplexe dans R^n et considérons le prisme $e^n \times I$ de $R^n \times R = R^{n+1}$. Soit M un sous-complexe du prisme, formé par la réunion de la base inférieure $e^n \times \{0\}$ et d'un ensemble de faces latérales $e_i^r \times I$, où e_i^r est une face de dimension r de e^n. Il existe une application continue π du prisme $e^n \times I$ sur M telle que la restriction de π à M soit l'application identique.

On définit facilement une suite de $p+1$ sous-complexes M_k du prisme $e^n \times I$, l'indice k étant un entier quelconque de l'intervalle $[0, p]$, cette suite vérifiant les conditions suivantes : 1° $M_k = M_{k+1} \cup (e_k \times I)$, où e_k est une face de e^n. L'intersection de M_{k+1} avec $e_k \times I$ est la réunion de la base inférieure $e_k \times \{0\}$ et de toutes les faces $e_i \times I$ telles que $e_i \subset e_k$ et $e_i \neq e_k$; 2° $M_0 = e^n \times I$ et $M_p = M$. On peut définir une application π_k de M_k sur M_{k+1} telle que sa restriction à M_{k+1} soit l'application identique. En effet, soit c_k le point $(g_k, 2)$ de $R^n \times R$, où g_k est le centre de gravité de e_k. La droite passant par g_k et par $x \in M_k$ rencontre M_{k+1} en un point unique $\pi_k(x)$. L'application π_k qui fait correspondre à x le point $\pi_k(x)$ possède la propriété indiquée. L'application composée $\pi = \pi_{p-1} \circ \pi_{p-2} \circ \ldots \circ \pi_1 \circ \pi_0$ est une application de $e^n \times I$ sur M dont la restriction à M est l'application identique.

Remarque. — Dans le cas particulier où la déformation donnée de g' est la déformation constante (c'est-à-dire $g'_t = g'$, quel que soit $t \in I$), le théorème 1 peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Soit f' une application continue du complexe K dans l'espace fibré E et soit $f = p \circ f'$ sa projection dans l'espace de base B. En désignant par $\dot{f}'$ et $\dot{f}$ les classes d'homotopie de f' et de f modulo un sous-complexe L de K, on a $\dot{f} = p \circ \dot{f}'$.

Le théorème 1 admet de nombreuses applications. Ainsi il sert à établir les relations entre les groupes d'homotopie des espaces E, B et F, relations indiquées dans la note citée plus haut et démontrées avec des hypothèses différentes dans le mémoire cité de B. Eckmann. Nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 1. — Si E est un espace fibré et B son espace de base, toute application continue inessentielle du complexe K dans B est projection d'une application inessentielle de K dans E. En particulier, si K est contractile en un point, toute application continue de K dans B est projection d'une application continue de K dans E.

En effet, une application inessentielle est par définition une application homotope à une application constante. Or toute application constante f de K dans B est projection d'une application constante f' de K dans E. Toute application homotope à f est donc projection d'une application homotope à f'. De plus, si K est contractile en un point, toute application continue de K dans B est inessentielle.

Par exemple, *toute application continue dans* B *d'une boule fermée ou ouverte est projection d'une application dans* E. En particulier, *tout chemin* (1) *dans* B *est la projection dans* B *d'un*

(1) Un chemin dans B est une application continue dans B de l'intervalle I. Un chemin c est dit fermé lorsque $c(0) = c(1)$; on peut le considérer aussi comme une application du cercle S^1.

chemin dans E. Rappelons d'ailleurs que *si la fibre* F *est connexe par arcs* ([1]), *tout chemin fermé dans* B *est la projection d'un chemin fermé dans* E. Il suffit, en effet, de considérer le chemin fermé dans B comme le produit de deux chemins a et b tels que $a(1) = b(0)$, $b(1) = a(0)$, $a(0) \neq b(0)$, le chemin b étant un chemin dans un voisinage distingué U de $a(0)$. Le chemin a est la projection d'un chemin a' dans E. Nous pouvons identifier $p^{-1}(U)$ avec $U \times F$. Il existe un chemin c dans F tel que $c(0)$ soit la projection canonique de $a'(1)$ dans F et que $c(1)$ soit la projection canonique de $a'(0)$ dans F. L'ensemble des chemins b et c définit un chemin b' dans E se projetant suivant b dans B. Le produit des chemins a' et b' est un chemin fermé dans E se projetant suivant le chemin fermé donné dans B. Le théorème 1 entraîne donc aussi le corollaire suivant :

Corollaire 2. — Si E est un espace fibré dont la fibre F est connexe par arcs et si K est un complexe contractile en un cercle, toute application de K dans l'espace de base B est la projection d'une application de K dans E.

Le corollaire 1 montre que tout espace fibré dont l'espace de base B est un complexe contractile en un point admet une section ([2]). Il en est de même si la fibre F est connexe par arcs et si B est un complexe contractile en un cercle. On en déduit la proposition suivante :

Proposition 1. — Tout espace fibré E dont l'espace de base B est un complexe contractile en un point est isomorphe au produit topologique $B \times F$, où F est la fibre type.

Pour la démonstration de cette proposition, je renvoie à ma note « Espaces fibrés associés » ([3]), où elle est démontrée dans le

---

([1]) Un espace est dit connexe par arcs, lorsqu'il existe un chemin dont l'origine et l'extrémité sont deux points donnés arbitraires.

([2]) Une section de l'espace fibré E est l'image de l'espace de base B par une application continue f de B dans E telle que $p \circ f$ soit l'application identique de B. Une section est aussi appelée système continu de représentants de l'ensemble des fibres.

([3]) *C. R. Acad. Sc.*, 213, 1941, p. 762-764. Cette Note contient aussi la définition de la notion d'isomorphisme.

cas où B est un complexe fini. La notion d'espace fibré utilisée dans cette Note est d'ailleurs plus précise que celle qui est définie plus haut. C'est la notion d'*espace fibré à groupe structural* G, où G est un groupe d'automorphismes de la fibre F. On considère sur G une topologie telle que l'application $(s, x) \to s(x)$, où $x \in F$ et $s \in G$, soit une application continue de $G \times F$ sur F. On peut alors faire correspondre à tout espace fibré à groupe structural G un « espace fibré associé principal », qui a le même espace de base B et dont la fibre type est l'espace topologique G. Pour que l'espace fibré donné soit isomorphe au produit topologique $B \times F$, il faut et il suffit que l'espace fibré associé principal admette une section. La proposition 1 en résulte immédiatement.

Par exemple, tout espace fibré dont l'espace de base est une boule ouverte est isomorphe à un produit topologique; remarquons qu'il admet donc un prolongement formant un espace fibré sur la boule fermée.

On démontre de la même façon la proposition suivante :

Proposition 2. — Tout espace fibré à groupe structural G, tel que G soit connexe par arcs et que l'espace de base B soit contractible en un cercle, est isomorphe au produit topologique $B \times F$, où F est la fibre type.

3. **Cas particuliers des revêtements.** — La notion de revêtement peut se définir de la façon suivante :

Définition 2. — Étant donnés un espace topologique E et une application continue p de E sur un espace topologique B, l'ensemble (E, p) est appelé revêtement de B, lorsque : 1° quel que soit $x \in B$, l'ensemble $\overset{-1}{p}(x)$ est discret dans E; 2° tout point $x \in B$ admet un voisinage V, appelé voisinage distingué, tel que $\overset{-1}{p}(V)$ admette un homéomorphisme sur le produit topologique $V \times \overset{-1}{p}(x)$ appliquant $\overset{-1}{p}(y)$ sur $\{y\} \times \overset{-1}{p}(x)$, pour tout $y \in V$.

Le voisinage V' de $x' \in \overset{-1}{p}(x)$ qui correspond à $V \times \{x'\}$ dans un tel homéomorphisme s'appellera voisinage distingué de x'.

On voit facilement que, si B est connexe, tous les ensembles $\overset{-1}{p}(x)$ ont même puissance et sont donc homéomorphes à un même espace discret F. Le revêtement (E, p) est alors un espace fibré dont la fibre est un espace discret.

Le théorème 1 s'applique aux revêtements; d'une façon plus précise, on a le théorème suivant :

Théorème 2. — *Soit (E, p) un revêtement de B et soit A un espace topologique quelconque. Si l'application continue f de A dans B est la projection $p \circ f'$ d'une application continue f' de A dans E, toute déformation $(f_t)_{t \in I}$ de f est la projection d'une déformation bien déterminée $(f'_t)_{t \in I}$ de f'.*

On démontre d'abord la proposition suivante, qui n'est qu'un cas très particulier du théorème 2.

Proposition 3. — *Tout chemin c dans B est la projection d'un chemin bien déterminé c' dans E, tel que l'origine $c'(0)$ soit un point donné de E se projetant sur l'origine $c(0)$ de c.*

Si le chemin c est contenu dans un voisinage distingué V de $c(0)$, soit V' un voisinage distingué de $c'(0)$ se projetant sur V. La restriction de p à V' est un homéomorphisme p' de V' sur V. Le chemin c' sera une application de I dans V', car V' contient la composante connexe de $c'(0)$ relativement à $\overset{-1}{p}(V)$. Donc c' sera défini par $(p')^{-1} \circ c$.

Si c est quelconque, on peut subdiviser I en r intervalles partiels $I_h = \left[\frac{h-1}{r}, \frac{h}{r}\right]$ tels que la restriction c_h de c à I_h soit contenue dans un voisinage distingué de B, quel que soit l'entier $h \in [1, r]$. Par récurrence on définit alors un chemin c' bien déterminé se projetant sur c.

Corollaire. — *(E, p) étant un revêtement de B et A étant un espace connexe par arcs, s'il existe une application continue f' de A dans E telle que $p \circ f'$ soit une application donnée f de A dans B et que $f'(x_0)$, où $x_0 \in A$, soit un point donné de E, l'application f' est déterminée d'une façon unique.*

Démonstration du théorème 2. — La déformation donnée $(f_t)_{t \in I}$ est définie par une application φ de $A \times I$ dans B. Soit φ_x la restriction de φ à $\{x\} \times I$, où $x \in A$. Soit q_x l'application de I sur $\{x\} \times I$ telle que $q_x(t) = (x, t)$. L'application $\varphi_x \circ q_x$ est un chemin c_x d'origine $f(x)$, qui est projection d'un chemin déterminé c'_x d'origine $f'(x)$. Soit φ' l'application de $A \times I$ dans E telle que $\varphi'(x, t) = c'_x(t)$. S'il existe une déformation $(f'_t)_{t \in I}$ de f' telle que $f_t = p \circ f'_t$, celle-ci est définie par φ'. Il suffit donc de démontrer que φ' est une application continue.

Supposons que φ' soit continu en tout point (x, t), où x est un point fixe de A et t un point quelconque de I vérifiant la condition $t < t_1 \leqq 1$. Montrons que φ' est aussi continu dans tout un voisinage du point (x, t_1). En effet, il existe un voisinage $W \times [t_2, t_3]$ de (x, t_1) dans $A \times I$ tel que son image par φ soit contenue dans un voisinage distingué ouvert V de $\varphi(x, t_1)$ et que $\varphi'(W \times \{t_2\})$ soit contenu, à cause de la continuité de φ' au point (x, t_2), dans un voisinage distingué V' de $\varphi'(x, t_2)$ se projetant sur V. D'après le raisonnement utilisé pour démontrer la proposition 3, la restriction de φ' à $W \times [t_2, t_3]$ est la restriction à $W \times [t_2, t_3]$ de l'application $(p')^{-1} \circ \varphi$, où p' est l'homéomorphisme canonique de V' sur V. Supposons W ouvert dans A et soit U l'intérieur de l'intervalle $[t_2, t_3]$ relativement à I. L'application φ' est alors continue en tout point de $W \times U$. Le raisonnement s'applique aussi au cas où $t_1 = 0$. Alors on a $t_2 = 0$ et il faut utiliser la continuité de f' au point $(x, 0)$. Soit J le plus grand intervalle contenu dans I et contenant le point O, tel que φ' soit continu au point (x, t), quel que soit $t \in J$. Ce qui précède montre que J est ouvert relativement à I et contient sa borne supérieure; donc $J = I$.

Du théorème 2 on déduit immédiatement les corollaires suivants :

Corollaire 1. — Pour qu'une application f de A dans B soit inessentielle, il faut et il suffit qu'elle soit la projection $p \circ f'$ d'une application inessentielle f' de A dans E, où (E, p) est un revêtement quelconque de B.

En particulier, si A est contractile en un point, toute application continue de A dans B est la projection d'une application continue de A dans E.

Corollaire 2. — Soit (E, p) un revêtement de B tel que toute application continue de A dans E soit inessentielle. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'application continue f de A dans B soit inessentielle, est que f soit la projection d'une application continue de A dans E.

Par exemple, ce corollaire s'applique dans les cas suivants :

1. A est un espace quelconque, E (qui sera alors le revêtement universel) est contractile en un point. En particulier, $E = R^n$. L'espace B sera, par exemple, le cercle S^1, ou un espace localement euclidien ou localement non euclidien hyperbolique, ou une surface quelconque à l'exception de la sphère S^2 et du plan projectif.
2. Le revêtement E est la sphère S^n, de dimension n. L'espace A est de dimension strictement inférieure à n.

Le corollaire 2 conduit à poser le problème suivant :

Reconnaître si l'application continue f de A dans B est la projection d'une application continue de A dans un revêtement donné de B.

Nous pouvons généraliser le problème de la façon suivante. Soit (A', p, a') un revêtement pointé de A, c'est-à-dire un revêtement sur lequel on s'est donné un point $a' \in A'$ tel que $p(a') = a$. Soit (B', q, b') un revêtement pointé de B, avec $q(b') = b$. On dira qu'une application continue f de A dans B est la *projection* d'une application continue f' de (A', p, a') dans (B', q, b') lorsqu'on a : $f \circ p = q \circ f'$ et $f'(a') = b'$. En particulier, soient (A', p, a') et (A'', q, a'') deux revêtements pointés de A tels que $p(a') = q(a'') = a \in A$; on dira que (A', p, a') *recouvre* (A'', q, a''), lorsque l'application identique de A est la projection d'une application continue de (A', p, a') dans (A'', q, a''). Posons alors le problème suivant :

Étant donnés un revêtement pointé (A', p, a') de A et une application continue f de A dans B, déterminer tous les revêtements pointés (B', q, b') de B tels que f soit la projection d'une application continue f' de (A', p, a') dans (B', q, b'). De même, étant donnés f et un revêtement pointé (B', q, b') de B, déterminer tous les revêtements pointés (A', p, a') de A tels que f soit la projection d'une application continue f' de (A', p, a') dans (B', q, b').

Désignons par $\Pi(E, x)$ le groupe de Poincaré d'un espace E au point x, c'est-à-dire le groupe des classes ([1]) de chemins fermés d'origine x. L'application f définit un homomorphisme $\bar{f}$ du groupe $\Pi(A, a)$ dans le groupe $\Pi(B, b)$, où $b = f(a)$. L'application p définit un isomorphisme de $\Pi(A', a')$ sur un sous-groupe $\Pi'(A, a)$ de $\Pi(A, a)$, résultat qui se déduit facilement du théorème 2. De même, q définit un isomorphisme de $\Pi(B', b')$ sur un sous-groupe $\Pi'(B, b)$ de $\Pi(B, b)$. Supposons A et B connexes et localement simplement connexes ([2]). Alors on sait qu'à tout sous-groupe $\Pi'(A', a)$ de $\Pi(A, a)$ correspond inversement un revêtement pointé (A', p, a') défini à un isomorphisme près. Un point $x' \in A'$ correspond d'une façon biunivoque à une classe de chemins dans A, d'origine a et de même extrémité x et équivalents suivant $\Pi'(A, a)$: deux chemins l et l', d'origine a et d'extrémité x, sont dits équivalents suivant $\Pi'(A, a)$ lorsque la classe du chemin fermé $l'l^{-1}$ est un élément de $\Pi'(A, a)$. Le point a' correspond à la classe du chemin réduit au point a. Si V est un voisinage simple ([2]) de x, l'ensemble des classes suivant $\Pi'(A, a)$ des chemins lc, où c est un chemin quelconque dans V et d'origine x, formera un voisinage de la classe de l; au système fondamental de voisinages simples de x correspond un système fondamental de voisinages de la classe de l. Pour que le revêtement associé à $\Pi'(A, a)$ recouvre le revêtement associé à un autre sous-groupe $\Pi''(A, a)$, il faut et il suffit que $\Pi'(A, a) \subset \Pi''(A, a)$.

S'il existe une application f' de (A', p, a') dans (B', q, b') dont la projection est f, toute classe de chemins d'origine a et équivalents suivant $\Pi'(A, a)$ est appliquée par f sur un ensemble de chemins d'origine b et équivalents suivant $\Pi'(B, b)$; donc $\bar{f}\big(\Pi'(A, a)\big) \subset \Pi'(B, b)$. Réciproquement, si l'application f possède cette dernière propriété, elle détermine une application de l'ensemble des classes de chemins suivant $\Pi'(A, a)$ dans l'ensemble

([1]) Deux chemins dans E sont de même classe, lorsqu'ils sont homotopes modulo le sous-ensemble de I formé par les points 0 et 1.

([2]) Un espace E sera dit localement simplement connexe, lorsque tout point admet un système fondamental de voisinages (appelés simples) dont chacun est connexe par arcs et possède la propriété suivante : tout chemin fermé contenu dans ce voisinage est contractile en un point dans E.

des classes de chemins suivant $\Pi'(B, b)$, qui correspond à une application continue bien déterminée f' de (A', p, a') dans (B', q, b') dont la projection est f. Le problème posé est donc résolu par la proposition suivante :

Proposition 4. — Étant donnés f et le revêtement (A', p, a'), soit $\Pi_0(B, b) = \bar{f}\left(\Pi'(A, a)\right)$ et soit (B_0, q_0, b_0) le revêtement pointé de B associé à $\Pi_0(B, b)$, qui est un sous-groupe de $\Pi(B, b)$. Les revêtements pointés (B', q, b') de B tels que f soit projection d'une application f' de (A', p, a') dans $(B' q, b')$ sont ceux qui sont recouverts par (B_0, q_0, b_0). De même, étant donnés f et le revêtement (B', q, b'), soit (A_0, p_0, a_0) le revêtement pointé de A associé au sous-groupe $\Pi_0(A, a)$ de $\Pi(A, a)$, image réciproque par $\bar{f}$ de $\Pi'(B, b)$. Les revêtements pointés (A', p, a') de A tels que f soit projection d'une application f' de $(A' p, a')$ dans (B', q, b') sont ceux qui recouvrent (A_0, p_0, a_0).

Corollaire 1. — Si $(\hat{A}, p, a')$ est un revêtement universel pointé de A et $(\hat{B}, q, b')$ un revêtement universel pointé de B, toute application continue f de A dans B telle que $f\left(p(a')\right) = q(b')$ est la projection d'une application continue bien déterminée $\hat{f}$ de $(\hat{A}, p, a')$ dans $(\hat{B}, q, b')$.

En particulier, tout automorphisme f de A tel que $f(a) = b$ est la projection d'un automorphisme $\hat{f}$ de $\hat{A}$ appliquant $a' \in \overset{-1}{p}(a)$ sur $b' \in \overset{-1}{p}(b)$. On voit facilement que ce résultat est encore valable, si $(\hat{A}, p)$ désigne un revêtement de A associé à un sous-groupe caractéristique de $\Pi(A, a)$, c'est-à-dire qui est invariant par tout automorphisme de $\Pi(A, a)$. Si A est un groupe topologique connexe, les remarques précédentes conduisent à la définition des groupes revêtements de A. On sait que $\Pi(A, a)$ est alors abélien. Si (A', p) est un revêtement quelconque de A, le groupe des automorphismes de A' qui se projettent sur les translations à gauche du groupe A est simplement transitif et permet de définir sur A' une structure de groupe topologique, après avoir choisi comme élément neutre un point quelconque se projetant sur l'élément neutre de A. Les groupes topologiques ainsi obtenus sont les groupes revêtements de A.

Corollaire 2. — Si A est simplement connexe, toute application continue f de A dans B est la projection d'une application f' de A dans un revêtement quelconque de B.

(B′, q) étant un revêtement de B, soit H′ l'ensemble des classes d'homotopie modulo $a \in$ A des applications f' de A dans B′ telles que $f'(a) = b'$; soit H l'ensemble des classes d'homotopie modulo a des applications f de A dans B telles que $f(a) = b = q(b')$. Désignons les classes correspondant à f et f' par $\dot{f}$ et $\dot{f}'$. Si A est simplement connexe, l'application $\dot{f}' \rightarrow q \circ \dot{f}'$ est une application biunivoque de H′ *sur* H, en vertu du corollaire précédent et du théorème 2. Si l'on suppose seulement que A est connexe par arcs, c'est une application biunivoque de H′ *dans* H, d'après le corollaire de la proposition 3. En particulier, si A est la sphère S^r de dimension $r > 1$, on obtient le *théorème de Hurewicz* :

Les groupes d'homotopie, correspondant à la dimension $r > 1$, de B au point b et d'un revêtement quelconque B′, en un point b' se projetant sur b, sont isomorphes.

En vertu du corollaire 2 ci-dessus et du corollaire 2 du théorème 2, on a la proposition suivante :

Proposition 5. — Si A est simplement connexe, toute application de A dans un espace B qui admet R^n comme revêtement universel est inessentielle.

Par exemple, l'espace B peut être un espace localement euclidien ou non euclidien hyperbolique, en particulier le tore T^r ou une surface quelconque à l'exception de la sphère S^2 et du plan projectif.

De la proposition 4 et du corollaire 2 du théorème 2 on déduit encore la proposition suivante :

Proposition 5′. — Si B admet R^n comme revêtement universel, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f de A dans B soit inessentielle est que l'homomorphisme $\bar{f}$ associé à f applique $\Pi(A, a)$ sur l'élément neutre de $\Pi\big(B, f(a)\big)$.

Proposition 6. — Soit B une variété admettant la sphère S^n comme revêtement à r feuillets (c'est-à-dire l'ensemble des points de S^n qui se projettent sur un point B est formé de r points) et soit A une pseudo-variété close, simplement connexe et de dimension n. Il existe une infinité de classes d'applications de A dans B. Si B est orientable, la condition nécessaire et suffisante pour que deux applications continues de A dans B soient homotopes est qu'elles aient le même degré d'application; l'ensemble des degrés des applications de A dans B est l'ensemble des multiples de r.

Soit A un espace simplement connexe et B une variété admettant (S^n, p) comme revêtement à r feuillets. En désignant par $\dot{f}$ la classe d'homotopie de f, l'application $\dot{f}' \to p \circ \dot{f}'$, où f' est une application continue de A dans S^n, est une application $\bar{p}$ de l'ensemble des classes d'applications de A dans S^n *sur* l'ensemble des classes d'applications de A dans B. Si B est orientable, l'application $\bar{p}$ est biunivoque, de sorte que chaque classe d'applications de A dans B est alors caractérisée par la classe correspondante d'applications de A dans S^n. En effet, si $p \circ f' = p \circ f''$, on a $f'' = h \circ f'$, où h est un *automorphisme* du revêtement (S^n, p), c'est-à-dire un homéomorphisme de S^n sur lui-même tel que $p = p \circ h$. L'orientabilité de B entraîne que le degré d'application de h est égal à 1. En vertu du théorème de H. Hopf (1), h est donc homotope à l'application identique et par suite $\dot{f}' = \dot{f}''$. En particulier, si A est une pseudovariété de dimension n, close et simplement connexe (donc orientable), la classe de f' est caractérisée par le degré d' de f', et inversement à tout entier rationnel d', correspond une classe d'applications (théorème de Hopf). Si d est le degré de $f = p \circ f'$, on a $d = rd'$; car le degré de p est égal à r. On en déduit la proposition 6 pour le cas où B est orientable.

Si B est non orientable, il existe des automorphismes h de (S^n, p) de degré égal à -1. Si A est toujours une pseudo-variété de dimension n, close et simplement connexe, on voit que toute classe d'applications de A dans B correspond par p à deux classes d'applications de A dans S^n caractérisées par deux degrés opposés,

(1) Alexandroff-Hopf, *Topologie I* (Berlin, Springer), p. 512, théorème III.

exception faite de la classe d'applications inessentielles qui correspond à une seule classe, de degré o. Ceci montre qu'il existe encore une infinité de classes d'applications de A dans B. La classe de f est caractérisée par la valeur absolue du degré d'une application f' quelconque de A dans S^n, dont la projection $p \circ f'$ est f.

PROPOSITION 7. — Si l'application f de A dans B est la projection d'une application f' du revêtement (A', p, a') de A dans le revêtement (B', q, b') de B, toute déformation de f est la projection d'une déformation de f'.

Il suffit d'appliquer le théorème 2 à la déformation $(f_t \circ p)_{t \in I}$, si $(f_t)_{t \in I}$ est la déformation donnée de f.

Remarquons qu'à une déformation de f' ne correspond pas forcément par projection une déformation de f. Par exemple, si A et B sont des variétés orientables admettant S^n comme revêtement universel, le degré de l'application f détermine le degré, et par suite la classe, de toute application f' de S^n dans S^n dont la projection est f. Mais nous ne pouvons pas en conclure que le degré de f détermine la classe de f.

4. Caractérisation des classes d'applications dans un espace localement euclidien ou localement non euclidien hyperbolique. — Désignons encore par $\bar{f}$ l'homomorphisme du groupe de Poincaré $\Pi(A, a)$ dans le groupe de Poincaré $\Pi\big(B, f(a)\big)$ associé à une application continue f de A dans B.

PROPOSITION 8. — Soient f et f_1 deux applications homotopes de A dans B et soient $\bar{f}$ et $\bar{f}_1$ les homomorphismes associés de $\Pi(A, a)$ dans $\Pi\big(B, f(a)\big)$ et $\Pi\big(B, f_1(a)\big)$ respectivement. A toute déformation de f à f_1 est associé un isomorphisme h de $\Pi\big(B, f(a)\big)$ sur $\Pi\big(B, f_1(a)\big)$ tel que $\bar{f}_1 = h \circ \bar{f}$.

Soit $(f_t)_{t \in I}$ une déformation de f à f_1. L'application $t \to f_t(a)$ définit un chemin l (appelé chemin de déformation) reliant $f(a)$ à $f_1(a)$. Soit c un chemin fermé d'origine a. L'image de c par f est le chemin $c' = f \circ c$; l'image de c par f_1 est le chemin $c'_1 = f_1 \circ c$.

Soit x un chemin fermé quelconque d'origine $f(a)$. L'application $x \to l^{-1}xl$ détermine un isomorphisme h de $\Pi(B, f(a))$ sur $\Pi(B, f_1(a))$ que nous appellerons isomorphisme *intérieur* (¹) associé au chemin l. Montrons que les chemins c'_1 et $l^{-1}c'l$ sont de même classe. En effet, soit $c'_t = f_t \circ c$ et soit l_t le chemin $l \circ \varphi_t$, où φ_t est l'application affine de $[0, 1]$ sur $[t, 1]$. La famille de chemins $(l_t^{-1}c'_t\, l_t)_{t \in I}$ définit bien une déformation de $l^{-1}c'l$ à c'_1, laissant fixe l'origine $f_1(a)$. Il en résulte $\bar{f}_1 = h \circ \bar{f}$.

La proposition précédente admet une réciproque dans le cas où B est un espace localement euclidien complet ou localement non euclidien hyperbolique complet. Rappelons qu'un espace est dit localement euclidien complet lorsqu'il admet l'espace numérique R^n comme revêtement universel, le groupe d'automorphismes de ce revêtement étant un groupe de déplacements euclidiens de R^n. De même B est dit localement hyperbolique complet, lorsqu'il admet comme revêtement universel l'espace hyperbolique (représenté en général par l'intérieur d'une boule), le groupe d'automorphismes de ce revêtement étant un groupe de déplacements hyperboliques.

Théorème 3. — *Soit B un espace localement euclidien complet ou localement non-euclidien hyperbolique complet et soit A un espace connexe et localement simplement connexe. Pour que deux applications f et f_1 de A dans B soient homotopes, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme intérieur h de $\Pi(B, f(a))$ sur $\Pi(B, f_1(a))$ tel qu'on ait $\bar{f}_1 = h \circ \bar{f}$, où $\bar{f}$ et $\bar{f}_1$ désignent les homomorphismes de $\Pi(A, a)$ sur $\Pi(B, f(a))$ et $\Pi(B, f_1(a))$ associés à f et à f_1.*

D'après la proposition 8, la condition énoncée est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soient $(\hat{A}, p)$ et $(\hat{B}, q)$ les revêtements universels de A et B. L'application f est la projection d'une application déterminée $\hat{f}$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ telle que $\hat{f}(a') = b'$, où $a' \in p^{-1}(a)$, $b' \in q^{-1}(b)$ et $b = f(a)$. L'application $\hat{f}$ fait corres-

(¹) Le mot *intérieur* se rapporte au groupoïde formé par l'ensemble des classes de chemins dans B.

pondre à tout automorphisme g de $(\hat{A}, p)$ un automorphisme g' de $(\hat{B}, q)$ tel que $\hat{f}\circ g = g'\circ f$. En effet, soit $a'' = g(a')$ et soit g' l'automorphisme de $(\hat{B}, q)$ qui applique b' sur $b'' = \hat{f}(a'')$. Soit c' un chemin dans $\hat{A}$ reliant a' au point x'. Soit c'' le chemin $g\circ c'$. Les images par $\hat{f}$ de c' et c'', c'est-à-dire les chemins $\hat{f}\circ c'$ et $\hat{f}\circ c''$, ont la même projection dans B et par suite $g'\circ\hat{f}\circ c' = \hat{f}\circ c'' = \hat{f}\circ g\circ c'$. Donc on a $g'\big(\hat{f}(x')\big) = \hat{f}\big(g(x')\big)$, quel que soit $x' \in \hat{A}$; c'est-à-dire $\hat{f}\circ g = g'\circ\hat{f}$. La correspondance $g \to g'$ est un homomorphisme $\bar{\bar{f}}$ du groupe d'automorphismes G de $(\hat{A}, p)$ dans le groupe d'automorphismes G′ de $(\hat{B}, q)$.

Soit f_1 une deuxième application de A dans B, vérifiant la condition énoncée dans le théorème 3. En choisissant convenablement l'application $\hat{f}_1$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$, de projection f_1, l'homomorphisme $\bar{\bar{f}}_1$ associé à $\hat{f}_1$ sera identique à $\bar{\bar{f}}$. L'isomorphisme intérieur h est associé à un chemin l reliant $b = f(a)$ à $b_1 = f_1(a)$. Le chemin l est la projection d'un chemin l' reliant b' à $b'_1 \in q^{-1}(b)$ et l'application f_1 est la projection d'une application $\hat{f}_1$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ telle que $\hat{f}_1(a') = b'_1$. Soit γ' un chemin dans $\hat{A}$, d'origine a' et d'extrémité $a'' = g(a')$, et soit γ sa projection $p\circ\gamma'$, qui est un chemin fermé d'origine a. Par hypothèse les chemins $f_1\circ\gamma$ et $l^{-1}(f\circ\gamma)l$, qui sont des chemins fermés d'origine b_1, sont de même classe. Donc les chemins $\hat{f}_1\circ\gamma'$ et $l'^{-1}(\hat{f}\circ\gamma')(g'\circ l')$, de même origine b'_1 et dont les projections par q sont respectivement $f_1\circ\gamma$ et $l^{-1}(f\circ\gamma)l$, ont aussi la même extrémité b''_1. On a donc $b''_1 = \hat{f}_1(a'')$ et $b''_1 = g'(b'_1)$. Or, par définition l'automorphisme $g'_1 = \bar{\bar{f}}_1(g)$ est l'automorphisme de $(\hat{B}, q)$ qui applique b'_1 sur b''_1. Comme cet automorphisme est unique, on a $g'_1 = g'$. Donc les homomorphismes $\bar{\bar{f}}$ et $\bar{\bar{f}}_1$ sont identiques.

Supposons maintenant que $\hat{B}$ soit l'espace numérique R^n et que G′ soit un groupe de déplacements euclidiens. Soit $\hat{f}_t$ l'application de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ telle que, pour tout $x' \in \hat{A}$, on ait

$$\hat{f}_t(x') = (1 - t)\hat{f}(x') + t\hat{f}_1(x'),$$

l'addition considérée étant l'addition des vecteurs dans l'espace vectoriel R^n. Soit $g \in G$ et $g' = \bar{\bar{f}}(g)$. En tenant compte des relations $\hat{f} \circ g = g' \circ \hat{f}$ et $\hat{f}_1 \circ g = g' \circ \hat{f}_1$, on a

$$\hat{f}_t(g(x')) = (1-t)\hat{f}(g(x')) + t\hat{f}_1(g(x')) = (1-t)g'(\hat{f}(x')) + tg'(\hat{f}_1(x')).$$

En remarquant que g' est une transformation affine, on a finalement $\hat{f}_t(g(x')) = g'(\hat{f}_t(x'))$, c'est-à-dire $\hat{f}_t \circ g = g' \circ \hat{f}_t$. L'application $\hat{f}_t$ est donc compatible avec les relations d'équivalence définies dans $\hat{A}$ et $\hat{B}$ (une classe d'équivalence dans $\hat{A}$, par exemple, étant une classe d'intransitivité de G). Par passage aux quotients ([1]), on déduit donc de $\hat{f}_t$ une application continue f_t de A dans B. Comme la famille $(\hat{f}_t)_{t \in I}$ est une déformation de $\hat{f}$ à $\hat{f}_1$, la famille $(f_t)_{t \in I}$ sera une déformation de f à f_1, ce qui démontre le théorème 3 pour le cas où B est localement euclidien complet.

Dans le cas où B est l'espace hyperbolique et G' un groupe de déplacements hyperboliques, la démonstration précédente est encore valable, à condition de prendre pour $\hat{f}_t(x')$ le point du segment de droite joignant $\hat{f}(x')$ et $\hat{f}_1(x')$ tel que le rapport des distances non-euclidiennes de $\hat{f}(x')$ à $\hat{f}_t(x')$ et à $\hat{f}_1(x')$ soit égal à t.

On sait que toute variété triangulable à 2 dimensions, à l'exception de la sphère S^2 et du plan projectif, peut être munie d'une métrique riemannienne à courbure constante nulle ou négative et

---

([1]) Nous utilisons le lemme suivant, facile à démontrer.

LEMME. — *Soient* E *et* F *deux espaces topologiques, r une relation d'équivalence dans* E *et s une relation d'équivalence dans* F. *Si f' est une application continue de* E *dans* F, *compatible avec r et s (c'est-à-dire toute classe suivant r est appliquée dans une classe suivant s), l'application f de* E/r *dans* F/s *qui est déduite de f' par passage aux quotients, c'est-à-dire qui fait correspondre à une classe x suivant r la classe y suivant s contenant $f'(x)$, est une application continue de* E/r *dans* F/s. *Si $(f'_t)_{t \in I}$ est une déformation de f' telle que f'_t soit compatible avec r et s quel que soit $t \in I$ et si r est une relation d'équivalence ouverte, la famille $(f_t)_{t \in I}$, où f_t est l'application déduite de f'_t par passage aux quotients, est une déformation de f.*

Pour démontrer la deuxième partie du lemme, remarquons qu'à toute application continue φ' de $E \times I$ dans F correspond par passage aux quotients une application continue φ de $E/r \times I$ dans F/s (en supposant φ' compatible avec les relations d'équivalence $r \times i$ et s, i étant la relation d'équivalence définie par l'identité dans I). On utilise ici l'homéomorphisme canonique de $(E \times I)/r \times i$ sur $E/r \times I$ (*voir* BOURBAKI, *Top.* I, § 9, prop. 3 et rectifications à *Top.* I).

telle que l'espace de Riemann ainsi obtenu soit complet. Donc le théorème 3 s'applique lorsque B est une variété triangulable quelconque de dimension 2, à l'exception de la sphère et du plan projectif.

L'application $\hat{f}$ correspondant à f n'étant pas déterminée d'une façon unique, on voit facilement que l'homomorphisme $\bar{\bar{f}}$ n'est déterminé qu'à un automorphisme intérieur près du groupe G'. Les groupes $\Pi(A, a)$ et $\Pi(B, b)$ sont d'ailleurs isomorphes aux groupes opposés de G et G' respectivement. A l'ensemble des homomorphismes $h \circ \bar{f}$, où h est un isomorphisme intérieur quelconque de $\Pi(B, b)$ sur $\Pi(B, b_1)$, correspond précisément une classe d'homomorphismes $\Gamma' \circ \bar{\bar{f}}$ de G dans G', où Γ' est le groupe des automorphismes intérieurs de G'. En gardant les hypothèses du théorème 3, le résultat énoncé par ce théorème peut encore s'exprimer de la façon suivante :

Corollaire. — Toute classe d'applications continues de A dans B est caractérisée par une famille d'homomorphismes $\Gamma' \circ \bar{\bar{f}}$ de G dans G', où G et G' sont les groupes d'automorphismes des revêtements universels de A et de B et où Γ' est le groupe des automorphismes intérieurs de G'.

En particulier, la classe des applications inessentielles correspond à l'homomorphisme $\bar{\bar{f}}$ qui applique G sur l'élément neutre de G'. Si G' est abélien, chaque classe d'applications est caractérisée par un homomorphisme $\bar{\bar{f}}$ bien déterminé.

Ce qui précède conduit à poser la question suivante :

Étant donné un homomorphisme $\bar{\bar{f}}$ de G dans G', existe-t-il une application continue f de A dans B telle que $\bar{\bar{f}}$ soit un homomorphisme associé à f ?

On peut répondre par l'affirmative dans le cas particulier où A et B sont les tores T^r et T^n. Les revêtements universels de T^r et T^n sont alors les espaces numériques R^r et R^n, leurs groupes d'automorphismes G et G' sont des groupes de translations. Nous pouvons supposer que G est engendré par les r translations définies par les vecteurs unitaires e_i, où $i = 1, \ldots, r$, de la base canonique de R^r, et que G' est engendré par les n translations définies par les vecteurs unitaires e'_j, où $j = 1, \ldots, n$, de la base canonique de R^n. Un homomorphisme arbitraire $\bar{\bar{f}}$ de G dans G' est défini par

$$\bar{\bar{f}}(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e'_j \qquad (i = 1, \ldots, r \text{ et } a_{ij} \text{ entier}).$$

Or il existe une application linéaire homogène bien déterminée $\hat{f}$ de R^r dans R^n transformant les vecteurs e_i de la même façon que $\bar{\bar{f}}$. L'application $\hat{f}$ est compatible avec les relations d'équivalence définies par G et G' dans R^r et R^n. Par passage aux quotients on obtient une application continue f de T^r dans T^n telle que $\bar{\bar{f}}$ soit un homomorphisme de G dans G' associé à f.

Remarque. — Lorsqu'on a choisi des bases de G et G', les éléments de chaque base étant rangés dans un ordre correspondant à une orientation donnée de T^r ou de T^n respectivement, la classe d'homotopie de f est déterminée d'une façon biunivoque par une matrice (a_{ij}) à éléments entiers arbitraires, à r lignes et n colonnes. Dans le cas où $r = n$, on voit facilement que le degré de l'application f est le déterminant de la matrice. Ainsi lorsque f est une application d'un cercle orienté dans un cercle orienté, la classe de f est caractérisée par un seul nombre a, qui n'est autre que le degré de f.

Proposition 9. — A étant un espace connexe et localement simplement connexe dont le groupe de Poincaré est fini (ou plus généralement admet un système de générateurs dont chacun est d'ordre fini) et B étant un espace localement euclidien ou non-euclidien hyperbolique complet, toute application continue f de A dans B est inessentielle.

En effet, un homomorphisme $\bar{\bar{f}}$ de G dans G' associé à f applique tout élément d'ordre fini de G sur un élément d'ordre fini de G'. Or l'élément neutre de G' est le seul élément d'ordre fini de G'. En effet, soit s une transformation de $\hat{B}$ appartenant à G' et supposons s d'ordre fini. Le sous-groupe H engendré par s laisse invariant l'ensemble fini M des points transformés par H d'un point donné $m \in \hat{B}$. Alors s laisse invariant au moins un point. Si $\hat{B}$ est l'espace euclidien et G' un groupe de déplacements euclidiens, s laisse invariant le centre de gravité de M; si $\hat{B}$ est le modèle projectif de l'espace hyperbolique (c'est-à-dire $\hat{B}$ est l'intérieur d'une boule et G' est un groupe projectif laissant invariant cette boule) s laisse invariant l'enveloppe convexe de M et admet bien un point invariant, d'après le théorème du point fixe de Brouwer. Un automorphisme d'un revêtement qui admet un point fixe est nécessairement la transformation identique. Il en résulte que $\bar{\bar{f}}(G)$ se réduit à l'élément neutre de G' et par suite f est inessentielle, en vertu du corollaire du théorème 3. En remarquant que l'homomorphisme $\bar{f}$ associé à f applique $\Pi(A, a)$ sur l'élément neutre de $\Pi\big(B, f(a)\big)$, on pourrait aussi appliquer la proposition 5'. La proposition 9 est donc encore valable en supposant seulement que B admet R^n comme revêtement universel et qu'aucun automorphisme de ce revêtement n'est d'ordre fini, à l'exception de la transformation identique.

Corollaire. — Toute application continue d'un espace localement sphérique complet dans un espace localement euclidien ou non euclidien hyperbolique complet est inessentielle [1].

5. **Appendice.** — Les théorèmes 1 et 2 admettent des applications variées du genre du théorème de Wazewski [2] qui s'énonce de la façon suivante :

Soit (a_{ij}) une matrice sur le corps des nombres réels, complexes ou des quaternions, à n colonnes et r lignes, de rang r et dont les éléments sont des fonctions continues de $t \in K$, où K est un pavé fermé ou ouvert. On peut compléter la matrice par

---

[1] Après avoir terminé la rédaction de ce mémoire, j'ai remarqué que le théorème 3 généralise des résultats de H. Hopf [*Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem* (*Math. Annalen*, 95, 1926, p. 333-339, *voir* § 4)] caractérisant la classe de l'application identique d'un espace localement euclidien ou hyperbolique B et montrant que toute application dans B d'une variété simplement connexe est inessentielle.

[2] T. Wazewski, *Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues* (*Comp. math.*, II, 1935, p. 63-68).

l'adjonction de $n-r$ lignes dont les éléments sont également des fonctions continues de $t \in K$ et telles que la matrice obtenue soit de rang n quel que soit $t \in K$.

D'après B. Eckmann [1], ce théorème est aussi valable si K est un espace métrique compact contractile en un point. De même il est valable lorsque K est un complexe quelconque contractile en un point. Soit $V_{n,n}$ l'espace des matrices carrées à n lignes et de rang n. Soit $V_{n,r}$ l'espace des matrices à n colonnes et r lignes et de rang r. L'espace $V_{n,n}$ est un espace fibré dont l'espace de base est $V_{n,r}$, une fibre étant l'ensemble des matrices dont les r premières lignes sont données. D'après le corollaire 1 du théorème 1, si K est un complexe contractile en un point, toute application continue de K dans $V_{n,r}$ est la projection d'une application continue de K dans $V_{n,n}$, ce qui démontre le théorème.

Voici un résultat analogue :

Soit K un complexe contractile en un point et soit $(L_t^p)_{t \in K}$ une famille continue de variétés linéaires à p dimensions de l'espace euclidien R^n. Il existe aussi une famille continue de repères formés d'un point $O_t \in L_t^p$ et de p vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux et situés dans L_t^p.

L'espace de tous les repères du type indiqué est, en effet, un espace fibré ayant pour espace de base l'espace des variétés linéaires de dimension p, une fibre étant l'ensemble des repères situés dans une même variété linéaire. On applique encore le corollaire 1 du théorème 1.

Remarquons enfin qu'à la variété linéaire L_t^p de la famille continue considérée on peut associer d'une façon continue une orientation, en supposant seulement que K est un espace quelconque contractile en un point. On peut, en effet, appliquer le corollaire 1 du théorème 2 au revêtement de l'espace des variétés linéaires formé par l'espace des variétés linéaires orientées.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 160. Je ne fais que reproduire le principe de la démonstration d'Eckmann.

6. Appendice : *Caractérisation des classes d'applications d'un complexe dans un espace asphérique.*

Le problème posé à la suite du corollaire du théorème 3 est résolu par le théorème suivant de Hurewicz [1] :

Théorème de Hurewicz. — Soit A un espace métrique compact connexe et localement connexe et soit B un espace asphérique connexe et localement connexe en toute dimension. A une application continue f de A dans B faisons correspondre la classe des homomorphismes $h \circ \bar{f}$ de $\Pi(A, a)$ dans $\Pi(B, b)$, où $\bar{f}$ est l'homomorphisme associé à f de $\Pi(A, a)$ dans $\Pi[B, f(a)]$ et h un isomorphisme intérieur quelconque de $\Pi[B, f(a)]$ sur $\Pi(B, b)$. On obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les classes d'applications continues de A dans B et les classes d'homomorphismes continus de $\Pi(A, a)$ dans $\Pi(B, b)$.

A l'aide de la métrique dans A, Hurewicz définit une métrique dans $\Pi(A, a)$ et par suite la notion d'homomorphisme continu de $\Pi(A, a)$ dans $\Pi(B, b)$, ce dernier groupe étant muni de la topologie discrète. Un espace B est dit asphérique lorsque toute application dans B de la sphère S^n, pour $n \geq 2$, est inessentielle. L'article cité contient simplement l'idée de la démonstration de ce théorème. Il contient une démonstration plus explicite s'appliquant au cas où A est un complexe fini, B étant seulement supposé connexe par arcs et asphérique. *On a alors une correspondance biunivoque entre les classes d'applications continues de* A *dans* B *et les classes d'homomorphismes de* $\Pi(A, a)$ *dans* $\Pi(B, b)$.

Remarquons que les hypothèses du théorème 3 ne sont pas des conséquences des hypothèses de Hurewicz. L'espace B de notre énoncé est un espace asphérique particulier et satisfait aux hypothèses de Hurewicz; mais l'espace A est seulement supposé connexe et localement simplement connexe. L'idée de la démons-

---

(1) *Beiträge zur Topologie der deformationen* VI (*Proc. Koninkl. Akad. v. Wetensch.*, Amsterdam, t. 39, 1936, p. 215-224). Ce théorème étant publié dans un périodique pratiquement inaccessible pour moi dans les conditions actuelles, je l'ai remarqué seulement au moment de la correction des épreuves du présent article auquel j'ai ajouté alors cet appendice.

tration du théorème 3 permet de modifier le raisonnement de Hurewicz et conduit à démontrer le théorème suivant, où les hypothèses diffèrent aussi de celles de Hurewicz :

Théorème 4. — Soit A un complexe simplicial (fini ou infini) de dimension n et soit B un espace connexe et localement simplement connexe tel que toute application dans B d'une sphère S^p, pour $1 < p \leq n$, soit inessentielle. Soient G et G′ les groupes d'automorphismes des revêtements universels $\hat{A}$ et $\hat{B}$ de A et B. A une application continue f de A dans B faisons correspondre la classe d'homomorphismes $\Gamma'_0\bar{\bar{f}}$ de G dans G′, où Γ' est le groupe des automorphismes intérieurs de G′ et $\bar{\bar{f}}$ un homomorphisme associé à f. On obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les classes d'applications continues de A dans B et les classes d'homomorphismes de G dans G′.

En reprenant les notations de la démonstration du théorème 3, soient f et f_1 deux applications continues de A dans B correspondant à une même classe d'homomorphismes $\Gamma'_0\bar{\bar{f}}$. Montrons que f et f_1 sont homotopes. On peut trouver deux applications continues $\hat{f}$ et $\hat{f}_1$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ qui se projettent respectivement suivant f et f_1 et telles que les homomorphismes associés soient identiques à $\bar{\bar{f}}$. Considérons sur $\hat{A}$ la subdivision simpliciale qui se projette sur la subdivision simpliciale de A. Dans chaque classe de sommets de $\hat{A}$ équivalents suivant G choisissons un sommet e_i^0 et relions $\hat{f}(e_i^0)$ et $\hat{f}_1(e_i^0)$ par un chemin c_i. Si $e_j^0 = g(e_i^0)$, où $g \in G$, relions les points $\hat{f}(e_j^0)$ et $\hat{f}_1(e_j^0)$ par le chemin $c_j = g' o c_i$, où $g' = \bar{\bar{f}}(g)$. Posons $\hat{f}_t^0(e_j^0) = c_j(t)$. La famille $(\hat{f}_t^0)_{t \in I}$ définit une déformation de la restriction de $\hat{f}$ à l'ensemble $\hat{A}^0$ des sommets de $\hat{A}$. Dans chaque classe d'arêtes de $\hat{A}$ équivalentes suivant G choisissons une arête e_i^1. Si e_k^0 et e_h^0 sont les sommets de e_i^1, il existe une application continue $\hat{\varphi}_i^1$ de $e_i^1 \times I$ dans $\hat{B}$ telle que

$$\hat{\varphi}_i^1(e_i^1 \times \{0\}) = \hat{f}(e_i^1), \qquad \hat{\varphi}_i^1(e_i^1 \times \{1\}) = \hat{f}_1(e_i^1),$$
$$\hat{\varphi}_i^1(e_k^0, t) = \hat{f}_t^0(e_k^0), \qquad \hat{\varphi}_i^1(e_h^0, t) = \hat{f}_t^0(e_h^0),$$

parce que toute application continue dans $\hat{B}$ du bord de $e_i^1 \times I$ est inessentielle. Si $e_j^1 = g(e_i^1)$, nous associons à $e_j^1 \times I$ l'application $\hat{\varphi}_j^1$ telle qu'on $g[\hat{\varphi}_i^1(x, t)] = \hat{\varphi}_j^1[g(x), t]$ pour tout $x \in e_i^1$ et $t \in I$. La réunion des applications $\hat{\varphi}_j^1$ définit une application continue $\hat{\varphi}^1$ de $\hat{A}^1 \times I$ dans $\hat{B}$ qui détermine une déformation continue de la restriction de $\hat{f}$ à $\hat{A}^1$, réunion des sommets et des arêtes de $\hat{A}$. Par récurrence on définit finalement une application continue $\hat{\varphi}$ de $\hat{A} \times I$ dans $\hat{B}$ déterminant une déformation continue $(\hat{f}_t)_{t \in I}$ de $\hat{f}$ à $\hat{f}_1$ telle que $\hat{f}_t$ soit compatible avec G et G'. Par passage aux quotients on obtient une déformation continue $(f_t)_{t \in I}$ de f à f_1.

Montrons d'autre part que tout homomorphisme $\overline{\overline{f}}$ de G dans G' est associé à une application continue de A dans B. On détermine facilement une application $\hat{f}$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ compatible avec G et G' telle que $\overline{\overline{f}}$ soit l'homomorphisme associé à $\hat{f}$. Dans chaque classe de sommets de $\hat{A}$ équivalents suivant G on choisit encore un sommet e_i^0 et on lui fait correspondre un point arbitraire $\hat{f}_i^0(e_i^0)$. Au sommet $e_j^0 = g(e_i^0)$, où $g \in G$, on fait correspondre le point

$$\hat{f}_j^0(e_j^0) = g'[\hat{f}_i^0(e_i^0)],$$

où $g' = \overline{\overline{f}}(g)$. Dans chaque classe d'arêtes de $\hat{A}$ on choisit une arête e_i^1, de sommets e_k^0 et e_h^0. Il existe dans $\hat{B}$ un chemin reliant $\hat{f}_k^0(e_k^0)$ à $\hat{f}_h^0(e_h^0)$, c'est-à-dire une application continue $\hat{f}_i^1$ de e_i^1 dans $\hat{B}$ telle que $\hat{f}_i^1(e_k^0) = \hat{f}_k^0(e_k^0)$ et $\hat{f}_i^1(e_h^0) = \hat{f}_h^0(e_h^0)$. A l'arête $e_j^1 = g(e_i^1)$ on fait correspondre l'application $\hat{f}_j^1$ telle qu'on ait $\hat{f}_j^1 \circ g = g' \circ \hat{f}_i^1$. La réunion des applications $\hat{f}_j^1$ définit une application $\hat{f}^1$ de $\hat{A}^1$ dans $\hat{B}$ compatible avec G et G'. De la même manière on pourra étendre $\hat{f}^1$ à la réunion $\hat{A}^2$ des simplexes de dimension 2 de $\hat{A}$. Par récurrence on définit ainsi une application $\hat{f}$ de $\hat{A}$ dans $\hat{B}$ compatible avec G et G' et telle que l'homomorphisme associé de G dans G' soit $\overline{\overline{f}}$. Ici il suffit d'ailleurs de supposer que toute application dans B d'une sphère S^p, où $1 < p < n$, est inessentielle. Par passage aux quotients on déduit de $\hat{f}$ une application f de A dans B telle que $\bar{f}$ soit un homomorphisme associé à f.

Remarque. — En appliquant le théorème de Zorn, on voit facilement que le théorème 4 est aussi valable avec les hypothèses suivantes : A est un complexe simplicial de dimension infinie; B est un espace connexe, localement connexe et asphérique.

(Manuscrit reçu le 3 février 1944.)

Extrait du « Bulletin de la Société Mathématique de France » 72 (1944), pp. 27-54.

/20/

SUR LA THÉORIE DES ESPACES FIBRÉS;

PAR CHARLES EHRESMANN.
(Strasbourg.)

Introduction. — Je rappellerai la définition d'une structure d'espace fibré à groupe structural *topologique* G. Je définirai une relation d'ordre dans l'ensemble des structures d'espace fibré qu'on peut considérer sur un espace donné. Le problème de la recherche des ***structures subordonnées*** à une structure d'espace fibré donné est ramené à la recherche d'une section d'un *espace fibré associé*. On peut donner de nombreuses applications de ce problème. J'étudierai principalement les conditions d'existence, sur une variété différentiable réelle V_{2n}, d'une forme différentielle extérieure de degré 2 et de rang $2n$ en tout point de V_{2n}. L'existence d'une telle forme différentielle est équivalente à l'existence, dans l'espace vectoriel tangent à V_{2n} au point x, d'une structure d'espace vectoriel complexe de dimension n dépendant d'une façon continue de x. Nous dirons que V_{2n} est muni d'une *structure presque complexe* lorsqu'on a défini, d'une façon continue par rapport à x, une structure d'espace vectoriel complexe dans l'espace tangent en x. L'existence sur V_{2n} d'une structure presque complexe est nécessaire, mais probablement non suffisante, pour qu'on puisse définir sur V_{2n} une structure analytique complexe, subordonnée à la structure différentiable réelle. On obtient ainsi des conditions nécessaires pour qu'on puisse définir sur V_{2n} une structure analytique complexe, et c'est ce dernier problème qui est à l'origine du présent travail ([1]). En particulier la sphère S_4

([1]) J'ai posé ce problème pour la première fois dans une conférence faite au séminaire Bourbaki à Paris (janvier 1947) et j'ai indiqué alors les résultats exposés ici au n° 8. Dans une conférence faite à l'Institut des Hautes Études de Belgique le 30 avril 1947, j'ai traité le même problème en indiquant tous mes résultats actuels, à l'exception de celui concernant la sphère S_4.

n'admet pas de structure presque complexe. Par contre, la sphère S_6, et plus généralement toute variété différentiable orientable à six dimensions dont le groupe d'homologie de dimension 3 est nul, admet une structure presque complexe.

Pour finir je considérerai un problème analogue concernant les variétés analytiques complexes V_{2n}, à $2n$ dimensions complexes, ce qui conduit à une notion de *variété presque quaternionienne*.

Les nombres placés entre crochets renvoient à l'index bibliographique; celui-ci n'est pas une liste complète des publications concernant les questions traitées.

1. Définition d'une structure compatible avec un pseudo-groupe de transformations (¹). — Soient M un espace topologique, et Φ un ensemble d'ensembles ouverts de M tel que toute réunion et toute intersection finie d'ensembles de Φ appartiennent à Φ. Soit Γ un ensemble d'homéomorphismes vérifiant les axiomes suivants :

1° Tout homéomorphisme $f \in \Gamma$ est défini dans un ensemble $U \in \Phi$ et l'on a $f(U) \in \Phi$.

2° Soit U la réunion d'une famille d'ensembles U_i appartenant à Φ. Pour qu'un homéomorphisme f défini dans U appartienne à Γ, il faut et il suffit que sa restriction à U_i appartienne à Γ.

3° Pour tout $U \in \Phi$, l'application identique de U appartient à Γ. Si $f \in \Gamma$, l'application réciproque f^{-1} appartient à Γ. Si f et f' sont deux homéomorphismes appartenant à Γ, tels que le composé ff' soit défini, alors ff' appartient à Γ.

L'ensemble Γ vérifiant ces axiomes sera appelé *pseudo-groupe de transformations*.

Exemple. — Les homéomorphismes différentiables dont chacun transforme un ouvert de R^n en un ouvert de R^n forment un pseudo-groupe de transformations dans R^n.

Soit E un deuxième espace topologique. Nous appellerons *carte*

(¹) Nous reprenons ici, en les précisant, les notions introduites pour la première fois par O. VEBLEN et J. H. C. WHITEHEAD dans *The foundations of differential geometry*, Cambridge Tracts, 1932.

locale de E par rapport à M un homéomorphisme d'un ouvert U de M sur un ouvert U′ de E. A deux cartes locales f_1 et f_2 correspond un homéomorphisme φ_{21}, appelé *changement de carte locale* (ou de coordonnées locales), tel que $f_1(x) = f_2(x')$ soit équivalent à $x' = \varphi_{21}(x)$. Un ensemble de cartes locales de E par rapport à M est appelé *atlas* de E par rapport à M si les ouverts correspondant aux cartes dans E forment un recouvrement de E. Un atlas $\mathfrak{A}$ sera dit compatible avec le pseudo-groupe Γ défini dans M lorsque tous les changements de cartes locales correspondants appartiennent à Γ. Tout atlas $\mathfrak{A}$ compatible avec Γ est contenu dans *un atlas complet* (ou maximal) $\overline{\mathfrak{A}}$ bien déterminé, compatible avec Γ. Nous dirons qu'un atlas complet $\overline{\mathfrak{A}}$ de E par rapport à M compatible avec Γ définit sur E une *structure compatible avec* Γ. Les cartes locales de $\overline{\mathfrak{A}}$ sont appelées cartes admissibles de la structure.

Par exemple [4], on définit ainsi les structures de variétés différentiables réelles ou complexes, localement euclidiennes, localement homogènes de Lie, etc. Nous allons donner également sous cette forme la définition d'une structure d'espace fibré.

2. **Définition d'un espace fibré à groupe structural** G. — Soient E, B, F trois espaces topologiques et G un groupe d'automorphismes de F. Nous supposons G muni d'une topologie telle que, si $s \in G$, $y \in F$, sy désignant le transformé de y par s, l'application $(s, y) \to sy$ soit une application continue de $G \times F$ sur F. Soit Φ l'ensemble des ouverts de $B \times F$ de la forme $U \times F$, où U est un ouvert quelconque de B. Considérons dans $B \times F$ le pseudo-groupe Γ formé des automorphismes de $U \times F$ de la forme $(x, y) \to (x, s_x y)$, $x \in U$, $y \in F$, où $x \to s_x$ est une application continue de U dans G. Un atlas complet $\mathfrak{A}$ de E sur $B \times F$ compatible avec ce pseudo-groupe Γ définit alors sur E une structure d'espace fibré à groupe structural G (considéré comme groupe topologique) [10, 6, 2]. Nous supposerons que les ouverts qui correspondent dans $B \times F$ aux cartes de $\mathfrak{A}$ forment un recouvrement de $B \times F$.

Soit f un homéomorphisme de $U \times F$ dans E formant une carte locale admissible. L'application $y \to f(x, y)$, où $x \in U$, $y \in F$, définit un homéomorphisme h de F sur un sous-espace F_x de E.

Soit H l'ensemble des homéomorphismes h de F dans E correspondant ainsi aux cartes locales admissibles (appartenant à $\mathfrak{A}$). Le sous-espace F_x ne dépend que de x et s'appelle une fibre de l'espace fibré E. Les fibres forment une partition de E, et l'espace quotient de E par cette partition peut être identifié d'une façon naturelle avec B, appelé espace de base de l'espace fibré. L'ensemble des éléments h de H tels que $h(F) = F_x$ est l'ensemble $H_x = h_x G$, où h_x désigne un élément quelconque de H_x. La structure d'espace fibré définie par l'atlas complet $\mathfrak{A}$ pourra être désignée par le symbole E (B, F, G, H).

3. **Espaces fibrés associés** [2]. — Étant donnés deux espaces topologiques B et F, et un groupe topologique G d'automorphismes de F, tout espace fibré E(B, F, G, H) peut être obtenu de la manière suivante :

On se donne un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de B par des ouverts. Pour tout couple $(i, j) \in I \times I$ on se donne une fonction continue $x \to s_x^{ji}$ où $x \in U_i \cap U_j$, $s_x^{ji} \in G$, telle que $s_x^{ki} = s_x^{kj} s_x^{ji}$ pour $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, et $s_x^{ji} s_x^{ij} =$ élément unité de G. Considérons l'espace somme $S = \sum_{i \in I} U_i \times F$, et soit r la relation d'équivalence définie dans S par l'ensemble des automorphismes $(x, y) \to (x, s_x^{ji} y)$, $x \in U_i \cap U_j$, $y \in F$. L'espace quotient S/r est un espace fibré E(B, F, G, H). Soit f_i la restriction à $U_i \times F$ de l'application canonique de S sur $S/r = E$. Désignons par h_x^i l'homéomorphisme $y \to f_i(x, y)$, où $x \in U_i$, $y \in F$. On a $H_x = h_x^i G$ et $h_x^i = h_x^j s_x^{ji}$. Cette construction est encore valable lorsque les U_i sont les cellules fermées d'une subdivision cellulaire de B.

L'espace fibré E(B, F, G, H) étant supposé construit de la manière précédente, soit φ une représentation continue de G sur un groupe d'automorphismes G' d'un espace topologique F'. Soit $S' = \sum_{i \in I} U_i \times F'$, et soit r' la relation d'équivalence définie dans S' par l'ensemble des automorphismes $(x, y') \to [x, \varphi(s_k^{ij}) y']$, où $y' \in F'$. L'espace quotient S/r' est un espace fibré E'(B, F', G', H') que nous appellerons *associé* à E(B, F, G, H). Il est parfaitement déterminé lorsque F', G' et φ sont donnés.

En particulier, soit φ la représentation de G sur le groupe G_γ des translations à gauche de G, telle que $\varphi(s)$ soit la relation $t \rightarrow st$, $s \in G$, $t \in G$. Soit $S' = \sum_{i \in I} U_i \times G$, et soit r' la relation d'équivalence définie dans S' par l'ensemble des automorphismes

$$(x, t) \rightarrow (x, s_x^{ij} t), \quad x \in U_i \cap U_j, \quad t \in G.$$

L'application de S' sur H qui fait correspondre à $(x, t) \in U_i \times G$ l'élément $h_x^i t$ de H_x est compatible avec la relation d'équivalence r'. Ceci permet d'identifier d'une façon canonique S/r' à H. On a ainsi défini sur H une topologie et une structure d'espace fibré $H(B, G, G_\gamma, H^*)$ que nous appellerons *espace fibré principal associé* à E(B, F, G, H). L'application $(h, y) \rightarrow h(y)$, où $h \in H$, $y \in F$, est continue.

4. **Structures d'espaces fibrés subordonnées** [3]. — Nous dirons que la structure E(B, F, G', H') est subordonnée à la structure E(B, F, G, H) lorsque $H' \subset H$ et que l'application canonique de H' dans H est continue. Ceci implique que les fibres sont les mêmes pour les deux structures, que G' est un sous-groupe de G, et que l'application canonique de G' dans G est continue. Nous considérons surtout le cas où G' est un sous-groupe de G, muni de la topologie induite. Alors H' est un sous-espace de H, c'est-à-dire la topologie de H' est induite par celle de H.

Le produit topologique $B \times F$ sera considéré comme un espace fibré, de groupe structural réduit à la transformation identique de F. Un espace fibré E(B, F, G, H), dont le groupe structural est réduit à la transformation identique, est isomorphe à $B \times F$. La recherche d'une structure de produit topologique subordonnée à E(B, F, G, H) revient donc à la recherche d'une section de l'espace fibré associé principal $H(B, G, G_\gamma, H^*)$. On en déduit facilement le résultat suivant [2, 5] :

Si B *est un complexe contractile en un point, l'espace fibré* E(B, F, G, H) *admet une structure subordonnée isomorphe au produit topologique* $B \times F$.

5. **Recherche des structures subordonnées.** — *Problème.* — Étant donnée une structure d'espace fibré E(B, F, G, H), déter-

miner toutes les structures subordonnées $E(B, F, G', H')$ telles que G' soit un sous-groupe donné de G, muni de la topologie induite par celle de G.

Considérons l'espace fibré principal $H(B, G, G_\gamma, H^*)$ associé à $E(B, F, G, H)$, et soit (G') la relation d'équivalence définie dans H, dont les classes d'équivalence sont les ensembles hG', où $h \in H$. Si $h \in H_x$, on a $hG' \subset H_x$. Soit K l'espace homogène G/G' des classes sG' de G et soit G_K le groupe de transformations de cet espace homogène, à $t \in G$ correspondant la transformation $sG' \to t(sG')$. L'espace quotient $H/(G')$ est muni d'une structure d'espace fibré $H/(G')(B, K, G_K, H_K)$ dont les fibres sont les ensembles $K_x = H_x/(G')$. C'est l'espace fibré associé à $E(B, F, G, H)$ correspondant à la représentation de G sur G_K. Pour que l'ensemble $\overline{H}^*$ des restrictions à G' des homéomorphismes $h^* \in H^*$ détermine sur H une structure d'espace fibré $H[H/(G'), G', G'_\gamma, \overline{H}^*]$, il faut et il suffit que la condition suivante soit satisfaite : (α). L'ensemble $\overline{G_\gamma}$ des restrictions à G' des translations à gauche de G détermine sur G une structure d'espace fibré $G(K, G', G'_\gamma, \overline{G}_\gamma)$.

La condition (α) est vérifiée en particulier lorsque G est un groupe de Lie, G' un sous-groupe fermé de G.

Étant donnée une structure subordonnée $E(B, F, G', H')$, l'application $x \to H'_x$, où l'on considère H'_x comme élément de $H/(G')$, définit une section de l'espace fibré $H/(G')(B, F, G_K, H_K)$. Réciproquement, lorsque la condition (α) est vérifiée, toute section de cet espace fibré est projection d'un sous-espace H' de H, qui définit une structure subordonnée $E(B, F, G', H')$. Les structures subordonnées se répartissent alors en classes d'homotopie correspondant aux classes d'homotopie des sections de $H/(G')(B, K, G_K, H_K)$.

Remarque. — Supposons G non connexe, mais localement connexe. Soit G_0 la composante connexe de l'unité de G. L'espace fibré $H/(G')(B, K, G_K, H_K)$, où $K = G/(G')$ est un espace discret, est alors un revêtement de B. En général il n'admet pas de section. Mais si B' est une composante connexe de $H/(G_0)$, l'espace E admet un revêtement E' muni d'une structure $E'(B', F, G_0, H_0)$. En particulier, si G est discret, E admet un revêtement isomorphe à $B' \times F$.

6. **Premières applications** [4]. — Dans les cas suivants, il existe une classe et une seule de structures subordonnées à $E(B, F, G, H)$, en supposant que B soit un complexe.

1° $G =$ groupe de Lie connexe; $G' =$ sous-groupe clos maximal [8]. Alors G/G' est homéomorphe à un espace numérique R^m.

2° $F =$ espace numérique réel, complexe ou quaternionien; $G =$ groupe linéaire homogène correspondant; $G' =$ sous-groupe laissant invariant une forme quadratique ou une forme d'Hermite définie positive.

L'existence d'une structure subordonnée de groupe G' équivaut à l'existence d'un champ de formes quadratiques ou d'Hermite, c'est-à-dire d'une fonction continue qui à $x \in B$ associe une forme quadratique ou d'Hermite dans F_x.

3° $F = R^{2n}$ ou $F = C^{2n}$ ($R =$ droite numérique réelle, $C =$ droite numérique complexe); $G =$ groupe linéaire homogène qui laisse invariant la forme extérieure $x_1 \wedge x_2 + \ldots + x_{2n-1} \wedge x_{2n}$; $G' =$ sous-groupe qui laisse invariant $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2$, respectivement $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_{2n}\bar{x}_{2n}$; G' peut alors être identifié avec le groupe unitaire complexe ou quaternionien.

7. **Conditions d'existence d'une section d'un espace fibré** $E(B, F, G, H)$. — Faisons les hypothèses suivantes :

B est un complexe de dimension n. En désignant par $\pi_i(F)$ le groupe d'homotopie de F pour la dimension i, nous supposons :

$$\pi_i(F) = 0, \qquad \text{pour} \quad i < r; \qquad \pi_r(F) \neq 0.$$

Si $r = 1$, $\pi_1(F)$ est supposé abélien. G est un groupe d'opérateurs pour $\pi_r(F)$. Il existe donc un espace fibré associé dont la fibre est $\pi_r(F)$, muni de la topologie discrète. C'est donc un revêtement de B. Nous le supposerons isomorphe au produit topologique de B par $\pi_r(F)$. Cette condition est vérifiée en particulier lorsque G est connexe.

On peut définir alors une classe de cohomologie caractéristique W_{r+1} de B relativement à l'espace fibré, analogue aux classes de Stiefel-Whitney. Pour qu'il existe une section sur le squelette K_{r+1} de dimension $r+1$ de B, il faut et il suffit que $W_{r+1} = 0$. Si de plus $\pi_j(F) = 0$ pour $h > j > r$, la condition $W_{r-1} = 0$ est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section sur tout l'espace de base B.

8. Conditions d'existence, sur une variété différentiable V_{2n}, d'une structure presque complexe ou d'une forme différentielle extérieure de degré 2 et en tout point de rang $2n$. — Soit V_{2n} une variété différentiable de dimension $2n$. L'espace des vecteurs tangents est un espace fibré $E(V_{2n}, R^{2n}, L, H)$, où L est le groupe linéaire homogène dans R^{2n}. Une structure d'espace vectoriel complexe, prolongeant la structure vectorielle réelle, sera déterminée sur R^{2n} par une transformation linéaire I, $x \to ix$, où $x \in R^{2n}$, sans droite fixe passant par zéro, et telle que $i(ix) = -x$. En désignant par $x_1, \ldots, x_{2n}$ les coordonnées canoniques de $x \in R^{2n}$, soit I_0 la transformation

$$x'_1 = -x_2, \qquad x'_2 = x_1, \quad \ldots, \quad x'_{2n-1} = -x_{2n}, \qquad x'_{2n} = x_{2n-1}.$$

R^{2n} muni de la structure complexe correspondante sera identifié avec l'espace numérique complexe C^n de coordonnées canoniques

$$z_1 = x_1 + ix_2, \quad \ldots, \quad z_n = x_{2n-1} + ix_{2n}.$$

Soit L′ le groupe linéaire homogène complexe de C^n. C'est le sous-groupe de L qui laisse invariant I_0. L'espace homogène $K = L/L'$ est donc l'espace des structures complexes sur R^{2n} prolongeant la structure vectorielle réelle. La recherche d'une structure $E(V_{2n}, C^n, L', H')$ subordonnée à $E(V_{2n}, R^{2n}, L, H)$ revient à la recherche d'une section de l'espace fibré associé $H/(L')(V_{2n}, K, L_K, H_K)$. Une telle section définit sur V_{2n} une structure qu'on peut appeler *presque complexe*. Comme L′ est connexe, elle détermine une orientation sur V_{2n}. L'existence d'une telle structure presque complexe est une condition nécessaire pour qu'il existe sur V_{2n} une structure analytique complexe subordonnée à la structure différentiable réelle (²).

Soit Ω le sous-groupe connexe de L laissant invariant la forme quadratique $F = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2$ et soit Ω' le sous-groupe de L′

(²) Étant données deux structures définies sur E par deux atlas complets $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ de E par rapport à un espace M, compatibles avec deux pseudo-groupes dans M, la première sera dite subordonnée à la seconde lorsque $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$.

laissant invariant la forme d'Hermite $\Phi = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \ldots + z_n\bar{z}_n$. En vertu des résultats du n° **6**, le problème posé se ramène au suivant :

Étant donnée une structure $E(V_{2n}, R^{2n}, \Omega, H_1)$, où $H_1 \subset H$, et par suite une orientation sur V_{2n}, déterminer les structures subordonnées $E(V_{2n}, C^n, \Omega', H')$, ce qui revient à déterminer les sections de l'espace fibré associé $E'(V_{2n}, \Gamma_{(n)}, \Omega_\Gamma, H_\Gamma)$, où $\Gamma_{(n)}$ désigne l'espace homogène Ω/Ω'. Une telle section définit sur V_{2n} une structure qu'on peut appeler *presque hermitienne*, subordonnée à la structure riemannienne déterminée par $E(V_{2n}, R^{2n}, \Omega, H_1)$.

$\Gamma_{(n)}$ est isomorphe à une composante connexe ([3]) de l'espace des structures complexes sur R^{2n}, compatibles avec la forme quadratique F, c'est-à-dire définies par les transformations I telles que $F(x, ix) = 0$. $\Gamma_{(n)}$ est aussi isomorphe à une composante connexe de l'espace des formes bilinéaires alternées $\psi(x, y) = F(ix, y)$, qu'on peut appeler échangeable avec F. On en déduit le résultat suivant :

Pour qu'il existe sur V_{2n} une structure presque complexe ou presque hermitienne, il faut et il suffit qu'il existe sur V_{2n} une forme différentielle extérieure de degré 2 et en tout point de rang $2n$.

9. Topologie de $\Gamma_{(n)}$. — L'espace $\Gamma_{(n)}$ est encore isomorphe à une composante connexe de l'espace des génératrices linéaires de dimension n du cône quadratique $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n}^2 = 0$ de l'espace C^{2n}. J'en ai déterminé les bases d'homologie à l'aide d'une subdivion en cellules [1] :

$\Gamma_{(2)}$ est homéomorphe à S_2 ;

$\Gamma_{(3)}$ est homéomorphe à l'espace projectif complexe $P_3(C)$;

$\Gamma_{(4)}$ est homéomorphe à la quadrique complexe Q_6 à six dimensions complexes. Or Q_6 est homéomorphe à $S_6 \times P_3(C)$;

$\pi_1(\Gamma_{(4)}) = 0$, $\pi_2(\Gamma_4)$ est cyclique infini, $\pi_i(\Gamma_4) = \pi_i(S_6) \times \pi_i(S_7)$, pour $i > 2$;

([3]) Il y a deux composantes connexes correspondant aux deux orientations de R^{2n}.

$\Gamma_{(n)}$ admet toujours une structure fibrée multiple du type $S_{2n-2}\times\ldots\times S_6\times S_4\times S_2$; c'est-à-dire l'espace de base est S_{2n-2}, la fibre est un espace fibré de base S_{2n-4}, etc. Les groupes d'homologie de $\Gamma_{(n)}$ sont ceux de ce produit de sphères.

On a toujours $\pi_2(\Gamma_{(n)}) = \pi_2(S_2)$. Donc l'espace V_{2n} admet, relativement à E', une classe caractéristique W_3. Ainsi $W_3 = 0$ est une condition nécessaire d'existence sur V_{2n} d'une structure presque complexe ou encore d'une forme différentielle extérieure de degré 2 et de rang $2n$. *Cette condition est aussi suffisante pour une variété* V_6. *Elle est vérifiée en particulier pour la sphère* S_6. Remarquons que, pour toute variété orientable V_4, la classe W_3 est nulle. C'est une simple conséquence du résultat dû à H. Whitney, d'après lequel sur une telle variété la classe caractéristique de Stiefel-Whitney de dimension 3 est nulle [11].

Pour $n > 3$, $\pi_6(\Gamma_{(n)})$ est cyclique infini. Si $W_3 = 0$, l'espace fibré $E'(V_{2n}, \Gamma_{(n)}, \Omega_\Gamma, H_\Gamma)$ admet une section sur le squelette de dimension 6. Pour qu'une telle section puisse s'étendre au squelette de dimension 7, il faut et il suffit qu'une certaine classe de cohomologie caractéristique de dimension 7 soit nulle. Cette classe dépend de la classe d'homotopie de la section donnée sur le squelette de dimension 6. Si le groupe d'homologie de la dimension 2 de V_{2n} est nul, cette classe caractéristique de dimension 7 est unique.

10. Étude particulière du cas de la sphère S_{2n}. — Supposons S_{2n} subdivisé en deux hémisphères B_{2n} et B'_{2n} dont l'intersection est une sphère S_{2n-1}. L'espace fibré principal $H(S_{2n}, \Omega, \Omega_\gamma, H^*)$, associé à l'espace fibré $E(S_{2n}, R^{2n}, \Omega, H)$ des vecteurs tangents à S_{2n}, peut être identifié avec l'espace quotient de $B_{2n}\times\Omega + B'_{2n}\times\Omega$ par une relation d'équivalence définie par une application continue σ de S_{2n-1} dans Ω [7]. Soit F l'espace homogène Ω/G', où G' est un sous-groupe fermé de Ω. Soit q la projection canonique de Ω sur Ω/G', et posons $\sigma' = q\sigma$. Pour que l'espace fibré associé $E'(S_{2n}, F, \Omega_F, H_F)$ admette une section, il faut il suffit que l'application de S_{2n-1} dans $F = \Omega/G'$ soit homotope à zéro.

L'application σ est celle qui fait correspondre à $x \in S_{2n-1}$ le produit des deux symétries dans R^{2n} par rapport à un diamètre fixe de S_{2n-1}, et par rapport au diamètre passant par x. Soit σ' l'application correspondante de S_{2n-1} dans $\Omega/\Omega' = \Gamma_{(n)}$. Pour qu'il existe sur S_{2n} une structure presque complexe ou une forme extérieure de degré 2 et de rang $2n$, il faut et il suffit que σ' soit homotope à zéro. Il en est bien ainsi pour $n = 3$, car $\pi_5(\Gamma_{(3)}) = 0$.

Pour $n = 2$, l'application σ' n'est pas homotope à zéro. En effet, le groupe Ω correspondant est homéomorphe au produit $S_3 \times P_3$, $P_3 =$ espace projectif réel à trois dimensions. Toute application de S_3 dans Ω est donc caractérisée par un couple d'entiers (a, b). Pour l'application σ, ce couple est $(1, 1)$. L'application correspondante σ' de S_3 sur $\Gamma_{(2)} = S_2$ n'est donc pas homotope à zéro. *Donc sur* S_4 *il n'existe pas de forme différentielle extérieure de degré* 2 *et de rang* 4; *ou encore il n'existe sur* S_4 *aucune structure presque complexe*, *et* a fortiori *aucune structure complexe.*

Cas $n = 4$. — Soit Q_6 la variété des génératrices à une dimension du cône défini dans C^8 par $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_8^2 = 0$. $\Gamma_{(4)}$ est homéomorphe à Q_6, qui est elle-même homéomorphe à la variété des plans orientés de R^8 passant par l'origine. A σ correspond une application σ' de S_7 dans $\Gamma_{(4)}$ et une application σ'' de S_7 dans Q_6. L'application σ'' n'est pas homotope à zéro, sinon il existerait sur S_8 un champ d'éléments plans orientés, et par suite aussi un champ de vecteurs unitaires. Il existe bien un automorphisme de Ω qui induit un homéomorphisme de $\Gamma_{(4)}$ sur Q_6, mais les deux espaces fibrés associés à S_8, de fibres Q_6 et $\Gamma_{(4)}$, ne semblent pas être isomorphes.

Remarque. — Pour tout n, la variété des plans orientés de R^n, passant par l'origine, est homéomorphe à la variété Q_{n-2} des génératrices du cône $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$. Ses groupes d'homotopie, pour les dimensions > 2, sont ceux de la variété $V_{n,2}$ des couples de vecteurs unitaires et orthogonaux dans R^n. Q_{n-2} est simplement connexe et $\pi_2(Q_{n-2}) = \pi_2(S_2)$ pour $n > 4$, et $\pi_2(Q_4) = \pi_2(S_2) \times \pi_2(S_2)$. Le problème de l'existence d'un champ d'éléments plans tangents à une variété V_n conduit donc également à une classe caractéristique, de dimension 3, qui est d'ailleurs nulle dans le cas d'une variété orientable V_4, d'après le résultat indiqué de Whitney.

11. Conditions d'existence, sur une variété analytique complexe V_{2n} d'une forme différentielle extérieure complexe de degré 2 et de rang 2 en tout point. — Soit Ω' le groupe linéaire complexe de C^{2n} qui laisse invariant la forme d'Hermite

$$\Phi = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + \ldots + z_{2n}\bar{z}_{2n}.$$

Soit Ω'' le sous-groupe qui laisse invariant la transformation J_0 :

$$z'_1 = -\bar{z}_2,\ z'_2 = \bar{z}_1,\ \ldots,\ z'_{2n-1} = -\bar{z}_{2n},\ z'_{2n} = \bar{z}_{2n-1}.$$

L'espace homogène Ω'/Ω'' est l'espace des structures vectorielles quaternioniennes sur C^{2n}, compatibles avec la forme d'Hermite Φ; c'est encore l'espace des formes extérieures de degré 2, de rang $2n$, et échangeables avec Φ. C'est un espace muni d'une structure fibrée multiple de type $S_{4n-3} \times \ldots \times S_9 \times S_5 \times S_1$.

V_{2n} est l'espace de base d'un espace fibré de groupe structural Ω'. Le problème posé dans le titre de ce paragraphe revient à chercher une structure suborbonnée de groupe structural Ω''. On arrive d'abord à une classe caractéristique W_2, pour la dimension 2. $W_2 = 0$ est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une structure subordonnée de groupe structural Ω'_1, groupe *unimodulaire* laissant invariant Φ. Supposons cette condition vérifiée. On est amené alors à étudier l'existence d'une section d'un espace fibré associé dont la fibre est l'espace homogène $\Omega'_1/\Omega'' = K_{(n)}$. L'espace $K_{(n)}$ admet une structure fibrée multiple de type $S_{4n-3} \times \ldots \times S_9 \times S_5$. C'est un des espaces riemanniens symétriques étudiés par É. Cartan. Le problème posé conduit à une classe caractéristique de dimension 6.

Les conditions d'existence sur V_{2n} d'une forme différentielle extérieure de degré 2 et de rang $2n$ sont aussi celles de l'existence d'une *structure presque quaternionienne*, en convenant d'appeler ainsi une section de l'espace fibré de base V_{2n} et ayant pour fibre l'espace des structures quaternioniennes prolongeant la structure complexe de C^{2n}. Cet espace est l'espace quotient L'/L'', où L'' est le sous-groupe de L' qui laisse invariant J_0. Remarquons que, si l'on voulait définir la notion de structure de variété quaternionienne par analogie avec le cas réel ou complexe, on obtiendrait seulement une classe de variétés localement affines.

Par exemple, toute variété analytique complexe V_2 (à 4 dimensions réelles), dont le groupe de Betti pour la dimension 2 est nul, admet une structure presque quaternonienne. L'espace projectif complexe $P_{2n}(C)$ n'en admet pas.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

[1] C. Ehresmann, *Sur la Topologie de certains espaces homogènes* (*Ann. of Math.*, 35, 1934, p. 396-443).

[2] C. Ehresmann, *Espaces fibrés associés* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 213, 1941, p. 762-764).

[3] C. Ehresmann, *Espaces fibrés de structures comparables* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 214, 1943, p. 144-147).

[4] C. Ehresmann, *Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 216, 1943, p. 628-630).

[5] C. Ehresmann, *Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré ou dans un revêtement* (*Bull. Soc. Math. France*, 72, 1944, p. 27-54).

[6] C. Ehresmann et J. Feldbau, *Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, 212, 1941, p. 945-748).

[7] J. Feldbau (sous le nom de J. Laboureur), *Les structures fibrées sur la sphère et le problème du parallélisme* (*Bull. Soc. Math. France*, 70, 1942, p. 181-185).

[8] A. Malcev, *On the theory of the Lie groups in the large* (*Rec. Math.*, Moscou, 16, 1945, p. 163-189).

[9] O. Veblen et J. H. C. Whitehead, *The fundations of differential geometry* (*Cambridge Tracts*, 1932).

[10] H. Whitney, *On the theory of sphere-bundles* (*Proc. Nat. Acad. Sc.*, 29, 1940, p. 148-153).

[11] H. Whitney, *On the Topology of differentiable manifolds* (*Lectures in Topology*, Ann. Arbor, 1941, p. 101-141).

Extrait des *Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique.*

XII. — *Topologie algébrique*, Paris, 26 juin-2 juillet 1947 (pages 3 à 15).

Reprinted from Vol. II, PROCEEDINGS OF THE
INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS, 1950
Printed in U.S.A.

/29/

SUR LES VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES

CHARLES EHRESMANN

1. Introduction. Etant donnée une variété topologique V_{2n}, de dimension $2n$, existe-t-il sur V_{2n} une *structure analytique complexe*? Plus abordable paraît la question suivante: Etant donnée une variété *différentiable* V_{2n}, existe-t-il sur V_{2n} une structure analytique complexe *subordonnée à sa structure différentiable*? Soit $T(V_{2n})$ l'espace des vecteurs tangents à V_{2n} et T_x l'espace vectoriel tangent en $x \in V_{2n}$. $T(V_{2n})$ est un espace fibré de base V_{2n} et de fibres T_x isomorphes à l'espace vectoriel R^{2n}. Une *structure presque complexe* sur V_{2n} sera définie par la donnée dans T_x d'une structure vectorielle complexe subordonnée à sa structure vectorielle réelle et dépendant d'une façon continue de x. Toute structure analytique complexe subordonnée à la structure différentiable de V_{2n} détermine sur V_{2n} une structure presque complexe, mais en général une structure presque complexe ne dérive pas d'une structure analytique complexe et on ignore si une *variété presque complexe* (c'est-à-dire, une variété munie d'une structure presque complexe) admet aussi une structure analytique complexe. La recherche des structures presque complexes sur V_{2n} est un problème de la théorie des espaces fibrés. Je rappellerai, en les complétant, les résultats que j'ai exposés au Colloque de Topologie Algébrique de Paris (1947) et j'indiquerai quelques résultats de Wen-tsün Wu; mais je ne pourrai pas exposer les méthodes de H. Hopf, qui a abordé la même question d'un point de vue un peu différent. Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

2. Structures fibrées subordonnées à une structure fibrée vectorielle [2]. Soit $E(B, F, G, H)$ un espace fibré de base B, de fibres isomorphes à F, de groupe structural topologique G. Nous supposons F muni d'une structure admettant G comme groupe d'automorphismes. Par les homéomorphismes distingués, dont l'ensemble est H, cette structure est transportée sur une structure bien déterminée dans chaque fibre F_x. H est alors l'ensemble des isomorphismes de F sur les fibres. Il est muni d'une structure fibrée $H(B, G, G_\gamma, \bar{H})$ et s'appelle espace *fibré principal associé*. Etant donné un sous-groupe G' de G, muni de la topologie induite, une structure fibrée $E(B, F, G', H')$ est dite *subordonnée* à $E(B, F, G, H)$ lorsque $H' \subset H$. Toute structure $E(B, F, G', H')$ détermine canoniquement une structure $E(B, F, G, H)$ à laquelle elle est subordonnée. Supposons que les classes sG' déterminent une structure fibrée sur G. Les structures $E(B, F, G', H')$ subordonnées à une structure donnée $E(B, F, G, H)$ correspondent alors d'une façon biunivoque aux *sections* de *l'espace fibré associé* à $E(B, F, G, H)$ par l'homomorphisme φ de G sur le groupe de transformations de l'espace homogène G/G', défini par $\varphi(s)(tG') = s(tG')$. C'est l'espace H/G' des classes hG', où $h \in G$; sa base est B et ses fibres sont isomorphes à G/G'. Les structures subordonnées $E(B, F, G', H')$ se répartissent en classes d'homotopie correspondant aux classes d'homotopie des sections; les structures d'une même classe sont isomorphes. Si $\mathfrak{S}'$ désigne une structure sur F admettant G' comme groupe d'automorphismes, l'espace H/G' peut s'appeler l'espace des structures isomorphes à $\mathfrak{S}'$ et subordonnées aux structures données sur les fibres F_x.

Soit R^n (resp. C^n, Q^n) l'espace numérique réel (resp. complexe, quaternionien), L_n (resp. L'_n, L''_n) le groupe linéaire homogène de R^n (resp. C^n, Q^n), O_n (resp. O'_n, O''_n) le groupe orthogonal dans R^n (resp. unitaire dans C^n, unitaire quaternionien dans Q^n), L^+_n (resp. O^+_n) la composante connexe de l'unité de L_n (resp. O_n). Une structure $E(B, F, G, H)$ sera appelée structure fibrée *vectorielle réelle* (resp. *réelle orientée, complexe, quaternionienne, euclidienne, euclidienne orientée, hermitienne, hermitienne quaternionienne*) si G est L_n (resp. L^+_n, L'_n, L''_n, O_n, O^+_n, O'_n, O''_n), F étant suivant les cas R^n, C^n ou Q^n. Comme L_n/O_n (resp. L^+_n/O^+_n, L'_n/O'_n, L''_n/O''_n) est homéomorphe à un espace numérique, toute structure fibrée vectorielle réelle (resp. réelle orientée, complexe, quaternionienne) admet des structures euclidiennes (resp. euclidiennes orientées, hermitiennes, hermitiennes quaternioniennes) subordonnées et celles-ci appartiennent toutes à une même classe. En identifiant R^{2n} à C^n et C^n à Q^m, si $n = 2m$, on a $L'_n \subset L^+_{2n}$, $L''_m \subset L'_n$, $O'_n \subset O^+_{2n}$, $O''_m \subset O'_n$, et le problème d'existence de structures subordonnées se pose pour des structures du type suivant:

$$\begin{array}{ll} E(B, R^{2n}, L_{2n}, H), & E(B, R^{2n}, O_{2n}, \cdot) \\ E(B, R^{2n}, L^+_{2n}, \cdot), & E(B, R^{2n}, O^+_{2n}, \cdot) \\ E(B, C^n, L'_n, \cdot), & E(B, C^n, O'_n, \cdot) \\ E(B, Q^m, L''_m, \cdot), & E(B, Q^m, O''_m, \cdot). \end{array}$$

D'après la remarque précédente, on peut toujours se ramener au cas de structures figurant dans la deuxième colonne ci-dessus. L'espace $T(V_{2n})$ associé à une variété différentiable V_{2n} est muni d'une structure fibrée vectorielle réelle, dont les structures subordonnées s'appellent respectivement: structure *vectorielle tangente orientée, presque complexe, presque quaternionienne, riemannienne, presque hermitienne, presque hermitienne quaternionienne.*

3. Les structures vectorielles complexes sur R_{2n}. Soit $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ la base canonique de C^n et identifions C^n à R^{2n} en identifiant $(\epsilon_1, i\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n, i\epsilon_n)$ à la base canonique de R^{2n}. Alors L'_n est le sous-groupe de L_{2n} qui laisse invariante la transformation I_0 définie par $I_0 z = iz$, où $z \in C^n$. Une structure vectorielle complexe sur R^{2n}, subordonnée à la structure vectorielle réelle, est définie par une transformation linéaire I de R^{2n} telle que $I^2 = -1$, c'est-à-dire, $I(Ix) = -x$ pour $x \in R^{2n}$; le produit du nombre complexe $a + bi$ par x sera $(a + bi)x$. Les vecteurs x, et Ix sont linéairement indépendants et déterminent un plan invariant par I. R^{2n} admet des bases de la forme $(e_1, Ie_1, \cdots, e_n, Ie_n)$; l'orientation correspondante de R^{2n} ne dépend que de I; c'est *l'orientation associée à* I. L'espace des structures vectorielles complexes sur R^{2n} est L_{2n}/L'_n, dont la composante connexe L^+_{2n}/L'_n est l'espace des structures complexes dont l'orientation associée est aussi associée à I_0.

Considérons R^{2n} comme l'espace des vecteurs réels de C^{2n}. La transformation I se prolonge à C^{2n} et admet les valeurs propres $\pm i$. L'ensemble des vecteurs propres correspondant à $-i$ forme un sous-espace X_n de dimension n. L'ensemble des vecteurs propres correspondant à $+i$ est $\bar{X}_n$, imaginaire conjugué de X_n, et l'on a $X_n \cap \bar{X}_n = 0$. Inversement tout sous-espace X_n de C^{2n} tel que $X_n \cap \bar{X}_n = 0$ détermine une transformation I. On peut définir X_n par n formes linéaires sur C^{2n} dont les restrictions à R^{2n} sont des formes linéaires à valeurs complexes ne s'annulant simultanément que pour le vecteur 0.

Posons $F(x, x) = x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2$, où $(x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n)$ sont les coordonnées canoniques de $x \in R^{2n}$. O_{2n}/O'_n est l'espace des transformations I laissant invariante la forme quadratique $F(x, x)$, condition équivalente à $F(x, Ix) = 0$ où $I \in O^+_{2n}$. L'espace X_n associé à I est alors une génératrice du cône défini dans C^{2n} par $F(x, x) = 0$. Donc O^+_{2n}/O'_n, que nous désignons par Γ_n, s'identifie à l'une des composantes connexes de l'espace des génératrices X_n de ce cône.

Comme $\lambda \in L_{2n}$ se prolonge à C^{2n}, l'espace fibré $T(V_{2n})$ admet un espace fibré associé $T^c(V_{2n})$ dont les fibres T^c_x sont isomorphes à C^{2n} et qui admet $T(V_{2n})$ comme sous-espace. Un élément de T^c_x s'appelle *vecteur complexe tangent* à V_{2n} en x, un sous-espace X_p de T^c_x s'appelle p-élément complexe tangent en x.

Une structure presque complexe sur V_{2n} est donc déterminée par un champ de transformations linéaires I, définies dans T_x et telles que $I^2 = -1$, ou par un champ de n-éléments complexes X_n tels qu'en chaque point $x \in V_{2n}$ on ait $X_n \cap \bar{X}_n = x$. Au voisinage de x elle est définie encore par n formes de Pfaff sur V_{2n}, à valeurs complexes et ne s'annulant simultanément pour aucun vecteur réel non nul. Il lui correspond une orientation bien déterminée de V_{2n}. Une structure presque hermitienne subordonnée à une structure riemannienne est définie par un champ de transformations orthogonales I ou par un champ de n-éléments isotropes.

4. Formes différentielles extérieures quadratiques sur V_{2n}. A une transformation I dans R^{2n} telle que $F(x, Ix) = 0$ est associée la forme bilinéaire alternée $\Psi(x, x') = F(Ix, x')$ de rang $2n$, et la forme $\Phi(x, x') = F(x, x') - i\Psi(x, x')$, qui est une forme d'Hermite définie positive par rapport à la structure complexe définie par I. A toute structure presque hermitienne sur V_{2n} est donc associée une forme différentielle extérieure quadratique Ω de rang $2n$; l'orientation associée est définie par Ω^n, forme de degré $2n$ non nulle en chaque point. Réciproquement toute forme différentielle extérieure quadratique Ω partout de rang $2n$ sur V_{2n} est associée de cette façon à des structures presque hermitiennes, qui sont toutes de même classe et qui correspondent à l'orientation définie par Ω^n. Ceci résulte du fait que $\bar{L}_{2n}/O'_n$ est homéomorphe à un espace numérique, $\bar{L}_{2n}$ désignant le sous-groupe de L_{2n} qui laisse invariante la forme $\Psi_0(x, x') = x_1y'_1 - x'_1y_1 + \cdots + x_ny'_n - x'_ny_n$.

Donc l'existence d'une structure presque complexe sur la variété orientée V_{2n} est équivalente à l'existence d'une forme différentielle extérieure quadratique

Ω telle que Ω^n soit non nulle partout et définisse l'orientation donnée. Appelons *variété presque kählerienne* une variété presque hermitienne dont la forme extérieure associée Ω est fermée, c'est-à-dire, $d\Omega = 0$. Appelons *variété symplectique* une variété V_{2n} munie d'une forme fermée Ω telle que $\Omega^n \neq 0$ en chaque point. Une variété symplectique admet toujours une structure presque kählerienne subordonnée et possède des propriétés topologiques plus particulières qu'une variété presque complexe quelconque. En particulier, si elle est compacte, ses nombres de Betti de dimension paire sont différents de 0, car $\Omega^k \not\sim 0$ pour $0 < k \leqq n$ (remarque que je dois à G. de Rham).

5. Topologie de l'espace $\Gamma_n = O^+_{2n}/O'_n$. Γ_1 est un point. Γ_2 est homéomorphe à S_2 . Γ_3 est homéomorphe à l'espace projectif complexe $P_3(C)$. Γ_4 est homéomorphe à la quadrique complexe $Q_6(C)$ à 6 dimensions complexes. Quel que soit $n > 1$, Γ_n admet une structure fibrée de base S_{2n-2} et de fibre Γ_{n-1} . On en déduit les premiers groupes d'homotopie de Γ_n . $\pi_2(\Gamma_n) \cong \pi_2(\Gamma_2)$, cyclique infini, pour $n \geqq 2$. Pour $i > 2$, on a $\pi_i(\Gamma_3) \cong \pi_i(S_7)$. Comme $Q_6(C)$ admet une structure fibrée [3] de base S_6 et de fibre $P_3(C)$, pour laquelle il existe une section[1], on a $\pi_i(\Gamma_4) \cong \pi_i(S_6) \times \pi_i(P_3(C))$.

Pour $n \geqq 4$, on a $\pi_i(\Gamma_n) = 0$, si $2 < i < 6$, et $\pi_6(\Gamma_n)$ est cyclique infini. Ces propriétés de Γ_n servent à démontrer les résultats du §6.

6. Conditions d'existence de structures presque complexes.[2] Etant donné $E(B, R^{2n}, O^+_{2n}, H)$, le premier obstacle à l'existence d'une structure fibrée hermitienne subordonnée c'est-à-dire d'une section de l'espace fibré associé de fibres isomorphes à Γ_n , est une classe de cohomologie W^3 de B à coefficients entiers. *Pour qu'il existe une section sur le squelette de dimension* 3 *de* B, qui est supposé être un complexe, *il faut et il suffit que* $W^3 = 0$. *La classe* W^3 *est identique à la classe caractéristique de Stiefel-Whitney*, premier obstacle à l'existence d'un champ associant à tout $x \in B$ une suite de $2n - 2$ vecteurs indépendants de la fibre R^{2n}_x. La variété de Stiefel $V_{2n,2n-2}$ est en effet un espace fibré de base Γ_n et de fibre $W_{n,n-1}$, variété des suites orthonormées de $n - 1$ vecteurs unitaires de l'espace hermitien C^n. Il en résulte un isomorphisme canonique de $\pi_2(\Gamma_n)$ sur $\pi_2(V_{2n,2n-2})$ et l'identification des deux premiers obstacles considérés.

Si $W^3 = 0$, *il y a un deuxième obstacle de dimension* 4 *pour* $n = 2$, *de dimension* 8 *pour* $n = 3$, *de dimension* 7 *pour* $n > 3$. Si $n \geqq 3$, $W^3 = 0$ entraîne donc $W^5 = 0$, où W^5 est la classe de Stiefel-Whitney de dimension 5. En tenant compte d'un isomorphisme canonique de $\pi_6(\Gamma_n)$ sur $\pi_6(V_{2n,2n-6})$, où $n > 3$, on voit que *le deuxième obstacle est identique à la classe* W^7 *de Stiefel-Whitney*, premier obstacle à l'existence d'un champ de $2n - 6$ vecteurs. Une condition nécessaire pour l'existence d'une structure fibrée hermitienne subordonnée est évidemment que toutes les classes W^{2k+1} de Stiefel-Whitney soient nulles.

[1] $Q_6(C)$ n'est pas homéomorphe à $S_6 \times P_3(C)$, contrairement à ce que j'ai affirmé dans [2].

[2] On tronvera des résultats concernant les structures presque quaternioniennes dans [2] et [9].

En particulier soit $E = T(V_{2n})$, muni de la structure fibrée tangente orientée de la variété orientée V_{2n}. La classe W^3 de V_{2n} est le premier obstacle à l'existence d'une structure presque complexe sur V_{2n}. *La condition* $W^3 = 0$ *est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une structure presque complexe sur une variété orientée* V_6. Si de plus le groupe de cohomologie de dimension 2 de V_6 est nul, toutes les structures presque complexes sur V_6 et correspondant à une orientation donnée forment une seule classe. *A chaque orientation de la sphère* S_6 *correspondent ainsi des structures presque complexes, appartenant toutes à une même classe d'homotopie.* Mais il faudrait sans doute des méthodes nouvelles pour décider si S_6 admet aussi des structures analytiques complexes.

Chacun des parallélismes classiques dans l'espace projectif réel P_7 correspond [3] sur $Q_6(C)$ à une structure fibrée dont les fibres sont des génératrices isomorphes à $P_3(C)$. En supposant que S_6 soit la partie réelle de $Q_6(C)$, cette structure fibrée définit justement une structure presque hermitienne sur S_6. Celle-ci pourra aussi être définie à l'aide des octaves de Cayley. Elle ne dérive pas d'une structure analytique complexe.

Par une méthode s'appliquant aux sphères S_{2n}, j'ai montré que S_4 *n'admet aucune structure presque complexe*, résultat obtenu d'une manière différente par H. Hopf. *Si* S_{2n} *est presque complexe,* S_{2n+1} *est parallélisable* (*Kirchhoff*, [5]), *ce qui entraîne le fait que* S_{4n} *n'admet aucune structure presque complexe.*

D'après Whitney [7], la classe W^3 d'une variété orientée V_4 est nulle. Mais Wen-tsün Wu a montré que pour tout $n > 2$, il existe des variétés orientées V_{2n} dont la classe W^3 n'est pas nulle.

7. Quelques résultats de Wen-tsün Wu. Par l'étude approfondie des variétés de Grassmann réelles et complexes, Wen-tsün Wu a obtenu les relations suivantes entre les classes caractéristiques d'une structure fibrée vectorielle réelle orientée $\mathfrak{F}$ et celles d'une structure fibrée vectorielle complexe subordonnée $\mathfrak{F}'$: *Relations de Wu*: $W_2(\mathfrak{F}, t) = C_2(\mathfrak{F}', t)$; $\overline{W}_2(\mathfrak{F}, t) = \overline{C}_2(\mathfrak{F}', t)$; $P(\mathfrak{F}, t) = C(\mathfrak{F}', t) \cup C(\mathfrak{F}', it)$; $\overline{P}(\mathfrak{F}, t) = \overline{C}(\mathfrak{F}', t) \cup \overline{C}(\mathfrak{F}', it)$; $X^{2n}(\mathfrak{F}) = (-1)^n C^{2n}(\mathfrak{F}')$.

Dans ces formules on a posé: $W_2(\mathfrak{F}, t) = \sum W_2^k(\mathfrak{F})t^k$, $\overline{W}_2(\mathfrak{F}, t) = \sum \overline{W}_2^k(\mathfrak{F})t^k$, où $W_2^k(\mathfrak{F})$ (resp. $\overline{W}_2^k(\mathfrak{F})$) sont les classes (resp. classes duales) de Stiefel-Whitney réduites modulo 2. $P(\mathfrak{F}, t) = \sum(-1)^k P^{4k}(\mathfrak{F})t^{4k}$, $\overline{P}(\mathfrak{F}, t) = \sum \overline{P}^{4k}(\mathfrak{F})t^{4k}$, où $P^{4k}(\mathfrak{F})$ (resp. $\overline{P}^{4k}(\mathfrak{F})$) sont les classes (resp. classes duales) de Pontrjagin. $C(\mathfrak{F}', t) = \sum C^{2k}(\mathfrak{F}')t^{2k}$, $\overline{C}(\mathfrak{F}', t) = \sum \overline{C}^{2k}(\mathfrak{F}')t^{2k}$, où $C^{2k}(\mathfrak{F}')$ (resp. $\overline{C}^{2k}(\mathfrak{F}')$) sont les classes (resp. classes duales) de Chern de $\mathfrak{F}'$; ces deux polynômes réduits modulo 2 sont désignés par $C_2(\mathfrak{F}', t)$ et $\overline{C}_2(\mathfrak{F}', t)$. $X^{2n}(\mathfrak{F})$ est la classe caractéristique d'Euler-Poincaré. On trouvera la définition précise de ces classes dans la thèse de Wu.

Théorème de Wu. *Les classes d'isomorphie des structures presque complexes sur une variété orientée* V_4 *correspondent d'une façon biunivoque aux classes de cohomologie* C^2 *sur* V_4 *telles que:*

$$W_2^2(V_4) = C_2^2\,;\; P^4(V_4) + 2X^4(V_4) = C^2 \cup C^2,$$

où C_2^2 désigne la classe déduite de C^2 par réduction modulo 2, $P^4(V_4)$ la classe de Pontrjagin, et $X^4(V_4)$ la classe d'Euler-Poincaré. C^2 sera la classe de Chern de la structure presque complexe correspondante.

Les relations de Wu entraînent que S_{4k} n'admet pas de structure presque complexe. *Ce résultat est valable pour toute variété V_{4k} dont l'anneau de cohomologie est isomorphe à celui de S_{4k} et dont la classe de Pontrjagin P^{4k} est nulle.*

8. Les sous-variétés d'une variété presque complexe V_{2n}. Un p-élément X_p de V_{2n} sera dit *complexe* lorsqu'il est invariant par la transformation I définie dans l'espace tangent T_x qui contient X_p ; il sera dit *réel* lorsqu'il rencontre son transformé par I au point x seulement. Une sous-variété V_p de V_{2n} sera dite *presque complexe* (resp. *réelle*) lorsque les p-éléments tangents à V_p sont complexes (resp. réels). Une sous-variété presque complexe est munie d'une structure presque complexe induite; celle-ci dérive d'une structure analytique complexe si V_{2n} est analytique complexe.

Soit V_n une sous-variété réelle de V_{2n}. L'espace fibré $T(V_n)$ admet un isomorphisme sur l'espace fibré $N(V_n)$ des vecteurs normaux à V_n, les points de V_n restant fixés. Réciproquement si cette condition est vérifiée pour une sous-variété V_n d'une variété quelconque V_{2n}, il existe dans un voisinage de V_n une structure presque complexe telle que V_n soit une sous-variété réelle. En particulier, *le voisinage de la diagonale Δ de $V_n \times V_n$ admet une structure presque complexe telle que Δ soit une sous-variété réelle. Il admet même une structure analytique complexe telle que Δ soit une sous-variété analytique réelle.*

La position d'une sous-variété réelle V_n dépend de la structure de $T(V_n)$. L'espace fibré $T^c(V_n)$ admet un isomorphisme canonique dans $T(V_{2n})$ muni de la structure fibrée complexe. *Si V_n est déformable en un point de V_{2n}, $T^c(V_n)$ est isomorphe à $V_n \times C^n$.* Pour toute variété V_n, Wu a démontré la relation suivante: $C(V_n, t) = P(V_n, t)$, où $C(V_n, t)$ désigne le "polynôme de Chern" de $T^c(V_n)$ et $P(V_n, t)$ le "polynôme de Pontrjagin" de $T(V_n)$ définis au §7. Si V_n est une sous-variété réelle de V_{2n}, $C(V_n, t)$ est la trace sur V_n de $C(V_{2n}, t)$, polynôme de Chern de $T(V_{2n})$ muni de la structure fibrée complexe.

Pour $n = 2$, la relation de Wu donne $C(V_2, t) = 1$, ce qui montre que *pour toute variété V_2 l'espace $T^c(V_2)$ est isomorphe à $V_2 \times C^2$.*

Soit V_n une sous-variété réelle de l'espace projectif complexe $P_n(C)$. D'après la relation de Wu, la trace sur V_n de $C^{4k+2}(P_n(C))$ est nulle; *il en résulte que les cycles de dimension $4k + 2$ de V_n sont ~ 0 dans $P_n(C)$. Par contre pour tout $k \leqq n$ les cycles de dimension $2k$ d'une sous-variété complexe ne sont pas tous ~ 0 dans $P_n(C)$; ce résultat est valable aussi pour toute sous-variété presque complexe d'une variété presque kählerienne.*

Les notions et les résultats précédents s'étendent aux variétés plongées (V_p, f) dans V_{2n}, où f est une application différentiable régulière de V_p dans V_{2n}. Si V_{2n} est muni d'une forme différentielle extérieure Ω telle que $\Omega^n \neq 0$ en chaque point, *les variétés intégrales de Ω sont des variétés plongées réelles pour une certaine structure presque complexe de V_{2n}.*

9. Problème d'équivalence de deux structures presque complexes. Etant données deux variétés presque complexes V_{2n} et $\bar{V}_{2n}$, une *équivalence* de l'une à l'autre est un homéomorphisme différentiable de V_{2n} sur $\bar{V}_{2n}$ dont le prolongement à $T(V_{2n})$ est un isomorphisme de $T(V_{2n})$ sur $T(\bar{V}_{2n})$ par rapport aux structures fibrées vectorielles complexes. Si f est une application différentiable régulière d'une variété W_{2n} dans V_{2n}, à la structure presque complexe sur V_{2n} correspond une structure presque complexe sur W_{2n}, appelée image réciproque par f de la première. Si celle-ci est définie localement par n formes de Pfaff complexes $\omega_1, \cdots, \omega_n$, son image réciproque est définie par les formes $f^*(\omega_k)$. Le problème d'équivalence locale de deux structures presque complexes peut être traité par les méthodes de E. Cartan et il vient d'être étudié pour $n = 2$ par Paulette Libermann [6].

Pour qu'une structure presque complexe sur V_{2n} dérive d'une structure analytique complexe, il faut et il suffit qu'elle soit partout localement équivalente[3] à la structure complexe naturelle sur C^n, qui est définie par les formes $dz_1, dz_2, \cdots, dz_n$. Soit g une équivalence d'un ensemble ouvert de V_{2n} à un ensemble ouvert de C^n. Les formes $dg_h = g^*(dz_h)$ sont alors des combinaisons linéaires indépendantes des formes ω_h, d'où l'on déduit les relations: $d\omega_h = \sum \omega_h \wedge \omega_{hl}$, où ω_{hl} sont des formes de Pfaff complexes sur V_{2n}. Ces équations, indiquées par G. de Rham, sont des conditions nécessaires pour que la structure presque complexe dérive d'une structure complexe. Dans le cas où les composantes réelles et imaginaires des formes ω_h sont des formes de Pfaff analytiques sur V_{2n}, ces conditions sont aussi suffisantes.[4] En général, on aura:

$$d\omega_h = \sum \omega_h \wedge \omega_{hl} + \sum a_{hlm} \bar{\omega}_l \wedge \bar{\omega}_m .$$

On peut dire que les formes $\sum a_{hlm} \bar{\omega}_l \wedge \bar{\omega}_m$ définissent la torsion de la structure presque complexe; les a_{hlm} sont les composantes de son *tenseur hermitien de torsion.*

Remarquons que les formules intégrales de Chern [1] donnant les classes de Chern s'étendent au cas des structures presque complexes.

Bibliographie

1. S. S. Chern, *Characteristic classes of hermitian manifolds*, Ann. of Math. t. 47 (1946).
2. C. Ehresmann, *Sur la théorie des espaces fibrés*, Colloque de Topologie Algébrique, C.N.R.S., Paris, 1947.
3. ———, *Sur les congruences paratactiques et les parallélismes dans les espaces projectifs*, C. R. Acad. Sci. Paris, janvier, 1939.

[3] Ces équivalences locales définissent alors les systèmes de coordonnées locales analytiques complexes.

[4] On peut se ramener au théorème de Frobenius appliqué à des formes analytiques complexes.

4. H. HOPF, *Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten*, Courant Anniversary vol., 1948.

5. A. KIRCHHOFF, *Sur l'existence de certains champs tensoriels sur les sphères*, C. R. Acad. Sci. Paris t. 225 (1947).

6. PAULETTE LIBERMANN, *Problèmes d'équivalence relatifs à une structure presque complexe*, Académie Royale de Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences, 1950.

7. H. WHITNEY, *On the topology of differentiable manifolds*, Lectures in Topology, Ann. Arbor, 1941.

8. WEN-TSÜN WU, *Sur la structure presque complexe d'une variété différentiable réelle de dimensions* 4, C. R. Acad. Sci. Paris t. 227 (1948).

9. ———, *Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques*, Thèse, Strasbourg, 1949.

UNIVERSITY OF STRASBOURG,
STRASBOURG, FRANCE.

(Dai « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », Serie V, Vol. X, Fasc. 1-2, Roma 1951)

/30/

Sur la théorie des variétés feuilletées

par **CHARLES EHRESMANN** (à Strasbourg)

Le présent travail est le développement de l'exposé que j'ai fait au Congrès de Rome (26-28 avril 1950).

La théorie des variétés feuilletées est une généralisation de l'étude globale des courbes définies par une équation différentielle. La notion de structure feuilletée est aussi une généralisation naturelle, d'une façon plus précise une localisation de la notion de structure fibrée. Les résultats obtenus par Reeb et par moi-même ne sont publiés jusqu'ici que d'une façon sommaire. Reeb a présenté sur la théorie des variétés feuilletées, à Strasbourg en 1948, une thèse de doctorat qui paraîtra prochainement. Je vais exposer quelques résultats qui ne figurent pas dans cette thèse [1].

Après avoir défini la notion de variété feuilletée, j'indique quelques exemples et j'introduis la notion de feuilletage du deuxième ordre. Je démontre ensuite un théorème de la théorie des espaces fibrés. Comme application de ce théorème j'étudie les propriétés topologiques d'une feuille, qui dépendent de la position de la feuille au point de vue de l'homotopie et de l'homologie. J'étends enfin les résultats aux variétés intégrales de certains systèmes différentiels d'un type très général.

J'ai terminé mon exposé fait au Congrès de Rome par des indications succinctes sur la structure du voisinage d'une feuille. L'espace des vecteurs normaux à une feuille a des propriétés caractéristiques: il admet un groupe structural discret ou, ce qui revient au même, une connexion infinitésimale intégrable. Dans le cas d'une feuille stable, la structure feuilletée de son voisinage est complètement caractérisée par une représentation du groupe fondamental de la feuille sur un groupe d'automorphismes différentiables d'une sec-

[1] G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées* (Thèse, Strasbourg, 1948).

tion d'un voisinage tubulaire de la feuille. Lorsque toutes les feuilles voisines d'une feuille stable sont compactes (ce qui a toujours lieu d'après Reeb pour une feuille compacte à groupe fondamental fini), ce groupe est équivalent à un groupe fini de rotations euclidiennes d'une boule. Ceci donne une idée précise de la structure du voisinage d'une telle feuille. Ces derniers résultats seront exposés dans un article faisant suite au présent travail.

1. La notion de variété feuilletée.

Soit V_n une variété différentiable et soit Φ_p un champ de p-éléments (2), c'est-à-dire une fonction continue qui fait correspondre à tout point x de V_n un p-élément X d'origine x. Au voisinage de chaque point de V_n le champ Φ_p peut être défini par un système de Pfaff:

$$\omega_1 = 0\,,\ \omega_2 = 0\,, \ldots, \omega_{n-p} = 0\,,$$

où les ω_i désignent $n-p$ formes de Pfaff définies dans un voisinage de x et linéairement indépendantes en chaque point de ce voisinage. Le champ Φ_p est dit *complètement intégrable* lorsque tout point x de V_n admet un voisinage W tel que Φ_p soit défini dans W par $d\,y_1 = 0$, $d\,y_2 = 0, \ldots, d\,y_{n-p} = 0$, où $y_1, y_2, \ldots, y_{n-p}$ sont $n-p$ fonctions numériques différentiables définies dans W. A ces fonctions on peut adjoindre alors p fonctions $y_{n-p+1}, \ldots, y_n$ telles que les n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forment un système de coordonnées locales différentiables dans un voisinage ouvert W' de x, où $W' \subset W$. Un tel système de coordonnées locales sera appelé distingué. Il représente W' sur un ensemble ouvert W_1 de R^n de telle façon que les éléments de Φ_p correspondent aux p éléments de W_1 parallèles à la variété linéaire $y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-p} = 0$.

Une *variété différentiable plongée* dans V_n est définie par la donnée d'une variété différentiable V_p et d'une application différentiable f de V_p dans V_n, cette application étant de rang p en chaque

(2) Un p-élément ou élément de contact de dimension p est le couple d'un point x de V_n et d'un sous-espace linéaire de dimension p, passant par x, de l'espace linéaire tangent à V_n en x; le point x sera appelé origine du p-élément. Si V_n est k fois différentiable, l'ensemble des p-éléments de V_n est une variété $k-1$ fois différentiable.

point de V_p. L'ensemble $f(V_p)$ est le support de la variété plongée. f est un *homéomorphisme local* de V_p dans V_n, c'est-à-dire tout point de V_p admet un voisinage tel que la restriction de f à ce voisinage soit un homéomorphisme sur un sous-espace de V_n. Etant donné un homéomorphisme local f de V_p dans V_n et une structure différentiable sur V_n, il existe au plus une structure différentiable sur V_p pour laquelle f soit différentiable et de rang p en chaque point.

Soient (V_p, f) et $(\overline{V}_p, \overline{f})$ deux variétés différentiables plongées dans V_n. Un *isomorphisme* de (V_p, f) sur $(\overline{V}_p, \overline{f})$ est un homéomorphisme φ de V_p sur $\overline{V}_p$ tel que $f = \overline{f}\varphi$: ceci entraîne que φ est différentiable et de rang p en chaque point.

Lorsque f est biunivoque, la variété plongée (V_p, f) est dite *simple*. L'application f transporte alors sur $W_p = f(V_p)$ une structure de variété différentiable telle que l'application canonique g de W_p dans V_n soit différentiable et partout de rang p. L'application f, restreinte à W_p, est un isomorphisme de (V_p, f) sur (W_p, g). Une variété plongée (W_p, g), où W_p est un sous-ensemble de V_n et g, l'application canonique de W_p dans V_n, est appelée *sous-variété* de V_n ; on la désigne simplement par W_p.

Lorsque V_p n'est pas compact, *l'adhérence* de la variété plongée (V_p, f) est l'adhérence (ensemble des valeurs d'adhérence) de f suivant le filtre des complémentaires des parties relativement compactes de V_p. La variété plongée (V_p, f) est dite *propre* lorsque son adhérence ne contient aucun point de $f(V_p)$. Pour qu'une sous-variété de V_n soit propre, il faut et il suffit que sa topologie soit la topologie induite par celle de V_n.

Etant donné sur V_n un champ Φ_p de p-éléments, une *variété intégrale* de Φ_p est une sous-variété V_p de V_n telle que le p-élément tangent à V_p en $x \in V_p$ soit l'élément de Φ_p associé à x. Une variété intégrale V_p est dite complète lorsqu'elle est connexe et identique à toute variété intégrale connexe qui la contient. Si Φ_p est complètement intégrable, par chaque point de V_n il passe une variété intégrale complète et une seule.

Définition. — *Une variété feuilletée différentiable est une variété différentiable V_n munie d'un champ complètement intégrable Φ_p de p éléments. Nous dirons que Φ_p définit sur V_n une structure feuilletée différentiable ou un feuilletage différentiable. Les variétés intégrales complètes de Φ_p sont appelées les feuilles de cette structure.*

Sur la variété feuilletée V_n on peut considérer la topologie $\mathfrak{T}_p$ telle qu'un système fondamental de voisinages de $x \in V_n$ relativement à $\mathfrak{T}_p$ soit formé par l'ensemble des voisinages de x relativement à une variété intégrale quelconque de Φ_p passant par x. Les feuilles sont alors les composantes connexes de V_n relativement à $\mathfrak{T}_p$.

La notion de variété feuilletée admet une généralisation (3) qui ne fait intervenir aucune structure différentiable. Considérons sur l'espace numérique R^n d'une part sa topologie naturelle $\overline{\mathfrak{T}}$, d'autre part la topologie $\overline{\mathfrak{T}}_p$ définie de la manière suivante: Un système fondamental de voisinages de $u \in R^n$ relativement à $\overline{\mathfrak{T}}_p$ est formé par l'ensemble des voisinages de u relativement à la variété linéaire passant par u et définie par $u_k = \text{const.}$, où $k = 1, 2, \ldots, n-p$ et où $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ désigne le système de coordonnées canonique dans R^n. *Etant donnée une variété topologique V_n, une structure de variété feuilletée sur V_n est définie par la donnée d'une topologie $\mathfrak{T}_p$ sur V_n satisfaisant à la condition suivante: Tout point x de V_n admet un voisinage ouvert distingué U, relativement à la topologie primitive $\mathfrak{T}$ de V_n, tel qu'il existe une application f de U sur un ensemble ouvert U' de R^n qui soit un homéomorphisme, d'une part relativement aux topologies induites sur U et U' par $\mathfrak{T}$ et $\overline{\mathfrak{T}}$, d'autre part relativement aux topologies induites sur U et U' par $\mathfrak{T}_p$ et $\overline{\mathfrak{T}}_p$.* Les composantes connexes de V_n relativement à la topologie $\mathfrak{T}_p$ sont appelées les feuilles de la structure. Si V_n est muni de plus d'une structure k fois différentiable (respectivement analytique) et si l'homéomorphisme f considéré ci-dessus est k fois différentiable (respectivement analytique) et de rang n partout, la structure feuilletée est dite k fois différentiable (resp. analytique). Dans ce cas elle peut être définie comme précédemment par un champ complètement intégrable Φ_p, $k-1$ fois différentiable (resp. analytique). Les feuilles sont alors des sous-variétés k fois différentiables (resp. analytiques).

Un homéomorphisme local φ d'une variété W_n dans une variété feuilletée V_n détermine sur W_n une structure feuilletée, image réciproque par φ de celle de V_n, satisfaisant à la condition suivante: Tout ensemble ouvert U de W_n tel que la restriction de φ à U soit un homéomorphisme sur un ensemble ouvert *distingué* de V_n est un ensemble ouvert distingué de W_n. Cette structure feuilletée est autant de fois différentiable que celle de V_n.

Les variétés feuilletées que nous aurons à considérer seront toujours différentiables.

(3) G. Reeb, *Variétés feuilletées, feuilles voisines* (Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 294, 1947, p. 1613).

2. Exemples de variétés feuilletées.

a) Soit f une application différentiable partout de rang $n - p$ d'une variété V_n sur une variété V_{n-p}. Les composantes connexes des images réciproques par f des points de V_{n-p} sont les feuilles d'une structure feuilletée sur V_n. On démontre facilement:

PROPOSITION: *Si f est deux fois différentiable et partout de rang $n - p$ et si V_n est compact (ou bien $f^{-1}(x)$ compact connexe quel que soit $x \in V_{n-p}$), les ensembles $f^{-1}(x)$ sont les fibres d'une structure fibrée différentiable sur V_n.*

V_{n-p} est l'espace quotient de V_n par la relation d'équivalence $f(x) = f(y)$. Sous l'hypothèse de la proposition, tout point x de V_{n-p} admet un voisinage U tel que $f^{-1}(U)$ soit homéomorphe à $U \times f^{-1}(x)$, par un homéomorphisme différentiable appliquant $f^{-1}(x')$ sur $\{x'\} \times f^{-1}(x)$, pour tout $x' \in U$. Ceci caractérise une structure fibrée différentiable (4).

Remarquons qu'une structure fibrée est toujours subordonnée à une structure feuilletée, celle dont les feuilles sont les composantes connexes des fibres; mais les feuilles d'une structure feuilletée ne sont pas nécessairement les fibres d'une structure fibrée.

b) L'exemple suivant d'une structure feuilletée sur la sphère S_3 est dû à Reeb (5).

Dans l'espace R^3, désignons par r la distance d'un point à l'axe O_z. Considérons dans le cylindre de révolution défini par $r \leq 1$ la famille de surfaces définies par $z + a = \frac{r^2}{1 - r^2}$, a étant une constante arbitraire. Cette famille définit une structure feuilletée à l'intérieur du cylindre. Par identification des points (x, y, z) et $(x, y, z + 1)$ on déduit du cylindre un tore plein; le feuilletage du cylindre est l'image réciproque d'un feuilletage de l'intérieur du tore plein.

Prenons deux exemplaires du tore plein, munis du feuilletage considéré. La sphère S_3 peut s'obtenir à partir de l'espace somme

(4) C. EHRESMANN, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 224, 1947, p. 1611.

(5) C. EHRESMANN et G. REEB, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 218, 1914, p. 955.

des deux tores pleins en identifiant les deux bords par un homéomorphisme transformant les méridiens de l'un en parallèles de l'autre.

Les images des feuilles considérées à l'intérieur des deux tores plus le tore image des deux bords définissent sur S_3 une structure feuilletée. La feuille exceptionnelle homéomorphe au tore est l'adhérence des autres feuilles, qui sont toutes non compactes. Cette structure feuilletée ne peut pas être associée comme celle de l'exemple précédent à une application continue de S_3 dans un espace séparé.

Par recollement de deux tores pleins on peut obtenir également les espaces lenticulaires ainsi que $S_2 \times S_1$. On peut donc définir sur ces espaces, ainsi que sur $S_n \times S_1$, des structures feuilletées analogues.

3. Feuilletages du second ordre de V_n.

Soit V'_n l'ensemble des p-éléments de V_n. Si V_n est k fois différentiable, V'_n est muni d'une structure de variété $k-1$ fois différentiable. Etant donné un système de coordonnées locales $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans V_n, les p-éléments définis par $dx_i = \sum_{j=1}^{p} p_{ij} dx_j$, $i = p+1, \dots, n$, forment un ensemble ouvert de V'_n dans lequel $(x_1, x_2, \dots, x_n, p_{ij})$ forme un système de coordonnées locales admissibles. V'_n est également muni d'une structure fibrée, de base V_n. La fibre qui se projette sur $x \in V_n$ est l'ensemble des p-éléments d'origine x; c'est une variété isomorphe à la variété de Grassmann $R_{n-p,p}$ (variété des p-éléments d'origine O de R^n).

Si V_n est deux fois différentiable, l'ensemble des p-éléments de V'_n est une variété $(V'_n)'$. La projection canonique de V'_n sur V_n est différentiable; son prolongement aux vecteurs applique un p-élément sur un q-élément. Nous dirons qu'un p-élément X' de V'_n prolonge un p-élément X de V_n si X' se projette sur X. L'ensemble des p-éléments prolongés de V_n, c'est-à-dire des éléments de $(V'_n)'$ qui prolongent les éléments de V'_n, est une sous-variété $V'^{\wedge}_n$ de $(V'_n)'$.

Si (V_p, f) est une variété deux fois différentiable plongée dans V_n, le prolongement de f aux vecteurs fait correspondre à l'espace tangent à V_p en x un p-élément X de V_n, d'origine $f(x)$, appelé p-élément tangent à la variété plongée en x. L'application $g\,(x \to X)$ est une application différentiable qui plonge V_p dans V'_n. Nous dirons que la variété plongée (V_p, g) est prolongement de (V_p, f). Le n élément X' tangent à (V_p, g) en x prolonge X et s'appelle *p-élément* *du second ordre* tangent à la variété plongée (V_p, f) en x. L'ensemble des p-éléments du second ordre de V_n est une variété $V_n'' \subset (V_n')'$. Un champ de p-éléments du second ordre est une fonction continue qui fait correspondre à tout $X \in V_n'$ un p-élément du second ordre prolongeant X.

PROPOSITION. — *Sur toute variété deux fois différentiable V_n il existe un champ de p-éléments du second ordre.*

La variété V_n'' est en effet un espace fibré de base V_n'. La fibre qui se projette sur $X \in V_n'$ est l'ensemble des éléments du second qui prolongent X. C'est un espace homéomorphe à un espace numérique.

En effet, si X est défini par le système de coordonnées locales $(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{ij})$, un élément du second ordre qui se projette sur X est défini par $d x_i = \sum_{j=1}^{p} p_{ij}\, d x_j$, $d p_{ij} = \sum_{k=1}^{p} p_{ijk}\, d x_k$, où $p_{ijk} = p_{ikj}$, c'est-à-dire par la famille des nombres p_{ijk}, où $i = p+1, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, p$; $j > k$. La théorie des espaces fibrés montre alors que l'espace fibré V_n'' sur V_n' admet une section, laquelle définit un champ du second ordre.

La proposition résulte aussi de l'existence sur V_n d'une métrique riemannienne différentiable: Les p-éléments géodésiques du second ordre forment un champ du second ordre.

DÉFINITION. — *Un feuilletage du second ordre sur une variété deux fois différentiable V_n est défini par la donnée sur V_n d'un champ complètement intégrable Φ_p' de p-éléments du second ordre.*

Etant donné une variété plongée (V_p, g) dans V_n', soit π la projection canonique de V_n' sur V_n et soit $f = \pi g$. Pour que la variété plongée (V_p, g) prolonge (V_p, f), il faut et il suffit que tout p-élément tangent à (V_p, g) soit un p-élément prolongé de V_n. Une variété intégrale dans V_n' d'un champ de p éléments du second ordre sur V_n est le prolongement d'une variété plongée dans V_n, appelée également *variété intégrale du champ du second ordre*. Les *feuilles* du feuilletage du second ordre défini par Φ_p' sont les variétés intégrales complètes de Φ_p', considérées comme variétés plongées dans V_n. Il existe une feuille et une seule tangente à un p-élément donné de V_n.

EXEMPLE : Les variétés totalement géodésiques de dimension p d'un espace de Riemann à courbure constante sont les feuilles d'un feuilletage du second ordre. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que le champ des p-éléments géodésiques du second ordre d'un espace de Riemann soit complètement intégrable est que la métrique riemannienne soit à courbure constante. Plus généralement, les variétés géodésiques d'un espace localement projectif sont les feuilles d'un feuilletage du second ordre.

Une variété trois fois différentiable admet toujours un feuilletage du second ordre dont les feuilles sont à une dimension; il serait intéressant de savoir si elle en admet aussi un dont les feuilles soient de dimension $p > 1$

On définirait d'une façon analogue la notion de champ de p-éléments d'ordre h et la notion de feuilletage d'ordre h.

4. Un théorème de la théorie des espaces fibrés.

Admettons la notion d'espace fibré à groupe structural topologique G sous la forme exposée dans[6]; mais rappelons simplement les notations et la terminologie.

Considérons un espace fibré de symbole $E(B, F, G, H)$. La structure fibrée sur E est caractérisée par un ensemble de cartes locales de $B \times F$ dans E. B est l'espace de base. L'espace F est supposé muni d'une structure admettant G comme groupe d'automorphismes. G est supposé muni d'une topologie compatible avec sa structure de groupe et telle que le transformé de $y \in F$ par $s \in G$ soit une fonction continue de (s, y). H est l'ensemble des homéomorphismes distingués de F sur les fibres de E. Ces homéomorphismes seront appelés les *isomorphismes* de F sur les fibres. Nous supposerons en effet la fibre $h(F)$ munie de la structure déduite de celle de F par $h \in H$. On obtient ainsi une structure bien déterminée sur chaque fibre, car l'ensemble des isomorphismes de F sur $h(F)$ est l'ensemble $h\,G$. L'ensemble H se trouve muni d'une structure fibrée de symbole $H(B, G, G_\gamma, \overline{H})$; c'est l'*espace fibré principal associé* à l'espace fibré donné; on pourra l'appeler aussi l'espace des isomorphismes de F sur les fibres de E. Le groupe structural G_γ de cet espace est le groupe des translations à gauche $(s \longrightarrow a\,s)$ de G. Les fibres sont les ensembles $h\,G$. A $h \in H$ correspond d'une façon biunivoque l'isomorphisme $\overline{h} \in \overline{H}$ de G sur $h\,G$

(6) C. EHRESMANN, *Sur la théorie des espaces fibrés* (Colloque de Topologie algébrique, C. N. R. S. Paris 1947, p. 3-15).

défini par $s \to h s$. C'est un isomorphisme relatif aux structures suivantes: Sur G la structure invariante par G_γ peut être définie par le groupe des translations à droite de G. Sur une fibre H_x de H la structure correspondante est donnée par la loi de composition $(h, s) \to h s$, où $h \in H_x$ et $s \in G$, qui définit G comme groupe d'opérateurs simplement transitif dans H_x. En supposant h quelconque dans H, la loi de composition $(h, s) \to h s$ est continue et définit G comme groupe d'opérateurs dans H, les fibres étant les classes d'intransitivité. L'application $h \to \bar{h}$ est un isomorphisme canonique de H sur $\bar{H}$ qui permet d'identifier ces deux espaces. L'application $(h, y) \to h y$, où $h y$ désigne le transformé de $y \in F$ par $h \in H$, est une application continue de $H \times F$ sur E. Il lui correspond dans $H \times F$ la relation d'équivalence $(h s, s^{-1} y) \sim (h, y)$ et il en résulte un isomorphisme canonique de E sur l'espace quotient de $H \times F$ par cette relation d'équivalence, ce qui permet d'identifier E à cet espace quotient.

Etant donnés deux espaces fibrés de symboles $E(B, F, G, H)$ et $E'(B', F, G, H')$, c'est-à-dire de fibres isomorphes, tout isomorphisme d'une fibre du premier sur une fibre du second est de la forme $h' h^{-1}$, où $h \in H$, $h' \in H'$. L'ensemble $H' H^{-1}$ de ces isomorphismes est un espace fibré H'' de base $B \times B'$; la fibre qui se projette sur $(x, x') \in B \times B'$ est l'ensemble des isomorphismes de F_x sur $F_{x'}$; les fibres sont isomorphes à G, le groupe structural étant le groupe des similitudes de G, c'est-à-dire des transformations $s \to a s b$, où $s, a, b \in G$. A l'application $(h, h') \to h' h^{-1}$ de $H \times H'$ sur H'' est associée la relation d'équivalence $(h, h') \sim (h s, h' s)$ et par suite un isomorphisme canonique de H'' sur l'espace quotient de $H \times H'$ par cette relation d'équivalence. Celle-ci définit sur $H \times H'$ une structure d'espace fibré principal, de base H'' et de fibres isomorphes à G. Si l'on pose $h' h^{-1} = h''$ on a $h' = h'' h$ et l'application $(h, h'') \to h'' h$ est une application continue de $H \times H''$ sur H'.

Une *représentation*, ou d'une façon plus explicite une (F, G)-représentation, de $E(B, F, G, H)$ dans $E'(B', F, G, H')$ est une application continue φ de E dans E' telle que $h \to \varphi h$ soit une application *continue* $\widehat{\varphi}$ de H dans H'. La condition $\varphi h \in H'$ signifie que la restriction de φ à chaque fibre de E est un isomorphisme sur une fibre de E'. L'application $\widehat{\varphi}$ est une représentation de $H(B, G, G_\gamma, \bar{H})$ dans $H'(B', G, G_\gamma, \bar{H}')$, ce qui signifie ici que $\widehat{\varphi}$ est une application continue de H dans H' telle que $\widehat{\varphi}(h) s = \widehat{\varphi}(h s)$, équation équivalente à $(\varphi h)s = \varphi(hs)$. Réciproquement soit θ une représentation de H dans H'. L'application continue $(h, y) \to (\theta(h), y)$ de $H \times F$ dans $H' \times F$ donne par passage aux quotients une application continue φ de E dans E', définie par $\varphi(hy) = \theta(h)y$. On a $\varphi h = \theta(h)$, ce qui montre que φ est une représentation de $E(B, F, G, H)$ dans $E'(B', F, G, H')$ et que $\theta = \widehat{\varphi}$.

Un *isomorphisme* de $E(B, F, G, H)$ sur $E'(B', F, G, H')$ est une représentation φ qui soit en même temps un homéomorphisme de E sur E'.

Soit φ une représentation de $E(B, F, G, H)$ dans $E(B', F, G, H')$. Par passage aux espaces quotients on en déduit une application continue f de B dans B', appelée projection de φ. Pour que φ soit un isomorphisme, il faut et il suffit que f soit un homéomorphisme.

On a le théorème fondamental suivant [7] :

THÉORÈME 1. — *Soit φ une représentation de l'espace fibré $E(B, F, G, H)$ dans $E'(B', F, G, H')$ et soit f la projection de φ. Etant donnée une déformation (f_t) de f, où t parcourt l'intervalle $I = [0,1]$, il existe une déformation (φ_t) de φ telle que φ_t soit une représentation de E dans E' se projetant sur f_t.*

On peut démontrer ce théorème en le ramenant au théorème ordinaire du relèvement des homotopies. Montrons en effet que les représentations φ correspondent canoniquement à certaines applications continues de B dans l'espace fibré H''.

Soit φ_x la restriction de φ à la fibre F_x de E. L'application $x \to \varphi_x$ est une application continue φ' de B dans $H'' = H'H^{-1}$. En effet, l'application $h \to (h, \varphi h)$ est une représentation de H dans $H \times H'$, c'est-à-dire une application continue telle que $hs \to (hs, \varphi hs)$. L'application φ' s'en déduit par passage aux quotients. Soit π la projection canonique de H'' sur $B \times B'$ et $\bar{f}$ l'application $x \to (x, f(x))$. On a $\bar{f} = \pi\varphi'$. Réciproquement soit τ une application continue de B dans H'' telle que $\bar{f} = \pi\tau$. Soit x la projection sur B de $h \in H$. L'application $h \to \tau(x)h$ est alors une représentation $\widehat{\varphi}$ de H dans H' correspondant à une représentation φ de E dans E' et se projetant sur f. De plus on a $\varphi_x = \tau(x)$ et par suite $\tau = \varphi'$.

[7] C. EHRESMANN, *Sur les variétés plongées dans une variété différentiable* (Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 226, 1948, p. 1879).

A la déformation (f_t) correspondant la déformation $(\overline{f}_t)$ de $\overline{f}$, d'après le théorème du relèvement des homotopies [8] il existe une déformation (φ'_t) de φ' telle que $\overline{f}_t = \pi\,\varphi'_t$. Il lui correspond canoniquement une déformation (φ_t) de φ telle que φ_t se projette sur f_t. En effet, soit $\widehat{\varphi_t}$ la représentation $h \longrightarrow \varphi'_t(x)\,h$ de H dans H'. Comme l'application $(h, t) \longrightarrow \varphi'_t(x)\,h$ est continue, $\widehat{(\varphi_t)}$ définit une déformation de $\widehat{\varphi}$. Or à $\widehat{\varphi_t}$ correspond la représentation φ_t de E dans E', déduite par passage aux quotients de l'application $(h, y) \longrightarrow (\widehat{\varphi_t}(h), y)$ de $H \times F$ dans $H' \times F$. La famille (φ_t) est une déformation de φ parce qu'elle est la projection d'une déformation [9] de $(h, y) \longrightarrow (\widehat{\varphi}(h), y)$.

Introduisons les notations suivantes : L'espace $B \times E'$ est d'une façon naturelle un espace fibré de symbole $B \times E'$ $(B \times B', F, G, B \times H')$. Soit $f^*(B')$ le sous-espace de $B \times B'$ formé par l'ensemble des couples $(x, f(x))$. Soit $f^*(E')$ le sous-espace de $B \times E'$ formé par l'ensemble des points se projetant sur $f^*(B')$; c'est un espace fibré de symbole $f^*(E')\,(f^*(B'), F, G, f^*(H'))$, l'espace fibré principal associé étant $f^*(H')$ conformément au même principe de notation. L'espace de base de $f^*(E')$ peut aussi être identifié à B par l'homéomorphisme $\overline{f}$ de B sur $f^*(B')$ défini par $x \longrightarrow (x, f(x))$. La restriction à $f^*(E')$ de l'application canonique de $B \times E'$ sur E' est une représentation f' de $f^*(E')$ dans $E'(B', F, G, H')$ qui se projette sur f. La représentation φ de $E(B, F, G, H)$ dans $E'(B', F, G, H')$ détermine un isomorphisme $\overline{\varphi}$ de $E(B, F, G, H)$ sur $f^*(E')$, défini par $\overline{\varphi}(z) = (x, \varphi(z))$, où x est la projection sur B de $z \in E$. On a ainsi une décomposition canonique de φ donnée par $\varphi = f'\,\overline{\varphi}$.

Le théorème 1 admet le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1. — *Soit f une application continue de B dans B', espace de base de $E'(B', F, G, H')$, et soit (f_t) une déformation de f. Alors il existe un isomorphisme φ_t de $f^*(E')$ sur $f_t^*(E')$ se projetant sur l'application identique de B et tel que (φ_t) définisse une déformation (et par suite une isotopie) de l'application canonique de $f^*(E')$ dans $B \times E'$.*

En particulier, si f est homotope à une application constante, $f^*(E')$ est isomorphe à l'espace produit $B \times F$.

[8] Voir par exemple : C. EHRESMANN, *Sur les applications continues d'un espace dans un espace fibré* (Bull. Soc. Math. France, 1944, p. 27-54).

[9] Voir le lemme de p. 46 de [8].

Ce corollaire correspond au cas particulier suivant du théorème 1 : φ est l'application canonique de $f^*(E')$ dans $B \times E'$; la projection de φ est l'homéomorphisme f, en considérant B comme espace de base de $f^*(E')$. A la déformation (f_t) correspond l'isotopie $(\overline{f}_t)$. Il existe donc une déformation (φ_t) de φ telle que φ_t soit une représentation de $f^*(E')$ dans $B \times E'$ se projetant sur $\overline{f}_t$. Alors φ_t est un isomorphisme de $f^*(E')$ sur $f_t^*(E')$ qui se projette sur l'application identique de B. Le corollaire ainsi démontré entraîne d'ailleurs le théorème 1. La famille $(f'_t \varphi_t)$ est en effet une déformation (f''_t) de la représentation canonique f' de $f^*(E')$ dans E'. En utilisant la décomposition canonique $\varrho = f' \overline{\varrho}$ d'une représentation ϱ de $E(B, F, G, H)$ dans $E'(B', F, G, H')$, telle que f soit la projection de ϱ, la famille $(\varrho_t) = (f''_t)\overline{\varrho}$ fournit la déformation cherchée de ϱ.

Remarque. Les notations étant celles du théorème 1, soit ψ l'application continue de $B \times I$ dans B' définissant la déformation (f_t). L'espace $E \times I$ étant considéré comme un espace fibré de base $B \times I$, le théorème 1 signifie qu'il existe une représentation θ de $E \times I$ dans E', se projetant sur ψ et définissant une déformation (φ_t) de φ. Or θ admet la décomposition canonique $\theta = \psi' \overline{\theta}$, où $\overline{\theta}$ est un isomorphisme de $E \times I$ sur $\psi^*(E')$ se projetant sur l'application identique de $B \times I$. Le théorème 1 est donc aussi équivalent au corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. — *Soit E'' un espace fibré de base $B \times I$ et soit E l'espace fibré $g^*(E'')$, où g désigne l'application $x \to (x, 0)$ de B dans $B \times I$. Il existe alors un isomorphisme de $E \times I$ sur E'', se projetant sur l'application identique de $B \times I$.*

La démonstration précédente suppose que l'espace fibré E'' est à groupe structural *topologique* G. Mais l'énoncé est encore valable pour une structure fibrée à groupe structural G non muni d'une topologie.

Remarque. Etant donnés deux espaces fibrés $E(B, F, G, H)$ et $E'(B', F, G, H')$ à groupe structural topologique G, une application continue φ de E dans E' telle que la restriction de φ à chaque fibre de E soit un isomorphisme sur une fibre de E' sera appelée une *représentation faible* de E dans E'. C'est une représentation concernant les structures fibrées sous-jacentes pour lesquelles on ferait abstraction de la structure topologique de G, et par suite aussi de celle de H et de H'. L'application $h \to \varphi h$ est alors une application quelconque de H dans H'.

Si F est localement compact et si la structure topologique de G est celle de la convergence compacte, toute représentation faible de E dans E' est une représentation au sens initial [10]. En particulier il en est ainsi lorsque G est un groupe de Lie opérant sur F de telle façon que l'application $(s, y) \rightarrow s y$ soit différentiable.

Le problème d'existence d'une représentation φ de $E(B, F, G, H)$ dans $E'(B', F, G, H')$ peut être abordé de la manière suivante: Considérons l'espace $H'' = H' H^{-1}$ et soit π la projection canonique de H'' sur $B \times B'$. En composant π avec l'application canonique de $B \times B'$ sur B, on obtient une projection canonique π_1 de H'' sur B; en composant π avec l'application canonique de $B \times B'$ sur B', on obtient une projection canonique π_1' de H'' sur B'. A la projection π_1 correspond une structure fibrée sur H'', de base B, de fibres isomorphes à H', les isomorphismes de H' sur les fibres étant les applications $h' \rightarrow h' h^{-1}$, qui correspondent d'une façon biunivoque à $h \in H$. Comme H'' est l'espace quotient de $H \times H'$ par la relation d'équivalence $(h, h') \backsim (h s, h' s)$, on voit d'ailleurs que l'espace fibré principal associé à la structure fibrée considérée sur H'' est isomorphe à H. *L'existence d'une représentation* φ *est équivalente à l'existence d'une application continue* φ' *de* B *dans* H'' *telle que* $\pi_1 \varphi'$ *soit l'application identique de* B *: la projection de* φ *sera alors* $f = \pi_1' \varphi'$. *En d'autres termes, les représentations* φ *correspondent d'une façon biunivoque aux sections de l'espace fibré* H'' *de base* B.

Si B est un complexe et si les groupes d'homotopie $\pi_r(H')$ sont nuls pour $r < \dim B$, on sait qu'il existe une section φ' dans H'' au-dessus de B. Si $\pi_r(H')$ est nul pour $r \leq \dim B$, les sections φ', et par suite les représentations φ, forment une seule classe; c'est-à-dire deux sections φ_1' et φ_2' peuvent être déformées l'une dans l'autre par une déformation (φ_t') telle que $\pi_1 \varphi_t'$ soit l'application identique de B. Il en résulte, en tenant compte aussi du théorème 1, que l'ensemble des applications $f = \pi_1' \varphi'$ de B dans B' forme une classe d'homotopie bien déterminée, qu'on peut appeler la *classe d'homotopie caractéristique* de la structure fibrée $E(B, F, G, H)$ par rapport à la structure fibrée $E'(B', F, G, H')$. *Pour qu'il existe un isomorphisme de* $E(B, F, G, H)$ *sur* $f^*(E')$ *se projetant sur l'application identique de* B*, il faut et il suffit que* f *appartienne à la classe caractéristique de* $E(B, F, G, H)$ *par rapport à* $E'(B', F, G, H')$.

[10] Cette propriété est une conséquence de la proposition 9, p. 21 de BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. X.

La classe caractéristique d'une structure isomorphe à $B \times F$ est la classe de l'application constante de B dans B'. Ceci démontre en particulier le théorème de Steenrod-Whitney, qui correspond au cas suivant: B' est la variété de Grassmann $R_{n-p,p}$; l'espace E' est l'espace $M_{n-p,p}$ des couples (x, X_p), où x est un vecteur d'origine O de R^n et X_p un p-élément d'origine O de R^n contenant x. La structure fibrée sur E' est associée à l'application $(x, X_p) \to X_p$. Une fibre est l'ensemble des (x, X_p) correspondant à un élément donné X_p. Les fibres sont des espaces vectoriels isomorphes à R^p. L'espace H' des isomorphismes de R^p sur les fibres est l'espace $V_{n,p}$ des suites de p vecteurs indépendants de R^n. Les groupes d'homotopie $\pi_r(V_{n,p})$ sont nuls pour $r < n-p$. *Donc si dim $B < n-p$, toute structure fibrée de base B, de fibres isomorphes à R^p, le groupe structural étant le groupe linéaire homogène L_p de R^p (ou encore le groupe orthogonal de R^p), correspond à une classe d'homotopie caractéristique de B dans $R_{n-p,p}$ et est isomorphe à $f^*(M_{n-p,p})$ pourvu que f appartienne à cette classe caractéristique.* C'est l'énoncé du théorème de Steenrod-Whitney [11], qui s'étend aussi au cas des structures fibrées ayant pour groupe structural le groupe linéaire complexe L'_p de l'espace numérique complexe C^p ou encore le groupe linéaire quaternionien L''_p de l'espace numérique quaternionien K^p (où K désigne le corps des quaternions); la variété de Grasmann $R_{n-p,p}$ doit être remplacée alors par la variété de Grassmann complexe $C_{n-p,p}$ ou quaternionienne $K_{n-p,p}$. De plus, dans le cas complexe il faut avoir dim $B \leq 2(n-p)$ et dans le cas quaternionien dim $B \leq 4(n-p)+2$.

Si f appartient à la classe d'homotopie caractéristique, les images réciproques par f des classes de cohomologie de B' sont des invariants de la structure fibrée sur B; on les appelle les *classes* (de cohomologie) *caractéristiques*.

5. Quelques propriétés d'une feuille d'une variété feuilletée [12].

Du théorème 1 on déduit facilement le théorème suivant:

THÉORÈME 2. — *Etant donné sur V_n une structure feuilletée différentiable, définie par un champ complètement intégrable Φ_p, toute feuille V_p déformable sur V_n en un point est parallélisable et l'espace des vecteurs normaux à V_p est isomorphe à $V_p \times R^{n-p}$.*

(11) N. STEENROD, *Classification of sphere bundles* (Annals of Math., 45, 1944, p. 294-311).

(12) Voir (7).

En particulier, toute feuille compacte d'une structure feuilletée différentiable sur la sphère S_3 est homéomorphe à un tore, seule surface compacte parallélisable.

Désignons par $T(V_n)$ l'espace des vecteurs tangents à V_n. Le sous-espace de $T(V_n)$ formé des vecteurs tangents à V_n et contenus dans un élément quelconque X du champ Φ_p est un espace fibré $E(V_n, R^p, L_p, H)$. La fibre correspondant à $x \in V_n$ est le sous-espace vectoriel de l'espace tangent à V_n en x correspondant au p-élément du champ Φ_p. Le groupe structural est donc le groupe L_p de R^p. L'application canonique f de V_p dans V_n admet un prolongement f' à l'ensemble $T(V_p)$ des vecteurs tangents à V_p. L'espace $T(V_p)$ est un espace fibré de base V_p et de groupe structural L_p et f' est une représentation de $T(V_p)$ dans E. A f' correspond canoniquement un isomorphisme de $T(V_p)$ sur $f^*(E)$. Si (f_t) est une déformation de f, $f^*(E)$ est isomorphe à $f_t^*(E)$, d'après le corollaire 1 du théorème 1. En particulier si f_1 est une application constante, $f_1^*(E)$ est isomorphe à $V_p \times R^p$. Donc si f est homotope à une application constante, $T(V_p)$ est isomorphe à $V_p \times R^p$, ce qui signifie que V_p est parallélisable.

Le même raisonnement s'applique à l'espace $N(V_p)$ des vecteurs normaux à V_p, relativement à une métrique riemannienne sur V_n; on sait qu'une telle métrique existe toujours. L'espace fibré E est à remplacer par l'espace fibré E_1 des vecteurs de $T(V_n)$ qui sont normaux à un élément quelconque du champ Φ_p.

Le théorème 2 montre que toute feuille d'une structure feuilletée différentiable sur la sphère S_n est parallélisable, donc en particulier [13] toute fibre d'une structure fibrée différentiable sur S_n.

On pourrait énoncer d'autres propriétés de $T(V_p)$ et de $N(V_p)$, dont les structures ne dépendent que de la classe d'homotopie de f. Bornons-nous à étendre le théorème 2 aux variétés transversales d'un champ.

Soit Φ_{n-p} un champ de $(n-p)$-éléments sur V_n. Une *variété transversale* du champ Φ_{n-p} est une variété différentiable plongée (V_p, f) dans V_n telle que le p-élément tangent à la variété plongée en $u \in V_p$ (qui est un p-élément d'origine $f(u)$) soit supplémentaire à l'élément du champ Φ_{n-p} en $f(u)$; c'est-à-dire l'intersection des deux éléments se réduit à $f(u)$. Soit Φ_p le champ des p-éléments totale-

[13] FELDBAU avait déjà démontré que si les fibres d'une fibration de S_n sont homéomorphes à une sphère S_p, celle-ci est parallélisable.

ment orthogonaux à ceux de Φ_{n-p}. Considérons encore les deux espaces fibrés E et E_1 définis plus haut. Soit π la projection de $T(V_n)$ sur E qui fait correspondre à tout vecteur tangent à V_n en x sa projection orthogonale sur l'élément de Φ_p en x. Si (V_p, f) est une variété transversale de Φ_{n-p} et si f' est le prolongement de f aux vecteurs, l'application $\pi f'$ est une représentation de $T(V_p)$ dans E, se projetant sur f. Il lui correspond un isomorphisme de $T(V_p)$ sur $f^*(E)$, se projetant sur l'application identique de V_p.

Soit $N_f(V_p)$ l'espace des vecteurs normaux à la variété plongée (V_p, f), c'est-à-dire le sous-espace de $V_p \times T(V_n)$ formé des couples (u, v), $u \in V_p$, v étant un vecteur d'origine $f(u)$ et perpendiculaire au p-élément tangent à la variété plongée en u. Si (V_p, f) est une variété transversale de Φ_{n-p}, on voit encore que $N_f(V_p)$ est isomorphe à $f^*(E_1)$. Du théorème 1 on déduit donc le théorème suivant:

THÉORÈME 2'. — *Soit (V_p, f) une variété transversale du champ Φ_{n-p} défini sur V_n. Si f est homotope à une application constante, V_p est parallélisable et l'espace des vecteurs normaux à (V_p, f) est isomorphe à $V_p \times R^{n-p}$.*

La considération des classes caractéristiques des structures fibrées $T(V_p)$, $N_f(V_p)$, E et E_1 conduit à des propriétés d'homologie d'une feuille ou d'une variété transversale d'un champ. Les classes caractéristiques de $T(V_p)$ sont les images réciproques par f de celles de E [14]. La même remarque s'applique à $N_f(V_p)$ et E_1.

Pour simplifier, supposons que Φ_p soit un champ d'éléments orientés, et soit (V_p, f) une variété transversale compacte du champ totalement orthogonal Φ_{n-p}. On peut considérer alors les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney. En particulier E admet une classe W_p, classe de cohomologie de V_n. La classe $f^*(W_p)$ est la classe d'Euler-Poincaré. Si Γ_p est le cycle fondamental de dimension p sur V_p, on a :

$$< f^*(W_p), \Gamma_p > = < W_p, f(\Gamma_p) > .$$

Or $< f^*(W_p), \Gamma_p >$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V_p)$ de V_p. Si $f(\Gamma_p)$ a un multiple entier homologue à 0 dans V_n, l'équation précédente montre que $\chi(V_p) = 0$. Ceci démontre le théorème [14] :

(14) C. EHRESMANN, *Sur les sections d'un champ* (Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, 224, 1947, p. 444). Voir aussi (5).

THÉORÈME 3. — *Soit (V_p, f) une variété transversale d'un champ Φ_{n-p} tel que le champ totalement orthogonal Φ_p soit orientable. Si le cycle $f(V_p)$ a un multiple entier homologue à 0 dans V_p, la caractéristique d'Euler-Poincaré de V_p est nulle. Les caractéristiques d'Euler-Poincaré de deux variétés transversales homologues sont égales.*

De même si W_r est la classe de Stiefel-Whitney de E pour la dimension $r < p$, $f^*(W_r)$ sera celle de V_p. En particulier si W_r est nul, par exemple si le groupe de cohomologie de V_n pour la dimension r et pour le domaine de coefficients convenable est nul, la classe correspondante de V_p est nulle.

La théorie des obstacles dans les espaces fibrés conduit encore au résultat suivant:

Soit $H_i(V_n, \pi_{i-1}(\Omega_p))$ le groupe de cohomologie de dimension i de V_n, le domaine de coefficients étant $\pi_{i-1}(\Omega_p)$, groupe d'homotopie de dimension $i-1$ du groupe orthogonal Ω_p dans R^p. *Si $H_i(V_n, \pi_{i-1}(\Omega_p)) = 0$ pour $0 < i \leq p$, toute variété transversale (V_p, f) du champ Φ_{n-p} est parallélisable.*

6. Sur les variétés intégrales de certains systèmes différentiels.

Indiquons d'abord quelques propriétés des variétés plongées dans une variété différentiable.

Soit V'_n l'espace des p-éléments de V_n. Soit E l'espace des couples formés d'un vecteur tangent à V_n et d'un p-élément contenant ce vecteur. L'espace E est un espace fibré de base V'_n, les éléments d'une fibre étant les couples correspondant à un p-élément fixe, le groupe structural étant L_p. Soit (V_p, f) une variété différentiable plongée dans V_n et appelons encore f' le prolongement de f aux vecteurs. f' est une représentation de $T(V_p)$ dans E se projetant sur une application g de V_p dans V'_n. De plus g se projette sur f. La représentation f' admet la décomposition canonique $f' = g'\bar{f}'$, où $\bar{f}'$ est un isomorphisme de $T(V_p)$ sur $g^*(E)$.

Supposons que f soit homotope à une application constante f_1: alors g est homotope à une application g_1 de V_p dans une fibre de V'_n et $T(V_p)$ est isomorphe à $g_1^*(E)$. La fibre de V'_n peut être identifiée à la variété de Grassman $R_{n-p,p}$, le sous-espace de E qui se projette sur cette fibre, à $M_{n-p,p}$. L'isomorphie des espaces $T(V_p)$ et $g_1^*(E)$ entraîne alors les conséquences suivantes:

1. Si $n < 2p$, la structure de $T(V_p)$ a des propriétés particulières: la classe d'homotopie caractéristique, qui est une classe d'applications de V_p dans $R_{n'-p,p}$, où $n' > 2p$, contient une application de V_p dans $R_{n-p,p}$. En particulier certaines classes caractéristiques sont nulles.

2. Si $n \geq 2p + 1$, *la classe d'homotopie de g ne dépend que de la structure différentiable de V_p; en particulier, si V_p est parallélisable, g est homotope à une application constante.* D'ailleurs si g est homotope à une application constante, V_p est parallélisable, quel que soit n.

En vertu du théorème 1, *la structure fibrée de $N_f(V_p)$ dépend seulement de la classe d'homotopie de g; elle est isomorphe à celle de $V_p \times R^{n-p}$ si g est homotope à une application constante.*

Si $n \geq 2p + 1$, la classe d'homotopie de g ne dépend que de la classe d'homotopie de f.

Ceci résulte du théorème suivant ([15]), qui se démontre de la même manière que le théorème de Steenrod-Whitney :

Théorème 4. — *Soit f une application continue dans V_n d'un complexe A. Si dim $A \leq n - p$, tout espace fibré de base A, de fibres isomorphes à R^p et de groupe structural L_p admet une représentation f' dans E, se projetant sur une application g de A dans V'_n telle que f soit projection de g. En supposant dim $A < n - p$, soient g et g_1 deux applications de A dans V'_n, se projetant sur f. Pour qu'il existe un isomorphisme de $g^*(E)$ sur $g_1^*(E)$ se projetant sur l'application identique de A, il faut et il suffit qu'il existe une déformation (g_t) de g à g_1 telle que f soit projection de g_t.*

Remarque. Si f est une application de la variété différentiable V_p dans V_n, pour qu'il existe dans la classe d'homotopie de f une application différentiable f_1 partout de rang p, il faut qu'il existe une représentation f' de $T(V_p)$ dans E, se projetant sur f. Il serait intéressant de savoir si cette condition est aussi suffisante lorsque $n > p$. D'après Whitney, si $n \geq 2p$, f peut toujours être approché par une application différentiable f_1 partout de rang p.

Considérons maintenant les variétés intégrales d'un *système différentiel* défini par un sous-espace Ψ de V'_n. Une *variété intégrale* de Ψ est une variété différentiable plongée dans V_n, définie par (V_p, f), telle que l'application g associée à f applique V_p dans Ψ.

([15]) Voir ([7]).

Nous supposons que la restriction à Ψ de la projection de V'_n sur V_n détermine sur Ψ une structure fibrée, de base V_n; les fibres sont isomorphes à un sous-espace F de la variété de Grassmann $R_{n-p,p}$. Le sous-espace de E qui se projette sur Ψ est un espace fibré $E'(\Psi, R^p, L_p, .)$ Soit (V_p, f) une variété intégrale de Ψ. L'espace fibré $T(V_p)$ est isomorphe à $g^*(E')$. Si f est homotope à une application constante f_1, g est homotope à une application g_1 de V_p dans une fibre F_x de Ψ. La classe d'homotopie caractéristique de $T(V_p)$ est donc une classe d'applications de V_p dans $R_{n-p,p}$ contenant une application de V_p dans F. Ceci entraîne, en général, que certaines classes caractéristiques de $T(V_p)$ sont nulles. En particulier, si F est contractile en un point par déformation dans $R_{n-p,p}$, V_p est parallélisable.

Par exemple, on se trouve dans ce cas, lorsque Ψ est l'ensemble des éléments supplémentaires d'un champ Φ_{n-p}. De même, lorsque Ψ est défini par la donnée d'une forme différentielle quadratique réductible en chaque point à $\omega_1^2 + \ldots + \omega_p^2 - \omega_{p+1}^2 - \cdots - \omega_n^2$, où $n \geq 2p$, les éléments de Ψ étant les p-éléments sur lesquels cette forme quadratique s'annule ou se réduit à une forme définie positive.

On peut étudier de ce point de vue les variétés plongées dans une variété complexe ou presque complexe [16] V_{2n}. L'espace tangent d'une telle variété est muni d'une structure complexe par la donnée d'une transformation linéaire I telle que $I^2 = -1$. D'une part on peut considérer les variétés plongées « presque complexes » (V_{2p}, f) dans V_{2n} dont les éléments tangents sont complexes, ce qui conduit à des résultats relatifs aux classes caractéristiques de Chern [17]. D'autre part il est intéressant de considérer les variétés plongées (V_n, f) qu'on pourrait appeler réelles : chaque élément tangent est supplémentaire à son transformé par I. Si f est homotope à une application constante, les classes caractéristiques de Stiefel-Whitney de V_n vérifient certaines relations particulières. Si l'on appelle espace tangent complexe à V_n en $u \in V_n$ l'espace vectoriel complexe déterminé canoniquement à partir de l'espace vectoriel tangent par extension du corps R au corps C, l'espace de tous les vecteurs complexes tangents à V_n est alors isomorphe à $V_n \times C^n$.

(16) Voir (6) et C. Ehresmann, *Sur les variétés presque complexes* (Séminaire Bourbaki 1950, à paraître dans Proc. Congr. Int. Math. 1950).

(17) Chern S. S., *Characteristic classes of Hermitian manifolds* (Annals of Math., 47, 1946, p. 85-121).

PARTIE I - 2

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
COMMENTAIRES SUR LA PARTIE I

Les articles originaux contenus dans cette Partie I-2 sont reproduits par procédé photographique, à l'exception des textes /5, 9, 111, 136/ (seulement multigraphiés) qui ont été recomposés pour inclusion dans ce volume. Certaines pages ayant dû être réduites pour l'impression, l'ordre chronologique n'est pas entièrement respecté. En particulier, toutes les Notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences des Parties I-1 et I-2 sont réunies ci-après.

Des commentaires sur toute la Partie I sont regroupés à la fin de ce volume (p. 489 et suivantes).

Extrait du « Colloque de Topologie »
Bruxelles 1950, CBRM.

/28/

Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable

par Charles EHRESMANN (Strasbourg)

INTRODUCTION

Dans une série de mémoires célèbres, M. Elie Cartan a développé une théorie d'espaces munis de « connexions infinitésimales » dont les exemples les plus connus sont les espaces à connexion euclidienne, affine, projective ou conforme.

La notion d'*espace à connexion de Cartan* est une généralisation de la notion d'espace homogène de Lie, en désignant ainsi un espace F muni d'un groupe de transformations de Lie opérant transitivement dans F. Etant donné une variété différentiable B, M. E. Cartan suppose « attaché » à chaque point de B un espace homogène « tangent » isomorphe à F et il définit un « raccord » entre deux « espaces tangents infiniment voisins ». Pour formuler les définitions de telle façon qu'elles aient un sens du point de vue global, on est conduit à introduire les notions de la théorie des espaces fibrés. La notion de connexion de Cartan se rattache alors à une notion générale de connexion infinitésimale dans un espace fibré différentiable.

Après l'exposé sommaire des notions indispensables concernant les *espaces fibrés différentiables*, j'introduis la notion de *connexion infinitésimale* et celle de *groupe d'holonomie*. J'étudie spécialement le cas des connexions infinitésimales *intégrables*. Un exemple important d'une connexion infinitésimale intégrable est fourni par la structure feuilletée d'un voisinage tubulaire d'une feuille stable d'une variété feuilletée différentiable. On obtient ainsi une caractérisation de la structure de l'ensemble des feuilles voisines d'une feuille stable. Je donne ensuite deux définitions équivalentes de la notion de connexion infinitésimale dans un *espace fibré à groupe structural de Lie* et je montre l'existence d'une telle connexion. En imposant à l'espace certaines conditions supplémentaires qui permettent de considérer les fibres comme des espaces homogènes tangents à l'espace de base B, on arrive à la notion de *connexion de Cartan* sur une variété différentiable B. Les conditions supplémentaires ne sont pas toujours vérifiées; mais lorsqu'elles le sont, il existe toujours une connexion de Cartan. Etant donné un espace à connexion de Cartan, on peut définir la notion de *développement* de l'espace sur un de ses espaces homogènes tangents, ce qui conduit aux invariants différentiels d'une variété différentiable plongée dans l'espace. A l'aide de la notion de développement, j'introduis la notion d'espace *complet* relativement à une connexion de Cartan, ce qui généralise la notion d'espace de Riemann complet. Etant donné deux espaces complets simplement connexes, tout isomorphisme local se prolonge en un isomorphisme global (¹). En particulier le revêtement simplement connexe d'un *espace complet localement homogène* (c'est-à-dire à connexion de Cartan intégrable) est un espace homogène de Lie. J'aborde enfin le problème d'existence d'une connexion de Cartan de type donné sur une variété B donnée.

Les nombres entre crochets renvoient à l'index bibliographique. On n'y trouvera évidemment pas la liste des innombrables travaux (de H. Weyl, Veblen, Schouten, Struik, Bompiani, etc.) se rapportant aux espaces munis de connexions infinitésimales; de M. E. Cartan, je me bornerai à citer trois articles.

1. La notion d'espace fibré différentiable

Etant données deux *variétés différentiables* B et F, considérons les variétés différentiables $B \times F$ et $U \times F$, où U est un ensemble ouvert quelconque de B. Soit Γ le *pseudogroupe de transformations* [9] formé par l'ensemble des automorphismes différentiables des produits $U \times F$, définis par $(x, y) \longrightarrow (x, t(x, y))$, où $x \in U$, $y \in F$, t étant une application différentiable de $U \times F$ dans F telle que le rang de l'application s_x, définie par $y \longrightarrow t(x, y)$, soit partout égal à dim F.

(¹) C'est en vue de la démonstration de ce théorème que j'ai donné pour la première fois sous la forme indiquée ici la définition d'un espace à connexion de Cartan, mais sans utiliser la terminologie actuelle de la théorie des espaces fibrés. La notion d'*espace des repères* utilisée dans ma définition initiale m'a conduit justement à introduire plus tard la notion générale d'espace fibré principal associé à un espace fibré donné, et depuis 1942 j'ai exposé à diverses reprises et sous la même forme les questions abordées ici; le présent travail reproduit à quelques additions près le texte polycopié d'un exposé fait au Séminaire Bourbaki (mars 1950).

DÉFINITION. — *Une structure fibrée différentiable sur l'ensemble* E, *de base* B *et de fibres isomorphes à* F, *est définie par une famille* (f_i) *d'applications biunivoques d'ensembles* $U_i \times F$ *dans* E *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *A tout couple d'indices* (i, j) *correspond* $\varphi_{ji} \in \Gamma$ *tel que* $f_i(x, y) = f_j(x', y')$ *soit équivalent à* $(x', y') = \varphi_{ji}(x, y)$, *c'est-à-dire* $x' = x$, $y' = t_{ji}(x, y)$. *Nous supposons que* f_i *et* f_j *ne sont identiques que si* $i = j$.

2° *Les ensembles* $f_i(U_i \times F)$ *recouvrent* E; *les ensembles* U_i *recouvrent* B.

3° *La famille* (f_i) *est complète, c'est-à-dire identique à toute famille qui la contient et qui vérifie 1° et 2°.*

E, *muni de cette structure, est appelé espace fibré différentiable et désigné par* E(B, F).

Remarquons qu'une famille (f_i) incomplète, vérifiant seulement 1° et 2°, détermine une famille complète unique et par suite une structure fibrée différentiable.

La réunion de la famille (f_i) est une application f de l'espace somme $\Sigma(U_i \times F)$ sur E, qu'on peut identifier à l'espace quotient associé à f. Cet espace quotient est séparé, puisque B est séparé. Comme φ_{ji} est un homéomorphisme différentiable, la famille (f_i) détermine aussi sur E une structure de *variété différentiable*, telle que f_i soit un homéomorphisme différentiable. La projection p de E sur B, définie par $p(f_i(x, y)) = x$, est alors différentiable, de rang partout égal à dim B. L'application h_x^i définie par $h_x^i(y) = f_i(x, y)$ est un homéomorphisme différentiable de F sur une sous-variété différentiable F_x de E; les sous-variétés F_x sont les fibres.

On définit de même la notion de *structure fibrée* p *fois différentiable ou analytique*. Le pseudogroupe Γ peut aussi être restreint en imposant la condition que s_x appartienne à un groupe G d'automorphismes de F. Si G est un groupe topologique d'automorphismes, on peut imposer la condition supplémentaire que s_x soit fonction continue de x. On a ainsi la notion d'*espace fibré différentiable à groupe structural* G.

PROPOSITION. — *Soient* E *et* B *deux variétés deux fois différentiables,* B *étant connexe, et soit* p *une application deux fois différentiable de* E *sur* B, *en tout point de rang égal à* dim B. *Si* E *est compact ou bien si* $p^{-1}(x)$ *est compact connexe quel que soit* $x \in B$, *les ensembles* $p^{-1}(x)$ *sont les fibres d'une structure fibrée différentiable* [8].

Les ensembles $p^{-1}(x)$ sont des variétés deux fois différentiables plongées dans E, qui est ainsi munie d'une *structure feuilletée différentiable* [13, 14]. Il existe sur E un *champ différentiable transversal* C d'éléments de contact de dimension $n =$

dim B, l'élément de C en $z \in p^{-1}(x)$ étant supplémentaire de l'élément tangent à $p^{-1}(x)$ en z. La proposition résulte alors du lemme suivant :

Lemme. — *Si* E *est compact ou si* $p^{-1}(x)$ *est compact connexe quel que soit* $x \in B$, *tout chemin différentiable* a *de* B, *d'origine* x *et d'extrémité* x′, *est la projection par* p *d'une courbe intégrale de* C, *d'origine* $z \in p^{-1}(x)$ *et d'extrémité* $z' \in p^{-1}(x')$, *le point* z *étant arbitraire dans* $p^{-1}(x)$. *L'application* $z \longrightarrow z'$ *est un homéomorphisme différentiable de* $p^{-1}(x)$ *sur* $p^{-1}(x')$.

2. Les espaces fibrés différentiables à groupe structural de Lie

Soit G un groupe d'automorphismes de F et supposons qu'il soit muni d'une structure deux fois différentiable telle que l'application $(s, y) \longrightarrow sy$ soit deux fois différentiable, sy désignant le transformé de $y \in F$ par $s \in G$. Le groupe G est ainsi muni d'une structure de groupe de Lie. Restreignons Γ au pseudogroupe Γ(G) des automorphismes deux fois différentiables tels que $s_x \in G$.

Une structure fibrée à groupe structural de Lie G *sera par définition une structure fibrée associée à* Γ(G). L'application $x \longrightarrow s_x$ est alors deux fois différentiable; réciproquement toute application deux fois différentiable de U dans G détermine un automorphisme de $U \times F$ appartenant à Γ(G).

Soit H l'ensemble des homéomorphismes h_x^i de F sur F_x, correspondant à la famille (f_i) qui définit sur E une structure fibrée différentiable à groupe structural de Lie G. On a $h_x^i = h_x^j s_x^{ji}$. Le sous-ensemble de H correspondant à un point x donné de B est $H_x = h_x^i G$. Soit $\bar{f}_i$ l'application $(x, s) \longrightarrow h_x^i s$ de $U_i \times G$ dans H. La relation $h_x^i s = h_{x'}^j s'$ équivaut à $x' = x$, $s' = s_x^{ji} s$. Donc la famille $(\bar{f}_i)$ définit sur H une structure fibrée différentiable à groupe structural G_γ, groupe des translations à gauche de G. L'espace fibré E à groupe structural G sera désigné par E(B, F, G, H). L'ensemble H muni de sa structure fibrée à groupe structural G_γ est appelé *espace fibré principal associé* à E(B, F, G, H); son symbole est $H(B, G, G_\gamma, \bar{H})$. A $h \in H$ correspond l'application $\bar{h} \in \bar{H}$ de G sur la fibre $H_x = hG$, définie par $s \longrightarrow hs$.

L'application $(h, s) \longrightarrow hs$ est une application deux fois différentiable de $H \times G$ sur H, qui définit G comme groupe d'opérateurs dans H, les fibres H_x étant les classes d'intransitivité. L'application partielle $h \longrightarrow hs$, que nous appellerons *translation* par s, est un automorphisme deux fois différentiable de H, mais en général cet automorphisme n'est pas un automorphisme de la structure $H(B, G, G_\gamma, \overline{H})$. Si $h \in H_x$ et $h' \in H_x$, on a $h^{-1}h' = s \in G$. L'application $(h, h') \longrightarrow h^{-1}h'$ est aussi deux fois différentiable. L'application $(h, y) \longrightarrow hy$ est une application deux fois différentiable de $H \times F$ sur E. La relation d'équivalence associée à cette application est $(hs, s^{-1}y) \sim (h, y)$. L'espace quotient de $H \times F$ par cette relation d'équivalence peut être identifié canoniquement à E.

On peut considérer sur F une structure admettant G comme groupe d'automorphismes. Par un homéomorphisme quelconque h appartenant à H_x, cette structure se transporte sur F_x. Chaque fibre F_x est alors munie d'une structure additionnelle bien déterminée. La structure qu'on peut choisir sur F n'est pas unique; mais deux structures sur F qui admettent le même groupe d'isomorphismes G sont équivalentes du point de vue qui nous intéresse ici. Il sera commode de supposer données sur chaque fibre de E(B, F, G, H) une structure additionnelle, mais seul le groupe structural G intervient d'une manière effective dans les problèmes qui se posent. Par exemple sur G une structure invariante par G_γ peut être définie par le groupe des translations à droite de G ou par la loi de composition à droite $(t, s) \longrightarrow ts$, où $t \in G$, $s \in G$, s étant considéré comme opérateur. Cette structure se transporte par $\overline{h} \in \overline{H}$ sur les fibres H_x de l'espace fibré principal associé $H(B, G, G_\gamma, \overline{H})$. On obtient ainsi sur H_x la structure définie par la loi de composition $(h, s) \longrightarrow hs$, où $h \in H_x$, $s \in G$, qui permet de considérer G comme groupe d'opérateur simplement transitif dans H_x.

Remarque. — Il convient d'appeler *espace fibré principal* tout espace fibré $E(B, G, G_\gamma, H)$ dont les fibres sont homéomorphes au groupe G et dont le groupe structural est le groupe des translations à gauche de G; un tel espace fibré est en effet isomorphe canoniquement à son espace fibré principal associé; on peut identifier $z \in E$ à l'élément unique $h \in H$ tel que $h(e) = z$, où e désigne l'élément neutre de G; cette identification est un isomorphisme au sens défini plus loin.

Étant donnés deux espaces fibrés E(B, F, G, H) et E'(B', F, G, H') de fibres isomorphes, tout isomorphisme d'une fibre de E(B, F, G, H) sur une fibre de E'(B', F, G, H') est de la forme $h'h^{-1}$. L'ensemble $H'H^{-1}$ de ces isomorphismes est un espace fibré de base $B \times B'$, de fibre G, le groupe structural étant le groupe des similitudes de G, définies par $s \longrightarrow asb$, où a, b, s, sont des éléments de G. Il s'identifie à l'espace quotient de $H \times H'$ par la relation d'équivalence $(h, h') \sim (hs, h's)$. L'application $(h, h') \longrightarrow h'h^{-1}$ est deux fois différentiable. En particulier, H est l'espace des isomorphismes de F sur les fibres de E(B, F, G, H). En composant la projection canonique de $H'H^{-1}$ sur $B \times B'$ avec la projection canonique de $B \times B'$ sur B, on remarque que $H'H^{-1}$ est aussi un espace fibré de base B et de fibres isomorphes à H', le groupe structural étant le groupe des translations dans H'; l'espace fibré principal associé est isomorphe à H. Remarquons encore que l'espace HH^{-1}, espace des isomorphismes d'une fibre de E(B, F, G, H) sur une fibre du même espace, est un groupoïde par rapport à la composition de ces isomorphismes. Le sous-espace de HH^{-1} qui se projette sur la diagonale de $B \times B$ est l'espace fibré des automorphismes des fibres de E(B, F, G, H); il admet une section constituée par les automorphismes identiques des fibres.

Un *isomorphisme* de E(B, F, G, H) sur E'(B', F, G, H') est un homéomorphisme θ de E sur E', deux fois différentiable et tel que $h \longrightarrow \theta h$ soit une application $\bar{\theta}$ de H sur H' (ou tel que la restriction de θ à une fibre soit un isomorphisme sur une fibre). Cette application $\bar{\theta}$ est caractérisée par les propriétés suivantes : elle est deux fois différentiable; $\theta(hs) = \theta(h)s$; elle se projette sur un homéomorphisme deux fois différentiable de B sur B'. Plus généralement, une *représentation* de E(B, F, G, H) dans E'(B', F, G, H') est une application θ de E dans E', deux fois différentiable et telle que $h \longrightarrow \theta h$ soit une application de H dans H'. Cette application $\bar{\theta}$ est une représentation de H dans H', en supposant H et H' munis de leurs structures d'espaces fibrés principaux. Réciproquement toute représentation $\bar{\theta}$ de H dans H' correspond de cette façon à une représentation de E(B, F, G, H) dans E'(B', F, G, H'). Une représentation $\bar{\theta}$ de H dans H' correspond à une section deux fois différentiable de l'espace $H'H^{-1}$, considéré comme espace fibré de base B. Une telle représentation n'existe donc pas toujours. *Ceci démontre cependant l'existence d'une représentation dans le cas où les groupes d'homotopie de* H' *sont nuls pour les dimensions inférieures à dim* B, en tenant compte de la proposition indiquée plus loin concernant les sections différentiables.

Espaces fibrés associés et structures subordonnées [9]. Ces notions se précisent d'une manière naturelle lorsque le groupe structural est un groupe de Lie G. Etant donné un homomorphisme φ de G sur un groupe de Lie G', considéré comme groupe d'automorphismes d'une variété deux fois différentiable F', à l'espace fibré E(B, F, G, H) est associé canoniquement par φ un espace fibré E'(B, F', G', H'). On a un *homomorphisme* $\bar{\varphi}$ de H sur H', c'est-à-dire une application deux fois différentiable, se projetant sur l'application identique de B et tel que $\bar{\varphi}(hs) = \bar{\varphi}(h)\varphi(s)$. H' s'identifie à l'espace des classes hG'', où

G'' est le noyau de l'homomorphisme φ. E' est l'espace quotient de $H \times F'$ par la relation d'équivalence

$$(h, y') \sim (hs, \varphi(s^{-1})y') .$$

Si G_1 est un sous-groupe fermé de G, l'espace H/G_1 des classes hG_1 est un espace fibré associé de base B, de fibres isomorphes à l'espace homogène G/G_1. Les *structures subordonnées* à $E(B, F, G, H)$, de symbole $E(B, F, G_1, H_1)$, où H_1 est une sous-variété deux fois différentiable de H, correspondent aux sections deux fois différentiables de l'espace fibré H/G_1 ainsi défini. Toute structure fibrée de symbole $E(B, F, G_1, H_1)$ est canoniquement subordonnée à une structure fibrée bien déterminée de symbole $E(B, F, G, H)$. Une représentation de $E(B, F, G_1, H_1)$ dans $E'(B', F, G, H')$ sera par définition une représentation de $E(B, F, G, H)$ dans $E'(B', F, G, H')$.

La proposition suivante intervient dans la démonstration de plusieurs des propositions ultérieures :

Proposition. — *Toute section d'un espace fibré* p *fois différentiable peut être approchée par une section* p *fois différentiable de même classe* (c'est-à-dire homotope par une déformation qui maintient chaque point dans une fibre fixe).

La proposition a été démontrée par Steenrod [15]; on peut la démontrer aussi en utilisant une subdivision simpliciale de B et en appliquant les lemmes 3*a* et 4*a* de S. Eilenberg : *Singular homology in differentiable manifolds* (*Annals of Math.*, 1947, p. 675).

Corollaire. — *Si* $E(B, F)$ *est un espace fibré* p *fois différentiable, tout relèvement dans* E *d'une application* p *fois différentiable de* A *dans* B *peut être approché par un relèvement* p *fois différentiable dans* E.

Un *relèvement* d'une application f de A dans B est une application f' de A dans E telle que $f = pf'$, où p est la projection de E sur B. Si $A \subset B$, un relèvement de A est l'image de A par un relèvement de l'application canonique de A dans B.

Dans le cas différentiable, le *théorème du relèvement des homotopies* peut s'énoncer ainsi :

Proposition. — *Si l'application différentiable* f *de* A *dans* B *est projection d'une application différentiable* f' *de* A *dans* $E(B, F)$, *toute déformation différentiable de* f *est projection d'une déformation différentiable de* f'.

Etant donné l'espace fibré $E(B, F, G, H)$, à groupe structural de Lie, et une application deux fois différentiable f de A dans B, l'espace fibré $f^*(E)$, sous-espace de $A \times E$ se projetant sur l'ensemble représentatif de f dans $A \times B$, est un espace fibré de base A et de groupe structural de Lie G; on dit qu'il est induit par f.

PROPOSITION. — *Si* f *est homotope à* f_1, $f^*(E)$ *et* $f_1^*(E)$ *sont isomorphes.*

COROLLAIRE. — *Si* B *est contractible en un point,* E(B, F, G, H) *est isomorphe à* $B \times F$.

3. LA NOTION DE CONNEXION INFINITÉSIMALE DANS UN ESPACE FIBRÉ DIFFÉRENTIABLE [8, 11]

Soit E(B, F) un espace fibré deux fois différentiable, la dimension de B étant n. Il existe sur E un *champ transversal* différentiable C de n-éléments [1], c'est-à-dire un champ de n-éléments supplémentaires aux éléments de contact tangents aux fibres.

DÉFINITION. — *Une connexion infinitésimale dans* E(B, F) *est définie par un champ transversal différentiable* C *vérifiant la condition suivante :* (c) *Tout chemin différentiable* a *de* B, *d'origine* x *et d'extrémité* x', *est la projection d'une courbe intégrale* a' *du champ* C, *d'origine* $z \in F_x$ *et d'extrémité* $z' \in F_{x'}$, *le point* z *étant arbitraire dans* F_x.

Remarque. — Plus généralement, le champ de n-éléments pourrait être remplacé par un champ de cônes élémentaires.

PROPOSITION. — *Si* F *est compact, tout champ transversal différentiable* C *vérifie la condition* (c).

Cette proposition se ramène au lemme énoncé plus haut, en remarquant que l'ensemble des composantes connexes des fibres de E détermine sur E une structure fibrée différentiable ayant pour base un revêtement de B.

Etant donnée une connexion infinitésimale C dans E(B, F), l'application $z' \longrightarrow z$, associée d'après la condition (c) au chemin a de B, est un homéomorphisme différentiable φ_a de $F_{x'}$ sur F_x. Si aa_1 désigne le composé des deux chemins a et a_1, on a $\varphi_{aa_1} = \varphi_a \varphi_{a_1}$. Le groupoïde des chemins différentiables de B est ainsi représenté sur un groupoïde d'homéomorphismes différentiables d'une fibre sur une autre. En particulier, le groupoïde des chemins fermés en x est représenté sur un groupe Φ_x d'automorphismes de F_x, appelé *groupe d'holonomie*

[1] Un n-élément d'origine z (ou élément de contact de dimension n) d'une variété différentiable E est le couple d'un point z de E et d'un sous-espace linéaire de dimension n et passant par z de l'espace linéaire tangent à E en z. Si E est k fois différentiable, l'ensemble E' des n-éléments de E est une variété $k-1$ fois différentiable, qui admet d'ailleurs une structure d'espace fibré différentiable de base E. L'ensemble des n-éléments transversaux à une fibre de E au point z est un sous-espace de E' homéomorphe à un espace numérique, ce qui entraîne l'existence du champ transversal C.

de la connexion C en x. L'arc a détermine un isomorphisme du groupe Φ_x sur $\Phi_{x'}$.

PROPOSITION. — *L'espace fibré* E(B, F) *admet une structure fibrée subordonnée à groupe structural* Φ_x.

DÉFINITION. — *La connexion infinitésimale* C *est dite intégrable lorsque le champ* C *est complètement intégrable.*

Soit C une connexion intégrable. *Elle détermine un homomorphisme du groupe de Poincaré* Π_x *de* B *en* x *sur le groupe d'holonomie* Φ_x. *L'espace fibré* E(B, F) *admet par suite une structure fibrée subordonnée à groupe structural discret* Φ_x. *La projection* p *de* E *sur* B *définit chaque variété intégrale complète de* C *comme un revêtement de* B. Soit Π' le noyau de l'homomorphisme de Π_x sur Φ_x. Soit B′ le revêtement de B correspondant à Π' : les points de B′ sont les classes de chemins $\Pi'a$, où a est un chemin d'origine x. Si f est la projection de B′ sur B, c'est-à-dire l'application qui fait correspondre à la classe $\Pi'a$ l'extrémité de a, *l'espace fibré* f*(E), *de base* B′ *et de fibre* F, *est un revêtement de* E dont la projection canonique sur E est une représentation f' se projetant sur f.

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{f'} & f^*(E) \\ p\downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xleftarrow[f]{} & B' \end{array} \qquad (pf' = fp')$$

$f^*(E)$ est munie d'une connexion infinitésimale intégrable, image réciproque par f' de C, dont le groupe d'holonomie est réduit à l'identité. Donc f*(E) *est isomorphe à* $B' \times F$. *Les* variétés intégrales complètes de C sont les images par f' des variétés $B' \times \{y\}$.

L'espace E, *muni de sa structure fibrée et de la structure feuilletée définie par* C, *est déterminé à un isomorphisme près par la donnée de* B, *de* F *et de la représentation de* Π_x *sur le groupe d'holonomie* Φ_x. A chaque chemin a fermé en x correspond un automorphisme $\varphi_a \in \Phi_x$ et un automorphisme t_a du revêtement B′ de B, défini par $t_a(\Pi' l) = \Pi' al$, où l est un chemin d'origine x. L'application $t_a \longrightarrow \varphi_a$ est un isomorphisme ψ du groupe des automorphismes du revêtement B′ sur le groupe Φ_x. E se déduit de $B' \times F$ en identifiant les couples (u, y) et $(tu, \psi(t)y)$, où $u \in B'$, $y \in F$, $t =$ automorphisme du revêtement B′.

Application à l'étude de la structure d'une variété feuilletée au voisinage d'une feuille

Considérons sur une variété V une structure feuilletée deux fois différentiable (définie par un champ différentiable et complètement intégrable de n-éléments). Une feuille B (ou variété intégrable complète) sera dite *stable* lorsqu'elle satisfait aux conditions suivantes : 1. B admet un *voisinage tubulaire saturé* E (c'est un voisinage qui est réunion de feuilles et qui admet une structure fibrée différentiable, de base B et dont les fibres, homéomorphes à une boule, sont transversales par rapport aux feuilles). 2. Si F_x est la fibre de E passant par $x \in B$, les traces sur F_x des voisinages tubulaires saturés de B forment un système fondamental de voisinages de x relativement à F_x. Lorsque B est compact, l'ensemble de ces deux conditions équivaut à la condition suivante : Tout voisinage de B contient un voisinage saturé.

Soit donc E un voisinage tubulaire saturé d'une feuille stable. La structure feuilletée sur E définit une connexion infinitésimale intégrable relativement à la structure fibrée transversale de E. Donc elle ne dépend que de la représentation du groupe de Poincaré de B sur le groupe d'holonomie.

Si le groupe de Poincaré d'une feuille compacte B est fini, B est toujours stable (théorème de Reeb [13]) ; la structure du voisinage tubulaire feuilleté de B peut alors être précisé en remarquant que le groupe d'holonomie est dans ce cas équivalent, au moins au voisinage de $x \in B$, à un groupe fini de rotations euclidiennes d'une boule autour de son centre. Ce dernier résultat est valable chaque fois que le groupe d'holonomie est fini. Par exemple, il en sera ainsi lorsque B est une feuille compacte stable ayant un voisinage saturé dont toutes les feuilles sont compactes. Le groupe d'holonomie opère alors dans une boule de telle façon que chaque point n'admette qu'un nombre fini de transformés. D'après D. Montgomery, le groupe d'holonomie est donc fini.

L'espace des vecteurs normaux à une feuille B est un espace fibré différentiable N (B) ayant pour groupe structural le groupe linéaire homogène. La structure feuilletée détermine sur N(B) une connexion infinitésimale intégrable, compatible avec la structure vectorielle des fibres (voir la définition du paragraphe suivant). C'est une propriété caractéristique de N(B) ; c'est-à-dire, on a la proposition suivante :

Proposition. — *Pour qu'une variété différentiable* B *plongée dans une variété* V *admette un voisinage feuilleté ayant* B *comme feuille, il faut et il suffit que l'espace fibré* N(B) *admette une structure fibrée subordonnée à groupe structural discret,* *ou, ce qui revient au même, admette une connexion infinitésimale intégrable, compatible avec la structure vectorielle des fibres.*

On donne facilement des exemples de variétés plongées dans une variété V qui ne vérifient pas cette condition.

4. La notion de connexion infinitésimale dans un espace fibré à groupe structural de Lie

Définition. — *Soit* E(B, F, G, H) *un espace fibré à groupe structural de Lie* G. *Une connexion infinitésimale dans* E(B, F, G, H) *sera définie par un champ transversal* C *vérifiant la condition* (c) *et tel que l'homéomorphisme* φ_a *associé au chemin* a *de* B *soit un isomorphisme de* $F_{x'}$ *sur* F_x.

Soit (y_i) une famille de points de F telle que le sous-groupe de G qui la laisse invariante soit réduit à la transformation identique. Soit R_s la famille (sy_i), transformée de (y_i) par $s \in G$, et soit R_h la famille (hy_i), transformée de (y_i) par $h \in H$. Nous dirons que R_s et R_h forment deux ensembles de repères dans F et E respectivement. L'ensemble des repères R_h est un sous-espace du produit d'une famille d'espaces identiques à E. On peut identifier H à ce sous-espace par l'application $h \longrightarrow R_h$, qui est un homéomorphisme. D'ailleurs si (y_i) est la famille de tous les points de F, chaque point étant confondu avec son indice, R_h est identique à h par définition.

On peut toujours prendre dans F un repère initial formé par une famille finie [1] de points y_i. Une connexion infinitésimale C dans E(B, F, G, H) fait alors correspondre au chemin a de B un chemin différentiable de l'espace des repères (identifié à H), d'origine $R_h = (hy_i)$, où h est un élément arbitraire de H_x. On voit ainsi qu'au champ C correspond dans $H(B, G, G_\gamma, \overline{H})$ un champ différentiable transversal $\overline{C}$, qui sera évidemment invariant par les translations $h \longrightarrow hs$.

Proposition. — *Dans l'espace* $H(B, G, G_\gamma, \overline{H})$, *il existe toujours un champ différentiable transversal* $\overline{C}$, *invariant par toute translation* h $\longrightarrow$ hs. *Un tel champ vérifie toujours la condition* (c) *et définit donc une connexion infinitésimale dans* $H(B, G, G_\gamma, \overline{H})$. *Par l'application* (h, y) $\longrightarrow$ hy, *où* h $\in$ H, y $\in$ F, *on en déduit une connexion infinitésimale dans* E(B, F, G, H) *et, d'une manière analogue, dans tout espace fibré associé.*

[1] Le groupe G est homéomorphe à l'espace des repères dans F. Comme on peut prendre des repères formés d'un nombre fini de points, on voit que la topologie de G est celle de la convergence compacte de G, considéré comme groupe d'automorphismes de F.

La construction du champ $\overline{C}$ peut se faire par récurrence en utilisant une subdivision simpliciale de B et en remarquant que la donnée de l'élément de $\overline{C}$ au point $z \in H_x$ détermine par translation les éléments de $\overline{C}$ en tous les points de H_x. Mais il est préférable de ramener le problème à la construction d'un champ de n-éléments dans l'espace HH^{-1}.

L'application différentiable $(h, h') \longrightarrow h'h^{-1}$ de $H \times H$ sur HH^{-1} se prolonge aux vecteurs $(h, h' + dh')$; le vecteur image de $(h, h' + dh')$ sera noté $(h' + dh')h^{-1}$. En particulier, il convient de dire que le vecteur $(h + dh)h^{-1}$, où $h \in H_x$, est un *déplacement infinitésimal* de la fibre F_x. L'origine $\tilde{x}$ de ce vecteur est l'automorphisme identique de F_x. Soit $\tilde{\Delta}$ l'ensemble des automorphismes identiques des fibres de E; c'est un relèvement dans HH^{-1} de la diagonale Δ de $B \times B$. L'application $(h, h' + dh') \longrightarrow (h' + dh')h^{-1}$ fait correspondre au champ $\overline{C}$ un champ $\overline{\overline{C}}$ de n-éléments de HH^{-1}. La restriction de $\overline{\overline{C}}$ à $\tilde{\Delta}$ est un champ $\tilde{C}$; c'est la fonction qui associe à tout point $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}$ le n-élément X_n défini par l'ensemble des vecteurs $(h + dh)h^{-1}$, où $h \in H_x$ et où $h + dh$ appartient à l'élément du champ C associé au point h. Nous dirons qu'un tel vecteur $(h + dh)h^{-1}$ est un *déplacement infinitésimal appartenant à la connexion infinitésimale* considérée. Par la projection de HH^{-1} sur $B \times B$ il se projette sur le vecteur $(x, x + dx)$. La connexion infinitésimale associe ainsi à chaque vecteur $x + dx$ de B un déplacement infinitésimal $\mathcal{C}(x + dx)$ de la fibre F_x. *Elle est parfaitement déterminée et pourrait être définie par la fonction* $x + dx \longrightarrow \mathcal{C}(x + dx)$, *c'est-à-dire par le champ* $\tilde{C}$. Ce champ détermine, en effet, le champ $\overline{\overline{C}}$, ce qui résulte de l'équation

$$(h' + dh')h^{-1} = [(h' + dh')h'^{-1}][h'h^{-1}] ,$$

où le second membre est le produit d'un déplacement infinitésimal et d'un isomorphisme, qui est défini par l'extension aux vecteurs de la loi de composition (produit d'isomorphismes) déjà considérée plus haut sur HH^{-1}. D'autre part, le champ $\overline{\overline{C}}$ détermine le champ $\overline{C}$, car il n'y a qu'un vecteur $h' + dh'$ d'origine h' tel que $(h' + dh')h^{-1}$ soit un vecteur donné.

Une connexion infinitésimale sur E(B, F, G, H) est donc déterminée par un champ $\tilde{C}$ défini par une fonction différentiable qui associe à chaque point $\tilde{x}$ de $\tilde{\Delta}$ un n-élément X_n de HH^{-1} dont la projection sur $B \times B$ est l'élément engendré par les vecteurs $(x, x + dx)$. L'existence d'une connexion infinitésimale résulte alors du fait que l'ensemble des éléments X_n vérifiant cette dernière condition forme un espace homéomorphe à un espace numérique.

Deuxième définition d'une connexion infinitésimale

Faisons correspondre au vecteur $h+dh$, tangent en h à la fibre $h(F)$ de H, le vecteur $\varpi(h+dh) = h^{-1}(h+dh)$, tangent en e à G. La relation $h^{-1}(h+dh) = h_1^{-1}(h_1+dh_1)$ définit une relation d'équipollence (ou parallélisme) dans l'espace fibré $T'(H)$ des vecteurs tangents aux fibres de H. Soit $T(G)$ l'espace des vecteurs tangents à G et soit $T_e(G)$ l'espace des vecteurs tangents à G en e. Pour $h+dh \in T'(H)$ et $s+ds \in T(G)$ on a :

$$\varpi(h(s+ds)) = s^{-1}(s+ds) ,$$

$$\varpi((h+dh)s) = s^{-1}(h^{-1}(h+dh))s .$$

Le vecteur $\varpi((h+dh)s)$ se déduit donc de $\varpi(h+dh)$ par une transformation du groupe adjoint linéaire. L'application ϖ est une représentation de $T'(H)$ dans $T_e(G)$. Cette représentation est invariante lorsqu'on fait subir simultanément à H la translation par s et à $T_e(G)$ la transformation $X \longrightarrow sXs^{-1}$.

Considérons dans $H(B, G, G_\gamma, H)$ un champ transversal différentiable $\overline{C}$, invariant par les translations $h \longrightarrow hs$. Soit $h+\overline{dh} = \pi(h+dh)$ la projection du vecteur $h+dh$, tangent en h à H, par l'application linéaire projetant l'espace tangent en h à H sur l'espace tangent en h à la fibre $h(F)$ de telle façon que l'élément du champ $\overline{C}$ en h soit projeté sur le point h. Au champ $\overline{C}$ est associée ainsi une projection différentiable π de $T(H)$, espace des vecteurs tangents à H, sur $T'(H)$. Faisons correspondre au vecteur $h+dh$ le vecteur :

$$\omega(h+dh) = h^{-1}(h+\overline{dh}) .$$

L'application ω, qui est l'application composée $\varpi\pi$, est une application différentiable de $T(H)$ dans $T_e(G)$ vérifiant les conditions suivantes :

(c') 1. La restriction de ω aux vecteurs $h+dh$ d'origine h fixe est linéaire, c'est-à-dire ω est une forme différentielle linéaire vectorielle sur H.

2. $\omega(h(s+ds)) = s^{-1}(s+ds)$.

3. $\omega((h+dh)s) = s^{-1}\omega(h+dh)s$.

Réciproquement toute application différentiable ω de $T(H)$

dans $T_e(G)$ *qui possède les trois propriétés* (c′) *détermine une connexion infinitésimale dans* H, *le champ* $\overline{C}$ *étant défini par* $\omega(h + dh) = 0$.

5. Espaces à connexion de Cartan [5, 6, 11]

Considérons le cas particulier suivant :

(c_1) G est transitif dans F, c'est-à-dire F est l'espace homogène G/G′, où G′ est le sous-groupe fermé du groupe de Lie G laissant invariant un point $o \in F$.

(c_2) $\dim F = \dim B = n$.

(c_3) L'espace fibré E(B, F, G, H) admet une section deux fois différentiable que nous identifions à B.

Soit H′ le sous-espace de H formé par l'ensemble des isomorphismes de F sur F_x appliquant o sur x, où $x \in B$ (considéré comme section). H′ est un espace fibré $H'(B, G', G'_\gamma, \overline{H}')$; c'est l'espace fibré principal associé à une structure fibrée E(B, F, G′, H′), subordonnée à E(B, F, G, H). La donnée d'une structure fibrée E(B, F, G′, H′) entraîne inversement celle d'une structure E(B, F, G, H) telle que $H' \subset H$; celle-ci vérifie (c_3), la section à laquelle sera identifié B étant définie par l'application $x \longrightarrow h'(o)$, $h' \in H_x'$.

L'espace F_x sera dit *tangent* à B en x lorsque les vecteurs tangents à B en x peuvent être identifiés aux vecteurs tangents à F_x en x, dans le sens précis suivant : Soit T(B) l'espace des vecteurs tangents à B; c'est un espace fibré $T(B, R^n, L_n, H_1)$, où L_n est le groupe linéaire homogène de l'espace numérique R^n. Soit T′(B) l'espace des vecteurs tangents à F_x en $x \in B$. C'est l'espace fibré associé à E(B, F, G′, H′), quotient de $H' \times R_0^n$ par la relation d'équivalence associée à l'application $(h', o + dy) \longrightarrow h'(o + dy)$, où $h' \in H'$ et $o + dy \in R_0^n$, désignant par R_0^n l'espace tangent à F en o, que nous identifions d'ailleurs à R^n. T′(B) est aussi l'espace fibré associé à E(B, F, G′, H′) par l'homomorphisme φ de G′ sur L_n', groupe linéaire d'isotropie de l'espace homogène F au point o, où φ fait correspondre à $s' \in G'$ la transformation linéaire $o + dy \longrightarrow s'(o + dy)$. Donc T′(B) a une structure fibrée de symbole $T'(B, R^n, L_n', H_1')$. Lorsqu'on peut identifier T(B) à T′(B) par un isomorphisme se projetant sur la transformation identique de B, par rapport à cette identification l'espace F_x sera dit *tangent* à B en x et l'espace fibré E(B, F, G′, H′) sera dit *soudé* à B. Pour que cette soudure soit possible, il faut que l'espace fibré $T(B, R^n, L_n, H_1)$ admette une structure subordonnée à groupe structural L_n'. On est ainsi conduit à un problème de classes caractéristiques.

La connexion infinitésimale définie dans H par l'application ω vérifiant les conditions (c') sera déjà déterminée, en vertu de ces conditions, par la restriction de ω à l'espace $T(H')$ des vecteurs tangents à H'.

Définition. — *Une connexion de Cartan de type* F *sur* B *est définie par la donnée d'un espace fibré* $E(B, F, G', H')$ *satisfaisant aux conditions* (c_1) *et* (c_2) *et d'une application différentiable* ω *de* $T(H')$ *dans* $T_e(G)$, *cette application vérifiant les conditions suivantes, où* $h' + dh' \in T(H')$ *et* $s' + ds' \in T(G')$:

1. *La restriction de* ω *aux vecteurs* $h' + dh'$ *d'origine* h' *fixe est linéaire.*

2. $\omega(h'(s' + ds')) = s'^{-1}(s' + ds')$.

3. $\omega((h' + dh')s') = s'^{-1}\omega(h' + dh')s'$.

4. $\omega(h' + dh') = 0$ *entraîne* $dh' = 0$.

En tenant compte de la condition $\dim F = \dim B$, les conditions 1 et 2 signifient que ω est une *représentation* de l'espace fibré $T(H')$ dans $T_e(G)$. Cette représentation définit un isomorphisme de $T(H')$ sur $H' \times T_e(G)$, donc un parallélisme dans la variété H'.

Proposition. — *Une connexion de Cartan sur B détermine un isomorphisme de* $T(B)$ *sur* $T'(B)$, *c'est-à-dire une soudure de* $E(B, F, G', H')$ *à* B.

B est supposé identifié à la section définie par $x \longrightarrow h'(o)$, $h' \in H_x'$. Au vecteur $h' + dh'$ tangent à H' correspond $\omega(h' + dh')$, qui se projette, par la projection canonique de G sur F, sur un vecteur $o + dy$ tangent à F. D'autre part. $h' + dh'$ se projette sur un vecteur $x + dx$ tangent à B. L'application $x + dx \longrightarrow h'(o + dy)$, qui ne change pas en remplaçant $h' + dh'$ par $(h' + dh')s + h\ (s + ds)$, est l'isomorphisme cherché.

Proposition. — *Etant donné un espace fibré* $E(B, F, G', H')$ *soudé à* B, *il existe une connexion de Cartan sur* B *correspondant à* $E(B, F, G', H')$.

La connexion de Cartan n'est qu'une connexion infinitésimale d'un type particulier dans l'espace fibré $E(B, F, G, H)$, où $H' \subset H$. Elle sera encore déterminée par un champ $\tilde{C}$ associant à chaque $\tilde{x} \in \tilde{\Delta}$ un n-élément X_n de HH^{-1}. L'ensemble des éléments X_n admissibles est plus restreint que dans la démonstration du paragraphe précédent. Mais en tenant compte de la soudure de $E(B, F, G', H')$ à B, l'ensemble des éléments X_n admissibles au point $\tilde{x}$ correspond d'une façon biunivoque à l'ensemble des automorphismes linéaires de l'espace vectoriel $R^{n+r'}$ qui laissent invariants chaque point d'un sous-espace vectoriel $R^{r'}$ ainsi que chaque classe de $R^{n+r'}$ modulo $R^{r'}$, le nombre r' étant la dimension de G'. Cet ensemble est encore un espace homéomorphe à un espace numérique, d'où l'existence d'une connexion de Cartan.

Remarque. — Une connexion de Cartan correspond à un parallélisme global d'un type particulier dans H'. Ainsi le transport par parallélisme de Levi-Civitá sur un espace de Riemann B correspond à un parallélisme dans l'espace des repères formés par les suites de n vecteurs orthonormés. Un espace fibré principal n'est pas toujours une variété parallélisable; mais lorsque c'est l'espace des repères H' d'un espace fibré soudé à B, il est toujours parallélisable d'après la proposition précédente.

L'espace homogène $F = G/G'$ *admet une connexion de Cartan naturelle.* $F \times F$ est un espace fibré à groupe structural G, les fibres étant les ensembles $\{x\} \times F$. Soit B la diagonale de $F \times F$ et considérons-la comme espace de base de $F \times F$. Chaque fibre admet alors une identification naturelle à B par l'application $(x, y) \longrightarrow (y, y)$. H est l'ensemble des isomorphismes $(o, y) \longrightarrow (x, sy)$ de F_0 sur les fibres. H' est l'ensemble des isomorphismes $(o, y) \longrightarrow (s(o), sy)$. H' peut être identifié canoniquement à G, en faisant correspondre cet isomorphisme à $s \in G$. Dans $F \times F$, espace des couples (x, y), on a la connexion intégrable naturelle déterminée par le champ de n-éléments défini par $dx = 0$. Cette connexion est aussi déterminée par la fonction ω telle que $\omega(s + ds) = s^{-1}(s + ds)$, G étant supposé identifié à H', $s + ds \in T(G)$.

Dans la définition d'une connexion de Cartan sur B on peut remplacer la condition $\dim F = \dim B$ par la condition $\dim F \geqslant \dim B$; on obtient alors une *structure de Cartan au sens large*. L'espace fibré $E(B, F, G', H')$ relatif à une telle structure est dans ce cas soudé à B par un isomorphisme de $T(B)$ sur un sous-espace de $T'(B)$ qui permet d'identifier l'espace tangent à B en x à un *sous-espace* de l'espace tangent à F_x en x. Les deux propositions du présent paragraphe seront encore valables, mais ω ne définit plus un isomorphisme de $T(H')$ sur $H' \times T_e(G)$.

La notion d'*isomorphisme* concernant deux espaces fibrés munis de connexions infinitésimales résulte immédiatement des définitions posées. Considérons deux variétés B et B_1 munies de connexions de Cartan, les espaces fibrés soudés à B et B_1 étant $E(B, F, G', H')$ et $E_1(B_1, F, G', H_1')$. Les isomorphismes de la première structure sur la seconde correspondent aux homéomorphismes φ deux fois différentiables de H' sur H_1' vérifiant l'équation

$$\omega(h' + dh') = \bar{\omega}(\varphi(h' + dh'))$$

où ω et $\bar{\omega}$ définissent les deux connexions.

6. Différentiation intrinsèque par rapport à une connexion infinitésimale et développement d'un espace à connexion de Cartan

Dans l'espace fibré deux fois différentiable E(B, F), considérons une connexion infinitésimale définie par un champ transversal C. Soit a une application différentiable régulière d'un intervalle I de la droite numérique dans B et soit b un relèvement différentiable de a dans E. L'application a définit un chemin régulier dans B ou le mouvement d'un point $x = a(t)$; de même b définit un chemin régulier dans E ou le mouvement d'un point $z = b(t)$. L'ensemble des courbes intégrales de C qui se projettent sur a détermine un isomorphisme φ_t de la fibre F_{x_0} sur la fibre F_x, où $x_0 = a(t_0)$. La fonction $t \to \varphi_t$ sera le *mouvement d'entraînement* de la fibre F_x à partir de sa position F_{x_0} et correspondant au chemin a. Soit $\bar{z} = \bar{b}(t)$ le point de F_{x_0} qui est appliqué par φ_t *sur* $z = b(t)$. Le point $\bar{z}$ décrit un chemin $\bar{b}$, appelé *développement* de b dans la fibre F_{x_0} ; on a $z_0 = b(t_0) = \bar{b}(t_0)$. Appelons *vitesse intrinsèque* du point z à l'instant t_0 la vitesse de $\bar{z}$ à l'instant t_0. La vitesse $\dfrac{dz}{dt}$ de $z = b(t)$ à l'instant t est la *vitesse dans* E ou la *vitesse extrinsèque* de z. La vitesse du point $\tilde{z} = \varphi_t(z_0)$ est la *vitesse d'entraînement* du point z à l'instant t_0. Posons $z_0 + Dz = \bar{b}(t_0 + dt)$; la fonction

$$t_0 + dt \to Dz = \bar{b}(t_0 + dt) - b(t_0)$$

s'appellera *différentielle intrinsèque* de la fonction b ; la vitesse intrinsèque de z à l'instant t se notera $\dfrac{Dz}{dt}$. L'espace tangent à E en z_0 est la somme directe de l'espace tangent à F_{x_0} en z_0 et du sous-espace définissant l'élément du champ C en z_0. Les composantes suivant ces deux sous-espaces de la vitesse extrinsèque à l'instant t_0 sont la vitesse intrinsèque et la vitesse d'entraînement. Pour un vecteur quelconque d'origine z_0 ces composantes peuvent s'appeler composante intrinsèque et composante d'entraînement. Étant donné une application différentiable f dans E d'une variété différentiable quelconque, en composant la différentielle df avec la projection de chaque vecteur de E sur sa composante intrinsèque, on obtient la différentielle intrinsèque Df.

Considérons une connexion infinitésimale dans l'espace fibré $E(B, F, G, H)$, déterminée par un champ $\overline{C}$ dans H ou par une fonction ω. Soit b un chemin régulier dans H et posons $h = b(t)$. Soit a sa projection dans B et posons $x = a(t)$. Un relèvement quelconque de a est un chemin décrit par $\tilde{h} = hs^{-1}$, où $s \in G$ est une fonction de t. On a $h = \tilde{h}s$ et par suite :

$$h + dh = (\tilde{h} + d\tilde{h})s + \tilde{h}(s + ds) ,$$

$$\omega(h + dh) = s^{-1}\omega(\tilde{h} + d\tilde{h})s + s^{-1}(s + ds) .$$

Pour que $\tilde{h}$ décrive une courbe intégrale de $\overline{C}$, il faut et il suffit que s décrive un chemin b' de G qui soit solution de l'équation

$$\omega(h + dh) = s^{-1}(s + ds) \; ; \qquad (1)$$

c'est-à-dire l'application $t \longrightarrow (b(t), b'(t))$ est une courbe intégrale de (1) dans $H \times G$. Soit $s = \sigma(t)$ la solution de (1) telle que $\sigma(t_0) = e$. La solution b' la plus générale est alors donnée par $s = s_0\sigma(t)$. La courbe intégrale la plus générale se projetant sur a est décrite par le point

$$\tilde{h} = h\sigma^{-1}(t)s_0^{-1} = b(t)\sigma^{-1}(t)s_0^{-1} .$$

Le mouvement d'entraînement est défini par l'isomorphisme φ_t qui applique $h_0 s_0^{-1}$ *sur* $h\sigma^{-1}(t)s_0^{-1}$, donc en particulier $h_0\sigma(t)$ sur h. *Par suite le développement* $\overline{\mathrm{b}}$ *de* b *dans la fibre* $\mathrm{h_0G}$ *est le chemin décrit par le point* $\mathrm{h_0}\sigma(\mathrm{t})$. *La composante intrinsèque du vecteur* $\mathrm{h + dh}$ *est* $\mathrm{h}\omega(\mathrm{h + dh})$, *c'est-à-dire on a :* $\mathrm{h + Dh} = \mathrm{h}\omega(\mathrm{h + dh})$. *Le chemin* $\mathrm{b'}$ *défini par* $\mathrm{s = s_0}\sigma(\mathrm{t})$ *est appelé un développement de* b *dans* G.

Considérons maintenant la connexion associée dans $E(B, F, G, H)$. L'application $(h, y) \longrightarrow hy$ de $H \times F$ sur E permet de définir un point quelconque z de E par $z = hy$, $h \in H$, $y \in F$. Nous dirons que y est le point coordonnée de z par rapport au repère h. Si $y = \lambda(t)$ décrit le chemin λ dans F et h le chemin b dans H, le point $z = hy$ décrit un chemin l dans E et λ est appelé le chemin relatif au repère mobile h décrit par z. L'élément du champ C en hy est l'image de l'élément du champ $\overline{C}$ en h par l'application $h \longrightarrow hy$. La composante intrinsèque de $(h + dh)y$ est $(h + Dh)y$ ou $h\omega(h + dh)y$. Comme $z + dz = (h + dh)y + h(y + dy)$, la composante intrinsèque de $z + dz$ est

$$z + Dz = h\omega(h + dh)y + h(y + dy) = h[\omega(h + dh)y + dy].$$

Par rapport au repère mobile h ce vecteur est défini par le vecteur $\omega(h+dh)y+dy$, tangent à F en y. La fonction $t+dt \to Dy$, où $y+Dy=\omega(h+dh)y+dy$, est appelée la *différentielle covariante* de $y=\lambda(t)$ relativement au repère mobile $h=b(t)$.

Dans tout espace fibré associé à E(B, F, G, H) on a de la même façon une différentiation intrinsèque et une différentiation covariante. Un espace fibré associé par un homomorphisme de G sur un groupe linéaire de R est un espace de tenseurs sur B. La différentiation intrinsèque ou covariante s'exprime alors à l'aide de coordonnées cartésiennes; en particulier, on obtient ainsi la différentiation covariante classique dans les espaces à connexion affine.

Dans le cas d'un espace à connexion de Cartan, le développement peut s'appliquer en particulier à une courbe de la variété de base B, qui est identifiée à une section de l'espace fibré E(B, F, G, H) soudé à B. La connexion de Cartan définie par une représentation ω de T(H′) dans $T_e(G)$ correspond à une connexion infinitésimale dans l'espace fibré E(B, F, G, H′), où $H' \subset H$. En remarquant que $H=H'G$, on obtient le prolongement de ω à T(H). Posons $h=h's^{-1}$ ou $h'=hs$, $h' \in H'$, $s \in G$, $h'+dh' \in T(H')$, $h+dh \in T(H)$. On trouve ainsi comme plus haut :

$$\omega(h'+dh') = s^{-1}\omega(h+dh)s + s^{-1}(s+ds)\ ,$$
$$\omega(h+dh) = s\omega(h'+dh')s^{-1} - (s+ds)s^{-1}\ .$$

Le champ $\overline{C}$ définissant la connexion dans H est défini par $\omega(h+dh)=0$, équation équivalente à

$$\omega(h'+dh') = s^{-1}(s+ds)\ . \tag{1'}$$

Cette équation définit un champ dans $H' \times G$ et $\overline{C}$ est l'image de ce champ par l'application $(h', s) \to h's^{-1}$. Etant donné un chemin b dans H′, posons $h'=b(t)$. Soit $s=\sigma(t)$ la solution de (1′) telle que $\sigma(t_0)=e$, h' étant remplacé par $b(t)$. Le développement de b dans la fibre $h_0'G$ est le chemin $\bar{b}$ décrit par $h_0'\sigma(t)$.

L'application canonique ψ de H sur E, définie par $h \to h(o)$, fait correspondre à H′ la section de E(B, F, G, H) qu'on a identifiée à B. La restriction de ψ à H′ s'identifie à la projection canonique de H′ sur B. Au champ $\overline{C}$ correspond par ψ le champ C dans E. Le chemin b dans H′ se projette par ψ sur le chemin a dans B. Le chemin $\bar{b}$ se projette sur le chemin $\bar{a}$ dans la fibre F_{x_0}. *Ce chemin* $\bar{a}$ *est le développement de* a *dans cette fibre :* $\bar{a}(t)=h_0'\sigma(t)(o)$. Soit encore b' un développement de b dans G, défini par $s=s_0\sigma(t)$. La projection canonique de b' dans F est le chemin a' défini par $x=s_0\sigma(t)(o)$.

Ce chemin a' est un *développement de* a *dans* F. Le développement $\bar{a}$ dans F_{x_0} se déduit de a' par l'isomorphisme $h_0' s_0^{-1}$, c'est-à-dire : $\bar{a} = h_0' s_0^{-1} a'$.

L'isomorphisme de T(B) sur T'(B) qui réalise la soudure de E(B, F, G', H') à B est simplement défini par $x + dx \longrightarrow x + Dx$, où $x + dx \in T(B)$ et où $x + Dx$ est la composante intrinsèque de $x + dx$. Soit $x + dx = (h' + dh')(o)$, où $h' + dh' \in T(H')$. Alors on a : $x + Dx = h'\omega(h' + dh')(o)$.

Si la fonction $h' + dh' \longrightarrow \omega(h' + dh')$ est plusieurs fois différentiable, le développement dans F_x des chemins de B d'origine x fait correspondre canoniquement à un élément de contact de dimension quelconque et d'ordre supérieur un élément analogue dans F_x. *La connexion de Cartan détermine alors un isomorphisme canonique de l'espace des éléments de contact d'ordre supérieur de* B *en* x *sur l'espace des éléments analogues de* F_x. *Les espaces* F_x *peuvent être dits tangents d'ordre supérieur à* B *en* x.

Si l'espace fibré H' est k fois différentiable, une connexion de Cartan sur B peut être approchée par une connexion de Cartan $k - 1$ fois différentiable. L'existence d'une telle connexion est donc simplement équivalente à l'existence d'un isomorphisme de T(B) sur T'(B) se projetant sur l'application identique de B.

Les *invariants différentiels* de l'espace à connexion de Cartan B sont les invariants différentiels des éléments de contact développés dans l'espace homogène F_x. Comme F_x est isomorphe à F, chaque élément de contact d'ordre supérieur de B correspond à un élément de contact développé dans F et déterminé à un automorphisme près de F.

Dans le cas d'un espace à connexion de Cartan, la notion de développement peut encore se préciser de la manière suivante :

Soit E(B, F, G, H) un espace fibré muni d'une connexion infinitésimale C et soit f une application différentiable régulière d'une variété V dans B. Appelons $f^*(B)$ l'espace représentatif de f dans $V \times B$. L'espace fibré $f^*(E)$, dont la base peut être identifiée à $f^*(B)$ ou à V, est muni d'une connexion $f^*(C)$, image réciproque de la connexion C. Si C définit sur B une connexion de Cartan, $f^*(C)$ définit sur $f^*(B)$ ou sur V une connexion de Cartan au sens large.

Supposons de nouveau que la connexion de Cartan C sur B soit définie par la forme différentielle vectorielle ω sur H'. Soit $\bar{f}$ une application de V dans H' se projetant sur f. Soit f_1 une application de V dans G telle que $(\bar{f}, \bar{f}_1)$ définisse une variété intégrale de (1') dans l'espace $H' \times G$. L'application $\bar{f}_1$ admet une projection f_1, application de V dans

$F = G/G'$. On dira que f_1 est le développement de f. Les espaces fibrés $f^*(H')$ et $f_1^*(G)$, qui sont des espaces fibrés principaux de base $f^*(B)$ et $f_1^*(F)$ et de fibres isomorphes à G', se correspondent par l'isomorphisme $(v, \bar{f}(v)s') \longrightarrow (v, \bar{f}_1(v)s'), v \in V$. Cet isomorphisme se projette sur l'application $(v, f(v)) \longrightarrow (v, f_1(v))$ de $f^*(B)$ sur $f_1^*(F)$, ou sur l'application identique de V. Il correspond à la variété intégrale de (1′), définie par les applications $(v, \bar{f}(v)s') \longrightarrow \bar{f}(v)s'$ et $(v, \bar{f}(v)s') \longrightarrow \bar{f}_1(v)s'$, qui plongent $f^*(H')$ dans $H' \times G$. Cette variété intégrale peut être appelée variété intégrale saturée déduite de la variété intégrale donnée. L'isomorphisme de $f^*(H')$ sur $f_1^*(G)$ établit un isomorphisme pour les deux connexions de Cartan définies sur $f^*(B)$ et $f_1^*(F)$ comme images réciproques des connexions de Cartan sur B et F. Plus généralement, sans supposer que f soit projection d'une application $\bar{f}$, nous pouvons donner la définition suivante :

Une application f_1 *de* V *dans* F *est appelée développement de l'application* f *de* V *dans* B *lorsqu'il existe un isomorphisme de* $f^*(B)$ *sur* $f_1^*(F)$, *munis des connexions de Cartan images réciproques de* C *par* f *et* f_1, *cet isomorphisme appliquant* $(v, f(v))$ *sur* $(v, f_1(v))$. *Un tel isomorphisme sera défini par un isomorphisme de* $f^*(H')$ *sur* $f_1^*(G)$ *correspondant à une solution de* (1′).

7. Cas d'une connexion de Cartan intégrable

Le champ $\bar{C}$ ou l'équation (1′) sont alors complètement intégrables. L'espace B est localement développable sur F; c'est un espace localement homogène de Lie, localement isomorphe à F [4].

Si le groupe d'holonomie est réduit à l'identité, les variétés intégrales du champ complètement intégrable C dans E définissent une projection de la section B de E sur une fibre F_{x_0}. Cette projection, qui définit le *développement de* B *dans* F_{x_0}, est un homéomorphisme local *étalant* B sur F_{x_0}, c'est-à-dire une application de B dans F_{x_0} dont la restriction à un voisinage suffisamment petit de chaque point de B est un homéomorphisme. Dans le cas général, en remplaçant B par un revêtement convenable B′ (voir § 3), on obtient de la même façon le *développement de* B′ *dans* F, défini par un homéomorphisme local étalant B′ sur F.

Rappelons que la condition d'intégrabilité de la connexion de Cartan peut s'exprimer de la façon suivante : Prenons une base dans l'espace vectoriel tangent à G en e. Soient $\omega_i(h' + dh')$, où $i = 1, \ldots, r$, les coordonnées de $\omega(h' + dh')$

par rapport à cette base. Si $\alpha_i(s+ds)$ désignent les coordonnées de $s^{-1}(s+ds)$, on a :

$$d\alpha_i = \sum_{j<k} C_{jki}\, \alpha_j \wedge \alpha_k \, .$$

Nous pouvons poser :

$$d\omega_i = \sum_{j<k} C_{jki}\, \omega_j \wedge \omega_k + \Omega_i \, ,$$

où les Ω_i s'appellent les formes de courbure de la connexion. L'équation (1′) est alors équivalente au système de Pfaff

$$\alpha_i(s+ds) = \omega_i(h'+dh') \, . \qquad (1'')$$

Pour que celui-ci soit complètement intégrable, il faut et il suffit que les formes de courbure Ω_i soient nulles.

Remarque. — La recherche du groupe d'holonomie d'une connexion non intégrable revient à la recherche de certaines solutions du système de Pfaff qu'on obtient en écrivant que $\omega(h+dh)$, où $h \in \mathrm{H}$, appartient à une sous-algèbre de l'algèbre de Lie de G.

8. Espaces à connexion de Cartan complets

Soit B un espace muni d'une connexion de Cartan correspondant à l'espace homogène $\mathrm{F} = \mathrm{G}/\mathrm{G}'$. Tout chemin de B admet un développement sur F, à cause de l'homogénéité de F. L'espace B sera dit *complet* si inversement tout chemin de F admet un développement sur B, correspondant à un choix arbitraire du repère initial h_0' (c'est-à-dire si tout chemin dans G admet un développement sur H′ d'origine h_0').

Pour certains types de connexions de Cartan (par exemple pour les connexions euclidiennes ou affines), cette condition est équivalente à des conditions en apparence plus simples.

Remarquons que *la condition est toujours vérifiée si* B *a un revêtement universel compact.*

Proposition. — *Si l'espace* B *est complet, à connexion de Cartan intégrable, son revêtement universel* $\widehat{\mathrm{B}}$ *est isomorphe au revêtement universel de* F [4].

Cette proposition, qui résulte de l'existence du développement de $\widehat{\mathrm{B}}$ sur F, admet la généralisation suivante :

Proposition. — *Soient* B *et* $\overline{\mathrm{B}}$ *deux espaces à connexion de Cartan analytiques. Si* B *et* $\overline{\mathrm{B}}$ *sont complets et simplement connexes, tout isomorphisme d'un voisinage de* $\mathrm{x} \in \mathrm{B}$ *sur un voi-*

sinage de $\bar{x} \in \bar{B}$ *admet un prolongement définissant un isomorphisme global de* B *sur* $\bar{B}$ [5, 6].

9. Le problème d'existence d'une connexion de Cartan de type donné sur une variété donnée B

Reprenant les notations du § 5, soit F l'espace homogène de Lie G/G' et soit $\dim F = \dim B = n$. Pour qu'il existe sur B une connexion de Cartan de type F, il faut et il suffit qu'il existe un espace fibré $E(B, F, G', H')$ soudé à B. Etant donné un tel espace fibré, l'espace fibré $T'(B)$, associé à $E(B, F, G', H')$ par l'homomorphisme φ de G' sur L_n', admet un isomorphisme α sur $T(B)$ se projetant sur la transformation identique de B. La structure fibrée tangente à B, de symbole $T(B, R^n, L_n, H_1)$ admet donc une structure subordonnée de symbole $T(B, R^n, L_n', H_2)$, où $H_2 \subset H_1$. A l'homomorphisme φ est associé par α un homomorphisme $\bar{\varphi}$ de H' sur H_2, ces espaces étant supposés munis de leurs structures d'espaces fibrés principaux à groupe structural G' et L'_n respectivement; c'est-à-dire on a : $\bar{\varphi}(h's') = \bar{\varphi}(h')\varphi(s')$, où $h' \in H'$ et $s' \in G'$. H' sera appelé une extension de H_2 associé à l'homomorphisme φ. L'isomorphisme α, c'est-à-dire la soudure de $E(B, F, G', H')$ à B, est déterminé par $\bar{\varphi}$. La détermination de H' et par suite de l'espace fibré $E(B, F, G', H')$ soudé à B se fait donc en deux étapes :

Problème 1. — Détermination de H_2, c'est-à-dire d'une structure subordonnée à $T(B, R^n, L_n, H_1)$ à groupe structural L_n'.

Problème 2. — Détermination d'une extension H' de H_2 associée à φ.

On sait que le problème 1 revient à la détermination d'une section de H_1/L_n', considéré comme espace fibré de base B et de fibre L_n/L_n'. Il conduit en général à des obstacles, si les groupes d'homotopie de L_n/L_n' ne sont pas nuls pour les dimensions inférieures à n. Il peut admettre plusieurs solutions non équivalentes.

Le problème 2 conduit également à des obstacles dans le cas général. Etant donné H_2 et φ, la détermination de l'extension H' peut se faire par récurrence sur les squelettes de dimensions successives croissantes d'une subdivision simpliciale de B; mais on rencontre un premier obstacle pour la plus petite dimension r telle que le groupe d'homotopie de dimension $r-1$ du noyau N de φ soit différent de 0. Par exemple, l'extension H' existe et est unique, à un isomorphisme près, lorsque N est homéomorphe à un espace numérique.

De même on peut trouver une extension H' lorsque G' est une extension inessentielle du noyau N par L_n', c'est-à-dire lorsque G' admet un sous-groupe G'' qui soit un relèvement de L_n' dans G'. Il existe alors un isomorphisme ψ de L_n' sur G'' tel que $\varphi\psi$ soit l'application identique de L_n'. A l'espace $T(B, R^n, L_n', H_2)$ est associé par ψ un espace fibré $E(B, F, G'', H_2')$, où H_2' est isomorphe à H_2. La structure $E(B, F, G'', H_2')$ est subordonnée à une structure bien déterminée de symbole $E(B, F, G', H')$. H' est une extension de H_2 associée à φ et l'espace fibré $E(B, F, G', H')$ est soudé canoniquement à B. Remarquons que H' est isomorphe à l'espace quotient de $H_2 \times G'$ par la relation d'équivalence

$$(h_2, s') \sim (h_2\lambda, \psi(\lambda^{-1})s'), \text{ où } h_2 \in H_2, s' \in G', \lambda \in L_n'.$$

Cependant H_2 pourrait admettre aussi des extensions associées à φ qui ne s'obtiennent pas par le procédé indiqué.

10. Quelques exemples

a) La fibration classique de la sphère S_{2n-1} en cercles détermine sur S_{2n-1} une structure d'espace fibré principal dont le groupe structural est le groupe des rotations O_2 du cercle S_1. Si φ est l'homomorphisme canonique sur O_2 d'un groupe revêtement de O_2, S_{2n-1} n'admet aucune extension associée à φ, car une telle extension serait un revêtement de S_{2n-1}.

Cependant je ne connais aucun exemple où le problème 2 n'admet pas de solution, en supposant que φ soit l'homomorphisme naturel du groupe d'isotropie G' d'un espace homogène de Lie sur son groupe linéaire d'isotropie en un point donné.

b) F est l'espace R^n, G est le groupe affine. Une connexion de type F est appelée *connexion affine* sur B. L'espace fibré $E(B, F, G', H')$ soudé à B n'est autre que $T(B, R^n, L_n, H)$ et il existe toujours des connexions affines sur B. Si F est toujours R^n, mais si G est le groupe des déplacements euclidiens, L_n' est le groupe orthogonal O_n. Une connexion de type F est alors appelée une *connexion euclidienne*. Dans ce cas le problème 1 a toujours une solution, déterminée à un isomorphisme près. L'espace fibré $T(B, R^n, L_n', H_2)$ est l'espace $E(B, F, G', H')$ cherché. Il existe donc toujours des connexions euclidiennes sur B. D'ailleurs à toute métrique riemannienne sur B on peut associer une connexion euclidienne canonique.

c) Soit F l'espace projectif réel P_n et soit G le groupe projectif de P_n. Une connexion de type F sur B est appelée une *connexion projective*. L_n' se réduit à L_n. Le noyau N de l'homomorphisme de G' sur L_n est homéomorphe à l'espace des hyperplans de P_n ne passant pas par l'origine *o*, c'est-à-dire à

R^n. Si nous identifions R^n au complémentaire d'un hyperplan dans P_n, les transformations linéaires de R^n se prolongent à P_n, ce qui permet d'identifier L_n à un sous-groupe de G. Il existe donc un espace fibré $E(B, F, G', H')$ soudé à B; il est déterminé à un isomorphisme près. Il admet d'ailleurs une structure subordonnée $E(B, P_n, L_n, H_1')$, caractérisée par le choix continu dans chaque fibre, c'est-à-dire dans chaque espace projectif tangent à B, d'un hyperplan ne contenant pas le point de contact. On peut dire que E se déduit de T(B) en complétant chaque espace linéaire tangent par son hyperplan à l'infini. Sur toute variété B il existe donc des connexions projectives; elles appartiennent à une même classe d'homotopie.

d) Soit F la sphère S_n ou l'espace R^n complété par un point à l'infini et soit G le groupe conforme de S^n, c'est-à-dire le groupe qui transforme entre elles les sphères de dimension $n-1$. Une connexion de type F sur B est appelée une *connexion conforme*. Le groupe linéaire d'isotropie L_n' en o est le groupe $\mathfrak{S}_n$ des similitudes laissant fixe le point o. Le problème 1 admet une solution déterminée à un isomorphisme près. Ceci résulte de l'existence d'une solution du problème 1, déterminée à un isomorphisme près, lorsque L_n' est le groupe orthogonal O_n, en remarquant de plus que O_n est sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_n$ et que $\mathfrak{S}_n/O_n$ est homéomorphe à la droite numérique. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ peut être identifié au sous-groupe de G' qui laisse fixe le point à l'infini. Le noyau de φ, dont les éléments correspondent d'une façon biunivoque à l'espace $G'/\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire au complémentaire de o dans S_n, est homéomorphe à R^n. Il existe donc à un isomorphisme près un espace fibré $E(B, S_n, G', H')$ soudé à B. On peut dire que E se déduit de T(B) en complétant par un point à l'infini chaque espace linéaire tangent à B. Sur toute variété B il existe ainsi des connexions conformes; elles appartiennent à une même classe d'homotopie.

e) Si F est l'espace numérique complexe C^n et G le groupe affine complexe, G' est le groupe linéaire homogène complexe L'_{2n} de C^n. Le problème 1 est alors le problème de la détermination d'une *structure presque complexe* [9] sur la variété différentiable B de dimension $2n$. Ce problème n'admet pas toujours de solution. Mais à toute structure presque complexe correspondent des *connexions affines complexes* sur B.

Si F est l'espace projectif complexe $P_n(C)$ et G le groupe projectif complexe, le problème 1 revient encore à la détermination d'une structure presque complexe sur B. A une telle structure correspond alors une solution du problème 2, déterminée à un isomorphisme près, c'est-à-dire un espace fibré soudé à B ayant pour fibres des espaces projectifs complexes.

11. Remarque sur les connexions d'éléments de contact

Les *connexions d'éléments de contact*, considérées par M. E. Cartan et d'autres auteurs, rentrent dans le schéma exposé ici. Soit B′ la variété des éléments de contact de dimension p de B; c'est un espace fibré de base B. De même, soit F′ la variété des éléments de contact de dimension p de l'espace homogène $F = G/G'$. Supposons que G opère transitivement dans F′, qui sera isomorphe à G/G'', G'' étant un sous-groupe de G′. Alors une connexion d'éléments de contact de type F sur B est par définition une connexion de Cartan ordinaire de type F′ sur B′. On introduit en général la condition supplémentaire suivante : Soit $E(B', F', G'', H')$ l'espace fibré soudé à B′. Si $h' + dh'$ est un vecteur tangent à H′ et se projetant sur un point de B, le vecteur $\omega(h' + dh')$, qui en général devrait être tangent à G, est même tangent à G′. Par suite un chemin de B′ qui se projette sur un point de B se développe sur un chemin de F′ qui se projette sur un point de F.

On pourrait de même considérer des connexions d'éléments du second ordre de type F, en supposant que G opère encore transitivement dans l'espace des éléments de contact du second ordre de F.

Index bibliographique

[1] E. Cartan, *La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle* (*Proc. Intern. Math. Congress*, Toronto, I, pp. 85-94).

[2] — *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés* (*Acta Math.*, 48, 1926).

[3] — *L'extension du calcul tensoriel aux géométries non affines* (*Annals of Math.*, 38, 1937).

[4] Ch. Ehresmann, *Sur les espaces localement homogènes* (*Enseignement math.*, 1936, p. 317).

[5] — *Sur la notion d'espace complet en géométrie différentielle* (*Comptes rendus*, Paris, 202, 1936, p. 2033).

[6] — *Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan* (*Comptes rendus*, 1938, p. 1433).

[7] — *Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable* (*Comptes rendus*, 216, 1943, p. 628).

[8] — *Sur les espaces fibrés différentiables* (*Comptes rendus*, 1947, p. 1611).

[9] — *Sur la théorie des espaces fibrés* (*Colloque de Topologie algébrique, C. N. R. S.*, Paris, 1947, pp. 3-15).

[10] — *Sur les variétés plongées dans une variété différentiable* (*Comptes rendus*, 226, 1948, p. 1879).

[11] — *Sur la notion de connexion infinitésimale dans un espace fibré et sur les espaces à connexion de Cartan* (*Nachrichten Oest. Math. Ges.*, décembre 1949, p. 22).

[12] S. Eilenberg, *Singular homology in differentiable manifolds* (*Annals of Math.*, 1947).

[13] G. Reeb, *Variétés feuilletées, feuilles voisines* (*Comptes rendus*, Paris, 224, 1947, p. 1613).

[14] — *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, thèse, Strasbourg, 1948.

[15] N. E. Steenrod, *Topological methods for the construction of tensor functions* (*Annals of Math.*, 43, 1942, pp. 116-131).

Remarque sur les notations. — Un vecteur tangent en x à une variété différentiable E est noté $x + dx$; le symbole dx désigne un vecteur libre de l'espace affine tangent en x. Si f est une application différentiable de E dans E′, le prolongement de f aux vecteurs tangents est encore désigné par f. Soit $(x + dx,\ y + dy)$ un vecteur tangent à la variété produit $E \times F$ et soit f une application différentiable de $E \times F$. On a :

$$f(x + dx, y + dy) = f(x + dx, y) + f(x, y + dy).$$

En particulier si $f(x, y)$ se note xy, on a :

$$(x + dx)(y + dy) = x(y + dy) + (x + dx)y.$$

Dagli « Atti del IV Congresso dell' Unione Matematica Italiana »
Taormina 25-31 Ott. 1951

/32/

LES PROLONGEMENTS D'UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE

PAR CHARLES EHRESMANN

Cet exposé est une introduction à la Géométrie différentielle, adaptée à l'étude des problèmes de nature locale ou globale. L'élément fondamental de la Géométrie différentielle est le *jet infinitésimal d'ordre* r. On en déduit la définition des *prolongements* d'une variété différentiable, c'est-à-dire des espaces d'*éléments infinitésimaux* quelconques associés à une variété différentiable. Cette notion de prolongement conduit à une théorie générale des *structures infinitésimales,* théorie intimement liée à celle des *pseudogroupes de Lie.*

1. - Notions préliminaires.

Etant donnée une application f d'un ensemble U sur un ensemble $f(U)$, appelons U la source et $f(U)$ le but de f. Un *pseudogroupe de transformations* défini dans un ensemble E est un ensemble de transformations Γ vérifiant les axiomes suivants:

1. — Tout $f \in \Gamma$ est une application biunivoque dont la source et le but sont des parties de E. L'ensemble Φ des sources et des buts des éléments de Γ est l'ensemble des ensembles ouverts d'une topologie $\mathfrak{T}$ sur E.

2. — Soit $U = \bigcup\limits_i U_i$ et $U_i \in \Phi$. Pour qu'une application biunivoque f de source U sur une partie $f(U)$ de E appartienne à Γ, il faut et il suffit que la restriction de f à U_i, pour chaque indice i, appartienne à Γ.

3. — Pour tout $U \in \Phi$, l'application identique de U appartient à Γ. Si $f \in \Gamma$, l'application inverse f^{-1} appartient à Γ. Si $f \in \Gamma$ et

$f' \in \Gamma$ et si de plus l'application composée $f'f$ est définie, on a $f'f \in \Gamma$.

D'après 3°, Γ est un *groupoïde* pour la loi de composition $(f, f') \rightarrow f'f$, à condition de considérer que $f'f$ est défini seulement dans le cas où le but de f est identique à la source de f'.

En supposant E muni de la topologie $\mathcal{T}$, appelons *carte locale* de E sur un ensemble E' une application biunivoque f dont la source appartient à Φ et dont le but est une partie de E'. Au couple de deux cartes locales f_1 et f_2 de E sur E' est associée l'application φ_{21} telle que $f_1(x) = f_2(x')$ soit équivalent à $x' = \varphi_{21}(x)$; appelons φ_{21} le *changement de cartes locales* associé à (f_1, f_2). La source et le but de φ_{21} sont les images réciproques par f_1 et par f_2 de l'intersection des buts de f_1 et de f_2. Appelons *atlas* de E sur E' un ensemble A de cartes locales f_i de E sur E' dont les buts recouvrent E'. Si les changements de cartes locales, associés à tous les couples d'éléments (f_i, f_j) d'éléments de A, appartiennent à Γ, nous dirons que A est un *atlas compatible avec* Γ. Si de plus tout atlas de E sur E' compatible avec Γ et contenant A est identique à A, nous dirons que A est un *atlas complet compatible avec* Γ. On montre que *tout atlas* A *compatible avec* Γ *est contenu dans un atlas complet* $\bar{A}$ *unique compatible avec* Γ.

Nous dirons qu'un atlas complet A de E sur E', compatible avec Γ, définit sur E' une *structure associée à* Γ. Un atlas incomplet compatible avec Γ détermine déjà une structure associée à Γ unique. La classe des structures associées à Γ est une *espèce de structures locales,* notion que l'on peut définir d'une façon générale. Les buts des éléments de A forment un ensemble Φ'_0 de parties de E' engendrant une topologie $\mathcal{T}'$; l'ensemble Φ' des ouverts de $\mathcal{T}'$ est l'ensemble des réunions quelconques d'éléments de Φ'_0. Soit $\mathcal{S}$ la structure définie par A. Etant donné $U' \in \Phi'$, l'ensemble des éléments de A dont le but est contenu dans U' définit sur U' une structure associée à Γ, dite *structure induite* par $\mathcal{S}$. Appelons *sous-espace distingué* de E' tout ensemble $U' \in \Phi'$ muni de la structure induite sur U' par $\mathcal{S}$. Appelons *automorphisme local* de E' tout isomorphisme d'un sous-espace distingué de E' sur un sous-espace distingué de E'. L'ensemble Γ' des automorphismes locaux de E' est un pseudogroupe de transformations. Toute structure associée à Γ', donnée sur E'', détermine aussi une structure associée à Γ.

Si Γ_1 est un sous-pseudogroupe de Γ, toute structure associée à Γ_1 détermine une structure associée à Γ, la première est dite *subordonnée* à la deuxième. Si A_1 et A sont les atlas complets correspondants, on a $A_1 \subset A$. On est conduit ainsi d'une part au ***problème d'existence de structures subordonnées*** à une structure donnée, d'autre part au ***problème d'équivalence de deux structures*** $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_1'$ subordonnées à $\mathcal{S}$, un ***isomorphisme d'équivalence*** de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_1'$ étant un automorphisme de $\mathcal{S}$ réalisant un isomorphisme de $\mathcal{S}_1$ sur $\mathcal{S}_1'$.

Appelons automorphisme local d'ordre r de l'espace numérique R^n tout homéomorphisme r fois continûment différentiable d'un ouvert de R^n sur un ouvert de R^n, partout de rang n. Soit Λ_n^r le pseudogroupe formé par ces automorphismes. ***Une structure de variété*** r ***fois differentiable, ou de*** r-***variété, est définie par un atlas complet (ou incomplet)*** A ***de*** R^n ***sur un ensemble*** V_n, ***compatible avec le pseudogroupe*** Λ_n^r. Généralement on supposera de plus que la topologie déterminée par A sur V_n est séparée (axiome de HAUSDORFF). Cette définition, ainsi que les suivantes, s'applique aussi aux ***variétés indéfiniment différentiables*** ($\Gamma = \Lambda_n^\infty$), aux ***variétés analytiques réelles*** ($\Gamma = \Lambda_n^\omega \subset \Lambda_n^\infty$, ensemble des automorphismes locaux analytiques réels de R^n), aux ***variétes algébriques réelles abstraites*** ($\Gamma = \Lambda_n^\alpha \subset \Lambda_n^\omega$, ensemble des automorphismes locaux algébriques réels de R^n, partout de rang n), aux ***variétés rationnelles réelles « abstraites »*** ($\Gamma = \Lambda_n^{\alpha'} \subset \subset \Lambda_n^\alpha$, ensemble des automorphismes locaux birationnels de R^n, partout de rang n). En remplaçant R^n par l'espace numérique complexe C^n, on définit de même les ***variétés analytiques complexes*** ($\Gamma = \Lambda_n^c \subset \Lambda_{2n}^\omega$, ensemble des automorphismes locaux analytiques complexes de C^n, partout de rang n), les ***variétés algébriques complexes*** et les ***variétés rationnelles complexes*** au sens abstrait. Pour ces différents types de structures on est conduit au problème d'existence et au problème d'équivalence de structures subordonnées.

2. - Calcul des jets.

Soient V_n et V_m deux r-variétés, f une application d'un voisinage de $x \in V_n$ dans V_m. Considérons deux cartes locales admissibles g et g_1 de V_n et V_m telles que $x = g(u), f(x) = g_1(v), u \in R^n$, $v \in R^m$. Soit $\bar{g}$ la restriction de g à un voisinage U de u tel que $\bar{f} = g_1^{-1} f \bar{g}$ soit défini. Nous dirons que f est une r-***application*** au point x lorsque l'application $\bar{f}$ de U dans R^m admet dans un voisinage du point u des dérivées partielles continues de chaque espèce jusqu'à l'ordre r, par rapport aux coordonnées canoniques dans R^n. Soit $C_x^r(V_n, V_m)$ l'ensemble des applications pointées (f, x), où f est une r-application au point $x \in V_n$ ayant pour but une partie de V_m.

Deux éléments (f, x) et (f', x) de $C^r_x(V_n, V_m)$ seront dits de même r-*classe* lorsque $f(x) = f'(x)$ et lorsque le couple de cartes locales (g, g_1) associe à f et f' deux applications $\overline{f}$ et $\overline{f'}$ dont les dérivées partielles de même espèce d'ordre $\leq r$ prennent la même valeur en u. Ces définitions sont indépendantes du couple de cartes locales choisies.

DÉFINITION: *Une* r-*classe* X *de* $C^r_x(V_n, V_m)$ *sera applée jet infinitésimal d'ordre* r *ou* r-*jet de* V_n *dans* V_m; *le point* x *sera appelé la source de* X, *l'image de* X *par un des éléments de* X *sera appelé le but de* X. Soit $J^r_x(V_n, V_m)$ l'ensemble des r-jets de V_n dans V_m de source x et soit $J^r(V_n, V_m)$ la réunion $\bigcup_{x \in V_n} J^r_x(V_n, V_m)$. Le r-jet déterminé par $(f, x) \in C^r_x(V_n, V_m)$ se notera $j^r_x f$; la fonction $x \to j^r_x f$, qui est définie dans un ensemble ouvert de V_n, se notera $j^r f$ et s'appellera r-flot de f.

Les éléments $(f, x) \in C^r_x(V_n, V_m)$ et $(g, f(x)) \in C^r_{f(x)}(V_m, V_p)$ admettent le composé $(gf, x) \in C^r_x(V_n, V_p)$, où V_p est une troisième r-variété. Cette loi de composition entraîne par passage aux quotients une *loi de composition entre* r-*jets, une deuxième entre* r-*applications et* r-*jets, une troisième entre* r-*jets et* r-*applications pointées.*

$$j^r_x(gf) = (j^r_{f(x)} g)(j^r_x f) = g(j^r_x f) = (j^r_{f(x)} g)(f, x).$$

Le r-jet de l'application identique de V_n, pointée en $x \in V_n$, est le r-*jet neutre* en x. Un r-*jet stable* en x est un r-jet de V_n dans V_n de source et de but x. Un r-*jet d'isotropie* en x est un r-jet stable en x et inversible, c'est-à-dire de rang n, rang habituel en x d'un élément du r-jet. Les r-jets d'isotropie en x forment un groupe $L^r_n(V_n, x)$, *groupe d'isotropie infinitésimale en* x, qui est isomorphe au groupe $L^r_n(R^n, 0)$ que nous désignerons par L^r_n.

Pour $X \in J^r(V_n, V_m)$, soit $\alpha(X)$ la source de X, $\beta(X)$ son but, $\gamma(X)$ le couple $(\alpha(X), \beta(X))$. Ainsi α, β, γ définissent trois applications canoniques de $J^r(V_n, V_m)$ sur V_n, V_m et $V_n \times V_m$. Le r-jet X détermine aussi un k-jet $\gamma_k(X)$, où $0 \leq k \leq r$. En particulier γ_0 s'identifie avec γ, en identifiant $J^0(V_n, V_m)$ avec $V_n \times V_m$. L'application γ_k de $J^r(V_n, V_m)$ sur $J^k(V_n, V_m)$ est compatible avec la loi de composition entre jets. L'ensemble $\Pi^r(V_n)$ des élements inversibles de $J^r(V_n, V_n)$ est un groupoïde et γ_k en définit une représentation sur $\Pi^k(V_n)$.

Soit $L^r_{m,n}$ l'ensemble des éléments de $J^r(R^n, R^m)$ dont la source et le but sont l'origine commune 0 de R^n et de R^m. Tout $X \in L^r_{m,n}$ est le r-jet de source 0 d'une application bien déterminée de la forme :

$$x'_i = \Sigma\, a_{ij}\, x_j + \sum_{j_1 \leq j_2} a_{ij_1j_2}\, x_{j_1}\, x_{j_2} + \ldots + \sum_{j_1 \leq j_2 \leq j_r} a_{ij_1 \ldots j_r}\, x_{j_1} \ldots x_{j_r}\,,$$

où les x_j désignent les coordonnées canoniques dans R^n et les x'_i celles dans R^m. Les coefficients $a_{ij}, \ldots, a_{ij_1 \ldots j_r}$ seront considérés comme les coordonnées canoniques de X et ce système de coordonnées détermine sur $L^r_{m,n}$ une structure de variété analytique réelle isomorphe à un espace numérique. En particulier $L^1_{m,n}$ s'identifie canoniquement à l'espace des applications linéaires homogènes de R^n dans R^m ou à l'espace des suites de n vecteurs d'origine 0 dans R^m. Le groupe L^r_n est une sous-variété analytique réelle de $L^r_{n,n}$ et L^1_n s'identifie canoniquement au groupe linéaire homogène L_n de R^n. Le produit $L^r_m \times L^r_n$ est un groupe d'opérateurs sur $L^r_{m,n}$: $(s', s)\, y = s' y\, s^{-1}$, où $s \in L^r_n$, $s' \in L^r_m$ et $y \in L^r_{m,n}$.

La restriction de γ_k à L^r_n est une représentation canonique de L^r_n sur L^k_n, dont le noyau est un groupe résoluble homéomorphe à un espace numérique. En particulier pour $k = r - 1$, ce noyau est isomorphe à un groupe additif R^d. Le groupe L_n s'identifie canoniquement à un sous-groupe de L^r_n; c'est-à-dire L^r_n est une extension inessentielle de L_n.

Appelons *p^r-vitesse* dans V_n d'origine x un élément de $J^r(R^p, V_n)$ de source 0 et de but x; soit $T^r_p(V_n)$ l'ensemble de ces p^r-vitesses dans V_n. Appelons *p^r-covitesse* de V_n d'origine x un élément de $J^r(V_n, R^p)$ de source x et de but 0. Pour $p = r = 1$ on définit ainsi les vitesses et les covitesses de V_n, appelées aussi vecteurs et covecteurs. Appelons *repère d'ordre r* de V_n une n^r-vitesse de rang n de V. L'ensemble $H^r(V_n)$ de ces repères d'ordre r sera appelé *prolongement principal* d'ordre r de V. Appelons corepère d'ordre r de V_n une n^r-covitesse de rang n de V_n et soit $H^{r*}(V_n)$ l'ensemble de ces corepères; chaque corepère est l'inverse d'un repère.

Pour $x \in R^p$, soit t_x la translation dans R^n amenant x en 0 et soit $d^r x$ le corepère dans R^p défini par $j^r_x(t_x)$. Si f est une r-application de V_n dans R^p, appelons *différentielle d'ordre r* de f en x la p^r-covitesse $d^r_x f = d^r x' \, (j^r_x f)$, où $x' = f(x)$. De même pour $X \in J^r(V_n, R^p)$ posons $d^r X = (d^r x')\, X$, où $x' = \beta(X)$. Ainsi $d^r x$ est aussi la différentielle d'ordre r de l'application identique de R^p

au point x. Désignons par $d^r f$ la fonction $x \to d^r_x f$. Il lui correspond l'application suivante de $T^r_p(V_n)$ dans $L^r_{p,q}: X \to (d^r_x f) X$, où X est une q^r-vitesse d'origine x.

Pour $x \in R^p$, soit $\vartheta^r x$ le repère d'ordre r inverse du corepère $d^r x: \vartheta^r x = \gamma^r_0(t_x^{-1})$. Soit f une r-application de R^p dans V_n. Appelons vitesse d'ordre r de f en x la p^r-vitesse $\vartheta^r_x f = f\,\vartheta^r x$. Pour $X \in J^r(R^p, V_n)$ nous posons aussi $\vartheta^r X = X\,\vartheta^r x$.

Pour $X \in J^r(R^n, R^m)$, $x = \alpha(X)$, $x' = \beta(X)$, appelons dérivée d'ordre r de X l'élément de $L^r_{m,n}$ défini par $d^r X/d^r x = d^r x' X \vartheta^r x = d^r X \vartheta^r x = d^r x' \vartheta^r X$. Etant donné $(f, x) \in C^r_x(R^n, R^m)$, appelons dérivée d'ordre r de f en x l'élément $f^r_x = d^r x' f \vartheta^r x = d^r x' \vartheta^r_x f = d^r_x f \vartheta^r x$, où $x' = f(x)$. On a:

$$d^r_x f = f^r_x d^r x\,,\ \vartheta^r_x f = (\vartheta^r x') f^r_x\,,$$

$$d^r(X' X)/d^r x = (d^r X'/d^r x')(d^r X/d^r x)\,,\ \text{où}\ X' \in J^r(R^m, R^p)\,,$$

$$x = \alpha(X)\,,\ x' = \beta(X) = \alpha(X')\,,$$

$$(g f)^r_x = g^r_{x'} f^r_x\,,\ d^r_x(g f) = g^r_{x'} d^r_x f,\ \text{où}\ (g, x') \in C^r_{x'}(R^m, R^p)\,.$$

3. - Structure des prolongements d'une variété différentiable.

Soit f une r-application d'un ouvert U de V_n dans V_m; c'est-à-dire $(f, x) \in C^r_x(V_n, V_m)$ pour tout $x \in U$. L'application $X \to f X$, où $X \in T^r_p(V_n)$ d'origine $x \in U$, est appelée *prolongement* de f à $T^r_p(V_n)$; nous la désignerons encore par f. Si f est biunivoque, on a aussi le prolongement de f à $T^{r*}_p(V_n): X \to f(X) = X(f^{-1}, f^{-1}(x))$, où $X \in T^{r*}_p(V_n)$ d'origine x.

Identifions $T^r_p(R^n)$ avec $R^n \times L^r_{n,p}$ par l'application $X \to (x, d^r X)$, où $X \in T^r_p(R^n)$ et $x = \alpha(X)$; l'application inverse s'écrit $(x, y) \to (\vartheta^r_x) y$, où $x \in R^n$, $y \in L^r_{n,p}$.

Le pseudogroupe Λ^r_n admet un prolongement à $T^r_p(R^n)$. Le prolongement de $\varphi \in \Lambda^r_n$ s'écrit: $X \to \varphi X$, ou:

$$(x, y) \to (\varphi(x), \varphi^r_x y)\,,\ \varphi^r_x \in L^r_n\,.$$

L'atlas A de R^n sur V_n définissant la structure de r-variété de V_n admet un prolongement formant un atlas A' de $T^r_p(R^n)$ ou $R^n \times L^r_{n,p}$ sur $T^r_p(V_n)$. La carte locale $g \in A$ admet le prolongement $X \to g X$ ou encore $(x, y) \to h_x y$, $y \in L^r_{n,p}$, en désignant par h_x le repère $g\,\vartheta^r x \in H^r(V_n)$. Le changement de cartes locales correspondant à $(g\,,\,g\,\varphi^{-1})$ s'écrit : $(x\,,\,y) \to (\varphi(x)\,,\,\varphi^r_x\,y)$. L'atlas A' de $R^n \times L^r_{n,p}$ sur $T^r_p(V_n)$ est donc compatible avec le prolongement de Λ^r_n ; il est complet par rapport à ce pseudogroupe et définit sur $T^r_p(V_n)$ une *structure de prolongement de* $\mathrm{V_n}$. Le prolongement de Λ^r_n est un sous-pseudogroupe du pseudogroupe associé à L^r_n dans $R^n \times L^r_{n,p}$, formé par l'ensemble des transformations :

$$(x\,,\,y) \to (\varphi(x)\,;\,s_x\,y)\,,\quad s_x \in L^r_n\,,\quad s_x \text{ fonction continue de } x\,.$$

Un atlas compatible avec ce pseudogroupe détermine par définition une structure fibrée de base V_n, de fibre isomorphe à $L^r_{n,p}$ muni du groupe structural L^r_n. La structure de prolongement de $T^r_p(V_n)$ est ainsi subordonnée à une structure fibrée de symbole $T^r_p(V_n)(V_n\,,\,L^r_{n,p}\,,\,L^r_n\,,\,H^r(V_n))$. A la carte locale g est associé l'isomorphisme $y \to h_x\,y$ (que nous identifions avec h_x) de $L^r_{n,p}$ sur la fibre de $T^r_p(V_n)$ se projetant sur $x \in V_n$. D'une façon générale, $h \in H^r(V_n)$ peut s'identifier avec l'isomorphisme : $y \to h\,y$. Alors $H^r(V_n)$ est l'espace fibré principal associé à la structure fibrée sur $T^r_p(V_n)$. La carte locale $g \in A$ admet le prolongement : $(x\,,\,s) \to h_x\,s$, $s \in L^r_n$. On obtient ainsi un prolongement de A formant un atlas A'' de $R^n \times L^r_n$ sur $H^r(V_n)$, *associé* à l'atlas A'. Le changement de cartes locales correspondant à $(g\,,\,g\,\varphi^{-1})$ est : $(x\,,\,s) \to (\varphi(x)\,,\,\varphi^r_x\,s)$. L'atlas A'' détermine sur $H^r(V_n)$ une structure de prolongement, subordonnée à une structure fibrée principale de groupe L^r_n, et les structures fibrées ainsi déterminées sur $T^r_p(V_n)$ et $H^r(V_n)$ sont bien des structures fibrées associées.

DÉFINITION : *Un prolongement d'ordre* r *de* $\mathrm{V_n}$ ***est un espace*** *fibré associé au prolongement principal* $\mathrm{H^r(V_n)}$.

Si L^r_n est un groupe d'opérateurs sur l'espace F, il existe donc un prolongement de V_n de fibres isomorphes à F, et ce prolongement de symbole $E(V_n\,,\,F\,,\,L^r_n\,,\,H^r(V_n))$ est déterminé à un isomorphisme près. A l'atlas A'' correspond un atlas de $R^n \times F$ sur E, complet par rapport au *prolongement* de Λ^r_n formé par l'ensemble des transformations $(x\,,\,y) \to (\varphi(x)\,,\,\varphi^r_x\,y)$, où $x \in R^n$, $y \in F$, $\varphi \in \Lambda^r_n$. Cet atlas s'appellera *prolongement* de A. Il définit sur E une structure appelée *structure de prolongement d'ordre* r *de* $\mathrm{V_n}$.

Toute p^r-vitesse détermine une p^1-vitesse. Ceci définit une représentation χ de $H^r(V_n)$ sur $H^1(V_n)$ telle que $\chi(h\,s) = \chi(h)\;\chi(s)$ où $h \in H^r(V_n)$, $s \in L^r_n$, χ désignant aussi la représentation canonique de L_n^r sur L_n^1. Soit K le noyau de cette dernière représentation. $H^r(V_n)$ est une extension de $H^1(V_n)$ associée à χ. Appelons hK une classe suivant K. L'espace $H^r(V_n)/K$ des classes suivant K s'identifie avec $H^1(V_n)$. Comme K est homéomorphe à un espace numérique, $H^1(V_n)$ admet toujours une extension associée à χ et cette extension est déterminée à un isomorphisme près concernant la structure fibrée. Donc *la structure d'espace fibré principal de* $\mathrm{H^r(V_n)}$ *est déterminée à un isomorphisme près par celle de* $\mathrm{H^1(V_n)}$. Mais il n'en résulte pas que les structures de prolongements d'ordre r de V_n sont également déterminées par la structure de $H^1(V_n)$.

4. - Exemples de prolongements d'ordre r.

Ainsi que $T_p^r(V_n)$, l'espace $T_p^{r*}(V_n)$ est un prolongement d'ordre r de V_n. On obtient d'autres prolongements en considérant certains espaces quotients de $T_p^r(V_n)$ ou $T_p^{r*}(V_n)$.

Le groupe L_p^r est un groupe d'opérateurs sur $T_p^r(V_n)$, le transformé de $Y \in T_p^r(V_n)$ par $s \in L_p^r$ est Ys. La classe d'intransitivité YL_p^r est applée *élément de contact d'ordre r* de Y. L'ensemble $P_p^r(V_n)$ des éléments de contact d'ordre r et de dimension p est un polongement d'ordre r, de fibre $P_{n,p}^r =$ espace des classes d'intransitivité de $L_{n,p}^r$ relativement au groupe L_p^r.

Le groupe L_p^r opère aussi sur $T_p^{r*}(V_n)$. La classe d'intransitivité $L_p^r Z$ de $Z \in T_p^{r*}(V_n)$ peut s'appeler élément d'enveloppe de Z. L'espace $P_p^{r*}(V_n)$ des éléments d'enveloppe est aussi un prolongement d'ordre r de V_n. Les espaces $P_p^r(V_n)$ et $P_p^{r*}(V_n)$ ne sont pas des variétés, mais ils admettent des sous-espaces fibrés qui sont des variétés et qui sont aussi des prolongements d'ordre r de V_n.

Soient V_n et V_m deux r-variétés dont les structures sont définies par deux atlas A et A_1. L'espace $J^r(V_n, V_m)$ admet trois structures fibrées correspondant aux trois projections α, β, γ. La structure fibrée correspondant à γ admet pour symbole $J^r(V_n, V_m)$ $(V_n \times V_m, L_{m,n}^r, L_m^r \times L_n^r, H^r(V_n) \times H^r(V_m))$. Le produit $A \times A_1$ admet un prolongement formant un atlas de $J^r(R^n \times R^m)$ ou $R^n \times R^m \times L_{m.n}^r$ sur $J^r(V_n, V_m)$, définissant sur $J^r(V_n, V_m)$ une *structure de prolongement du couple* (V_n, V_m). La stucture fibrée correspondant à α admet pour symbole: $J^r(V_n, V_m)(V_n, T_n^r(V_m)$, $L_n^r, H^r(V_n))$; elle contient une structure de prolongement d'ordre r de V_n. La structure fibrée correspondant à β admet pour symbole:

$J^r(V_n, V_m)(V_m, T_m^{r*}(V_n), L_m^r, H^r(V_m))$; elle contient une structure de prolongement d'ordre r de V_m.

Une *section* de $J^r(V_n, V_m)$ relativement à la projection α peut s'appeler un *flot d'ordre r* de V_n dans V_m; une section de $J^r(V_n, V_m)$ relativement à la projection β peut s'appeler un *champ d'ordre r* de V_n dans V_m. On peut définir les singularités des jets. L'étude de l'ensemble des jets singuliers de $J^r(V_n, V_m)$ conduit à une théorie des singularités d'un flot ou d'un champ, ce qui permet d'aborder aussi l'étude des singularités d'une application de V_n dans V_m. En particulier on retrouve ainsi le classes caractéristiques de STIETFEL-WHITNEY ou celles de CHERN.

Références: C. EHRESMANN, Comptes Rendus Acad. Sciences Paris, 233, 1951, p. 598, 777 et 1081; 234, 1952, p. 587, 1028 et 1424.

Extrait du « Colloque Intern. Géométrie Différentielle »
Strasbourg 1953, C.N.R.S., pp. 97- 110.

/40/

INTRODUCTION A LA THÉORIE DES STRUCTURES INFINITÉSIMALES ET DES PSEUDO-GROUPES DE LIE

par **Charles EHRESMANN** (STRASBOURG)

Cet exposé constitue seulement une introduction à l'étude des structures infinitésimales, dont j'aurais voulu développer aussi les applications. Depuis 1951, j'ai exposé ces notions et leurs applications dans mes cours de Strasbourg et de Rio de Janeiro, ainsi que dans des séries de conférences données par exemple à Bologne, Pise, Rome, Southampton, Leeds, Manchester, Louvain, mais je n'ai publié sur ce sujet que des exposés trop sommaires.*.

Au Colloque International de Géométrie différentielle de Strasbourg j'ai indiqué brièvement les applications suivantes (qui seront développées dans un autre article) :

La notion de système d'équations aux dérivées partielles est généralisée par la donnée d'une partie ϕ de $J^r(V_n, V_m)$, ou d'une variété plongée ou extraite de $J^r(V_n, V_m)$. On peut définir le prolongement d'un tel système. On est conduit à la notion de pseudogroupe de transformations complet d'ordre r, qui, dans le cas analytique, donne la notion de pseudogroupe de Lie : son groupoïde associé est alors une sous-variété analytique de $\Pi^r(V_n)$. Définition des structures infinitésimales pures (notion généralisant celle d'objet géométrique) et des structures infinitésimales régulières. Le pseudo-groupe des automorphismes locaux d'une telle structure est complet d'ordre r. Sa détermination conduit au problème d'équivalence de Cartan généralisé. Tout pseudogroupe de Lie complet d'ordre r a un prolongement formant un pseudogroupe de Lie complet du 1^{er} ordre. Définition des pseudogroupes de Lie de type fini k : le groupoïde associé d'ordre k est isomorphe au groupoïde associé d'ordre k-1. LES GROUPES DE LIE sont de type fini. Définition des transformations infinitésimales. Un pseudogroupe de transformations de type fini sur une variété compacte simplement connexe se déduit par localisation d'un GROUPE de transformations de Lie défini sur V_n.

(*) Références : 1. Les prolongements d'une variété différentiable (Atti del IV Congresso U. M. I. Taormina 1951). — 2. Les prolongements d'une variété différentiable (Comptes rendus Acad. Sciences : 233, 1951, p. 598, 777, 1081 ; 234, 1952, p. 1028, 1424). — 3. Structures locales et structures infinitésimales (Comptes rendus : 234, 1952 p. 587). — 4. Structures locales (Conférence polycopiée à Rome 1952, à paraître dans Annali di Matematica 1953). — 5. Notes polycopiées, cours de Rio de Janeiro 1952.

I. La notion de jet local. — Etant donné une application f d'un ensemble U sur un ensemble f (U), appelons U la source et f (U) le but de f. Etant donnés trois ensembles E, E' et E'', soit f une application de source $A \subset E$ et de but $B \subset E'$ et soit f' une application de source $B' \subset E'$ et de but $C \subset E''$. Nous désignons par f' f l'application $x \longrightarrow f'(f(x))$ dont la source est l'ensemble A' des éléments x tels que f' (f (x)) soit défini.

Soient E et E' deux espaces topologiques et considérons les applications continues ayant pour source un sous-espace de E et pour but un sous-espace de E'. Soit $C_x(E, E')$ l'ensemble des applications continues pointées (f, x) où f est une application continue ayant pour source un voisinage quelconque de x et pour but un sous-espace de E'. Deux éléments (f, x) et (f', x) de $C_x(E, E')$ sont dits de même classe locale en x lorsque les retrictions de f et de f' à un voisinage de x sont identiques. La relation ainsi définie est une relation d'équivalence dans $C_x(E, E')$. Une classe d'équivalence pour cette relation sera appelée un jet local de E dans E', de source x et de but f (x), où (f, x) est un élément quelconque de la classe. Le jet local de (f, x) sera désigné par $j_x^\lambda f$. Soit $J^\lambda(E, E')$ l'ensemble des jets locaux de E dans E'. La source de $X \in J^\lambda(E, E')$ sera désigné par α (X), son but par β (X). Le symbole j^λ désignera aussi l'application $(f, x) \longrightarrow j_x^\lambda f$ de C (E, E') sur $J^\lambda(E, E')$, où $C(E, E') = \bigcup_{x \in E} C_x(E, E')$.

Si f est une application continue ayant pour source un ensemble ouvert U de E et pour but un sous-espace de E', l'application $x \longrightarrow j_x^\lambda f$ de U dans $J^\lambda(E, E')$ peut être désignée par $j^\lambda f$. On peut considérer $j^\lambda f$ comme une carte locale de E dans $J^\lambda(E, E')$. L'ensemble de ces cartes locales est un atlas $\mathfrak{A}$ de E sur $J^\lambda(E, E')$, compatible avec le pseudo-groupe de transformations formé par l'ensemble des applications identiques des ensembles ouverts de E. En effet, $j_x^\lambda f = j_{x'}^\lambda f'$ est équivalent à $x = x'$ pour x appartenant à un ensemble ouvert de E. Cet atlas $\mathfrak{A}$ transporte sur $J^\lambda(E, E')$ une topologie engendrée par les buts des cartes $j^\lambda f$, appelés ENSEMBLES OUVERTS ÉLÉMENTAIRES de $J^\lambda(E, E')$. L'ESPACE $J^\lambda(E, E')$ EST UN ESPACE ÉTALÉ SUR E PAR L'APPLICATION α, dont la restriction au but de $j^\lambda f$ est l'homéomorphisme inverse de $j^\lambda f$. L'application β est une application continue de $J^\lambda(E, E')$ dans E'. L'application f admet la DÉCOMPOSITION CANONIQUE $f = \beta\ (j^\lambda f)$. L'espace $J^\lambda(E, E')$ n'est pas séparé. Un ensemble ouvert séparé de $J^\lambda(E, E')$, ou encore la restriction de β à un tel ensemble, est la notion qu'on peut appeler APPLICATION CONTINUE MULTIFORME de E dans E'.

Soit E'' un troisième espace topologique. Etant donnés $X \in J^\lambda(E, E')$ et $X' \in J^\lambda(E', E'')$, on peut définir un composé X' X lorsque $\beta(X) = \alpha(X')$. Si $(f, x) \in X$ et $(f', x') \in X'$, où $x' = f(x)$, l'application pointée (f' f, x) appartient à $C_x(E, E'')$. Le jet $j_x^\lambda(f' f)$ ne dépend que de X et X' et sera par définition le composé X' X. On peut le considérer aussi comme étant le composé de f' et de $j_x^\lambda f$.

$$j_x^\lambda(f'f) = (j_{x'}^\lambda f')(j_x^\lambda f) = f'(j_x^\lambda f), \text{ où } x' = f(x)$$

En particulier, si l'on désigne par j_x^λ le jet local de source x de l'application identique de E, on a : $j_x^\lambda f = f j_x^\lambda$. La loi de composition $(X, X') \longrightarrow X'X$ est continue par rapport aux topologies considérées.

L'associativité de la composition d'applications entraîne l'associativité de la composition de jets locaux : Si X' X et X'' X' existent, les composés (X'' X') X et (X'' X') X existent et sont égaux.

j^λ_x est unité à gauche et unité à droite, c'est-à-dire :

$$j^\lambda_{x'}(j^\lambda_x f) = j^\lambda_x f, \text{ où } x' = f(x)$$

$$(j^\lambda_x f) j^\lambda_x = j^\lambda_x f,$$

$$j^\lambda_x \; j^\lambda_x = j^\lambda_x \,.$$

Le jet $X \in J^\lambda(E, E')$ est inversible lorsqu'il existe $X' \in J^\lambda(E', E)$ tel que $X' X = j^\lambda_x$ et $XX' = j^\lambda_{x'}$, où $x = \alpha(X)$, $x' = \beta(X)$; cette condition est équivalente à l'existence d'une application pointée (f, x), appartenant à X et telle que f soit un homéomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de f (x).

L'ensemble des éléments inversibles de $J^\lambda(E, E)$ est un groupoïde $\Pi^\lambda(E)$. Le sous-ensemble des jets inversibles de source et de but x est un groupe $\Pi^\lambda_x(E)$, qu'on peut appeler GROUPE D'ISOTROPIE LOCALE de E en x, relativement à la structure topologique $\mathcal{T}$ de E.

Soit Γ un pseudogroupe de transformations défini dans E et contenu dans le pseudogroupe $\Gamma_{\mathcal{T}}$ des automorphismes locaux de E ; la topologie sous-jacente à Γ peut être moins fine que $\mathcal{T}$. L'ensemble des jets locaux $j^\lambda_x \varphi$, où $\varphi \in \Gamma$, est un SOUS-GROUPOIDE $J^\lambda(\Gamma)$ de $\Pi^\lambda(E) = J^\lambda(\Gamma_{\mathcal{T}})$. L'intersection de $J^\lambda(\Gamma)$ et de $\Pi^\lambda_x(E)$ est un groupe $J^\lambda_x(\Gamma)$, GROUPE D'ISOTROPIE LOCALE en x de la structure locale définie par Γ. Remarquons que $J^\lambda(\Gamma)$ est un ensemble ouvert de $\Pi^\lambda(E)$, qui est lui-même ouvert dans $J^\lambda(E, E)$.

Etant donné une partie Φ de $J^\lambda(E, E')$, une SOLUTION ou INTÉGRALE de Φ est une application continue f de source U, ouvert de E, telle que $j^\lambda_x f \in \Phi$ pour tout $x \in U$. Les solutions de Φ correspondent d'une façon bi-univoque aux ensembles ouverts élémentaires contenus dans Φ.

Soit Φ un sous-groupoïde ouvert de $\Pi^\lambda(E)$ tel que la projection de Φ par α soit E, c'est-à-dire contenant l'ensemble des unités de $\Pi^\lambda(E)$. Alors l'ensemble des solutions de Φ est un pseudogroupe de transformations Γ défini dans E et admettant $\mathcal{T}$ comme topologie sous-jacente. On a $\Phi = J^\lambda(\Gamma)$. Mais Γ pourrait contenir un sous-pseudogroupe Γ' dont la topologie sous-jacente est moins fine que $\mathcal{T}$ et tel que $J^\lambda(\Gamma') = J^\lambda(\Gamma) = \Phi$. Nous dirons que Γ se déduit de Γ' par localisation. En particulier Γ' pourrait être un groupe d'automorphismes de E.

Soit Γ un pseudogroupe d'automorphismes locaux de E et Γ' un pseudogroupe d'automorphismes locaux de E'. LE GROUPOIDE $J^\lambda(\Gamma) \times J^\lambda(\Gamma')$ EST UN GROUPOÏDE D'OPÉRATEURS SUR $J^\lambda(E, E')$ SUIVANT LA LOI DE COMPOSITION

$$(s, s', X) \to s' X s^{-1}, \text{ où } X \in J^\lambda(E, E'),\, s \in J^\lambda(\Gamma),\, s' \in J^\lambda(\Gamma').$$

DE MÊME $J^\lambda(\Gamma)$ ET $J^\lambda(\Gamma')$ SONT DES GROUPOÏDES D'OPÉRATEURS SUR $J^\lambda(E, E')$.

Si ϕ est un ensemble ouvert de $J^\lambda(E, E')$ invariant par $J^\lambda(\Gamma) \times J^\lambda(\Gamma')$, l'ensemble des solutions de ϕ est invariant par $\Gamma \times \Gamma$.

Supposons, pour simplifier, que $\mathcal{T}$ est la topologie sous-jacente à Γ. Soit $\tilde{E}$ un espace topologique et $\mathcal{A}$ un atlas complet de E sur $\tilde{E}$ compatible avec Γ et tel que tout $g \in \mathcal{A}$ soit un homéomorphisme d'un ouvert de E sur un ouvert de $\tilde{E}$. Soit $J^\lambda(\mathcal{A})$ l'ensemble des jets $j_x^\lambda g$, $g \in \mathcal{A}$. Un élément, h de $J^\lambda(\mathcal{A})$ sera appelé REPÈRE LOCAL au point β (h) de $\tilde{E}$, relativement à la structure définie par $\mathcal{A}$.

L'ensemble $J^\lambda(\mathcal{A})$ est un ensemble ouvert de $J^\lambda(E, \tilde{E})$ ayant les propriétés caractéristiques suivantes :

1. Tout élément de $J^\lambda(\mathcal{A})$ est inversible.
2. Si $h \in J^\lambda(\mathcal{A})$, $h' \in J^\lambda(\mathcal{A})$ et $\beta(h) = \beta(h')$, on a $h^{-1} h' \in J^\lambda(\Gamma)$.
3. $J^\lambda(\mathcal{A})$ est invariant par $J^\lambda(\Gamma)$.

L'ensemble des éléments $h' h^{-1}$, où $h \in J^\lambda(\mathcal{A})$, $h' \in J^\lambda(\mathcal{A})$ et $\alpha(h) = \alpha(h')$ est le sous-groupoïde ouvert $J^\lambda(\tilde{\Gamma})$ de $\Pi^\lambda(\tilde{E})$ dont les solutions forment le pseudogroupe des automorphismes locaux de $\tilde{E}$ relativement à la structure définie par $\mathcal{A}$.

Réciproquement, étant donné un ensemble ouvert de $J^\lambda(E, \tilde{E})$ vérifiant les trois propriétés précédentes, l'ensemble de ses solutions est un atlas complet $\mathcal{A}$ de E sur $\tilde{E}$ compatible avec Γ.

Si $\mathcal{A}$ est un atlas incomplet, $J^\lambda(\mathcal{A})$ est un ensemble ouvert de $J^\lambda(E, \tilde{E})$ caractérisé par les propriétés 1) et 2).

Une classe d'intransitivité d'un élément inversible X de $J^\lambda(E, \tilde{E})$ relativement à $J^\lambda(\Gamma)$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments $X s^{-1}$, où $s \in J^\lambda(\Gamma)$) peut s'appeler GERME DE STRUCTURE SUR $\tilde{E}$ ASSOCIÉ A Γ. Par passage au quotient on déduit de $J^\lambda(E, \tilde{E})$ l'espace des germes de structure associé à Γ. C'est un espace $G(\tilde{E}, \Gamma)$ étalé sur $\tilde{E}$. Une structure sur $\tilde{E}$ associée à Γ correspond à un relèvement de $\tilde{E}$ dans $G(\tilde{E}, \Gamma)$.

Supposons que la topologie $\mathcal{T}'$ de E' soit aussi la topologie sous-jacente au pseudo-groupe Γ'. Soit $\tilde{E}'$ un espace topologique et soit $\mathcal{A}'$ un atlas complet de E' sur $\tilde{E}'$ compatible avec Γ' et tel que tout $g' \in \mathcal{A}'$ soit un homéomorphisme d'un ouvert de E' sur un ouvert de $\tilde{E}'$. ALORS A TOUT ENSEMBLE OUVERT ϕ DE $J^\lambda(E, E')$ INVARIANT PAR $J^\lambda(\Gamma) \times J^\lambda(\Gamma')$ CORRESPOND UN ENSEMBLE OUVERT ϕ' DE $J^\lambda(\tilde{E}, \tilde{E})$ INVARIANT PAR $J^\lambda(\tilde{\Gamma}) \times J^\lambda(\tilde{\Gamma}')$. L'ensemble ϕ' est l'ensemble des éléments $h' X h^{-1}$, où $X \in \phi$, $h \in J^\lambda(\mathcal{A})$, $h' \in J^\lambda(\mathcal{A}')$.

Par exemple, soit Λ_n^r le pseudo-groupe des automorphismes locaux r fois continûment différentiables, partout de rang n, de l'espace numérique R^n. Soit f une application continue ayant pour source un voisinage de $x \in R^n$ et pour but un sous-espace de R^m. On dira que f est une application r fois différentiable (ou r - APPLICATION) au point x lorsque f admet dans un voisinage de x des dérivées partielles continues de chaque espèce jusqu'à l'ordre r, par rapport aux coordonnées canoniques définies dans R^n. Si f est une r-application au point x, le jet local $j_x^\lambda f$ sera dit r fois différentiable. Soit $J^{\lambda,r}(R^n, R^m)$ l'ensemble des jets locaux r fois différentiables de R^n dans R^m. C'est un ensemble ouvert de $J^\lambda(R^n, R^m)$ invariant par $J^\lambda(\Lambda_n^r) \times J^\lambda(\Lambda_m^r)$.

Soit V_n une variété r fois différentiable (ou r-variété) dont la structure est définie par un atlas complet $\mathcal{A}$ de R^n sur V_n compatible avec Λ_n^r. Soit de même V_m une r-variété dont la structure est définie par un atlas complet $\mathcal{A}'$ compatible avec Λ_m^r. Soit $J^{\lambda,r}(V_n, V_m)$ l'ensemble des jets locaux $h' X h^{-1}$, où $h \in J^{\lambda}(\mathcal{A})$, $h' \in J^{\lambda}(\mathcal{A}')$, $X \in J^{\lambda,r}(R^n, R^m)$; c'est-à-dire h est un repère local de V_n à la source de X, h' est un repère local de V_m au but de X. Un jet local appartenant à $J^{\lambda,r}(V_n, V_m)$ sera dit r fois différentiable. Pour que $Y \in J^{\lambda}(V_n, V_m)$ soit r fois différentiable, il faut et il suffit que $h'^{-1} Y h$, élément de $J^{\lambda}(R^n, R^m)$ soit r fois différentiable. Si $j_x^{\lambda} f$ est r fois différentiable, l'application f sera appelée r-APPLICATION AU POINT x.

L'ensemble $J^{\lambda,r}(V_n, V_m)$ est un ensemble ouvert de $J^{\lambda}(V_n, V_m)$ invariant par $\Pi^{\lambda,r}(V_n) \times \Pi^{\lambda,r}(V_m)$, où $\Pi^{\lambda,r}(V_n)$ est le groupoïde associé à $J^{\lambda}(\Lambda_n^r)$ par $\mathcal{A}$; c'est-à-dire $\Pi^{\lambda,r}(V_n)$ est l'ensemble des éléments $h_1 h^{-1}$, où $h \in J^{\lambda}(\mathcal{A})$ et $h_1 \in J^{\lambda}(\mathcal{A})$. Une solution de $J^{\lambda,r}(V_n, V_m)$ sera appelée r-APPLICATION de V_n dans V_m. Les solutions de $\Pi^{\lambda,r}(V_n)$ sont des r-applications et forment le pseudogroupe $\Lambda_n^r(V_n)$ des automorphismes locaux de V_n.

On démontre facilement que LE COMPOSÉ DE DEUX JETS LOCAUX r FOIS DIFFÉRENTIABLES EST r FOIS DIFFÉRENTIABLE : le composé de $X \in J^{\lambda,r}(V_n, V_m)$ et $X' \in J^{\lambda,r}(V_m, V_p)$ est élément de $J^{\lambda,r}(V_n, V_p)$, où V_p est aussi une r-variété.

Supposons V_n muni simplement d'une structure de variété topologique à n dimensions, c'est-à-dire associée au pseudogroupe Λ_n de tous les automorphismes locaux de R^n. Comme Λ_n^r est transitif dans R^n, UN GERME DE r-VARIÉTÉ sur V_n sera caractérisé par un ensemble $h\, J_0^{\lambda}(\Lambda_n^r)$, où h est un élément inversible de $J^{\lambda}(R^n, V_n)$ ayant pour source l'origine 0 de R^n.

Les considérations précédentes s'appliquent de même en remplaçant Λ_n^r par un sous-pseudogroupe arbitraire de Λ_n. On obtient ainsi les notions relatives aux variétés indéfiniment différentiables (cas $r = \infty$), aux variétés analytiques réelles ou complexes, aux variétés localement algébriques (1) réelles ou complexes, aux variétés localement rationnelles réelles ou complexes.

Il est important de remarquer que dans le cas analytique l'espace $J^{\omega}(V_n, V_m)$ des jets analytiques de V_n dans V_m est un sous-espace ouvert et SÉPARÉ de $J^{\lambda}(V_n, V_m)$. La composante connexe de $X \in J^{\omega}(V_n, V_m)$ est le PROLONGEMENT ANALYTIQUE COMPLET du jet analytique X.

2. La notion de jet infinitésimal. — Soit $C_x^r(R^n, R^m)$ l'ensemble des r-applications pointées (f, x), où f est une r-application au point $x \in R^n$ dans R^m. Deux éléments (f, x) et (f', x) de $C_x^r(R^n, R^m)$ sont dits de même r-classe lorsque les dérivées partielles de même espèce de f et de f' admettent les mêmes valeurs au point x, pour toutes les dérivées partielles d'ordre $\leqslant r$. On définit ainsi une relation d'équivalence dans $C_x^r(R^n, R^m)$. Une classe d'équivalence pour cette relation sera appelée JET INFINITÉSIMAL D'ORDRE r, ou r-JET, de R^n dans R^m. Le r-jet de (f, x) sera noté $j_x^r f$. Le point x sera appelé source du jet et le point f (x), but du jet. Soit $J^r(R^n, R^m)$ l'ensemble des jets infinitésimaux

(1) Appelées variétés algébriques abstraites dans (1).

d'ordre r de R^n dans R^m. La source de $X \in J^r(R^n, R^m)$ sera désignée par $\alpha(X)$, son but par $\beta(X)$. Ceci définit deux applications canoniques α et β de $J^r(R^n, R^m)$ sur R^n et R^m.

Posons $C^r(R^n, R^m) = \bigcup_{x \in R^n} C^r_x(R^n, R^m)$, ensemble des r-applications pointées de R^n dans R^m. Dans $C^r(R^n, R^m)$ considérons les deux relations d'équivalence dont les classes d'équivalence sont : 1° les jets locaux, 2° les r-jets. La première de ces relations entraîne la seconde. On a ainsi une application canonique j^r de $J^{\lambda,r}(R^n, R^m)$ sur $J^r(R^n, R^m)$: $j^r(j^\lambda_x f) = j^r_x f$. Ceci permet d'identifier canoniquement un r-jet à une classe de jets locaux. On pourra poser $j^r = j^r j^\lambda$, ce qui revient à considérer j^r comme un opérateur opérant sur $J^r(R^n, R^m)$ et sur $C^r(R^n, R^m)$: $j^r(f, x) = j^r_x f$.

Etant donné $(f, x) \in C^r_x(R^n, R^m)$ et $(f', x') \in C^r_{x'}(R^m, R^p)$, si $x' = f(x)$ posons $(f', x')(f, x) = (f' f, x)$. Cette loi de composition est compatible non seulement avec la première, mais aussi avec la deuxième des relations d'équivalence précédentes. En effet, les dérivées partielles de $f' f$ au point x d'ordre $\leqslant r$ s'expriment sous forme de polynômes en fonction des dérivées partielles d'ordre $\leqslant r$ des composantes canoniques de f et f' aux points x et x'. Par passage aux quotients on définit les lois de composition exprimées par les formules :

$$(j^\lambda_{x'} f')(j^\lambda_x f) = j^\lambda_x (f'f) \ ,$$

$$(j^r_{x'} f')(j^r_x f) = j^r_x (f'f) \ ,$$

$$(j^\lambda_{x'} f')(j^r_x f) = (j^r_{x'} f')(j^\lambda_x f) = f'(j^r_x f) = (j^r_{x'} f')(f, x) = j^r_x (f'f) .$$

Pour que le composé de $X \in J^r(R^n, R^m)$ et $X' \in J^r(R^m, R^p)$ soit défini, il faut et il suffit que $\beta(X) = \alpha(X')$. Ces lois de compositions sont associatives et l'opérateur j^r est compatible avec elles :

$$j^r(\xi' \xi) = j^r(\xi') j^r(\xi) = \xi' j^r(\xi) = j^r(\xi') \xi \ ,$$

où

$$\xi \in J^{\lambda,r}(R^n, R^m) \ , \ \xi' \in J^{\lambda,r}(R^m, R^p) \ .$$

Le groupoïde $\Pi^{\lambda,r}(R^n) \times \Pi^{\lambda,r}(R^m)$ est un groupoïde d'opérateurs sur $J^{\lambda,r}(R^n, R^m)$ et sur $J^r(R^n, R^m)$ et l'application j^r est invariante par rapport à ce groupoïde :

$$(s, s', \xi) \longrightarrow s' \xi s^{-1} \ ,$$

$$(s, s', X) \longrightarrow s' X s^{-1} \ ,$$

$$j^r(s' \xi s^{-1}) = s' j^r(\xi) s^{-1} \ ,$$

où

$$s \in \Pi^{\lambda,r}(R^n) \ , \ s' \in \Pi^{\lambda,r}(R^m), \ \xi \in J^{\lambda,r}(R^n, R^m), \ X \in J^r(R^n, R^m).$$

Cela veut dire que le groupoïde d'opérateurs $\Pi^{\lambda,r}(R^n) \times \Pi^{\lambda,r}(R^m)$ laisse invariante la relation d'équivalence associée à j^r dans $J^{\lambda,r}(R^n, R^m)$, dont les classes d'équivalence s'identifient canoniquement aux éléments $J^r(R^n, R^m)$.

A cette relation d'équivalence est associée une relation d'équivalence dans $J^{\lambda,r}(V_n, V_m)$, invariante pour le groupoïde $\Pi^{\lambda,r}(V_n) \times \Pi^{\lambda,r}(V_m)$, où V_n et V_m sont deux r-variétés. Cette relation d'équivalence est définie de la manière suivante : Deux éléments ξ et ξ_1 de $J^{\lambda,r}(V_n, V_m)$ seront dits de même r-classe lorsqu'ils ont même source et même but et lorsque

$$j^r(h'^{-1}\xi h) = j^r(h'^{-1}\xi_1 h),$$

où h est un repère local de V_n au point $\alpha(\xi) = \alpha(\xi_1)$ et h' un repère local de V_m au point $\beta(\xi) = \beta(\xi_1)$. Si cette condition est vérifiée pour un couple donné de repères locaux (h, h'), elle est vérifiée pour tout couple de repères locaux aux points $\alpha(\xi)$ et $\beta(\xi)$.

On en déduit la relation d'équivalence suivante dans $C^r(V_n, V_m)$, ensemble des r-applications pointées de V_n dans V_m : Deux éléments (f, x) et (f', x') de $C^r(V_n, V_m)$ seront dits de même r-classe lorsque $j^\lambda_x f$ et $j^\lambda_{x'} f'$ sont de même r-classe, ce qui suppose en particulier x' = x et f (x) = f' (x). Cette condition s'exprime aussi par l'équation

$$j^r(h'^{-1}fh) = j^r(h'^{-1}f'h),$$

où h est un repère local de V_n au point x et h' un repère local de V_m au point f (x). UNE CLASSE D'ÉQUIVALENCE DE $C^r(V_n, V_m)$ POUR CETTE RELATION SERA APPELÉE JET INFINITÉSIMAL D'ORDRE r OU r-JET DE V_n DANS V_m.

Le r-jet de (f, x) est noté $j^r_x f$. L'ensemble des r-jets de V_n dans V_m est désigné par $J^r(V_n, V_m)$. Si $X = j^r_x f$, le point x est appelé source de X, le point f (x) but de X. La source de X est désignée par $\alpha(X)$, le but par $\beta(X)$; ceci définit deux applications canoniques α et β de $J^r(V_n, V_m)$ sur V_n et sur V_m.

L'application $(f, x) \to j^r_x f$ admet la décomposition canonique $(f, x) \to j^\lambda_x f \to j^r_x f$. Nous considérons j^r comme un opérateur opérant sur $C^r(V_n, V_m)$ et sur $J^\lambda(V_n, V_m)$:

$$j^r(f,x) = j^r_x f, \quad j^r(j^\lambda_x f) = j^r_x f$$

ce qui conduit à poser $j^r j^\lambda = j^r$.

Dans $C^r(V_n, V_m)$ considérons les trois relations d'équivalence dont les classes d'équivalence sont : 1° les jets locaux, 2° les r-jets, 3° les k-jets, où $k \leq r$. La première de ces relations d'équivalence entraîne la deuxième, la deuxième entraîne la troisième. Ceci définit les applications canoniques suivantes :

$$(f,x) \to j^\lambda_x f \to j^r_x f \to j^k_x f,$$

$$C^r(V_n, V_m) \to J^{\lambda,r}(V_n, V_m) \to J^r(V_n, V_m) \to J^k(V_n, V_m).$$

Le k-jet canoniquement associé au r-jet X sera encore désigné par $j^k X$, c'est-à-dire nous considérons j^k comme opérant sur $C^r(V_n, V_m)$, $J^{\lambda,r}(V_n, V_m)$

et $J^r(V_n, V_m)$, où $k \leqslant r$. On a :

$$j^k j^r = j^r, \ j^k j^\lambda = j^k, \ j^r j^r = j^r.$$

En particulier, $j^0 X$ s'identifie au couple $(\alpha(X), \beta(X))$ et j^0 définit l'application canonique de $J^r(V_n, V_m)$ sur $V_n \times V_m$.

Soit V_p une troisième r-variété. Soit

$$(f, x) \in C^r(V_n, V_m), (f', x') \in C^r(V_m, V_p).$$

La loi de composition :

$$(f', x')(f, x) = (f'f, x), \text{ si } x' = f(x),$$

est compatible avec les relations d'équivalence considérées. Les lois de composition qu'on en déduit par passage aux quotients sont donc compatibles avec les projections canoniques précédentes. On a :

$$(j^r_{x'} f')(j^r_x f) = (j^\lambda_{x'} f')(j^r_x f) = (j^r_{x'} f')(j^\lambda_x f) = f'(j^r_x f) = (j^r_x f')(f, x) = j^r_x(f'f),$$

$$j^k(X'X) = (j^k X')(j^k X) = (j^k X')X = X'(j^k X),$$

où

$$X \in J^r(V_n, V_m), \ X' \in J^r(V_m, V_p).$$

Désignons par j^r_x le r-jet de source x de l'application identique de V_n. On a alors $j^r_x f = f j^r_x$ et j^r_x est unité à gauche et à droite pour la composition des r-jets. Le jet $X \in J^r(V_n, V_m)$ est inversible lorsqu'il existe $X^{-1} \in J^r(V_m, V_n)$ tel que $X'X = j^r_x$ et $XX' = j^r_{x'}$, où $x = \alpha(X)$, $x' = \beta(X)$. Pour que X soit inversible il faut et il suffit que $n = m$ et que le rang de X soit égal à n. Le rang du jet $j^r_x f$ est le rang du jet $h'^{-1}(j^r_x f)\,h$, où h est un repère local de V_n au point x et h' un repère local de V_m au point f (x). Or $h'^{-1}(j^r_x f)\,h$ est le jet du premier ordre d'une application linéaire, dont le rang est l'invariant cherché.

Nous appellerons repère d'ordre r de V_n au point x tout r-jet inversible de R^n dans V_n de but x. Sauf indication contraire, il sera sous-entendu que les repères considérés seront tous de source 0. L'ensemble $H^r(V_n)$ des repères d'ordre r de V_n, de source 0 sera appelé prolongement principal d'ordre r de V_n. L'inverse d'un repère d'ordre r au point x sera appelé corepère d'ordre r au point x. L'ensemble des corepères d'ordre r et de source **x** de V_n sera désigné par $H^{r*}(V_n)$.

L'ensemble des éléments inversibles de $J^r(V_n, V_n)$ est un groupoïde $\Pi^r(V_n)$. Le sous-ensemble des éléments de $\Pi^r(V_n)$ de source et de but donné x est un groupe $L^r_n(V_n, x)$, appelé groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre r de V_n au point x. En particulier, le groupe $L^r_n(R^n, 0)$ sera désigné par L^r_n. Si h est un repère d'ordre r de V_n au point x (de source 0), l'application $y \to h\,y\,h^{-1}$, où $y \in L^r_n$, est un isomorphisme de L^r_n sur $L^r_n(V_n, x)$; l'ensemble d'isomorphismes qu'on obtient ainsi est une classe modulo le groupe des automorphismes intérieurs de L^r_n.

Soit $L^r_{m,n}$ l'ensemble des éléments de $J^r(R^n, R^m)$ ayant pour source et pour but l'origine commune 0 de R^n et de R^m. Tout $y \in L^r_{m,n}$ est le r-jet de source 0 d'une application bien déterminée de la forme :

$$u_i = \sum a_{ij} x_j + \sum a_{ij_1j_2} x_{j_1} x_{j_2} + \dots + \sum a_{ij_1j_2\dots j_r} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_r},$$

où les x_j sont les coordonnées canoniques dans R^n, les u_i les coordonnées canoniques dans R^m, les coefficients $a_{ij_1 \dots j_k}$ étant symétriques par rapport aux indices $j_1\, j_2 \dots j_k$. Cette application sera appelée le représentant polynomial de y. En considérant les $a_{ij_1 \dots j_k}$, où $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \dots j_k$, comme les coordonnées canoniques de y, nous munissons $L^r_{m,n}$ d'une structure de variété analytique réelle isomorphe à un espace numérique. En particulier $L^1_{m,n}$ peut s'identifier canoniquement à l'espace $L_{m,n}$ des applications linéaires homogènes de R^n dans R^m et par suite aussi à l'espace des suites de n vecteurs d'origine 0 dans R^m. Ainsi $L^1_{m,1}$ s'identifie canoniquement à R^m : à l'élément y de $L^1_{m,1}$ correspond d'abord son représentant linéaire, puis le vecteur transformé du vecteur unité de R par cette transformation linéaire. Le rang de $y \in L^r_{m,n}$ est le rang de la matrice (a_{ij}). Le groupe L^r_n est une sous-variété analytique de $L^r_{n,n}$ et L^1_n s'identifie canoniquement au groupe linéaire homogène L_n. Dans le cas $r = \infty$, le représentant polynomial devient une série formelle à valeur vectorielle (ou une suite de m séries formelles ordinaires). $L^\infty_{m,n}$ s'identifie à l'ensemble (1) de ces séries formelles.

L'opérateur j^k définit un homomorphisme de L^r_n sur L^k_n, dont le noyau est un groupe résoluble homéomorphe à un espace numérique ; si $k = r - 1$, ce noyau est isomorphe à un groupe additif R^d. Le groupe L^r_n est une extension inessentielle du groupe L_n, puisque celui-ci peut s'identifier à un sous-groupe de L^r_n. Ce sous-groupe est l'ensemble des éléments L^r_n dont le représentant polynomial est linéaire ; il n'est pas invariant dans L^r_n.

Désignons par $\bar{y}$ le représentant polynomial de $y \in L^r_{m,n}$. Le représentant polynomial de $j^k y$ s'obtient en supprimant dans $\bar{y}$ les termes de degré $> k$. Si $y' \in L^k_{p,m}$, le représentant polynomial de $y'\, y$ s'obtient en supprimant dans $\bar{y}'\, \bar{y}$ les termes de degré $> k$, si $r > k$. Dans certains cas, on peut définir un composé de y et y' appartenant à $L^\ell_{p,n}$, où $\ell > k$. Soient r' et k' les plus grands entiers tels que $j^{r'-1} y = 0$ et $j^{k'-1} y' = 0$ (c'est-à-dire les coordonnées canoniques de ces jets sont nulles). Si ℓ est le plus petit des nombres $k'\, r$ et $r'\, k$, le jet $j^\ell_0 (\bar{y}'\, \bar{y})$ ne dépend que de y' et y et définit un composé que nous désignerons encore par $y'\, y$. Son représentant polynomial s'obtient en supprimant dans $\bar{y}'\, \bar{y}$ les termes de degré $> \ell$.

Le produit $L^r_m \times L^r_n$ est un groupe d'opérateurs analytiques sur $L^r_{m,n}$:

$$(s', s)\, y = s' y s^{-1}, \text{ où } s \in L^r_n,\ s' \in L^r_m,\ y \in L^r_{m,n}.$$

De même L^r_n et L^r_m sont des groupes d'opérateurs sur $L^r_{m,n}$:

$$(s, y) \longrightarrow y s^{-1},\ (s', y) \longrightarrow s' y.$$

Soit $h \in H^r(V_n)$ et $h' \in H^r(V_m)$.

L'application $y \longrightarrow h'\, y\, h^{-1}$ est une application biunivoque de $L^r_{m,n}$ sur l'ensemble $J^r_{x,x'}(V_n, V_m)$ des éléments de $J^r(V_n, V_m)$ de source $x = \beta(h)$ et de but $x' = \beta(h')$. En supposant donné (x, x'), on obtient ainsi une classe d'applications biunivoques de $L^r_{m,n}$ sur $J^r_{x,x'}(V_n, V_m)$; ce sera une classe d'équivalence par

(1) L. Schwartz m'a communiqué qu'il a démontré que toute série formelle est bien le jet d'ordre ∞ d'une application.

rapport au groupe d'opérateurs $L^r_m \times L^r_n$. (Si G est un groupe d'opérateurs sur l'ensemble F, il est aussi groupe d'opérateurs sur l'ensemble des applications de F dans F' et une classe d'intransitivité dans cet ensemble s'appellera classe d'équivalence par rapport à G.) Toute structure sur $L^r_{m,n}$ invariante par $L^r_m \times L^r_n$ se transporte alors canoniquement sur $J^r_{x,x'}(V_n, V_m)$. Par exemple, si $r = 1$, on obtient ainsi une structure d'espace vectoriel.

Appelons p^r-VITESSE (ou vitesse de dimension p et d'ordre r) de V^n d'origine x tout élément de $J^r(R^p, V_n)$ de source 0 et de but x'; soit $T^r_p(V_n)$ l'ensemble de ces p^r-vitesses dans V_n. Appelons p^r-COVITESSE de V_n d'origine x tout élément de $J^r(V_n, R^p)$ de source x et de but 0 ; soit $T^{r*}_p(V_n)$ l'ensemble des p^r-covitesses de V_n. Pour $p = r = 1$, on définit ainsi les VITESSES et COVITESSES sur V_n appelés aussi VECTEURS et COVECTEURS.

Soit $T^r_{p,x}(V_n)$ l'ensemble des p^r-vitesses d'origine x, $T^{r*}_{p,x}(V_n)$ l'ensemble des p^r-covitesses d'origine x et $H^r_x(V_n)$ l'ensemble des repères d'origine x. Au repère $h \in H^r_x(V_n)$ correspond l'application biunivoque $y \longrightarrow hy$ de $L^r_{n,p}$ sur $T^r_{p,x}(V_n)$, où $y \in L^r_{n,p}$. Pour x donné on obtient ainsi un ensemble d'applications biunivoques de $L^r_{n,p}$ sur $T^r_{p,x}(V_n)$ formant une classe d'équivalence par rapport au groupe L^r_n opérant (à gauche) sur $L^r_{n,p}$. Toute structure sur $L^r_{n,p}$ invariante par L^r_n se transporte alors d'une manière canonique sur $T^r_{p,x}(V_n)$. De même l'ensemble des applications biunivoques $y \longrightarrow yh^{-1}$ de $L^r_{p,n}$ sur $T^{r*}_{p,x}(V_n)$, où $y \in L^r_{p,n}$ et $h \in H^r_x(V_n)$, forme une classe d'équivalence par rapport au groupe L^r_n opérant (à droite) sur $L^r_{p,n}$; d'où transport canonique sur $T^{r*}_{p,x}(V_n)$ des structures de $L^r_{p,n}$ invariantes par L^r_n. En particulier $T^1_{p,x}(V_n)$ et $T^{1*}_{p,x}(V_n)$ sont munis de structures d'espaces vectoriels.

Le jet $Z \in J^r(V_n, V_m)$ définit l'application suivante de $T^r_{p,x}(V_n)$ dans $T^r_{p,x}(V_m)$:

$$X \longrightarrow ZX, \text{ où } X \in T^r_{p,x}(V_n).$$

Il définit de même l'application suivante de $T^{r*}_{p,x}(V_n)$ dans $T^{r*}_{p,x}(V_n)$:

$$Y \longrightarrow YZ, \text{ où } Y \in T^{r*}_{p,x}(V_m).$$

En choisisant deux repères h et h' à la source et au but de Z, on ramène la première application à une représentation $y \longrightarrow zy$ de $L^r_{n,p}$ dans $L^r_{m,p}$, où $y \in L^r_{n,p}$ et $z \in L^r_{m,n}$; la deuxième application est ramenée de même à une représentation $y' \longrightarrow y'z$ de $L^r_{p,m}$ dans $L^r_{p,n}$, où $y' \in L^r_{p,m}$ Dans le cas $r = 1$, les applications considérées sont toutes linéaires homogènes.

Toute r-application f de V_n dans V_m a un PROLONGEMENT $X \longrightarrow fX$ appliquant $T^r_p(V_n)$ dans $T^r_p(V_m)$. Dans le cas $r = 1$, la restriction de cette application à $T^1_{p,x}(V_n)$ est linéaire.

Le groupe L^r_p opère sur $T^r_p(V_n)$:

$$(s, X) \longrightarrow Xs^{-1}, \text{ où } s \in L^r_p, X \in T^r_p(V_n).$$

La classe d'intransitivité XL^r_p s'appellera p^r-élément de contact de V_n d'origine x.

Le groupe L^r_p opère aussi sur $T^{r*}_p(V_n)$:

$$(s, Y) \longrightarrow sY, \text{ où } s \in L^r_p, Y \in T^{r*}_p(V_n).$$

La classe $L^r_p Y$ s'appellera p^r-élément d'enveloppe.

Soit Z un élément de $J^r(V_n, V_m)$, h un repère à la source de Z et h' un repère au but de Z. A l'élément Z est associé canoniquement un n^r-élément de contact d'origine β (Z) et un m^r-élément d'enveloppe d'origine α (Z) : ce sont les classes $Z\, h\, L^r_n$ et $L^r_m\, h'^{-1}\, Z$. L'ensemble des repères d'ordre r au point $x \in V_n$ est l'élément de contact fondamental d'ordre r, ou l'élément de structure infinitésimale d'ordre r de V_n au point x. Si f est une r-application de V_n dans V_m, le couple (f, V_p) peut s'appeler variété plongée dans V_n. L'application f se prolonge aussi à l'ensemble des éléments de contact de V_n ; les images de ces éléments sont les éléments de contact de la variété plongée. La théorie du contact des variétés plongées est l'étude de la relation d'incidence entre éléments de contact définie de la manière suivante : Etant donnés $X \in T^r_p(V_n)$ et $X' \in T^r_q(V_n)$, on dira que X est contenu dans X' lorsque $X = X'\, y$, où $y \in L^r_{q,p}$; dans ce cas, l'élément de contact XL^r_p sera dit contenu dans $X'L^r_q$. On définit de même une relation d'incidence entre covitesses ou éléments d'enveloppe.

On est amené aussi à considérer les classes de jets locaux analogues aux éléments de contact et aux éléments d'enveloppe. Une classe $XJ^{\lambda}_0(\Lambda^r_n)$ où $X \in J^{\lambda,r}(R^p, V_n)$ et α (X) = 0, pourrait s'appeler GERME DE r-VARIÉTÉ PLONGÉE. Dans l'ensemble de ces germes on peut introduire une topologie analogue à celle de l'espace des germes de structure considérés au paragraphe 1. Une r-variété plongée correspond à un ensemble ouvert séparé de cet espace de germes de r-variété plongée. La classe $J^{\lambda}_0(\Lambda^r_m)\, Y$, où $Y \in J^{\lambda,r}(V_n, R^m)$ et β (Y) = 0, pourrait s'appeler GERME DE FEUILLETAGE dans V_n. L'espace de ces germes, défini encore comme plus haut, sera un espace étalé sur V_n. Un relèvement de V_n dans cet espace est un FEUILLETAGE r FOIS DIFFÉRENTIABLE avec singularités admises. On définit facilement une relation d'équivalence plus forte : $Y \sim Y'$ lorsque l'intersection de $f^{-1}(0)$ et $f'^{-1}(0)$ est un voisinage de x relativement aux sous-espaces $f^{-1}(0)$ et $f'^{-1}(0)$, où Y et Y' sont des éléments de $J^{\lambda,r}(V_n, R^m)$ de même source x et de but 0, $j^{\lambda}_x f = Y$, $j^{\lambda}_x f' = Y'$. Les classes d'équivalence ainsi définies peuvent s'appeler GERMES DE VARIÉTÉ EXTRAITE. On définit encore l'espace topologique de ces germes ; les ensembles ouverts séparés de cet espace sont les r-variétés extraites de V_n. Un feuilletage r fois différentiable de V_n définit sur V_n un ensemble de r-variétés extraites, appelées les feuilles du feuilletage.

La classe d'intransitivité de $y \in L^r_{m,n}$ par rapport à $L^r_m \times L^r_n$ sera appelée classe d'équivalence de y. Un problème fondamental de la géométrie différentielle locale consiste à chercher un représentant canonique dans chaque classe d'équivalence, plus généralement à chercher les invariants et covariants de y par rapport à $L^r_m \times L^r_n$ ou par rapport à certains sous-groupes.

L'élément y de $L^r_{m,n}$ est dit RÉGULIER lorsque le rang de la matrice (a_{ij}) est égal au plus petit des nombres m et n. L'ensemble des éléments réguliers forme une seule classe d'équivalence, ayant pour représentant canonique l'application $x'_i = x_i$, pour $i \leqslant m$ si $m \leqslant n$, ou bien l'application $x'_i = x_i$ pour $i \leqslant n$ et $x'_j = o$ pour $j > n$, si $n \leqslant m$.

Etant donné $y \in L^r_{m,n}$ soient p et q les plus petits entiers tels que y admette les décompositions : $y = y_1\, z = z'\, y_2$, où z est un élément RÉGULIER de $L^r_{p,n}$, z' un élément RÉGULIER de $L^r_{m,q}$, $y_1 \in L^r_{m,p}$, $y_2 \in L^r_{q,n}$. Alors on a $p \leqslant n$, $q \leqslant m$ et y admet la décomposition $y = z'\, y'\, z$, où $y' \in L^r_{q,p}$. Si z_0 désigne le r-jet de l'application canonique de R^n sur R^p et z'_0 le r-jet de l'application canonique de R^q dans R^m; y est équivalent à $z'_0\, y'\, z_0$; on peut dire que y est équivalent au sens large à $y' \in L^r_{q,p}$. Appelons p le rang d'ordre r à la source et q le rang d'ordre r au but de y. Pour $k < r$, les rangs d'ordre k à la source et au but de y sont ceux de $j^k y$. Ces nombres sont des fonctions croissantes de k.

Considérons k éléments $y_1, y_2, \ldots, y_k$ de $L^r_{m,n}$. On peut identifier la suite $y_1, y_2, \ldots, y_k$ à un élément de $L^r_{km,n}$. Soit z un élément de $L^r_{m,km}$. Le composé $z\,(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ sera un élément de $L^r_{m,n}$ et pourra s'appeler composé de $y_1, y_2, \ldots, y_k$ suivant z. Cette notion généralise la notion de combinaison linéaire de vecteurs. En particulier l'élément y de $L^r_{m,n}$ s'identifie à une suite de m éléments $(y_1, y_2, \ldots y_m)$ de $L^r_{1,m}$ (ce sont les composantes de y ; mais cette notion n'est pas invariante par rapport à L^r_m). Tout élément z de $L^r_{1,m}$ détermine un composé $z\,(y_1, y_2, \ldots y_m)$. On est conduit alors à la notion de sous-espace de $L^r_{1,n}$ engendré par un ensemble donné d'éléments de $L^r_{1,n}$. Le rang d'ordre r à la source de y est le nombre minimum d'éléments réguliers de $L^r_{1,n}$, engendrant un sous-espace contenant $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Les mêmes considérations conduisent à la notion de prolongement d'une loi de composition. Une loi de composition r fois différentiable $(x, x') \longrightarrow xx'$ définie dans V_m se prolonge à $J^r(V_n, V_m)$. Etant donnés deux éléments X et X' de $J^r(V_n, V_m)$ tels que $\alpha\,(X) = \alpha\,(X') = u$, on posera :

$$XX' = j^r_u(ff')\ ,\ \text{où}\ X = j^r_u f,\ X' = j^r_u f',$$

en désignant ici par ff' l'application $x \longrightarrow f\,(u)\, f'\,(u)$. En particulier, si G est un groupe r fois différentiable, $T^r_p(G)$ sera un groupe. Si G opère sur une r-variété V_n, la loi de composition externe étant r fois différentiable, le groupe $T^r_p(G)$ opère sur $T^r_p(V_n)$.

De cette façon, on définit des structures algébriques sur $L^r_{m,n}$ invariantes par L^r_n mais non par L^r_m. Une structure d'algèbre sur R^n se prolonge ainsi en une structure d'algèbre sur $L^r_{m,n}$, invariante par L^r_n. Remarquons que le produit yy' de deux éléments de $L^1_{m,n}$ est nul dans $L^1_{m,n}$; mais on peut définir yy' comme un élément de $L^2_{m,n}$. On définit de même le produit de k éléments de $L^1_{m,n}$ comme étant un élément de $L^k_{m,n}$. Plus généralement dans un polynôme homogène de degré k, à coefficients pris dans le corps de base de l'algèbre considérée sur R^n, on peut substituer aux variables des éléments de $L^1_{m,n}$ et on obtient ainsi un élément de $L^k_{m,n}$. Le représentant polynomial de celui-ci s'obtient par composition des représentants linéaires des éléments donnés.

La géométrie différentielle locale revient essentiellement à l'étude de l'espace $L^r_{m,n}$ muni du groupe d'opérateurs $L^r_m \times L^r_n$, ou de groupes d'opérateurs qui sont des sous-groupes de celui-ci. Les sous-groupes de L^r_n et L^r_m interviendront lorsqu'on remplace Λ^r_n et Λ^r_m par des sous-pseudogroupes Γ et Γ'. Désignons par $J^r(\Gamma)$ le groupoïde formé par l'ensemble des jets $j^r_x \varphi$, où $\varphi \in \Gamma$. Le groupe $J^r_0(\Gamma)$, intersection de $J^r(\Gamma)$ avec L^r_n, sera appelé groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre r au point 0 relativement à Γ, que nous supposons transitif pour simplifier. On aura à étudier les structures sur $L^r_{m,n}$ invariantes par $J^r_0(\Gamma) \times J^r_0(\Gamma')$; ces structures se transporteront canoniquement sur $J^r_{x,x'}(V_n, V_m)$, si V_n et V_m sont munies de structures associées à Γ et Γ' respectivement. En particulier, $L^r_{m,n}$ pourrait avoir un sous-espace invariant par $J^r_0(\Gamma) \times$

$J_0^r(\Gamma')$. Ceci déterminerait dans $J^r(V_n, V_m)$ une classe de r-jets distingués. Plus généralement cette classe de r-jets distingués sera définie dans $J^r(V_n, V_m)$ lorsque V_n et V_m sont munies de structures que nous appellerons **structures** infinitésimales régulières (4) à groupe structural $J_0^r(\Gamma)$ et $J_0^r(\Gamma)$ respectivement. Par exemple, dans le cas des variétés analytiques complexes ($\Gamma = \Lambda_n^c$, $\Gamma' = \Lambda_m^c$) on obtient la classe des r-jets analytiques complexes, contenue dans $J^r(V_n, V_m)$; cette notion s'applique aussi aux variétés presque complexes d'ordre r (variétés munies d'une structure infinitésimale régulière à groupe structural $J_0^r(\Lambda_n^c)$; elles sont équivalentes en chaque point jusqu'à l'ordre r à des variétés analytiques complexes). Ayant distingué un sous-espace invariant de $L_{m,n}^r$ on est conduit à considérer aussi les relations d'équivalence invariantes sur ce sous-espace, ainsi que les espaces quotients correspondants. La notion générale de covariants différentiels de structures infinitésimales se ramène à celle de covariants par rapport à des représentations de $J_0^r(\Gamma) \times J_0^r(\Gamma')$ comme groupe d'opérateurs. Dans les géométries qu'on peut appeler non holonomes, les sous-groupes de L_n^r et L_m^r qui interviennent ne sont pas associés à des pseudogroupes de transformation Γ et Γ'.

Remarquons que $L_{m,n}^k$ admet aussi $L_m^r \times L_n^{r'}$ comme groupe d'opérateurs, lorsque $k \leqslant r$ et $k \leqslant r'$. En particulier $L_m^\infty \times L_n^\infty$ est un groupe d'opérateurs sur $L_{m,n}^r$. Il en est de même de $J_0^\lambda(\Lambda_n^\infty) \times J_0^\lambda(\Lambda_m^\infty)$. L'opérateur j^r est invariant par rapport au groupe d'opérateurs $L_m^\infty \times L_n^\infty$ et $L_{m,n}^r = j^r(L_{m,n}^\infty)$.

D'une façon générale, on est amené à considérer les sous-espaces de $L_{m,n}^\infty$ invariants par $L_m^\infty \times L_n^\infty$ ou un de ses sous-groupes. Sur un tel sous-espace distingué on aura à considérer les structures invariantes, en particulier les relations d'équivalence invariantes et les espaces quotients correspondants. Ces derniers espaces peuvent être considérés comme des généralisations des espaces de jets. Nous en verrons des exemples dans l'étude des structures feuilletées, des structures de variété produit ou des structures de prolongement d'une r-variété.

Par exemple dans R^{p+q}, identifié à $R^p \times R^q$, le produit $\Lambda_p^k \times \Lambda_q^\ell$ engendre un pseudogroupe que nous pouvons désigner également par $\Lambda_p^k \times \Lambda_q^\ell$. Considérons les applications pointées (f, x) de $R^p \times R^q$ dans R^m, où $x = (u, v) \in R^p \times R^q$, telles que f admette des dérivées partielles continues de toute espèce satisfaisant aux conditions suivantes : elles sont d'ordre $\leqslant k$ par rapport aux coordonnées u_i de u, d'ordre $\leqslant \ell$ par rapport aux coordonnées v_j de v, d'ordre $\leqslant r$ par rapport à l'ensemble de ces coordonnées. Dans l'ensemble de ces applications pointées on a la relation d'équivalence dont chaque classe correspond à un système donné de valeurs des dérivées considérées au point x. Cette relation est invariante par $\Lambda_p^k \times \Lambda_q^\ell$. Les classes d'équivalence sont des jets généralisés, qu'on pourrait noter $j_x^{k,\ell,r} f$. Comme précédemment on définit des jets de ce type de V_{p+q} dans V_m, où V_m est une r-variété et où V_{p+q} est muni d'une structure de **produit local**, localement isomorphe à $R^p \times R^q$ (c'est-à-dire définie par un atlas de $R^p \times R^q$ sur V_{p+q} compatible avec $\Lambda_p^k \times \Lambda_q^\ell$). L'ensemble des jets de ce type de $R^p \times R^q$ dans R^m, de source et de but 0, est un espace quotient de $L_{m,p+q}^\infty$. Pour $m = 1$, c'est l'algèbre quotient de $L_{1,p+q}^\infty$ par l'idéal engendré par les produits de coordonnées qui sont de degré $> k$

par rapport aux u_i, de degré $>l$ par rapport aux v_j et de degré $>r$ par rapport à l'ensemble des u_i et v_j. Ceci rejoint le point de vue exposé par A. Weil. Mais les espaces de jets, de source donnée, ne sont pas toujours munis de structures d'algèbres.

Pour les notions de pseudogroupe de transformations et de structures associées à un pseudogroupe, voir (4). La notion de germe de structure se définit pour toutes espèces de structures locales. La notion de germe de sous-espace s'étend aussi aux structures locales quelconques (Voir P. Dedecker, Comptes Rendus, Paris, 1953, 236, p. 771). On trouvera la définition générale des structures de prolongements et des structures infinitésimales dans (1), (2) et (3).

Extrait des «Proceedings Intern. Congress Amsterdam»,
Vol. I (1954), pp. 478-479

/42/

SUR LES STRUCTURES INFINITÉSIMALES RÉGULIÈRES

CHARLES EHRESMANN

Utilisons les notions et notations introduites dans une série de publications récentes (Voir références dans Colloque International Géométrie differentielle, Strasbourg 1953, p. 97).

Les structures qui font l'objet de la Géométrie différentielle peuvent être définies en partant de la notion de *prolongement d'une variété différentiable* V_n. Supposons V_n de classe r et posons $r = k + l$. Soit Φ un sous-groupoïde de $\Pi^k(V_n)$, espace des k-jets inversibles de V_n dans V_n. Un prolongement d'ordre k et de classe l de V_n, relativement à Φ, est une variété E munie d'une projection p sur V_n et admettant Φ comme *groupoïde d'opérateurs*: Le composé θz de $\theta \in \Phi$ et $z \in E$ est défini si $\alpha(\theta) = p(z)$ et on a $p(\theta z) = \beta(\theta)$, où $\alpha(\theta)$ = source de θ, $\beta(\theta)$ = but de θ; les applications p et $(\theta, z) \to \theta z$ sont de classe l. Soit Ψ l'ensemble des jets $j^l_z(z \to \theta_{p(z)}z)$, où $x \to \theta_x$ est un relèvement local de classe l de V_n dans Φ; c'est-à-dire $\alpha(\theta_x) = x$. *Transitivité des prolongements*: Tout prolongement d'ordre l de E, relativement à Ψ, est un prolongement d'ordre r de V_n, relativement à Φ^l (prolongement d'ordre l de Φ).

Une *structure infinitésimale pure* d'ordre k est une section σ d'un prolongement E d'ordre k de V_n. Si $E = H^k(V_n)/G$, où $H^k(V_n)$ = espace des repères d'ordre k, G = sous-groupe fermé de L^k_n, la structure σ est appelée *régulière* ou G-structure. Il lui correspond dans $H^k(V_n)$ un sous-espace H', espace des repères distingués, qui est un espace fibré principal à groupe G. On définit les notions de *prolongement d'une structure infinitésimale* et de *covariant différentiel.*

Soit G un sous-groupe de L^1_n. A toute G-structure σ on peut associer au moins une connexion affine. Si σ' est le prolongement du 1^er ordre de σ, on peut définir la *torsion* d'un élément de σ'. Celle-ci est nulle si l'élément correspond par un repère du 2^e ordre à la G-structure triviale sur R^n. Si la torsion est identiquement nulle, on peut associer à σ une connexion affine sans torsion. Au Congrès de Géométrie différentielle (Italie 1953) j'ai donné une caractérisation des groupes G tels que la torsion soit un covariant représenté par le tenseur de torsion d'une connexion affine associée, plus particulièrement tels qu'à toute G-structure on puisse associer d'une manière covariante une connexion affine déterminée.

11, RUE DE L'OBSERVATOIRE,
STRASBOURG, FRANCE.

SUR LES PSEUDOGROUPES DE TRANSFORMATIONS DE LIE

CHARLES EHRESMANN

Voir la définition d'un pseudogroupe de transformations dans: „Sur la théorie des espaces fibrés" (Colloque Topologie algébrique, Paris 1947) et „Structures locales" (Annali di Mat. 1954).

La notion de pseudogroupe de transformations est fondamentale en géométrie. Elle est équivalente à celle de pseudogroupe d'automorphismes locaux d'une *structure locale*.

Soient V_n et V_m deux variétés de classe $\geqq r$, $I^r(V_n, V_m)$ l'espace des r-jets de V_n dans V_m et $\Pi^r(V_n)$ le groupoïde des r-jets inversibles de V_n dans V_n. Un *système différentiel* Φ_r est une variété extraite de $I^r(V_n, V_m)$. On définit l'espace $\Phi_{r,\lambda}$ des germes de solutions et les prolongements successifs de Φ_r: Φ_{r+1}, Φ_{r+2}, $\ldots$, Φ_∞, où Φ_∞ est la limite projective de la suite $\Phi_r \leftarrow \Phi_{r+1} \leftarrow \Phi_{r+2} \leftarrow \ldots$ Une solution (généralement multiforme) correspond à un ouvert de $\Phi_{r,\lambda}$. Le système Φ_r est complètement intégrable si $\Phi_{r,\lambda}$ se projette *sur* Φ_r. *Système de Mayer-Lie*: Φ_r est une *variété* telle que son application canonique dans $I^{r-1}(V_n, V_m)$ soit localement biunivoque. Il est complètement intégrable si Φ_{r+1} se projette *sur* Φ_r. Dans ce cas Φ_{r+1} correspond à un champ complètement intégrable d'éléments de contact dans Φ_r, dont les variétés intégrales correspondent aux solutions de Φ_r.

Un *pseudogroupe de Lie* Γ est l'ensemble des solutions uniformes d'un sous-groupoïde $I^r(\Gamma)$ de $\Pi^r(V_n)$, muni d'une structure de sous-variété. Γ sera dit de *type fini* r si $I^r(\Gamma)$ est un système de Mayer-Lie. Le théorème de stabilité de Reeb entraîne: *Supposons* V_n *compact et simplement connexe,* Γ *de type fini* r, $I^r(\Gamma)$ *connexe ou admettant une composante connexe transitive dans* V_n. *Alors* Γ *se déduit par localisation d'un groupe de transformations de Lie.* On définit une notion d'*espace complet* permettant de généraliser ce théorème.

Sur un pseudogroupe Γ on définit diverses topologies:

I. Les ensembles de solutions des ouverts de $I^r(\Gamma)$ forment une base d'une topologie sur Γ.

II. Soit K un compact de V_n, W un ouvert de $I^r(\Gamma)$. Soit $\Omega(K, W)$ l'ensemble des $\varphi \in \Gamma$ tels que: 1) la source U de φ contient K; 2) $j^r\varphi$ relève U dans W. Les ensembles $\Omega(K, W)$ forment une base d'une topologie $\mathcal{T}_r$. L'ensemble des $\mathcal{T}_r$ engendre une topologie $\mathcal{T}$.

III. Dans II remplaçons 2) par 2'): $j^r\varphi$ relève K dans W. Les ensembles $\Omega(K, W)$ engendrent une topologie généralisant celle de la convergence compacte.

Ces topologies servent à définir les notions de *noyau* et de *germe* de pseudogroupe.

11, RUE DE L'OBSERVATOIRE,
STRASBOURG, FRANCE.

Dagli Atti del V Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Pavia - Torino 1956

/46/

SUR LES CONNEXIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR CHARLES EHRESMANN (À PARIS)

Les notions exposées dans trois Notes (¹) conduisent à une généralisation de la théorie des connexions infinitésimales dans un espace fibré (²).

Soit $E(B, F, G, H)$ un espace fibré de classe C^r, à groupe structural G; soit p la projection de E sur B et soit $\Phi = HH^{-1}$ le groupoïde principal associé. Soit $\widetilde{\Phi}^r$ le prolongement non holonome d'ordre r de Φ. Soit $\widetilde{B}$ la base de Φ, c'est-à-dire l'ensemble des unités de Φ. Si $\widetilde{x}$ est l'isomorphisme identique de la fibre $F_x = p^{-1}(x)$, identifions B avec $\widetilde{B}$ par $x \to \widetilde{x}$. Soit $\alpha(\theta)$ l'unité à droite de $\theta \in \Phi$, $b(\theta)$ l'unité à gauche; α est la *projection verticale*, b la *projection horizontale* de Φ sur $\widetilde{B}$ ou B.

Un *déplacement infinitésimal d'ordre* r de F_x est une vitesse *verticale* ζ d'ordre r et d'origine $\widetilde{x}$ dans Φ; c'est-à-dire $\alpha\zeta$ est la vitesse nulle réduite à x. Un *élément de connexion d'ordre* r en $x \in B$ est un élément X de $\widetilde{I}^r(B, \Phi)$, espace des jets non holonomes d'ordre r de B dans Φ, vérifiant les conditions suivantes: $\alpha(X) = x$, $\beta(X) = \widetilde{x}$; $\alpha X = \widehat{j_x^r} =$ jet d'ordre r et de source x de la rétraction de B sur x; $b X = j_x^r =$ jet d'ordre r et de source x de l'application identique de B. X correspond d'une façon biunivoque à un *élément de contact non holonome vertical* dans Φ au point $\widetilde{x}$. L'élément $X^{-1} = \varrho X$, où ϱ est la symétrie $\theta \to \theta^{-1}$ dans Φ, est un *coélément de connexion*; il vérifie les conditions $\alpha X^{-1} = j_x^r$, $b X^{-1} = \widehat{j_x^r}$ et

(¹) C. EHRESMANN, Comptes Rendus Acad. Sciences, Paris, 239, 1954, p. 1762; 240, 1955, p. 377 et p. 1755.

(²) C. EHRESMANN, *Les connexions infinitésimales* (Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950).

correspond à un *élément de contact horizontal* dans Φ en $\tilde{x}$. L'élément X fait correspondre à toute vitesse ξ d'ordre r dans B d'origine x le déplacement infinitésimal $X\xi$ de F_x.

Soit $\widetilde{Q}^r$ l'espace des éléments de connexion d'ordre r sur B, $\overline{Q}^r$ (resp. Q^r) le sous-espace des éléments semiholonomes (resp. holonomes). $\widetilde{Q}^r$ (resp. $\overline{Q}^r$ ou Q^r) est un espace fibré admettant $\widetilde{\Phi}^r$ (resp. $\overline{\Phi}^r$ ou Φ^r) comme groupoïde principal associé; ses fibres sont isomorphes à $\widetilde{T}^r_{n,e}(G)$ (resp. $\overline{T}^r_{n,e}(G)$ ou $T^r_{n,e}(G)$), espace des vitesses non holonomes (resp. semiholonomes ou holonomes) de G, d'ordre r, de dimension n et d'origine e (élément unité). Ces fibres étant homéomorphes à un espace numérique, $\widetilde{Q}^r$ (resp. $\overline{Q}^r$ ou Q^r) admet toujours une section. Une telle section définit une *connexion infinitésimale d'ordre* r sur E, ainsi que sur tout espace fibré associé à Φ. L'opérateur j^k applique $\widetilde{Q}^r$ sur $\widetilde{Q}^k$.

Soit $Z \in \widetilde{J}^r(V_p, E)$, de but $z \in E$ tel que $x = p(z)$, V_p étant une variété quelconque. La *différentielle absolue* de Z par rapport à X est $X^{-1}Z$ défini par $(X^{-1}pZ)\cdot Z$, composé obtenu par prolongement de la loi de composition $(\theta, z) \to \theta z$. On a: $X^{-1}Z \in \widetilde{J}^r(V_p, F_x)$, de but z. En particulier Z peut être le jet d'ordre r d'un relèvement local σ de B dans E et $X^{-1}Z$ est alors la différentielle absolue de σ par rapport à X. L'élément de contact d'ordre r d'une section locale de E au point z est ainsi *développé* sur un élément de contact non holonome de F_x au point z. Soit $h \in H$ se projetant sur x. Alors $X^{-1}j^r_h$ est un jet non holonome d'ordre r de H sur H_x, de source et de but h. En composant avec h^{-1}, on obtient le jet $h^{-1}X^{-1}j^r_h$ de H sur G, de but e, auquel on peut associer canoniquement un jet d'ordre r de H sur $T_e(G)$, espace tangent à G en e. Par prolongement de la loi de composition $(\theta, z) \to \theta z$, on définit $Xz \in \widetilde{J}^r(B, E)$, de source x et de but z et tel que $pXz = j^r_x$. On obtient ainsi un champ d'éléments de contact *horizontaux* d'ordre r, le long de la fibre F_x. En particulier, une connexion correspond à un champ d'éléments de contact horizontaux d'ordre r sur H, invariant par le groupe G opérant sur H.

Prolongement d'une connexion: Soit C une connexion définie par un relèvement différentiable de B dans $\widetilde{Q}^r$. De $X = C(x)$ on déduit $j^1(X) \in Q'$. Par prolongement de $(X, \theta) \to X\theta$, on définit $(j^1_x C)j^1(X)$. C'est un élément $X' = C'(x) \in \widetilde{Q}^{r+1}$, appelé *prolongement* du 1$^{\text{er}}$ ordre de X relativement à C. Le relèvement C' de B dans $\widetilde{Q}^{r+1}$ définit le prolongement de C. Par itération on définit le prolongement d'ordre k. Les éléments du prolongement d'ordre k d'une connexion du 1er ordre sont semi-holonomes.

Courbure d'une connexion du 1er ordre: Soit C une connexion du 1er ordre et C' son premier prolongement. Soit X_1 un élément de connexion holonome du 2e ordre au point x tel que $j^1(X_1) = C(x)$. Par prolongement de la loi de composition de Φ on définit $(C'(x))^{-1} X_1$; c'est un élément Y de $\overline{I}^2(B, G_x)$, de source x et de but $\tilde{x}$, unité du groupe G_x des automorphismes de F_x. On a $j^1(Y) =$ jet de l'application constante sur $\tilde{x}$. De Y on déduit un jet semiholonome Z d'ordre 2 de $T_x(B)$ dans $T_{\tilde{x}}(G_x)$ tel que $j^1(Z)$ soit le jet de l'application constante de B sur $\tilde{x}$. On peut considérer Z comme un élément de $T_{\tilde{x}}(G_x) \otimes T_x(B)^* \otimes T_x(B)^*$. Par antisymétrisation on en déduit un élément R_x de $T_{\tilde{x}}(G_x) \otimes (T_x(B)^* \wedge T_x(B)^*)$. Cet élément R_x est indépendant de X_1 et s'appelle le *tenseur de courbure* de C au point x; c'est un covariant de $C'(x)$. $R_x = 0$ exprime que $C'(x)$ est holonome. Si $R_x = 0$ pour tout x, la connexion C est *intégrable*.

Dans le cas d'un espace fibré soudé (2) à B, on définit de même un *tenseur de torsion*, covariant de $C(x)$.

Plus généralement, un élément de connexion d'ordre r est défini par un élément de connexion d'ordre l relativement à $\tilde{\Phi}^h$, où $r = k + l$. Un tel élément détermine aussi un élément de connexion d'ordre r du type précédent.

/50/

CATÉGORIES TOPOLOGIQUES ET CATÉGORIES DIFFÉRENTIABLES

PAR

Charles EHRESMANN (Paris)

Pour les définitions d'une catégorie, d'un groupoïde, d'un foncteur et d'une catégorie d'opérateurs, nous renvoyons à un article antérieur [1] dont nous utiliserons les notations.

REMARQUE PRÉLIMINAIRE :

La notion de structure de variété différentiable définie habituellement sur un *ensemble* peut être définie de la même manière sur une *classe* quelconque. Soit Λ^r le pseudo-groupe des automorphismes locaux de classe r de l'espace somme ΣR^n des espaces numériques R^n, n entier positif quelconque. Soit C une classe quelconque. Un atlas complet de ΣR^n compatible avec Λ^r définit une structure de variété différentiable de classe r. On définit de même la notion de structure de variété topologique ou de variété analytique sur C. Les variétés considérées ne sont pas nécessairement connexes ni séparées. Il convient de définir aussi la notion de structure topologique sur une classe quelconque C par la donnée d'une classe de sous-classes (appelées *ouverts*) vérifiant les mêmes axiomes que la famille des ouverts d'une topologie sur un ensemble. Dans les exemples que nous rencontrerons il existe une base d'ouverts formée par des ensembles.

LE GROUPOÏDE DES ÉLÉMENTS INVERSIBLES D'UNE CATÉGORIE DIFFÉRENTIABLE :

Définition 1. Une catégorie différentiable de classe r est une *catégorie Φ munie d'une structure de variété différentiable de classe r telle que les conditions suivantes soient vérifiées :*

1) *Les fonctions α et β qui associent à $f \in \Phi$ l'unité à droite $\alpha(f)$ et l'unité à gauche $\beta(f)$ sont différentiables de classe r et de rang localement constant.*

2) *La loi de composition $(g,f) \to gf$ est différentiable de classe r.*

De 1) il résulte que la classe Δ des unités de Φ est une sous-variété de classe r de Φ; c'est même une sous-variété propre; c'est-à-dire sa topologie est la topologie induite par Φ sur Δ. Les applications α et β définissent sur Φ deux structures de variétés feuilletées différentiables de classe r. Tout élément f_0 de Φ admet un voisinage ouvert U muni d'un système de coordonnées locales adapté au feuilletage correspondant à α de la forme $(x,y) \to f$, où $x = \alpha(f)$, $y \in U'$, $U' \subset R^n$, n étant la dimension des feuilles au voisinage de f. L'ensemble $\alpha(U)$ auquel appartient x est un voisinage ouvert de $\alpha(f_0)$ dans Δ, si le rang de α en f_0 est égal à la dimension de Δ; sinon $\alpha(U)$ est une sous-variété propre de Δ. Si $f_0 \in \Delta$, on pourra supposer que $U \cap \Delta$ est défini par $y = 0$. On a des systèmes de coordonnées locales analogues correspondant au feuilletage défini par β.

La classe des couples composables (g,f) est une sous-variété ψ de classe r de $\Phi \times \Phi$. Un système de coordonnées locales admissible au voisinage d'un tel couple (g,f) dans ψ est formé par (y',y,x), où (y,x) est un système de coordonnées locales de f et (y',x') un système de coordonnées locales de g, avec $x' = \beta(f)$. Le composé gf est représenté par (y'', x), où $y'' = \varphi(y', y, x)$, φ étant une fonction différentiable de classe r de (y',y,x); ceci est la signification de l'axiome 2).

Si f_0 est inversible, l'application $g \to gf_0$ est une application biunivoque différentiable de classe r de $\alpha^{-1}(x_0')$ sur $\alpha^{-1}(x_0)$ de déterminant jacobien différent de 0 en tout point, parce que $g \to (gf_0)f_0^{-1} = g(f_0 f_0^{-1}) = g$ est l'application identique de la feuille $\alpha^{-1}(x_0')$. A l'aide de coordonnées locales admissibles, f_0 est représenté par (y_0,x_0), f_0^{-1} par (y_0',x_0') et $f_0^{-1}f_0$ par $(0,x_0)$; c'est-à-dire $\varphi(y_0',y_0,x_0) = 0$. Le déterminant jacobien de φ par rapport à y' étant différent de 0, l'équation $\varphi(y',y,x) = 0$ détermine y' en fonction différentiable de classe r de (y,x) dans un voisinage U de f_0. Le couple (y',x'), où $x' = \beta(f)$, correspond à un élément f' tel que $f'f = \alpha(f)$. On montre de la même façon qu'à tout f appartenant à un voisinage U_1 de f_0 on peut faire correspondre un élément f'' voisin de f_0^{-1} tel que $ff'' = \beta(f)$. Si f appartient au voisinage $U \cap U_1$, on lui fait correspondre ainsi deux éléments f' et f'' tels que $f'f = \alpha(f)$ et $ff'' = \beta(f)$. Il en résulte : $(f'f)f'' = f'' = f'(ff'') = f'$. Par conséquent $f' = f'' = f^{-1}$. Ceci démontre le théorème suivant :

Théorème 1 : *La classe des éléments inversibles dans une catégorie différentiable Φ de classe r est un groupoïde Π ouvert dans Φ. L'application $f \to f^{-1}$ de Π sur Π est un isomorphisme de classe r de la variété différentiable Π.*

Une catégorie différentiable de classe r dont tous les éléments sont inversibles est appelée *groupoïde différentiable* de classe r. Pour un tel groupoïde l'application $f \to f^{-1}$ est un isomorphisme de sa structure différentiable de classe r.

On obtient un théorème analogue au théorème 1 pour certaines catégories topologiques, en posant la définition suivante :

Définition 2. *Une catégorie topologique est une catégorie Φ munie d'une structure topologique telle que les conditions suivantes soient vérifiées* :

1. *Les fonctions α et β sont continues.*
2. *La loi de composition $(g,f) \to gf$ est continue, sur la sous-classe de $\Phi \times \Phi$ formée par les couples (g,f) composables.*

Un groupoïde topologique est une catégorie topologique Φ dont tous les éléments sont inversibles et telle que l'application $f \to f^{-1}$ soit continue. (Ce qui entraîne qu'elle est un homéomorphisme de Φ sur Φ). *Une catégorie topologique Φ sera dite régulière si sa structure topologique est une structure de variété topologique et si au voisinage de chaque élément de Φ les feuilletages définis par α et β sont des structures de variétés feuilletées.*

Théorème 2 : *Si Φ est une catégorie topologique régulière, la classe des éléments inversibles de Φ est un groupoïde topologique régulier ouvert dans Φ.*

Dans une catégorie topologique régulière Φ, la classe des unités est une sous-variété propre. On peut utiliser, comme dans le cas des catégories différentiables, les systèmes de coordonnées locales adaptées aux feuilletages définis par α et β. Soit f_0 un élément inversible de Φ, représenté par (y_0, x_0) dans un système de coordonnées locales; f_0^{-1} sera représenté par (y_0', x_0') dans un autre système de coordonnées locales; $x_0' = \beta(f_0)$. Il existe un voisinage U de f_0 et un voisinage U_1 de f_0^{-1} tel que l'application

$(g,f) \to gf$ soit définie par :

$$(y', y, x) \to (\varphi(y', y, x), x),$$

si $f \in U$ de coordonnées (y,x) et $g \in U_1$ de coordonnées (y',x'), $x' = \beta(f)$. L'application $y' \to \varphi(y', y_0, x_0)$ est un homéomorphisme $\varphi(f_0)$ d'un ouvert W de R^n sur un ouvert W' de R^n qui applique y'_0 sur $\varphi(y'_0, y_0, x_0) = 0$. Soit $\varphi(f)$ l'application $y' \to \varphi(y', y, x)$ que nous pouvons supposer définie sur W. Soit B^0_n une boule de centre 0 dans R^n; soit B_n la boule topologique appliquée par $\varphi(f_0)$ sur B^0_n. Dans U, il existe un voisinage V de f_0 tel que pour $f \in V$ l'image par $\varphi(f)$ du bord de la boule B_n ne contienne pas 0, à cause de la convergence uniforme de φ sur un compact de l'espace des triplets (y', y, x). De l'invariance du degré topologique par déformation, il résulte qu'il existe dans B_n un point y' qui est appliqué par $\varphi(f)$ sur 0. Soit f' l'élément de Φ de coordonnées (y',x') où $x' = \beta(f)$. On a $f'f = \alpha(f) = x$. On démontre de même qu'il existe un voisinage V_1 de f_0 tel qu'à tout $f \in V_1$ corresponde un f'' vérifiant la condition $ff'' = \beta(f)$. Pour tout $f \in V \cap V_1$ on a donc deux éléments f' et f'' tels que $f'f = \alpha(f)$ et $ff'' = \beta(f)$. Il en résulte :

$$(f'f)f'' = f'(ff'') = f' = f''.$$

Donc f' est l'élément inverse unique f^{-1} de f. L'application $f \to f^{-1}$ est continue, car on peut choisir le voisinage V de f_0 tel que f^{-1} correspondant à $f \in V$ appartienne à un voisinage donné de f_0^{-1} représenté par $B_n \times U(x'_0)$, où $U(x'_0)$ est un voisinage de $x'_0 = \beta(f_0)$ dans Δ. Ceci achève la démonstration du théorème 2.

En particulier, soit Φ une catégorie topologique ayant une seule unité e, la structure topologique de Φ étant celle d'une variété topologique. L'ensemble des éléments inversibles de Φ forme alors un groupe topologique G ouvert dans Φ. Si la catégorie Φ est de plus différentiable, G est un groupe de Lie. Inversement on est conduit au problème de complétion d'un groupe topologique ou d'un groupe de Lie G, c'est-à-dire au problème de construire les catégories topologiques ou différentiables dont les éléments inversibles forment G.

Espace fibré sur une catégorie topologique :

Définition 3. *Etant données une catégorie topologique Φ et* *une classe $\mathfrak{S}_0$ munie d'une structure topologique, Φ est appelée catégorie d'opérateurs topologique sur $\mathfrak{S}_0$ lorsqu'on a donné une loi de composition $(f,z) \to fz, f \in \Phi, z \in \mathfrak{S}_0$ — définissant Φ comme catégorie d'opérateurs à gauche ou à droite sur $\mathfrak{S}_0$ et vérifiant de plus les conditions suivantes :*

1) *Si $p(z)$ désigne l'unité de Φ composable avec z, l'application p de $\mathfrak{S}_0$ sur Δ, classe des unités de Φ, est continue.*

2) *L'application $(f,z) \to fz$ est continue sur la sous-classe de $\Phi \times \mathfrak{S}_0$ formée par les couples (f,z) composables.*

Φ sera appelée catégorie d'opérateurs différentiable de classe r sur $\mathfrak{S}_0$, si Φ est une catégorie d'opérateurs topologique sur $\mathfrak{S}_0$ vérifiant encore les conditions suivantes : Φ est une catégorie différentiable de classe r ; $\mathfrak{S}_0$ est munie d'une structure de variété différentiable de classe r; p est différentiable de classe r; le rang de p au point $z \in \mathfrak{S}_0$ est égal à la dimension de Δ au point $p(z)$; la loi de composition $(f,z) \to fz$ est différentiable de classe r sur la sous-variété de $\Phi \times \mathfrak{S}_0$ formée par les couples composables (f,z).

Une classe $\mathfrak{S}_0$ munie d'une catégorie d'opérateurs topologique peut aussi être appelée [3] *espace fibré sur Φ*. Si Φ est une catégorie régulière ou différentiable de classe r, $\mathfrak{S}_0$ est aussi un espace fibré sur le groupoïde topologique Π des éléments inversibles de Φ.

Les couples composables (f,z), $f \in \Phi$, $z \in \mathfrak{S}_0$, forment une catégorie topologique $\mathfrak{S}$ dont la classe des unités peut s'identifier avec $\mathfrak{S}_0$, en identifiant $(p(z),z)$ avec z. Si Φ est un groupoïde topologique, $\mathfrak{S}$ est aussi un groupoïde topologique.

D'après la terminologie proposée dans [1], une classe $\mathfrak{S}_0$ munie d'un groupoïde d'opérateurs Π est appelée espèce de structures sur Π. Si $\mathfrak{S}_0$ est muni d'une catégorie d'opérateurs Φ, c'est une espèce de structures sur le sous-groupoïde Π des éléments inversibles de Φ. On pourra aussi dire que $\mathfrak{S}_0$ est une espèce de structures sur Φ admettant $\mathfrak{S}$ comme catégorie d'homomorphismes; le groupoïde des isomorphismes est composé alors des couples $(f,z) \in \mathfrak{S}$, où $f \in \Pi$. Si Φ opère à gauche (resp. à droite) sur $\mathfrak{S}_0$, on peut dire que $\mathfrak{S}_0$ est une espèce de structures covariante (resp. contravariante) sur Φ. Un élément z de $\mathfrak{S}_0$ est appelé une structure sur l'unité $p(z)$ de Φ, ou bien sur l'objet correspondant, lorsqu'on s'est donné une classe d'objets correspondant d'une façon biunivoque à la classe des unités. Dans le cas covariant, le couple (f,z) est composable si $\alpha(f) = p(z)$ et l'on a $p(fz) = \beta(f)$. Dans le cas contravariant, le couple (f,z) est composable si $\beta(f) = p(z)$

et l'on a $p(fz) = \alpha(f)$. Un couple composable (f, z) est un homomorphisme de z vers fz. Pour la définition générale d'une catégorie d'homomorphismes, voir [1].

Catégories topologiques triviales ou localement triviales :

Soit Φ une catégorie dont le groupoïde Π des éléments inversibles est transitif, c'est-à-dire opère transitivement dans la classe Δ de ses unités. Soit Φ_e la sous-catégorie formée par les f tels que $\alpha(f) = \beta(f) = e$. Pour chaque unité $x \in \Delta$ soit l_x un élément de Π tel que $\alpha(l_x) = e$, $\beta(l_x) = x$. La classe des éléments l_x et des éléments de Φ_e forme un système de générateurs de Φ : tout élément f de Φ est de la forme $l_{x'}\, y l_x^{-1}$, où $y \in \Phi_e$. *L'application* $(x', x, y) \to l_{x'}\, y l^{-1}$ *est un foncteur biunivoque, c'est-à-dire une équivalence, de la catégorie* $\Delta \times \Delta \times \Phi_e$ *sur* Φ, la multiplication dans $\Delta \times \Delta \times \Phi_e$ étant définie par :

(1) $$(x'', x', y')\,(x', x, y) = (x'', x, y'y).$$

Du point de vue algébrique *la structure d'une catégorie* Φ *dont le groupoïde* Π *des éléments inversibles est transitif est donc déterminée par* Φ_e *et* Δ.

Si Π n'est pas transitif, soit Δ_i une classe d'intransitivité quelconque de Δ relativement à Π et soit e_i un élément choisi dans Δ_i. Pour toute unité x soit l_x un élément de Π tel que $\alpha(x) = e_i$, $\beta(x) = x$, en supposant $x \in \Delta_i$. Soit Φ_{e_j, e_i} la classe des éléments f de Φ tels que $\alpha(f) = e_i$, $\beta(f) = e_j$. Tout $f \in \Phi$ se met d'une manière unique sous la forme $l_{x'}\, y l_x^{-1}$, où $x = \alpha(f) \in \Delta_i$, $x' = \beta(f) \in \Delta_j$, $y \in \Phi_{e_j, e_i}$. Soit Φ^0 la sous-catégorie pleine de Φ ayant pour unités les éléments e_i. L'application $l_{x'}\, y l_x^{-1} \to (x', x, y)$ est un foncteur biunivoque de Φ sur la sous-catégorie A de $\Delta \times \Delta \times \Phi^0$ formée par les triplets (x', x, y) tels que $x \in \Delta_i$, $x' \in \Delta_j$, $y \in \Phi_{e_j, e_i}$. Posons $A_{ji} = \Delta_j \times \Delta_i \times \Phi_{e_j, e_i}$; alors $A = \sum_{(j,i)} A_{ji}$.

La multiplication dans $\Delta \times \Delta \times \Phi^0$ est encore définie par (1).

Un groupoïde topologique Π est dit *localement transitif* si les classes d'intransitivité Δ_i sont des ouverts dans Δ. Soit Φ une catégorie topologique dont le groupoïde Π des éléments inversibles est un groupoïde topologique localement transitif. S'il existe un relèvement continu σ de Δ dans Π tel que : $\alpha\sigma(x) = e_i$, $\beta\sigma(x) = x$, $x \in \Delta_i$, le foncteur biunivoque $\sigma(x')y\sigma(x)^{-1} \to (x',x,y)$ est un homéomorphisme; il définit une équivalence topologique de Φ sur A. On dira que *la catégorie topologique Φ est triviale.* Φ^0 est une catégorie topologique dont les unités sont isolées et invariantes par rapport au groupoïde Π^0 des éléments inversibles de Φ^0; c'est-à-dire Π^0 est la réunion des groupes Π_{e_i}. Si $\Phi_{j,i}$ désigne la classe des $f \in \Phi$ tels que $\alpha(f) \in \Delta_i$, $\beta(f) \in \Delta_j$, Φ_{ji} est homéomorphe à $\Delta_j \times \Delta_i \times \Phi_{e_j, e_i}$.

Un groupoïde topologique Π sera dit localement trivial lorsque pour tout $x_0 \in \Delta$ il existe un relèvement continu σ d'un voisinage ouvert $U(x_0)$ dans Π tel que $\alpha\sigma(x) = x_0$, $\beta\sigma(x) = x$, $x \in U(x_0)$. Les classes d'intransitivité Δ_i de Δ sont alors des ouverts dans Δ. Si $x_0 \in \Delta_i$, il existe alors aussi un relèvement continu ϱ de $U(x_0)$ dans Π tel que $\alpha\varrho(x) = e_i$, $\beta\varrho(x) = x$, $x \in U(x_0)$. En effet, soit $l_0 \in \Pi$ tel que $\alpha(l_0) = e_i$, $\beta(l_0) = x_0$. Le relèvement ϱ défini par $\varrho(x) = \sigma(x)l_0$ possède la propriété voulue. Etant donnés deux relèvements continus ϱ_λ et ϱ_μ d'un ouvert U de Δ dans Π vérifiant les conditions $\alpha\varrho_\lambda(x) = \alpha\varrho_\mu(x) = e_i$, $\beta\varrho_\lambda(x) = \beta\varrho_\mu(x) = x$, $x \in U$, on a : $\varrho_\mu(x) = \varrho_\lambda(x)s^{\mu\lambda}(x)$, où $s^{\mu\lambda}$ est une application continue de U dans le groupe topologique Π_{e_i}.

Soit $\mathfrak{E}_0$ un espace fibré sur un groupoïde topologique transitif et localement trivial Π. Si p désigne la projection de $\mathfrak{E}_0$ sur Δ, soit $F = p^{-1}(e)$. Nous avons la famille des cartes locales suivantes de $\Delta \times F$ dans $\mathfrak{E}_0$: $(x,y) \to \varrho(x)y$, $x \in U$ (ouvert dans Δ), $y \in F$, ϱ un relèvement continu de U dans Π tel que $\alpha\varrho(x) = e$, $\beta\varrho(x) = x$. Cette famille de cartes locales est un atlas de $\Delta \times F$ sur $\mathfrak{E}_0$ compatible avec le pseudo-groupe d'automorphismes locaux de $\Delta \times F$ engendré par les transformations : $(x,y) \to (x,s(x)y)$, où s est une application continue de U dans Π_e. *Donc $\mathfrak{E}_0$ est un espace fibré localement trivial de base Δ, de fibres isomorphes à F, de groupe structural* (*) *topologique Π_e.* Dans le cas où Π est un *groupoïde d'opérateurs différentiable* de classe r sur $\mathfrak{E}_0$, on a sur $\mathfrak{E}_0$ une *structure fibrée différentiable de classe* r, de base Δ, de fibres isomorphes à F, de groupe structural Π_e, qui est alors un groupe de Lie. Il suffit de prendre les cartes locales correspondant aux relèvements ϱ différentiables de classe r.

(*) Ici le groupe structural Π_e est un *groupe structural d'opérateurs* sur F; le groupe structural considéré habituellement est le *groupe de transformations* correspondant de F.

Etant donné un espace topologique F admettant Π_e comme groupe d'opérateurs topologique, on construit un espace fibré $\mathfrak{S}_0$ *bien déterminé sur le groupoïde transitif et localement trivial* Π *par le procédé d'élargissement d'une espèce de structures* (voir [1], page 57). Un élément de $\mathfrak{S}_0$ sera une classe de couples $(h, y)\Pi_e$, $h \in \Pi$, $\alpha(h) = e$, $y \in F$, le composé $(h, y)s$ étant $(hs, s^{-1}y)$ pour $s \in \Pi_e$. Les cartes $(x, y) \to (\varrho(x), y)\Pi_e$ définissent alors sur $\mathfrak{S}_0$ une structure fibrée localement triviale sur Π, c'est-à-dire de base Δ, de fibres isomorphes à Π et de groupe structural Π_e.

Une catégorie topologique Φ *dont le groupoïde* Π *des éléments inversibles est un groupoïde topologique localement trivial est dite localement triviale.* Considérons les cartes locales de $\Delta \times \Delta \times \Phi^0$ dans Φ de la forme : $(x', x, y) \to \varrho'(x')y\,\varrho(x)^{-1}$, $x \in U$, $x' \in U'$, U ouvert dans Δ_i, U' ouvert dans Δ_j, $y \in \Phi_{e_j, e_i}$, la catégorie Φ^0 étant comme plus haut la réunion des Φ_{e_j, e_i}, ϱ un relèvement continu de U dans Π, ϱ' un relèvement continu de U' dans Π, $\alpha\varrho(x) = e_i$, $\beta\varrho(x) = x$, $\alpha\varrho'(x') = e_j$, $\beta\varrho'(x') = x'$. La source d'une telle carte est $U' \times U \times \Phi_{e_j, e_i}$. Les changements de cartes sont de la forme $(x', x, y) \to (x', x, s'(x')ys(x)^{-1})$, où s est une application continue de U dans Π_{e_i}, s' une application continue de U' dans Π_{e_j}. Ceci montre que $\Phi_{j,i}$ *est un espace fibré localement trivial de base* $\Delta_i \times \Delta_j$, *de fibres isomorphe à* Φ_{e_j, e_i} *et de groupe structural* $\Pi_{e_i} \times \Pi_{e_j}$. D'ailleurs $\Phi_{j,i}$ admet $\Pi_i \times \Pi_j$ comme groupoïde d'opérateurs topologique, où Π_i est le sous-groupoïde de Π formé par les éléments f tels que $\alpha(f) \in \Delta_i$ (et par suite $\beta(f) \in \Delta_i$); la loi de composition est :

$$(f, g, z) \to gzf^{-1},\ z \in \Phi_{j,i},\ f \in \Pi_i,\ g \in \Pi_j.$$

Soit $\Phi_{x,i}$ (resp. $\Phi_{j,x}$) la classe des $z \in \Phi$ tels que $\alpha(z) \in \Delta_i$, $\beta(z) = x$ (resp. $\alpha(z) = x$, $\beta(z) \in \Delta_j$). Π_j opère sur la classe des classes $\Phi_{x,i}$ telles que $x \in \Delta_j$; Π_i opère sur la classe des classes $\Phi_{j,x}$ telles que $x \in \Delta_i$. Le transformé de $\Phi_{x,i}$ par $g \in \Pi_j$ est $g\Phi_{x,i}$, où $\alpha(g) = x$; le transformé de $\Phi_{j,x}$ par $f \in \Pi_i$ est $\Phi_{j,x}f^{-1}$ où $\alpha(f) = x$. *Il en résulte que* $\Phi_{j,i}$ *est aussi un espace fibré localement trivial sur* Π_i *(resp. sur* Π_j*), de base* Δ_i *(resp.* Δ_j*), de fibres isomorphes à* Φ_{j,e_i} *(resp.*$\Phi_{e_j,i}$*), de groupe structural* Π_{e_i} *(resp.* Π_{e_j}*).* En particulier, si Π est transitif, Φ ou Π sont des espaces fibrés sur Π, la projection correspondante sur la base Δ étant soit α, soit β.

APPLICATIONS COVARIANTES :

Etant donnés deux espaces fibrés $\mathfrak{E}_0$ et $\mathfrak{E}'_0$ sur Π localement trivial, considérons une *application covariante* φ de $\mathfrak{E}_0$ dans $\mathfrak{E}'_0$ qui soit continue; rappelons [1] que $\varphi(fz) = f\varphi(z)$, si $z \in \mathfrak{E}_0$, $f \in \Pi$ tels que fz soit défini. Si Π est de plus transitif, l'application covariante φ est déjà complètement déterminée par sa restriction φ_e de F dans F', fibre de $\mathfrak{E}'_0$ sur e. *Toute application continue φ_e de F dans F' permutable avec Π_e détermine une application covariante continue φ de $\mathfrak{E}_0$ dans $\mathfrak{E}'_0$*, en posant $\varphi(hy) = h\varphi_e(y)$, $h \in \Pi$, $\alpha(h) = e$.

Plus généralement, si $\mathfrak{E}_0$ est un espace fibré sur Π et $\mathfrak{E}'_0$ un espace fibré sur un groupoïde topologique localement trivial Π', soit ψ un foncteur continu de Π dans Π'. *Une application covariante continue relativement à* ψ de $\mathfrak{E}_0$ dans $\mathfrak{E}'_0$ est une application continue φ de $\mathfrak{E}_0$ dans $\mathfrak{E}'_0$ telle que $\varphi(fz) = \psi(f)\,\varphi(z)$. On définit de même les applications covariantes de classe r. *Si Π est transitif, φ est encore complètement déterminée par sa restriction φ_e à F.*

Remarquons qu'on définit de même la notion d'application covariante de $\mathfrak{E}_0$ dans $\mathfrak{E}'_0$ lorsque $\mathfrak{E}_0$ et $\mathfrak{E}'_0$ sont des espaces fibrés sur des *catégories* topologiques Φ et Φ'.

CATÉGORIE INDUITE, ESPACE FIBRÉ INDUIT

Soit Φ une catégorie, Δ la classe de ses unités, q une application d'une classe B dans Δ. Soit $q^*(\Phi)$ la classe des triplets (u', f, u) $u \in B$, $u' \in B$, $f \in \Phi$ tels que $\alpha(f) = q(u)$, $\beta(f) = q(u')$. *Cette classe $q^*(\Phi)$ est une catégorie pour la multiplication suivante* :

$$(u'', f', u')\,(u', f, u) = (u'', f'f, u).$$

Cette catégorie sera appelée catégorie induite par q. Ses unités sont les triplets (u, e, u), où $e = q(u)$. Elles correspondent d'une façon biunivoque aux éléments u de B qui forme ainsi une classe d'objets pour $q^*(\Phi)$. Identifions u avec l'unité correspondante (u, e, u), c'est-à-dire B avec la classe des unités de $q^*(\Phi)$. L'application $\bar{q}$ qui applique (u', f, u) sur f est un foncteur de $q^*(\Phi)$ dans Φ, dont la restriction aux unités est q; l'image de $q^*(\Phi)$ par $\bar{q}$ est la sous-catégorie pleine de Φ correspondant à $q(B)$; la restriction de $\bar{q}$ à la sous-classe de $q^*(\Phi)$ formée par les triplets (u', f, u) tels que

u et u' soient donnés est biunivoque. Si Π est le groupoïde des éléments inversibles de Φ, $q^*(\Pi)$ est le groupoïde des éléments inversibles de $q^*(\Phi)$. Si Π est transitif, $q^*(\Pi)$ est transitif.

Si Π est un groupoïde topologique localement transitif et si q est continu, le groupoïde $q^*(\Pi)$ est localement transitif. Si Φ est une catégorie topologique triviale (resp. localement triviale), q étant encore continu, $q^*(\Phi)$ est une catégorie topologique triviale (resp. localement triviale).

En effet, dans le cas localement trivial, il suffit de construire les relèvements locaux continus de B dans $q^*(\Pi)$ de la façon suivante; soit σ un relèvement continu dans Π d'un voisinage $U(x_0)$ de $x_0 \in \Delta$ tel que $\alpha\sigma(x) = x_0$, $\beta\sigma(x) = x$, $x \in U(x_0)$. Soit $u_0 \in B$ tel que $q(u_0) = x_0$ et soit $V(u_0)$ un voisinage de u_0 tel que $q(V(u_0)) \subset U(x_0)$. L'application $u \to (u, \sigma(q(u)), u_0)$ est alors un relèvement local continu $\bar{\sigma}$ de $V(u_0)$ dans $q^*(\Pi)$ tel que $\alpha\bar{\sigma}(u) = u_0$, $\beta\bar{\sigma}(u) = u$, $u \in V(u_0)$.

Si $\mathfrak{S}_0$ est un espace fibré sur une catégorie (topologique) Φ, on définit *l'espace fibré induit $q^*(\mathfrak{S}_0)$ sur la catégorie induite $q^*(\Phi)$*; c'est la classe des couples (u,z), $u \in B$, $z \in \mathfrak{S}_0$ tels que $q(u) = p(z)$, où p est la projection de $\mathfrak{S}_0$ sur Δ. La catégorie $q^*(\Phi)$ opère sur $q^*(\mathfrak{S}_0)$ suivant la loi de composition :

$$(u', f, u)\,(u, z) = (u', fz).$$

Si Φ est une catégorie localement triviale dont le groupoïde Π des éléments inversibles est transitif, $q^*(\mathfrak{S}_0)$ est un espace fibré localement trivial de base B, de fibres isomorphes à F, de groupe structural topologique Π_e. Si de plus $\mathfrak{S}_0$ est un espace fibré différentiable de classe r sur Φ et si q est différentiable de classe r, $q^*(\Phi)$ est une catégorie différentiable de classe r et $q^*(\mathfrak{S}_0)$ est un espace fibré différentiable de classe r.

Si ψ est un foncteur d'une catégorie Φ dans une catégorie Φ', soit ψ_0 la restriction de ψ à la classe Δ des unités de Φ. Alors ψ admet la *décomposition canonique* $\psi = \bar{\psi}_0\psi'$, où ψ' est le foncteur de Φ dans $\psi_0^*(\Phi')$ qui applique $f \in \Phi$ sur $(\beta(f), \psi(f), \alpha(f))$ et $\bar{\psi}_0$ le foncteur défini ci-dessus qui applique $(\beta(f), \psi(f), \alpha(f))$ sur $\psi(f)$.

Si $\mathfrak{S}_0$ est un espace fibré sur Φ, $\mathfrak{S}_0'$ un espace fibré sur Φ' φ une application covariante de $\mathfrak{S}_0$ sur $\mathfrak{S}_0'$ relativement à ψ, il y a de même une *décomposition canonique* $\varphi = \varphi_2\varphi_1$ où φ_1 est une application covariante de $\mathfrak{S}_0$ dans $\psi_0^*(\mathfrak{S}_0')$ et φ_2 une application covariante de $\psi_0^*(\mathfrak{S}_0')$ dans $\mathfrak{S}_0'$ relativement à $\bar{\psi}_0$.

Soit Π un groupoïde transitif et localement trivial. Soit H la classe des $h \in \Pi$ tels que $\alpha(h) = e$, où e est un élément fixe de Δ. Comme Π opère sur H, $(f,h) \to fh$, H est un espace fibré sur Π, c'est-à-dire de base Δ, de fibres isomorphes à Π_e, de groupe structural Π_e opérant sur Π_e comme groupe des translations à gauche. *H est appelé espace fibré principal sur Π; les autres espaces fibrés sur Π sont les espaces fibrés associés à H.*

Soit G un sous-groupe de Π_e. Soit H/G la classe des classes hG. Π opère sur H/G, le transformé de hG par $f \in \Pi$ est $(fh)G$, si fh est défini. *Donc H/G est un espace fibré sur Π, de fibres isomorphes à l'espace homogène Π_e/G, de groupe structural Π_e opérant sur cet espace homogène.*

Soit Π_G le groupoïde correspondant des couples composables (f,hG); la classe de ses unités est identifiée avec H/G. Ce groupoïde opère sur H de la façon suivante : le transformé de $h \in H$ par (f,hG) est fh. On voit que *H est un espace fibré principal sur Π_G, de base H/G de fibres isomorphes à G, de groupe structural G opérant à gauche sur G.* On démontre la proposition : *Pour que Π_G soit un groupoïde localement trivial, il faut et il suffit que Π_e soit un espace fibré localement trivial sur Π_e/G, ayant pour fibres les classes sG, $s \in \Pi_e$,* condition équivalente à l'existence d'un relèvement continu dans Π_e d'un voisinage de G dans Π_e/G.

Soit Π' un sous-groupoïde de Π et supposons que Π' soit encore transitif sur Δ et $\Pi'_e = G$. Soit H' l'espace fibré principal sur Π' formé par les éléments $h' \in \Pi'$ tels que $\alpha(h') = e$. H' est réunion des classes $h'G$, $h' \in H'$. Soit σ l'application de Δ dans H/G qui fait correspondre à $x \in \Delta$ la classe h'_xG, où $h'_x \in H'$, $\beta(h'_x) = x$. *Si H' est localement trivial* (et par suite aussi Π'), il existe au voisinage de $x_0 \in \Delta$ un relèvement continu $x \to h'_x$ et par suite *l'application σ sera continue*, c'est-à-dire définit un relèvement continu de Δ dans H/G. H' s'identifie naturellement à l'espace fibré induit $\sigma^*(H)$, où H est considéré comme espace fibré sur H/G. On a de même $\Pi' = \sigma^*(\Pi_G)$.

Réciproquement, si Π_e est un espace fibré localement trivial sur Π_e/G, à tout relèvement continu σ de Δ dans H/G correspond l'espace fibré $\sigma^*(H)$ qui s'identifie à un sous-espace fibré H' de H et H' est un espace fibré principal à groupe structural G. De plus $\sigma^*(\Pi_G)$ s'identifie avec un sous-groupoïde Π' de Π vérifiant les conditions : Π' est transitif dans Δ et localement trivial. *Le problème de la restriction du groupe structural des espaces fibrés* [2] *est donc équivalent au problème de la recherche des sous-groupoïdes localement triviaux de Π qui soient transitifs dans Δ. A deux relèvements homotopes de Δ dans H/G correspondent deux sous-groupoïdes topologiques isomorphes.*

Soient Φ une catégorie topologique localement triviale, Π le groupoïde des éléments inversibles, Π_i le groupoïde des éléments inversibles dont les unités forment la classe d'intransitivité Δ_i de Δ, Φ^0 la sous-catégorie pleine de Φ ayant pour unités les éléments e_i, où e_i est un élément déterminé choisi dans Δ_i. Soit Φ' une sous-catégorie topologique localement triviale telle que Δ_i soit encore classe d'intransitivité de Δ relativement à Π', groupoïde des éléments inversibles de Φ'. Soit Φ'^0 la sous-catégorie $\Phi' \cap \Phi^0$. Le groupoïde Π^0 (resp. Π'^0) des éléments inversibles de Φ^0 (resp. Φ'^0) est la réunion des groupes Π_{e_i} (resp. Π'_{e_i}). Π'_i est un sous-groupoïde localement trivial de Π_i dont la trace sur Π_{e_i} est Π'_{e_i}. Il correspond à un relèvement continu de Δ_i dans H_i/Π_{e_i}, où H_i est la classe des $h \in \Pi$ tels que $\alpha(h) = e_i$. La sous-catégorie Φ' est alors complétement déterminée par la donnée de Φ'^0 et des sous-groupoïdes Π'_i. Tout élément f de Φ' se met sous la forme $h_j y h_i^{-1}$, où $h_i \in \Pi'$, $y \in \Phi'^0$, $\alpha(h_i) = \alpha(y) = e_i$, $\alpha(h_j) = \beta(y) = e_j$. *Pour déterminer une sous-catégorie Φ' du type considéré il suffit de se donner arbitrairement une sous-catégorie Φ'^0 de Φ^0 ayant les mêmes unités que Φ^0 et, pour chaque i, un sous-groupoïde Π'_i de Π_i induit par un relèvement continu σ_i de Δ_i dans H_i/Π'_{e_i}, $\Pi'_{e_i} = \Phi'^0 \cap \Pi_{e_i}$.*

Etant donnée une catégorie $\bar{\Phi}^0$ contenant Φ^0 comme sous-catégorie avec les mêmes unités e_i, on peut toujours définir une catégorie $\bar{\Phi}$, appelée élargissement de Φ, admettant Φ comme sous-catégorie ayant les mêmes unités et telle que $\bar{\Phi}^0$ soit la sous-catégorie pleine de $\bar{\Phi}$ correspondant aux unités e_i. Si Φ est localement trivial, il en est de même pour $\bar{\Phi}$. Soit Π'' la classe des couples (f',f), $f \in \Pi_i$, $f' \in \Pi_j$ tels qu'il existe $y \in \bar{\Phi}^0$ où $\alpha(y) = e_i$, $\beta(y) = e_j$. Soit Π''_0 la classe des couples (s',s), $s' \in \Pi_{e_j}$, $s \in \Pi_{e_i}$ Π''_0 opère sur $\bar{\Phi}^0$ de la manière suivante : le transformé de y par (s',s) est $s'ys^{-1}$. Comme Π''_0 est sous-groupoïde de Π'', le procédé d'élargissement d'une espèce de structures fournit une classe $\bar{\Phi}$ admettant Π'' comme groupoïde d'opérateurs. Un élément de $\bar{\Phi}$ est une classe de triplets (f', y, f), $f \in \Pi$, $f' \in \Pi$, $y \in \bar{\Phi}^0$,

$\alpha(f) = \alpha(y) = e_i$, $\alpha(f') = \beta(y) = e_j$, par la relation d'équivalence $(f', y, f) \sim (f's', s'^{-1} ys, fs)$, où $s' \in \Pi_{e_j}$, $s \in \Pi_{e_i}$. La multiplication dans $\bar{\Phi}$ se déduit par passage au quotient de la multiplication des triplets : $(f'', y, f')(f', y, f) = (f'', y' y, f)$. La catégorie Φ s'identifie à une sous-catégorie de $\bar{\Phi}$, en identifiant avec $f' y f^{-1}$ l'élément de $\bar{\Phi}$ déterminé par (f', y, f), où $y \in \Phi^0$. Il s'agit ici du procédé d'élargissement d'une catégorie de morphismes (voir [1], page 59).

Soient Φ et Φ' deux catégories topologiques localement triviales et φ un foncteur continu de Φ dans Φ'. Supposons le groupoïde correspondant Π transitif dans Δ. Soit φ^0 la restriction de φ à Φ^0, sous-catégorie complète de Φ ayant pour unité $e \in \Delta$. La restriction de φ^0 à Π_e est une représentation continue de Π_e dans Π_e', où $e' = \varphi(e)$. Soit H la classe des éléments h de Π tels que $\alpha(h) = e, H'$ la classe des éléments h' de Π' tels que $\alpha(h') = e'$. La restriction de φ à H est une représentation continue de H dans H' telle que $\varphi(hs) = \varphi(h)\varphi^0(s)$, où $s \in \Pi_e$. Dans $H \times H'$ considérons la relation d'équivalence ϱ définie par $(h, h') \sim (hs, h'\varphi^0(s))$ mod ϱ et soit M la classe quotient. M est un espace fibré associé à H, de base Δ, de fibres isomorphes à H', le transformé de (h, h') mod ϱ par $\theta \in \Pi$ étant $(\theta h, h')$ mod ϱ. Le foncteur φ définit une application continue de H dans $H \times H' : h \to (h, \varphi(h))$. Cette application est compatible avec les deux relations d'équivalence ϱ et ϱ_1, où ϱ_1 est défini par $h \sim hs$ (mod ϱ_1). Par passage aux quotients on obtient une application continue σ de Δ dans M, qui est un relèvement continu de Δ dans l'espace fibré M. *Réciproquement soit σ un relèvement continu de Δ dans M, et soit φ^0 un foncteur continu de Φ^0 dans Φ', où $\varphi^0(e) = e'$.* On en déduit une application φ de H dans H' telle que $\sigma(\beta(h)) = (h, \varphi(h))$ mod ϱ. En prenant un système de coordonnées locales admissibles dans M, correspondant à un relèvement local continu de Δ dans H, on voit que φ est continu. *On en déduit un foncteur continu, désigné encore par φ, de Φ dans Φ', défini par :*

$$\varphi(h_1 y h^{-1}) = \varphi(h_1)\varphi^0(y)\varphi(h)^{-1}, \quad \text{où} \quad h, h_1 \in H, \ y \in \Phi^0.$$

Si Φ, Φ', σ, φ^0 sont différentiables de classe r, le foncteur φ est de plus différentiable de classe r.

Comme précédemment, on étend facilement ce résultat au cas où Π n'est plus transitif dans Δ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gattungen von Lokalen Strukturen (Jahresbericht der Deutschen Math.-Vereinigung, 60, 1957, p. 49-77).

[2] Sur la théorie des espaces fibrés (Colloque Int. Topologie algébrique, C.N.R.S., Paris, 1947).

[3] Les prolongements d'un espace fibré différentiable (Comptes rendus Acad. Sciences, Paris, 240, 1955, p. 1755).

N.d.E. Cet article a paru dans "Colloque de Géométrie Différentielle Globale", Bruxelles 1959, CBRM. Le texte avait été imprimé sans tenir compte des corrections d'épreuves ; nous avons effectué ici ces corrections, à l'exception de la suivante :

Page 149, remplacer les lignes -11 et -10 par: continu de Φ^0 dans Φ', tels que

$$\sigma(e) = (e, e') \bmod \rho\ , \quad \varphi^0(e) = e'.$$

On en déduit une application φ de H dans H' telle que

$$\sigma(\beta(h)) = (h, \varphi(h)) \bmod \rho, \text{ et } \varphi(s) = \varphi^0(s) \quad \text{pour } s \in \Pi^0.$$

En prenant...

CAHIERS DE TOPOLOGIE *IX*

ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Septembre 1966

/101/

PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DES CATÉGORIES DIFFÉRENTIABLES

par Charles EHRESMANN

Le texte suivant est extrait d'une conférence donnée à la «Tagung über Differentialgeometrie» de Berlin (12-17 Septembre 1966). La conférence débutait par un rappel sur les catégories structurées (à l'aide de la méthode des «Esquisses» [6]), sur le prolongement local d'une catégorie topologique [1] et sur les catégories différentiables. Nous ne publions ici que les résultats de cette conférence ne figurant pas déjà dans l'article [2] supposé connu.

NOTATIONS. Toutes les variétés r-différentiables considérées sont supposées banachiques. Soit $\tilde{\mathcal{C}}^r$ la catégorie des applications r-différentiables relative à l'univers $\mathfrak{M}_o$ et soit δ^r son foncteur projection canonique vers la catégorie pleine d'applications $\mathfrak{M}$ associée à $\mathfrak{M}_o$. Soit $S(\tilde{\mathcal{C}}^r)$ la sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ formée des submersions. Si A est une r-variété, nous désignons par $\hat{A}$ la classe de tous les r-germes de A, par $\hat{x}$ le r-germe de A en $x \in \delta^r(A)$, par $T(A)$ l'espace des vecteurs tangents à A; désignons par A/U la sous-variété de A définie par $U \subset \delta^r(A)$. Nous notons k un entier inférieur à r.

Soient $(J^{k,r}, A^{k,r})$ et $(\tilde{J}^{k,r}, \tilde{A}^{k,r})$ respectivement les catégories $(r-k)$-différentiables des k-jets et des k-jets non holonomes relatives à $\tilde{\mathcal{C}}^r$ [2], et α^r et β^r leurs applications source et but. Si X est un k-jet d'une application constante et si $\beta^r(X) = \hat{x}$, on posera $X = \bar{x}$ sans préciser la source de X, qui résultera du contexte.

Nous désignerons par $(C^\bullet, A)$ une catégorie r-différentiable, par $\mathcal{T}(A)$ la topologie sous-jacente à A, par

$$a = (A_o, \alpha, A), \quad b = (A_o, \beta, A) \quad \text{et} \quad K = (A, \kappa, A * A)$$

les applications r-différentiables définies par les applications source, but et loi de composition de $C^{\bullet}$.

1. Espèces de structures r-différentiables.

Soit p un foncteur fidèle d'une catégorie $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{M}$ et soit $\mathcal{H}'$ une sous-catégorie de $\mathcal{H}$. On appelle *espèce de structures $p(\mathcal{H}')$-structurée* [3] un triplet $\eta = ((C^{\bullet}, s), s', \kappa')$ tel que :

1) $(C^{\bullet}, s)$ est une catégorie $p((\mathcal{H}', \mathcal{H}'), \mathcal{H})$-structurée et $s' \in \mathcal{H}_0$;

2) $\underline{\eta} = (C^{\bullet}, E, \kappa')$ est une espèce de structures [0], où $E = p(s')$; soit q la projection canonique de E dans $C^{\bullet}_0$;

3) Il existe $\bar{q} \in s_0 . \mathcal{H}' . s'$, un produit fibré $s * s'$ de $(a, \bar{q})$ dans p (chap. IV [0]) et un $K' \in s' . \mathcal{H} . s * s'$ tels que $p(K') = \kappa'$, où $a \in s_0 . \mathcal{H} . s$ et $p(a) = (C^{\bullet}_0, \alpha, C)$. (Il en résulte $p(\bar{q}) = q$.)

On appelle *application covariante $p(\mathcal{H}')$-structurée* un quadruplet $(\eta_2, \Phi, \varphi, \eta_1)$ tel que [3] :

1) $\eta_i = ((C^{\bullet}_i, s_i), s'_i, \kappa'_i)$ est une espèce de structures $p(\mathcal{H}')$-structurée, pour $i = 1$ et 2.

2) $\Phi = ((C^{\bullet}_2, s_2), \underline{\Phi}, (C^{\bullet}_1, s_1))$ est un foncteur p-structuré;

3) $\varphi \in s'_2 . \mathcal{H} . s'_1$ et $(\underline{\eta}_2, (C^{\bullet}_2, \underline{\Phi}, C^{\bullet}_1), p(\varphi), \underline{\eta}_1)$ est une application covariante (Chap. II [0]).

Une espèce de structures $\delta^r(S(\tilde{\mathcal{C}}^r))$-structurée est appelée *espèce de structures r-différentiable*, une application covariante $\delta^r(S(\tilde{\mathcal{C}}^r))$-structurée, *application covariante r-différentiable* [2].

Soit $(\eta_2, \Phi, \varphi, \eta_1)$ une application covariante r-différentiable. Supposons que Φ soit une restriction du foncteur r-différentiable canonique [2] $j^{k', k}$ de $(J^{k, r+k}, A^{k, r+k})$ vers la catégorie r-différentiable sous-jacente à $(J^{k', r+k}, A^{k', r+k})$, où $k' < k$. Une structure z de $\underline{\eta}_1$ est appelée élément infinitésimal (ou objet géométrique) d'ordre k et $\varphi(z)$ est dit φ-covariant différentiel de z (voir [4]).

2. Catégories prolongées.

Soit $(C^{\bullet}, \tau(A))$ la catégorie topologique sous-jacente à $(C^{\bullet}, A)$. Nous désignons par $S(C^{\bullet}, \tau(A))$ la catégorie de ses sections locales [1], par $J^{\lambda}(C^{\bullet}, \tau(A))$ son prolongement local [1]. Soit $S^r(C^{\bullet}, A)$

la sous-catégorie de $S(C^{\cdot}, \mathcal{T}(A))$ formée des sections r-différentiables (i. e. des sections locales (u', s, u) telles que $(A, s, A_0/u)$ soit r-différentiable) et $J^{\lambda, r}(C^{\cdot}, A)$ la sous-catégorie de $J^{\lambda}(C^{\cdot}, \mathcal{T}(A))$ correspondante. Soit $(C^{k\bullet}, A^k)$ la catégorie $(r-k)$-différentiable prolongement d'ordre k de $(C^{\cdot}, A)$ [2].

THÉORÈME. *$C^{k\bullet}$ est isomorphe à la catégorie quotient de $J^{\lambda, r}(C^{\cdot}, A)$ par la relation d'équivalence :*

$$j_x^{\lambda} s \sim j_x^{\lambda} s' \quad \textit{si, et seulement si,} \quad j_x^k s = j_x^k s'.$$

THÉORÈME. *$((\hat{A}.J^{k,r})^o, A^{k,r}/\hat{A}.J^{k,r})$ est une catégorie $(r-k)$-différentiable J_A^k, la loi de composition étant :*

$$(Y, X) \to Y \circ X = K\langle Y, X\rangle$$

$$\textit{si, et seulement si, } \alpha^r(X) = \alpha^r(Y) \quad \textit{et} \quad aY = bX.$$

En effet, comme a et b sont des submersions, il existe un produit fibré naturalisé $((j_y^k a, v'), (j_x^k b, v))$ dans $J^{k,r}$ si $\alpha(y) = \beta(x)$. Si $\alpha^r(X) = \alpha^r(Y)$, $aY = bX$,

$$\beta^r(X) = \hat{x} \quad \text{et} \quad \beta^r(Y) = \hat{y},$$

alors $\langle Y, X\rangle$ est l'unique élément tel que

$$v.\langle Y, X\rangle = X \quad \text{et} \quad v'.\langle Y, X\rangle = Y.$$

La catégorie $(r-k)$-différentiable J_A^k a déjà été considérée dans [2]. Par suite, dans $C^{k\bullet}$, on a $Y \bullet X = (YbX) \circ X$.

Soit $V(A_0)$ la sous-variété de $T(A)$ formée des vecteurs verticaux attachés à A_0, i.e. des $X \in T(A)$ tels que $\beta^r(X) = \hat{e}$ où $e \in C_0^{\cdot}$ et $aX = \overline{e}$.

THÉORÈME. *$((C_{\gamma}^{1\bullet}, A^1/C_{\gamma}^{1\bullet}), V(A_0), \kappa')$ est une espèce de structures $(r-1)$-différentiable pour la loi de composition κ' :*

$$(Z, X) \to (ZbX \circ X) \circ \overline{f^{-1}}, \quad \textit{où} \quad \hat{f} = \beta^r(Z),$$

$$\textit{si, et seulement si,} \quad \beta^r(X) = aZ.$$

Soit $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. On appelle *k-élément purement* *horizontal en* f un $X \in \hat{f}.\tilde{J}^{k,r}.\hat{e}$ tel que $aX = \hat{e}$ et $bX = \overline{e'}$ (en désignant par $\overline{e'}$ le jet constant sur e'). Un k-élément purement horizontal en f de (C^*, A), où C^* est la catégorie duale de $C^\cdot$, est appelé *k-élément purement vertical en f de $(C^\cdot, A)$*. Un k-élément purement vertical de $(C^\cdot, A)$ en $e \in C^\cdot_o$ est [5] *un élément de k-connexion sur $(C^\cdot, A)$*.

Soit V^k la sous-variété de $A^{k,r}$ formée des k-éléments purement verticaux de $(C^\cdot, A)$. Soit C'^k la classe des $Z \in C^k$ tels que bZ soit inversible.

THÉORÈME. *$((C^*, A), V^k, \kappa^*_V)$ est une espèce de structures $(r-k)$-différentiable pour la loi de composition κ^*_V :*

$$(X, g) \to X \circ \overline{g} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \beta^r(aX) = \widehat{\beta(g)}.$$

$((C'^{k\bullet}, A^k/C'^k), V^k, \kappa^V)$ est une espèce de structures $(r-k)$-différentiable pour la loi de composition κ^V :

$$(Z, X) \to (Z \circ X)(bZ)^{-1} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \alpha^r(Z) = \alpha^r(X).$$

De plus $(C'^{k\bullet}, C^\cdot)$ est un couple de catégories d'opérateurs [0] sur $\delta^{r-k}(V^k)$ relativement à (κ^V, κ^*_V).

Soit Q^k la classe des éléments de k-connexion sur $(C^\cdot, A)$.

THÉORÈME. *On a $Q^k \subset (J^k_A)_\gamma$ et $((C^{k\bullet}_\gamma, A^k/C^{k\bullet}_\gamma), A^{k,r}/Q^k, \kappa')$ est une espèce de structures $(r-k)$-différentiable pour la loi de composition κ' définie par:*

$$(Z, X) \to (ZX)z^{-1} = \kappa^*_V(\kappa^V(Z, X), z^{-1})$$

$$\textit{si, et seulement si,} \quad \alpha^r(Z) = \alpha^r(X) \ \textit{et} \ \beta^r(Z) = \hat{z}.$$

On a alors $(ZX)z^{-1} = (Z \circ X \circ \overline{z^{-1}})(bZ)^{-1}$.

3. Germes infinitésimaux de catégorie différentiable.

Si $f \in C$, la classe $\{\beta(f), f, \alpha(f)\}$ admet une base de voisinages dans $\mathcal{T}(A)$ formée de sous-noyaux [1] r-différentiables de $(C^\cdot, A)$. Un tel sous-noyau est entièrement déterminé par la donnée de la restriction K/U de K à une sous-variété ouverte U de $A * A$ contenant

$$[f] = \{(e, e), (e', e'), (f, e), (e', f)\},$$

où $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. Nous appelons *germe local de* $(C^\bullet, A)$ *en* f, noté $j_f^\lambda(C^\bullet, A)$, le jet local [4] $j_{[f]}^\lambda K/U$ de K/U autour de $[f]$. Le k*-germe de* $(C^\bullet, A)$ *en* f sera par définition l'élément

$$j_f^k(C^\bullet, A) = (j_{(e,e)}^k K,\ j_{(e',e')}^k K,\ j_{(f,e)}^k K,\ j_{(e',f)}^k K) \in (J^{k,r})^4.$$

Soit $\mathcal{F}_p(\delta^r)$ la catégorie des foncteurs r-différentiables pointés, dont les éléments sont les triplets $\hat{F}_i = (F_i, (f'_i, f_i))$ tels que

$$f_i \in C_i, \quad f'_i = F_i(f_i) \quad \text{et} \quad F_i = ((\hat{C}_i^\bullet, \hat{A}_i), \underline{F}_i, (C_i^\bullet, A_i))$$

est un foncteur r-différentiable. Il existe une catégorie quotient $J^k\mathcal{F}(\delta^r)$ de la catégorie $\mathcal{F}_p(\delta^r)$ par la relation d'équivalence r_k :

$$\hat{F}_1 \sim \hat{F}_2 \quad \text{si, et seulement si,} \quad f_1 = f_2 = f, \quad f'_1 = f'_2 = f',$$

$$j_f^k(C_1^\bullet, A_1) = j_f^k(C_2^\bullet, A_2), \quad j_{f'}^k(\hat{C}_1^\bullet, \hat{A}_1) = j_{f'}^k(\hat{C}_2^\bullet, \hat{A}_2),$$

$$j_x^k \overline{F}_1 = j_x^k \overline{F}_2, \quad \text{pour} \quad x = f,\ \alpha(f) \text{ et } \beta(f), \quad \text{où} \quad \overline{F}_i = (\hat{A}_i, \underline{F}_i, A_i).$$

La classe de ses unités est identifiée à la classe des k- germes de catégories r-différentiables. L'élément $\hat{F}_i \bmod r_k \in J^k\mathcal{F}(\delta^r)$ est identifié à l'élément de $(J^{k,r})^{1,1}$ qui le détermine, et appelé k*- germe de* F_i *en* f, noté $j_f^k F_i$.

THÉORÈME. *$(J^k\mathcal{F}(\delta^r), (A^{k,r})^{1,1}/J^k\mathcal{F}(\delta^r))$ est une catégorie $(r-k)$-différentiable.*

THÉORÈME. *$T(A)$ définit une sous-catégorie $(r-1)$-différentiable $T(C^\bullet, A)$ de J_A^1 et $(T(C^\bullet, A), T(A)^+)$ est une catégorie double $(r-1)$- différentiable, où $+$ est la loi de composition :*

$$(Y', Y) \to Y' + Y \quad \text{si, et seulement si,} \quad \beta^r(Y) = \beta^r(Y').$$

L'étude du 1- germe de $(C^\bullet, A)$ en f est ramenée à celle de la sous-catégorie double $(r-1)$-différentiable de $(T(C^\bullet, A), T(A)^+)$ définie par $T_e(A) \cup T_{e'}(A) \cup T_f(A)$.

Par récurrence, ce résultat se généralise en définissant sur la classe $\tilde{T}^k(A)$ des k-vitesses non holonomes de A une structure de catégorie 2^k-uple $(r-k)$- différentiable.

Soit $f \in C$, $e = \alpha(f)$, $e' = \beta(f)$. Supposons donné un élément de

k-connexion X de $(C^{\bullet}, A)$ en e et un élément de k-connexion X' de (C^{*}, A) en e'. Pour tout $Z \in \tilde{T}_{f}^{k}(A)$, on a

$$Z' = (X'bZ) \circ Z \circ (XaZ) \in \tilde{T}_{f}^{k}(e'Ae),$$

où $e'Ae = A/e'.C.e$. Dans ce cas, l'étude du k-germe de $(C^{\bullet}, A)$ en f est ramenée à celle du k-germe en f de $(C_{f}^{\bullet}, A/C_{f})$, où

$$C_{f} = e.C.e \cup e'.C.e' \cup e'.C.e.$$

Supposons $k=1$. Par restriction de la loi de composition de $T(C^{\bullet}, A)$, on voit que $P = T_{e'}(e'Ae') \times T_{e}(eAe)$ opère sur $T_{f}(e'Ae)$ relativement à la loi

$$((Z', Z), Y) \to Z' \circ Y \circ Z = Z' \circ \overline{f} + Y + \overline{f} \circ Z.$$

THÉORÈME. *$T_{f}(e'Ae)$ admet pour facteurs topologiques T_1 et T_2, où T_1 est formé des $\overline{f} \circ Z$ tels que $Z \in T_{e}(eAe)$ et T_2 des $Z' \circ \overline{f}$ où $Z' \in T_{e'}(e'Ae')$, et le sous-espace engendré par T_1 et T_2 admet un supplémentaire topologique T_3. L'espace P admet pour facteur topologique l'espace P_1 formé des (Z', Z) tels que $(Z', Z)\overline{f} = \overline{f}$.*

En particulier, l'étude de $T_{f}(e'Ae)$ revient à celle de $T_{e}(eAe)$ et de T_3 lorsque f vérifie la condition :

(0) Pour tout $Z' \in T_{e'}(e'Ae')$, il existe $Z \in T_{e}(eAe)$ tel que $Z' \circ \overline{f} = \overline{f} \circ Z$.

En effet, on a alors $T_1 = T_2$. Si f est inversible, f vérifie (0) et $T_3 = \{\overline{f}\}$.

4. Prolongements d'espèces de structures différentiables.

Soit $\eta = ((C^{\bullet}, A), A', \kappa')$ une espèce de structures r-différentiable. Soit $G^{k}(\eta)$ la sous-variété de $A^{k,r}$ formée des $S \in \hat{A}'.J^{k,r}.\hat{A}_{0}$ tels que $qS = \alpha^{r}(S)$, où q désigne la projection canonique r-différentiable de A' dans A_0. Nous notons K' l'application r-différentiable de $A * A'$ dans A définie par κ'.

THÉORÈME. *$\eta^{k} = (J_{A}^{k}, A^{k,r}/\hat{A}'.J^{k,r}, \kappa^{k})$ est une espèce de structures $(r-k)$-différentiable pour la loi de composition κ^{k} :*

$$(X, Z) \to X \circ Z = K'\langle X, Z \rangle$$

si, et seulement si, $qZ = aX$ *et* $\alpha^{r}(X) = \alpha^{r}(Z)$.

La catégorie des hypermorphismes associée est isomorphe à $J^k_{A*A'}$.

$\langle X, Z \rangle$ est l'unique $Y \in \widehat{A * A'}.J^{k,r}$ tel que $v.Y = X$ et $v'.Y = Z$, où $((j^k_x a, v), (j^k_z q, v'))$ est le produit fibré naturalisé canonique dans $J^{k,r}$, et $\hat{x} = \beta^r(X)$, $\hat{z} = \beta^r(Z)$.

THÉORÈME. $\eta'^k = ((C'^{k\bullet}, A^k/C'^k), G^k(\eta), \kappa'^k)$ *est une espèce de structures* $(r-k)$*-différentiable pour la loi de composition* κ'^k :

$$(X, S) \to XS = (X \circ S)(bX)^{-1}$$

si, et seulement si, $\alpha^r(X) = \alpha^r(S)$.

L'espèce de structures $(r-1)$-différentiable η^1 admet une sous-espèce de structures $(r-1)$-différentiable

$$(T(C^\bullet, A), T(A'), \kappa''),$$

notée $T(\eta)$.

THÉORÈME. $\eta''^k = ((C'^{k\bullet}, A^k/C'^k), A^{k,r}/\hat{A}'.J^{k,r}, \kappa''^k)$ *est une espèce de structures* $(r-k)$*-différentiable pour la loi de composition* κ''^k :

$$(X, S) \to XqS \circ S$$

si, et seulement si, $\alpha^r(X) = q\beta^r(S)$.

Ces théorèmes, ainsi que ceux du nº 2, se généralisent en remplaçant partout les prolongements holonomes par des prolongements non-holonomes.

Supposons $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. Soit

$$M = j^1_f m \in \widehat{T(A)}.J^{1,r-1}.j^{r-1,r}(\hat{A})$$

un germe d'ordre 1 en f de champ de vecteurs vertical sur A, i.e. tel que

$$aM = j^1_f \overline{a}, \quad \text{où} \quad \overline{a}(f') = \overline{a(f')} \in T(A_0).$$

Soit $\Sigma = j^1_{e'} \sigma \in \hat{A}.J^{1,r}.\hat{A}_0$ tel que $\beta^r(\Sigma) = \hat{f}$ et $b\Sigma = \hat{e}'$.

THÉORÈME. *Au couple* (M, Σ) *est canoniquement associé un élément* $v(M, \Sigma)$ *de* $T_f(A)$ *tel que* $bv(M, \Sigma) = \overline{e'}$.

En effet, pour $t > 0$ assez petit, soit *exp tm* l'automorphisme local de A, défini au voisinage de f par

$$exp\ tm(f') = G_{f'}(t),$$

où $G_{f'}$ est l'unique courbe intégrale du champ m d'origine f'. Posons $\sigma_t = (exp\ tm)\sigma$; comme $b\sigma_0 = \alpha(\sigma)$, l'application $b\sigma_t$ est un automorphisme local de A_o, de sorte qu'il existe un et un seul $x_t \in C_o^\bullet$ tel que $b\sigma_t(x_t) = e'$. Le 1-jet en 0 de l'application $t \to \sigma_t(x_t)$ dépend seulement de M et de Σ, et c'est le vecteur $v(M,\Sigma)$ cherché.

Soit $S = j_e^1 s \in G^1(\eta)$. Soit $v_S = Sav(M,\Sigma) \in T_{s(e)}A'$. Le composé $v(M,\Sigma) \circ v_S$ est défini dans $T(\eta)$; c'est un vecteur $\mathfrak{L}(M,\Sigma)S$ d'origine $fs(e)$ tel que $q\mathfrak{L}(M,\Sigma)S = \overline{e'}$. Ce vecteur sera appelé *dérivée de Lie de S relativement* à (M,Σ) et l'application

$$S \to \mathfrak{L}(M,\Sigma)S, \quad \text{où} \quad S \in G^1(\eta) \quad \text{et} \quad \alpha'(S) = \hat{e},$$

est dite *dérivée de Lie relativement à* (M,Σ), notée $\mathfrak{L}(M,\Sigma)$.

M pourra par exemple être le 1-germe de champ vertical en f déduit d'un 1-germe $N = j_{e'}^1 n$ en e' de champ de vecteurs vertical le long de A_o (i.e. $N \in \widehat{T(A)}.J^{1,r-1}.j^{r-1,r}(\hat{A}_o)$, $an(e'') = \overline{e''}$ où $e'' \in \alpha(n)$). Ceci signifie que

$$M = j_f^1 m \quad \text{où} \quad m(f') = n(\beta(f'))\circ\overline{f'}.$$

Si $f = e$ et si $\Sigma = j_e^1(A, \iota, A_o)$, on posera $\mathfrak{L}(M,\Sigma) = \mathfrak{L}(M)$.

EXEMPLE. Soit V une variété r-différentiable et X un 1-germe de champ de vecteurs sur V en x. Soit $(C^\bullet, A)$ le groupoïde $(r-1)$-différentiable des 1-jets d'automorphismes locaux de V (ce groupoïde est le prolongement d'ordre 1 de $((V \times V)^\perp, V \times V)$, où $(V\times V)^\perp$ est le groupoïde des couples associé à $\delta^r(V)$). Au germe de champ X est canoniquement associé un 1-germe M de champ de vecteurs vertical en $\hat{x}$ sur A. Soit $\eta = ((C^\bullet, A), A', \kappa')$ l'espèce de structures $(r-1)$-différentiable canonique telle que A' soit une variété de tenseurs sur V. Un 1-germe en x de champ de tenseurs sur V s'identifie à un élément S de $G^1(\eta)$. La dérivée de Lie $\mathfrak{L}(M)(S)$ de S relativement à M est la dérivée de Lie au sens usuel de S relativement à X.

Index bibliographique.

[0] Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

[1] Catégories topologiques, I, II, III, Proc. Nederlands Ak. van Wetenschappen, 69, 2, 1966, 133-175.

[2] Prolongements de catégories différentiables, Cahiers de Topologie et Géométrie différentielle, VI, 1964.

[3] Sous-structures et applications K-covariantes, C.R.A.S. 256, 1963.

[4] Catégories inductives et pseudogroupes, Ann. Inst. Fourier, X, 1960.

[5] Sur les connexions d'ordre supérieur, Atti V Cong. Un. Mat. Italiana, 1956.

[6] Introduction to structured categories, Univ. of Kansas, Dep. of Math., Technical Report 10, 1966, 95 pages.

Estratto da
Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale (Bologna, 28-30, IX, 1967)

/103/

Sur les catégories différentiables

CHARLES EHRESMANN

Le but de cette conférence était de donner un aperçu d'ensemble sur le rôle des catégories et plus particulièrement des catégories différentiables en Géométrie différentielle.

La théorie des catégories offre un cadre algébrique naturel pour la Géométrie différentielle (et en fait pour toutes les Mathématiques). Les vrais outils utilisés en Géométrie différentielle sont les notions de catégories topologiques et catégories différentiables (généralisant les groupes topologiques et les groupes de Lie). Ainsi, considérons un espace fibré localement trivial E, de base B, de fibre type F, de groupe structural topologique (resp. différentiable) G. Il lui est associé l'espace fibré principal H des isomorphismes de la fibre type F sur les fibres F_x de E, où $x \in B$. Il détermine aussi un groupoïde, à savoir le groupoïde P des isomorphismes de F_x sur $F_{x'}$, où x et x' sont des éléments de B. Si l'on identifie F avec une certaine fibre F_a alors H est la sous-classe de P formée des éléments ayant pour source l'isomorphisme identique de F_a. Ce groupoïde P est canoniquement muni d'une structure de groupoïde topologique (resp. différentiable) [2]. Si l'on se donne plus généralement un demi-groupe topologique (resp. différentiable) d'applications continues de F dans F, admettant G pour sous-groupe, on en déduit une classe C d'homomorphismes de fibres sur fibres; C est muni d'une structure de catégorie topologique (resp. différentiable) dont P détermine un sous-groupoïde topologique (resp. différentiable). De cette façon, si E est un espace fibré vectoriel, on obtient la catégorie topologique (resp. différentiable) des homomorphismes linéaires entre fibres.

1. - Notations et terminologie [1].

Rappelons la définition d'une catégorie avec les notations que nous utiliserons. Une *catégorie* $C^\bullet$ est un couple d'un ensemble C et d'une application $\varkappa$ (*loi de composition*): $(g,f) \to g \cdot f$ d'une partie $C^\bullet * C^\bullet$ de $C \times C$ dans C vérifiant les conditions suivantes: Il existe deux rétractions α et β (*source* et *but*) de C sur une partie $C_0^\bullet$ de C telles que:

1) $\beta(f) \cdot f = f = f \cdot \alpha(f)$ pour tout $f \in C$;

2) $(g,f) \in C^\bullet * C^\bullet$ équivaut à $\alpha(g) = \beta(f)$ et entraîne $\alpha(g \cdot f) = \alpha(f)$ et $\beta(g \cdot f) = \beta(g)$.

3) Si $(h, g, f) \in C \times C \times C$, $\alpha(h) = \beta(g)$ et $\alpha(g) = \beta(f)$, alors $h \cdot (g \cdot f) = (h \cdot g) \cdot f$.

On montre que $C_0^\bullet$ est l'ensemble des *unités* de $C^\bullet$ c'est-à-dire des $e \in C$ tels que $g \cdot e = g$ si $(g, e) \in C^\bullet * C^\bullet$ et $e \cdot g' = g'$ lorsque $(e, g') \in C^\bullet * C^\bullet$. Si $A \subset C$ et $B \subset C$, on pose

$$A \cdot B = \varkappa\big((A \times B) \cap C^\bullet * C^\bullet\big).$$

On appelle *inverse* de $f \in C$ un $f^{-1} \in C$ vérifiant $f \cdot f^{-1} = \beta(f)$ et $f^{-1} \cdot f = \alpha(f)$; cet inverse, lorsqu'il existe, est unique. Un *groupoïde* est une catégorie dont tout élément est inversible. Si $C^\bullet$ est une catégorie, l'ensemble des éléments inversibles forme un sous-groupoïde de $C^\bullet$, noté $C_\gamma^\bullet$.

Si $C^\bullet$ et $K^\bullet$ sont deux catégories, on appelle *foncteur* de $C^\bullet$ vers $K^\bullet$ un triplet $(K^\bullet, \underline{F}, C^\bullet) = F$, où $\underline{F}$: $f \to F(f)$ est une surjection de C sur une partie de K ayant les propriétés:

1) $F(C_0^\bullet) \subset K_0^\bullet$;

2) Si $g \cdot f$ est défini, $F(g) \cdot F(f)$ est défini et égal à $F(g \cdot f)$.

2. - Catégories différentiables [2-3].

Définition. Une *catégorie r-différentiable* est un couple $(C^\bullet, A)$ d'une catégorie $C^\bullet$ et d'une variété r-différentiable A (de dimension finie ou infinie) sur C (ici A désigne un atlas *complet* sur C, dont les cartes ont pour sources des ouverts d'un espace vectoriel topologique localement convexe), remplissant les conditions suivantes:

1) $C_0^\bullet$ définit une sous-variété A_0 de A et α et β définissent des submersions r-différentiables a et b de A sur A_0; il s'ensuit que A_0 est une sous-variété propre fermée de A et que $C^\bullet * C^\bullet$ définit une sous-variété propre fermée $A * A$ de la variété produit $A \times A$.

2) $\varkappa$ définit une application r-différentiable k de $A * A$ dans A, où $\varkappa$ est la loi de composition de $C^\bullet$.

Un *groupoïde r-différentiable* est une catégorie r-différentiable $(C^\bullet, A)$ vérifiant de plus:

3) $C^\bullet$ est un groupoïde et l'application $f \to f^{-1}$ définit une application r-différentiable de A dans A.

Par renforcement de l'axiome 1, on obtient:

a) Les catégories *régulièrement r-différentiables*, dans lesquelles l'application $[\beta, \alpha]$: $f \to \big(\beta(f), \alpha(f)\big)$ définit une subimmersion de A dans $A_0 \times A_0$.

b) Les *catégories localement triviales* qui sont les catégories régulièrement r-différentiables telles que $C_\gamma^\bullet$ définisse un ouvert de la topologie $\tau(A)$ sous-jacente à A et que $[\beta, \alpha]$ définisse une application ouverte de $\tau(A)$ vers $\tau(A_0 \times A_0)$. Cette dernière condition équivaut à la suivante: Pour toute unité e de $C^\bullet$, il existe un voisinage ouvert U_e de e dans $\tau(A_0)$ et une application r-différentiable s de la sous-variété A/U_e de A définie par U_e vers A telle que, pour tout $x \in U_e$, on ait

$$\alpha\big(s(x)\big) = x, \qquad \beta\big(s(x)\big) = e \qquad \text{et} \qquad s(e) = e.$$

Remarquons que le groupoïde P des isomorphismes entre fibres d'un espace fibré localement trivial est localement trivial en ce sens.

Théorème. Si $(C^\bullet, A)$ *est une catégorie r-différentiable et si A est une variété banachique,* $C^\bullet_\gamma$ *définit une sous-variété ouverte* A_γ *de A et* $(C^\bullet_\gamma, A_\gamma)$ *est un groupoïde r-différentiable* [3].

Ce théorème s'étend au cas d'une catégorie r-différentiable $(C^\bullet, A)$ telle que le théorème des fonctions implicites soit vérifié pour les applications différentiables d'un ouvert de $\tau(A)$ dans $\tau(A)$.

3. - Catégories structurées [4].

Soit $\mathcal{M}$ la catégorie des applications associée à un univers $\mathcal{M}_0$. Notons p un foncteur fidèle d'une catégorie $H^\bullet$ vers $\mathcal{M}$ tel que la restriction p_γ de p à $H^\bullet_\gamma$ soit bien fidèle (*i.e.* tel qu'un inversible de $H^\bullet$ appliqué par p sur une unité soit une unité de $H^\bullet$). Un élément h de H est désigné par le triplet $(\beta(h), \underline{p(h)}, \alpha(h))$, où $\underline{p(h)}$ est la surjection définissant l'application $p(h)$. Si $p(h)$ est l'injection canonique dans M d'une partie M' de M, on pose $h = (\beta(h), \iota, \alpha(h))$.

Définition. On appelle *catégorie p-structurée* un couple $(C^\bullet, s)$, où $C^\bullet$ est une catégorie, s une p-structure sur C (*i.e.* une unité de $H^\bullet$ appliquée par p sur l'application identique de C) vérifiant les axiomes suivants:

1) Il existe une p-structure s_0 sur $C^\bullet_0$ telle que

$$i = (s, \iota, s_0) \in H, \qquad a = (s_0, \alpha, s) \in H \qquad \text{et} \qquad b = (s_0, \beta, s) \in H.$$

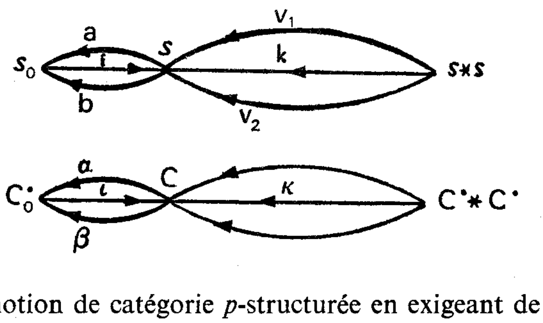
2) Il existe un produit fibré $s * s$ du couple (a, b) dans $H^\bullet$ tel que $p(s * s) = C^\bullet * C^\bullet$ et que les projections canoniques correspondantes soient

$$v_i = (s, \underline{v_i}, s * s), \qquad \text{pour } i = 1 \text{ et } 2,$$

où $\underline{v_1}$ et $\underline{v_2}$ sont les projections canoniques de l'ensemble produit fibré $C^\bullet * C^\bullet$ vers ses facteurs C.

3) On a $k = (s, \varkappa, s * s) \in H$.

En termes intuitifs: les applications $(C, \iota, C^\bullet_0)$, α, β et $\varkappa$ qui définissent la catégorie $C^\bullet$ sont « relevées » dans H relativement à p.



On raffine la notion de catégorie p-structurée en exigeant de plus que a et b, ou k, appartiennent à des sous-classes données de H.

Exemple. Soit δ^r le foncteur d'oubli vers $\mathcal{M}$ de la catégorie $\mathcal{D}^r$ des applications r-différentiables; une catégorie r-différentiable est une catégorie δ^r-structurée telle que a et b soient des submersions.

On établit des théorèmes généraux sur les catégories p-structurées (sous-catégories p-structurées, existence de catégories p-structurées quotients et quasi-quotients, projection des catégories p-structurées dans les groupoïdes ou les groupes p-structurés, complétion p-structurée, ...) [5], lorsque p est un foncteur d'homomorphismes saturé à limites projectives (au moins finies) admettant « assez » de p-sous-structures (*i.e.* si p est $\sqcap$-étalant ou $\sqcap$-engendrant [5]). Malheureusement ces résultats ne s'appliquent pas si p ne remplit pas ces conditions (en particulier si $p = \delta^r$). Un moyen de contourner cette difficulté est de prolonger p en un foncteur $\hat{p}$ ayant ces propriétés, et de considérer les catégories $\hat{p}$-structurées (au lieu des catégories p-structurées). En effet, on montre qu'il existe toujours des foncteurs d'homomorphismes saturés, prolongements de p en un foncteur à noyaux, en un foncteur $\sqcap$-étalant ou en un foncteur à limites projectives, et l'on construit effectivement [6] de tels prolongements universels (maximaux ou minimaux). Les catégories $\hat{p}$-structurées remplissent les hypothèses des théorèmes généraux. En prenant $p = \delta^r$, on obtient un « bon » assouplissement de la notion de catégorie différentiable. Nous ne développerons pas ici ce point de vue plus « algébrique ».

Remarque. Il existe une autre façon de « structurer » une catégorie, appliquée surtout aux « grandes » catégories (telles que la catégorie $\mathcal{G}_a$ des homomorphismes entre groupes abéliens): Une *catégorie p-dominée* est un couple d'une catégorie $C^{\cdot}$ et d'un foncteur F de $C^{\cdot} \times C^*$ (où C^* est la catégorie duale de $C^{\cdot}$) vers $H^{\cdot}$ tel que $p \cdot F$ soit le foncteur Hom relatif à $C^{\cdot}$. Comme cas particulier, signalons les catégories préadditives, qui sont les catégories p-dominées par le foncteur d'oubli p de $\mathcal{G}_a$ vers $\mathcal{M}$.

4. - Catégories topologiques [7].

Si p est le foncteur d'oubli vers $\mathcal{M}$ de la catégorie $\mathcal{T}$ des applications continues entre espaces topologiques, une catégorie p-structurée est appelée *catégorie topologique*.

Soit $(C^{\cdot}, T)$ une catégorie topologique, T_0 la topologie $T/C_0^{\cdot}$ induite par T sur $C_0^{\cdot}$.

Définition. On appelle *section locale de* $(C^{\cdot}, T)$ un triplet (U', s, U), où U et U' sont des ouverts de T_0, où $(T, s, T/U) \in \mathcal{T}$ et où

$$\alpha s(x) = x \quad \text{et} \quad \beta s(x) \in U' \qquad \text{pour tout } x \in U.$$

Théorème. Les sections locales de $(C^{\cdot}, T)$ *forment une catégorie* $S^{\bullet}$ *pour la loi de composition*:

$$(U'', s', U') \bullet (U', s, U) = (U'', s'', U), \qquad \text{où } s'' = \varkappa[s'\beta s, s]$$

(*i.e.* $s''(x) = s'(\beta s(x)) \cdot s(x)$ pour tout $x \in U$).

Si T_0 est localement compacte, $S^{\bullet}$ devient une catégorie topologique lorsqu'on la munit d'une topologie qui se déduit de la topologie compacte-ouverte sur l'ensemble des applications continues d'un ouvert de T_0 dans T. Si T_0 n'est pas localement compacte, ce résultat se généralise (bien qu'il n'existe plus de topologie satisfaisante sur S), en remplaçant la topologie compacte-ouverte par la quasi-topologie de la convergence locale; on trouve de cette manière une *catégorie quasi-topologique* [7].

5. - Prolongement des catégories différentiables [3].

Soit $(C^{\cdot}, A)$ une catégorie r-différentiable et $(C^{\cdot}, T)$ la catégorie topologique sous-jacente, où $T = \tau(A)$. Soit $S^{r\bullet}$ la sous-catégorie de la catégorie $S^{\bullet}$ des sections locales de $(C^{\cdot}, T)$ formée des sections locales (U', s, U) telles que s définisse une application r-différentiable de A_0/U vers A, où A_0/U est la sous-variété de A définie par U. Soit $S_p^{r\bullet}$ la catégorie des *sections r-différentiables pointées*, dont les éléments sont les couples $(\bar{s}, x)$, où $\bar{s} = (U', s, U) \in S^r$, $x \in U$, la loi de composition étant $(\bar{s}', x') \bullet (\bar{s}, x) = (\bar{s}' \bullet \bar{s}, x)$ si, et seulement si, $\alpha(\bar{s}') = \beta(\bar{s})$ et $x' = \beta s(x)$.

Théorème. Pour tout entier $l \leqslant r$, il existe une catégorie quotient de $S_p^{r\bullet}$ par la relation d'équivalence:

$$(\bar{s}, x) \sim (\bar{s}', x') \qquad \textit{si, et seulement si,}$$

$$x = x' \textit{ et si } (A, s, A_0/U) \textit{ et } (A, s', A_0/U') \textit{ ont même } l\textit{-jet en } x.$$

Cette catégorie devient une catégorie $(r-l)$-différentiable $(C^{\cdot}, A)^{l\bullet}$ si elle est munie de la structure de variété $(r-l)$-différentiable induite par la variété des jets d'ordre l de A_0 dans A.

La catégorie $(C^{\cdot}, A)^{l\bullet}$ est appelée *prolongement d'ordre l de* $(C^{\cdot}, A)$. Par récurrence, on définit les prolongements d'ordre l non holonomes et semi-holonomes $(C^{\cdot}, A)^{\tilde{l}\bullet}$ et $(C^{\cdot}, A)^{\bar{l}\bullet}$. On montre [3] que $(C^{\cdot}, A)^{l\bullet}$ s'identifie à une sous-catégorie $(r-l)$-différentiable de $(C^{\cdot}, A)^{\bar{l}\bullet}$ et $(C^{\cdot}, A)^{\bar{l}\bullet}$ à une sous-catégorie $(r-l)$- différentiable de $(C^{\cdot}, A)^{\tilde{l}\bullet}$.

Exemple. Soit $\mathscr{V}$ l'ensemble des germes de variétés r-différentiables (relatives à l'univers $\mathscr{M}_0$); soit $(\mathscr{V} \times \mathscr{V})^{\circ}$ le groupoïde des couples associé (dont la loi de composition est $(y'', y') \circ (y', y) = (y'', y)$). Soit $A_{\mathscr{V}}$ la variété r-différentiable universelle sur $\mathscr{V}$ (dont les ouverts « élémentaires » $\hat{A}$ s'identifient aux variétés r-différentiables A, où $\hat{A}$ est l'ensemble des germes de A). $((\mathscr{V} \times \mathscr{V})^{\circ}, A_{\mathscr{V}} \times A_{\mathscr{V}})$ est une catégorie r-différentiable. Par prolongement, on obtient la catégorie $(r-l)$-différentiable $J^{l,r}$ des l-jets (resp. $\mathfrak{J}^{l,r}$ des l-jets non holonomes, resp. $J^{l,r}$ des l-jets semi-holonomes) d'applications r-différentiables [3].

Une autre façon de prolonger la catégorie r-différentiable $(C^{\cdot}, A)$ est la suivante. Sur la classe $\hat{A} \cdot J^{l,r}$ des l-jets $Z \in J^{l,r}$ dont le but $\hat{z}$ est le germe de A en $z \in C$, on définit une structure de catégorie, dont la loi de composition est:

$(Z', Z) \to Z''$ si, et seulement si, $aZ' = bZ$, où $Z'' = k[Z', Z]$ (ce qui signifie que $Z'' = j_u^l f''$, où $f''(u') = f'(u') \cdot f(u')$, si $Z = j_u^l f$, $Z' = j_u^l f'$ et si u' est assez voisin de u).

Théorème. La catégorie $T^l(C^\bullet, A)$ des vitesses d'ordre l tangentes à A définit une sous-catégorie de $\hat{A}\cdot J^{l,r}$. Si $l = 1$, cette catégorie devient une catégorie différentiable double, la deuxième loi de composition étant l'addition des vecteurs de même origine [3].

(Une catégorie différentiable double est un triplet $(C^\bullet, C^\circ, A)$, où $(C^\bullet, A)$ et (C°, A) sont des catégories différentiables et $(C^\bullet, C^\circ)$ une catégorie double, *i.e.* une catégorie $p_{\mathscr{F}}$-structurée, $p_{\mathscr{F}}$ étant le foncteur d'oubli vers $\mathscr{M}$ de la catégorie $\mathscr{F}$ des foncteurs).

Ces résultats se généralisent au cas des *noyaux de catégories r-différentiables*, notion obtenue en « localisant » celle de catégorie r-différentiable.

6. - Espèces de structures différentiables [3].

Si $(C^\bullet, A)$ et $(K^\bullet, A')$ sont deux catégories r-différentiables, on appelle *foncteur r-différentiable* un triplet $((K^\bullet, A'), q, (C^\bullet, A))$, où $(K^\bullet, q, C^\bullet)$ est un foncteur et (A', q, A) une application r-différentiable. Nous allons définir des foncteurs r-différentiables particuliers, les foncteurs d'hypermorphismes, pour lesquels il existe une notion de prolongement.

Rappelons qu'une *espèce de structures* est un triplet $\underline{\eta} = (C^\bullet, E, \varkappa')$, où $C^\bullet$ est une catégorie, E un ensemble et $\varkappa'$ une application $(f, z) \to fz$ d'une partie $C^\bullet * E$ de $C \times E$ dans E vérifiant les conditions suivantes:

1) Si $f' \cdot f$ et $f'(fz)$ sont définis, $(f' \cdot f)z$ est défini et égal à $f'(fz)$;

2) Si fz est défini, $\alpha(f)z$ et $\beta(f)fz$ sont définis;

3) Pour tout $z \in E$, il existe une et une seule unité e telle que ez soit défini, et l'on a $ez = z$;

4) Pour tout $f \in C$, il existe $z \in E$ tel que fz soit défini;

5) Si $e = \alpha(f)$ et si ez est défini, fz est défini.

Ces axiomes entraînent l'existence d'une surjection π de E sur $C_0^\bullet$, associant à z l'unique unité e telle que ez soit défini. La classe $C^\bullet * E$ est le produit fibré de (α, π). Si ces axiomes sont vérifiés, on appelle aussi $C^\bullet$ une *catégorie d'opérateurs sur E relativement à* $\varkappa'$. Cette notion généralise les groupes d'opérateurs sur un ensemble. Si on laisse tomber les axiomes 4 et 5, on trouve un *système de structures au-dessus de* $C^\bullet$.

A l'espèce de structures $\underline{\eta} = (C^\bullet, E, \varkappa')$, on associe le *foncteur d'hypermorphismes* $(C^\bullet, q, (C^\bullet * E)^\bullet)$: sa source est la catégorie des hypermorphismes associée à $\underline{\eta}$, c'est-à-dire la catégorie sur $C^\bullet * E$ dont la loi de composition est:

$$(f', z') \cdot (f, z) = (f' \cdot f, z) \quad \text{si, et seulement si, } z' = fz;$$

la surjection q applique (f, z) sur f.

Définition. Une *espèce de structures r-différentiable* est un triplet $\eta = ((C^\bullet, A), A', \varkappa')$ vérifiant les conditions suivantes:

1) $(C^\bullet, A)$ est une catégorie r-différentiable et A' une variété r-différentiable.

2) $\underline{\eta} = (C^{\bullet}, E, \varkappa')$, où E est l'ensemble $\underline{A}'$ sous-jacent à A', est une espèce de structures; soit π la projection canonique de E sur $C_0^{\bullet}$.

3) $\Pi = (A_0, \pi, A)$ est une submersion.

4) Les axiomes précédents entraînent qu'il existe une sous-variété propre fermée $A * A'$ de $A \times A'$ qui est le produit fibré dans $\mathscr{D}^r$ de (a, Π). Alors on demande que $k' = (A', \varkappa', A * A')$ soit une application r-différentiable.

On dit que η est *régulièrement r-différentiable* si elle vérifie de plus:

5) $(C^{\bullet}, A)$ est une catégorie régulièrement r-différentiable et, pour tout $f \in C$, la surjection $z \to fz$ de $\pi^{-1}(e)$ dans $\pi^{-1}(e')$, où $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$, définit une submersion de $A'/\pi^{-1}(e)$ vers $A'/\pi^{-1}(e')$.

Théorème. Si η est une espèce de structures régulièrement r-différentiable, $(H^{\bullet}, A * A')$, où $H = C^{\bullet} * E$, est une catégorie régulièrement r-différentiable et $\bar{q} = \big((C^{\bullet}, A), q, (H^{\bullet}, A * A')\big)$ un foncteur r-différentiable.

On appelle $\bar{q}$ le *foncteur d'hypermorphismes r-différentiable associé à η*.

La théorie des prolongements des catégories r-différentiables s'étend aux espèces de structures régulièrement différentiables. En particulier, on trouve un théorème de transitivité des prolongements [3] de telles espèces de structures. Le théorème de transitivité des prolongements des variétés différentiables s'obtient dans le cas particulier où η est un prolongement de A_0, c'est-à-dire où $C^{\bullet}$ est une sous-catégorie (ou le plus souvent un sous-groupoïde) de $\hat{A}_0 \cdot J^{l,r} \cdot \hat{A}_0$. La donnée d'une telle sous-catégorie $C^{\bullet}$ revient à munir A_0 d'une structure généralisant la notion de G-structure.

Définition. On appelle *application covariante r-différentiable* un quadruplet $(\eta_1, \Phi, \varphi, \eta)$ vérifiant les conditions:

1) $\eta = \big((C^{\bullet}, A), A', \varkappa'\big)$ et $\eta_1 = \big((C_1^{\bullet}, A_1), A_1', \varkappa_1'\big)$ sont des espèces de structures r-différentiables.

2) $(\underline{\eta}_1, \Phi, \varphi, \underline{\eta})$ est une application covariante (*i.e.* Φ est un foncteur de $C^{\bullet}$ vers $C_1^{\bullet}$ et φ une application de $\underline{A}'$ dans $\underline{A}_1'$ tels que $\varphi(fz) = \Phi(f)\varphi(z)$ pour tout $(f, z) \in C^{\bullet} * \underline{A}$).

3) $\underline{\Phi}$ définit une application r-différentiable de A vers A_1 et φ une application r-différentiable de A' vers A_1'.

Théorème. Les applications covariantes entre espèces de structures régulièrement r-différentiables forment une catégorie équivalente à la sous-catégorie pleine de la catégorie longitudinale des quatuors de foncteurs r-différentiables ayant pour objets les foncteurs d'hypermorphismes r-différentiables.

Exemple. On retrouve la notion de covariant différentiel lorsqu'on considère les applications covariantes r-différentiables $(\eta_1, \Phi, \varphi, \eta)$, où η et η_1 sont des prolongements des variétés A_0 et A_{10} respectivement (en général $A_0 = A_{10}$).

7. - Espèces de morphismes différentiables.

De même que la notion d'ensemble muni d'un groupe d'opérateurs se généralise en celle d'espèce de structures, la notion de groupe muni d'un groupe d'opérateurs donne naissance à celle d'espèce de morphismes.

Rappelons [1] qu'une *espèce de morphismes* est un triplet $(C^{\bullet}, E^{\bullet}, \varkappa')$, où $(C^{\bullet}, E, \varkappa')$ est une espèce de structures et $E^{\bullet}$ une catégorie telle que $\pi^{-1}(e)$ définisse une sous-catégorie $E^{\bullet}_e$ de $E^{\bullet}$ pour tout $e \in C^{\bullet}_0$ et que, pour tout $f \in C$, la surjection $z \to fz$ définisse un foncteur de $E^{\bullet}_{\alpha(f)}$ vers $E^{\bullet}_{\beta(f)}$. A une telle espèce de morphismes, on associe la *catégorie produit croisé* $C^{\bullet} \underset{\varkappa'}{\times} E^{\bullet}$, dont les éléments sont les triplets (z, f, u), où

$$f \in C, \qquad u \in E^{\bullet}_0, \qquad z \in E \qquad \text{et} \qquad \alpha(z) = fu,$$

la loi de composition étant [1]:

$$(z', f', u') \cdot (z, f, u) = (z' \cdot f'z, f' \cdot f, u)$$

si, et seulement si, $u' = \beta(z)$.

Définition. Une *espèce de morphismes r-différentiable* est un triplet $\mu = ((C^{\bullet}, A), (E^{\bullet}, A'), \varkappa')$ vérifiant les axiomes suivants:

1) $((C^{\bullet}, A), A', \varkappa')$ est une espèce de structures r-différentiable, notée $\underline{\mu}$.

2) $(E^{\bullet}, A')$ est une catégorie r-différentiable.

3) $(C^{\bullet}, E^{\bullet}, \varkappa')$ est une espèce de morphismes.

Ces conditions entraînent que, pour toute unité e de $C^{\bullet}$, le couple $(E^{\bullet}_e, A'/E_e)$ est une sous-catégorie r-différentiable de $(E^{\bullet}, A')$.

Soit $\mu = ((C^{\bullet}, A), (E^{\bullet}, A'), \varkappa')$ une espèce de morphismes r-différentiable.

Théorème. Si $\underline{\mu}$ est une espèce de structures régulièrement r-différentiable, il existe une catégorie r-différentiable $(\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{A})$, où $\tilde{H}^{\bullet} = C^{\bullet} \underset{\varkappa'}{\times} E^{\bullet}$ et où $\tilde{A}$ est une sous-variété propre de $A' \times A \times A'$. La surjection $(z, f, u) \to f$ définit un foncteur r-différentiable $\tilde{\pi}$ de $(\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{A})$ vers $(C^{\bullet}, A)$.

Définition. On appelle homomorphisme croisé r-différentiable, ou 1-*cocycle de* μ, une application r-différentiable h de A vers A' telle que:

1) $h(C^{\bullet}_0) \subset E^{\bullet}_0$ et $\pi h(f) = \beta(f)$ pour tout $f \in C$;

2) Si $f' \cdot f$ est défini, on a $h(f' \cdot f) = h(f') \cdot f'h(f)$.

Théorème. Si $\underline{\mu}$ est régulièrement r-différentiable, il existe une bijection g de l'ensemble des 1-cocycles de μ sur l'ensemble des foncteurs r-différentiables sections de $\tilde{\pi}$.

En effet, g associe à h le foncteur $\tilde{h}$ défini par la surjection

$$f \to (h(f), f, h\alpha(f)).$$

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des 1-cocycles de μ: $h \sim h'$ si, et seulement si, il existe une équivalence naturelle $(g(h'), t, g(h))$ telle que t définisse une application r-différentiable de A_0 vers A'. Dans ce cas, $(g(h'), t, g(h))$ est appelée ***équivalence croisée r-différentiable.***

Définition. Une classe d'équivalence de 1-cocycles de μ est appelée *classe de cohomologie d'ordre r*.

Par passage aux r-jets, on définit la notion de 1-*cocycle infinitésimal d'ordre* r; l'ensemble des 1-cocycles infinitésimaux d'ordre r est muni d'une relation d'équivalence, déduite par passage au quotient de la relation servant à définir les classes de 1-cohomologie. Les classes d'équivalence correspondantes sont les *classes infinitésimales de* 1-cohomologie. Les dérivées de Lie sont des 1-cocycles infinitésimaux particuliers [3].

8. - Espèces de structures bifibrées [8].

Les espèces de structures différentiables sont une généralisation des espaces fibrés localement triviaux. Les espèces de morphismes conduisent à la généralisation suivante:

Définition. Une *espèce de structures r-différentiable bifibrée* est un quadruplet $(\mu, A'', \varkappa'', \varkappa_1'')$ vérifiant les conditions suivantes:

1) $\mu = \big((C^\bullet, A), (E^\bullet, A'), \varkappa'\big)$ est une espèce de morphismes r-différentiable;

2) $\big((C^\bullet, A), A'', \varkappa''\big)$ est une espèce de structures r-différentiable;

3) $\big((E^\bullet, A'), A'', \varkappa_1''\big)$ est une espèce de structures r-différentiable et l'on a $f(zx) = (fz)(fx)$ si le premier membre est défini, où $z \in E$, $f \in C$ et $x \in \underline{A}''$.

Désignons par E_e et E_e'' respectivement les fibres au-dessus de $e \in C_0^\bullet$ des espèces de structures $(C^\bullet, E, \varkappa')$ et $(C^\bullet, E'', \varkappa'')$, où $E'' = \underline{A}''$.

Théorème. 1) $\eta_e = \big((E_e^\bullet, A'/E_e), A''/E_e'', \varkappa_1''/E_e^\bullet * E_e''\big)$ *est une espèce de structures r-différentiable et, si* $f \in e' \cdot C \cdot e$, *le quadruplet* $D(f) = (\eta_{e'}, \Phi_f, \varphi_f, \eta_e)$ *est une application covariante r-différentiable, où*

$$\varphi_f(x) = fx \qquad \text{et} \qquad \Phi_f(z) = fz\,.$$

2) *Si* μ *est régulièrement r-différentiable,* $\big((\tilde{H}^\bullet, \tilde{A}), A'', \tilde{\varkappa}'\big)$ *est une espèce de structures r-différentiable, où* $(\tilde{H}^\bullet, \tilde{A})$ *est la catégorie produit croisé r-différentiable de* μ *et où* $\tilde{\varkappa}'$ *est défini par*:

$$\big((z', f, u), x\big) \to z'(fx)$$

si, et seulement si, $(u, x) \in E^\bullet * E''$.

3) *Si* η_e *est régulièrement r-différentiable pour tout* $e \in C_0^\bullet$ *et si* $H^\bullet$ *est la catégorie somme des catégories des hypermorphismes* $H_e^\bullet$ *associées à* η_e, *on obtient une espèce de morphismes r-différentiable* $\big((C^\bullet, A), (H^\bullet, A_1), \varkappa_1'\big)$, *où* A_1 *est une sous-variété de* $A' * A''$ *et où* $\varkappa_1'$ *est l'application*:

$$\big(f, (z, x)\big) \to (fz, fx)$$

si, et seulement si, $(z, x) \in E^\bullet * E''$ *et* $(f, z) \in C^\bullet * E$.

La première partie de ce théorème signifie que, sous-jacente à une espèce de structures r-différentiable bifibrée, on a une espèce de structures dominée par des applications covariantes r-différentiables [1], à savoir $(C^{\bullet}, D)$.

Bibliographie.

[1] *Catégories et structures* (Paris, Dunod, 1965).

[2] *Les connexions infinitésimales*, « Coll. Topologie » (Bruxelles, 1950), pp. 29-55; *Catégories topologiques et catégories différentiables*, « Coll. Géo. dif. Globale » (Bruxelles, 1958), pp. 137-150.

[3] *Prolongements des catégories différentiables*, « Cahiers de Topo. et Géo. dif. », **6** (1964), 8 pages; *Propriétés infinitésimales des catégories différentiables*, « id. », **9** (1966), 9 pages.

[4] *Catégories structurées*, « Ann. Ec. Norm. Sup. », **80**, 349-426 (1963).

[5] *Structures quasi-quotient*, « Math. Ann. », **171**, 293-363 (1967).

[6] *Adjonction de limites à un foncteur fidèle ou à une catégorie*, « C.R.A.S. », **265**, p. 296 (1967). Cette note est développée dans « Prolongements universels d'un foncteur par adjonction de limites », Dissertationes Mathematicae LXI (1968), 71 pages.

[7] *Catégories topologiques*, « Proc. Neder. Akad. Amsterdam », **69**, 1, 133-175 (1966).

[8] *Catégories et structures*, « Cahiers de Topo. et Géo. dif. », **6** (1964), 32 pages.

/116/

CATEGORIES IN DIFFERENTIAL GEOMETRY

by Charles EHRESMANN

The r-(differentiable) manifolds considered here may be supposed finite dimensional, or modelled on Banach spaces (or even on non-normed spaces, as shown in [1]). r and l are integers, and $0 \leqslant l \leqslant r \leqslant \infty$.

1. The basic categories in Differential Geometry are [2]:

- The category $\mathcal{C}^{l,r}$ of (resp. $\mathcal{C}^{l,r}_{\bullet}$ of pointed) l-differentiable maps between r-manifolds (associated to a universe $\mathcal{U}$).

- The category $J^{l,r,\lambda}$ of *local jets*, which is the quotient category of $\mathcal{C}^{l,r}_{\bullet}$ by the equivalence: $(f,x) \sim (f',x')$ iff $x = x'$ and if there exist neighborhoods of x and $f(x)$ on which f and f' have the same restriction. The class of (f,x) is denoted by $j^{\lambda}_x f$.

- The category $J^{l,r}$ *of l-jets*, which is the quotient category of the category $J^{l,r,\lambda}$ by the equivalence: $j^{\lambda}_x f \sim j^{\lambda}_{x'} f'$ iff $x = x'$ and if there are admissible charts relative to which f and f' have the same m-th homogeneous differential at x, for each $m \leqslant l$. The class of $j^{\lambda}_x f$ is denoted by $j^l_x f$. The objects of $J^{l,r}$ are the germs of r-manifolds.

2. Let V and V' be two r-manifolds. The set of l-jets from germs of V' to germs of V is canonically equipped [3] with a structure of an $(r-l)$-manifold $J^l(V,V')$.

If V' is fixed, then we get a functor $J^l(-,V')$ from $\mathcal{C}^r$ $(= \mathcal{C}^{r,r})$ to $\mathcal{C}^{r-l}$. This functor preserves submersions and pull-backs of pairs with one term a submersion.

In particular, the functor $J^l(-,\mathbf{R})$ admits as a sub-functor the *l-th velocity functor* T^l (where $T^l(V)$ is formed by the jets $j^l_0 f$), and T^1 is the *tangent functor* T.

5. An *r-differentiable category* $\mathcal{K}$ is a category internal in $\mathcal{C}^r$ (i.e. a realization in $\mathcal{C}^r$ of the sketch of categories), whose map «source» is a submersion. It may be considered (initial definition [4]) as a pair (K,V), where K is a category and V an r-manifold on the set of morphisms of K, such that:

- the maps source and target of K define r-differentiable maps a and b from V onto a submanifold V_0 of V;

- a is a submersion (initially b was also one [4]);

- the law of composition of K defines an r-differentiable map from the pull-back of (a, b) to V.

If V' is an r-manifold, by applying the functor $J^l(-, V')$ we deduce from $\mathbb{K}$ an $(r-l)$-differentiable category $J^l(\mathbb{K}, V)$ on $J^l(V, V')$; we denote by $\odot$ its law of composition [2]. So, the functor $J^l(-, V')$ «extends» into a functor from the category $\mathcal{F}(\mathcal{C}^r)$ of r-differentiable functors to the category $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{r-l})$. .

In the same way we extend the functors T^l. The *tangent category* $T(\mathbb{K})$ admits the structure of an $(r-l)$-differentiable double category, the second law being the addition of vectors [2].

4. EXAMPLES.

1° An r-differentiable groupoid (K, V) is said *locally trivial* [4] if $[b, a]$ is a submersion from V to $V_0 \times V_0$. In fact, this notion is equivalent to that of a differentiable principal fibre-bundle.

2° By «gluing together» the $(r-l)$-manifolds $J^l(V, V')$, for all r-manifolds V and V' associated to the universe $\mathfrak{U}$, we obtain a «big» $(r-l)$-manifold $V^{l,r}$. Then $(J^{l,r}, V^{l,r})$ is an $(r-l)$-differentiable category [2], denoted by $\mathcal{J}^{l,r}$. Its manifold of objects is the «universal» $(r-l)$-manifold of germs of r-manifolds.

$J^l(V, V)$ (resp. The invertible jets of $J^l(V, V)$) defines an $(r-l)$-differentiable subcategory $\mathcal{J}^l(V)$ (resp. locally trivial subgroupoid $G^l(V)$) of $\mathcal{J}^{l,r}$. The notions of a locally trivial subgroupoid of $G^l(V)$ and of a regular infinitesimal structure [3] on V are equivalent.

5. Let $\mathbb{K}$ be an r-differentiable category (K, V). The jets X of $J^l(V, V_0)$ such that $aX (= J^l(a, V_0)(X))$ is an identity form an $(r-l)$-submanifold V^l of $J^l(V, V_0)$ and there exists [2] an $(r-l)$-differentiable category $\mathbb{K}^l$ on V^l, called the *l-th prolongation of* $\mathbb{K}$, whose law is:

$$(X', X) \to (X'.bX) \odot X \quad \text{iff} \quad aX' = bX.$$

The *l-th non holonomic prolongation* $\widetilde{\mathbb{K}}^l$ *of* $\mathbb{K}$ is defined by iteration, putting $\tilde{\mathcal{K}}^0 = \mathcal{K}$ and $\tilde{\mathcal{K}}^{m+1} = (\tilde{\mathcal{K}}^m)^1$.

In particular, $\mathcal{J}^{l,r}$ and $G^1(V)$ give rise to the $(r-l)$-differentiable categories of non holonomic jets $\tilde{\mathcal{J}}^{l,r}$ and $\tilde{G}^l(V)$, which admit the $(r-l)$-differentiable subcategories $\bar{\mathcal{J}}^{l,r}$ and $\bar{G}^l(V)$ of *semi-holonomic l-jets.*

6. The next basic notion is that of an *r-differentiable species of structures* [4, 2, 6], or *generalized r-fibre-bundle* (or, in a more recent terminology, presheave internal in $\mathcal{C}^r$) over an r-differentiable category $\mathcal{K}$.

Usual r-differentiable fibre-bundles are obtained when $\mathcal{K}$ is a locally trivial r-differentiable groupoid.

If $\mathcal{K}$ is $G^l(V)$, $\tilde{G}^l(V)$ or $\bar{G}^l(V)$, we get respectively the *holonomic, non holonomic* or *semi-holonomic l-th prolongations of the r-manifold V*. Their sections are the *infinitesimal structures on V*.

One proves a theorem of *transitivity of prolongations* [2, 3].

A categorical study of these notions, of *differential covariants* or *invariants* and of *higher-order connections* [5] in (generalized) fibre-bundles may be found in [2, 6].

1. A. BASTIANI, *Journal d'Analyse Math. XIII*, Jérusalem (1964).

2. C. EHRESMANN, *Cahiers Topo. et Géo. diff. VI* (1964) et *IX* (1967).

3. C. EHRESMANN, *C. R. A. S.* Paris 233 (1951), 234 (1952), 239 (1954), 240 (1955).

4. C. EHRESMANN, *Coll. Géo. diff. globale*, Bruxelles (1958).

5. C. EHRESMANN, *Atti 5 Congresso Un. Mat. Italiana* (1956).

6. C. EHRESMANN, *Atti Conv. di Geo. Diff.*, Bologne (1967).

Extrait de : Cahiers de Topologie et
Géométrie Différentielle XIV - 2 (1973)

/134/

CARTAN (ÉLIE). — LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS EXTÉRIEURS ET LEURS APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES. Paris, Hermann (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 994), 1945, 1 vol. 25 × 16cm de 214 pages.

La théorie des formes différentielles extérieures et des systèmes différentiels extérieurs joue un rôle prépondérant dans l'œuvre de M. É. Cartan. Elle a été principalement créée par l'illustre géomètre, dans des Mémoires parus aux environs de 1900, et elle lui fournit la technique la plus efficace et la plus originale pour traiter les problèmes de géométrie différentielle, ou pour exposer la théorie des groupes de Lie ou sa propre théorie des « groupes continus infinis ». Cette technique semble encore insuffisamment connue; en particulier, dans nos Universités, elle ne trouve pas la place que lui assignerait sa simplicité et sa puissance. Le besoin d'un exposé didactique de toute cette théorie s'est donc fait sentir depuis longtemps et le magnifique ouvrage de M. É. Cartan sera accueilli avec le plus grand empressement. C'est la reproduction, largement remaniée et complétée, d'un cours professé par l'Auteur à la Faculté des Sciences de Paris, en 1936-1937.

Le livre débute par un Chapitre substantiel d'Algèbre. La notion de forme extérieure est déduite de la notion de forme multilinéaire alternée à n variables, c'est-à-dire définie dans l'espace vectoriel R^n. Une étude particulière des formes quadratiques extérieures conduit à la notion de rang d'une telle forme et à la réduction d'une forme de rang $2p$ à l'expression canonique $[U^1 U^2]+[U^3 U^4]+\ldots+[U^{2p-1} U^{2p}]$. A toute forme extérieure correspond un système d'équations linéaires, appelé système associé. Il définit un sous-espace associé H de dimension $n-r$ dans R^n, ou encore, dans le dual de R^n, un sous-espace associé H' de dimension r. Ces deux sous-espaces ont une signification indépendante du choix des coordonnées dans R^n. Le sous-espace H pourrait être défini comme étant l'ensemble des vecteurs de R^n dont le produit intérieur avec la forme extérieure donnée est nul. H' est l'ensemble

CARTAN. 1

des formes linéaires qui s'annulent sur H, ou encore l'ensemble des produits intérieurs de la forme extérieure donnée par un $(p-1)$-vecteur quelconque. Le nombre r, appelé rang de la forme, indique le nombre minimum de formes linéaires permettant d'exprimer la forme donnée, et ces formes linéaires appartiennent forcément au sous-espace associé H'. En particulier, pour qu'une forme de degré p soit monôme, c'est-à-dire produit extérieur de p formes linéaires, il faut et il suffit qu'elle soit de rang p. Ceci permet d'écrire les équations quadratiques que doivent vérifier les « coordonnées grassmanniennes » d'une forme monôme, ou, en passant au point de vue dual, les coordonnées grassmanniennes d'un sous-espace vectoriel à p dimensions de R^n.

Un système d'équations extérieures est un système obtenu en « égalant » à zéro un certain nombre de formes extérieures à n variables. Un sous-espace à p dimensions de R^n est solution du système si les formes données s'annulent identiquement sur lui, c'est-à-dire si les formes induites sur ce sous-espace sont nulles. Plus généralement un p-vecteur, qui n'est pas nécessairement décomposable en produit extérieur de p-vecteurs, pourrait être appelé solution du problème s'il est solution des formes de degré p (qui peuvent être considérées comme des formes linéaires sur l'espace des p-vecteurs) appartenant à l'idéal engendré par le système des formes données dans l'algèbre extérieure des formes à n variables, ou, ce qui revient au même, si les produits intérieurs du p-vecteur par les formes données de degré q, pour $q \leqq p$, sont nuls. Pour que deux systèmes d'équations extérieures aient les mêmes solutions, au sens général précédent, il faut et il suffit que les deux systèmes de formes engendrent le même idéal dans l'algèbre extérieure. Les deux systèmes sont alors dit algébriquement équivalents. Étant donné un système d'équations extérieures, on peut lui associer le sous-espace H de R^n formé par l'ensemble des vecteurs de R^n dont le produit intérieur avec une forme quelconque du système appartienne à l'idéal engendré par ces formes. L'Auteur le définit par un système d'équations linéaires, dit système associé (mais dépendant de la base choisie dans R^n). Si le rang du système associé est r, il existe un système algébriquement équivalent au système donné et qui s'exprime à l'aide de

r formes linéaires indépendantes s'annulant sur le sous-espace associé H ([1]).

La notion de forme extérieure conduit immédiatement à celle de forme différentielle extérieure de degré p, définie dans un domaine de R^n. Après l'introduction de cette notion, le deuxième Chapitre étudie la différentiation extérieure qui associe à une forme différentielle extérieure ω de degré p, une forme $d\omega$ de degré $p+1$. Les propriétés essentielles et même caractéristiques pour le symbole d sont la formule donnant la différentielle extérieure du produit extérieur de deux formes et la formule $d(d\omega) = 0$, qui exprime le théorème de Poincaré. Un peu plus loin, on trouvera une démonstration élégante de la réciproque de ce théorème, qui affirme que $d\varpi = 0$ entraîne $\varpi = d\omega$. Les formes différentielles extérieures sont des éléments d'intégrales multiples et la différentielle extérieure $d\omega$ tire sa signification essentielle de la formule de Stokes $\int_{\dot{D}} \omega = \int_D d\omega$, où $\dot{D}$ désigne la frontière d'un domaine D vérifiant certaines conditions de régularité.

Le troisième Chapitre aborde l'étude des systèmes différentiels extérieurs. Tandis que, dans ses travaux originaux sur ce sujet, l'Auteur s'est borné aux systèmes différentiels linéaires (ou systèmes de Pfaff), il étudie ici le cas général, considéré par Kähler, d'un système obtenu en annulant plusieurs formes différentielles extérieures de degré quelconque. Une variété intégrale du système est une variété différentiable plongée dans R^n telle que les formes différentielles induites, déduites des formes du système, soient nulles. Ayant fait la remarque essentielle que toute variété intégrale est encore variété intégrale du système différentiel *fermé* obtenu en adjoignant au système des formes données l'ensemble de leurs différentielles extérieures, on associera à tout système différentiel le système fermé correspondant. En particulier, pour qu'un système de Pfaff soit complètement intégrable, il faut et il suffit que le système fermé correspondant appartienne à l'idéal engendré par le système donné. Ce théorème de Frobenius est démontré ici d'une façon très élégante. La principale notion intro-

([1]) J'ai présenté tous ces résultats d'Algèbre sous une forme qui diffère un peu de l'exposé du livre. Pour la notion de produit intérieur *voir* N. BOURBAKI, *Algèbre*, Paris, Hermann, 1942, Chapitre III.

duite dans ce Chapitre est celle de système caractéristique d'un système différentiel extérieur. C'est le système associé (au sens du Chapitre I) au système différentiel fermé correspondant. Une notion vraiment invariante serait celle de champ caractéristique d'éléments intégraux de dimension $n - r$, déterminé justement par le système caractéristique. Le rang r du système caractéristique est appelé la classe du système donné. Le système caractéristique est complètement intégrable, ses variétés intégrales de dimension $n - r$ sont appelées variétés caractéristiques (au sens de Cauchy). Si les variétés caractéristiques sont définies par $y_1 = \text{const.}$, $y_2 = \text{const.}$, ..., $y_r = \text{const.}$, le système donné est algébriquement équivalent à un système qui s'exprime en fonction des y_i et des formes linéaires dy_i. Les variétés caractéristiques menées par les différents points d'une variété intégrale engendrent une nouvelle variété intégrale. Ce qui précède est tout de suite illustré par deux applications : la réduction d'une équation de Pfaff à l'expression canonique

$$dZ - Y_1\, dX^1 - Y_2\, dX^2 -, \ldots - Y_p\, dX^p = 0,$$

et l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Le Chapitre suivant commence par l'étude détaillée des éléments plans intégraux d'un système d'équations extérieures. Les notions essentielles sont ici les suivantes : élément polaire d'un élément intégral, le caractère s_i d'ordre i du système, élément intégral ordinaire et élément intégral régulier, enfin le genre du système. En supposant le système donné analytique réel, l'Auteur démontre son théorème fondamental d'existence : ***Il existe au moins une variété intégrale analytique*** V_p ***tangente à un élément intégral ordinaire donné*** $(E_p)_0$ ***et contenant une variété intégrale donnée*** V_{p-1} ***tangente à l'élément intégral régulier*** $(E_{p-1})_0$ ***contenu dans*** $(E_p)_0$. Ce théorème, qui est ramené au théorème de Cauchy-Kowalewski, est précisé ensuite par l'évaluation du degré de généralité des variétés intégrales *ordinaires*, qui sont celles dont l'existence est démontrée par le théorème. Il peut y avoir d'autres variétés intégrales de dimension p, dites variétés intégrales *singulières* : l'élément intégral tangent générique à p dimensions n'est pas *ordinaire*. Une nouvelle notion de ***variété*** *caractéristique* s'introduit ici : c'est une variété intégrale V_q dont les éléments tangents à q dimensions ne sont pas *réguliers*. Pour une telle variété intégrale V_q le problème de Cauchy (recherche des variétés intégrales V_{q+1} contenant V_q) n'est pas simplement résolu par le théorème d'existence précédent. Toutes ces notions sont appliquées à quelques exemples : équations aux dérivées partielles du premier ou du deuxième ordre, à une fonction inconnue et deux ou trois variables.

Dans le cinquième Chapitre, on s'intéresse uniqnement aux variétés de dimension p représentables par des équations $z^\lambda = \varphi^\lambda(x^1, x^2, \ldots, x^p)$; c'est-à-dire que le système différentiel est considéré comme étant à $n-p$ fonctions inconnues z^λ et à p variables indépendantes imposées x^i. Un tel système est dit en involution s'il existe des éléments intégraux ordinaires à p dimensions et si les formes dx^1, dx^2, $\ldots$, dx^p sont linéairement indépendantes sur un élément générique de cette espèce. Alors l'existence des solutions *ordinaires* $z^\lambda = \varphi^\lambda(x^1, x^2, \ldots, x^p)$ est assurée par le théorème général d'existence. L'Auteur indique des critères qui permettent de reconnaître effectivement si un système donné est en involution. Il étudie plus particulièrement le cas où $p = 2$ et le cas où la solution générale dépend de s_1 fonctions arbitraires d'une variable. Une première application de la théorie des systèmes en involution sera la démonstration d'un théorème de J. A. Schouten et van der Kulk.

Est-ce que toute solution d'un système différentiel donné, à variables indépendantes imposées x^i, peut être obtenue comme solution non singulière d'un système en involution déduit du système donné ? Pour répondre à cette question, l'Auteur introduit au Chapitre suivant la notion de prolongement d'un système différentiel. C'est le système obtenu par l'introduction de nouvelles variables t_i^λ en posant $dz^\lambda = \sum_i t_i^\lambda \, dx^i$. Dans le cas de deux variables indépendantes, il est démontré que par des prolongements successifs, on peut, sous certaines conditions, déduire d'un système différentiel donné un système en involution. Mais le problème général posé dans ce Chapitre n'est pas encore complètement résolu.

La deuxième partie de l'Ouvrage donne de nombreuses applications de la théorie générale à des problèmes de géométrie différentielle euclidienne. Elle débute par un exposé succinct et qui devrait devenir classique de la méthode du repère mobile en géométrie euclidienne et des théorèmes fondamentaux de la théorie des surfaces. La puissance des méthodes de l'Auteur est amplement prouvée par le fait que 19 problèmes importants se trouvent traités en moins de 90 pages, et certains de ces problèmes seraient difficilement abordables par des méthodes plus anciennes. L'étude de chaque problème comprend la discussion de l'existence des solutions, de leur degré de généralité, la détermination des solutions singulières et des variétés caractéristiques.

Remarquons enfin que toutes les questions abordées dans l'Ouvrage sont des problèmes de caractère local, dont certains pourront conduire cependant à des questions intéressantes de caractère global.

CHARLES EHRESMANN.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*,
2e série, t. LXX, juillet-août 1946.)

" *Dagli Atti del V Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Pavia - Torino 1956* ,,

/137/

RAPPORT SOMMAIRE SUR LES TRAVAUX DE M. A. LICHNÉROWICZ

PAR M. CHARLES EHRESMANN
DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

La liste des travaux de M. LICHNÉROWICZ comprend plus de 70 publications, dont les numéros 33 à 70 appartiennent à la période prise en considération pour l'attribution du prix FUBINI.

Ses recherches ont été consacrées principalement à la géométrie différentielle. Développant une activité étonnante, il a apporté des contributions remarquables, de caractère local ainsi que de caractère global, dans des directions où s'est particulièrement manifesté l'essor de la Géométrie différentielle au cours de la dernière décade: théorie des espaces fibrés, relations entre courbure et nombres de BETTI, formes harmoniques, variétés kähleriennes et pseudokähleriennes, groupes d'holonomie.

Mais ce sont les théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme qui ont été la principale source d'inspiration de ses recherches. Bien que ces théories soient du domaine de la Physique Mathématique, du point de vue purement mathématique elles appartiennent à la Géométrie différentielle et on sait le rôle prépondérant qu'elles ont joué dans l'évolution de la Géométrie différentielle moderne, en servant de stimulant pour l'étude des structures d'espaces de RIEMANN et de leurs généralisations. M. LICHNÉROWICZ y a consacré toute une série de travaux, commençant par sa Thèse qui date de 1939. En particulier entre Janvier 1946 et Décembre 1953 il a publié plusieurs Notes (dont deux en collaboration avec Madame Fourès), puis surtout son Cours polycopié de 1953 professé au Collège de France. Ce Cours a paru récemment sous forme imprimée comme première partie d'un remarquable traité des « Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme », dont la deuxième partie est consacrée aux théories unitaires.

L'auteur y a incorporé et développé ses propres contributions anciennes et récentes, à l'ensemble de ces théories.

La première partie du volume est un exposé clair et élégant de la théorie de la relativité générale d'EINSTEIN. En se bornant à la gravitation, celle-ci se réduit essentiellement à la théorie d'une métrique riemannienne du type hyperbolique donnée sur une variété V_4 à 4 dimensions et vérifiant les équations d'EINSTEIN :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \chi T_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3),$$

où $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de RICCI de la métrique définie par le tenseur symétrique $g_{\alpha\beta}$, R la courbure scalaire définie par contraction du tenseur $R_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ le tenseur d'énergie. La variété V_4 munie de la structure indiquée est appelée un espace-temps ou un modèle d'univers ; le tenseur $g_{\alpha\beta}$ en définit le champ de gravitation ; celui-ci est dit extérieur dans la région où le tenseur d'énergie est nul ; il est dit intérieur dans la région où le tenseur d'énergie est différent de 0.

M. LICHNÉROWICZ reprend le problème fondamental de CAUCHY relatif aux équations d'EINSTEIN, problème déjà résolu dans sa Thèse. Il s'agit de l'étude locale des conditions initiales qu'on peut imposer à un champ de gravitation aux points d'une sous-variété V_3 à trois dimensions de la variété V_4 pour que, dans le voisinage de cette sous-variété, il existe une solution et une seule des équations d'EINSTEIN vérifiant ces conditions initiales. Cette étude met en évidence d'une part des sous-variétés exceptionnelles pour le problème de CAUCHY, à savoir les variétés caractéristiques ou fronts d'onde du champ, d'autre part les bicaractéristiques du champ, qui sont les géodésiques de longueur nulle de la métrique riemannienne. Elle fournit aussi les conditions de raccord (déjà considérées par SCHWARZSCHILD) entre un champ extérieur et un champ intérieur, à travers une hypersurface de séparation V_3. On en déduit les conditions d'existence d'un prolongement d'un champ extérieur vers l'intérieur, ou d'un champ intérieur vers l'extérieur, à travers une hypersurface de séparation V_3. Dans le premier cas la condition essentielle est que V_3 soit engendré par des géodésiques du champ extérieur ; dans le deuxième cas, que V_3 soit engendré par des lignes de courant et que la pression s'annule sur V_3, en supposant, pour simplifier l'énoncé, que les conditions de fluide parfait soient vérifiées dans le domaine intérieur.

Un des chapitres les plus intéressants est consacré à l'étude globale d'un modèle d'univers dont le champ de gravitation est partout du type extérieur. Il donne des conditions suffisantes pour qu'un tel modèle d'univers soit localement euclidien partout. Sous quelles hypothèses un modèle d'univers partout du type extérieur est-il localement euclidien? Ce problème fondamental semble avoir été formulé pour la première fois par LEVI-CIVITA. Il a été étudié par M. LICHNÉROWICZ dans sa Thèse déjà, puis également par SERINI, RACINE, EINSTEIN et PAULI. Sans hypothèses de nature globale on ne peut pas affirmer le caractère localement euclidien d'un modèle d'univers partout du type extérieur. Les hypothèses introduites par les auteurs cités étaient très restrictives. Dans ses résultats récents, M. LICHNÉROWICZ démontre le caractère localement euclidien sous des hypothèses assez générales qu'on peut formuler ainsi:

1) Le champ de gravitation est supposé stationnaire; c'est-à-dire le modèle d'univers V_4 admet un groupe à un paramètre d'isométries dont les orbites sont des lignes de temps formant une fibration de V_4. L'espace quotient de V_4 par cette fibration est alors une variété W_3 munie d'une métrique riemannienne définie positive.

2) L'espace W_3 est un espace compact. Cette condition 2) peut être remplacée par la condition 2)': L'espace W_3 est un espace riemannien complet et à comportement asymptotique euclidien.

En ce qui concerne les théories unitaires de la gravitation et de l'électromagnétisme, M. LICHNÉROWICZ à obtenu en 1953 un résultat essentiel, en démontrant la compatibilité du système différentiel de la théorie unitaire d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER. Un modèle d'univers dans cette théorie est une variété à 4 dimensions munie d'un champ de tenseurs $g_{\alpha\beta}$, non symétriques. Le système différentiel imposé à ce champ fait intervenir de plus une connexion affine. M^me^ TONNELAT et M. HLAVATY ont montré que ce système différentiel détermine algébriquement la connexion en fonction des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières. M. LICHNÉROWICZ a résolu ensuite le problème local de CAUCHY pour ce système différentiel et il a montré que cette théorie unitaire présente la même cohérence mathématique locale que l'ancienne théorie de la relativité générale d'EINSTEIN. L'analyse du problème de CAUCHY conduit encore à des variétés caractéristiques, correspondant à un certain tenseur symétrique $l_{\alpha\beta}$ que M. LICHNÉROWICZ interprète comme étant le tenseur gravitationnel, au lieu du tenseur symétrique déduit du tenseur $g_{\alpha\beta}$.

Pour l'étude globale d'un modèle d'univers M. LICHNÉROWICZ utilise un raisonnement concernant le laplacien d'une fonction sur un espace de RIEMANN et ce raisonnement trouve aussi des applications importantes dans la théorie, due à M. BOCHNER, des relations entre courbure et nombres de BETTI d'un espace de RIEMANN. Les contributions de M. LICHNÉROWICZ à cette théorie sont exposées en particulier dans sa conférence faite au Congrès International de Harvard en 1950. Signalons seulement les résultats suivants :

1) Si une variété orientable V_n peut être localement plongée dans l'espace euclidien E_{n+1} (ou dans un espace à courbure constante positive) de façon que tous ses points soient elliptiques, alors ses deux premiers nombres de BETTI sont nuls.

2) Etant donné un espace de RIEMANN à courbure de RICCI partout positive, son polynôme de POINCARÉ est divisible par $(t+1)^{b_1}$, où b_1 désigne son premier nombre de BETTI.

Enfin dans le cadre des méthodes si fécondes de CHERN, M. LICHNÉROWICZ a généralisé pour les variétés de BERWALD (c'est-à-dire pour une classe de variétés de FINSLER) le calcul de la caractéristique d'EULER-POINCARÉ en fonction des formes de courbure.

Plusieurs des publications récentes de M. LICHNÉROWICZ se rapportent à la théorie des formes harmoniques sur les variétés riemanniennes ou pseudokähleriennes. Les opérateurs classiques L et Λ de la théorie des variétés kähleriennes sont généralisés en associant à toute forme extérieure F de degré k, donnée sur une variété riemannienne, une série d'opérateurs M_h opérant sur les formes extérieures φ de degré $\geq h$. Si F est à dérivée covariante nulle, par rapport à la métrique riemannienne, ces opérateurs sont permutables avec l'opérateur classique Δ et transforment par suite toute forme harmonique en une forme harmonique. L'application de ces opérateurs conduit notamment aux résultats suivants :

Si une variété riemannienne compacte orientable V_m admet q champs indépendants de vecteurs parallèles (par rapport à la métrique riemannienne), son polynôme de POINCARÉ est divisible par $(t+1)^q$, le quotient étant le polynôme de POINCARÉ de l'anneau d'homologie des formes exprimables à l'aide de certaines coordonnées distinguées.

Sur une variété riemannienne localement réductible, toute forme harmonique est somme de formes harmonique pures, les formes pures étant définies par rapport aux coordonnées distinguées associées à la structure de produit local.

Etant donnée sur la variété riemannienne V_m une forme extérieure quadratique Ω de rang $2r \leq m$, à dérivée covariante nulle, on a les résultats suivants (complétant ceux de H. GUGGENHEIMER) concernant les nombres de BETTI b_k de V_m :

$$b_{2p} \neq 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leq p \leq r; \qquad b_{p-2} \leq b_p, \quad \text{pour } p \leq r.$$

Si l'on exprime F localement en fonction de $2r$ variables distinguées, soit c_p le nombre de formes harmoniques indépendantes de degré p s'exprimant localement à l'aide de ces variables distinguées. Alors c_{2p+1} est pair.

M. LICHNÉROWICZ appelle variété pseudokählerienne une variété riemannienne V_{2n} munie d'une forme quadratique extérieure Ω de rang $2n$ partout, échangeable avec la métrique riemannienne et à dérivée covariante nulle. La structure ainsi définie équivaut à la donnée d'une structure presque hermitienne dont la forme quadratique extérieure associée Ω est fermée et dont la structure presque complexe sous-jacente est sans torsion. Si cette structure presque complexe dérive d'une structure complexe, on a une structure kählerienne. D'après des résultats non publiés de SPENCER, il semble qu'il en soit toujours ainsi sous certaines conditions de différentiabilité. Quoi qu'il en soit, les résultats précédents montrent que les variétés pseudokähleriennes ont les propriétés classiques des variétés kähleriennes (démontrées par HODGE, ECKMANN-GUGGENHEIMER).

La théorie du groupe d'holonomie d'une connexion, due à ELIE CARTAN, a fait récemment des progrès importants sous l'influence de la théorie des espaces fibrés. On doit à M. LICHNÉROWCZ des résultats intéressants concernant les groupes d'holonomie des espaces riemanniens ou hermitiens. En collaboration avec ARMAND BOREL, il a montré que le groupe d'holonomie homogène d'une variété riemannienne V_n en un point x est un groupe de LIE ψ_x, dont la composante connexe de l'élément unité est un sous-groupe compact du groupe orthogonal O_n; ce sous-groupe est le groupe d'holonomie homogène restreint σ_x correspondant aux lacets homotopes à 0. Citons encore les résultats suivants :

Soit σ_x le groupe d'holonomie homogène restreint d'une variété pseudokählerienne V_{2n}. Pour que σ_x soit équivalent à un sous-groupe du groupe unitaire unimodulaire SU_n, il faut et il suffit que la courbure de RICCI de V_{2n} soit nulle. Le groupe d'holonomie restreint σ_x d'une variété pseudokählerienne à courbure de RICCI différente de 0 admet un centre non discret. Enfin tout espace riemannien homogène G/H, où G est un groupe compact et dont la courbure de RICCI est nulle, est localement euclidien.

Dans sa conférence du Colloque de Géométrie différentielle de Strasbourg en 1951, M. LICHNÉROWICZ a fait une étude approfondie des espaces homogènes kähleriens, dont je me borne à citer les résultats suivants:

Si un espace homogène kählerien $W_{2n} = G/H$, où $n > 1$, est à courbure de RICCI non nulle et si le groupe linéaire connexe d'isotropie est irréductible par rapport au corps des réels, alors W_{2n} est un espace hermitien symétrique irréductible.

Si G a un centre non discret, l'espace homogène kählerien est réductible et admet une partie localement unitaire.

Si un espace homogène kählerien à groupe G compact n'est pas localement unitaire, son groupe connexe d'isotropie admet un centre non discret.

Tout espace homogène kählerien G/H, où G est semi-simple compact et H connexe, est produit d'espaces homogènes kähleriens pour lesquels d'une part G est simple, de centre réduit à l'unité, et d'autre part H est centralisateur connexe de la composante connexe de l'unité dans le centre de H.

Cet exposé sommaire de l'oeuvre de M. LICHNÉROWCZ est forcément très incomplet et ne donne qu'un aperçu très superficiel des résultats qu'il a obtenus dans tant de domaines. Cette œuvre constitue certainement une contribution importante à la Géométrie différentielle et elle a déjà exercé une influence marquante sur les recherches en cours et en particulier sur les nombreux élèves qui ont travaillé sous la direction de M. LICHNÉROWICZ. Elle remplit donc parfaitement les conditions posées pour l'attribution du prix FUBINI.

/1/

GÉOMÉTRIE. — *Les invariants intégraux et la topologie de l'espace projectif réglé.* Note de M. **Ehresmann**, présentée par M. Élie Cartan.

M. Cartan a montré (¹) que, dans un espace homogène à groupe fondamental clos, la détermination des invariants intégraux fournit des renseignements précis sur la topologie de cet espace. On peut appliquer ces idées à l'étude de la variété formée par les droites, ou plus généralement par les plans ou hyperplans à k dimensions, de l'espace projectif complexe à n dimensions complexes.

Le groupe G projectif unimodulaire de la forme d'Hermite

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_{n+1}\bar{x}_{n+1}$$

transforme transitivement la variété des droites de l'espace projectif (x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1}). L'espace des droites, qui admet G comme groupe fondamental clos, est symétrique, car le sous-groupe g qui laisse invariante la droite origine ($x_3 = \ldots = x_{n+1} = 0$) est le plus grand sous-groupe invariant pour l'involution

$$x'_1 = x_1, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = -x_3, \qquad \ldots, \qquad x'_{n+1} = -x_{n+1}.$$

En remplaçant x_3, x_4, $\ldots$, x_{n+1} par y_1, $\ldots$, y_q, le sous-groupe g s'écrit

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2,\\
x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2,\\
y'_1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\, b_{11}y_1 + \ldots + b_{1q}y_q,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y'_q &= \ldots\ldots\ldots\ldots\, b_{q1}y_1 + \ldots + b_{qq}y_q.
\end{aligned}$$

(¹) *Annales de la Soc. pol. de Math.*, 8, 1929, p. 181-225.

Les transformations infinitésimales qui changent de signe pour l'involution considérée sont

$$\begin{aligned}
\delta x_1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots - \overline{\omega}'_1 y_1 - \overline{\omega}^1_2 y_2 \ldots - \overline{\omega}^2_q y_q,\\
\delta x_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots - \overline{\omega}^2_1 y_1 - \overline{\omega}^2_2 y_2 \ldots - \overline{\omega}^2_q y_q,\\
\delta y_1 &= \omega'_1 x_1 + \omega^2_1 x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\delta y_q &= \omega'_q x_1 + \omega^2_q x_2.
\end{aligned}$$

Elles transforment la droite origine en la droite d'équations

$$\begin{aligned}
y_1 + \omega'_1 x_1 + \omega^2_1 x_2 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&,\\
y_q + \omega'_q x_1 + \omega^2_q x_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Les quantités ω^i_j et $\overline{\omega^i_j}$ peuvent être considérées comme les coordonnées des droites infiniment voisines de la droite origine. Lorsque les x et les y sont transformés par g, les variables ω^i_j et $\overline{\omega^i_j}$ sont transformées suivant un groupe linéaire γ qui opère en définitive de la façon suivante :

Les ω^i_j sont multipliées d'abord par un même facteur $e^{i\theta}$ et ensuite ω^i_j est transformé comme le produit $\overline{x_i} y_j$, où les x et les y subissent des transformations hermitiennes *unimodulaires*.

Un invariant intégral dans l'espace des droites correspond à une forme extérieure en ω^i_j et $\overline{\omega^i_j}$ à coefficients constants et invariante par le groupe γ. Le raisonnement fait par M. Cartan à propos de l'espace projectif ponctuel donne le résultat suivant :

Il n'y a que des invariants intégraux d'ordre pair. Le nombre d'invariants intégraux linéairement indépendants d'ordre $2s$ est égal à la valeur moyenne du carré du module du caractère du groupe linéaire γ_s suivant lequel sont transformés les produits extérieurs $[\omega^{i_1}_{j_1}\omega^{i_2}_{j_2}\ldots\omega^{i_s}_{j_s}]$.

Pour trouver cette valeur moyenne, nous réduisons γ_s en groupes linéaires irréductibles. Un tel groupe irréductible sera équivalent au produit de deux représentations linéaires irréductibles d'ordre s respectivement des deux groupes hermitiens unimodulaires dont l'un opère sur les x et l'autre sur les y. D'après M. H. Weyl (1), une représentation linéaire irréductible du premier groupe, de poids dominant $\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2$, est associé à un certain schéma de deux lignes que nous désignons par $(\alpha_1\alpha_2)$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 = s$ et $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq 0$. Une représentation linéaire irréductible du

(1) *Math. Zeitschrift*, 23, 1925, p. 287.

deuxième groupe, de poids dominant

$$\beta_1\mu_1+\beta_2\mu_2+\ldots+\beta_p\mu_p, \quad \text{où } p<q \quad \text{et} \quad \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p=s,$$

correspond à un autre schéma (β). Pour que le produit de ces deux représentations figure dans la réduction de γ_s, il faut et il suffit que l'on passe du schéma (α_1, α_2) au schéma (β) par l'échange des lignes et des colonnes. A chaque schéma (α_1, α_2) avec au plus q colonnes correspond alors un groupe irréductible et un seul contenu dans γ_s, la variable dominante étant

$$[\omega_1^1\omega_2^1\ldots\omega_{\alpha_1}^1\omega_1^2\omega_2^2\ldots\omega_{\alpha_2}^2].$$

D'où :

THÉORÈME. — *La valeur moyenne du carré du module du caractère de γ_s est égal au nombre de schémas (α_1, α_2) avec $q\geq\alpha_1\geq\alpha_2\geq 0$ et $\alpha_1+\alpha_2=s$.*

A chaque groupe irréductible obtenu correspond une forme extérieure invariante d'ordre $2s$ que nous désignons par $\Omega(\alpha_1, \alpha_2)$ et qui fournit une intégrale de différentielle exacte. Cette intégrale est nulle lorsqu'on l'étend à une variété fondamentale de Schubert $[a_1, a_2]$ à s dimensions complexes, sauf si la variété a pour symbole $[\alpha_2, \alpha_1+1]$. Les formes Ω n'étant définies qu'à un facteur constant près, on peut supposer que $\int\Omega(\alpha_1, \alpha_2)$ étendue à $[\alpha_2, \alpha_1+1]$ soit égale à 1.

D'après les théorèmes démontrés par M. de Rham (¹), on peut conclure : Dans l'espace complexe des droites, les nombres de Betti relatifs aux dimensions impaires sont nuls. Une base de l'homologie avec division pour les cycles de dimension $2s$ est fournie par les variétés fondamentales de Schubert $[a_1, a_2]$ avec $a_1+a_2=s+1$.

Les résultats précédents se généralisent facilement quand on considère la variété des hyperplans à k dimensions de l'espace projectif complexe à n dimensions.

(¹) *Journ. de Math. pures et appl.*, **10**, 1931, p. 115-200.

/2/

TOPOLOGIE. — *Sur la topologie de certaines variétés algébriques.* Note de M. C. **Ehresmann**, présentée par M. Élie Cartan.

La méthode que nous résumons dans cette Note revient surtout à appliquer le lemme suivant :

Lemme. — *Étant donné un complexe* K *et dans* K *un sous-complexe* L, *si* K — L *est homéomorphe à une cellule ouverte, toute chaîne sur* K, *de dimension inférieure à celle de* K, *peut être déformée d'une façon continue en une chaîne sur* L. *Pendant cette déformation, les points situés sur* L *peuvent être maintenus fixes.*

Dans les applications K et L sont des subdivisions de variétés algébriques.

Variété des droites d'un espace projectif complexe. — $[p]$ désigne un espace à p dimensions contenu dans l'espace projectif complexe $[n]$. $[p, q]$, où $0 \leq p < q \leq n$ est le symbole de Schubert pour la variété des droites situées dans un $[q]$ et rencontrant un $[p]$, l'espace $[p]$ étant contenu tout entier dans $[q]$. La variété de toutes les droites de $[n]$, de symbole $[n-1, n]$, est une variété à $2n-2$ dimensions complexes représentée par une variété algébrique sans singularités dans un espace projectif à $[n(n+1)]-1$ dimensions. $[p, q]$ est représenté par une variété algébrique à $p+q-1$ dimensions complexes. Supposons donnée dans $[n]$ une suite d'espaces, avec un espace pour chaque dimension :

$$(1) \qquad [0] \subset [1] \subset [2] \subset \ldots \subset [p] \subset \ldots \subset [n-1] \subset [n],$$

et considérons toutes les variétés $[p, q]$ définies pour ces espaces. Il existe(¹) une subdivision de $[n-1, n]$ formant un complexe régulier orientable K et telle que les variétés $[p, q]$ soient recouvertes par des sous-complexes de K. A chaque variété $[p, q]$ correspond alors un cycle orienté que nous désignons encore par $[p, q]$.

Si l'on enlève de $[p, q]$ les deux variétés $[p-1, q]$ et $[p, q-1]$, on en fait une cellule ouverte. En effet, une droite de $[p, q]-[p-1, q]-[p, q-1]$ est définie par un point M de $[p]-[p-1]$ et un point M' de

$$[q-1]'-[q-2]',$$

(¹) Voir B. L. Van der Waerden, *Top. Begründung der Kalküls der abzählender Geometrie* (*Math. Ann.*, 102, 1929, p. 360), et S. Lefschetz, *Topology*, Chap. VIII.

où $[q-1]'$ est un espace à $q-1$ dimensions contenu dans q et contenant $[p-1]$, tandis que $[q-2]'$ est l'intersection de $[q-1]'$ avec $[q-1]$. La variété des droites MM' est le produit des deux cellules ouvertes

$$[p]-[p-1] \quad \text{et} \quad [q-1]'-[q-2]'.$$

C'est donc une cellule ouverte dont la frontière est formée par $[p-1, q]$ et $[p, q-1]$. La frontière se réduit à une seule variété si $p=0$ ou $p=q-1$. Ainsi $[0, q]-[0, q-1]$ et $[q-1, q]-[q-2, q]$ sont des cellules ouvertes.

En appliquant le lemme énoncé, on démontre par récurrence le théorème :

THÉORÈME. — *Sur la variété $[n-1, n]$, tout cycle Γ_r peut être déformé d'une façon continue en une combinaison linéaire de cycles $[p, q]$ de dimension $\leq r$.*

Les cycles algébriques $[p, q]$ étant de dimension paire, tout cycle Γ_r de dimension impaire sera homologue à 0. Tout cycle Γ_r de dimension paire sera homologue à une combinaison linéaire des cycles $[p, q]$ de dimension r. Les cycles $[p, q]$ de dimension r sont linéairement indépendants, car la matrice des nombres d'intersection de ces cycles $[p, q]$ avec les cycles $[n-q, n-p]$, de dimension complémentaire, est égale à la matrice unité. Donc :

THÉORÈME. — *Les cycles $[p, q]$ de dimension r forment une base d'homologie pour la dimension r. Il n'y a pas de coefficients de torsion. Les nombres de Betti pour les dimensions impaires sont nuls.*

Variété des $[k]$ d'un espace projectif complexe $[n]$. — Nous considérons toutes les variétés fondamentales de Schubert (¹) de symboles $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$, les espaces $[a_i]$ étant pris parmi ceux de la suite (1). On peut généraliser pour ces variétés les raisonnements précédents, et l'on obtient ainsi le théorème :

THÉORÈME. — *Les cycles $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ de dimension r forment une base d'homologie pour la dimension r. Il n'y a pas de coefficients de torsion. Les nombres de Betti pour les dimensions impaires sont nuls.*

Variétés réelles. — Sur la variété des droites réelles ou des $[h]$ réels d'un espace projectif $[n]$, toute chaîne C_r peut encore être déformée en une chaîne contenue dans un certain nombre de variétés fondamentales de dimensions $\leq r$. Toutes ces variétés fondamentales $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_h]$, où les

(¹) Voir C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume* (*Encykl. Math. Wiss.*, III_2, 7, p. 794).

éléments considérés sont réels, ne définissent plus des cycles orientés, mais des cycles (mod 2). Les cycles (mod 2) correspondant aux $[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_h]$ de dimensions r sont encore indépendants (mod 2) et forment une base d'homologie (mod 2).

Pour l'étude des cycles orientés, limitons-nous aux variétés de droites. On peut démontrer que la variété $[p, q]$ est orientable si p et q sont pairs, sinon elle est non orientable. Il y a exception pour $[q-1, q]$ qui est orientable si q est impair et non orientable si q est pair. Ces renseignements suffisent pour déterminer les nombres de Betti et les coefficients de torsion de la variété réelle $[n-1, n]$. On trouve un certain nombre de coefficients de torsion tous égaux à 2, et les seuls nombres de Betti différents de 0 correspondent aux dimensions $4m$ et sont égaux à 1.

La variété des droites réelles $[n-1, n]$ est toujours doublement connexe; sa variété de recouvrement simplement connexe est la variété des droites orientées qui est homéomorphe à la variété des points complexes d'une quadrique à $n-1$ dimensions complexes. La méthode indiquée ici s'applique à l'étude d'une telle quadrique. Elle s'applique encore à d'autres variétés, par exemple à la variété des espaces $[h]$ situés sur une quadrique ou à la variété des éléments linéaires d'un espace projectif.

/3/

GÉOMÉTRIE. — *Un théorème relatif aux espaces localement projectifs et sa généralisation.* Note de M. C. **Ehresmann**, présentée par M. Élie Cartan.

Définition. — Un espace localement projectif est une variété topologique sur laquelle est défini un système de courbes, appelées géodésiques, tel qu'il existe une représentation topologique d'un voisinage de chaque point sur un voisinage de l'espace projectif, les segments de géodésiques ayant pour images les segments de droites.

Nous cherchons à représenter un espace localement projectif E_n sur l'espace projectif, ou mieux sur l'espace sphérique. Les transformations linéaires et homogènes de $n+1$ variables définissent un groupe, que nous appelons le groupe projectif de l'espace sphérique, quand on considère comme transformation identique celles qui sont définies par la matrice unité multipliée par un facteur positif. Le raisonnement qui est résumé ici utilise essentiellement le fait que l'espace sphérique est simplement connexe, et le lemme suivant, conséquence immédiate du théorème fondamental de la géométrie projective :

Lemme. — *Si deux domaines de l'espace projectif (ou de l'espace sphérique) sont en correspondance topologique, les segments de droites ayant pour images des segments de droites, il existe une transformation projective bien déterminée qui réalise cette correspondance.*

Toute courbe $\widehat{OM}$ de l'espace E_n peut être recouverte par une chaîne de voisinages dont chacun admet une représentation géodésique sur l'espace sphérique. Quand la représentation d'un voisinage de O est fixée, celle de toute la chaîne est bien déterminée. Donc toute courbe de l'espace E_n, ainsi qu'un voisinage ouvert de cette courbe, admet un développement bien déterminé sur l'espace sphérique. La condition nécessaire et suffisante pour qu'on obtienne toute courbe de l'espace sphérique comme image d'une courbe de E_n est que E_n soit un espace clos à groupe de Poincaré fini. L'espace universel de recouvrement de E_n est alors équivalent à l'espace sphérique. E_n peut être défini à partir de l'espace sphérique par un groupe fini de transformations projectives sans points invariants. Comme un tel groupe fini peut être considéré comme orthogonal, on arrive au théorème :

Théorème. — *Les espaces localement projectifs clos et à groupe de Poincaré fini sont équivalents aux espaces localement sphériques* (espaces de Riemann à courbure constante positive).

Le raisonnement précédent [1] s'applique à l'étude des espaces localement homogènes dont la structure est caractérisée par un pseudo-groupe de Lie [2]. Voici les principales étapes de cette étude.

Soit E_n un espace localement homogène que nous supposerons localement équivalent à un espace homogène de Lie H_n.

I. L'espace universel de recouvrement de H_n fournit un espace homogène $\overline{H_n}$ simplement connexe.

II. Une transformation topologique entre deux domaines d'un $\overline{H_n}$, qui change toute transformation infinitésimale en une autre transformation infinitésimale du groupe de structure de $\overline{H_n}$, est réalisée par une automorphie de tout l'espace $\overline{H_n}$.

III. Toute courbe de E_n, ainsi qu'un voisinage ouvert de cette courbe, admet une représentation bien déterminée sur $\overline{H_n}$, la représentation conservant la structure locale.

IV. Si $\overline{H_n}$ est clos, tout E_n clos et à groupe de Poincaré fini admet $\overline{H_n}$ comme espace universel de recouvrement et se trouve caractérisé par un groupe fini d'automorphies de $\overline{H_n}$ sans points invariants dans $\overline{H_n}$. Si $\overline{H_n}$ est ouvert, tout E_n clos a un groupe de Poincaré infini.

Remarquons qu'il n'existe pas toujours un espace homogène de Lie qui soit localement équivalent à un espace localement homogène donné. Ceci résulte du fait qu'il y a des groupes de Lie simplement connexes G admettant des sous-groupes continus g qui sont ouverts dans G. L'ensemble de deux tels groupes [3] G et g définit toujours un pseudo-groupe dans un certain domaine, mais il n'existe pas de groupe global qui soit localement semblable à ce pseudo-groupe. En d'autres termes, le deuxième théorème de Lie peut affirmer seulement l'existence d'un pseudo-groupe engendré par un système donné de transformations infinitésimales. Par contre, il existe toujours, comme il a été démontré par M. E. Cartan [4], un groupe complet satisfaisant aux conditions du troisième théorème de Lie.

---

(1) Adapté du raisonnement de M. E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, Chap. III (Paris, 1928).

(2) Voir O. Veblen and J. H. C. Whitehead, *The Foundations of differential Geometry* (Cambridge Tracts, n° 29, 1932), Chap. VI et VII, et J. H. C. Whitehead, *Locally homogeneous Spaces, etc.* (*Ann. of Math.*, 33, 1932, p. 681-687).

(3) E. Cartan, *La Théorie des groupes finis et continus et l'*Analysis situs (*Mémorial Sc. math.*, fasc. XLII, Paris, 1930, p. 25).

(4) *Comptes rendus*, 190, 1930, p. 914-916 et 1005-1007.

/7/

GÉOMÉTRIE. — *Sur la notion d'espace complet en géométrie différentielle.* Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Élie Cartan.

Dans une théorie de géométrie différentielle, il importe de définir ce qu'il faut entendre par espace complet, lorsqu'on veut aborder l'étude des propriétés *globales* d'un espace. La notion d'espace complet dépendra des objets géométriques fondamentaux (élément linéaire, élément d'aire, connexion affine, etc.) qui définissent la géométrie différentielle considérée. D'une façon générale, on pourrait considérer comme complet un espace qui n'est pas prolongeable, c'est-à-dire qui n'est pas isomorphe à un domaine d'un espace de même structure locale, ce domaine ayant au moins un point frontière. Mais la classe des *espaces non prolongeables* est trop vaste pour que leur étude conduise à des théorèmes simples. Dans le cas d'un espace de Riemann, l'espace est dit complet ou *normal* si toute ligne divergente a une longueur infinie (1). Je me propose d'étendre cette notion d'espace normal au cas des espaces généralisés de M. E. Cartan (2) et d'indiquer un théorème fondamental pour la classe des espaces normaux ainsi définis.

Du point de vue global, un espace généralisé de M. E. Cartan peut être

(1) Voir H. Hopf, W. Rinow, *Comment. Math. Helvet.*, 3, 1931, p. 209-225.

(2) Voir *La méthode du repère mobile, etc.* (*Actualités scient. et ind.*, fasc. 194, 1935, p. 54-65).

défini de la façon suivante : soient E une variété analytique à n dimensions, H un espace homogène de Lie à n dimensions, G le groupe de Lie opérant dans H et g le sous-groupe qui laisse invariant un point O de H. A chaque point x de E nous supposons associé un espace H_x isomorphe à H, le point x étant supposé commun à E et H_x. Un isomorphisme de H sur H_x peut être considéré comme un repère dans H_x. Si cet isomorphisme met en correspondance les points x et O, on a un repère d'origine x, qui sera désigné par R_x. S étant une transformation de G, on désignera par $R_x S$ le repère qui se déduit de R_x par la transformation S relativement à R_x. L'espace E sera un espace généralisé par rapport à H lorsque tout point x_0 admet dans E un voisinage $V(x_0)$ tel qu'aux points x de $V(x_0)$ on ait associé une famille de repères R_x et tel qu'à l'ensemble de deux repères R_x et R_{x+dx} de cette famille on ait associé une transformation infinitésimale

$$S(x, dx) = \sum_{i=1}^{r} e_i X_i, \qquad \text{où} \quad e_i = p_i(x, dx),$$

les fonctions $p_i(x, dx)$ étant analytiques en x et linéaires en dx ; de plus les fonctions $p_i(x, dx)$, pour $i = 1, \ldots, n$, sont linéairement indépendantes par rapport à dx, en supposant que g soit engendré par les transformations infinitésimales telles que $e_1 = \ldots = e_n = 0$. La famille de repères R_x sera appelée une famille analytique de repères. On obtient une famille équivalente en remplaçant le repère R_x par $R_x S_u$, où u est un point de la variété g, ce point étant une fonction analytique de x dans $V(x_0)$. Les transformations infinitésimales associées à cette deuxième famille de repères seront $S_u^{-1} S(x, dx) S_{u+du}$ dont les paramètres sont

$$e_i = \varpi_i(x, dx, u, du),$$

où les n premières fonctions ϖ_i ne dépendent pas de du, tandis que les $r - n$ dernières sont linéairement indépendantes par rapport à du. Deux familles analytiques de repères associées à deux domaines $V(x_0)$ et $V(x_1)$ doivent être équivalentes dans tout domaine commun à $V(x_0)$ et $V(x_1)$.

Soient $\omega_i(\xi, d\xi)$ les paramètres de la transformation infinitésimale $S_\xi^{-1} S_{\xi+d\xi}$. Le système d'équations différentielles

$$\omega_i(\xi, d\xi) = p_i(x, dx),$$

où x est supposé être une fonction analytique d'un paramètre t, permet d'associer à tout arc analytique de E d'origine x_0 un arc analytique de H d'origine O. Il résulte de l'homogénéité de H que ce résultat est valable pour un arc analytique arbitraire de E, et pas seulement pour un élément d'arc suffisamment petit.

D'une manière analogue, un *élément* d'arc analytique d'origine O peut être *développé* suivant un *élément* d'arc d'origine x_0. Mais cette propriété n'a pas forcément lieu pour un arc analytique quelconque lorsque E ne satisfait pas à des conditions d'ordre global. Au point de vue local la théorie des courbes est la même dans les espaces E et H. Pour que la théorie des courbes soit encore la même du point de vue global, il faut et il suffit que E satisfasse à la condition suivante : *tout arc analytique de* H *peut se développer suivant un arc analytique de* E *ayant pour origine un point* x *quelconque*. Un espace E satisfaisant à cette condition sera dit *normal*. Cette condition généralise la condition de normalité pour les espaces de Riemann. Si H′ est un espace homogène localement isomorphe à H, l'espace E peut aussi être considéré comme un espace généralisé par rapport à H′. Si E est normal par rapport à H, il est aussi normal par rapport à H′. *Un espace normal est non prolongeable, mais un espace généralisé non prolongeable n'est pas forcément normal.*

La notion d'*isomorphie* entre deux espaces généralisés E et E′ ne présente pas de difficultés. Deux espaces E et E′ sont dits *localement isomorphes* lorsqu'il existe un domaine de E qui est isomorphe à un domaine de E′. On a le théorème suivant :

Étant donné deux espaces généralisés normaux et localement isomorphes, s'ils sont tous les deux simplement connexes, ils sont globalement isomorphes.

Ce théorème, dont la démonstration sera donnée dans un autre article, généralise un théorème analogue relatif aux espaces de Riemann [1]. Tout espace de recouvrement d'un espace normal est également un espace normal. Par suite si E et E′ sont deux espaces normaux localement isomorphes, leurs espaces de recouvrement simplement connexes sont globalement isomorphes.

---

[1] Voir W. Rinow, *Math. Zeitschrift*, 35, 1932, p. 514.

/ 10 /

GÉOMÉTRIE. — *Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan.* Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Élie Cartan.

Dans une variété analytique, peut-on joindre deux points arbitraires par un arc analytique? On sait qu'il en est ainsi lorsque la variété est une variété analytique d'un espace euclidien (1). Le but de cette Note est de montrer que la réponse est encore affirmative pour les principaux espaces qu'on étudie en géométrie différentielle. On a le théorème :

Dans un espace de Cartan analytique on peut faire passer un arc analytique par un nombre fini de points arbitraires, donnés dans un certain ordre.

Pour le cas particulier d'une variété à connexion affine analytique, ce théorème a été démontré par M. T. Y. Thomas (2), mais sa démonstration

(1) H. Whitney, *Ann. of Math.*, 38, 1937, p. 809-818.

(2) *Ann. of Math.*, 38, 1937, p. 120-130.

se généralise sans difficulté. Soient G un groupe de Lie, H un espace homogène transformé transitivement par G, g le sous-groupe de G laissant fixe le point o. Une structure d'espace de Cartan analytique (3), (4) implique les données suivantes : 1° Une variété analytique E; 2° une correspondance associant à tout point x de E un espace H_x isomorphe à H ainsi qu'un point de H_x qu'on identifie avec x; 3° pour tout x, une famille d'isomorphismes de H sur H_x qui représentent o sur x et qui sont de la forme $\xi = \xi_0 u$, où ξ_0 est un isomorphisme particulier de la famille et u un élément arbitraire de g. On peut convenir d'appeler ξ un repère d'origine x; 4° les éléments ξ, quand x décrit E, engendrent une variété analytique M telle que ξu soit une fonction analytique de ξ et u (on sait que g a une structure analytique intrinsèque) et telle que le point x correspondant à ξ soit une fonction analytique de ξ. Le point x sera appelé la projection de ξ sur E; 5° une fonction qui fait correspondre à tout vecteur $\xi + d\xi$ de M une transformation infinitésimale $p(\xi + d\xi)$ de G, c'est-à-dire un élément de l'espace vectoriel T tangent à G en i (élément unité), cette fonction $p(\xi + d\xi)$ satisfaisant aux conditions suivantes : a. $p(\xi + d\xi)$ est une fonction analytique du vecteur $\xi + d\xi$ et définit une application linéaire régulière de l'espace vectoriel tangent à M en ξ sur T;

$$b.\ p[\xi(u + du)] = u^{-1}(u + du); \qquad c.\ p[(\xi + d\xi)u] = u^{-1}p(\xi + d\xi)u.$$

La théorie d'un espace de Cartan repose sur l'équation

$$p(\xi + d\xi) = \eta^{-1}(\eta + d\eta) \qquad (\eta = \text{élément de G}),$$

qui établit une correspondance entre arcs de M et arcs de G ainsi qu'une correspondance, en vertu des conditions b et c, entre arcs de E et arcs de H.

Si l'on veut s'appuyer sur la démonstration de M. T. Y. Thomas, le théorème énoncé résulte immédiatement de ce qui précède, car la fonction $p(\xi + d\xi)$ définit dans E une équipollence absolue, la condition d'équipollence de deux vecteurs $\xi + d\xi$ et $\xi' + d\xi'$ étant $p(\xi + d\xi) = p(\xi' + d\xi')$. Donc M est une variété à connexion affine analytique. En admettant que deux points de M qui se projettent en a et b peuvent être joints par un arc analytique, la projection de cet arc sur E sera un arc analytique joignant a et b.

La démonstration directe du théorème présente de l'intérêt, car elle

---

(3) É. Cartan, *Ann. of Math.*, 38, 1937, p. 1-13.

(4) C. Ehresmann, *Comptes rendus*, 202, 1936, p. 2033-2035.

conduit à définir au voisinage d'un arc analytique arbitraire un système de coordonnées analytiques qu'on peut appeler coordonnées cylindriques normales. Soient L l'espace vectoriel tangent à g en i et K un espace vectoriel tel que T soit la somme directe de K et L. Prenons n vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ formant une base de K. Soit $\xi(\theta)$ l'intégrale de l'équation

$$p(\xi + d\xi) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, d\theta \, e_i,$$

telle que $\xi(0) = \xi_1$. La projection x de $\xi(\theta)$ sera une fonction analytique des quantités $q_i = a_i\theta$, appelées coordonnées normales ([3]). Supposons que les vecteurs e_i et le repère ξ_1 soient des fonctions analytiques de t. Le point x de coordonnées normales $q_1 = 0, q_2, \ldots, q_n$ sera une fonction analytique $\varphi(t, q_2, \ldots, q_n)$. Étant donné dans E un arc analytique C, on peut déterminer ξ_1 et les vecteurs de base e_i en fonctions analytiques de t de telle façon que la projection de ξ_1 décrive C, t variant de 0 à 1, et que $p(\xi_1 + d\xi_1) = e_1 \, dt$. Considérant $t, q_2, \ldots, q_n$ comme un système de coordonnées cartésiennes, la fonction $x = \varphi(t, q_2, \ldots, q_n)$ définit une application analytique localement biunivoque d'un voisinage du segment (0, 1) de l'axe des t sur un voisinage de l'arc C, le segment (0, 1) étant appliqué sur l'arc C. Cette application définit un système de *coordonnées cylindriques normales* au voisinage de C. Considérons alors dans E l'ensemble des arcs analytiques d'origine a. L'ensemble des points x qui sont atteints par ces arcs forme d'après ce qui précède un ensemble ouvert A. Soit m un point de la frontière de A. On peut encore suivre le raisonnement de M. T. Y. Thomas et montrer qu'il existe un système de coordonnées cylindriques normales recouvrant a et m et par suite un arc analytique joignant a et m. Enfin l'existence d'un arc analytique passant par un nombre fini de points donnés se démontre d'une façon analogue en procédant par récurrence.

Ce qui précède permet de donner une démonstration simple du théorème ([4]) :

Si deux espaces de Cartan analytiques sont complets (ou normaux) et simplement connexes, tout isomorphisme local entre les deux espaces se prolonge en un isomorphisme global.

En effet l'isomorphisme local entre un voisinage de a et un voisinage de a' fait correspondre alors à *tout* arc analytique C d'origine a un arc analytique déterminé C′ d'origine a', et à un système de coordonnées cylindriques normales autour de C un système de coordonnées cylindriques normales autour de C′. On obtient ainsi un isomorphisme entre un voisinage de C et un voisinage de C′. En faisant correspondre à l'extrémité d'un arc C l'extrémité de l'arc correspondant C′, on montre que l'on établit un isomorphisme global entre les deux espaces, à condition qu'ils soient simplement connexes.

/11/

GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE. — *Sur les congruences paratactiques et les parallélismes dans les espaces projectifs.* Note de M. C. EHRESMANN, présentée par M. Élie Cartan.

Soient P_n l'espace projectif réel à n dimensions, H_n l'espace projectif complexe à n dimensions complexes engendré par P_n et désignons par x, $\bar{x}$ deux points imaginaires conjugués de H_n, c'est-à-dire homologues dans l'anti-involution admettant P_n comme lieu de ses points invariants. Pour qu'il existe dans P_n un champ de directions sans singularités, il faut et il suffit que n soit impair. Dans ce cas, il existe même des congruences de droites contenant une droite et une seule passant par un point arbitraire; une telle congruence forme un *système de fibres* rectilignes pour P_n. Par exemple, prenons dans H_{2p+1} deux variétés planes imaginaires conjuguées H_p et $\overline{H}_p$ sans points communs. Par tout point réel de P_{2p+1} passe une droite et une seule rencontrant H_p et $\overline{H}_p$; l'ensemble de ces droites, qui sont réelles, s'appelle une congruence paratactique et forme un système de fibres rectilignes pour P_{2p+1}. La variété des fibres est homéomorphe à H_p; mais on remarque que P_{2p+1} n'est pas le produit de H_p par une droite. L'ensemble des H_p sans points réels forme deux variétés connexes disjointes. H_p et $\overline{H}_p$ sont de même espèce (appartiennent à la même variété connexe) ou d'espèce différente suivant que p est impair ou pair. Il y a donc deux espèces de congruences paratactiques *orientées*. Si p est pair, deux congruences paratactiques orientées contiennent au moins une droite orientée commune ou un couple de droites orientées opposées suivant qu'elles sont de même espèce ou d'espèce différente. Si p est impair, en général deux congruences paratactiques n'ont pas de droite non orientée commune quand elles sont de même espèce, et ont au moins une droite orientée commune et un couple de droites orientées opposées quand elles sont d'espèce différente.

Dans H_{4k-1} considérons deux variétés H_{2k-1} et $\overline{H}_{2k-1}$ sans points communs. H_{2k-1} admet un système de fibres formé par des droites projectives complexes; par exemple une anticongruence linéaire $\mathcal{F}_k$, c'est-à-dire le système des droites invariantes par une anti-involution $\mathcal{I}$ sans point double. Soit Δ une droite de $\mathcal{F}_k$. La variété plane à trois dimensions contenant $\Delta, \overline{\Delta}$ est une variété réelle Π. *L'ensemble des variétés* Π *forme un système de fibres planes à trois dimensions pour* P_{4k-1}. La topologie de la variété des fibres, c'est-à-dire de $\mathcal{F}_k$, s'étudie simplement. Considérons dans H_{2k-1} des droites Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_k$ appartenant à $\mathcal{F}_k$ telles que H_{2k-1} soit la plus petite variété plane qui les contienne toutes. Soit $\mathcal{F}_i$ la variété des droites de $\mathcal{F}_k$ qui appartiennent à la plus petite variété plane contenant $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i$. Dans $\mathcal{F}_k$ tout cycle est homologue à O ou à un multiple du cycle défini par $\mathcal{F}_i$. Tout cycle dont la dimension est comprise entre $4(i-1)$ et $4i$ est déformable en un cycle situé sur $\mathcal{F}_i$. Le polynôme de Poincaré de $\mathcal{F}_k$ est $t^{4(k-1)}+t^{4(k-2)}+\ldots+t^4+1$. En particulier $\mathcal{F}_2$ est homéomorphe à la sphère S_4 à quatre dimensions. On remarque que P_{4k-1} n'est pas le produit topologique de $\mathcal{F}_k$ par l'espace projectif réel à trois dimensions. La sphère S_{4k-1} admettra un système de fibres sphériques à trois dimensions, la variété des fibres étant encore $\mathcal{F}_k$. On constate que H_{2k-1} a le même anneau d'homologie que le produit topologique de $\mathcal{F}_k$ par la sphère S_2, et il serait intéressant de savoir si H_{2k-1} est homéomorphe à ce produit topologique.

Considérons dans H_{4k-1} une quadrique non dégénérée Q_{4k-2} sans points réels et invariante par l'anti-involution $x \to \overline{x}$. Supposons que H_{2k-1} et $\overline{H}_{2k-1}$ soient deux génératrices de Q_{4k-2}. Soit x un point arbitraire de H_{2k-1}. Le plan tangent à Q_{4k-2} en $\overline{x}$ coupe H_{2k-1} suivant une variété plane $\overline{X}_{2k-2}$ ne contenant pas x. La correspondance $x \to \overline{X}_{2k-2}$ est une antipolarité elliptique $\mathcal{L}$ dans H_{2k-1}. On peut trouver une anti-involution $\mathcal{I}$ définie dans H_{2k-1} et telle que le point x' correspondant à x

appartienne à $\overline{X}_{2k-2}$. Les droites $x\overline{x'}$ forment alors une famille Φ de génératrices de Q_{4k-2}. Par un point arbitraire y de $x\overline{x'}$ passe une génératrice bien déterminée H^{y}_{2k-1} de Q_{4k-2} rencontrant toutes les droites de Φ. Quatre génératrices H^{y}_{2k-1} déterminent sur toutes ces droites le même rapport anharmonique. Soit λ le rapport anharmonique correspondant à trois génératrices fixes et une génératrice variable et désignons celle-ci par H^{λ}_{2k-1}. Soient Δ la droite xx' et Π la variété plane à trois dimensions contenant Δ et $\overline{\Delta}$. Les variétés Π forment dans P_{4k-1} un système de fibres planes; toute génératrice H^{λ}_{2k-1} rencontre Π suivant une droite Δ_λ. La famille de génératrices H^{λ}_{2k-1} détermine dans P_{4k-1} une famille $\mathfrak{S}$ de congruences paratactiques sans droites communes. Les droites de ces congruences sont les droites réelles des fibres Π. Pour les droites appartenant à une même fibre Π, la famille $\mathfrak{S}$ détermine un parallélisme de Clifford. *La famille $\mathfrak{S}$ définit un parallélisme pour l'ensemble des droites appartenant à l'ensemble des fibres* Π. Toute congruence paratactique admet au moins une droite commune avec une congruence de la famille $\mathfrak{S}$.

Considérons en particulier P_7 et H_7. L'antipolarité $\mathfrak{T}$ fait correspondre à la droite Δ une droite Δ'. Les génératrices à trois dimensions de Q_6 qui passent par Δ_λ sont les variétés planes déterminées par Δ_λ et $\Delta'_{\lambda'}$, où λ' est quelconque. Établissons entre λ et λ' une anti-involution de première espèce qui soit échangeable avec l'anti-involution de deuxième espèce $\lambda \rightarrow \lambda_1$ définie par $\overline{H^{\lambda}_3} = H^{\lambda_1}_3$. La famille $\mathfrak{G}$ des génératrices contenant Δ_λ et $\Delta'_{\lambda'}$ forme alors dans Q_6 un système de fibres planes à trois dimensions complexes. La famille $\mathfrak{G}$ définit dans P_7 une famille de congruences paratactiques telle que toute droite de P_7 appartient à une de ces congruences et une seule; en d'autres termes *$\mathfrak{G}$ définit un parallélisme* (¹) *pour les droites de* P_7. La variété des fibres du système $\mathfrak{G}$ est homéomorphe à la sphère S_6. On remarque encore que Q_6 a le même anneau d'homologie que le produit topologique de H_3 par S_6.

Ce qui précède pose le problème général de l'existence de systèmes de fibres planes dans les espaces projectifs réels ou complexes, problème lié à celui de l'existence de parallélismes.

(¹) La découverte de parallélismes dans P_7 est due à M. É. Cartan.

/12/

GÉOMÉTRIE ET TOPOLOGIE. — *Sur la variété des génératrices planes d'une quadrique réelle et sur la topologie du groupe orthogonal à n variables.* Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Élie Cartan.

Soit P_{2n+1} l'espace projectif à $2n+1$ dimensions dans lequel nous considérons la quadrique Q_{2n} d'équation

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2-y_0^2-y_1^2-\ldots-y_n^2=0.$$

Soit P_{n+p+1} le sous-espace projectif défini par les équations

$$y_{p+1}=y_{p+2}=\ldots=y_n=0.$$

Soit Q_{n+p} l'intersection de Q_{2n} par P_{n+p+1} ; Q_{n+p} sera défini par l'équation

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2-y_0^2-y_1^2-\ldots-y_p^2=0.$$

En particulier Q_n sera une quadrique homéomorphe à une sphère Q_n

$$x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2-y_0^2=0.$$

Soit l_0 un point de Q_n et l_1 une tangente orientée passant par l_0. Appelons O_i le point de P_{2n+1} dont toutes les coordonnées sont nulles sauf y_i. Le plan (O_1, l_1) coupe Q_{n+1} suivant deux génératrices g_1 et g_1' passant par l_0. Soit g_1 la génératrice qui pénètre dans l'angle déterminé par la droite orientée l_1 et par la droite $g_0 O_1$ orientée d'une façon déterminée. Nous avons ainsi une correspondance biunivoque et continue entre l'ensemble (l_0, l_1) et la génératrice g_1. Donc

La variété des éléments linéaires orientés de la sphère Q_n est homéomorphe à la variété des génératrices g_1 de Q_{n-1}.

Soit l_2 un élément plan orienté tangent à Q_n et contenant l_1. L'ensemble (l_0, l_1, l_2) sera appelé un élément de direction composé. On définit de même un élément de direction composé $(l_0, l_1, l_2, \ldots, l_p)$, où l_i est un élément plan orienté à i dimensions tangent à Q_n et contenant les éléments l_j pour $j < i$. Par projection centrale de centre O_1, on fait correspondre à l_2 un élément plan orienté l'_2 contenant g_1 et tangent à Q_{n+1}, c'est-à-dire contenu dans la variété polaire de g_1 par rapport à Q_{n+1}. Par projection centrale de centre O_2 on fait correspondre à l'_2 deux génératrices g_2 et g'_2 à deux dimensions de Q_{n+2}. Comme précédemment, une règle simple permet de choisir d'une façon déterminée l'une de ces deux génératrices, soit g_2, de sorte qu'on aura une correspondance biunivoque et continue entre l'élément de direction composé (l_0, l_1, l_2) et la génératrice g_2. Par récurrence on démontre alors facilement le théorème suivant :

La variété $V_{n+1,p+1}$ des éléments de direction composés $(l_0, l_1, \ldots, l_p)$ de la sphère Q_n est homéomorphe à la variété des génératrices g_p à p dimensions de la quadrique Q_{n+p}.

Soit $\sigma_{n+1,p+1}$ la figure formée de $p+1$ vecteurs orthogonaux deux à deux d'origine o dans l'espace euclidien à $n+1$ dimensions. $V_{n+1,p+1}$ est également homéomorphe à la variété formée par l'ensemble des éléments $\sigma_{n+1,p+1}$. Cette variété a été étudiée au point de vue topologique par M. E. Stiefel [1], et joue un rôle fondamental dans la théorie des p-champs de directions sur une variété différentiable. En particulier $V_{n+1,n+1}$ est la variété du groupe orthogonal à $n+1$ variables.

La variété du groupe orthogonal réel à $n+1$ variables est homéomorphe à la variété des génératrices g_n de la quadrique Q_{2n}.

La variété des génératrices g_n se compose bien de deux variétés connexes comme la variété du groupe orthogonal. La propriété précédente devient évidente si l'on remarque que la variété plane définie par

$$x_0 = x_1 = \ldots = x_n = 0$$

ne rencontre aucune des génératrices g_n. Par suite les équations de g_n peuvent toujours se mettre sous la forme

$$y_i = \Sigma a_{ik} x_k \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n),$$

et, vérifiant identiquement l'équation de Q_{2n}, définissent bien une transformation orthogonale. *La variété du groupe orthogonal connexe n'est autre que la variété des semi-spineurs simples de composantes homogènes réelles ξ_0,*

(1) *Commentarii Math. Helv.*, 8, IV, 1935-36, p. 305-353.

$\xi_{i_1 i_2}, \ldots, \xi_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}}$, où $2k \leq n+1$. M. E. Cartan [2] a montré que c'est une variété algébrique de l'espace projectif de dimension $2^n - 1$ définie par un certain nombre d'équations quadratiques. En particulier la variété du groupe orthogonal connexe à quatre variables est représentée par la quadrique Q_6 elle-même, ce qui montre que la variété simplement connexe qui recouvre deux fois Q_6 est le produit topologique de deux sphères à trois dimensions.

On connaît le polynôme de Poincaré de la variété $V_{n+1, n+1}$ du groupe orthogonal connexe à $n+1$ variables [3]. Dans ma Thèse [4] j'ai étudié d'une façon élémentaire la topologie de la variété des génératrices g_n de Q_{2n}, c'est-à-dire la topologie de $\overline{V}_{n+1, n+1}$. Les résultats obtenus alors peuvent s'énoncer maintenant de la façon suivante : Considérons dans l'espace euclidien E_{n+1} $n+1$ axes de coordonnées d'origine O et soit E_i la variété plane déterminée par les i premiers axes de coordonnées. Considérons des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_k$ tels que $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k < n+1$ et soit $[0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ l'ensemble des variétés planes à k dimensions passant par O et admettant avec E_{a_i} une intersection à i dimensions au moins. Soit $\big[[0, a_1, a_2, \ldots, a_k]\big]$ l'ensemble des rotations autour du point O telles que leurs points fixes forment au moins une variété plane à k dimensions appartenant à l'ensemble $[0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$.

Les variétés $\big[[0, a_1, a_2, \ldots, a_k]\big]$ *découpent la variété* $\overline{V}_{n+1, n+1}$ *en cellules et forment les cycles de base pour l'homologie modulo 2. Il y a un certain nombre de coefficients de torsion qui sont tous égaux à 2.*

---

[2] *Leçons sur la théorie des spineurs*, Chap. V et VI, surtout § 123 (Paris, 1938).

[3] L. PONTJAGIN, *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 1277-1280.

[4] *Ann. of Math.*, 35, 1934, p. 396-443; *Journ. de Math.*, 16, 1937, p. 69-100.

/13/

TOPOLOGIE. — *Sur la topologie des groupes simples clos.*
Note [1] de M. Charles Ehresmann, présentée par M. Élie Cartan.

J'ai indiqué [2] pour la variété du groupe orthogonal à n variables une subdivision en cellules dont on déduit, en particulier, les bases des groupes d'homologie modulo 2. La même méthode s'applique aussi bien aux groupes simples clos des deux autres grandes classes de groupes simples [3].

Soit $H_{n+1,p+1}$ l'hyperquadrique définie par l'équation

$$x_0\bar{x}_0 + x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n - y_0\bar{y}_0 - \ldots - y_p\bar{y}_p = 0, \tag{1}$$

dans l'espace projectif complexe P_{n+p+1}, où $x_0, x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_p$ forment un système de coordonnées projectives complexes. En supposant $n \geq p$, $H_{n+1,p+1}$ contient des génératrices planes dont la dimension complexe maximum est p. Les équations d'une génératrice g_p de dimension p peuvent toujours s'écrire sous la forme

$$x_i = \sum_{j=0}^{p} a_{ij} y_j \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{2}$$

(1) Séance du 17 avril 1939.

(2) *Comptes rendus*, 208, 1939, p. 321-323.

(3) Une partie des résultats suivants ont déjà été obtenus par d'autres méthodes. Voir résumé et bibliographie dans E. Cartan, *Enseignement math.*, 35, 1936, p. 196-200.

En particulier si $p = n$, les équations (2) définissent une transformation linéaire laissant invariante la forme d'Hermite $(x\overline{x}) = x_0\overline{x}_0 + \ldots + x_n\overline{x}_n$. Désignons par $W_{n+1,p+1}$ la variété des génératrices planes g_p de $H_{n+1,p+1}$. La variété $W_{n+1,n+1}$ est donc aussi la variété du groupe linéaire de la forme d'Hermite $(x\overline{x})$. En considérant $H_{n+1,n}$ comme l'intersection de $H_{n+1,n+1}$ par la variété définie par $y_n = 0$, on voit que par toute génératrice g_{n-1} de $H_{n+1,n}$ passe une génératrice déterminée g_n de $H_{n+1,n+1}$ définissant une transformation linéaire *unimodulaire* laissant invariant $(x\overline{x})$. Donc la variété du groupe linéaire unimodulaire de la forme d'Hermite $(x\overline{x})$ n'est autre que la variété $W_{n+1,n}$. De plus la variété $W_{n+1,n+1}$ est le produit topologique de $W_{n+1,n}$ par le cercle. Dans l'espace vectoriel à $n+1$ dimensions sur le corps des nombres complexes, le carré scalaire d'un vecteur x étant défini par $(x\overline{x})$, la variété $W_{n+1,p+1}$ peut aussi être considérée comme la variété des figures formées de $p+1$ vecteurs unitaires orthogonaux.

En considérant $H_{n+1,p}$ comme une section plane de $H_{n+1,p+1}$, les propriétés topologiques de $W_{n+1,p+1}$ peuvent se déduire de celles de $W_{n+1,p}$. Soit g_p^0 une génératrice donnée de $H_{n+1,p+1}$. Désignons par $[k]$ une variété plane à k dimensions et considérons une suite de variétés planes $[p] = g_p^0$, $[p-1]$, ..., $[1]$, $[0]$ telles que $[p] \supset [p-1] \supset \ldots \supset [1] \supset [0]$. Soit un ensemble d'entiers $a_0, a_1, \ldots, a_k$ tels que $0 \leq a_0 < a_1 < \ldots < a_k \leq p$ et désignons par $[(a_0, a_1, \ldots, a_k)]$ l'ensemble des génératrices g_p qui coupent $[a_i]$ suivant une variété à i dimensions au moins. Par récurrence pour le nombre p, on démontre que la différence

$$[(a_0, a_1, \ldots, a_k)] - [(a_0 - 1, a_1, \ldots, a_k)] - \ldots - [(a_0, a_1, \ldots, a_k - 1)] - [(a_0, a_1, \ldots, a_k, p)],$$

où l'on supprimera les symboles qui n'ont pas de sens, est une cellule ouverte. Si $p < n$, les dimensions des variétés frontières de cette cellule sont inférieures de deux unités au moins à la dimension de la cellule. On en déduit le

THÉORÈME. — *Les variétés $[(a_0, a_1, \ldots, a_k)]$ forment dans la variété $W_{n+1,p+1}$ une subdivision en cellules et définissent des cycles qui constituent les bases des groupes d'homologie. Il n'y a pas de coefficients de torsion. Tout cycle sur $W_{n+1,p+1}$ de dimension inférieure à $2(n-p)+1$ est homotope à 0. La variété $W_{n+1,p+1}$ a les mêmes invariants d'homologie et d'intersection que le produit topologique des sphères S^{2n+1}, S^{2n-1}, ..., $S^{2(n-p)+1}$.*

Ceci s'applique en particulier au cas où $p = n - 1$, c'est-à-dire à la variété du groupe linéaire unimodulaire de la forme d'Hermite $(x\overline{x})$.

Comme $W_{n+1,n+1}$ est le produit topologique de $W_{n+1,n}$ par S^1, le théorème est encore vrai pour $p = n$.

Considérons maintenant, à la place du corps des nombres complexes, le corps des quaternions. Dans l'espace projectif quaternionien ([4]), l'équation (1) définit une hyperquadrique dont les génératrices planes de dimension quaternionienne p forment une variété $U_{n+1,p+1}$. On définira comme précédemment les variétés $[(a_0, a_1, \ldots, a_k)]$. *Ces variétés formeront les bases d'homologie de la variété* $U_{n+1,p+1}$ *qui aura les mêmes propriétés d'homologie et d'intersection que le produit topologique* $S^{4n+3} \times S^{4n-1} \times \ldots \times S^{4(n-p)+3}$. *Il n'y a pas de coefficients de torsion, et tout cycle de dimension inférieure à* $4(n-p)+3$ *est homotope à zéro.*

La variété $U_{n+1,n+1}$ est aussi la variété du groupe linéaire quaternionien qui laisse invariante la forme d'Hermite quaternionienne $(x\bar{x})$. Si l'on écrit un quaternion $\lambda_0 + e_1\lambda_1 + e_2\lambda_2 + e_3\lambda_3$ sous la forme

$$\lambda_0 + e_1\lambda_1 + e_2(\lambda_2 - e_1\lambda_3) = u + e_2\bar{v},$$

ce groupe devient le groupe linéaire complexe opérant sur les variables complexes $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$ et laissant invariante la forme d'Hermite $(u\bar{u}) + (v\bar{v})$ ainsi que la forme extérieure $[u_1v_1] + [u_2v_2] + \ldots + [u_nv_n]$. C'est le groupe général de la classe (C) des groupes simples clos.

La même méthode fournit, dans le cas du corps des nombres réels, les propriétés topologiques de la variété $V_{n+1,p+1}$ des génératrices g_p de la quadrique

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 - y_0^2 \ldots y_p^2 = 0;$$

mais ici les variétés $[(a_0, a_1, \ldots, a_k)]$ forment les bases des groupes d'homologie modulo 2. Le polynôme de Poincaré correspondant à l'homologie modulo 2 est $(1+t^n)(1+t^{n-1})\ldots(1+t^{n-p})$. En particulier on retrouve très simplement les théorèmes de M. Stiefel ([5]) concernant la variété $V_{n+1,p+1}$.

([4]) Voir S. Wachs, *Géométrie projective quaternionienne* (Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique, 1936).

([5]) *Commentarii Math. Helv.*, 8, IV, 1935-1936, p. 305-353.

/14/

TOPOLOGIE. — *Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés.* Note de MM. **Charles Ehresmann** et **Jacques Feldbau**, présentée par M. Élie Cartan.

Définition d'un espace fibré associé à un groupe G *d'automorphismes de la fibre.* — Soit E un espace topologique connexe ([1]), R une relation d'équivalence dans E, $B = E/R$ l'espace quotient de E par R (ou *espace de base*), p l'application canonique de E sur B, F_x (appelée *fibre*) la classe d'équivalence $\overset{-1}{p}(x)$ correspondant à $x \in B$, F un espace topologique, G un groupe d'automorphismes de F. Associons à tout $x \in B$ une famille H_x d'homéomorphismes de F_x sur F telle que :

a. si $h, h' \in H_x$, on ait $h'h^{-1} \in G$;

b. à tout $x \in B$ corresponde un voisinage U_x et un homéomorphisme de $\overset{-1}{p}(U_x)$ sur le produit topologique $U_x \times F$, cet homéomorphisme, qui

([1]) Pour la terminologie, voir N. Bourbaki, *Éléments de mathématique,* I, *Théorie des Ensembles;* III, *Topologie générale,* Paris, 1939-1940.

induit pour $y \in U_x$ un homéomorphisme $\bar{h}_y$ de F_y sur $\{y\} \times F$, étant tel que l'application composée de $\bar{h}_y$ avec la projection canonique de $U_x \times F$ sur F appartienne à H_y.

L'ensemble H des familles d'homéomorphismes H_x définit sur E une *structure d'espace fibré associée au groupe* G. On peut la désigner par E(B, F, G, H).

Par exemple, le produit topologique $B \times F$ définit une telle structure d'espace fibré. Les fibres sont les ensembles $\{x\} \times F$, et la famille H_x s'obtient en composant l'application canonique de $\{x\} \times F$ sur F et les automorphismes de F appartenant à G.

Le groupe G peut être le groupe de tous les automorphismes de la fibre F. Alors H_x est la famille de tous les homéomorphismes de F_x sur F, et les conditions *a* et *b* se réduisent à la suivante : à tout $x \in B$ correspond un voisinage U_x tel qu'il existe un homéomorphisme de $\overset{-1}{p}(U_x)$ sur $U_x \times F$ qui applique, pour tout $y \in U_x$ la fibre F_y sur $\{y\} \times F$. Si G se réduit à la transformation identique dans F, H_x se compose d'un seul élément et l'espace E(B, F, G, H) est le produit topologique $B \times F$.

Lemme de déformation. — *Soient* K *un complexe fini*, $\Phi_0(K)$ *une représentation continue de* K *dans* E, $p\Phi_0(K) = \varphi_0(K)$ *la projection de cette représentation sur* B. *Toute déformation continue* $\varphi_t(K)$ *de* $\varphi_0(K)$ *dans* B *est la projection d'une déformation continue* $\Phi_t(K)$ *de* $\Phi_0(K)$ *dans* E $(0 \leq t \leq 1)$.

On peut subdiviser K assez finement pour que, σ^p désignant un simplexe quelconque de la subdivision, à chaque t et à chaque σ^p corresponde un voisinage ouvert U_x satisfaisant à la condition *b* et contenant $\varphi_t(\sigma^p)$. Le lemme se démontre ensuite par récurrence sur la dimension de K.

Groupes d'homotopie. — E étant connexe, il résulte des définitions que B est connexe et que, si F n'est pas connexe, ses différentes composantes connexes sont homéomorphes. Soit $\pi_n(F)$ le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de l'une d'elles. Soient $\pi_n(E)$, $\pi_n(B)$ les $n^{\text{ième}}$ groupes d'homotopie ([2]) de E et B. Soit $\pi'_n(F_0)$ le sous-groupe de $\pi_n(F_0)$ formé des classes de représentations de la sphère S^n dans une fibre F_0 qui sont homotopes à zéro dans E. Soit $\pi'_n(E)$ le sous-groupe de $\pi_n(E)$ formé des classes de représentations de S^n dans E qui contiennent des représentations de S^n dans F_0. Soit $\pi'_n(B)$ le sous-groupe de $\pi_n(B)$ formé des classes de représentations de S^n dans B

([2]) Hurewicz, *Proceedings Akad. Amsterdam*, 37, 1935, p. 112-119. On suppose que tous ces groupes d'homotopie existent.

qui sont projections de représentations de S^n dans E. Lorsqu'on change F_0, $\pi'_n(E)$ est invariant et $\pi'_n(F_0)$ reste homologue à un sous-groupe fixe $\pi'_n(F)$ de $\pi_n(F)$ dans un isomorphisme de $\pi_n(F_0)$ sur $\pi_n(F)$.

THÉORÈME. — *On a les isomorphies suivantes :*

$$(1)\qquad \pi'_{n-1}(F) \cong \frac{\pi_n(B)}{\pi'_n(B)} \qquad (n > 1).$$

$$(2)\qquad \pi'_n(E) \cong \frac{\pi_n(F)}{\pi'_n(F)} \qquad (n \geqq 1).$$

$$(3)\qquad \pi'_n(B) \cong \frac{\pi_n(E)}{\pi'_n(E)} \qquad (n \geqq 1).$$

Si, de plus, F *est connexe, on a*

$$(1')\qquad \pi'_1(B) \cong \pi_1(B).$$

Voici une esquisse de la démonstration de (1) : Toute représentation $\varphi(S^{n-1}) \subset F_0$, homotope à 0 dans E, est prolongeable à une représentation $\Phi(B^n) \subset E$ de la boule B^n intérieure à S^{n-1}, coïncidant avec φ sur S^{n-1}. Par projection, on en déduit une représentation $\psi(S^n) \subset B$. En prenant tous les prolongements possibles Φ de φ, on associe à φ une famille de ψ qui forme un système de classes de $\pi_n(B)$, et ce système de classes est un élément du groupe quotient $[\pi_n(B)]/\pi'_n(B)$, qui ne dépend que de la classe de φ. On définit ainsi une application de $\pi'_{n-1}(F)$ dans $[\pi_n(B)]/\pi'_n(B)$. Inversement, en utilisant le lemme de déformation, on montre qu'une représentation $\psi(S^n) \subset B$ peut toujours être définie par projection d'une représentation de B^n dans E, la frontière S^{n-1} de B^n étant représentée dans une fibre. Donc $\pi'_{n-1}(F)$ est appliqué *sur* $[\pi_n(B)]/\pi'_n(B)$. On vérifie que cette application est un homomorphisme et que le noyau de cet homomorphisme se réduit à l'unité.

Applications. — *a.* Soit E un espace de recouvrement de B. L'espace E est fibré sur B. Chaque fibre (ensemble de points recouvrant un point de B) est un espace discret. On retrouve le théorème d'Hurewicz

$$\pi_n(E) \cong \pi_n(B) \qquad (n > 1).$$

b. Soit V^n une *variété admettant la sphère* S^n *comme espace de recouvrement universel* $(n > 1)$, et supposons que V^n soit recouvert q fois. On voit alors que *les classes de représentations de* S^n *dans* V^n *sont caractérisées par leur type d'homologie, c'est-à-dire par leur degré, et que l'ensemble de ces degrés est formé des multiples de* q.

c. Groupes d'homotopie des espaces projectifs complexes. — La sphère S^{2k+1} est fibrée par des cercles S^1, la variété de base étant l'espace projectif P_k à k dimensions complexes [3] $(k \geqq 1)$. Il résulte des théorèmes d'isomorphie que :

1° $\pi_1(P_k) = 0$;

2° $\pi_2(P_k) \cong \pi_1(S^1)$ (cyclique infini);

3° $\pi_n(P_k) \cong \pi_n(S^{2k+1})$ $(n > 2)$.

/ 15 /

TOPOLOGIE. — *Espaces fibrés associés.*

Note (¹) de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Élie Cartan.

Les résultats qui vont être exposés sont dus à la collaboration de l'auteur et de l'un de ses élèves; ils font suite à une Note antérieure (²).

I. *Méthode de construction d'un espace fibré.* — Tout espace fibré de groupe structural G, de symbole E(B, F, G, H) (²), peut être obtenu de la façon suivante : soient B et F deux espaces topologiques, G un groupe d'automorphismes de F, Φ une famille d'ensembles ouverts de B formant un recouvrement de B, $S = \sum_{U \in \Phi} U \times F$ la somme topologique des produits topologiques $U \times F$ considérés comme des espaces topologiques disjoints. Soit R la relation d'équivalence dans S telle que deux points $y_1 \in U_1 \times F$ et $y_2 \in U_2 \times F$ soient équivalents lorsque : 1° la projection canonique de y_1 sur U_1 et celle de y_2 sur U_2 correspondent au même point $x \in B$; 2° la projection canonique $\bar{y}_2$ de y_2 sur F se déduit de la projection canonique $\bar{y}_1$ de y_1 sur F par une transformation $t_{U_2 U_1}(x) \in G$ dépendant du couple (U_1, U_2) et de $x \in U_1 \cap U_2$, de telle façon que $\bar{y}_2$ soit une fonction continue de $(\bar{y}_1, x)$; 3° $t_{U_k U_i}(x) = t_{U_k U_j}(x)\, t_{U_j U_i}(x)$ pour $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. L'espace quotient de S par R est un espace fibré E(B, F, G, H).

Soit p_1 la projection canonique de S sur E correspondant à R et soit p_2 la projection canonique de S sur B, c'est-à-dire celle qui se réduit pour les points de $U \times F$ à la projection canonique de $U \times F$ sur U. La projection canonique p de E sur B sera l'application composée $p_2 \overset{-1}{p_1}$. Considérons une fibre $F_x = \overset{-1}{p}(x)$, où $x \in B$. Si $x \in U$, l'application réciproque de la restriction de p_1 à $U \times F$ est un homéomorphisme de F_x dans $U \times F$; en le composant avec la projection canonique de $U \times F$ sur F, on obtient un homéomorphisme $h_{x,U}$ de F_x sur F. Si $U' \in \Phi$ et $x \in U'$, on a $h_{x,U'} = t_{U'U}(x)\, h_{x,U}$. A chaque fibre F_x correspond donc une famille bien définie d'homéomorphismes de F_x sur F; c'est la famille $H_x = G h_{x,U}$. L'ensemble H, somme des ensembles H_x, définit une structure d'espace fibré E(B, F, G, H).

II. *Espace fibré principal associé à* E(B, F, G, H). — Nous supposons que G est une réalisation continue fidèle d'un groupe abstrait topologique $\tilde{G}$. Soit $U \in \Phi$ et désignons par H_U la somme des ensembles H_x correspondant à tous les $x \in U$. L'équation $H_x = G h_{x,U}$ établit une correspondance

(¹) Séance du 27 octobre 1941.

(²) *Comptes rendus*, 212, 1941, pp. 945-948.

biunivoque φ_U entre les éléments de H_U et les couples (x, s), où $x \in U$, $s \in \widetilde{G}$. Munissons H_U de la topologie image par φ_U de la topologie $U \times \widetilde{G}$. Soit $S^\star$ la somme topologique $\sum_{U \in \Phi} H_U$, tous les espaces topologiques H_U étant considérés comme disjoints. Soit $R^\star$ la relation d'équivalence dans $S^\star$ telle que deux éléments de $S^\star$ soient équivalents lorsqu'ils correspondent au même élément de H. Munissons H de la topologie d'espace quotient de $S^\star$ par $R^\star$. L'espace topologique R ainsi défini est un espace fibré $H(B, \widetilde{G}_t, \widetilde{G}, H^\star)$ que nous appelons *espace fibré principal associé* à $E(B, F, G, H)$. Les fibres sont les ensembles H_x; elles sont homéomorphes à $\widetilde{G}$. Étant donné $h_x \in H_x$, considérons l'homéomorphisme $h_x^\star$ de H_x sur G qui applique tout $h'_x \in H_x$ sur l'élément s' de $\widetilde{G}$ réalisé par la transformation $h'_x \overset{-1}{h_x}$ de G. Soient H_x la famille des homéomorphismes $h_x^\star$ et $H^\star$ la somme des familles H_x. La transformation $k_x^\star \overset{-1\star}{h_x}$, où $h_x^\star$, $k_x^\star \in H_x^\star$ est la transformation du groupe $\widetilde{G}_t$ des translations à droite de $\widetilde{G}$ qui applique $s \in \widetilde{G}$ sur $s\sigma$, où σ est l'élément de $\widetilde{G}$ réalisé par $h_x \overset{-1}{k_x} \in G$. L'espace H est donc bien muni de la structure d'espace fibré $H(B, \widetilde{G}, \widetilde{G}_t, H^\star)$. H pourrait d'ailleurs aussi être muni d'une structure d'espace fibré à groupe structural ${}_t\widetilde{G}$, groupe des translations à gauche de $\widetilde{G}$. Si $\widetilde{G}$ n'est pas connexe, H n'est pas forcément connexe.

III. *Construction de tous les espaces fibrés dont les espaces fibrés principaux associés sont isomorphes à* $E^\star(B, \widetilde{G}, \widetilde{G}_t, H^\star)$. — Un *isomorphisme* de $E(B, F, G, H)$ sur $E'(B', F', G', H')$ est un homéomorphisme T de E sur E' tel que : 1° T transforme toute fibre F_x de E en une fibre $F'_{x'}$ de E'; 2° il existe un homéomorphisme Θ de F sur F' tel que $\Theta H \overset{-1}{T} = H'$. Il en résulte $\Theta G \overset{-1}{\Theta} = G'$.

Soit $E^\star(B, \widetilde{G}, \widetilde{G}_t, H^\star)$ un espace fibré, où $\widetilde{G}$ est un groupe topologique et $\widetilde{G}_t$ le groupe des translations à droite dans $\widetilde{G}$. Supposons qu'il soit construit par le procédé indiqué dans I, qui fera intervenir un recouvrement Φ de B et des transformations $\theta_{U_jU_i}(x) \in \widetilde{G}_t$. Soit G une réalisation fidèle de $\widetilde{G}$ dans un espace topologique F. On peut construire un espace fibré $E(B, F, G, H)$ dont l'espace fibré principal associé est isomorphe à $E^\star(B, G, G_t, H^\star)$. A tout élément θ de $\widetilde{G}_t$ correspond un élément t de G, réalisation du même élément de $\widetilde{G}$. Soit $t_{U_jU_i}(x)$ la transformation correspondant à $\theta_{U_jU_i}(x)$. Les transformations $t_{U_jU_i}(x)$ de F, satisfaisant aux conditions 2° et 3° de I, permettent de définir avec le recouvrement Φ un espace fibré de symbole $E(B, F, G, H)$ dont l'espace fibré principal associé est isomorphe à $E^{\star}(B, \tilde{G}, \tilde{G}_t, H^{\star})$.

Pour que deux espaces fibrés $E(B, F, G, H)$ *et* $E'(B, F, G, H')$ *soient isomorphes, il faut et il suffit que leurs espaces fibrés principaux associés soient isomorphes.*

IV. *Espaces fibrés isomorphes à un produit topologique.* — Nous dirons que $E(B, F, G, H)$ est isomorphe au produit topologique $B \times F$ lorsqu'il est isomorphe à l'espace fibré à groupe structural G défini ([3]) par $B \times F$. Pour que l'espace fibré principal associé $H(B, \tilde{G}, \tilde{G}_t, H^{\star})$ soit isomorphe à $B \times \tilde{G}$, il faut et il suffit qu'il existe dans H un système continu de représentants de B, c'est-à-dire une application de B dans H telle que son composé avec la projection canonique de H sur B se réduise à l'identité. Donc, *pour que* $E(B, F, G, H)$ *soit isomorphe à* $B \times F$, *il faut et il suffit qu'il existe dans* $H(B, \tilde{G}, \tilde{G}_t, H^{\star})$ *un système continu de représentants de* B.

En particulier, *si* B *est contractile en un point, tout espace fibré de base* B *admet un système continu de représentants de* B, d'après le lemme de déformation de la Note citée ([2]). On a donc le théorème :

Tout espace fibré $E(B, F, G, H)$ *dont l'espace de base* B *est contractile en un point est isomorphe au produit topologique* $B \times F$ ([4]).

V. *Espace fibré des automorphismes de fibre associé à* $E(B, F, G, H)$.

Les transformations $\overset{-1}{h_x} h'_x$, où $h_x, h'_x \in H_x$ sont des automorphismes de F_x. Leur ensemble est un groupe A_x, transformé de G par $h_x : \overset{-1}{h_x} G h_x = A_x$. Soit A la somme des ensembles A_x. Comme dans II, on peut munir A d'une structure d'espace fibré de symbole $A(B, \tilde{G}, \tilde{G}_a, H_{\star})$. A chaque $h_x \in H_x$ correspond l'homéomorphisme $h_{\star x}$ de A_x sur $\tilde{G}$ qui applique $a_x \in A_x$ sur l'élément de $\tilde{G}$ correspondant à $h_x a_x \overset{-1}{h_x} \in G$. La transformation $k_{\star x} h_{\star x}$ est la transformation du groupe adjoint $\tilde{G}_a$ de $\tilde{G}$ définie par $G \rightarrow \left(k_x \overset{-1}{h_x}\right) G \left(k_x \overset{-1}{h_x}\right)^{-1}$. H_x est l'ensemble des homéomorphismes $h_{\star x}$.

Si G est abélien, $A(B, \tilde{G}, \tilde{G}_a, H_{\star})$ est isomorphe à $B \times \tilde{G}$.

([3]) Voir ([2]), p. 946.

([4]) Généralisation, avec nouvelle démonstration, d'un théorème dû à J. Feldbau [*Comptes rendus*, **208**, 1939, p. 1622 (théorème A)].

/ 16 /

TOPOLOGIE. — *Espaces fibrés de structures compararables* [1].
Note de M. **Charles Ehresmann**.

Étant données sur un espace topologique E deux structures d'espaces fibrés de symboles $E(B, F, G, H)$ et $E(B, F, G', H')$, correspondant au même système de fibres, nous dirons que $E(B, F, G', H')$ définit une structure *plus précise* que $E(B, F, G, H)$ lorsque $H' \subset H$. S'il en est ainsi, le groupe structural G' est un sous-groupe de G. Soit G_1 un groupe d'automorphismes de F contenant G comme sous-groupe. Il existe une structure d'espace fibré bien déterminée $E(B, F, G_1, H_1)$ *moins* précise que la structure donnée $E(B, F, G, H)$: l'ensemble H_1 d'homéomorphismes des fibres F_x, où $x \in B$, sur F est défini par $H_1 = G_1 H$. Le problème étudié dans cette Note s'énonce de la façon suivante : *Étant donné un sous-groupe* G' *de* G, *trouver les espaces fibrés* $E(B, F, G', H')$ *de structure plus précise que* $E(B, F, G, H)$.

Soit $H(B, \widetilde{G}, \widetilde{G}_l, H^*)$ l'espace fibré principal associé à $E(B, F, G, H)$ et considérons dans H la relation d'équivalence $[G']$ telle que la classe d'équivalence de $h \in H$ soit $G'h$. L'espace quotient $H/[G']$ est muni d'une structure d'espace fibré de symbole $H/[G'](B, K, G_k, H_k)$. La fibre K_x est l'espace quotient de la fibre H_x de $H(B, \widetilde{G}, \widetilde{G}_l, H^*)$ par la relation d'équivalence induite par $[G']$ sur H_x; l'espace K est l'espace des classes $\widetilde{G}'s$ où $s \in \widetilde{G}$ et où $\widetilde{G}'$ est le sous-groupe de $\widetilde{G}$ correspondant à G'; l'ensemble H_k est l'ensemble des homéomorphismes h_x^k de K_x sur K qui appliquent $G'h'_x \in K_x$, où $h'_x \in H_x$, sur la classe $\widetilde{G}'s' \in K$, où $s' \in \widetilde{G}$ correspond à $h'_x \overset{-1}{h_x} \in G$, $h_x \in H_x$; le groupe structural G_k est la réalisation holomorphe de $\widetilde{G}$ comme groupe d'automorphismes de K telle que la transformation de G_k qui correspond à $\sigma \in \widetilde{G}$ applique $\widetilde{G}'s \in K$ sur $\widetilde{G}'s\sigma \in K$. Pour que les

[1] Cette Note emploie les définitions et notations de deux Notes antérieures (*Comptes rendus*, **212**, 1941, pp. 945-948; **213**, 1941, pp. 762-764).

classes $\widetilde{G}'s$ définissent dans $\widetilde{G}$ une structure d'espace fibré $\widetilde{G}(K, \widetilde{G}', \widetilde{G}_t, .)$, il faut et il suffit que $\widetilde{G}'$ vérifie la condition suivante : (α) Il existe dans K un voisinage V de $\widetilde{G}' \in K$ qui admet un système continu de représentants dans $\widetilde{G}$ relativement à la projection canonique de $\widetilde{G}$ sur K. Lorsque la condition (α) est vérifiée, les classes $G'h$, où $h \in H$, définissent dans H une structure d'espace fibré $H(H/[G'], \widetilde{G}', \widetilde{G}'_t, .)$. En particulier, il en est ainsi lorsque $\widetilde{G}$ est un groupe de Lie à r dimensions et $\widetilde{G}'$ un sous-groupe fermé de $\widetilde{G}$; l'espace K muni du groupe G_k est alors un espace homogène de Lie.

Pour qu'une partie H' de H définisse un espace fibré E(B, F, G', H') de structure plus précise que E(B, F, G, H), il faut et il suffit que : (1) H' soit réunion de classes d'équivalence suivant [G']; (2) la projection canonique de H' dans H/[G'] soit un système continu de représentants de B dans l'espace fibré $H/[G'](B, K, G_k, H_k)$; (3) tout point de B admet un voisinage W tel qu'il existe dans H' un système continu de représentants de W relativement à la projection canonique de H sur B. Lorsque la condition (α) est vérifiée, la condition (3) est conséquence des deux premières. Donc *lorsque* (α) *est vérifié, les structures* E(B, F, G', H') *plus précises que* E(B, F, G, H) *correspondent d'une façon biunivoque aux systèmes continus de représentants de* B *dans* $H/[G'](B, K, G_k, H_k)$.

Considérons le produit topologique $B \times F$ comme un espace fibré dont les fibres sont les sous-espaces $\{x\} \times F$, où $x \in B$, et dont le groupe structural est réduit à la transformation identique de F. Pour qu'un espace fibré E(B, F, G', H') soit isomorphe au produit topologique $B \times F$, il faut et il suffit que G' soit réduit à la transformation identique. Les structures E(B, F, G', H'), plus précises que E(B, F, G, H) et isomorphes à $B \times F$, correspondent donc d'une façon biunivoque aux systèmes continus de représentants de B dans $H(B, \widetilde{G}, \widetilde{G}_k, H^*)$.

En supposant vérifiée la condition (α), les structures E(B, F, G', H'), plus précises que E(B, F, G, H) et à groupe structural donné G', se répartissent en classes correspondant aux classes des systèmes continus de représentants de B dans $H/[G'](B, K, G_k, H_k)$, deux tels systèmes étant dits de même classe lorsqu'il existe une isotopie de l'un en l'autre telle que sa projection canonique sur B soit l'isotopie qui laisse fixes tous les points de B. Lorsque B est un complexe fini, deux structures E(B, F, G', H') et E(B, F, G', H'') de même classe sont telles qu'il existe une famille continue de structures $E(B, F, G', H'_t)$ plus précises que E(B, F, G, H) et une isotopie $H'_t = \varphi_t(H')$, compatible avec la relation d'équivalence [G'] et déformant H' en H''. Ceci résulte du lemme suivant :

Lemme d'isotopie. — *Soient* E (B, F, G, H) *un espace fibré*, A *un complexe fini*, $\varphi_t(A)$ *un homéomorphisme de* A *dans* B *définissant une isotopie lorsque* t *varie* *de* 0 *à* 1, A'_t *la réunion des fibres correspondant aux points de* $\varphi_t(A)$. *Il existe une isotopie définie dans* E *par* $A'_t = \Phi_t(A'_0)$ *telle que la restriction de* Φ_t *à la fibre* $F_x \subset A'_0$ *soit un homéomorphisme de* F_x *sur une fibre* $F_{x'} \subset A'_t$, *cet homéomorphisme étant de la forme* $\overset{-1}{h}_{x'} h_x$, *où* $h_x \in H_x$, $h_{x'} \in H_{x'}$, *le point* $x' \in B$ *se déduisant de* $x \in B$ *par l'homéomorphisme* $\varphi_t \overset{-1}{\varphi_0}$.

En particulier, si B est un complexe fini, toute famille d'automorphismes de B qui définit une isotopie dans B se déduit par projection sur B d'une famille d'automorphismes de E(B, F, G, H) définissant une isotopie dans E.

Le problème de l'existence de systèmes continus de représentants de B dans $H/[G'](B, K, G_k, H_k)$ peut être abordé par une méthode dont le principe est dû à E. Stiefel (²). En particulier, *si* B *est un complexe de dimension n et si les groupes d'homotopie de* K *sont nuls pour les dimensions* $\leqq n-1$, *il existe des systèmes continus de représentants de* B *dans* $H/[G'](B, K, G_k, H_k)$ *et par suite des structures plus précises que* E(B, F, G, H) *à groupe structural* G'. *Si les groupes d'homotopie sont nuls pour les dimensions* $\leqq n$, *toutes ces structures plus précises sont de même classe.*

Par exemple, soit G un groupe de Lie semi-simple non compact. La théorie des espaces riemanniens symétriques de M. E. Cartan (³) montre qu'il existe alors un sous-groupe compact G' tel que K soit l'espace numérique R^k à k dimensions et tel que G_k, isomorphe au groupe adjoint de G, laisse invariante une métrique riemannienne symétrique. Donc il existe des structures plus précises que E(B, F, G, H) à groupe structural G'; elles sont toutes de même classe. De plus, chaque fibre K_x étant munie d'une métrique riemannienne symétrique invariante par le groupe d'automorphismes de K_x, l'espace $H/[G'](B, K, G_k, H_k)$ est contractile en un système continu de représentants de B, chaque point de K_x décrivant pendant la déformation la géodésique unique qui le joint au point de rencontre de K_x avec un système continu de représentants donné.

(²) *Comment. Math. Helvet.*, 8, 1935, pp. 305-353.

(³) Voir par exemple *L'Enseignement Mathématique*, 35, 1936, pp. 188 et 189.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 214, p. 144-147, séance du 26 janvier 1942.)

/ 17 /

TOPOLOGIE. — *Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable.*
Note [1] de M. **Charles Ehresmann**.

Cette Note contient quelques applications immédiates de trois Notes antérieures [2].

A toute variété différentiable V^n on peut associer un espace fibré appelé variété des vecteurs tangents à V^n. En effet, soit V^n une variété numérique à n dimensions (espace de Hausdorff tel que tout point admette un voisinage ouvert homéomorphe à un pavé ouvert de l'espace numérique R^n). Un homéomorphisme f d'un ouvert U de V^n sur un ouvert U' de R^n définit une *carte locale* (U', f, U). Il existe un système A de cartes locales $(U'_i, f_i, U_i)_{i\in I}$ tel que $\bigcup_{i\in I} U_i = V^n$; on peut l'appeler *atlas* de V^n. A deux cartes locales (U'_i, f_i, U_i) et (U'_j, f_j, U_j) correspond un changement de coordonnées locales h_{ji}, c'est-à-dire un homéomorphisme de l'ouvert $A_{ij} = f_i(U_i \cap U_j)$ sur $A_{ji} = f_j(U_i \cap U_j)$. L'atlas A est dit différentiable lorsque tous les h_{ij} correspondants sont différentiables. L'atlas différentiable maximal contenant A définit sur V^n une structure de variété différentiable. Grâce à un homéomorphisme naturel, V^n peut être identifié avec l'espace quotient $\left(\sum_{i\in I} U'_i\right)/\rho$, où $\sum_{i\in I} U'_i$ désigne l'espace somme des U'_i et où ρ est la relation d'équivalence « il existe h_{ij} tel que $u' = h_{ij}(u)$ ». A h_{ji} correspond un homéomorphisme $\check{h}_{ji}$ de l'espace produit $A_{ij} \times R^n$ sur $A_{ji} \times R^n$, appelé prolongement de h_{ji} à l'espace des vecteurs liés $(u, \overrightarrow{du})$ attachés aux points de A_{ij} et défini par

$$u' = h_{ji}(u), \qquad \overrightarrow{du'} = dh_{ji}(u, \overrightarrow{du}); \qquad u \in A_{ij}, \qquad \overrightarrow{du} \in R^n.$$

La variété $\check{V}^n$ des vecteurs tangents à V^n est par définition l'espace quotient de l'espace somme $\sum_{i\in I}(U'_i \times R^n)$ par la relation d'équivalence $\check{\rho}$ définie par

[1] Séance du 3 mai 1943.

[2] *a, b, c* (*Comptes rendus*, **212**, 1941, pp. 945-948; **213**, 1941, pp. 762-764; **214**, 1942, p. 144-147.) Les résultats de la présente Note ont fait l'objet d'une communication à la Société Mathématique de France (section de Clermont-Ferrand) le 16 avril 1942.

l'ensemble des $\check{h}_{ji}$. D'après ([1]) *b*, I, $\check{V}^n$ est un espace fibré de symbole $\check{V}^n(V^n, R^n, L, H)$, L étant le groupe linéaire homogène de R^n. La projection de $\check{V}^n$ sur V^n est l'application qui fait correspondre à la classe de $(u, \overrightarrow{du})$ suivant $\check{\rho}$ la classe de u suivant ρ, celle-ci étant considérée comme identifiée avec un point x de V^n. La fibre R^n_x admet un homéomorphisme sur R^n défini à un automorphisme près de l'espace vectoriel R^n, ce qui détermine sur R^n_x une structure d'espace vectoriel et permet de l'appeler espace vectoriel tangent à V^n en x. Un élément de R^n_x étant désigné par $(x, \overrightarrow{dx})$, on peut identifier x avec $(x, 0)$. V^n est ainsi identifié avec une *section* ([3]) de l'espace fibré $\check{V}^n$. On voit que $\check{V}^n$ est une variété à $2n$ dimensions, $p-1$ fois différentiable (resp. analytique) lorsque V^n est p fois différentiable (resp. analytique).

A toute représentation continue de L sur un groupe continu L_F d'automorphismes d'un espace topologique F correspond, par la construction de ([2]) *b*, III, un espace fibré $E(V^n, F, L_F, H_F)$ dit associé à V^n.

Exemples. — 1° F = espace vectoriel des tenseurs sur R^n de type donné, L_F = groupe induit dans F par L, E = espace des tenseurs du type donné attachés aux points de V^n. Une section de E est appelée champ de tenseurs. 2° F = variété des sous-espaces vectoriels non orientés ou orientés de dimension p de R^n, L_F = extension de L à F, E = variété des éléments de contact non orientés ou orientés de dimension p de V^n. 3° F = variété des formes quadratiques dans R^n de signature donnée, L_F = extension de L à F, E = variété des formes quadratiques de signature donnée attachées aux points de V^n. Une section de E est un champ de formes quadratiques, qui définit aussi une fonction de $(x, \overrightarrow{dx})$ appelée forme différentielle quadratique sur V^n, de la signature donnée. Remarquons que toutes les variétés E ainsi définies sont $p-1$ fois différentiables (resp. analytiques) si V^n est p fois différentiable (resp. analytique).

La structure $\check{V}^n(V^n, R^n, L, H)$ contient-elle des structures plus précises $\check{V}^n(V^n, R^n, L', H')$, où L' est un sous-groupe de L ? Une telle structure correspond à un parallélisme de vecteurs sur V^n si L' est l'élément unité de L, à une orientation de V^n si L' est la composante connexe de l'unité de L. Si L' est le groupe orthogonal Ω de R^n, l'espace L/Ω est homéomorphe à $R^{n(n+1)/2}$. *Il existe donc* [voir ([2]) *c*] *une structure plus précise* $\check{V}^n(V^n, R^n, \Omega, H')$ *et par suite une forme différentielle quadratique définie positive sur* V^n. En effet, soit $g(\overrightarrow{X})$ une forme quadratique définie positive invariante par Ω. La fonction $f(x, \overrightarrow{dx}) = g(\overrightarrow{X})$, où $\overrightarrow{X}$ correspond à $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{dx})$ dans un des isomorphismes de R^n_x sur R^n appartenant à H', est une forme quadratique définie positive sur V^n.

L'existence sur V^n d'une forme quadratique $f(x, \overrightarrow{dx})$ de signature $(p, n-p)$ est équivalente à l'existence d'une structure plus précise $\check{V}^n(V^n, R^n, L', H')$,

---

([3]) Section = système continu de représentants, voir ([2]) *b*, p. 764

où L' est le groupe linéaire de R^n laissant invariante la forme

$$g(\vec{X}) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2.$$

Or si Ω' est le sous-groupe de L' qui laisse invariant le sous-espace de R^n défini par $x_{p+1} = \ldots = x_n = 0$, l'espace L'/Ω' est homéomorphe à R^m. Par suite *l'existence d'une forme $f(x, \vec{dx})$ est équivalente à l'existence sur $\check{V}^n$ d'une structure $\check{V}^n(V^n, R^n, \Omega', H'')$, qui est elle-même équivalente à l'existence sur V^n d'un champ d'éléments de contact non orientés de dimension p.* Si $p = 1$ et $n = 4$, on obtient ainsi des conditions nécessaires pour la structure topologique d'un univers possible en Relativité. Par exemple, la sphère S^4 et l'espace projectif P^4 ne conviennent pas. Si l'univers V^4 est supposé compact et si l'on peut définir par continuité une distinction entre passé et avenir en chaque point, la caractéristique d'Euler-Poincaré de V^4 est nulle.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **216**, p. 628-630, séance du 10 mai 1943.)

TOPOLOGIE. — *Sur les champs d'éléments de contact de dimension p complètement intégrables dans une variété continuement différentiable* V_n. Note de MM. **Charles Ehresmann** et **Georges Reeb**.

Soit K un champ d'éléments de contact (1) de dimension p dans V_n. Une variété intégrale élémentaire de K est une variété différentiable connexe V_p plongée dans V_n et telle que l'élément de contact de V_p en un point quelconque x de V_p coïncide avec l'élément du champ en x. Le champ est dit *complètement intégrable* lorsque les variétés intégrales élémentaires passant par un point quelconque x de V_n forment une base de filtre (2). L'ensemble de ces bases de filtres, considérées comme des systèmes fondamentaux de voisinages, définit alors sur V_n une nouvelle topologie T. Un domaine de V_n relativement à T est appelé *variété intégrale* de K, une composante connexe de V_n relativement à T est appelée *variété intégrale complète*. Une variété intégrale W est élémentaire si sa topologie est identique à la topologie induite sur W par la topologie initiale de V_n. Toute variété intégrale compacte est complète et élémentaire. Un système de $n-p$ formes de Pfaff définies sur V_n et linéairement indépendantes en tout point de V_n définit un champ d'éléments de contact de dimension p. Si V_n est simplement connexe, tout champ d'éléments de dimension $n-1$ peut être défini par une forme de Pfaff qui ne s'annule identiquement en aucun point de V_n.

Théorème 1. — *Si le champ* K *est complètement intégrable*, V_n *étant l'espace numérique* R^n *ou la sphère* S_n, *et si* p *et* $n-1$ *sont pairs, la caractéristique d'Euler-Poincaré* $\chi(C_p)$ *d'une variété intégrale compacte est nulle.*

En effet, soit C_{n-1} la variété des vecteurs unitaires normaux à C_p. C'est un espace fibré admettant C_p pour espace de base, les fibres étant homéomorphes à S_{n-p-1}. D'après un théorème de Gysin (3), $\chi(C_{n-1})=\chi(C_p)\cdot\chi(S_{n-p-1})=2\chi(C_p)$. En faisant correspondre à chaque vecteur le vecteur équipollent d'origine O, on définit une application f de C_{n-1} dans S_{n-1} dont le degré est égal à $1/2\chi(C_{n-1})$, d'après H. Hopf (4). A toute déformation de C_p on peut faire correspondre une déformation de f; comme C_p est réductible à un point, f est inessentielle. Donc $1/2\chi(C_{n-1})=\chi(C_n)=0$.

---

(1) Voir C. Ehresmann, *Comptes rendus*, **216**, 1943, pp. 628-630.

(2) Voir N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. I, § 5 (Paris, 1940).

(3) *Comm. math. helv.*, **14**, 1941-1942, p. 113.

(4) *Math. Annalen*, **95**, 1925, pp. 340-367. Voir également C. B. Allendoerfer, *Amer. Journ. Math.*, **62**, 1940, p. 243-248.

THÉORÈME 2. — *Si* K *est un champ complètement intégrable d'éléments de dimension* $n-1$ *définissable par une forme de Pfaff* ω *et si* C_{n-1} *est une variété intégrale compacte à groupe de Poincaré fini, toute variété intégrale suffisamment voisine est homéomorphe à* C_{n-1}. *Si de plus* V_n *est compact, toutes les variétés intégrales complètes sont homéomorphes à* C_{n-1} *et constituent un système de fibres de* V_n. *Si* V_n *est quelconque et si toutes les variétés intégrales complètes sont compactes, celles-ci sont homéomorphes et constituent un système de fibres de* V_n.

La démonstration fait intervenir des résultats de Bendixson sur les courbes définies par des équations différentielles.

COROLLAIRE. — *Si* V_n *est compact et a un groupe de Poincaré fini,* K *étant un champ complètement intégrable d'éléments de dimension* $n-1$ *définissable par une forme de Pfaff* ω, *il n'existe aucune variété intégrale compacte à groupe de Poincaré fini et il existe au moins une variété intégrale non compacte.*

Champs d'éléments plans ($p=2$) *complètement intégrables dans* R^3 *ou* S_3. — Toute surface intégrale compacte est homéomorphe au tore. Il existe effectivement des champs complètement intégrables admettant le tore comme surface intégrale. Par exemple, dans le tore euclidien plein considérons la forme

$$\omega = r\,dr + (1-r)\,d\varphi,$$

r, distance au centre du cercle méridien correspondant; φ, longitude; θ, latitude. Cette forme est complètement intégrable et admet le tore $r=1$ comme surface intégrale. En identifiant les bords de deux exemplaires de ce tore plein, les méridiens de l'un étant identifiés avec les parallèles de l'autre, on obtient un champ complètement intégrable sur S_3 admettant un tore comme surface intégrale. Ce tore est adhérent à toutes les autres surfaces intégrales complètes, et celles-ci sont toutes élémentaires et non compactes.

Cet exemple montre que, si une forme de Pfaff dans R^3 est complètement intégrable, elle n'est pas forcément de la forme $\lambda\,dU$. Si une forme de Pfaff complètement intégrable sur une variété compacte V_n ne s'annule identiquement en aucun point de V_n, elle n'est évidemment jamais de la forme $\lambda\,dU$, à cause de l'existence d'un maximum pour toute fonction numérique continue définie sur un espace compact.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 218, p. 955-957, séance du 19 juin 1944.)

TOPOLOGIE. — *Sur les sections d'un champ d'éléments de contact dans une variété différentiable.* Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Élie Cartan.

Soit Φ un champ d'éléments de contact de dimension $n-p$ dans une variété différentiable [1] V_n de dimension n. Étant donnée une variété différentiable V_p, nous dirons qu'une application différentiable f de V_p dans V_n définit une section de Φ lorsque f est partout de rang p et applique l'espace vectoriel tangent en $x \in V_p$ sur un élément de contact en $f(x)$ qui coupe l'élément du champ Φ au seul point $f(x)$.

Théorème 1. — *Soit* (V_p, f) *une section de* Φ. *Si* V_p *est compact orientable et si l'image par* f *du cycle de base de dimension* p *a un multiple entier homologue à* 0 *dans* V_n, *la caractéristique d'Euler-Poincaré de* V_p *est nulle.*

Dans une conférence faite au colloque de Topologie à Strasbourg le 4 mai 1946, j'ai indiqué une démonstration de ce théorème en supposant V_n plongée dans un espace numérique, ce qui est toujours possible d'après H. Whitney, et en utilisant les raisonnements de deux Notes antérieures [2]. Je vais montrer que c'est aussi une conséquence de la théorie des classes caractéristiques de Stiefel-Whitney [3].

Soient E un espace fibré, B l'espace de base, F la fibre, G le groupe de structure, p la projection de E sur B. Supposons vérifiées les deux conditions suivantes : *a*. Les groupes d'homotopie $\pi_i(F)$ sont nuls pour les dimensions $i<r$ et de plus F est r-simple [4]. *b*. A tout élément du groupe d'homotopie $\pi_r(F_x)$, où $F_x = \overset{-1}{p}(x)$, $x \in B$, correspond par continuité un élément déterminé de $\pi_r(F)$; c'est-à-dire l'espace fibré de fibre $\pi_r(F)$, qui est *associé* [5] à E lorsqu'on considère G comme groupe d'opérateurs sur $\pi_r(F)$, est l'espace produit $B \times \pi_r(F)$. B étant supposé un complexe, la recherche d'une section de l'espace fibré E conduit à la définition d'une classe de cohomologie caractéristique W_{r+1} de B relativement à E, à coefficients éléments de $\pi_r(F)$.

Soit f une application continue d'un complexe A dans B. Le sous-espace

---

(1) J'écrirai différentiable au lieu de continûment différentiable.

(2) C. Ehresmann et G. Reeb, *Comptes rendus*, **218**, 1944, p. 995; G. Reeb, *Comptes rendus*, **220**, 1945, p. 237, th. I.

(3) H. Whitney, *Lectures in Topology*, p. 119 (*Ann. Arbor*, 1941).

(4) S. Eilenberg, *Lectures in Topology*, p. 63 (*Ann. Arbor*, 1941).

(5) *Comptes rendus*, **213**, 1941, p. 762.

de $A \times E$, formé des couples (x, z) tels que $p(z) = f(x)$, est un espace fibré E_f dont la fibre est toujours F et le groupe de structure G, tandis que son espace de base est A. On voit qu'à W_{r+1} correspond par f la classe caractéristique $\overline{W}_{r+1}$ de A relativement à E_f.

Application. — $B = V_n$. E est l'espace fibré dont chaque élément est une classe de vecteurs tangents en x à V_n modulo l'espace vectoriel définissant l'élément du champ Φ en x, la classe des vecteurs contenus dans cet élement étant exclue; F est l'espace numérique R^p moins l'origine; G est le groupe linéaire homogène dans R^p; f définit la section (V_p, f) du champ Φ; E_f est équivalent à l'espace $V_p^{(1)}$ des vecteurs non nuls tangents à V_p. E satisfait à la condition (a) pour $r = p - 1$. Supposons vérifiée la condition (b). La classe caractéristique W_p de V_n relativement à E correspond par f à la classe caractéristique $\overline{W}_p$ de V_p relativement à $V_p^{(1)}$. Soit Γ_p la classe d'homologie de base de V_p. On a $< \overline{W}_p, \Gamma_p > = < W_p, f(\Gamma_p) >$, où $< C_p, \Gamma_p >$ désigne le produit intérieur. Or $< \overline{W}_p, \Gamma_p >$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(V_p)$, d'où le théorème 1. Si la condition (b) n'est pas vérifiée, on remplace V_n par un certain revêtement à deux feuillets pour lequel elle sera vérifiée et l'on obtient le même résultat.

Corollaire. — *Si V_n satisfait à la condition (b), soit V_p une variété compacte non orientable telle qu'il existe une section (V_p, f) de Φ; alors $\chi(V_p) = 0$.*

Remplaçons E par l'espace fibré associé $E^{(p-r)}$ formé par les systèmes de $p - r$ vecteurs indépendants appartenant à une fibre de E. $V_p^{(1)}$ sera remplacé par $V_p^{(p-r)}$, espace des systèmes de $p - r$ vecteurs indépendants tangents à V_p. Si la condition (b) est vérifiée, V_n a une classe caractéristique W_{r+1} relativement à $E^{(p-r)}$, qui correspond par f à la classe $\overline{W}_{r+1}$ de Stiefel-Whitney de V_p. On a la formule fondamentale

$$< \overline{W}_{r+1}, \Gamma_{r+1} > = < W_{r+1}, f(\Gamma_{r+1}) > \tag{1}$$

pour toute classe d'homologie Γ_{r+1} de V_p. Si $r = p - 1$ ou $r < p - 1$ et r pair, les classes caractéristiques sont à coefficients entiers, dans le cas contraire à coefficients entiers modulo 2. Énonçons seulement la conséquence suivante de la formule (1) :

Théorème 2. — *Soit (V_p, f) une section du champ Φ. Supposons la condition (b) vérifiée pour $E^{(p-r)}$. Si le groupe de cohomologie de V_n, pour la dimension $r + 1$ et le domaine de coefficients convenable, est nul, la classe $\overline{W}_{r+1}$ de V_p est nulle. Par exemple, si V_n est la sphère S_n, toutes les classes caractéristiques de V_p sont nulles.*

Remarque. — Un champ Φ dans V_n n'admet pas toujours une section compacte.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 224, pp. 444-445, séance du 17 février 1947.)

/22/

TOPOLOGIE. — *Sur les espaces fibrés différentiables.*

Note ([1]) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Élie Cartan.

Etant données trois variétés différentiables E, B, F, une structure d'espace fibré différentiable sur E est définie par un atlas différentiable ([2]) de E sur $B \times F$ tel qu'une carte locale soit définie par un homéomorphisme différentiable d'un ensemble ouvert de E sur un ensemble $U \times F$, U étant un ouvert de B, et que tout changement de coordonnées locales soit un homéomorphisme différentiable d'un ensemble $U \times F$ sur lui-même de la forme $x' = x$, $y' = t(x, y)$, $x \in U$, $y \in F$, $y' \in F$. Si $z \in E$ est représenté dans une carte locale sur $(x, y) \in U \times F$, l'application p telle que $p(z) = x$ définit E comme espace fibré sur l'espace de base B (en supposant que les ensembles U correspondant aux cartes locales données recouvrent B). p est différentiable et chaque fibre F_x est une variété différentiable plongée dans E.

PROPOSITION 1. — *Si* E *est compact, toute application différentiable p, en tout point de rang n, de* E *sur une variété* B *de dimension n détermine sur* E *une structure d'espace fibré différentiable* ([3]).

Un champ Φ d'éléments de contact de dimension n (= dimension de B), défini sur l'espace fibré différentiable E, sera dit sécant si les fibres F_x forment des sections ([4]) de Φ. On voit facilement qu'il existe toujours des champs sécants, mais seulement exceptionnellement des champs sécants complètement intégrables.

PROPOSITION 2. — *Soit Φ un champ sécant complètement intégrable de l'espace fibré différentiable* E, *à fibre compacte* F. *La projection p de* E *sur* B *définit chacune des variétés intégrales complètes de Φ comme revêtement de* B. *Soit* (B', f, x') *le plus petit revêtement pointé* ([5]) *de* (B, x) *qui recouvre tous les revêtements précé-*

([1]) Séance du 2 juin 1947.

([2]) D'une façon précise, par l'atlas maximal contenant l'atlas donné et satisfaisant aux conditions imposées. Voir *Comptes rendus*, **216**, 1943, pp. 628-630.

([3]) M. Reeb, à qui j'ai signalé ce résultat, l'a appliqué dans *Comptes rendus*, **222**, 1946, pp. 847-849, th. I.

([4]) Voir *Comptes rendus*, **224**, 1947, pp. 444-445.

([5]) Pour la terminologie, voir C. EHRESMANN, *Sur les applications continues*, etc., (*Bull. Soc. Math. de France*, **72**, 1944, p. 38).

dents, supposés pointés au-dessus de $x \in \mathrm{B}$. *Soit* p' *la projection canonique de* $\mathrm{B}' \times \mathrm{F}$ *sur* B'. *Il existe une application* f' *de* $\mathrm{B}' \times \mathrm{F}$ *sur* E, *telle que* $f \circ p' = p \circ f'$, *qui définit* $\mathrm{B}' \times \mathrm{F}$ *comme revêtement de* E *et qui applique chaque ensemble* $\mathrm{B}' \times \{y\}$, *où* $y \in \mathrm{F}$, *sur une variété intégrale complète de* Φ.

En particulier, si B est compact, son groupe de Poincaré étant fini, toutes les variétés intégrales complètes sont compactes. Si B est simplement connexe, E est isomorphe à $\mathrm{B} \times \mathrm{F}$. La proposition 2 s'étend aux variétés feuilletées étudiées par M. Reeb (6).

Corollaire. — *Avec les hypothèses de la proposition 2, les groupes d'homotopie de* E *sont isomorphes à ceux de* $\mathrm{B} \times \mathrm{F}$.

Remarque 1. — Plus généralement, un espace fibré E possède cette dernière propriété lorsque l'espace de base B admet un revêtement (B', f) tel que f soit la projection $p \circ f'$, d'une application continue f' de B' dans E. Un espace fibré E admet un revêtement isomorphe à $\mathrm{B}' \times \mathrm{F}$ lorsque B admet un revêtement B' contractile en un point. Dans ce cas on obtient une méthode de construction de tous les espaces fibrés sur l'espace de base B.

Remarque 2. — On voit facilement que les hypothèses de la proposition 2 plus l'hypothèse que E et p sont trois fois différentiables et Φ deux fois différentiable forment les conditions d'existence sur E d'un ds^2 tel qu'on ait le résultat que communique Lichnérowicz (7) : $b_i(\mathrm{B}) \leq b_i(\mathrm{E})$, quel que soit i, en désignant ainsi les nombres de Betti de B et E pour la dimension i. Cette inégalité se démontre d'une façon élémentaire dans le cas suivant : E est un espace fibré compact sur un complexe B et le squelette K_r de dimension r de B admet un revêtement compact dans E; c'est-à-dire qu'il existe un espace compact K'_r et une application f' de K'_r dans E dont la projection $f = p \circ f'$ définit K'_r comme revêtement de K_r. f induit un homomorphisme f^* du groupe de cohomologie $\mathrm{H}_i(\mathrm{B})$ *dans* celui de K'_r, pour $i \leq r$. Si le groupe des coefficients est le groupe additif des rationnels, f^* est isomorphisme. En effet, soit $\mathrm{W}_i \in \mathrm{H}_i(\mathrm{B})$ et Γ^i un cycle tel que $(\mathrm{W}_i, \Gamma^i) \neq 0$. Il existe dans K'_r un cycle Γ'^i tel que $f(\Gamma'^i) = k\Gamma^i$. Donc $(f^*(\mathrm{W}_i), \Gamma'^i) = (\mathrm{W}_i, k\Gamma^i) \neq 0$, c'est-à-dire $f^*(\mathrm{W}_i) \neq 0$. Comme $f^* = f'^* \circ p^*$, il en résulte que p^* est aussi un isomorphisme pour $i \leq r$. En particulier la condition est toujours vérifiée pour $r = 1$. Par exemple, la condition est vérifiée pour $r = n$ lorsque B est une variété différentiable admettant un revêtement compact parallélisable, E étant un espace fibré *associé* (2) à B. Il en est ainsi pour un espace compact localement euclidien, qui, d'après un théorème de Bieberbach, admet le tore comme revêtement.

Proposition 3. — *Soit* Φ *un champ sécant quelconque de l'espace fibré différentiable* E, *à fibre compacte* F. *A chaque chemin différentiable reliant* x *à* x' *dans* B *correspond un homéomorphisme bien déterminé de* F_x *sur* $\mathrm{F}_{x'}$. *A l'ensemble des chemins fermés d'origine* x *correspond un groupe d'automorphismes de* F_x, *qu'on peut prendre pour groupe de structure de* E. *Si* Φ *est complètement intégrable, on a une représentation du groupe de Poincaré de* B *en* x *sur le groupe d'automorphismes* G *de* F_x.

---

(6) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 1613.

(7) *Comptes rendus*, **224**, 1947, pp. 1413-1414.

On peut dire que Φ définit une structure *d'espace fibré à connexion infinitésimale*. On rattache facilement à cette notion les espaces généralisés de M. E. Cartan([8]).

([8]) J'ai développé cette conception des espaces de Cartan à la fin d'une conférence faite à Zurich en octobre 1942.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **224**, pp. 1611-1612, séance du 9 juin 1947.)

TOPOLOGIE. — *Sur les variétés plongées dans une variété différentiable.* Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Elie Cartan.

1. *Un théorème d'homotopie concernant les espaces fibrés.* — Les résultats ([1]) que je me propose d'énoncer se déduisent principalement du théorème suivant ([2]).

Théorème 1. — *Étant donnés deux espaces fibrés* E(B, F, G, H) *et* E′(A, F, G, H′), *soit* f *une application continue de* A *dans* B *telle qu'il existe une application continue* f' *de* E′ *dans* E *vérifiant la condition suivante* : (γ) *La restriction de* f' *à une fibre* F_u (*où* $u \in A$) *est un homéorphisme de* F_u *sur la fibre* F_x [*où* $x=f(u)\in B$] *de la forme* $h\circ h'^{-1}$, $h\in H$, $h'\in H'$. *Alors toute déformation* (f_t) *de* f *est la projection d'une déformation* (f'_t) *de* f' *telle que* f_t *et* f'_t *vérifient la condition* γ.

Ce théorème n'est qu'une légère généralisation du *lemme d'isotopie* d'une Note antérieure ([3]), où la déformation (f_t) était supposée être une isotopie. L'espace fibré E′(A, F, G, H′) est isomorphe à l'espace fibré E_f *induit* par l'application f, défini dans une Note antérieure ([4]). Le théorème 1 montre que la structure de l'espace fibré E_f ne dépend que de la classe d'homotopie de f.

2. *Application aux sections d'un champ* ([4]) *et aux feuilles d'une variété feuilletée* ([5]).

Soit V_n une variété différentiable munie d'un champ Φ_{n-p} d'éléments de contact de dimension $n-p$. On peut considérer l'espace fibré E des vecteurs tangents à V_n et situés dans les éléments de Φ_{n-p}, ainsi que l'espace fibré E_1 des vecteurs normaux aux éléments de Φ_{n-p} (en supposant V_n muni d'une métrique riemannienne).

Théorème 2. — *Soit* (V_p, f) *une section du champ* Φ_{n-p}. *Si* f *est homotope à une application constante,* V_p *est parallélisable ; de même, l'espace fibré* E_f (*qu'on pourrait appeler l'espace des vecteurs normaux à la section considérée*) *est alors isomorphe à l'espace produit* $V_p\times R^{n-p}$.

En particulier, si V_n *est muni d'une structure feuilletée définie par un champ*

([1]) J'ai indiqué ces résultats dans une conférence faite à Zürich le 24 février 1948.

([2]) Pour les notations, voir *Comptes rendus*, **212**, 1941, p. 945-948.

([3]) *Comptes rendus*, **214**, 1942, p. 144-147.

([4]) *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 444-445.

([5]) G. Reeb, *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 1613-1614.

complètement intégrable Φ_p, toute feuille V_p contractile sur V_n en un point est parallélisable et l'espace des vecteurs normaux à V_p est isomorphe à $V_p \times R^{n-p}$.

Remarques. — *a.* L'espace fibré des vecteurs normaux à une feuille V_p d'une variété feuilletée différentiable possède toujours une propriété remarquable : *il admet une structure fibrée à groupe structural discret et il existe un homomorphisme du groupe de Poincaré de V_p sur ce groupe structural.* Par exemple, si V_p est simplement connexe, il est isomorphe à $V_p \times R^{n-p}$. Ce résultat n'est pas une conséquence du théorème 1.

b. Si les éléments de contact de dimension p orthogonaux aux éléments de Φ_{n-p} peuvent être orientés d'une façon continue, la théorie des classes caractéristiques conduit au résultat suivant : *En supposant que les groupes d'homologie de V_n se réduisent à zéro pour les dimensions $\leqq p$, toute section du champ Φ_{n-p} est parallélisable.*

3. *Sur la variété V'_n des éléments de contact de dimension p de la variété différentiable V_n.*

La variété V'_n est un espace fibré de base V_n, la fibre étant la variété de Grassmann $G_{n,p}$; nous désignons par π la projection canonique de V'_n sur V_n. Soit E l'espace des couples formés d'un élément X_p de V'_n et d'un vecteur tangent à V_n et contenu dans X_p. L'espace E est un espace fibré dont V'_n est l'espace de base, le groupe structural étant le groupe linéaire L_p ou le groupe orthogonal Ω_p.

Théorème 3. — *Soit g une application continue dans V_n d'un complexe A de dimension d. Si $d \leqq n - p$, tout espace fibré de base A, de fibre R^p et de groupe structural L_p où Ω_p est isomorphe à l'espace fibré E_f induit par une certaine application f de A dans V'_n telle que $g = \pi \circ f$. Si $d + 1 \leqq n - p$, pour que deux applications f et f_1 telles que $g = \pi \circ f = \pi \circ f_1$ induisent des espaces fibrés isomorphes E_f et E_{f_1}, il faut et il suffit qu'il existe une déformation (f_t) de f à f_1 telle que $g = \pi \circ f_t$.*

Ce théorème est à rapprocher du théorème de Whitney-Steenrod (6) sur la classification des espaces fibrés à groupe structural Ω_p.

Étant donnée une application g d'une variété différentiable V_p dans V_n, pour qu'il existe dans la classe d'homotopie de g une application différentiable partout de rang p, il faut qu'il existe une application f de V_p dans V'_n telle que $g = \pi \circ f$ et que E_f soit isomorphe à l'espace fibré des vecteurs tangents à V_p. Il est possible que cette condition soit aussi suffisante pour $n > p$. Si $n \geqq 2p$, elle est toujours vérifiée et d'après Whitney g peut être approché par une application différentiable de rang p partout (7).

Par prolongement aux éléments de contact, toute application différentiable g, partout de rang p, de V_p dans V_n donne une application f de V_p

(6) Steenrod, *Annals of Math.*, 45, 1944.

(7) Whitney, *Differentiable Manifolds* (*Annals of Math.*, 37, 1936).

dans V'_n. *Si f est homotope à une application constante,* V_p *est parallélisable. En supposant $n \geqq 2p+1$, la classe d'homotopie de f ne dépend que de la classe d'homotopie de* g.

Supposons V_n muni d'un parallélisme. Soit φ l'application par parallélisme de V'_n sur $G_{n,p}$, variété des éléments de V'_n attachés en un point O de V_n. *Si $n \geqq 2p+1$, la classe d'homotopie de $\varphi \circ f$ est un invariant de la structure différentiable de* V_p.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **226**, p. 1879-1880, séance du 7 juin 1948.)

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur les formes différentielles extérieures de degré* 2. Note (*) de M. **Charles Ehresmann** et Mlle **Paulette Libermann**, transmise par M. Élie Cartan.

Soit V_{2n} une variété n fois différentiable de dimension $2n$. Sur V_{2n} soit Ω une forme différentielle extérieure de degré 2, de rang $2n$ et $n-1$ fois différentiable. Localement Ω peut se mettre sous la forme

$$\omega_1 \wedge \varpi_1 + \omega_2 \wedge \varpi_2 + \ldots + \omega_n \wedge \varpi_n,$$

où ω_i et ϖ_i désignent $2n$ formes de Pfaff linéairement indépendantes. La forme Ω sera dite complètement intégrable s'il existe au moins une variété intégrale (1) de dimension n tangente à un élément de contact intégral (1) arbitraire de dimension n.

1. *Pour que Ω soit complètement intégrable, il faut et il suffit que tout élément intégral de Ω soit aussi élément intégral de $d\Omega$* (2).

Cette condition est évidemment nécessaire, et dans le cas analytique elle est suffisante d'après la théorie de M. E. Cartan (3). Mais en vertu d'un théorème de Lepage et Papy (4), cette condition est équivalente à la suivante :

2. *Pour que Ω soit complètement intégrable, il faut et il suffit que $d\Omega = \theta \wedge \Omega$.*

Si cette condition est remplie, θ est une forme de Pfaff bien déterminée, d'après Lepage et Papy (4). Par différentiation extérieure on obtient $d\theta \wedge \Omega = 0$, ce qui entraîne $d\theta = 0$, si $n > 2$. Localement on peut donc poser $\theta = \lambda^{-1} d\lambda$, λ étant une fonction numérique $n-1$ fois différentiable. On a alors $d(\lambda^{-1}\Omega) = 0$. Donc $\Omega = \lambda\Omega_1$ avec $d\Omega_1 = 0$. Localement il existe une forme de Pfaff θ_1, telle que $\Omega_1 = d\theta_1$. On pourra la mettre sous la forme canonique

$$\theta_1 = x_1\, dy_1 + x_2\, dy_2 + \ldots + x_n\, dy_n.$$

Au voisinage d'un point, où $d\lambda \neq 0$, on pourra prendre $y_1 = \lambda$. D'où le résultat suivant :

(*) Séance du 9 août 1948.

(1) Par définition, la forme induite par Ω sur une variété intégrale ou un élément intégral est nulle.

(2) d est le symbole de différentiation extérieure.

(3) *Les systèmes différentiels extérieurs*, Paris, 1945.

(4) Th.-H. Lepage, *Sur certaines congruences de forme alternées* (*Bull. Soc. royale des Sciences de Liège*, 1946, p. 21-31); G. Papy, *Sur la divisibilité des formes alternées*, etc., (*idem*, 1947, *voir* p. 24, et le lemme p. 25).

3. *Pour $n > 2$, toute forme Ω complètement intégrable, de rang $2n$ et $n-1$ fois différentiable, est localement équivalente à l'une des formes suivantes :*

a. $dx_1 \wedge dy_1 + \ldots + dx_n \wedge dy_n$, *si $d\Omega = 0$ en tout point.*

b. $y_1(dx_1 \wedge dy_1 + \ldots + dx_n \wedge dy_n)$, *au voisinage d'un point où $d\Omega \neq 0$.*

Réciproquement toute forme équivalente à une des formes a et b est complètement intégrable, ce qui démontre la proposition 1 en supposant Ω simplement $n-1$ fois différentiable.

Le facteur intégrant local λ^{-1} est défini à un facteur constant près, ainsi que la forme Ω_1. Pour qu'il existe un facteur intégrant global, il faut et il suffit que θ soit homologue à 0; cette condition n'est pas toujours vérifiée. Tout homéomorphisme local qui laisse Ω invariant reproduit Ω_1 à un facteur constant près.

Pour $n = 2$, une forme Ω de rang 4 et deux fois différentiable est toujours complètement intégrable, mais n'est pas toujours réductible à l'une des formes a et b. Il lui correspond encore une forme de Pfaff bien déterminée θ, définie par l'équation $d\Omega = \theta \wedge \Omega$. De plus on a $d\theta \wedge \Omega = 0$. Les deux formes $d\theta$ et Ω peuvent être dites en involution ([5]). Dans le cas *général*, on pourra déterminer d'une façon *canonique* 4 formes de Pfaff ω_1, ω_2, ϖ_1, ϖ_2 telles qu'on ait

$$\Omega = \omega_1 \wedge \varpi_1 + \omega_2 \wedge \varpi_2,$$
$$d\theta = \lambda(\omega_1 \wedge \varpi_1 - \omega_2 \wedge \varpi_2),$$
$$\theta = \varpi_1 + \varpi_2.$$

Le problème d'équivalence pour Ω est ainsi ramené au problème d'équivalence pour un système de 4 formes de Pfaff, qui se résout facilement par les méthodes de M. E. Cartan. La méthode précédente, suivant une suggestion de M. Yen Chih-ta, peut s'étendre à une forme *générale* de degré 2 et de rang $2n$.

([5]) En chaque point leurs éléments intégraux forment deux complexes linéaires en involution.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **227**, p. 420-421, séance du 18 août 1948.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
130467-48 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

THÉORIE DES GROUPES. — *Sur les extensions de groupes topologiques.* Note (*) de MM. **L. Calabi** et **Charles Ehresmann**, présentée par M. Élie Cartan.

Définition 1. — B et F étant deux groupes topologiques séparés, une *extension topologique de* F *par* B est définie par la donnée d'un groupe topologique E qui admet F comme sous-groupe distingué et d'un isomorphisme de E/F sur B.

Une telle extension topologique, qui est toujours un espace séparé, sera notée E(B, F). Elle sera dite *fibrée* si les classes à gauche suivant F définissent dans E une structure d'espace fibré; le groupe structural de celui-ci est alors le groupe des translations à gauche de F.

1. Sur tout revêtement connexe E d'un groupe topologique B connexe par arcs, il existe ([1]) une structure d'extension E(B, F), telle que les classes suivant F soient les fibres; cette structure, appelée aussi structure de groupe revêtement, est déterminée à un isomorphisme près.

Si B est un groupe simplement connexe et F un groupe discret, toute extension E(B, F) est isomorphe à l'extension *triviale* $B \times F$. Il en résulte :

Proposition 1. — *Soient* B *un groupe connexe et localement simplement connexe,* π *son groupe de Poincaré et* F *un groupe discret : toute représentation* f *de* π *dans le centre de* F *détermine une et une seule extension* E(B, F), *et toute extension* E(B, F) *correspond à une et une seule représentation* f. *L'image* $f(\pi)$ *est la trace de* F *sur la composante connexe de l'élément neutre dans* E.

Remarquons que $E/f(\pi)$ est isomorphe au groupe produit $B \times F/f(\pi)$.

2. La théorie de la dualité des groupes abéliens localement compacts ([2]) et la connaissance de leur structure ([3]) permettent de formuler les résultats suivants :

Proposition 2. — *Toute extension topologique abélienne d'un groupe abélien compact par un groupe de la forme* $R^n \times D$ ([4]), *où* D *est un groupe abélien discret*

(*) Séance du 9 mai 1949.

([1]) Ch. Ehresmann, *Bull. Soc. Math. France*, **72**, 1944, p. 40.

([2]) A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques*, p. 99.

([3]) J. Braconnier, *Journ. Math. pures et appl.*, **27**, 1948.

([4]) R^n : groupe topologique produit de n groupes isomorphes au groupe additif des réels.

dont tous les éléments différents de zéro sont d'ordre infini, est isomorphe à l'extension triviale.

Proposition 3. — *Toute extension topologique abélienne de* R^n *par un groupe abélien localement compact est isomorphe à l'extension triviale.*

Proposition 4. — *Soit* $B = R^m \times K \times D$, $F = R^n \times K'$, *où* D *est un groupe abélien discret,* K *et* K' *deux groupes abéliens compacts connexes; si* $K = S^I$ *ou si* $K' = T^I$ (5), *toute extension abélienne* E (B, F) *est isomorphe à l'extension triviale.*

Remarques. — 1° Pour la validité de ces propositions il est essentiel de demander que l'extension soit abélienne. 2° Toute extension d'un groupe localement compact par un groupe localement compact l'est aussi (6).

3. Les résultats de M. Élie Cartan (7) concernant la structure des groupes de Lie compacts entraînent la

Proposition 5. — *Soient* K *et* K' *deux groupes de Lie compacts connexes dont* K *simplement connexe; alors toute extension fibrée* $E\,(T^r \times K, T^s \times K')$ *est isomorphe à l'extension triviale.*

Notons que si K n'est pas simplement connexe, on peut avoir des extensions non triviales : en effet on sait que le groupe des rotations de S_4 est une extension non triviale du groupe S_3 par le groupe P_3 (groupe des rotations de R^3).

La proposition 5 montre en particulier que toute extension fibrée $E(T^r, T^s)$ est triviale ; il y a d'autre part des espaces fibrés par T^s sur T^r dont le groupe structural est le groupe des translations à gauche de T^s et qui ne sont pas isomorphes au produit $T^r \times T^s$. Il y a donc des espaces fibrés par un groupe topologique F sur un groupe topologique B, sur lesquels il n'existe aucune structure d'extension E(B, F) telle que les classes suivant F soient les fibres, même si le groupe structural est le groupe des translations à gauche de F.

4. *Définition* 2. — Si $G_0, G_1, \ldots, G_n$ sont $n+1$ groupes topologiques séparés, une *n-extension topologique* $E_n(G_0, G_1, \ldots, G_n)$ est une extension topologique par G_0 d'une $(n-1)$ — extension topologique $E_{n-1}(G_1, G_2, \ldots, G_n)$. Si, pour tout i, G_i est isomorphe à un même groupe G, nous parlerons d'une *n-extension topologique* $E_n(G)$ *de* G.

Notons que toute extension $E(E_r(G_0, \ldots, G_r), E_s(G'_0, \ldots, G'_s))$ admet une structure de symbole $E_{r+s+1}(G_0, \ldots, G_r, G'_0, \ldots, G'_s)$.

---

(5) T^I (resp. Q^I) : groupe topologique produit d'une famille de groupes isomorphes au groupe des réels mod 1 (resp. au groupe additif des rationnels). S^I : dual de Q^I, ce dernier pris avec la topologie discrète.

(6) N. Vilenkin, *Doklady U.R.S.S.*, 1948, p. 135; *Math. Rev.*, 1948, p. 497.

(7) *Mémorial de mathématiques*, **42**, 1930, p. 42.

Puisque toute extension d'un groupe soluble par un groupe soluble est elle-même soluble, on a le résultat suivant :

Proposition 6. — *Si* G *est un groupe topologique, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) G *admet une structure de* $(n-1)$*-extension fibrée de* R.

(*b*) G *est un groupe de Lie soluble simplement connexe.*

(*c*) G *est un groupe de Lie homéomorphe à* R^n *n'admettant pas de sous-groupes localement isomorphes au groupe linéaire spécial réel à deux variables.*

La démonstration utilise [8], [9] et un théorème d'Engel [10].

Si G est un groupe de Lie homéomorphe à R^n, le quotient de G par son sous-groupe soluble maximal est donc un produit de groupes isomorphes au groupe simple homéomorphe à R^3.

Un groupe de Lie soluble connexe est évidemment une n-extension fibrée $E_n(G_0, \ldots, G_n)$ où chaque G_i est isomorphe à R ou à T.

---

[8] C. Chevalley, *Lectures in Topology*, 1941; *Ann. of Math.*, **42**, 1941.

[9] A. Malcev, *Rec. Math. Moscou*, **16**, 1945, p. 181 et **19**, 1946, p. 524.

[10] S. Lie-F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, 1893, vol. 3, p. 757.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **228**, p. 1551-1553, séance du 16 mai 1949.)

GAUTHIER-VILLARS IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
132890-49 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur le problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques* (¹). Note (*) de M. **Charles Ehresmann** et Mlle **Paulette Libermann**, présentée par M. Élie Cartan.

1. Sur une variété deux fois différentiable V_{2n}, soit Ω une forme différentielle extérieure quadratique de rang $2n$ en chaque point. Soit α_x l'isomorphisme de l'espace vectoriel tangent en x sur son dual, défini par

$$\alpha_x(X) = X \rfloor \Omega_x,$$

où X est un vecteur tangent en x et Ω_x la restriction de Ω à l'espace tangent en x. Le prolongement de α_x à l'ensemble des p-vecteurs sera encore désigné par α_x. Si X est un champ de p-vecteurs sur V_{2n}, la fonction $x \rightarrow \alpha_x(X(x))$ définit un champ de p-vecteurs covariants, c'est-à-dire une forme différentielle extérieure $\alpha(X)$. Inversement, à toute forme Π de degré p correspond un champ de p-vecteurs $\alpha^{-1}(\Pi)$. Posons $\alpha^{-1}(\Omega) = \Gamma$. A toute forme Π on peut associer une forme $\Pi^\star$, dite *forme adjointe*, définie par $\Pi^\star = \alpha^{-1}(\Pi) \rfloor \Omega^n/n!$. On a

$$(\Pi^\star)^\star = \Pi, \qquad (\Pi \wedge \Pi')^\star = \alpha^{-1}(\Pi) \rfloor \Pi'^\star,$$

$\omega^\star = \omega \wedge \Omega^\star$, où ω est une forme de Pfaff

$$\Omega^\star = \frac{\Omega^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad \left(\frac{\Omega^p}{p!}\right)^\star = \frac{\Omega^{n-p}}{(n-p)!}, \qquad \left(\frac{\Omega^n}{n!}\right)^\star = 1.$$

Par définition, la *codifférentielle* de Π relativement à Ω sera

$$\delta\Pi = \left(d(\Pi^\star)\right)^\star.$$

(*) Séance du 3 octobre 1949.

(¹) Cette Note fait suite à une Note antérieure (*Comptes rendus*, 227, 1948, p. 420-421). Notations : d est le symbole de différentiation extérieure, $\rfloor$ le symbole du produit intérieur (*voir* Bourbaki, *Algèbre*, Chap. III, Paris, Hermann, 1948).

On a $\delta\delta\Pi = 0$. On démontre les identités suivantes :

$$(1)\qquad (\delta\Omega)^* = \delta\Omega \wedge \Omega^* = d\Omega \wedge \frac{\Omega^{n-2}}{(n-2)!},$$

$$(2)\qquad \left(d\Omega - \frac{\delta\Omega}{n-1} \wedge \Omega\right) \wedge \Omega^{n-2} = 0,$$

$$(3)\qquad \delta\Omega = \Gamma \rfloor d\Omega.$$

$$(4)\qquad \frac{\delta(\Omega^p)}{p!} = -\frac{d(\Omega^{p-1})}{(p-1)!} + \delta\Omega \wedge \frac{\Omega^{p-1}}{(p-1)!},$$

$$(5)\qquad \left(d(\Omega^p) - \frac{\delta(\Omega^p) \wedge \Omega}{n-p}\right) \wedge \Omega^{n-p-1} = 0,$$

$$(6)\qquad \frac{\Gamma^p}{p!} \rfloor \frac{d(\Omega^p)}{p!} = \frac{(n-2)!}{(p-1)!\,(n-p-1)!} \delta\Omega.$$

$d\Omega = 0$ entraîne $\delta\Omega = 0$; mais $\delta\Omega = 0$ entraîne $d\Omega = 0$ seulement pour $n = 2$. D'après un théorème de Lepage ([2]), il existe une forme de Pfaff bien déterminée θ telle que $(d\Omega - \theta \wedge \Omega) \wedge \Omega^{n-2} = 0$ et la formule (2) montre que $\theta = \delta\Omega/(n-1)$. La formule (3) identifie $\delta\Omega$ avec le *vecteur covariant de courbure* de Ω, introduit par Lee ([3]).

2. Les notions précédentes permettent de retrouver rapidement les résultats de Lee et de notre Note antérieure. Ainsi pour que Ω admette le facteur intégrant λ, il faut et il suffit que $d(\lambda\Omega) = 0$, c'est-à-dire $d\Omega + (d\lambda/\lambda) \wedge \Omega = 0$. Ceci est équivalent à l'ensemble des deux conditions

$$\delta\Omega + (n-1)\frac{d\lambda}{\lambda} = 0 \qquad \text{et} \qquad d\Omega - \frac{\delta\Omega}{n-1} \wedge \Omega = 0.$$

La condition d'existence d'un facteur intégrant pour Ω est donc donnée par l'ensemble des deux conditions

$$d\delta\Omega = 0 \qquad \text{et} \qquad d\Omega - \frac{\delta\Omega}{n-1} \wedge \Omega = 0.$$

Si $n = 2$, la deuxième condition est vérifiée identiquement. Si $n > 2$, elle entraîne la première, car elle donne $d\delta\Omega \wedge \Omega = 0$.

3. En appliquant plusieurs fois les opérateurs d et δ, on obtient un ensemble

---

([2]) Th.-H. Lepage, *Sur certaines congruences de formes alternées* (*Bull. Soc. royale des Sciences de Liége*, 1946, p. 21-31).

([3]) Hwa-Chung Lee, *A kind of even-dimensional geometry and its applications to exterior calculus* (*Am. Journal of Math.*, 1943, p. 433-438). Cet article, qui nous a été signalé par M. Yen Chih-Ta après la parution de notre Note ([1]), contient déjà sous une autre forme plusieurs résultats énoncés par nous.

d'invariants de Ω. Posons $\Delta = d\delta + \delta d$. $\Delta\Pi$ est de même degré que Π. On a

$$(\delta d\Pi)^{\star} = d\delta\Pi^{\star}, \qquad (\Delta\Pi)^{\star} = \Delta(\Pi^{\star}).$$

Si $n = 2$, on a $\Delta\Omega = 0$.

Si $n > 2$, on démontre les identités

$$(\Delta\Omega)^{\star} = \Delta \frac{\Omega^{n-1}}{(n-1)!} = d\Omega \wedge \delta\Omega \wedge \frac{\Omega^{n-3}}{(n-3)!},$$

$$\left(\Delta \frac{\Omega^p}{p!}\right)^{\star} = \Delta \frac{\Omega^{n-p}}{(n-p)!} = \left(d\Omega \wedge \delta\Omega \wedge \frac{\Omega^{p-2}}{(p-2)!}\right)^{\star} + d\Omega \wedge \delta\Omega \wedge \frac{\Omega^{n-p-2}}{(n-p-2)!}.$$

$\Delta\Omega$ est toujours de rang inférieur à $2n$. Si $\delta\Omega = 0$, on a $\Delta\Omega^p = \delta d\Omega^p = d\delta\Omega^p = 0$, quel que soit p, et l'opérateur δ ne donne pas de nouveaux invariants. Si $\delta\Omega \neq 0$, on obtient un ensemble d'invariants en général non nuls; par exemple, $\Delta^p(\Omega^q)$, les formes de Pfaff $\delta\Delta^p(\Omega)$ et $\Gamma^p \rfloor d(\Omega_p)$, des invariants scalaires du type $[(d\delta\Omega)^p \wedge \Omega^{n-p}]^{\star}$. A l'aide de ces invariants on pourra, *dans le cas général*, mettre Ω sous une forme canonique.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 229, p. 697-698, séance du 10 octobre 1949.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
134104-49 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Sur les structures presque hermitiennes isotropes.* Note (*) de M. **Charles Ehresmann** et M[lle] **Paulette Libermann**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Les structures presque hermitiennes « isotropes » sont localement équivalentes à une structure d'espace hermitien elliptique, hyperbolique ou linéaire, ou à une structure presque hermitienne sur S_6.

Soit V_{2n} une variété réelle trois fois différentiable, de dimension $2n$. Supposons définie sur V_{2n} une structure presque hermitienne (1). Localement cette structure est définie par n formes de Pfaff $\omega_1, \ldots, \omega_n$, à valeurs complexes, formant avec l'ensemble des formes conjuguées $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_n$ un système de formes indépendantes, la forme d'Hermite étant définie par $ds^2 = \Sigma\overline{\omega}_i\omega_i$. La même structure peut être déterminée par n formes de Pfaff ω'_i, où $\omega'_i = \Sigma u_{ij}\omega_j$, les u_{ij} étant des fonctions locales sur V_{2n} définissant en chaque point une transformation unitaire $\Sigma u_{ij}\overline{u}_{ik} = \delta_{jk}$. Aux n formes ω'_i correspond en chaque point une base duale de l'espace tangent, appelée repère unitaire.

On peut déterminer d'une façon unique des formes ω_{ij}, linéaires en ω_i et $\overline{\omega}_i$ et vérifiant les équations (2) :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} d\omega_i = \Sigma\omega_j \wedge \omega_{ji} + \Sigma A_{jki}\omega_j \wedge \omega_k + \Sigma B_{jki}\overline{\omega}_j \wedge \overline{\omega}_k \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ \omega_{ij} + \overline{\omega}_{ji} = 0, \qquad A_{jki} + A_{kji} = 0, \qquad B_{jki} + B_{kji} = 0. \end{array}\right.$$

Les formes $\Omega_i = \Sigma A_{jki}\omega_j \wedge \omega_k$ définissent la première torsion de la structure, les formes $\Gamma_i = \Sigma B_{jki}\overline{\omega}_j \wedge \overline{\omega}_k$, la seconde torsion. La courbure est définie par les formes $\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \Sigma\omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$, qui vérifient les équations $\Omega_{ij} + \overline{\Omega}_{ji} = 0$,

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} d(\Omega_i + \Gamma_i) + \Sigma(\Omega_j + \Gamma_j) \wedge \omega_{ji} - \Sigma\omega_j \wedge \Omega_{ji} = 0, \\ d\Omega_{ij} + \Sigma\Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \Sigma\omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} = 0. \end{array}\right.$$

(*) Séance du 19 mars 1951.

(1) C. Ehresmann, *Sur la théorie des espaces fibrés* (*Colloque Top. alg; C. N. R. S.*, Paris 1947); *Sur les variétés presque complexes* (Séminaire Bourbaki 1950, à paraître dans *Proc. Congr. Intern. Math*, 1950; P. Libermann, *Bull. Sciences, Acad. Roy. Belgique*, 1950.

(2) Pour le cas hermitien (*voir* S. S. Chern, *Annals of Math.*, 47, 1946).

Aux formes ω'_i sont associées de même les formes ω'_{ij}, Ω'_i, Γ'_i, Ω'_{ij} :

$$(3)\qquad \begin{cases} \omega'_{kl} = \Sigma\, u_{li} u_{kj} \omega_{ji} + \Sigma\, u_{li}\, d\bar{u}_{ki}, \\ \Omega'_{kl} = \Sigma\, u_{li}\, \bar{u}_{kj} \Omega_{ji}, \qquad \Omega'_l = \Sigma\, u_{li} \Omega_i, \qquad \Gamma'_l = \Sigma\, u_{li} \Gamma_i. \end{cases}$$

Les formes de courbure s'écrivent :

$$(4)\quad \Omega_{ij} = \Sigma\, \mathrm{R}_{ijlm} \bar{\omega}_l \wedge \omega_m + \Sigma\, \mathrm{H}_{ijlm} \omega_l \wedge \omega_m - \Sigma\, \bar{\mathrm{H}}_{jilm} \bar{\omega}_l \wedge \bar{\omega}_m \qquad \text{avec} \quad \mathrm{R}_{ijlm} = \bar{\mathrm{R}}_{jiml}.$$

On démontre que si l'une des torsions est nulle, $\Omega_{ij} = \Sigma\, \mathrm{R}_{ijlm}\, \bar{\omega}_l \wedge \omega_m$.

Un automorphisme local d'équivalence de la structure considérée est un automorphisme différentiable local f de V_{2n} qui transforme chaque repère unitaire en un repère unitaire. La structure sera dite *isotrope* au point x (resp. *localement homogène*) lorsqu'il existe un automorphisme d'équivalence transformant un repère d'origine x en un repère arbitraire d'origine x (resp. un point arbitraire x en un point arbitraire x' appartenant à un voisinage de x).

Théorème 1. — *Une structure hermitienne isotrope en chaque point est localement homogène et localement équivalente à la structure d'espace hermitien elliptique, hyperbolique ou linéaire (« flat »).*

On exprime que les A'_{jki}, B'_{jki}, R'_{ijlm}, H'_{ijlm} sont indépendants du repère en chaque point. On peut se borner à des transformations diagonales et à des transformations de la forme $\omega'_i = u_{ij}\omega_j$, $\omega'_j = u_{ji}\omega_i$ et $\omega'_k = \omega_k$ pour $k \neq i, j$, et l'on trouve

$$\mathrm{A}'_{jki} = 0, \qquad \mathrm{B}'_{jki} = 0, \qquad \Omega_{ij} = \lambda \bar{\omega}_i \wedge \omega_j, \qquad \Omega_{ii} = \lambda \bar{\omega}_i \wedge \omega_i + \mu \Sigma \bar{\omega}_j \wedge \omega_j \qquad (\lambda \text{ et } \mu \text{ réels}).$$

Les équations (2) entraînent que λ et μ sont des constantes égales (cas elliptique : $\lambda < 0$, cas hyperbolique : $\lambda > 0$, cas linéaire : $\lambda = 0$).

On peut considérer *l'isotropie restreinte* telle qu'un repère unitaire d'origine x puisse être transformé en un repère unitaire d'origine x se déduisant du premier par une transformation unitaire *unimodulaire*.

Théorème 2. — *Une structure presque hermitienne isotrope d'une façon restreinte en chaque point est ou bien isotrope ou bien localement isomorphe à une structure presque hermitienne définie sur la sphère* S_6.

Le même raisonnement conduit en effet aux structures isotropes déjà considérées et en plus, dans le cas $n = 3$, à une structure définie par des formes ω_i telles qu'on ait :

$$(5)\qquad \begin{cases} d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega_{11} + \omega_2 \wedge \omega_{21} + \omega_2 \wedge \omega_{31} - 2\rho\bar{\omega}_2 \wedge \bar{\omega}_3, \\ d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} + \omega_2 \wedge \omega_{22} + \omega_3 \wedge \omega_{32} - 2\rho\bar{\omega}_3 \wedge \bar{\omega}_1, \\ d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} + \omega_3 \wedge \omega_{33} - 2\rho\bar{\omega}_1 \wedge \bar{\omega}_2, \\ d\omega_{ij} = \Sigma\omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - 3\rho\bar{\rho}\,\bar{\omega}_i \wedge \omega_j, \\ d\omega_{ii} = \Sigma\omega_{ik} \wedge \omega_{ki} - 3\rho\bar{\rho}\,\bar{\omega}_i \wedge \omega_i + \rho\bar{\rho}\,\Sigma\,\bar{\omega}_j \wedge \omega_j, \\ \quad \Sigma\omega_{ii} = 0, \qquad \omega_{ij} + \bar{\omega}_{ji} = 0, \qquad \rho\bar{\rho} = \text{const}. \end{cases}$$

On peut introduire de nouveaux repères unitaires de façon que ρ soit une constante réelle positive. En chaque point est alors déterminée une classe de repères unitaires modulo le groupe unitaire unimodulaire. A ces repères correspondent des formes de Pfaff ω'_i dépendant de 8 paramètres auxiliaires et vérifiant avec les formes associées ω'_{ij} les équations (5), avec $\rho = \text{const.}$, $\rho > 0$. On remarque que ces équations sont les équations de structure du groupe simple G_2 à 14 paramètres qui opère transitivement sur S_6 ([3]). *La structure considérée est donc localement équivalente à une structure presque hermitienne sur* S_6 *admettant* G_2 *comme groupe d'automorphismes.* Ce groupe ne peut laisser invariante sur S_6 qu'une seule structure presque complexe. Celle-ci est donc isomorphe à la structure presque complexe définie à l'aide des octaves de Cayley ([4]). Comme la deuxième torsion dans les formules (5) n'est pas nulle, *cette structure ne dérive pas d'une structure complexe.*

Sur S_6, *toute structure presque hermitienne localement homogène est équivalente a une structure correspondant aux formules* (5) *avec* $\rho = \text{const.}$ ([5]).

([3]) E. CARTAN, *Thèse*, Paris, p. 116.

([4]) KIRCHHOFF, *Comptes rendus*, **225**, 1947 p. 1258.

([5]) Ceci résulte du fait que tout espace localement homogène de Lie compact et simplement connexe est équivalent à un espace homogène de Lie (C. EHRESMANN, *Enseignement Math.*, 1936, p. 322) et du fait que G_2 est le seul groupe de Lie compact opérant transitivement sur S_6, abstraction faite du groupe orthogonal (A. BOREL, *Bull. Am. Math. Soc.*, 55, p. 586).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **232**, p. 1281-1283, séance du 28 mars 1951.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
139661-51 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

/33/

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Les prolongements d'une variété différentiable. I. Calcul des jets, prolongement principal.* Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Cette Note fait suite à une Note ([1]) antérieure et résume une conférence faite à l'Institut d'Oberwolfach le 19 août 1951. Le jet comme élément fondamental de la géométrie différentielle. Prolongements d'ordre r d'une variété différentiable. Étude des structures fibrées des prolongements. Celles-ci ne dépendent que de la structure fibrée du prolongement principal du premier ordre.

Appelons automorphisme local d'ordre r de l'espace numérique R^n tout homéomorphisme r fois continûment différentiable d'un ouvert de R^n dans R^n, partout de rang n. Soit A_n^r le pseudogroupe formé par ces automorphismes. Une structure de r-variété sur V_n est définie par un atlas A de V_n sur R^n compatible ([1]) avec A_n^r. Si V_n et V_m sont deux r-variétés, une application f d'un voisinage de $x \in V_n$ dans V_m est appelée r-application au point x si, à l'aide de coordonnées locales admissibles au voisinage de x et de $f(x)$, elle s'exprime par des fonctions f_i admettant des dérivées partielles continues de chaque espèce jusqu'à l'ordre r. Soit $C_x^r(V_n, V_m)$ l'ensemble des fonctions pointées (f, x), où f est une r-application au point $x \in V_n$; soit $C^r(V_n, V_m)$ la réunion $\bigcup_{x \in V_n} C_x(V_n, V_m)$. Deux éléments (f, x) et (g, x) de $C_x^r(V_n, V_m)$ sont dits de même r-classe lorsque $f(x) = g(x)$ et lorsque pour les fonctions f_i et g_i correspondantes les dérivées partielles de même espèce d'ordre $\leq r$ ont la même valeur en x.

Définition ([2]). — *Appelons r-jet de source x une r-classe X de $C_x^r(V_n, V_m)$, but de X l'image de x par un des éléments de X. Soit $J_x^r(V_n, V_m)$ l'ensemble des r-jets de source x, $J^r(V_n, V_m)$ la réunion $\bigcup_{x \in V_n} J_x^r(V_n, V_m)$. Le r-jet déterminé par*

([1]) *Comptes rendus*, 216, 1943, p. 628. *Voir* aussi : C. Ehresmann, *Sur la théorie des espaces fibrés* (*Colloque de Topologie algébrique, C. N. R. S.*, Paris, 1947).

([2]) Les définitions s'appliquent aussi au cas $r = \infty$, au cas analytique réel ou complexe, ainsi qu'au cas algébrique (A_n^r est alors à remplacer par le pseudogroupe des transformations birationnelles de l'espace projectif complexe ou réel sur lui-même, f étant une application algébrique d'une variété algébrique sans singularités V_n dans une autre).

$(f, x) \in C_x^r(V_n, V_m)$ *se notera* $j_x^r f$; *la fonction* $x \to j_x^r f$, *qui est définie dans un voisinage de* x *et qui se notera* $j^r f$, *est le r-flot de* f.

Les éléments $(f, x) \in C^r(V_n, V_m)$ et $(g, f(x)) \in C^r(V_m, V_p)$ admettent le composé $(gf, x) \in C^r(V_n, V_p)$. *Cette composition entraîne par passage aux quotients une loi de composition entre r-jets, une deuxième entre r-applications et r-jets, une troisième entre r-jets et r-applications pointées :*

$$j_x^r(gf) = (j_{f(x)}^r g)(j_x^r f) = g(j_x^r f) = (j_{f(x)}^r g)(f, x).$$

Le r-jet de l'application identique de V_n pointée en $x \in V_n$ est le *r-jet neutre* en x; on peut l'identifier à x. Un *r-jet stable* en x est un r-jet de V_n dans V_n de source et de but x. Un *r-jet d'isotropie* en x est un r-jet stable en x et inversible, c'est-à-dire de rang n, rang habituel en x d'un élément du r-jet (nous définirons aussi un rang d'ordre $k \leq r$). Les r-jets d'isotropie en x forment un groupe $L_n^r(V_n, x)$, *groupe d'isotropie infinitésimale en* x, qui est isomorphe au groupe $L_n^r(R^n, o)$ que nous noterons L_n^r. Le groupe L_n^1 s'identifie canoniquement au groupe linéaire homogène L_n de R^n. Le groupe L_n^r est une extension inessentielle de L_n par un groupe résoluble homéomorphe à un espace numérique. L_n^r est une extension de L_n^{r-1} par un groupe isomorphe au groupe additif R^d.

Appelons *p^r-vitesse* dans V_n d'origine x un r-jet de R^p dans V_n de source o et de but x; soit $T_p^r(V_n)$ l'ensemble des p^r-vitesses dans V_n. Appelons *p^r-covitesse* de V_n d'origine x un r-jet de V_n dans R^p de source x et de but o; soit $T_p^{r*}(V_n)$ l'ensemble des p^r-covitesses de V_n. Pour $p = r = 1$ on définit ainsi les *vitesses* et les *covitesses* de V_n, appelées *vecteurs* et *covecteurs*. Soit $L_{n,p}^r$ l'espace des p^r-vitesses de R^n en o ou des n^r-covitesses de R^p en o. L_n^r est un groupe d'opérateurs à gauche sur $L_{n,p}^r$, à droite sur $L_{p,n}^r$. Soit t_x la translation de R^n amenant $x \in R^n$ en o. L'ensemble $T_p^r(R^n)$ s'identifie canoniquement à $R^n \times L_{n,p}^r$ par $X \to (x, t_x X)$, où X est une p^r-vitesse d'origine x. $T_p^{r*}(R^n)$ s'identifie canoniquement à $R^n \times L_{p,n}^r$. Appelons *r-repère* de V_n une n^r-vitesse de rang n de V_n. L'ensemble $H^r(V_n)$ de ces r-repères est le *prolongement principal d'ordre r* de V_n. Définition analogue du r-corepère et de $H^{r*}(V_n)$.

Pour une application f de V_n dans R^p on appelle *différentielle d'ordre r* en $x \in V_n$ la p^r-covitesse $d_x^r f = j_x^r(t_{f(x)} f)$, t_u désignant toujours la translation dans R^p amenant u en o. En particulier si f est l'application identique de R^n, $d_x^r f$ se note $d^r x$. La fonction $x \to d_x^r f$ se note $d^r f$. Il lui correspond une application de $T_q^r(V_n)$ dans $L_{p,q}^r$, définie par $X \to (d_x^r f)X$, où X est une q^r-vitesse d'origine x.

Soit f une r-application de V_n dans V_n. Par composition, f définit une application de $T_p^r(V_n)$ dans $T_p^r(V_m)$, appelée prolongement de f et désignée encore par f. Le pseudogroupe Λ_n^r se prolonge ainsi à $T_p^r(R^n)$ ou à $T_p^{r*}(R^n)$.

Le prolongement de $\varphi \in \Lambda_n^r$ s'écrit :

$$(x, y) \to (\varphi(x), \varphi_x^r y), \qquad \text{où} \quad x \in \mathrm{R}^n,\ y \in \mathrm{L}_{n,p}^r,$$
$$\varphi_x^r = j_0^r (t_{\varphi(x)} \varphi t_x^{-1}) = d_x^r (\varphi t_x^{-1}).$$

L'élément φ_x^r de L_n^r est la *dérivée* d'ordre r de φ en x. L'atlas A admet un prolongement formant un atlas de $\mathrm{T}_p^r(\mathrm{V}_n)$ sur $\mathrm{T}_p^r(\mathrm{R}^n) = \mathrm{R}_n \times \mathrm{L}_{n,p}^r$, compatible avec le prolongement de Λ_n^r. Il détermine sur $\mathrm{T}_p^r(\mathrm{V}_n)$ une structure fibrée de symbole $\mathrm{T}_p^r(\mathrm{V}_n, \mathrm{L}_{n,p}^r, \mathrm{L}_n^r, \mathrm{H}^r(\mathrm{V}_n))$. Pour $h \in \mathrm{H}^r(\mathrm{V}_n)$ l'application $y \to hy$ est un isomorphisme de $\mathrm{L}_{n,p}^r$ sur une fibre de cette structure fibrée. L'espace fibré principal associé est $\mathrm{H}^r(\mathrm{V}_n)$, à groupe structural L_n^r. C'est une extension ([3]) de $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}_n)$, associée à l'homomorphisme canonique de L_n^r sur L_n. Le noyau de celui-ci étant homéomorphe à R^k, sa structure fibrée est déterminée à un isomorphisme près par celle de $\mathrm{H}^1(\mathrm{V}_n)$.

Définition. — *Un prolongement d'ordre r de* V_n *est un espace fibré associé an prolongement principal* $\mathrm{H}^r(\mathrm{V}_n)$.

Ce qui précède démontre :

Théorème. — *Les structures fibrées définies sur les prolongements d'ordre r de* V_n *sont déterminées, à un isomorphisme près, par la structure fibrée du prolongement principal du premier ordre.*

([3]) C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales* (*Colloque de Topologie, C. B. R. M.*, Bruxelles, 1950).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **233**, p. 598-600, séance du 10 septembre 1951.)

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Les prolongements d'une variété différentiable. II. L'espace des jets d'ordre r de* V_n *dans* V_m. Note (*) de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Cette Note fait suite à une Note antérieure [1]. Étant donné deux r-variétés V_n et V_m, nous allons définir trois structures fibrées sur l'espace $J^r(V_n, V_m)$ des r-jets de V_n dans V_m : la première de base $V_n \times V_m$, la deuxième de base V_n, la troisième de base V_m; les fibres sont respectivement isomorphes à $L^r_{m,n}$, $T^r_n(V_m)$, $T^{r\star}_m(V_n)$, munis des groupes structuraux $L^r_n \times L^r_m$, L^r_n, L^r_m.

Pour $X \in J^r(V_n, V_m)$ soit $\alpha(X)$ la source de X, $\beta(X)$ le but de X. α est l'application canonique de $J^r(V_n, V_m)$ sur V_n, β l'application canonique sur V_m et $\gamma = (\alpha, \beta)$ l'application canonique sur $V_n \times V_m$.

Pour $X \in J^r(R^p, V_n)$, posons $\partial^r X = X \partial^r x$, où $x = \alpha(X)$, $\partial^r x = j^r_0(t_x^{-1})$. Pour $(f, x) \in C^r(R^p, V_n)$, posons $\partial^r_x f = f \partial^r x$. La p^r-vitesse de V_n d'origine $x' = \beta(X)$ [resp. $f(x)$] définie par $\partial^r X$ (resp. $\partial^r_x f$) est appelée *vitesse d'ordre r* de X (resp. f) en x où à l'instant x.

Pour $X \in J^r(V_n, R^p)$, la *différentielle d'ordre r* de X est $d^r X = (d^r x')X$, où $x' = \beta(X)$, $d^r x' = j^r_{x'}(t_{x'})$. Si X est inversible (de rang $n = p$), $d^r X \in H^{r\star}(V_n)$ est l'inverse de $\partial^r(X^{-1}) \in H^r(V_n)$; $d^r x$ est l'inverse de $\partial^r x$, où $x \in R^p$. Rappelons la notation $d^r_x f = (d^r x')(f, x)$, où $(f, x) \in C^r(V_n, R^p)$, $x' = f(x)$.

Soit $X \in J^r(R^n, R^m)$, $x = \alpha(X)$, $x' = \beta(X)$. Appelons *dérivée d'ordre r* de X l'élément $(d^r x')X \partial^r x = (d^r X) \partial^r x = (d^r x') \partial^r X$; c'est un élément de $L^r_{m,n}$ qu'on peut noter aussi $d^r X / d^r x$. Pour $(f, x) \in C^r(R^n, R^m)$, la dérivée d'ordre r de f en x est l'élément f^r_x de $L^r_{m,n}$ défini par $f^r_x = (d^r x') f \partial^r x$, où $x' = f(x)$. On a $d^r_x f = f^r_x d^r x$, $\partial^r_x f = (\partial^r x') f^r_x$, ce qui justifie la notation $f^r_x = d^r_x f / d^r x$. Si $X \in J^r(R^n, R^m)$ et $X' \in J^r(R^m, R^p)$ admettent le composé $X'X \in J^r(R^n, R^p)$, l'associativité de la composition des jets entraîne

$$\frac{d^r(X'X)}{d^r x} = \left(\frac{d^r X'}{d^r x'}\right)\left(\frac{d^r X}{d^r x}\right), \qquad x = \alpha(X), \qquad x' = \beta(X) = \alpha(X').$$

Pour $(f, x) \in C^r(R^n, R^m)$ et $(g, x') \in C^r(R^m, R^p)$, où $x' = f(x)$, on a

$$(gf)^r_x = g^r_{x'} f^r_x; \qquad d^r_x(gf) = g^r_{x'} d^r_x f; \qquad \partial^r_x(gf) = g \partial^r_x f = (\partial^r_{x'} g) f^r_x.$$

(*) Séance du 24 septembre 1951.

(1) *Comptes rendus*, 233, 1951, p. 598.

$J^r(R^n, R^m)$ s'identifie canoniquement à $R^n \times R^m \times L^r_{m,n}$ par l'application $X \to (x, x', y)$ où $X \in J^r(R^n, R^m)$, $x = \alpha(X)$, $x' = \beta(X)$, $y = d^r X / d^r x \in L^r_{m,n}$. Soit $\Lambda^r_n \times \Lambda^r_m$ le pseudogroupe de transformations dans $R^n \times R^m$ formé par l'ensemble des transformations $(\varphi, \psi) : (x, x') \to (\varphi(x), \psi(x'))$, où $\varphi \in \Lambda^r_n$, $\psi \in \Lambda^r_m$, $(x, x') \in R^n \times R^m$ tel que $\varphi(x)$ et $\psi(x')$ soient définis. Le pseudogroupe $\Lambda^r_n \times \Lambda^r_m$ se prolonge à $J^r(R^n, R^m)$: $(\varphi, \psi)\, X = (j^r_{x'}\ \psi)\, X(j^r_{\varphi(x)} \varphi^{-1})$. La transformation $X \to (\varphi, \psi)X$ correspond dans $R^n \times R^m \times L^r_{m,n}$ à la transformation

$$(x, x', y) \to (\varphi(x), \psi(x'), \psi^r_{x'} y (\varphi^r_x)^{-1}), \qquad \text{où} \qquad \varphi^r_x \in L^r_n, \qquad \psi^r_{x'} \in L^r_m.$$

Soient V_n et V_m deux r-variétés, A un atlas de V_n sur R^n, A' un atlas de V_m sur R^m. $g \in A$ est un r-isomorphisme d'un ensemble ouvert de R^n sur un ensemble ouvert de V_n. L'ensemble des couples (g, g'), où $g \in A$, $g' \in A'$, forme un atlas $A \times A'$ de $V_n \times V_m$ sur $R^n \times R^m$. La carte (g, g') admet le prolongement suivant formant une carte locale de $J^r(V_n, V_m)$ sur $J^r(R^n, R^m)$:

$$X \to (j^r_{x'} g')\, X(j^r_{g(x)} g^{-1}) = h_{x'} y h_x^{-1} \in J^r(V_n, V_m),$$

où $X \in J^r(R^n, R^m)$, $x = \alpha(X)$, $x' = \beta(X)$, $y = d^r X / d^r x = (d^r x')\, X \partial^r x$,

$$h_x = \partial^r_x g = g \partial^r x \in H^r(V_n), \qquad h_{x'} = g' \partial^r x \in H^r(V_m).$$

En identifiant $J^r(R^n, R^m)$ à $R^n \times R^m \times L^r_{m,n}$, ce prolongement de (g, g') s'écrit aussi : $(x, x', y) \to h_{x'} y h_x^{-1}$. La carte $(g\varphi^{-1}, g'\psi^{-1})$, où $(\varphi, \psi) \in \Lambda^r_n \times \Lambda^r_m$, admet le prolongement $(\varphi(x), \psi(x'), y) \to h_{x'} (\psi^r_{x'})^{-1} y \varphi^r_x h_x^{-1}$, en tenant compte de l'égalité $\partial^r_{\varphi(x)}(g\varphi^{-1}) = h_x (\varphi^r_x)^{-1}$. A ces deux cartes locales de $J^r(V_n, V_m)$ correspond le changement de carte suivant : $(x, x', y) \to (\varphi(x), \psi(x'), \psi^r_x y (\varphi^r_{x'})^{-1})$.

Il en résulte le théorème :

Théorème 1. — *Sur l'espace $J^r(V_n, V_m)$ le prolongement de l'ailas $A \times A'$ détermine une structure fibrée de base $V_n \times V_m$, de projection γ, de fibres isomorphes à $L^r_{m,n}$ de groupe structural $L^r_n \times L^r_m$, admettant $H^r(V_n) \times H^r(V_m)$ comme espace fibré principal associé.*

L'élément (h, h') de $H^r(V_n) \times H^r(V_m)$ détermine l'isomorphisme $y \to h' y h^{-1}$ de $L^r_{m,n}$ sur une fibre de cette structure fibrée. Il faut remarquer aussi que (g, g') admet le prolongement suivant formant une carte locale de $H^r(V_n) \times H^r(V_m)$ sur $V_n \times L^r_n \times V_m \times L^r_m$: $(x, s, x', s') \to (h_x s, h_{x'} s')$, où $s \in L^r_n$, $s' \in L^r_m$.

Théorème 2. — *L'atlas A admet un prolongement formant un atlas de $J^r(V_n, V_m)$ sur $J^r(R^n, V_m)$ et déterminant sur $J^r(V_n, V_m)$ une structure fibrée de base V_n, de projection α, de fibres isomorphes à $T^r_n(V_m)$, de groupe structural L^r_n, admettant $H^r(V_n)$ comme espace fibré principal associé. L'élément h de $H^r(V_n)$ détermine l'isomorphisme $z \to zh^{-1}$ de $T^r_n(V_m)$ sur une fibre de cette structure fibrée, $z \in T^r_n(V_m)$.*

Théorème 2'. — *L'atlas* A' *admet un prolongement formant un atlas de* $J^r(V_n, V_m)$ *sur* $J^r(V_n, R^m)$ *et déterminant sur* $J^r(V_n, V_m)$ *une structure fibrée de base* V_m, *de projection* β, *de fibres isomorphes à* $T_m^{r*}(V_n)$ *de groupe structural* L_m^r, *admettant* $H^r(V_m)$ *comme espace fibré principal associé. L'élément* h' *de* $H^r(V_m)$ *détermine l'isomorphisme* $z' \to h'z'$ *de* $T_m^{r*}(V_n)$ *sur une fibre de cette structure fibrée,* $z' \in T_m^{r*}(V_n)$.

Pour démontrer le théorème 2, on identifie canoniquement l'espace $J^r(R^n, V_m)$ à $R^n \times T_n^r(V_m)$ par l'application $X \to (x, \partial^r X)$, où $X \in J^r(R^n, V_m)$, $x = \alpha(X)$. La carte $g \in A$ admet le prolongement $X \to (\partial^r X) h_x^{-1}$, équivalent à $(x, z) \to z h_x^{-1}$, $z = \partial^r X \in T_n^r(V_m)$, $z h_x^{-1} \in J^r(V_n, V_m)$, ce qui définit une carte locale de $J^r(V_n, V_m)$ sur $R^n \times T_n^r(V_m)$. Le changement de carte $\varphi \in A_n^r$ admet le prolongement $(x, z) \to (\varphi(x), z(\varphi_x^r)^{-1})$.

Définition. — *Une section de la structure fibrée de* $J^r(V_n, V_m)$ *de base* V_n *sera appelée un r-flot de* V_n *dans* V_m; *une section de la structure fibrée de* $J^r(V_n, V_m)$ *de base* V_m *sera appelée un r-champ de* V_n *dans* V_m. *Un flot dont les éléments sont des* p^r*-covitesses sera appelée une forme différentielle* (²) *d'ordre r sur* V_n.

Dans une autre Note nous étudierons les singularités d'un flot ou d'un champ.

(²) Il ne faut pas confondre cette notion avec celle de forme extérieure de degré p, qui s'en déduit dans le cas $r = 1$.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 233, p. 777-779, séance du 8 octobre 1951.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
140778-51 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

/35/

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Les prolongements d'une variété différentiable. III. Transitivité des prolongements.* Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Cette Note fait suite à deux Notes antérieures (1). La transitivité des prolongements est exprimée par le théorème 1. Un prolongement régulier admet une certaine structure infinitésimale (2) dont le théorème 2 donne une propriété.

Soient V_n et V_m deux r-variétés, dont les structures sont définies par deux atlas A et A' sur R^n et R^m. Tout r-jet $X \in J^r(V_n, V_m)$ détermine un k-jet $\gamma_k(X) \in J^k(V_n, V_m)$, où $0 \leqq k \leqq r$. L'application γ_k de $J^r(V_n, V_m)$ sur $J^k(V_n, V_m)$ est continue. En particulier γ_0 est la projection γ de $J^r(V_n, V_m)$, si l'on identifie $J^0(V_n, V_m)$ à $V_n \times V_m$, c'est-à-dire $\gamma_0(X)$ au couple $(\alpha(X), \beta(X))$.

Le prolongement à $J^k(R^n, R^m) = R^n \times R^m \times L^r_{m,n}$ du pseudogroupe $\Lambda^r_n \times \Lambda^r_m$ est un pseudogroupe de transformations l fois différentiables, en posant $r = k + l$. Le prolongement à $J^k(V_n, V_m)$ de l'atlas $A \times A'$ est compatible avec ce pseudogroupe et *définit donc sur* $J^k(V_n, V_m)$ *une structure fibrée* l *fois différentiable de base* $V_n \times V_m$.

Soit $f \in C^r_x(V_n, V_m)$, $X = j^r_x f$. Le k-flot $j^k f$ est une l-application d'un voisinage de $x \in V_n$ dans $J^k(V_n, V_m)$ dont le l-jet en x ne dépend que de X; posons $\gamma^l_k(X) = j^l_x(j^k f)$. L'application γ^l_k est un isomorphisme canonique de $J^r(V_n, V_m)$ sur un sous-espace de $J^l(V_n, J^k(V_n, V_m))$. En particulier on obtient ainsi un isomorphisme de $T^r_n(V_m)$ sur un sous-espace de $T^l_n(T^k_n(V_m))$, de $T^{r*}_m(V_n)$ sur un sous-espace de $J^l(V_n, T^{k*}_m(V_n))$; ceci permet d'identifier $\partial^r_x f$ à $\partial^l_x(\partial^k f)$ où $f \in C^r_x(R^n, V_m)$, et $d^r_x f$ à $j^l_x(d^k f)$, où $f \in C^r_x(V_n, R^m)$. On définit de même un isomorphisme canonique de $L^r_{m,n}$ sur un sous-espace de $T^l_n(L^k_{m,n})$, qui permet d'identifier f^r_x à $\partial^l_x(f^k)$, où $f \in C^r(R^n, R^m)$ et f^k la fonction $x \to f^k_x$.

Soit F un espace admettant L^k_n comme groupe d'opérateurs, la loi de composition $(s, y) \to sy$ étant continue, $s \in L^k_n$, $y \in F$. L'homomorphisme canonique de L^r_n sur L^k_n, composé avec $(s, y) \to sy$, définit aussi L^r_k comme groupe d'opé-

(1) *Comptes rendus*, 233, 1951, p. 598 et 773. *Rectificatif*: p. 599, (2); le cas algébrique correspond au pseudogroupe des automorphismes locaux algébriques de l'espace numérique réel ou complexe.

(2) Notion qui sera définie d'une façon générale dans une Note ultérieure.

rateurs sur F. Soit $E(V_n, F)$ le prolongement d'ordre k de V_n dont les fibres sont isomorphes à F. Le prolongement à $R^n \times F$ du pseudogroupe Λ_n^r est l'ensemble des transformations

$$(1) \qquad (x, y) \rightarrow (\varphi(x), \varphi_x^k y), \qquad x \in R^n, \qquad y \in F, \qquad \varphi \in \Lambda_n^r.$$

L'atlas A de V_n sur R^n admet un prolongement A(E) formant un atlas de E sur $R^n \times F$ et compatible avec le prolongement de Λ_k^r. Nous dirons que $E(V_n, F)$ est un *prolongement régulier* d'ordre k de V_n, si l'application $(s, y) \rightarrow sy$ est l fois différentiable. Comme $x \rightarrow \varphi_x^k$ est l fois différentiable, les transformations (1) sont alors l fois différentiables et *l'atlas* A(E) *définit sur* E *une structure fibrée l fois différentiable de base* V_n.

Théorème 1. — *Si* $E(V_n, F)$ *est un prolongement régulier d'ordre k de* V_n, *tout prolongement d'ordre l de* E *est un prolongement d'ordre r de* V_n, *en posant* $r = k + l$.

Ce théorème se démontre d'abord pour le prolongement $T_p^l(E)$. L'atlas A admet un prolongement formant un atlas de $T_p^l(E)$ sur $T_p^l(R_n \times F)$ compatible avec le prolongement de Λ_n^r à $T_p^l(R^n \times F)$. En identifiant $T_p^l(R^n \times F)$ à $T_p^l(R^n) \times T_p^l(F) = R^n \times L_{n,p}^l \times T_p^l(F) = R^n \times F'$ où $F' = L_{n,p}^l \times T_p^l(F)$, le prolongement de $\varphi \in \Lambda_n^r$, ou de (1), s'écrit :

$$(2) \qquad (x, u, Y) \rightarrow (\varphi(x), \varphi_x^l u, Y'),$$

où $x \in R^n$, $u \in L_{n,p}^l$, $Y \in T_p^l(F)$, $Y' = g(j_x^l(\varphi^k)(\partial_x^l)u, Y)$, en désignant par g l'application $(s, y) \rightarrow sy$ ainsi que son prolongement à $T_p^l(L_n^k \times F)$. Posons $z = (u, Y) \in F'$. L'élément $z' = (\varphi_x^l u, Y')$ dépend uniquement de (φ_x^r, z) et peut se noter $\varphi_x^r . z$. Pour $\psi \in \Lambda_n^r$ on a $\psi_{x'}^r . (\varphi_x^r . z) = (\psi\varphi)_x^r . z$, où $x' = \varphi(x)$. La transformation (2) peut alors s'écrire $(x, z) \rightarrow (\varphi(x), \varphi_x^r . z)$. Le prolongement de A définit donc sur $T_p^l(E)$ la structure fibrée associée au prolongement principal $H^r(V_n)$, de fibres isomorphes à F'.

Pour un espace fibré associé à $T_p(E)$, le théorème résulte des faits suivants :

1° Un espace fibré associé à $T_p^l(R^n \times F)$ est de la forme $R^n \times F''$.

2° Étant donné deux espaces fibrés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de fibres isomorphes à F et les deux espaces fibrés associés $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}'_1$ de fibres isomorphes à F_1, toute représentation (resp. isomorphisme) de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}'$ est associée à une représentation (resp. isomorphisme) de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{E}'_1$.

Le prolongement de Λ_n^r à $R^n \times F$ définit sur $R^n \times F$ une *structure locale* dont le groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre l au point (x, y) est isomorphe au sous-groupe de L_n^r qui laisse invariant y. L'atlas A(E) détermine sur E une structure locale subordonnée à sa structure fibrée l fois différentiable. En $\xi \in E$ le *groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre l* de cette structure locale est isomorphe à celui de $R^n \times F$ au point (x, y) correspondant à ξ dans une carte locale de $A(E)$. Si L_n^k opère transitivement dans F, ces groupes d'isotropie sont tous isomorphes au sous-groupe de L_n^r laissant invariant $y_0 \in F$. On en déduit :

THÉORÈME 2. — *Si* $E(V_n, F)$ *est un prolongement régulier d'ordre k de* V_n *tel que* L_n^k *opère transitivement dans* F, *tout prolongement d'ordre l de* E *admet une structure fibrée subordonnée de base* E *dont le groupe structural est le sous-groupe de* L_n^r *laissant invariant* $y_0 \in F$; *ce groupe peut même être réduit à sa projection sur* L_n (*identifié à un sous-groupe de* L_n^r).

Il en résulte, par exemple, que le prolongement principal $H^k(V_n)$ est parallélisable.

Soit E(B, F, G, H) un espace fibré, ρ une relation d'équivalence dans F qui soit invariante par G, K le sous-groupe de G qui laisse invariante chaque classe mod ρ. Par les isomorphismes de F sur les fibres de E, ρ détermine une relation d'équivalence $\bar{\rho}$ dans E. *Si* ρ *est une relation d'équivalence ouverte,* $E/\bar{\rho}$ *est muni d'une structure fibrée associée à* E(B, F, G, H), *de fibres isomorphes à* F/ρ, *de groupe structural* G/K. Nous dirons que l'espace fibré E est une *extension* de l'espace fibré $E/\bar{\rho}$, associée à l'homomorphisme canonique de G sur G/K.

Un prolongement d'ordre r de V_n n'est pas toujours un prolongement d'ordre l d'un prolongement d'ordre k de V_n, mais *c'est toujours une extension d'un prolongement d'ordre k, associée à l'homomorphisme canonique de* L_n^r *sur* L_n^k. A chaque prolongement de V_n correspond une extension de même espèce d'un espace fibré quelconque à groupe structural L_n, remarque qui permet d'étendre à ces extensions l'étude faite dans cette série de Notes.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **233**, p. 1081-1083, séance du 5 novembre 1951.)

/ 36 /

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Structures locales et structures infinitésimales.* Note de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Cette Note fait suite à trois Notes antérieures (¹) et résume un exposé fait à la Réunion des Mathématiciens du Rhin Supérieur à Bâle le 15 décembre 1951. Relations entre la notion d'espèce de structures locales et celle de pseudogroupe de transformations. Définition d'une structure infinitésimale. Groupoïde et pseudogroupe associés à une structure infinitésimale. Pseudogroupe de Lie.

I. Une *espèce de structures locales* est une espèce (²) de structures (α) pour laquelle il existe une *loi d'induction*, c'est-à-dire une loi qui associe à toute structure $\mathfrak{S}$ d'espèce (α), donnée sur un ensemble E, un ensemble Φ de parties de E et qui détermine sur tout ensemble $U \in \Phi$ une structure d'espèce (α) appelée *structure induite* par $\mathfrak{S}$ sur U, l'ensemble U muni de cette structure induite étant appelé *sous-espace distingué* de E, de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites :

1° Φ est l'ensemble des ensembles ouverts d'une topologie sur E. On dira que $\mathfrak{S}$ est une structure locale par rapport à cette topologie.

2° *Transitivité des structures induites :* Si U est un sous-espace distingué de E, les sous-espaces distingués de U sont les sous-espaces distingués de E qui sont contenus dans U.

3° Si M est la réunion d'une famille d'ensembles M_i dont chacun est muni d'une structure d'espèce (α) telle que M_i et M_j de la famille admettent $M_i \cap M_j$ comme sous-espace distingué à structure induite bien déterminée, il existe sur M une structure d'espèce (α) bien déterminée telle que chaque M_i soit sous-espace distingué de M.

L'ensemble des *automorphismes locaux* de E, c'est-à-dire des isomorphismes d'un sous-espace distingué sur un sous-espace distingué, est un *pseudogroupe de transformations* Γ. Inversement, étant donné un pseudogroupe de transfor-

(¹) *Comptes rendus*, **233**, 1951, p. 598, 777 et 1081.

(²) N. BOURBAKI, *Théorie des Ensembles* (fascicule de Résultats), Paris, (Hermann).

mations Γ' sur B, les structures définies ([3]) sur un ensemble quelconque E' par un atlas complet de E' sur B compatible avec Γ' forment une espèce de structures locales dite *associée* à Γ'. En particulier Γ' définit sur B une structure de cette espèce, dont le pseudogroupe des automorphismes locaux est Γ'.

Un atlas de E' sur E compatible avec Γ détermine sur E' d'une part, d'après 3°, une structure d'espèce (α) *localement isomorphe* à celle de E, d'autre part une structure de l'espèce associée à Γ (*infrastructure* de la première).

L'ensemble des automorphismes locaux de E qui laissent invariant un point x est un sous-pseudogroupe Γ_x. Deux éléments s et s' de Γ_x seront dits de même classe en x lorsqu'ils admettent une restriction commune $s'' \in \Gamma_x$. Par passage au quotient on déduit de Γ_x un groupe appelé *groupe d'isotropie locale* en x.

II. Une *structure infinitésimale* sur V_n est définie par la donnée d'une structure de r-variété sur V_n, complétée par une suite d'opérations du type suivant : formation d'un *prolongement*, donnée d'une *section* ou d'une *variété extraite* ([4]) d'un prolongement, donnée d'une *extension* d'espace fibré. Une section d'un prolongement d'ordre r de V_n définira une *structure infinitésimale pure d'ordre r*, notion équivalente à celle *d'objet différentiel pur* ([5]).

En particulier, appelons *structure infinitésimale régulière d'ordre r* une structure fibrée subordonnée ([3]) à la structure fibrée du prolongement principal $H^r(V_n)$, c'est-à-dire définie par un sous-espace fibré $\overline{H}(V_n)$ de $H^r(V_n)$, à groupe structural G, sous-groupe de L_n^r, la fibre $\overline{H}_x$ étant un ensemble hG de repères d'ordre r. Dans un voisinage U de $x \in V_n$ la structure peut être définie par un champ de repères d'ordre r : $x \to h_x$, ou par la *forme différentielle* ω d'ordre r définie par $x \to h_x^{-1}$, telle que $\overline{H}_x = h_x G$ ou $\overline{H}_x^* = G h_x^{-1}$; ou encore par la forme différentielle ϖ sur $G \times U$ définie par $(s, x) \to s h_x^{-1}$.

Le problème d'équivalence locale de ces structures n'est autre que le problème d'équivalence de E. Cartan ([6]) dans le cas $r = 1$, et il s'y ramène aussi pour r quelconque en utilisant les propriétés de transitivité des prolongements. Le problème d'existence global conduit à des « obstacles ».

Une structure infinitésimale d'ordre r sur V_n est aussi une structure locale par rapport à la topologie de V_n. Soit Γ le pseudogroupe de ses automorphismes

([3]) C. Ehresmann, *Colloque de Topologie alg.*, C. N. R. S., Paris, 1947.

([4]) Appelons variété extraite d'une variété E un sous-ensemble A tel que pour tout $x \in A$ il existe un voisinage W dans E et une k-application f de W dans R^p telle que $A \cap W = f^{-1}(0)$, où $k \geq 0$.

([5]) St. Golab, *Ann. Soc. Pol. Math.*, 1946, p. 7.

([6]) *Selecta*, Paris, 1939, p. 113.

locaux (r fois différentiables). Soit $\mathcal{J}^r(\Gamma)$ le sous-ensemble de $J^r(V_n, V_n)$ formé par l'ensemble des jets $j_x^r\varphi$ correspondant à tous les $\varphi \in \Gamma$. $\mathcal{J}^r(\Gamma)$ est le *groupoïde associé* à Γ. Si Γ est l'ensemble de toutes les solutions ([7]) de $\mathcal{J}^r(\Gamma)$, nous dirons que Γ est un *pseudogroupe complet d'ordre r*.

A toute structure infinitésimale pure d'ordre r sur V_n, définie par une section σ d'un prolongement $E(V_n)$, *correspond un groupoïde* Π *extrait de* $J^r(V_n, V_n)$; c'est l'ensemble des $X \in J^r(V_n, V_n)$ qui sont inversibles et tels que $X\sigma(x) = \sigma(x')$, où (x, x') est la projection canonique de X sur $V_n \times V_n$; pour un élément z de E se projetant sur x, le composé Xz est $h'(h^{-1}z)$ en posant $X = h'h^{-1}$, où h, $h' \in H^r(V_n)$. *Le pseudogroupe* Γ *des automorphismes locaux d'une telle structure est complet*, car c'est l'ensemble des solutions de Π; on a $\mathcal{J}^r(\Gamma) \subset \Pi$. *Si* Π *est transitif*, c'est-à-dire se projette sur tout l'espace $V_n \times V_n$, *la structure infinitésimale correspondante est régulière*. En effet, soit Π_0 l'ensemble des $X \in \Pi$ ayant pour source $x_0 \in V_n$ et soit h_0 un repère d'ordre r en x_0. $\Pi_0 h_0$ définit alors une structure subordonnée à $H^r(V_n)$, dont le groupe structural est isomorphe au sous-groupe de Π se projetant sur (x_0, x_0).

Un pseudogroupe Γ complet d'ordre r pourra s'appeler *pseudogroupe de Lie* (groupe « fini » ou « infini » dans la terminologie de Lie) lorsque $\mathcal{J}^r(\Gamma)$ est un *groupoïde* (qu'on supposera en général analytique) *extrait* de $J^r(V_n, V_n)$. *Tout pseudogroupe de Lie* Γ *est le groupe des automorphismes locaux d'une structure infinitésimale* (régulière, si Γ est transitif).

([7]) A une partie Φ de $J^r(V_n, V_m)$ correspond localement un système d'équations aux dérivées partielles; une solution de Φ est une r-application φ dont les jets $j_x^r\varphi$ appartiennent à Φ.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 234, p. 587-589, séance du 4 février 1952.)

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Les prolongements d'une variété différentiable. IV. Éléments de contact et éléments d'enveloppe.* Note (*) de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Cette Note fait suite à quatre Notes antérieures ([1]). Groupoïde associé à un espace fibré, classes d'intransitivité, applications covariantes. Ces notions, que nous mettrons à la base de la théorie des covariants différentiels d'une structure infinitésimale, sont appliquées pour définir les éléments de contact et les enveloppes d'ordre r et pour indiquer la structure des espaces formés par ces éléments.

1. Soit $E(B, F, G, H)$ un espace fibré à groupe structural topologique G, appelons *groupoïde associé* le groupoïde $\Pi = HH^{-1}$ des isomorphismes d'une fibre sur une fibre. Π est muni d'une structure fibrée de base $B \times B$, de fibre G, de groupe structural $G \times G$ opérant sur G de la manière suivante : $(s', s)\, t = s' t s^{-1}$, où $s, s', t \in G$. Soient p la projection de E sur B, $\hat{p}$ la projection de H sur B, α et β les projections de Π sur B définies par $\alpha(h' h^{-1}) = \hat{p}(h)$, $\beta(h' h^{-1}) = \hat{p}(h')$, où $h, h' \in H$. Il est un *groupoïde d'opérateurs* pour E : le composé θz de $\theta \in \Pi$ et $z \in E$ est défini lorsque $p(z) = \alpha(\theta)$; alors $p(\theta z) = \beta(\theta)$. On a $\theta'(\theta z) = (\theta' \theta) z$ lorsque l'un de ces composés est défini. Les éléments neutres à gauche et à droite de Π sont les automorphismes identiques des fibres.

Appelons *classe d'intransitivité* de $z \in E$ relativement à Π l'ensemble des composés θz, où $\theta \in \Pi$. Deux points $z \in E$ et $y \in F$ seront dits équivalents lorsqu'il existe $h \in H$ tel que $z = hy$. La classe d'intransitivité de z est l'ensemble des points équivalents à un point $y \in F$. L'ensemble des points de F équivalents à z est une classe d'intransitivité de F relativement à G.

Un sous-espace E' de E sera dit *invariant* (par Π) lorsqu'il est réunion de classes d'intransitivité. E' est alors l'ensemble des points équivalents à un point quelconque d'un sous-espace F' de F, invariant par G; *il est muni d'une structure fibrée* $E'[B, F', G/N, H/N]$ *où* N *est le sous-groupe de* G *qui laisse invariant chaque point de* F'.

(*) Séance du 25 février 1952.

([1]) *Comptes rendus*, **233**, 1951, p. 598, 777 et 1081 ; **234**, 1952, p. 587.

Soit φ une représentation de G sur un groupe d'automorphismes $\overline{G}$ d'un espace F et soit $\overline{E}(B, \overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ l'espace fibré associé à $E(B, F, G, H)$ par φ. Désignons aussi par φ la représentation associée de H sur $\overline{H}$, ainsi que celle de Π sur $\overline{\Pi}$, définie par $\varphi(h'h^{-1}) = \varphi(h')\varphi(h)^{-1}$, où h, $h' \in H$. Une application ψ de E dans $\overline{E}$ sera appelée *application covariante* (resp. *invariante* si $\overline{G}$ est réduit à l'élément neutre) lorsque $\psi\theta = \varphi(\theta)\psi$ quel que soit $\theta \in \Pi$. L'application covariante ψ se projette sur l'application identique de B; il lui correspond une application covariante ψ_0 de F dans $\overline{F}$, c'est-à-dire telle que $\psi_0 s = \varphi(s)\psi_0$, où $s \in G$. Une classe d'intransitivité est appliquée par ψ sur une classe d'intransitivité. Soit ρ la relation d'équivalence dans F associée à ψ_0 et $\overline{\rho}$ la relation d'équivalence dans E associée à ψ et supposons que ρ soit une relation d'équivalence ouverte. Alors ψ admet la *décomposition canonique* $\psi = \psi''\psi'$, où ψ' est l'application covariante canonique de E sur $E/\overline{\rho}$, qui est muni ([1]) d'une structure fibrée associée $E/\overline{\rho}[B, F/\rho, G/K, H/K]$, K étant le noyau de φ; ψ'' est un isomorphisme de $E/\overline{\rho}$ sur un sous-espace invariant de $\overline{E}$. *Pour que les classes* mod $\overline{\rho}$ *sur* E *soient les fibres d'une structure fibrée dont le pseudogroupe des automorphismes locaux comprenne les automorphismes locaux de la structure* $E(B, F, G, H)$, *il faut et il suffit que les classes* mod ρ *sur* F *soient les fibres d'une structure fibrée invariante par* G (condition vérifiée en particulier lorsque G est un groupe de Lie transitif dans F et qu'une classe mod ρ est fermée).

2. Considérons deux r-variétés V_n et V_m. Soit $\Pi^r(V_n)$ le groupoïde associé à $H^r(V_n)$; c'est l'ensemble des éléments inversibles de $J^r(V_n, V_n)$. Considérons $J^r(V_n, V_m)$ muni de sa structure fibrée ([1]) de base $V_n \times V_n$, de fibres isomorphes à $L^r_{m,n}$ de groupe structural $L^r_m \times L^r_n$, associée à l'espace fibré principal $H^r(V_n) \times H^r(V_m)$. Son groupoïde associé est $\Pi^r(V_n) \times \Pi^r(V_m)$. La classe d'intransitivité de $z \in J^r(V_n, V_m)$ est l'ensemble des éléments $h'yh^{-1}$, où $h \in H^r(V_n)$, $h' \in H^r(V_m)$, y étant un élément de $L^r_{m,n}$ équivalent à z. Appelons *éléments d'équivalence* de y et de z les classes d'intransitivité de y et de z.

Considérons aussi sur $J^r(V_n, V_m)$ la structure fibrée de base V_n, de fibres isomorphes à $T^r_n(V_m)$ de groupe structural L^r_n, associée à $H^r(V_n)$. Le composé de $s \in L^r_n$ et $Y \in T^r_n(V_m)$ est Ys^{-1}. Le groupoïde associé est $\Pi^r(V_n)$, le composé de $z \in J^r(V_n, V_m)$ et $\theta \in \Pi^r(V_n)$ étant $z\theta^{-1}$. La classe d'intransitivité de z, relativement à $\Pi^r(V_n)$, correspond dans $T^r_n(V_m)$ à la classe YL^r_n, où $Y = zh$. *Cette classe* YL^r_n *est appelée élément de contact de* Y *ou de* z*; nous dirons aussi que c'est un* n^r*-élément de contact dans* V_m.

En considérant sur $T^r_n(V_m)$ sa structure fibrée de base V_m, de fibres isomorphes à $L^r_{m,n}$ de groupe structural L^r_m, la relation d'équivalence $Y \sim Ys^{-1}$ correspond dans $L^r_{m,n}$ à la relation d'équivalence $y \sim ys^{-1}$, qui est invariante par L^r_m.

Soit $P^r_{m,n}$ l'espace quotient de $L^r_{m,n}$ par cette relation d'équivalence; c'est l'espace des n^r-éléments de contact d'origine O dans R^m. Cet espace, sur lequel opère L^r_m, n'est pas séparé, mais chacune de ses classes d'intransitivité est un espace homogène de Lie. *L'espace* $P^r_n(V_m)$ *des* n^r*-éléments de contact de* V_m *est le prolongement d'ordre r de* V_m, *de fibres isomorphes à* $P^r_{m,n}$. L'application $Y \to YL^r_n$ est une application covariante ψ^r de $T^r_n(V_m)$ sur $P^r_n(V_m)$. L'image réciproque par ψ_r d'une classe d'intransitivité de $P^r_n(V_m)$ est munie d'une structure fibrée associée à cette projection. Pour $k \leq r$, les classes d'intransitivité de $P(V_m)$ sont des *prolongements réguliers* (¹) de V_n et l'application canonique ψ^k de $T^k_n(V_m)$ sur $P^k_n(V_m)$ se réduit pour chacune d'elles à une l-application, où $k+l=r$. Si f est une r-application de V_n dans V_m, le couple (f, V_n) s'appelle *r-variété plongée dans* V_m, $f(V_n)$ son support, $\psi^k(j^k_x f)$ son élément de contact d'ordre k en x. L'application $\psi^k(j^k f)$ de V_n dans $P^k_n(V_m)$ définit le *prolongement d'ordre k de la variété plongée. Si l'élément d'équivalence de* $j^k_x f$ *est fixe, ce prolongement sera une l-variété plongée dans une classe d'intransitivité de* $P^r_n(V_m)$; *l'élément de contact* $\psi^r(j^r_x f)$ *s'identifie canoniquement à l'élément de contact d'ordre l en x du prolongement* $\psi^k(j^k f)$.

En considérant de même sur $J^r(V_n, V_m)$ la structure fibrée de base V_m, on définit l'*élément d'enveloppe de* $Z \in J^r(V_n, V_m)$ ou d'un élément équivalent Z de $T^{r*}_m(V_n)$; c'est la classe $L^r_m Z$, que nous appellerons aussi *m^r-élément d'enveloppe dans* V_n. L'ensemble $P^{r*}_m(V_n)$ de ces éléments est le prolongement d'ordre r de V_n de fibres isomorphes à $P^{r*}_{m,n}$, ensemble des classes $L^r_m y$ (élément d'enveloppe de $y \in L^r_{m,n}$).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 234, p. 1028-1030, séance du 3 mars 1952.)

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Les prolongements d'une variété différentiable. V. Covariants différentiels et prolongements d'une structure infinitésimale.* Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Cette Note fait suite à cinq Notes [1] antérieures. Définition de la notion de covariant différentiel par rapport à une structure infinitésimale pure. Prolongements d'une structure infinitésimale. Les prolongements successifs d'une connexion affine sont des connexions affines générales d'ordre r.

1. Soit V_n une r-variété, $H^r(V_n)$ son prolongement principal d'ordre r, $\Pi^r(V_n)$ le groupoïde associé. Considérons deux prolongements E et $\overline{E}$ de V_n d'ordres k et $\bar{k}$, où $k \leq r$, $\bar{k} \leq r$. $\Pi^r(V_n)$ est un groupoïde d'opérateurs sur E et $\overline{E}$. Soit ψ une application covariante de E dans $\overline{E}$, c'est-à-dire $\psi\theta = \theta\psi$, où $\theta \in \Pi^r(V_n)$. Nous dirons que $\psi(z)$ est un *covariant différentiel* de $z \in E$. A ψ correspond une application covariante ψ_0 de F dans $\overline{F}$, fibres types de E et $\overline{E}$: $\psi_0 s = s\psi_0$, où $s \in L_n^r$.

Soit $\mathfrak{S}$ une structure infinitésimale pure définie par une section σ de E. Si $z = \sigma(x)$, où $x \in V_n$, l'élément $\psi(z)$ est un covariant différentiel de $\mathfrak{S}$ au point x; la section $\psi\sigma$ de $\overline{E}$ est un covariant différentiel de $\mathfrak{S}$.

Supposons que σ soit l fois différentiable, où $k + l = r$. Soit $\sigma'(x)$ l'élément de contact de $j_x^l\sigma$. Nous dirons que σ', prolongement d'ordre l de la section σ, définit le prolongement $\mathfrak{S}'$ d'ordre l de $\mathfrak{S}$. $\mathfrak{S}'$ est une structure infinitésimale pure d'ordre $k + l$ et ses covariants différentiels seront encore appelés covariants différentiels de $\mathfrak{S}$.

Si (f, V_p) est une r-variété plongée dans V_n, ses covariants différentiels sont ceux de ses éléments de contact.

2. A la structure infinitésimale pure $\mathfrak{S}$ est associé un groupoïde $\Pi(\mathfrak{S})$, groupoïde des automorphismes infinitésimaux de $\mathfrak{S}$. C'est un sous-groupe de $\Pi^k(V_n)$ et ses solutions sont les automorphismes locaux de $\mathfrak{S}$. Une *application covariante par rapport à* $\mathfrak{S}$ est définie par la condition $\psi\theta = \theta\psi$, où $\theta \in \Pi(\mathfrak{S})$,

(1) *Comptes rendus*, **233**, 1951, p. 598, 777 et 1081 ; **234**, 1952, p. 587 et 1028.

ψ étant une application d'un prolongement d'ordre k_1 de V_n dans un prolongement d'ordre k_2; $k_1 \leqq k$, $k_2 \leqq k$. Si $\mathfrak{H}$ est l fois différentiable, considérons le prolongement $\mathfrak{H}'$ d'ordre l de $\mathfrak{H}$ et le groupoïde associé $\Pi(\mathfrak{H}')$. Les applications covariantes par rapport à $\mathfrak{H}'$ sont encore dites covariantes par rapport à $\mathfrak{H}$ et l'on a ainsi la notion de covariant différentiel d'ordre $\leqq k+l$ par rapport à $\mathfrak{H}$.

On a surtout considéré les applications covariantes dans un *prolongement tensoriel* de V_n (prolongement du premier ordre associé à une représentation linéaire de L_n^1).

Soit $\mathfrak{H}$ une structure infinitésimale *régulière* d'ordre k sur V_n. Elle correspond à un sous-espace fibré $\overline{H}(V_n)$ de $H^k(V_n)$, à groupe structural G, sous-groupe de L_n^k. Un espace fibré E associé à $\overline{H}(V_n)$, correspondant à une représentation φ de G sur un groupe d'automorphismes de F, sera appelé *prolongement de* V_n *relativement à* $\mathfrak{H}$. Pour que E soit aussi un prolongement relativement à la structure de r-variété de V_n, il faut et il suffit que φ se prolonge à L_n^k. La notion d'application covariante relativement à $\mathfrak{H}$ est définie pour les prolongements relativement à $\mathfrak{H}$.

3. Le groupoïde $\Pi^k(V_n)$ est muni d'une structure de l-variété, où $r=k+l$. Les trois structures fibrées sur $\Pi^k(V_n)$, correspondant à la projection γ sur $V_n \times V_n$ et aux deux projections α et β sur V_n, sont l fois différentiables. Soit E un prolongement régulier d'ordre k de V_n, p la projection de E sur V_n. La loi de composition $(\theta, z) \to \theta z$, où $\theta \in \Pi^k(V_n)$ et $z \in E$, se prolonge à l'ensemble des couples (Θ, Z), où $\Theta \in T_p^l[\Pi^k(V_n)]$ et $Z \in T_p^l(E)$ tels que $pZ=\alpha\Theta$.

Si G *est un groupe de Lie opérant d'une manière r-fois différentiable sur* F, $T_p^k(G)$ *est un groupe opérant d'une manière l-fois différentiable sur* $T_p^k(F)$. *Le groupe* $T_p^k(G)$ *est l fois différentiable et, en général, c'est une extension non triviale de* G.

En particulier, posons $L_n^{[r]}=T_n^1(L_n^{[r-1]})$, $L_n^{[1]}=L_n^1=L_n$. Le groupe L_n^r est canoniquement isomorphe à un sous-groupe de $L_n^{[r]}$. Posons aussi $L_n^{k,l}=T_n^l(L_n^k)$.

En supposant $l \leqq k$, soit $\Pi^{k,l}(V_n)$ l'ensemble des $X \in J^l[V_n, \Pi^k(V_n)]$ tels que αX soit le l-jet neutre de V_n et que βX soit le l-jet canoniquement déduit du k-jet but de X. $\Pi^{k,l}(V_n)$ est un groupoïde qui opère sur $T_p^l(E)$.

Soit $H^{k,l}(V_n)$ l'ensemble des $Y \in T_n^l[H^k(V_n)]$ tels que la projection de Y sur V_n soit la n^l-vitesse canoniquement déduite de la n^k-vitesse origine de Y. $H^r(V_n)$ s'identifie canoniquement à un sous-espace de $H^{k,l}(V_n)$, qui est l'espace fibré principal associé à $H^r(V_n)$ par élargissement de L_n^r à $L_n^{k,l}$. Le groupoïde associé à $H^{k,l}(V_n)$ est $\Pi^{k,l}(V_n)$.

Appelons *connexion affine spéciale d'ordre* k une connexion infinitésimale dans $H^k(V_n)$. C'est une structure infinitésimale régulière d'ordre $k+1$

définie ([2]) par un certain champ $\tilde{C}$ de n^1-éléments de contact dans $H^k(V_n)$. Le prolongement d'ordre 1 de cette structure est une connexion infinitésimale dans $H^{k,1}(V_n)$. Appelons *connexion affine générale d'ordre r* une connexion infinitésimale dans $H^{[r]}(V_n)$, espace fibré principal associé à $H^r(V_n)$ par élargissement de L_n^r à $L_n^{[r]}$. *Par des prolongements successifs d'une connexion affine spéciale on obtient une connexion affine générale d'ordre r;* de cette façon on n'obtient pas toutes les connexions de ce type.

([2]) Voir la définition précise dans : C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales* (*Colloque Topologie*, Bruxelles, 5-8 juin 1950).

Une étude générale des connexions infinitésimales d'ordre r sera faite dans un autre article.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **234**, p. 1424-1425, séance du 31 mars 1952.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
141983-52 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Extension du calcul des jets aux jets non holonomes*. Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Cette Note fait suite à six Notes antérieures [1]. Définition des jets non holonomes et semi-holonomes. Prolongements d'un « système différentiel général ». Composition de jets non holonomes. Prolongements « parfaits » d'une variété différentiable.

Soient V_n et V_m deux variétés de classe $\geqq r$. Si $r = k + l$, la variété $\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$ des jets d'ordre k de V_n dans V_m est de classe $\geqq l$ ainsi que les projections α et β [où $\alpha(X)$ désigne la source du jet X, $\beta(X)$ son but]. Soit σ un relèvement local de classe l de V_n dans $\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$; c'est-à-dire $\alpha\sigma$ est l'application identique d'un ouvert de V_n. Le jet $j^l_x\sigma$ sera appelé *jet non holonome* de V_n dans V_m. L'ensemble de ces jets forme une sous-variété $\pi^l\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$ de $\mathcal{J}^l(V_n, \mathcal{J}^k(V_n, V_m))$. La variété $\mathcal{J}^r(V_n, V_m)$ s'identifie canoniquement à une sous-variété de $\pi^l(\mathcal{J}^k(V_n, V_m))$, en identifiant $j^r_x f$ à $j^l_x(j^k f)$, où $j^k f$ désigne le relèvement local $x \to j^k_x f$ d'une application f de V_n dans V_m.

On peut identifier $\pi^l\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$ à la variété des éléments de contact de dimension n et d'ordre l de $\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$ qui se projettent régulièrement sur V_n. Alors $\mathcal{J}^r(V_n, V_m)$ s'identifie à une sous-variété d'éléments de contact d'ordre l de $\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$, c'est-à-dire à un « système de Pfaff généralisé » dont les variétés intégrales sont les applications multiformes de classe r de V_n dans V_m. Si $k = r - 1$, ce système est défini localement par un système de Pfaff ordinaire.

Soit Φ un espace extrait de $\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$, c'est-à-dire un ouvert séparé de l'espace des germes de sous-espaces de $\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$; on peut le considérer comme un « système différentiel général ». Les l-jets des relèvements locaux de V_n dans Φ forment le *prolongement non holonome* $\pi^l\Phi$. C'est un espace extrait de $\pi^l\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$; son sous-espace extrait de $\mathcal{J}^r(V_n, V_m)$ est le *prolongement holonome* Φ^l de Φ. Par récurrence on définit le prolongement non holonome général $\tilde{\Phi}^l$ en posant $\tilde{\Phi}^0 = \Phi$, $\tilde{\Phi}^i = \pi^1\tilde{\Phi}^{i-1}$. On peut identifier $\pi^l\Phi$ à un sous- espace de $\tilde{\Phi}^l$.

---

(1) *Comptes rendus*, 233, 1951, p. 598, 777, 1081 ; 234, 1952, p. 587, 1028, 1424 ; *Voir* également : Les prolongements d'une variété différentiable (Atti del IV Congresso U. M. I. Taormina 1951). Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie (Colloque International de géométrie différentielle de Strasbourg, C. N. R. S. 1953).

En partant de $\Phi = \mathcal{J}^1(V_n, V_m)$ on obtient ainsi $\tilde{\mathcal{J}}^r(V_n, V_m)$, espace des jets non holonomes généraux d'ordre r de V_n dans V_m. L'espace $\mathcal{J}^r(V_n, V_m)$ s'identifie à un sous-espace de $\tilde{\mathcal{J}}^r(V_n, V_m)$. On définit encore la projection canonique j^k de $\tilde{\mathcal{J}}^r(V_n, V_m)$ sur $\tilde{\mathcal{J}}^k(V_n, V_m)$, admettant pour restriction la projection canonique de $\mathcal{J}^r(V_n, V_m)$ sur $\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$. De même on définit les projections α et β (source et but) de $\tilde{\mathcal{J}}^r(V_n, V_m)$ sur V_n et V_m.

Si Φ est un espace extrait de $\tilde{\mathcal{J}}^k(V_n, V_m)$, soit $\overline{\pi}^1\Phi$ le sous-espace de $\pi^1\Phi$ formé par l'ensemble des éléments $j^1_x\sigma$, où σ est un relèvement local de V_n dans Φ vérifiant la condition supplémentaire $j^1_x(j^{k-1}\circ\sigma) = \sigma(x)$. Par récurrence on définit encore le prolongement $\overline{\Phi}^h$, en posant $\overline{\Phi}^0 = \Phi$, $\overline{\Phi}^i = \overline{\pi}^1\,\overline{\Phi}^{i-1}$. En partant de $\Phi = \mathcal{J}^1(V_n, V_m)$ on obtient ainsi l'espace $\overline{\mathcal{J}}^r(V_n, V_m)$ dont les éléments seront appelés *jets semi-holonomes* d'ordre r de V_n dans V_m. $\overline{\mathcal{J}}^r(V_n, V_m)$ est un sous-espace de $\tilde{\mathcal{J}}^r(V_n, V_m)$; il contient $\mathcal{J}^r(V_n, V_m)$ et il est appliqué par j^k sur $\overline{\mathcal{J}}^k(V_n, V_m)$. Un élément de $\mathcal{J}^r(V_n, V_m)$ sera aussi appelé jet holonome. Si Φ est un espace extrait de $\overline{\mathcal{J}}^k(V_n, V_m)$, on obtient le prolongement semi-holonome $\overline{\Phi}^l$ qui sera extrait de $\overline{\mathcal{J}}^r(V_n, V_m)$.

La loi de composition entre jets holonomes s'étend aux jets non holonomes. Soit V_p une troisième variété de classe $\geqq r$. Soit σ un relèvement local de classe l de V_n dans $\mathcal{J}^k(V_n, V_m)$; soit σ' un relèvement local de classe l de V_m dans $\mathcal{J}^k(V_m, V_p)$. Posons $X = j^l_x\sigma$ et $X' = j^l_{x'}\sigma'$ en supposant $x' = \beta(\sigma(x))$. L'application $u \to \sigma'(u')\,\sigma(u)$, où $u' = \beta(\sigma(u))$, est un relèvement local σ'' de classe l de V_n dans $\mathcal{J}^k(V_n, V_p)$. Le jet $j^l_x\sigma''$ ne dépend que de X et de X' et nous pouvons poser $X'X = j^l_x\sigma''$. Cette loi de composition permet de définir par récurrence une loi de composition $(X', X) \to X'X$, où $X \in \tilde{\mathcal{J}}^r(V_n, V_m)$, $X' \in \tilde{\mathcal{J}}^r(V_m, V_p)$, $\beta(X) = \alpha(X')$, $X'X \in \tilde{\mathcal{J}}^r(V_n, V_p)$. Le composé de deux jets semi-holonomes est semi-holonome. Par restriction aux jets holonomes, on retrouve la loi de composition entre jets holonomes.

Un jet semi-holonome $X \in \overline{\mathcal{J}}^r(V_n, W_n)$ est inversible si le jet du premier ordre $j^1(X)$ est inversible. L'ensemble des éléments inversibles de $\overline{\mathcal{J}}^r(V_n, V_n)$ forme un groupoïde $\overline{\Pi}^r(V_n)$, prolongement semi-holonome du groupoïde $\Pi^1(V_n)$. Les éléments inversibles de source et de but $x \in V_n$ forment un groupe $\overline{L}^r_x(V_n)$, isomorphe au groupe $\overline{L}^r_n = \overline{L}^r_0(R^n)$, qui contient L^r_n comme sous-groupe.

Le prolongement semi-holonome d'un sous-groupoïde Φ de $\Pi^1(V_n)$ est un sous-groupoïde $\overline{\Phi}^{r-1}$ de $\overline{\Pi}^r(V_n)$. En particulier soit Φ le groupoïde associé à une structure infinitésimale régulière de groupe $G \subset L_n$ sur V_n (appelée aussi G-structure). Par prolongement semi-holonome il lui correspond un sous-groupoïde $\overline{\Phi}^{r-1}$ de $\overline{\pi}^r(V_n)$ et un sous-groupe de $\overline{L}^r_x(V_n)$. A la G-structure intégrable triviale sur R^n correspond ainsi un sous-groupe G_{r-1} de $\overline{L}^r_n$; c'est une extension du groupe G.

Un élément de $\overline{\mathcal{J}}^r(\mathrm{R}^p, \mathrm{V}_n)$ de source O et de but x sera appelé vitesse semi-holonome d'ordre r et d'origine x. Soit $\overline{\mathrm{T}}_p^r(\mathrm{V}_n)$ l'ensemble de ces vitesses semi-holonomes. On définit de même l'espace $\overline{\mathrm{T}}_p^{r\star}(\mathrm{V}_n)$ des covitesses semi-holonomes. Un élément inversible de $\overline{\mathrm{T}}_n^r(\mathrm{V}_n)$ ou de $\overline{\mathrm{T}}_n^{r\star}(\mathrm{V}_n)$ sera appelé repère ou corepère semi-holonome. L'espace $\overline{\mathrm{H}}^r(\mathrm{V}_n)$ des repères semi-holonomes de V_n est un prolongement d'ordre r de V_n, c'est-à-dire un espace fibré associé à $\mathrm{H}^r(\mathrm{V}_n)$, espace des repères d'ordre r. De plus $\overline{\mathrm{H}}^r(\mathrm{V}_n)$ est un espace fibré principal de fibre $\overline{\mathrm{L}}_n^r$. L'espace $\overline{\mathrm{T}}_p^r(\mathrm{V}_n)$, ainsi que $\overline{\mathrm{T}}_p^{r\star}(\mathrm{V}_n)$, est aussi un prolongement d'ordre r de V_n; mais de plus c'est un espace fibré associé à l'espace fibré principal $\overline{\mathrm{H}}^r(\mathrm{V}_n)$. Appelons *prolongement parfait* tout espace fibré associé à $\overline{\mathrm{H}}^r(\mathrm{V}_n)$. Pour qu'un prolongement ordinaire soit parfait, il faut et il suffit que la loi de composition $(s, y) \to sy$, où $s \in \mathrm{L}_n^r$ et $y \in \mathrm{F}$ (fibre du prolongement), s'étende à $\overline{\mathrm{L}}_n^r$. Si $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_r$ est une suite d'espaces telle que $\mathrm{E}_0 = \mathrm{V}_n$ et $\mathrm{E}_i =$ prolongement du premier ordre de E_{i-1}, l'espace E_r est un prolongement parfait d'ordre r de V_n.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **239**, p. 1762-1764, séance du 20 décembre 1954.)

/ 43 /

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Applications de la notion de jet non holonome.* Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Cette Note fait suite à une Note antérieure (1). Représentant tensoriel d'un jet semi-holonome de R^n dans R^m. Prolongements non holonomes et semi-holonomes d'une loi de composition. Prolongements généralisés d'une variété. Transitivité des prolongements.

1. *Représentant tensoriel d'un jet semi-holonome.* — Soit $\overline{L}^r_{m,n}$ l'espace des jets semi-holonomes d'ordre r de R^n dans R^m, de source O et de but O. Tout élément y de $\overline{L}^r_{m,n}$ admet un représentant tensoriel :

$$\bar{x}^i = a^i_j x^j + \frac{1}{2!} a^i_{j_1 j_2} x^{j_1} \otimes x^{j_2} + \ldots + \frac{1}{r!} a^i_{j_1 j_2 \ldots j_r} x^{j_1} \otimes x^{j_2} \otimes \ldots \otimes x^{j_r},$$

avec la convention habituelle de sommation par rapport aux indices j_h, qui prennent les valeurs entières de 1 à n, tandis que i prend les valeurs de 1 à m. Par récurrence on voit qu'un relèvement σ d'un voisinage de $0 \in R^n$ dans $\overline{\mathcal{J}}^{r-1}(R^n, R^m)$ correspond à une suite de fonctions numériques $(u^i, u^i_j, \ldots, u^i_{j_1 j_2 \ldots j_{r-1}})$ définies au voisinage de O. On a $y = j^1_0 \sigma$ lorsque σ vérifie pour $x = 0$ les conditions

$$\sigma(0) = (0, a^i_j, \ldots, a^i_{j_1 j_2 \ldots j_{r-1}}),$$

$$du^i = a^i_j\, dx^j, \qquad du^i_{j_1} = a^i_{j_1 j_2}\, dx^{j_2}, \qquad \ldots, \qquad du^i_{j_1 j_2 \ldots j_{r-1}} = a^i_{j_1 j_2 \ldots j_r}\, dx^{j_r}.$$

Les coefficients $a^i_{j_1 j_2 \ldots j_h}$ forment un système de coordonnées canoniques dans $\overline{L}^r_{m,n}$. Si ces coordonnées sont symétriques par rapport aux indices inférieurs, le jet y est holonome. Le représentant tensoriel de $j^k y$ s'obtient en supprimant les termes de degré $> k$. Soit $y' \in \overline{L}^r_{p,m}$. Pour $r = 2$, le représentant tensoriel de $y'y \in \overline{L}^2_{p,n}$ s'obtient par substitution du représentant tensoriel de y dans celui de y' et par suppression des termes de degré > 2. Cette règle n'est plus valable pour $r > 2$. Elle est cependant valable pour r quelconque lorsque y ou y' est le jet d'ordre r d'une application linéaire. Ainsi le groupe $L_m \times L_n$ est un groupe d'opérateurs linéaires sur $\overline{L}^r_{m,n}$. Ce groupe laisse invariante la

(1) *Comptes rendus*, 239, 1954, p. 1762.

décomposition de $\overline{L}^r_{m,n}$ en somme directe des sous-espaces $\overline{M}^k_{m,n}$, en désignant par $\overline{M}^k_{m,n}$ l'ensemble des $y \in \overline{L}^r_{m,n}$ dont les coordonnées sont nulles à l'exception des $a^i_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. L'espace $\overline{M}^k_{m,n}$ s'identifie à l'espace des applications linéaires de R^n dans $\overline{M}^{k-1}_{m,n}$, c'est-à-dire à $R^m \otimes (R^n)^* \otimes \ldots \otimes (R^n)^*$, où il y a k facteurs identiques à $(R^n)^*$, espace dual de R^n. Si $m = n$, $\overline{M}^k_{n,n}$ est un espace de tenseurs sur R^n et L_n opère sur $\overline{L}^r_{n,n}$ comme sur la somme directe des espaces de tenseurs $\overline{M}^k_{n,n}$. Soit $\overline{M}^k_n$ le noyau de l'homomorphisme j^{k-1} de $\overline{L}^k_n$ sur $\overline{L}^{k-1}_n$; le représentant tensoriel d'un élément de $\overline{M}^k_n$ est

$$\overline{x}^i = x^i + \frac{1}{k!} a^i_{j_1 j_2 \ldots j_k} x^{j_1} \otimes x^{j_2} \otimes \ldots \otimes x^{j_k}.$$

On peut aussi identifier $\overline{M}^k_{n,n}$ à l'algèbre de Lie de $\overline{M}^k_n$.

Remarquons que les coordonnées canoniques de $y'y$ sont des fonctions polynômes par rapport aux coordonnées canoniques de y et de y'. Donc les coordonnées canoniques définissent sur $\overline{L}^r_{m,n}$ une structure analytique réelle invariante par $\overline{L}^r_m \times \overline{L}^r_n$. L'espace $\overline{L}^r_{m,n}$ muni de cette structure analytique est la fibre type des prolongements $\overline{T}^r_n(V_m)$ et $\mathcal{J}^r(V_n, V_m)$, de base V_m et $V_n \times V_m$. De même $\overline{L}^r_n$ est un groupe analytique, qui est la fibre type de $\overline{H}^r(V_n)$.

2. *Prolongements d'une loi de composition* ([2]). — Soit φ une loi de composition $(z', z) \to z'z$, de classe r, où $z \in E$, $z' \in E'$, $z'z \in E$. Soit V_p une variété de classe r et soit $Z \in \tilde{\mathcal{J}}^r(V_p, E)$, $Z' \in \tilde{\mathcal{J}}^r(V_p, E')$, $\alpha(Z) = \alpha(Z')$, $z = \beta(Z)$, $z' = \beta(Z')$. Alors $(Z', Z) \in \tilde{\mathcal{J}}^r(V_p, E' \times E)$. En posant

$$Z'.Z = (j^r_{z',z}\varphi)(Z', Z) \in \tilde{\mathcal{J}}^r(V_p, E),$$

on définit un *prolongement non holonome d'ordre* r de la loi de composition φ. On a $\alpha(Z'.Z) = \alpha(Z)$. Par restriction aux jets semi-holonomes, on obtient un *prolongement semi-holonome* de φ; car le composé $Z'.Z$ de deux jets semi-holonomes est semi-holonome. Le prolongement d'une loi de composition associative est associatif. Si φ est défini seulement sur une partie M de $E' \times E$, son prolongement est défini pour les couples $(Z', Z) \in \tilde{\mathcal{J}}^r(V_p, M)$. Si G est un groupe de Lie, $\overline{T}^r_p(G)$ est un groupe de Lie, extension inessentielle de G. Si G opère sur V_n, $\overline{T}^r_p(G)$ opère sur $\overline{T}^r_p(V_n)$.

3. *Prolongements généralisés d'une variété* V_n. — V_n étant de classe $\geqq r$, soit Φ un sous-groupoïde de $\overline{\Pi}^r(V)_n)$. Appelons *prolongement de* V_n *relatif à* Φ une

([2]) Les prolongements holonomes sont définis dans : *Géométrie différentielle* (*Colloque Int. C. N. R. S.*, 1953, p. 108).

variété E munie d'une projection p sur V_n et admettant Φ comme groupoïde d'opérateurs; c'est-à-dire on a une loi de composition $(\theta, z) \to \theta z$, où $\theta \in \varphi$, $z \in E$, $\theta z \in E$, telle que $\theta'(\theta z) = (\theta'\theta)z$ et $ez = z$, si ces composés sont définis et si e est une unité de Φ. Nous supposons de plus : 1° θz est défini si $\alpha(\theta) = p(z)$; 2° $p(\theta z) = \beta(\theta)$; 3° les applications p et $(\theta, z) \to \theta z$ sont continues.

Supposons que p et $(\theta, z) \to \theta z$ soient de classe h. Soit $\overline{\Phi}^h$ le prolongement semi-holonome d'ordre h de Φ. Un élément X de $\overline{\Phi}^h$, de source $x = \alpha(X)$, est un élément de $\overline{\mathfrak{J}}^h(V_n, \Phi)$ tel que $\alpha X = j_x^h$, où j_x^h désigne le h — jet de source x de l'application identique de V_n et α l'application canonique de $\overline{\mathfrak{J}}^h(V_n, \Phi)$ sur V_n (cependant X vérifie encore des conditions supplémentaires). Posons $Z = (X(j_z^h p)) . j_z^h$, où $z \in E$ tel que $p(z) = x$. On a $Z \in \overline{\Pi}^h(E)$, de source z. L'ensemble de ces jets semi-holonomes Z est un sous-groupoïde $\overline{\Psi}_h$ de $\overline{\Pi}^h(E)$.

Théorème (transitivité des prolongements). — *Tout prolongement* $\overline{E}$ *de* E *relatif à* $\overline{\Psi}_h$ *est un prolongement de* V_n *relatif à* $\overline{\Phi}^h$.

En effet, le composé $X\bar{z}$ sera défini par $X\bar{z} = Z\bar{z}$, où $\bar{z} \in \overline{E}$ se projetant sur z.

Le théorème ([3]) de transitivité des prolongements au sens ordinaire en est un corollaire, en remarquant que Z est holonome si X est holonome.

Soit E^h un *prolongement itéré d'ordre* h de E; c'est-à-dire il existe une suite $E^0, E^1, \ldots, E^h$, où $E^0 = E$ et $E^i =$ prolongement du premier ordre de E^{i-1}, relatif à $\Pi^1(E^{i-1})$. *Alors* E^h *est un prolongement de* V_n *relatif à* $\overline{\Phi}^h$. En particulier si E est un prolongement de V_n relatif à $\Pi^1(V_n)$, E^h est un prolongement de V_n relatif à $\overline{\Pi}^{h+1}(V_n)$, c'est-à-dire un prolongement parfait d'ordre $h+1$ de V_n.

Ce qui précède peut encore se généraliser en considérant des sous-groupoïdes de $\tilde{\Pi}^r(V_n)$, groupoïde des jets non holonomes inversibles.

([3]) *Comptes rendus*, 233, 1951, p. 1081.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 240, p. 397-399, séance du 24 janvier 1955.)

/ 44 /

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE. — *Les prolongements d'un espace fibré différentiable.* Note (*) de M. CHARLES EHRESMANN, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Cette Note fait suite à deux Notes antérieures (1). Un espace muni d'un groupoïde d'opérateurs est considéré comme un espace fibré généralisé. Prolongement d'un groupoïde différentiable. Structure fibrée des prolongements d'un espace fibré différentiable.

1. *Une généralisation de la notion de structure fibrée.* — Soit E un espace muni d'un groupoïde d'opérateurs Φ vérifiant les axiomes suivants :

1° Étant donnés $z \in E$, $\theta \in \Phi$, $\theta' \in \Phi$, chacun des composés $\theta'(\theta z)$ et $(\theta'\theta)z$ est défini si et seulement si $\theta'\theta$ et θz sont définis. Lorsqu'ils sont définis, on a $\theta'(\theta z) = (\theta'\theta)z$.

2° Si e est une unité de Φ et si ez est défini, on a $ez = z$.

3° Tout $z \in E$ peut être composé avec au moins un $\theta \in \Phi$ et tout $\theta \in \Phi$ peut être composé avec au moins un $z \in E$.

Soit B l'ensemble des unités de Φ. Soit $a(\theta)$ l'unité à droite, $b(\theta)$ l'unité à gauche de $\theta \in \Phi$. Il existe alors une unité $p(z)$ bien déterminée telle que $p(z)z$ soit défini. On a ainsi deux projections a et b de Φ sur B et une projection p de E sur B. Le composé θz est défini si et seulement si $a(\theta) = p(z)$ et alors on a $b(\theta) = p(\theta z)$.

La structure ainsi définie par Φ sur E sera appelée *structure fibrée* (généralisée) *associée* à Φ, de base B et ayant comme fibres les images réciproques par p des points de B. Soit K l'ensemble des $\theta \in \Phi$ tels que $\theta z = z$ pour tout z vérifiant la condition $p(z) = a(\theta)$. K est un *sous-groupoïde distingué* de Φ, d'un type particulier. Les classes θK, qui coïncident avec les classes $K\theta$, forment le groupoïde quotient Φ/K. C'est un groupoïde d'opérateurs sur E qui sera appelé *groupoïde principal* de la structure fibrée considérée. Les structures fibrées associées à Φ/K seront dites associées à la structure fibrée considérée sur E.

(*) Séance du 25 avril 1955.

(1) *Comptes rendus*, 239, 1954, p. 1762; 240, 1955, p. 397.

Si E et Φ sont munis de structures topologiques, il convient d'ajouter l'axiome de continuité pour les fonctions $\theta \to \theta^{-1}$, $(\theta', \theta) \to \theta'\theta$, $(\theta, z) \to \theta z$ et p. Il en résulte la continuité des applications a et b. En particulier on a un espace fibré ordinaire à groupe structural topologique G lorsque B (supposé connexe) admet, au voisinage de tout $x \in B$, un relèvement local dans Φ défini par une fonction continue $u \to \theta_u$, où u appartient à un voisinage de x et $\theta_u \in \Phi$, telle que $a(\theta_u) = x$ et $b(\theta_u) = u$. L'espace fibré principal associé sera le sous-espace H de Φ K formé par les classes θK telles que $a(\theta) = x$; le groupe G sera le sous-groupe de Φ K formé par les classes θK telles que $a(\theta) = b(\theta) = x$.

2. *Les prolongements d'un espace fibré différentiable.* — La structure fibrée associée à Φ sera dite de *classe* r lorsque les fonctions $\theta \to \theta^{-1}$, $(\theta', \theta) \to \theta'\theta$, $(\theta, z) \to \theta z$ et p sont de classe r. Alors a et b seront aussi de classe r.

Soit $X \in \tilde{\mathcal{J}}^r(B, \Phi)$ tel que $aX = j^r_x = r$-jet de l'application identique de B de source $x = \alpha(X)$ et tel que $bX \in \tilde{\Pi}^r(B)$; [par définition le composé de X avec une application f de classe r de Φ dans un autre espace est $fX = (j^r_\theta f)X$, où $\theta = \beta(X)$]. L'ensemble des X ainsi définis forme un groupoïde $\tilde{\Phi}^r$, appelé *prolongement non holonome* d'ordre r de Φ. Le composé X'X de deux éléments de $\tilde{\Phi}^r$ est $(X'bX).X$, ce produit étant défini par prolongement non holonome de la loi de composition de Φ. Les unités de $\tilde{\Phi}^r$ sont les éléments j^r_x, où $x \in B$. L'inverse de X est $\sigma X(bX)^{-1}$, où σ désigne l'application $\theta \to \theta^{-1}$ de Φ sur Φ.

Soit j^r_z le r-jet de l'application identique de E de source $z \in E$ et supposons $x = p(z)$. Désignons par Xj^r_z le composé $(Xj^r_z p).j^r_z$, obtenu par prolongement non holonome de la loi de composition $(\theta, z) \to \theta z$. C'est un élément de $\tilde{\Pi}^r(E)$, de source z et de but $z' = \theta z$. L'espace des couples (X, z), où $p(z) = \alpha(X)$, forme un groupoïde pour la loi de composition $(X', z')(X, z) = (X'X, z)$. L'application $(X, z) \to Xj^r_z$ est une représentation continue de ce groupoïde sur un sous-groupoïde $\tilde{\Psi}$ de $\tilde{\Pi}^r(E)$.

Soit E' un prolongement de E relatif à $\tilde{\Psi}$. Si $z' \in E'$ se projette sur $z \in E$ le composé $(Xj^r_z)z'$ est défini; il peut se noter Xz' et sera fonction continue de (X, z'). Ceci définit $\tilde{\Phi}^r$ comme groupoïde d'opérateurs sur E' et démontre le théorème suivant, analogue au théorème de transitivité des prolongements :

Théorème. — *Si* E *est un espace fibré de classe r associé à* Φ, *tout prolongement de* E *relatif à* $\tilde{\Psi}$ *est un espace fibré de base* B *associé à* $\tilde{\Phi}^r$.

Le prolongement semi-holonome $\bar{\Phi}^r$ (resp. *holonome* Φ^r) de Φ est le sous-groupoïde de $\tilde{\Phi}^r$ formé d'éléments de $\bar{\mathcal{J}}^r(B, \Phi)$ [resp. $\mathcal{J}^r(B, \Phi)$]. L'application $(Xz) \to Xj^r_z$ fait correspondre à $\bar{\Phi}^r$ un sous-groupoïde $\bar{\Psi}$ de $\bar{\Pi}^r(E)$, et à Φ^r un sous-groupoïde Ψ de $\Pi^r(E)$. Ceci démontre :

COROLLAIRE 1. — *Tout prolongement de* E *relatif à* $\overline{\Psi}$ (resp. Ψ) *est un espace fibré de base* B *associé à* $\overline{\Phi}^r$ (resp. Φ^r). *En particulier tout prolongement ordinaire d'ordre r de* E [c'est-à-dire relatif à $\Pi^r(E)$] *est un espace fibré associé à* Φ^r.

Soit E un espace fibré ordinaire de classe r à groupe structural de Lie G. Soit Φ le groupoïde principal associé (groupoïde des isomorphismes de fibre sur fibre). Le sous-groupoïde de Φ formé par les éléments θ tels que $a(\theta)$ et $b(\theta)$ appartiennent à un voisinage de $x \in B$ est isomorphe au sous-groupoïde de $\Phi_0 = R^n \times R^n \times G$ formé par les éléments $(u', u, s) \in U \times U \times G$, où U est un voisinage de l'origine de R^n, $n = \dim B$. La loi de composition du groupoïde Φ_0 est $(u'', u', s')(u', u, s) = (u'', u, s's)$, où $u, u', u'' \in R^n$ et $s', s \in G$. Le prolongement Φ_0^r s'identifie à $R^n \times R^n \times L_n^r \times T_n^r(G)$, muni de la loi de composition :

$$(u'', u', y', S')(u', u, y, S) = (u'', u, y'y, S'y'.S),$$

où $y', y \in L_n^r$; $S', S \in T_n^r(G)$, considéré avec sa structure de groupe. Soit G_n^r le sous-groupe de Φ_0^r formé par les éléments (o, o, y, S). C'est un groupe isomorphe à $L_n^r \times T_n^r(G)$ avec la loi de composition $(y', S')(y, S) = (y'y, S'y.S)$.

COROLLAIRE 2. — *Tout prolongement d'ordre r de* E (*ou relatif à* Ψ) *est un espace fibré de base* B *et de groupe structural* G_n^r.

En remplaçant L_n^r et $T_n^r(G)$ par $\overline{L}_n^r$ et $\overline{T}_n^r(G)$, on définit de façon analogue un groupe $\overline{G}_n^r$. De même, en utilisant des jets non holonomes, on définit un groupe $\widetilde{G}_n^r$. Tout prolongement de E relatif à $\overline{\Psi}$ (resp. $\widetilde{\Psi}$) sera un espace fibré de base B et de groupe structural $\overline{G}_n^r$ (resp. $\widetilde{G}_n^r$).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 240, p. 1755-1757, séance du 2 mai 1955.)

/ 45 /

TOPOLOGIE. — *Sur les espaces feuilletés : théorème de stabilité*. Note (*) de MM. **Charles Ehresmann** et **Shih Weishu**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Le théorème de stabilité (¹) de la théorie des *variétés feuilletées* est étendu au cas des *espaces feuilletés* localement simples (²).

Définition. — Une structure *feuilletée* (ou *feuilletage*) (³) sur E est définie par un couple (T, T′) de deux topologies T et T′ sur E vérifiant l'axiome suivant : tout point x de E admet un voisinage U relativement à T′ tel que les topologies induites sur U par T et T′ soient identiques. E muni d'un feuilletage s'appelle *espace feuilleté*. Une composante connexe de E relativement à T′ est appelée *feuille*.

Remarque. — L'application identique de E est une application continue de T′ dans T; la topologie T est moins fine que T′.

Si W est un ouvert relativement à T, le couple des topologies induites par T et T′ sur W définit le *feuilletage induit* sur W. Les feuilletages forment une espèce de structures locales (³), la topologie sous-jacente à (T, T′) étant T. Les feuilles de E définissent la *relation d'équivalence du feuilletage* et l'espace quotient de E muni de T par cette relation d'équivalence est appelé *espace transverse* Ĕ du feuilletage. Soit W̆ l'espace transverse de W muni du feuilletage induit. Par passage aux quotients, l'injection canonique de W dans E définit une application continue canonique q de W̆ dans Ĕ, ainsi que de W dans Ĕ.

Définition. — Une feuille F du feuilletage de E est dite *simple* lorsque tout point x de F admet un système fondamental de voisinages ouverts W relativement à T tel que l'application canonique de W̆ dans Ĕ soit un homéomorphisme sur un ouvert de Ĕ. Le feuilletage est dit *simple* lorsque toute feuille est simple. Le feuilletage est dit *localement simple* lorsque tout point x de E admet un ouvert W relativement à T tel que le feuilletage induit sur W soit simple. Un tel ouvert W sera dit ouvert simple et une feuille de W sera appelée *plaque*.

LEMME 1. — *La relation d'équivalence d'un espace feuilleté localement simple est ouverte (et, par suite, la frontière d'un ensemble saturé est saturée).*

Une feuille F est dite *propre* lorsque T et T′ induisent la même topologie sur F.

LEMME 2. — *Si* (T, T′) *est un feuilletage de* E *tel que* T′ *soit une topologie régulière et localement connexe, toute feuille simple est propre.*

LEMME 3. — *Soit* (T, T′) *un feuilletage simple de* E *admettant les propriétés suivantes : 1° chaque point x et* E *admet un voisinage compact relativement à* T*; 2°* T′ *est régulière et localement connexe; 3° l'espace transverse* $\check{E}$ *est localement séparé* ([4]). *Alors toute feuille compacte* F *admet un système fondamental de voisinages ouverts, saturés pour la relation d'équivalence du feuilletage de* E *et dont chaque feuille est compacte. Si, de plus,* $\check{E}$ *est localement régulier,* F *admet aussi un système fondamental de voisinages fermés saturés.*

Soit (T, T′) un feuilletage localement simple sur E. Soit U_0 un voisinage simple de x_0 et U un voisinage simple de x. Un *isomorphisme local transverse* du feuilletage est un homéomorphisme f de $\check{U}_0$ sur $\check{U}$; il sera dit *strict* lorsque $qf = q_0$, où q et q_0 sont les applications canoniques de $\check{U}$ et $\check{U}_0$ dans $\check{E}$. Supposons $\check{x} = f(\check{x}_0)$ et soit $X = j^{\lambda}_{\check{x}_0} f$ ([5]). Considérons les triplets (x_0, x, X). Si U_0 et U sont remplacés par des voisinages simples U'_0 et U′, le triplet (x_0, x, X) s'identifie canoniquement à un triplet (x_0, x, X'). Nous définissons ainsi une relation d'équivalence dans l'ensemble des triplets (x_0, x, X) et chaque classe d'équivalence est appelée *jet transverse régulier*. Un jet transverse régulier sera dit *strict* lorsque son représentant (x_0, x, X) vérifie la condition suivante : X est le jet local d'un isomorphisme transverse strict.

Toute plaque P détermine un jet transverse strict canonique (x_0, x, X) pour tout couple de points (x_0, x) de P. Toute chaîne finie ([6]) de plaques reliant x_0 à x détermine un jet transverse strict (x_0, x, X). Les jets ainsi obtenus seront appelés *jets transverses d'holonomie du* feuilletage ; l'ensemble de ces jets forme le *groupoïde d'holonomie* du feuilletage.

L'ensemble des éléments de ce groupoïde, de source et de but x, forme *le groupe d'holonomie* du feuilletage en x_0. *Si* F_0 *est la feuille passant par* x_0, *il existe un homomorphisme canonique du groupe fondamental de* F_0 *en* x_0 *sur ce groupe d'holonomie.*

Fixons un voisinage simple U_0 de x_0. Supposons E muni de T et soit $\tilde{E}_0$ le sous-espace de $J^{\lambda}(E, \check{U}_0)$ formé par les jets locaux $X j^{\lambda}_x p$, où p est la projection canonique d'un ouvert simple U sur $\check{U}$ et où X est le jet local d'un isomorphisme local transverse strict de $\check{U}$ dans $\check{U}_0$. Comme $\tilde{E}_0$ est un sous-espace ouvert, il est étalé dans E par la projection α (5). Le feuilletage de E correspond par α à un feuilletage de $\tilde{E}_0$. Soit F_0 la feuille de E passant par x_0. On a $F_0 \subset \alpha(\tilde{E}_0)$.

LEMME 4. — *L'image réciproque de* F_0 *par* α *dans* $\tilde{E}_0$ *est un revêtement normal de* F_0 *pour la projection* α. *Si* $\tilde{F}_0$ *est une composante connexe de ce revêtement, le groupe d'holonomie du feuilletage en* x_0 *s'identifie canoniquement au groupe d'holonomie de ce revêtement* (7).

LEMME 5. — *Le feuilletage de* $\tilde{E}_0$ *est simple.*

THÉORÈME DE STABILITÉ. — *Soit* (T, T′) *un feuilletage localement simple de* E *vérifiant les conditions suivantes : 1° chaque point* x *de* E *admet un voisinage compact relativement à* T*; 2°* T′ *est régulière et localement connexe; 3° il existe un ouvert simple* U *tel que* $\breve{U}$ *soit séparé. Soit* F *une feuille compacte de* E *rencontrant* U *et telle que le groupe d'holonomie du feuilletage en* $x \in F$ *soit fini (condition vérifiée, en particulier, lorsque le groupe fondamental de* F *est fini). Alors* F *admet un système fondamental de voisinages ouverts saturés pour la relation d'équivalence du feuilletage et dont chaque feuille est compacte. Si* $\breve{U}$ *est régulier,* F *admet aussi un système fondamental de voisinages fermés saturés dont les feuilles sont compactes.*

Le théorème s'applique, en particulier, aux espaces feuilletés localement isomorphes à $B \times F$, où F est localement connexe et localement compact et où B est localement compact. Un tel feuilletage est défini sur E par un atlas de $B \times F$ sur E compatible avec le pseudogroupe des transformations engendré par l'ensemble des automorphismes locaux de $B \times F$ de la forme $(x, y) \to (\varphi(x), \psi(x, y))$, pour $(x, y) \in U \times U'$, où U et U′ sont respectivement des ouverts de B et F. On montre que la conclusion est encore valable en supposant seulement F localement connexe et localement compact.

(*) Séance du 16 juillet 1956.

(1) G. REEB, *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées* (*Actualités Scientifiques*, Paris, Hermann, 1952).

(2) La méthode de démonstration généralise la méthode indiquée pour les variétés feuilletées par C. Ehresmann dans des conférences au séminaire de M. Lefschetz à Princeton en 1953. Pour la mise au point de cette généralisation, les auteurs de cette Note ont profité de conversations avec A. Haefliger.

(3) C. EHRESMANN, *Annali di Mat.*, 1954, p. 133-142.

(4) Un espace topologique est dit localement séparé (régulier), lorsque tout point admet un voisinage séparé (régulier).

(5) C. EHRESMANN, *Colloque de Géométrie différentielle de Strasbourg, C. N. R. S.*, 1953 (*voir* p. 98).

(6) Une chaîne finie d'ouverts reliant x_0 à x est une suite finie d'ouverts $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telle que $x_0 \in U_0$, $x \in U_n$, $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ et telle qu'on ait distingué pour chaque $i < n$ une composante connexe de $U_i \cap U_{i+1}$.

([7]) Étant donné un revêtement $\tilde{B}$ de B, l'espace somme $B + \tilde{B}$ peut être considéré comme un espace feuilleté localement simple; la topologie T′ est la topologie somme, la topologie T est l'image réciproque de celle de B par la projection de $B + \tilde{B}$ sur B. Le groupe d'holonomie de ce feuilletage en $x \in B$ s'identifie à un groupe d'automorphismes de la fibre de $B + \tilde{B}$ se projetant sur x; en supprimant le point x, qui est fixe pour ces automorphismes, on a un groupe d'automorphismes de la fibre de $\tilde{B}$ appelé groupe d'holonomie du revêtement au-dessus de x. La même notion est définie pour un espace fibré muni d'une connexion intégrable, c'est-à-dire pour un espace fibré à groupe structural discret (*voir* C. Ehresmann, *Colloque de Topologie*, Bruxelles, 1950, p. 37 et 38).

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **243**, p. 344-346, séance du 23 juillet 1956.)

/ 48 /

THÉORIE DES GROUPES. — *Sur les pseudogroupes de Lie de type fini.* Note de M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Le plus grand groupe de transformations contenu dans un pseudogroupe de Lie de type fini est un groupe de Lie. J'ai exposé ce théorème pour la première fois au *Math. Colloquium*, Yale University, le 23 mars 1955. L'énoncé a été publié seulement dans la Notice sur mes travaux (mai 1955).

Soit V_n une variété différentiable de classe $\mathcal{C}^p$ et soit Π^r le groupoïde des jets inversibles d'ordre r de V_n dans V_n, $r < p$. Soit Φ^r une sous-variété de Π^r, de classe $\mathcal{C}^q$, $q > 1$, contenant l'ensemble Δ^r des jets j^r_x d'ordre r de l'application identique de V_n. Rappelons que Φ^r est un système différentiel et qu'un germe de solution de Φ^r est le jet local $j^r_x \varphi$ d'une application φ d'un ouvert $\mathfrak{U}$ de V_n dans V_n telle que $j^r_u \varphi \in \Phi^r$ pour tout $u \in \mathfrak{U}$. Une solution de Φ^r est un ouvert de l'espace des germes de solution. Supposons que Φ^r satisfait aux conditions suivantes :

1° L'application canonique de Φ^r dans Π^{r-1} est localement biunivoque (système de Mayer-Lie).

2° Φ^r est un sous-groupoïde de Π^r.

3° Φ^r est complètement intégrable ; c'est-à-dire tout élément de Φ^r est projection d'un germe de solution.

Un élément X de Φ^r s'identifie à $j^1_x \sigma$, où σ est un relèvement local de V_n dans Π^{r-1} tel que $\alpha\sigma =$ application identique, où α est la projection « source ». Par suite de 1°, σ est la projection d'un relèvement local σ' de V_n dans Φ^r tel que $X' = j^1_x \sigma'$ soit un jet *semi-holonome* (1). L'ensemble $\overline{\Phi}^{r+1}$ des éléments X′ est le prolongement semi-holonome de Φ^r. L'application canonique de $\overline{\Phi}^{r+1}$ sur Φ^r est biunivoque. La condition 3° est équivalente à la suivante : *Les éléments de $\overline{\Phi}^{r+1}$ sont holonomes. C'est une condition équivalente à la condition d'intégrabilité de Frobenius.* L'élément X′ s'identifie à un élément de contact de dimension n, transversal par rapport à la projection α sur V_n ; $\overline{\Phi}^{r+1}$ s'identifie à un champ complètement intégrable Ψ^r d'éléments de contact de dimension n dans Φ^r.

Les solutions de Φ^r correspondent aux variétés intégrales de Ψ^r ; les solutions complètes sont les feuilles du feuilletage défini par Ψ^r. Pour la topologie fine de ce feuilletage, Φ^r est un espace étalé (2) sur V_n par α ainsi que par β (projection « but »). Par définition, *l'ensemble des solutions biunivoques de Φ^r est un* *pseudo-groupe de Lie* Γ *de type fini.* L'ensemble des solutions qui sont des applications biunivoques de V_n sur V_n est le plus grand groupe de transformations G contenu dans Γ.

Théorème. — G *est un groupe de transformations de Lie.*

Soit F_x la sous-variété de Φ^r qui se projette par α sur $x \in V_n$. Un vecteur X tangent à F_x au point $\tilde{x} = j_x^r \in \Delta^r$ sera appelé *transformation infinitésimale de* Γ *au point* x. L'ensemble Θ de ces vecteurs forme un espace fibré de base V_n et dont les fibres Θ_x sont des espaces vectoriels. Considérons le groupe d'holonomie [3] π_x du feuilletage de Φ^r au point x. Les éléments de π_x sont des jets locaux inversibles de F_x sur F_x, de source et de but x, de classe $\geqq 1$. En passant aux jets d'ordre h, on obtient le groupe d'holonomie d'ordre h. Le groupe d'holonomie d'ordre 1 est un groupe d'automorphismes de Θ_x et c'est un groupe structural discret pour Θ, qui est donc également muni d'un feuilletage transversal. Un germe local de feuille est un germe local de transformation infinitésimale de Γ en x. Il correspond aussi à un germe local de champ de vecteurs dans V_n au point x. Un vecteur $X \in \Theta_x$ correspond d'une façon canonique à un germe d'ordre $r-1$ d'un tel champ de vecteurs dans V_n.

Un voisinage de x dans F_x est un noyau de groupe de Lie, dont la loi de composition se définit simplement par le feuilletage de Φ^r; Θ_x est l'algèbre de Lie correspondante. Θ muni de la topologie fine de son feuilletage est un revêtement de V_n et définit un pseudogroupe de Lie infinitésimal de type fini. Inversement tout pseudogroupe de Lie infinitésimal de type fini engendre un « noyau » de pseudogroupe de Lie de type fini et même un pseudogroupe de Lie de type fini.

Soit F'_x l'ensemble des points d'intersection de F_x avec les feuilles de Φ^r qui correspondent aux éléments de G; la correspondance entre F'_x et G est biunivoque. Soit y un point de F_x adhérent à F'_x. On montre que la feuille passant par y est un relèvement de V_n par rapport à α et à β, c'est-à-dire définit un élément de G. La démonstration utilise les propriétés d'un feuilletage et la proposition suivante :

Pour qu'un espace E *étalé dans* V_n *soit un revêtement de* V_n, *il faut et il suffit que tout chemin de* V_n *d'origine* x *se relève dans* E *avec une origine donnée au-dessus de* x. *Rappelons aussi qu'un espace étalé compact est un revêtement.*

L'espace F'_x est donc fermé dans F_x. D'après un théorème classique de E. Cartan, un noyau de sous-groupe fermé dans un noyau de groupe de Lie est un noyau de groupe de Lie. *Donc* G *est un groupe de Lie représenté par une sous-variété* F'_x *de* F_x.

Le théorème se généralise pour le cas où la condition 3° n'est pas vérifiée. Il entraîne alors le résultat suivant :

Étant donné un sous-groupe G *de* L_n *tel qu'on puisse associer à toute* G-

structure sur V_n une connexion affine covariante ([3]), *le groupe des automorphismes d'une telle G-structure est un groupe de Lie.*

Supposons V_n compact et le groupe d'holonomie du feuilletage de Φ^r en $\tilde{x}$ réduit à l'identité. D'après le théorème de stabilité, toutes les feuilles passant par un point suffisamment voisin de $\tilde{x}$ correspondent à des éléments de G. Si Φ^r est de plus connexe, F'_x se réduit à F_x et Γ *est par suite le pseudogroupe déduit par localisation de* G. Ce théorème ([4]) est encore valable si V_n n'est pas compact, mais vérifie la condition : Tout chemin de V_n peut être relevé, par rapport à α, dans toute feuille de Φ^r voisine de Δ^r. V_n est alors dit *complet* pour le pseudogroupe Γ.

(1) *Comptes rendus*, **239**, 1954, p. 1762.

(2) Un espace E est *étalé* dans E' par *p* lorsque *p* est réunion d'homéomorphismes d'ouverts de E sur des ouverts de E'.

(3) Cette notion, introduite par l'auteur, est fondamentale dans la théorie des feuilletages (*Comptes rendus*, **243**, 1956, p. 344).

(4) *Int. Congr. of Math. Amsterdam*, I, 1954, deux communications par C. Ehresmann, p. 478, 479.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **246**, p. 360-362, séance du 20 janvier 1958.)

GAUTHIER-VILLARS,

ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

153165-58 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55. Imprimé en France.

/ 49 /

TOPOLOGIE. — *Sur les appuis d'une pyramide convexe et sur les polyèdres convexes sans sommet.* Note de M^lle **Andrée Bastiani** et M. **Charles Ehresmann**, présentée par M. Maurice Fréchet.

Cette Note, qui fait suite à deux Notes antérieures (1), répond à certaines questions qui se posent dans la théorie des polyèdres convexes de dimension infinie : étude des variétés d'appui, pyramides sans hyperplan d'appui *strict*, pyramides sans arêtes, polyèdres sans sommets.

1. *Sur les variétés d'appui d'une pyramide convexe.* — Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou infinie sur le corps des réels, muni de la topologie fine. Soit C un cône convexe de sommet O.

Définition 1. — Une *variété d'appui* de C est un sous-espace vectoriel L qui contient, avec tout point x de la trace de C sur L, la facette de x dans C. Une *variété d'appui extrême* est une variété d'appui L qui est engendrée par la trace de C sur L. Une *variété d'appui stricte* est une variété d'appui L dont la trace sur C est réduite à la facette de O.

Pour que L soit variété d'appui de C, il faut et il suffit que L soit la facette du sommet du cône d'appui de C autour de cette variété L.

Définition 2. — Une *pyramide convexe propre* est une pyramide convexe P dont le cône d'appui autour de toute variété d'appui extrême de P est fermé.

Rappelons qu'une pyramide convexe est un cône convexe P tel que le cône d'appui en tout point x de P soit fermé. Il en résulte que le cône d'appui autour de la variété d'appui extrême *engendrée par une facette* est fermé. Une pyramide convexe n'est pas nécessairement propre [*voir* (2), exemple, p. 19-25]. La notion de pyramide propre est moins restrictive que celle de *pyramide convexe stricte*; pour une telle pyramide, le cône d'appui autour de *tout* sous-espace est fermé.

Théorème. — *Soit* P *une pyramide convexe propre,* L *une variété d'appui extrême de la trace de* P *sur un sous-espace* L′ *contenant* L *et différent de* L. *Il existe un hyperplan d'appui extrême de* P *contenant* L *et dont la trace sur* L′ *est un hyperplan d'appui extrême de* $P \cap L'$.

Corollaire 1. — *Une pyramide propre est l'intersection de ses appuis extrêmes* (un exemple donné dans 2 prouve qu'elle peut déjà être l'intersection d'une partie de ses appuis extrêmes).

Corollaire 2. — *Le cône d'appui d'une pyramide convexe propre autour d'une variété d'appui extrême* L *est l'intersection des appuis extrêmes limités par des hyperplans d'appui extrême contenant* L.

Théorème. — *Par toute facette* F *d'une pyramide convexe stricte* P, *il passe un hyperplan d'appui dont la trace sur* P *est la facette* F. *En particulier,* P *admet un hyperplan d'appui strict. Plus généralement, par toute variété d'appui* L *de* P *passe un hyperplan d'appui dont la trace sur* P *est* $L \cap P$.

Remarques. — Une pyramide convexe de dimension finie est stricte et propre. Une pyramide simpliciale de dimension infinie est propre et non stricte.

Conjecture. — Toute pyramide convexe stricte semble être l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces.

2. *Pyramides simpliciales généralisées.* — Soit E un espace vectoriel de dimension infinie, muni de la topologie fine; $(\omega_i)_{i\in I}$ une famille de formes linéaires sur E, incompatible et irréductible, $(e_i)_{i\in I}$ la pseudo-base associée qui engendre un sous-espace E′ de E.

Définition. — Soit S l'ensemble des points x de E tels que $\langle x, \omega_i\rangle \geqq 0$, pour $i \in I$. On appellera S *pyramide simpliciale généralisée* dans le cas où le cône d'appui S_x en un point x de S est l'ensemble des y de E tels que $\langle y, \omega_j\rangle \geqq 0$ pour tout indice j tel que $\langle x, \omega_j\rangle = 0$.

Les hyperplans $\langle x, \omega_i\rangle = 0$ *sont des hyperplans d'appui extrême de* S. *En général,* S *admet d'autres hyperplans d'appui extrême. Les facettes de dimension finie sont engendrées par des vecteurs de la pseudo-base.*

On définit un isomorphisme de E sur un sous-espace de R^I : $x \to (\omega_i(x))_{i\in I}$. A chaque vecteur e_i de la pseudo-base correspond un vecteur ε_i. Le sous-espace E′ de E est appliqué sur le sous-espace $R^{(I)}$, ensemble des points $x = (x_i)_{i\in I}$ tels que $x_i = 0$, sauf pour un ensemble fini d'indices. Une pyramide simpliciale généralisée est appliquée sur une section, par un sous-espace contenant $R^{(I)}$, du cône convexe C, ensemble des points $x \in R^I$ tels que $x_i = 0$ pour tout $i \in I$, sauf un ensemble fini; on montre que C *n'est pas une pyramide convexe.* Le sous-ensemble $[-1, +1]^I$ de R^I sera appelé *hypercube.* Il engendre le sous-espace R^I_b des applications à valeur bornée de I dans R. Les points extrémaux ou *sommets* de l'hypercube sont les points a pour lesquels $|a_i| = 1$. Le cône d'appui autour du sommet a tel que $a_i = -1$ pour tout $i \in I$ se déduit par translation du cône C, donc l'*hypercube n'est pas un polyèdre convexe.* Soit R^I_f le sous-espace engendré par les sommets de l'hypercube. C'est l'ensemble des points x tels que les x_i ne prennent qu'un nombre fini de valeurs différentes; R^I_f contient $R^{(I)}$.

Théorème. — *La trace de* C *sur* R^I_f *est une pyramide simpliciale généralisée* S.

La trace de S sur tout sous-espace de R^I_f contenant $R^{(I)}$ est une pyramide simpliciale généralisée :

a. La trace de S sur $R^{(I)}$ est une pyramide simpliciale ordinaire, enveloppe convexe de l'ensemble de ses arêtes et sans point intérieur.

b. Soit E_1 le sous-espace engendré par $R^{(I)}$ et le sommet a_1 tel que $(a_1)_i = 1$ pour tout $i \in I$; la pyramide obtenue S_1 est l'exemple considéré dans (²), où I était supposé dénombrable. S_1 *a un point intérieur; tout point non situé dans* $R^{(I)}$ *a une facette de codimension finie. Toutes les pyramides simpliciales généralisées qui possèdent un point intérieur et pour lesquelles la pseudo-base associée engendre un hyperplan sont isomorphes à* S_1. Soit H′

un hyperplan d'appui strict de la trace S' de S_1 sur $R^{(I)}$; le cône d'appui de S_1 autour de H' n'est pas fermé. *Si* I *est dénombrable,* S_1 *possède des hyperplans d'appui strict. Si* I *n'est pas dénombrable,* S_1 *ne possède pas d'hyperplan d'appui strict.* S_1 *est une pyramide propre mais non stricte.*

c. Soit E_2 le sous-espace engendré par R^I et les sommets a_1 et a_2 tel que $(a_2)_i = 1$ pour tout $i \in I_1$ et $(a_2)_i = -1$ pour tout $i \in I_2$, où I_1 et I_2 sont deux parties infinies de I. Une base de E_2 est constituée des vecteurs $(\varepsilon_i)_{i \in I}$, a_1, a_2. La trace S_2 de S sur E_2 est une *pyramide simpliciale généralisée.* Le cône d'appui de S_2 autour du sous-espace R^I est l'ensemble des points y tels que $y_1 + y_2 \geqq 0$, $y_1 - y_2 \geqq 0$, où y_1 et y_2 sont les coordonnées de y par rapport aux vecteurs a_1 et a_2 de la base considérée. Soit S'_2 la trace de S_2 sur l'hyperplan K défini par $y_1 = y_2$; K est hyperplan d'appui extrême de S; S'_2 *est une pyramide simpliciale généralisée dans* K, *pour laquelle la codimension du sous-espace* R^I *engendré par la pseudo-base est* 1, *mais qui n'a pas de point intérieur. La facette d'un point non situé dans* $R^{(I)}$ *est de dimension infinie et de codimension infinie.*

3. *Polyèdres sans sommets.* — *a.* Reprenons les notations du début de 2. Soit H un hyperplan quelconque de E, H' sa trace sur E', S_H la trace de S sur H; S est une pyramide convexe dont les facettes de dimension finie ont pour réunion $S' \cap H'$, où S' est la trace de S sur E'. En général, S_H n'est pas une pyramide simpliciale généralisée. Si $S' \cap H'$ est une facette de dimension k de S', S_H *a des facettes de dimension inférieure ou égale à* k, *puis des facettes de dimension infinie,* lorsque S_H a des points situés dans le complémentaire de E'. Si H' est variété d'appui strict de S' et si S contient un point non situé dans E', alors S_H *est une pyramide convexe sans arêtes dont tout point a une facette de dimension infinie* (de codimension finie dans le cas de l'exemple 2 *b*, de codimension infinie dans le cas de l'exemple 2 *c*); la trace de S_H sur un hyperplan affine parallèle à H' sera un *polyèdre convexe pseudo-borné* P *sans point extrémal*; l'enveloppe convexe de P et du point O sera un *polyèdre convexe pseudo-borné ayant un seul point extrémal*; on obtiendra aussi une pyramide convexe sans arêtes qui engendre E en prenant la trace de S sur le demi-espace H^- limité par l'hyperplan H et qui ne contient pas S'.

b. Soit A (resp. A_1) la trace de l'hypercube sur $R^{(I)}$ (resp. E_1); A_2 l'ensemble des points x de R^I tels que $0 \leqq x_i \leqq 1$ pour tout $i \in I$. Alors, A, A_1, A_2 sont des *polyèdres convexes propres pseudo-bornés non stricts* (généralisations du cube). Toutes les facettes de A sont de codimension finie; A_1 possède des points extrémaux; A_2 est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

(1) A. Bastiani, *Comptes rendus*, 247, 1958, p. 1943; 248, 1959, p. 175.
(2) A. Bastiani, *Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle*, 1958, p. 1901-1947.

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 248, p. 2695-2697, séance du 11 mai 1959.

FACULTÉ des SCIENCES de PARIS
SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES
Quatrième année 1936-37
Travaux de M. Élie CARTAN

/9/

LES GROUPES DE LIE A r PARAMÈTRES

par Charles EHRESMANN

Exposés faits les lundis 25 Janvier et 15 Février 1937

Je me propose d'exposer les théorèmes généraux de la théorie des groupes de Lie à r paramètres, c'est-à-dire des groupes continus finis dans la terminologie de Lie. La plus grande partie de mon exposé est donc consacrée aux trois théorèmes fondamentaux de Lie et aux propriétés qui s'y rattachent. A la théorie classique de Lie j'ajouterai des résultats très importants qui sont principalement dûs à M. Cartan. Comme la notion de groupe de Lie est assez complexe, je rappellerai d'abord un certain nombre de définitions; par enrichissement de la notion primitive de groupe nous arriverons à la notion de groupe de Lie. Ces préliminaires me permettront aussi d'introduire les notations employées par la suite. Les chiffres romains entre parenthèses renvoient à l'index bibliographique.

DÉFINITIONS

GROUPE DE TRANSFORMATIONS.

Soient $x, x', \dots$ les éléments ou points d'un ensemble E et soit G un ensemble de transformations ponctuelles biunivoques de E en lui-même. Les transformations de G étant désignées par $s, t, s', t', \dots,$ l'équation de la transformation s peut s'écrire symboliquement

$$x' = s\,x\,.$$

On passe de x' à x par la transformation dite *transformation inverse* dont l'équation sera écrite sous la forme

$$x = s^{-1} x'.$$

L'équation

$$x' = s'(sx)$$

définit une transformation appelée *produit* des transformations s et s'. On dit que l'ensemble de transformations G forme un *groupe* lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes :

a) l'ensemble G contient le produit de deux transformations quelconques de G

$$(1) \qquad x' = s'(sx) = s''x\,, \quad s, s', s'' \in G\,.$$

b) G contient la transformation inverse d'une transformation quelconque de G

$$x = s^{-1} x' = s'x'\,, \quad s, s' \in G\,.$$

Il résulte de ces deux axiomes que G contient la transformation identique, qui sera désignée par i :

$$x = i\,x\,.$$

GROUPE ABSTRAIT.

L'équation (1) définit dans l'ensemble G une loi de composition qui fait correspondre, au couple ordonné (s, s') de deux éléments s et s', un élément s'' appelé *produit*. On écrit $s'' = s's$. Cette loi de composition satisfait aux axiomes suivants:

a) associativité :

$$s''(s's) = (s''s')s\,.$$

b) Il existe un élément i, appelé élément unité, tel que

$$s = is = si\,.$$

c) A chaque élément s correspond un élément s^{-1} de G tel que

$$s^{-1} s = s\,s^{-1} = i\,.$$

On peut énoncer ces axiomes sans supposer que les éléments de G soient des transformations. Tout ensemble d'éléments dans lequel est définie une loi de composition satisfaisant aux axiomes précédents est appelé *groupe abstrait.*

A tout groupe de transformations correspond un groupe abstrait. Réciproquement, tout groupe abstrait admet une *réalisation* par un groupe de transformations : c'est-à-dire il existe un groupe de transformations dont les éléments sont en correspondance biunivoque avec ceux du groupe abstrait donné, cette correspondance respectant la loi de composition. Un exemple important d'une telle réalisation s'obtient de la façon suivante:

la loi de composition du groupe abstrait G, écrite sous la forme

$$t' = s\,t \qquad (s, t, t' \in G)$$

définit dans G une transformation ponctuelle biunivoque $(t \longleftrightarrow t')$ associée à un élément s donné. Cette transformation étant désignée par $\overleftarrow{s}$, on a

$$\overleftarrow{s'}\,\overleftarrow{s} = \overleftarrow{s'\,s}\,.$$

L'ensemble des transformations $\overleftarrow{s}$ forme donc un groupe de transformations qui est bien une réalisation de G, et qu'on appelle le *premier groupe des paramètres* de G. La loi de composition écrite sous la forme

$$t' = t\,s \qquad (s, t, t' \in G)$$

définit une transformation ponctuelle $(t \longleftrightarrow t')$ associée à s que nous désignons par $\overrightarrow{s}$. L'ensemble des transformations $\overrightarrow{s}$ forme encore un groupe. On l'appelle le *deuxième groupe des paramètres;* mais ce n'est plus une réalisation de G, car on a : $\overrightarrow{s'}\,\overrightarrow{s} = \overrightarrow{s\,s'}$.

GROUPE ADJOINT.

Soit $\tilde{s}$ la transformation $(t \longleftrightarrow t')$ définie dans le groupe abstrait G par

$$t' = s\,t\,s^{-1} \qquad (s, t, t' \in G)\,.$$

On a : $\tilde{s}'\,\tilde{s} = \widetilde{s's}$. L'ensemble des transformations $\tilde{s}$ forme donc un groupe qu'on appelle *le groupe adjoint* de G. Lorsque s est échangeable avec tout élément t, la transformation $\tilde{s}$ est la transformation identique. L'ensemble des éléments s qui jouissent de cette propriété forme un sous-groupe γ appelé le *centre* de G. Lorsque γ se réduit à l'élément unité, le groupe adjoint est une réalisation de G. Un sous-groupe g, de G est dit *invariant* lorsqu'il est invariant par rapport au groupe adjoint de G. Si g est un sous-groupe invariant de G, on sait qu'on peut définir un *groupe-quotient* désigné par $^{G}/_{g}$. Si γ est le centre de G, le groupe adjoint de G est une réalisation du groupe quotient $^{G}/_{\gamma}$.

GROUPE TOPOLOGIQUE.

Un groupe topologique est un groupe abstrait dans lequel on a défini une topologie telle que le point $s^{-1}s'$ soit une fonction continue du couple de points (s, s'). On en déduit que s^{-1} est une fonction continue de s et que $s\,s'$ est une fonction continue du couple (s, s'). En particulier, lorsque l'espace topologique formé par G est une variété topologique à r dimensions, nous dirons que G est un *groupe abstrait à r paramètres.*

GROUPE DE TRANSFORMATIONS CONTINU À r PARAMÈTRES.

C'est un groupe de transformations G satisfaisant aux conditions suivantes :

a)Les transformations de G sont définies dans une variété topologique E_n à n dimensions.

b) En appelant $\mathcal{G}$ le groupe abstrait correspondant, on a défini dans $\mathcal{G}$ une topologie qui en fait un groupe continu abstrait à r paramètres.

c)L'équation de la transformation s étant

$$x' = s\,x \qquad (x, x' \in E_n\,,\ s \in \mathcal{G}),$$

le point x' est une fonction continue des deux points x et s.

NOYAU DE GROUPE DE TRANSFORMATIONS CONTINU À r PARAMÈTRES.

Souvent, on est conduit à considérer un ensemble de transformations G qui ne forme pas un groupe continu au sens précédent, mais qui satisfait aux conditions suivantes :

a) Les transformations de G sont définies dans un domaine D d'une variété topologique E_n :

$$x' = s\,x \qquad (x \in D\,,\ x' \in E_n\,,\ s \in G).$$

b) Dans l'ensemble G est définie une topologie qui en fait une variété à r dimensions.

c) G contient la transformation identique : $x = i\,x$.

d) Il existe dans G un voisinage Δ de l'élément i tel que, si s et s' appartiennent à Δ, on ait :

$$x' = s'(s\,x) = (s's)x$$

$(s's)$ étant un élément s'' de G, pour tout x tel que $s'(s\,x)$ soit défini.

e) Si s appartient à Δ, la transformation inverse de $x' = s\,x$ est

$$x = s^{-1}x' = s'x'$$

où s' est un élément de G, pour tout x tel que $s\,x \in D$.

f) Le point $x' = s\,x$ est une fonction continue des deux points s et x.

L'ensemble de transformations G satisfaisant aux conditions précédentes est appelé : *noyau de groupe de transformations continu, à r paramètres*. Par exemple, les transformations formant un voisinage de la transformation identique dans un groupe de transformations continu à r paramètres constituent un noyau de groupe.

NOYAU DE GROUPE ABSTRAIT CONTINU À r PARAMÈTRES.

C'est un ensemble d'éléments G satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Dans l'ensemble G est définie une topologie qui en fait une variété à r dimensions.

b) Dans un voisinage Δ d'un point i de G, on a défini une loi de composition qui fait correspondre au couple de deux points (s, s') de Δ un point ss' de G.

c) Lorsque $s, s', s'', (s's), (s''s')$ appartiennent à Δ on a :

$$s''(s's) = (s''s')s .$$

d) $$si = is = s \qquad (s \in \Delta).$$

e) A chaque élément s de Δ correspond un élément s^{-1} de G tel que

$$ss^{-1} = s^{-1}s = i .$$

f) Le point $s^{-1}s'$ est une fonction continue des deux points s et s'.

Par exemple un voisinage de l'élément unité d'un groupe continu abstrait à r paramètres forme un noyau de groupe.

A tout noyau de groupe de transformations correspond un noyau de groupe abstrait. Réciproquement tout noyau de groupe abstrait admet des réalisations par des noyaux de groupe de transformations.

La notion de groupe de Lie fait intervenir des notions de géométrie différentielle en plus des notions précédentes. Je rappelle qu'une *variété différentiable* est une variété topologique V_n dans laquelle on a défini un ensemble de systèmes de coordonnées locales (système de coordonnées locales = correspondance topologique entre un domaine de V_n et un domaine de l'espace euclidien) tel que tout point de V_n figure dans l'un d'eux au moins et tel que deux systèmes de coordonnées qui sont définis dans un même domaine de V_n se correspondent par une transformation de coordonnées continûment différentiable. (Convenons de dire toujours différentiable, au lieu de continûment différentiable.) Lorsque chacune de ces transformations de coordonnées locales est p fois différentiable ou analytique, la *variété* V_n *est dite* p *fois différentiable* ou *analytique*. Dans une variété p fois différentiable se trouvent définies les fonctions q fois différentiables, où $p \geq q$. Dans une variété analytique se trouvent définies les fonctions q fois différentiables, où q est quelconque, ainsi que les fonctions analytiques.

GROUPE ABSTRAIT DIFFÉRENTIABLE.

Nous dirons qu'un groupe abstrait continu à r paramètres est p fois différentiable lorsque l'on peut choisir des systèmes de coordonnées locales avec lesquelles la variété du groupe soit p fois différentiable, le produit st de deux éléments s et t étant alors une fonction p fois différentiable des deux points s et t. On définit de même la notion de *groupe abstrait analytique*. Pour qu'un groupe soit p fois différentiable, il faut et il suffit qu'il existe au voisinage de l'élément unité un système de coordonnées locales par rapport auquel le produit st soit p fois différentiable par rapport à s et t.

GROUPE ABSTRAIT DE LIE.

C'est un groupe abstrait deux fois différentiable. Nous montrerons plus loin qu'on peut toujours introduire des coordonnées locales telles qu'un groupe abstrait de Lie soit analytique.

GROUPE DE TRANSFORMATIONS DE LIE.

Soit G un groupe de transformations continu à r paramètres opérant dans un espace E_n. Soit $\mathcal{G}$ le groupe abstrait continu correspondant, et écrivons l'équation de la transformation s sous la forme :

$$x' = s\,x \qquad (x, x' \in E_n \ , s \in \mathcal{G}).$$

Nous dirons que G est p fois différentiable (analytique) lorsqu'on peut choisir dans E_n et $\mathcal{G}$ des systèmes de coordonnées locales avec lesquelles ces variétés soient p fois différentiables (analytiques), le point x' étant alors une fonction p fois différentiable (analytique) des points s et x. On dit que G est un *groupe de transformations de Lie* lorsqu'il est deux fois différentiable.

On démontre facilement le théorème suivant :

Si G est un groupe de transformations p fois différentiable (analytique), le groupe abstrait $\mathcal{G}$ correspondant est également p fois différentiable (analytique).

On définit de même les notions de *noyau de groupe abstrait de Lie* et de *noyau de groupe de transformations de Lie.* Les résultats que nous indiquerons à propos des groupes de Lie sont le plus souvent valables sans modification notable dans le cas des noyaux de groupes de Lie; il sera inutile de le faire remarquer dans chaque cas.

Lie lui-même s'est borné en principe aux groupes donnés sous forme analytique. Les axiomes que nous adoptons pour définir la notion de groupe de Lie sont à peu près ceux d'un mémoire de Schur (II). Nous démontrerons plus loin le résultat important dû à Schur que tout groupe de transformations de Lie qui est transitif peut être mis sous la forme analytique; mais il n'en est pas toujours de même pour les groupes intransitifs.

ISOMORPHISME.

Un isomorphisme entre deux groupes abstraits est une correspondance biunivoque entre les éléments de l'un et ceux de l'autre, cette correspondance respectant la loi de composition. Lorsqu'il s'agit de deux groupes topologiques ou de deux groupes différentiables (analytiques), on a les notions *d'isomorphisme topologique* ou *d'isomorphisme différentiable (analytique)* en plus de l'isomorphisme ordinaire.

SIMILITUDE OU ÉQUIVALENCE DE DEUX GROUPES DE TRANSFORMATIONS.

Deux groupes de transformations G et G' qui opèrent respectivement dans les ensembles E et E' sont dits *semblables* ou *équivalents* lorsqu'il existe entre E et E' une correspondance biunivoque transformant G en G'. Il y a également lieu de considérer les notions d'équivalence topologique, différentiable ou analytique.

LES DEUX ESPECES D'EQUIPOLLENCE DANS UN GROUPE ABSTRAIT DIFFÉRENTIABLE

On sait qu'à chaque point x d'un espace différentiable est associé un espace linéaire d'origine x, appelé espace linéaire tangent. Un point quelconque de cet espace linéaire peut être représenté par $x+dx$, et dx en désigne un vecteur d'origine x. A une transformation différentiable $(x \to y)$ correspond une transformation linéaire de l'espace tangent en x dans l'espace tangent en y. Soit alors G un groupe abstrait différentiable à r paramètres et considérons le premier groupe des paramètres qui est défini par :

$$s' = ts \qquad (\textit{transformation } s \leftrightarrow s').$$

A la transformation $(s \leftrightarrow s')$, qui est différentiable, correspond une transformation linéaire entre les espaces tangents en s et en s' que nous représentons par :

$$s' + ds' = t(s + ds) \qquad (\textit{transformation } ds \leftrightarrow ds').$$

Cette transformation fait correspondre d'une façon biunivoque à tout vecteur ds d'origine s un vecteur ds' d'origine s'; de plus elle est bien déterminée lorsque les points s et s' sont donnés. La relation involutive et transitive ainsi déterminée dans l'ensemble des vecteurs de la variété G sera appelée *équipollence de première espèce*. En particulier, le vecteur ds d'origine s est équipollent de première espèce au vecteur $\vec{\omega}$ d'origine i et d'extrémité $s^{-1}(s + ds)$. Dans l'espace tangent en i introduisons un repère cartésien d'origine i (c'est-à-dire r vecteurs de base). Les composantes du vecteur $\vec{\omega}$ seront des formes linéaires du vecteur ds ; nous les désignons par $\omega_i(s, ds)$ où $i = 1, 2, \dots r$. Pour que deux vecteurs soient équipollents de première espèce, il faut et il suffit que l'on ait :

$$\omega_i(s', ds') = \omega_i(s, ds) \qquad (i = 1, 2 \dots r).$$

Ces équations différentielles s'appellent les *équations de définition du premier groupe des paramètres.*

De la même façon, les transformations linéaires

$$s' + ds' = (s + ds)t \qquad (\textit{transformation } ds \leftrightarrow ds')$$

qui sont associées aux transformations

$$s' = st \qquad (\textit{transformation } s \leftrightarrow s')$$

du deuxième groupe des paramètres, définissent dans l'ensemble des vecteurs de G une relation appelée *équipollence de deuxième espèce*. En particulier, appelons $\vec{\varpi}$ le vecteur d'origine i et d'extrémité $(s+ds)s^{-1}$ qui est équipollent de deuxième espèce au vecteur ds d'origine s. Les composantes de $\vec{\varpi}_i$ sont r formes linéaires $\varpi_i(s, ds)$. L'équipollence de deuxième espèce s'exprime par le système d'équations

$$\varpi_i(s', ds') = \varpi_i(s, ds) \qquad (i = 1, 2 \dots r).$$

Ce sont les *équations de définition du deuxième groupe des paramètres.*

La transformation $s' = s^{-1}$ qui est également différentiable, échange les deux systèmes d'équipollence. On montre facilement qu'elle vérifie le système différentiel :

$$\omega_i(s, ds) + \varpi_i(s', ds') = 0.$$

Il est important de remarquer que les r formes $\omega_i(s, ds)$ sont linéairement indépendantes pour tout point s ; il en est de même des formes $\varpi_i(s, ds)$.

GROUPE ADJOINT LINÉAIRE.

La transformation

$$t' = s\,t\,s^{-1} \qquad (\textit{transformation } t \leftrightarrow t')$$

du groupe adjoint de G est évidemment différentiable. Comme le point i reste fixe, à cette transformation est associée une transformation linéaire opérant sur les vecteurs d'origine i. Cette transformation linéaire fait correspondre au vecteur $\vec{\omega}(s, ds)$ le vecteur $\vec{\varpi}(s, ds)$. Ses équations s'obtiennent donc en exprimant les formes $\varpi_i(s, ds)$ en fonction des formes $\omega_i(s, ds)$:

$$\varpi_i(s, ds) = a_{ij}\,\omega_j(s, ds).$$

L'ensemble de ces transformations forme un groupe appelé *groupe adjoint linéaire.*

PREMIER THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE

TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES.

Soit G une famille de transformations opérant dans une variété différentiable E_n à n dimensions et correspondant d'une façon biunivoque aux points d'une variété différentiable $\mathcal{G}$ à r dimensions. La transformation qui correspond au point s de $\mathcal{G}$ étant définie par

$$x' = sx \qquad (x, x' \in E_n;\ s \in \mathcal{G}),$$

nous supposons que x' est une fonction différentiable de s et x. En considérant x' comme une fonction de s seul, la différentielle de cette fonction fait correspondre à tout vecteur ds d'origine s un vecteur dx' d'origine x'. Cette correspondance, qui est linéaire, peut s'écrire

$$x' + dx' = (s + ds)\,x.$$

En remplaçant x par $s^{-1}x'$, on a :

$$(1) \qquad x' + dx' = (s + ds)s^{-1}x'.$$

A tout vecteur ds d'origine s correspond ainsi dans E_n un champ de vecteurs X qui dépend de s et de ds. Un champ de vecteurs X peut aussi être considéré comme une transformation infinitésimale, c'est-à-dire une transformation qui fait correspondre à chaque point x' un point $x' + dx'$, où $dx' = X(x')$. Par $X(x')$ nous représentons le vecteur du champ X dont l'origine est en x'.

En général, la transformation infinitésimale (1), c'est-à-dire le champ de vecteurs X, dépend de $2r$ paramètres numériques. Mais supposons maintenant que G soit un groupe de transformations différentiable. Alors $\mathcal{G}$ est un groupe abstrait différentiable. La transformation infinitésimale X dépendra uniquement du point $(s + ds)s^{-1}$, c'est-à-dire du vecteur que nous avons désigné par $\vec{\varpi}(s, ds)$. En appelant $\varpi_i(s, ds)$ les r composantes du vecteur $\vec{\varpi}(s, ds)$ par rapport à un repère cartésien dans l'espace tangent à $\mathcal{G}$ en i, on aura $X = \varpi_i X_i$. (Nous supprimons le signe Σ pour la sommation par rapport à un indice qui se répète deux fois). L'équation *(1)* peut donc se mettre sous la forme

$$dx' = \varpi_i(s, ds)X_i(x').$$

Les r champs de vecteurs X_i sont linéairement indépendants : c'est-à-dire il n'existe pas des constantes c_i non toutes nulles telles qu'on ait

$$c_i X_i = 0.$$

En effet, supposons qu'il existe des constantes telles que $c_i X_i = 0$, et considérons le système différentiel :

$$\frac{\varpi_1}{c_1} = \frac{\varpi_2}{c_2} = \dots = \frac{\varpi_r}{c_r}$$

Lorsque le point s décrit dans $\mathcal{G}$ une courbe intégrale de ce système, la transformation $x' = sx$ ne change pas, *ce qui est contraire à nos hypothèses.*

On a des résultats analogues lorsqu'on considère la transformation infinitésimale :

$$x + dx = s^{-1}(s + ds)x.$$

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant :

PREMIER THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE. *Soit un groupe de transformations différentiable à r paramètres, et soit $x' = sx$ l'équation de la transformation s de ce groupe. La transformation infinitésimale*

$$x' + dx' = (s + ds)s^{-1}x'$$

peut se mettre sous la forme

$$(a) \qquad dx' = \varpi_i(s, ds) X_i(x'),$$

où les X_i *désignent* r *champs de vecteurs (ou transformations infinitésimales) linéairement indépendants, les* $\varpi_i(s, ds)$ *étant* r *formes de Pfaff linéairement indépendantes en tout point* s.

La transformation infinitésimale

$$x + dx = s^{-1}(s + ds)x$$

peut se mettre sous la forme

$$(b) \qquad dx = \omega_i(s, ds) X_i(x)$$

où les $\omega_i(s, ds)$ *sont également* r *formes de Pfaff linéairement indépendantes en chaque points* s.

En considérant dans l'équation $x' = sx$ *le point* x *comme fixe et* x' *comme fonction de* s, *cette fonction* x' *satisfait à l'équation différentielle* (a). *En considérant* x' *comme fixe et* x *comme fonction de* s, *cette fonction* x *satisfait à l'équation différentielle*

$$(b') \qquad dx + \varpi_i(s, ds) X_i(x) = 0 .$$

REMARQUES. Les transformations infinitésimales considérées dans ce théorème s'appellent les transformations infinitésimales du groupe considéré. Elles forment une famille linéaire à r paramètres, ou un espace vectoriel à r dimensions.

Soit X un champ de vecteurs dans E_n et f une fonction numérique différentiable définie dans E_n. Lorsqu'on pose $dx = X$, la différentielle df au point x prend une valeur numérique déterminée que Lie désigne par le symbole Xf. En choisissant un système de coordonnées différentielles $x_1, x_2 \dots x_n$ dans E_n, le vecteur X est défini par des composantes $X^1, X^2 \dots X^n$ et on a

$$Xf = X^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + X^n \frac{\partial f}{\partial x_n} .$$

La transformation infinitésimale que nous désignons par la lettre X est habituellement désignée par le symbole Xf.

RÉCIPROQUE DU PREMIER THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE. *Soit* G *une famille de transformations opérant dans une variété deux fois différentiable* E_n *telle que chaque transformation corresponde à un point* s *d'une variété deux fois différentiable* $\mathcal{G}$ *à* r *dimensions, l'équation de la transformation correspondant au point* s *étant*

$$x' = sx \qquad (x, x' \in E_n ; s \in \mathcal{G}).$$

Supposons que les conditions suivantes soient remplies :

1) Les transformations de G sont définies pour les points x d'un domaine D de E_n.

2) G contient la transformation identique $i : x = ix$.

3) Le point x' est une fonction deux fois différentiable des points s et x.

4) En considérant x comme fixe et x' comme fonction de s, cette fonction satisfait à l'équation différentielle :

$$dx' = \varpi_i(s, ds) X_i(x'),$$

les X_i étant r champs de vecteurs linéairement indépendants et les $\varpi_i(s, ds)$ étant r formes de Pfaff linéairement indépendantes en chaque point s.

CONCLUSIONS : *La famille G forme un noyau de groupe de transformations défini dans le domaine D.*

De l'indépendance linéaire des X_i et des ϖ_i il résulte d'abord qu'il existe dans la variété $\mathcal{G}$ un voisinage v de i tel qu'à deux points distincts de v correspondent deux transformations distinctes de la famille G. Considérons ensuite les deux transformations

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax \\ x'' &= sx' \end{aligned}\right\} \qquad (a, s \in v).$$

Supposons que le point s décrive dans $\mathcal{G}$ un arc deux fois différentiable, allant de i à b ; le point s sera une fonction deux fois différentiable $\varphi(t)$ d'un paramètre numérique t. En posant $s = \varphi(t)$, le système différentiel

$$(1) \qquad \varpi_i(s', ds') = \varpi_i(s, ds), \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

devient un système d'équations différentielles déterminant s' en fonction de t et en admettant une solution unique pour des conditions initiales données. A l'arc $\widehat{ib}$ décrit par s correspond ainsi un arc bien déterminé d'origine a décrit par s'. Sur cet arc le point s' est une fonction bien déterminée du point s de l'arc $\widehat{ib}$. Considérons la transformation :

$$x''' = s'x.$$

En supposant x fixe, les points x'' et x''' sont des fonctions de t qui satisfont toutes deux à l'équation différentielle

$$dx = \varpi_i(s, ds) X_i(x), \quad \text{où} \quad s = \varphi(t).$$

Comme pour $s = i$, les points x'' et x''' sont confondus avec le point ax, les points x'' et x''' sont confondus quel que soit t. Donc :

$$x''' = s'x = s(ax)$$

ce qui constitue un des axiomes vérifiés par un noyau de groupe de transformations. De la même façon le système *(1)* fait correspondre à tout arc $\widehat{ai}$ un arc $\widehat{ia'}$ et on a :

$$a'(ax) = ix = x .$$

On voit ainsi que G satisfait à tous les axiomes vérifiés par un noyau de groupe de transformations.

Si la famille G ne contient pas la transformation identique mais satisfait à toutes les autres hypothèses de l'énoncé, les transformations

$$x' = s\,c^{-1}x$$

où s est supposé voisin de c, forment un noyau de groupe.

REMARQUE. Soit G un groupe différentiable. En résolvant les équations de définition du deuxième groupe de paramètres

$$\varpi_i(s', ds') = \varpi_i(s, ds)$$

par rapport à ds', on obtient les transformations infinitésimales du premier groupe des paramètres sous la forme

$$ds' = \varpi_i(s, ds)A_i(s').$$

En résolvant les équations

$$\omega_i(s', ds') = \omega_i(s, ds)$$

par rapport à ds', on obtient les transformations infinitésimales du deuxième groupe des paramètres sous la forme

$$ds' = \omega_i(s, ds)B_i(s') .$$

EXEMPLES. *Groupes de Lie à un paramètre.* Soit G un groupe abstrait différentiel à un paramètre. La variété G est alors une droite ou un cercle. Le premier groupe des paramètres est défini par une seule équation différentielle :

(1) $$\omega(s', ds') = \omega(s, ds) .$$

On peut introduire dans G un paramètre t tel que $\omega(s, ds) = dt$. Alors, l'équation *(1)* devient : $dt' = dt$.

La loi de composition du groupe est donc $t' = t + t_1$ dans le cas où la variété G est une droite, et $t' = t + t_1$ *(mod. 1)* dans le cas où G est un cercle. Le groupe est donc abélien. Remarquons que l'on a :

$$\varpi(s, ds) = \omega(s, ds) = dt .$$

Soit maintenant

$$(2) \qquad x' = sx \qquad (x, x' \in E_n ; s \in G)$$

la transformation générale d'un groupe de transformations de Lie à un paramètre. La transformation infinitésimale associée à $(s + ds)s^{-1}$ sera, en introduisant dans G un paramètre numérique convenable t :

$$(3) \qquad dx' = dt\, X(x').$$

L'équation (2) est la solution de l'équation différentielle (3) telle que pour $t = 0$ on ait $x' = x$. Nous dirons que le groupe de transformations considéré est engendré par la transformation infinitésimale X.

Réciproquement, toute transformation infinitésimale définie dans E_n par un champ de vecteurs X supposé différentiable, engendre un noyau de groupe de transformations qu'on obtient en prenant la solution de l'équation différentielle (3) qui se réduit à $x' = x$ pour $t = 0$.

GÉNÉRATION D'UN GROUPE DE LIE PAR SES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES.

Soit G un groupe abstrait de Lie à r paramètres et considérons un sous-groupe g représenté par une courbe différentiable passant par le point i de G. Nous dirons que g est un sous-groupe de Lie à un paramètre. En remarquant que tout vecteur tangent à g est équipollent de première et de deuxième espèce à un vecteur d'origine i et tangent à g, on voit que la courbe g est une courbe intégrale du système différentiel

$$(1) \qquad \omega_i(s, ds) = a_i\, dt \qquad (a_i = Cte, i = 1, 2, \dots, r)$$

ou encore du système différentiel

$$\varpi_i(s, ds) = a_i\, dt.$$

Soit $s = f(a_i, t)$ la solution de (1) telle que $s = i$ pour $t = 0$; cette solution fournit g. En réalité t n'intervient que par les produits $a_i t$. En donnant aux constantes a_i tous les systèmes de valeurs possibles, le point $s = f(a_1 t, \dots, a_r t)$ décrit tous les sous-groupes de Lie à un paramètre. Si l'on pose $t = 1$, on obtient encore tous les points de ces sous-groupes. Les nombres a_i sont appelés les *paramètres canoniques* du point $s = f(a_1, \dots, a_r)$. Dans un voisinage suffisamment petit de i, les paramètres canoniques forment un système de coordonnées locales deux fois différentiables dans la variété G. Par rapport à ce système de coordonnées les sous-groupes de Lie à un paramètre sont représentés par les droites passant par i. Remarquons que le système des paramètres canoniques est déterminé à une transformation linéaire homogène près.

Supposons maintenant que G soit un groupe de transformations de Lie, réalisation du groupe abstrait $\mathcal{G}$. Les transformations d'un sous-groupe de Lie à un paramètre s'obtiennent en remplaçant dans l'équation différentielle

$$dx' = \varpi_i(s, ds) X_i(x')$$

les formes ϖ_i par $a_i\,dt$, ce qui donne

$$dx' = dt(a_i X_i(x'))$$

et en prenant la solution $x' = f(a_1 t, \ldots, a_r t, x)$ qui se réduit à $x' = x$ pour $t = 0$. Le paramètre t intervient seulement par les produits $a_i t$. La transformation de paramètres canoniques a_i s'obtient en posant $t = 1$ dans la solution ainsi considérée. Toute transformation de G voisine de la transformation identique (au sens de la topologie de $\mathcal{G}$) appartient à un sous-groupe de Lie à un paramètre bien déterminé et correspond à des paramètres canoniques bien déterminés. On dit que G est engendré par la famille des transformations infinitésimales $a_i X_i$.

Une transformation de G non voisine de la transformation identique peut appartenir à plusieurs sous-groupes de Lie à un paramètre. Il peut même arriver qu'elle n'appartienne à aucun sous-groupe de Lie à un paramètre. Par exemple, considérons le groupe linéaire réel unimodulaire de transformation générale :

$$\begin{cases} x' = a\,x + b\,y \\ y' = a'x + b'y \end{cases} \qquad ab' - ba' = 1 .$$

Une transformation dont l'équation caractéristique admet deux racines négatives ne peut être engendrée par aucune transformation infinitésimale de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = \alpha\,x' + \beta\,y' \\[2ex] \dfrac{dy'}{dt} = \alpha' x' + \beta' y'. \end{cases}$$

On peut indiquer une classe intéressante de groupes dont chacun est engendré en entier par ses transformations infinitésimales. Ce sont les groupes semi-simples clos (E. Cartan, IV). Un tel groupe est caractérisé par le fait que la forme quadratique

$$\varphi(a) = c_{ikh}\, c_{jhk}\, a_i a_j$$

est définie. Dans la variété du groupe on peut alors définir une métrique riemannienne en posant :

$$d\sigma^2 = c_{ikh}\, c_{jhk}\, \omega_i(s, ds)\, \omega_j(s, ds).$$

Les géodésiques de cette métrique riemannienne sont les sous-groupes de Lie à un paramètre ainsi que les courbes qui s'en déduisent par les transformations du premier groupe des paramètres (E. Cartan, III, chap. 3). L'espace de Riemann défini est *normal*, c'est-à-dire il jouit de la propriété suivante : sur toute géodésique on peut reporter, à partir d'un point donné, une longueur donnée arbitraire. La propriété fondamentale d'un espace de Riemann normal est la suivante : deux points donnés arbitraires de cet espace sont toujours reliés par un arc de géodésique. Cela veut dire que tout élément d'un groupe semi-simple clos appartient au moins à un sous-groupe de Lie à un paramètre.

LES ÉQUATIONS DE MAURER-CARTAN.

Soit G un groupe abstrait de Lie à r paramètres et considérons les équations de définition des deux groupes des paramètres :

$$\omega_i(s', ds') = \omega_i(s, ds), \tag{1}$$

$$\varpi_i(s', ds') = \varpi_i(s, ds), \tag{2}$$

le système *(1)* est complètement intégrable et admet pour solution générale : $s' = ts$. De même, le système *(2)* est complètement intégrable, sa solution générale étant $s' = st$. On a les équations :

$$d\varpi_i = \sum_{(jk)} c_{jki} \varpi_j \wedge \varpi_k \,. \tag{3}$$

Comme le système dérivé de *(1)* est une conséquence algébrique du système *(1)*, on voit que les quantités c_{ijk} sont des constantes. On les appelle les *constantes de structure* et les équations *(3)* sont appelées *équations de Maurer-Cartan*. On aura de même les équations

$$d\omega_i = \sum_{(jk)} \bar{c}_{jki} \omega_j \wedge \omega_k \,, \tag{4}$$

où les quantités $\bar{c}_{ijk}$ sont également des constantes.
Remarquons que le système

$$\omega_i(s', ds') + \varpi_i(s, ds) = 0 \tag{5}$$

est complètement intégrable, son intégrale générale étant $s' = ts^{-1}$. On en conclut, en considérant le système dérivé de *(5)*, que $\bar{c}_{ijk} = -c_{ijk}$.

Réciproquement, supposons que, dans une variété G, à r dimensions et deux fois différentiable, on considère r formes de Pfaff $\omega_i(s, ds)$, linéairement indépendantes.
Les équations *(1)* permettent alors de définir dans G une relation d'équipollence; mais celle-ci n'est pas en général associée à un groupe de Lie. Supposons de plus que le système *(3)* soit vérifié, les quantités c_{ijk} étant des constantes. Alors le système *(1)*

est complètement intégrable; c'est-à-dire, en se bornant à un voisinage v d'un point i, il existe une solution et une seule définie pour tout point de v et transformant le point i en un point donné t. Soit $s' = ts$ cette solution. C'est la loi de composition d'un noyau de groupe dont l'élément unité est le point i. Donc pour que les équations (1) définissent un noyau de groupe de Lie, il faut et il suffit que les formes $\omega_i(s, ds)$ vérifient un système d'équations de Maurer-Cartan.

DEUXIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE.

Soit G un groupe de transformations de Lie à r paramètres. En reprenant les notations du premier théorème fondamental de Lie, considérons les équations :

$$x' = s\,x \tag{1}$$

$$dx' = \varpi_i(s, ds)X_i(x'). \tag{2}$$

L'équation différentielle (2) est complètement intégrable; l'équation (1) en fournit la solution qui se réduit à $x' = x$ pour $s = i$. L'équation (2) peut être remplacée par l'équation

$$df(x') = \varpi_i(s, ds)X_i f(x'), \tag{3}$$

où $f(x)$ est une fonction numérique arbitraire deux fois différentiable. Par dérivation extérieure de (3) on obtient l'équation :

$$0 = (d\varpi_i(s, ds))X_i f(x') + d(X_i f(x')) \wedge \varpi_i(s, ds). \tag{4}$$

Pour que (2) soit complètement intégrable, il faut et il suffit que (4) soit une conséquence algébrique de (3). En tenant compte de (3) et en posant

$$d\varpi_i = -\sum_{(jk)} c_{jki}\varpi_j \wedge \varpi_k\,, \tag{5}$$

l'équation (4) devient :

$$0 = -\sum_{(jk)} c_{jki}\varpi_j \wedge \varpi_k X_i f + \sum_{(jk)} \varpi_j \wedge \varpi_k [\,X_j(X_k f) - X_k(X_j f)\,]\,. \tag{6}$$

Etant donnés les symboles de Lie de deux transformations infinitésimales,

$$Xf = X^\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \qquad \text{et} \qquad Yf = Y^\lambda \frac{\partial f}{\partial x_\lambda}$$

nous posons :

$$[\,XY\,]f = X(Yf) - Y(Xf) = (X^\mu \frac{\partial Y^\lambda}{\partial x_\mu} - X^\lambda \frac{Y^\mu}{\partial x_\lambda})\frac{\partial f}{\partial x_\lambda}.$$

Le symbole $[\,XY\,]f$ est le symbole de Lie d'une transformation infinitésimale que nous désignerons par $[\,XY\,]$ et qui s'appelle le crochet des transformations infinitésimales X et Y. Il résulte alors de (6) :

$$(7) \qquad [X_j X_k] f = c_{jki} X_i f .$$

De *(6)* et *(7)* on conclut que les quantités c_{ijk} ne dépendent ni de s ni de x'; ce sont des constantes. Ceci démontre encore une fois les équations de Maurer-Cartan, et nous sommes arrivés à l'équation *(7)* qui constitue le deuxième théorème fondamental de Lie.

DEUXIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE. *Si $X_1, \dots, X_r$ sont r transformations infinitésimales linéairement indépendantes d'un groupe de Lie à r paramètres, on a :*

$$[X_i X_j] = c_{ijk} X_k$$

où les quantités c_{ijk} sont des constantes de structure.

RÉCIPROQUE. *Etant données, dans une variété E_n, r transformations infinitésimales différentiables et linéairement indépendantes, telles que*

$$[X_i X_j] = c_{ijk} X_k$$

où $c_{ijk} = Cte$, la famille de transformations infinitésimales $a_i X_i$ engendre un noyau de groupe de transformations de Lie à r paramètres défini dans un domaine de E_n.

Pour démontrer la réciproque, il suffit de démontrer qu'on peut déterminer dans un domaine à r dimensions r formes de Pfaff linéairement indépendantes, $\varpi_i(s, ds)$, telles que

$$(1) \qquad d\varpi_i = - \sum_{(jk)} c_{jki} \varpi_j \wedge \varpi_k .$$

En effet, ces formes étant déterminées, l'équation

$$dx' = \varpi_i(s, ds) X_i(x')$$

est complètement intégrable, et ses solutions, que nous écrivons sous forme $x' = sx$, constituent, d'après la réciproque du premier théorème de Lie, un noyau de groupe de Lie à r paramètres.

Supposons $r \leq n$. On peut trouver dans un domaine D de E_n des transformations infinitésimales $X_{r+1}, \dots, X_n$, telles que $X_1, X_2, \dots, X_n$ soient linéairement indépendantes. Alors on a identiquement :

$$df = \varpi_\alpha X_\alpha f \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

où ϖ_α sont n formes de Pfaff linéairement indépendantes dans D. Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} [X_\alpha X_\beta] = c_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma & (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n), \\ c_{ij\lambda} = 0 & (i, j = 1, \dots, r; \lambda > r). \end{cases}$$

Par dérivation extérieure de $df = \varpi_\alpha X_\alpha f$, on trouve :

$$d\varpi_\alpha = -\sum_{(\beta\gamma)} c_{\beta\gamma\,\alpha}\varpi_\beta \wedge \varpi_\gamma \,.$$

Le système

$$\varpi_\lambda = 0\,, \qquad \text{où } \lambda = r+1\,,\dots,\,n\,,$$

est complètement intégrable. On peut donc introduire de nouvelles variables $s_1, s_2, \dots, s_n$ telles que la solution générale de ce système soit :

$$s_\lambda = Cte \qquad (\lambda = r+1\,,\dots,\,n)\,.$$

Donnons aux variables s_λ, où $\lambda > r$, des valeurs constantes. Les formes ϖ_i, où $i = 1,\dots,r$, ne dépendent plus que de $s_1, \dots, s_r$ et satisfont à *(1)*.

Si $r > n$, il suffit de montrer, pour appliquer le raisonnement précédent, qu'on peut trouver r transformations infinitésimales $W_1, \dots, W_r$ définies dans une variété à N dimensions, où $N > r$, et telles qu'on ait encore $[\,W_i W_j\,] = c_{ijk} W_k$. On y arrive en considérant la variété E_N, où $N = nr$, dont chaque point est défini comme un ensemble quelconque de r points $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}$ de E_n. Un vecteur W dans E_N peut être considéré comme la somme de r vecteurs $X^{(1)}, \dots, X^{(r)}$ de E_n ayant respectivement pour origine $x^{(1)}, \dots, x^{(r)}$. Posons $W_i = X_i^{(1)} + \dots + X_i^{(r)}$. Nous avons ainsi dans E_N les transformations infinitésimales W_i qui vérifient bien les relations

$$[\,W_i W_j\,] = c_{ijk} W_k \,.$$

CALCUL DES FORMES ϖ_i ET ω_i EN FONCTION DES PARAMÈTRES CANONIQUES.

La transformation générale d'un noyau de groupe engendré par la famille de transformations infinitésimales $a_i X_i$ peut s'obtenir en intégrant l'équation :

$$dx' = a_i\,dt\,X_i(x')$$

et en prenant la solution x' fonction de t telle que $x' = x$ pour $t = 0$. Le paramètre t n'intervenant que par les produits $u_i = a_i t$, on aura l'équation de la transformation générale en fonction des paramètres u_i. Les formes $\varpi_i(u, du)$ se mettent alors sous la forme :

$$\varpi_i(u\,, du) = a_i\,dt + \bar{\varpi}_i \,.$$

Les formes $\bar{\varpi}_i$, dépendant de da_i, t et a_i, s'annulent pour $t = 0$. Les équations de Maurer-Cartan deviennent :

$$da_i \wedge dt + d\bar{\varpi}_i = -\sum_{(jk)} c_{ijk}(a_j\,dt + \bar{\varpi}_j)(a_k\,dt + \bar{\varpi}_k)\,.$$

Ecrivons que dans cette identité le coefficient de dt est nul :

$$\frac{\partial \overline{\varpi}_i}{\partial t} = da_i - c_{jki} a_j \overline{\varpi}_k .$$

C'est un système d'équations différentielles dans lequel les fonctions inconnues sont les formes $\overline{\varpi}_i$, la variable étant t. Les formes $\overline{\varpi}_i$ cherchées forment la solution telle que $\overline{\varpi}_i = 0$ pour $t = 0$. En donnant à t la valeur 1, les formes $\overline{\varpi}_i$ ainsi déterminées deviennent les formes $\varpi_i(a, da)$ exprimées en fonction des paramètres canoniques. Ecrivons le système *(1)* sous forme matricielle :

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} = (da) - A(\varpi)$$

$$(da) = \begin{pmatrix} da_1 \\ \vdots \\ da_r \end{pmatrix}, \quad (\varpi) = \begin{pmatrix} \varpi_1 \\ \vdots \\ \varpi_r \end{pmatrix}, \quad A = (A_{ik}) = (c_{jki} a_j) .$$

La solution cherchée est alors :

$$(\varpi) = \frac{e^{-A} - 1}{-A}(da) .$$

De même les formes $\omega_i(a, da)$ en fonction des paramètres canoniques s'obtiennent en intégrant le système

$$\frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial t} = da_i + c_{jki} a_j \overline{\omega}_k .$$

On trouve ainsi :

$$(\omega) = \frac{e^{A} - 1}{A}(da) .$$

Remarquons que les paramètres canoniques de deux transformations inverses sont égaux et de signes contraires et on vérifie que

$$\varpi_i(a, da) + \omega_i(-a, -da) = 0 .$$

Il est remarquable que les formes ϖ_i et ω_i aient des expressions analytiques en fonction des paramètres canoniques. Les équations de définition du premier groupe des paramètres étant analytiques, la loi de composition d'un groupe de Lie G est analytique par rapport au système de coordonnées locales formées par les paramètres canoniques. On en déduit qu'on peut toujours introduire dans la variété d'un groupe de Lie G un ensemble de systèmes de coordonnées locales par rapport auxquels le groupe G est analytique.

Nous verrons plus loin que les systèmes de coordonnées locales qui jouissent de cette propriété sont déterminés à des transformations analytiques près.

TROISIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE.

En supposant les formes ω_i exprimées en fonction des paramètres canoniques, nous pouvons dériver extérieurement les équations de Maurer-Cartan :

$$d\omega_i = \sum_{jk} c_{jki}\,\omega_j \wedge \omega_k \,. \tag{1}$$

En remarquant que $d(d\omega_i) \equiv 0$, on obtient ainsi

$$\sum_{(jk)} (c_{jki}\, d\omega_j \wedge \omega_k - c_{jki}\,\omega_j \wedge d\omega_k) = 0 \,.$$

Comme $c_{jki} = -c_{kji}$, on aura

$$2 \sum_{(jk)} c_{jki}\, d\omega_j \wedge \omega_k = 0 \,,$$

$$c_{jki}\, c_{hlj}\,\omega_h \wedge \omega_l \wedge \omega_k = 0 \,.$$

Il en résulte le

TROISIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE. *Les constantes de structure d'un groupe de Lie satisfont aux conditions suivantes, dites conditions de Lie :*

$$c_{ijk} + c_{jik} = 0 \,,$$

$$\sum_j (c_{jki}\, c_{hlj} + c_{jhi}\, c_{lkj} + c_{jli}\, c_{khj}) = 0 \,.$$

RÉCIPROQUE. *Etant donné un ensemble de constantes* c_{ijk} *où* $i, j, k = 1, 2, \ldots, r$, *satisfaisant aux conditions de Lie, il existe un noyau de groupe de Lie admettant ces constantes comme constantes de structure.*

Les conditions de Lie s'obtiennent aussi en appliquant l'identité de Jacobi :

$$[\,[XY]\,Z\,] + [\,[YZ]\,X\,] + [\,[ZX]\,Y] = 0 \,,$$

où X, Y, Z sont trois champs de vecteurs, aux transformations infinitésimales X_i d'un groupe de Lie. Mais ceci suppose que les champs de vecteurs sont deux fois différentiables, ce qui n'est pas forcément le cas pour les X_i d'un groupe de Lie.

Pour démontrer la réciproque, il suffit de déterminer dans un domaine à r dimensions, r formes de Pfaff ω_i linéairement indépendantes et satisfaisant aux équations de Maurer-Cartan. Si le problème est possible, on obtiendra les formes ω_i en prenant l'intégrale du système

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} = da_i + c_{jki}\, a_j\, \omega_k \tag{2}$$

telle que $\omega_i = 0$ pour $t = 0$, et en y posant $t = 1$.
En appelant $\overline{\omega}_i$ les formes qui forment la solution de (2) telle que $\overline{\omega}_i = 0$ pour $t = 0$,

les formes $d\bar{\omega}_i$ dans lesquelles on a posé $dt = 0$ satisfont à :

$$\frac{\partial(d\bar{\omega}_i)}{\partial t} = c_{jki}\, da_j \bar{\omega}_k + c_{jki}\, a_j\, d\bar{\omega}_k . \tag{3}$$

Le système *(3)* dans lequel on considère les formes $d\bar{\omega}_i$ comme des fonctions inconnues de t admet la solution

$$d\bar{\omega}_i = \sum_{(jk)} c_{jki} \bar{\omega}_j \wedge \bar{\omega}_k ,$$

pourvu que les conditions de Lie soient vérifiées. Cette solution satisfait aux conditions initiales : $d\bar{\omega}_i = 0$ pour $t = 0$. Donc les formes ω_i, qu'on obtient en posant $t = 1$ dans $\bar{\omega}_i$, satisfont bien aux équations de Maurer-Cartan.

ALGÈBRE DE LIE.

Les constantes de structure c_{ijk} d'un groupe de Lie ne sont pas déterminées d'une façon univoque. En effet, les transformations infinitésimales X_i qui forment une base de la famille linéaire des transformations infinitésimales peuvent être remplacées par des combinaisons linéaires indépendantes à coefficients constants; les constantes c_{ijk} subissent alors également une certaine transformation; mais dans l'espace vectoriel à r dimensions dont les éléments sont les transformations infinitésimales, on a une loi de composition bien déterminée. A deux éléments X, Y correspond un élément déterminé, le crochet $[XY]$, qui est une fonction linéaire de X et de Y et qui satisfait aux axiomes suivants :

$$[XY] = -[YX],$$
$$[[XY]Z] + [[YZ]X] + [[ZX]Y] = 0 .$$

On appelle algèbre de Lie un espace vectoriel A_r dans lequel on a défini une loi de composition $[XY]$, linéaire en X et en Y et satisfaisant aux axiomes précédents. A tout groupe de Lie à r paramètres, correspond une algèbre de Lie à r dimensions. Réciproquement, toute algèbre de Lie à r dimensions peut être réalisée par l'ensemble des transformations infinitésimales d'un noyau de groupe de Lie à r paramètres. Il est clair que si deux noyaux de groupes de Lie sont isomorphes par un isomorphisme deux fois différentiable, les algèbres de Lie correspondantes sont également isomorphes et réciproquement. Par conséquent, la classification des groupes de Lie au point de vue local (c'est-à-dire des noyaux de groupes) se ramène à la classification des algèbres de Lie, problème qui sera traité dans un autre exposé.

On doit à M. E. Cartan le théorème suivant, qui est peut-être le plus surprenant de toute la théorie :

Il existe toujours un groupe de Lie au sens global tel que l'ensemble de ses transformations infinitésimales réalise une algèbre de Lie donnée.

Lie a donné de la réciproque de son troisième théorème fondamental une démonstration qui entraîne, lorsqu'elle est valable, le théorème de M. Cartan. Considérons en effet l'espace vectoriel A_r formé par l'algèbre de Lie donnée. Considérons dans cet espace la transformation

$$dX = [\,YX\,]$$

où Y est un point fixe, le point X étant ainsi transformé en un point $X + dX$. Nous la considérons comme une transformation infinitésimale linéaire dans l'espace A_r. On montre d'ailleurs que c'est la transformation infinitésimale générale du groupe adjoint linéaire. Soient X_i r vecteurs de base de A_r, et désignons par E_i la transformation infinitésimale

$$dX = [\,X_i X\,] \ ;$$

le crochet $[\,E_i E_j\,]$ correspond à la transformation infinitésimale

$$dX = [\,X_i[\,X_j X\,]\,] - [\,X_j[\,X_i X\,]\,]$$

qui s'écrit, en vertu des axiomes de l'algèbre de Lie,

$$dX = [\,[\,X_i X_j\,]\,X\,] \ .$$

Donc $[\,E_i E_j\,]$ est la transformation infinitésimale correspondant à $[\,X_i X_j\,]$. Les E_i ne sont pas nécessairement linéairement indépendants, car, dans G_r, il peut exister des éléments Y qui sont échangeables avec tous les éléments X (c'est-à-dire $[\,YX\,] = 0$). Considérons le cas où il n'existe aucun élément Y de cette espèce. Les transformations infinitésimales E_i sont alors linéairement indépendantes et forment une algèbre de Lie isomorphe à l'algèbre de Lie donnée. Elles engendrent donc un noyau de groupe G dont les transformations sont linéaires et sont par suite définies dans tout l'espace A_r. Soit alors G' l'ensemble des transformations linéaires dont chacune est le produit d'un nombre fini de transformations de G. On voit facilement que G' est un groupe de Lie au sens global.

La démonstration précédente n'est pas valable dans le cas général. Mais comme toute famille de transformations infinitésimales linéaires qui forme une algèbre de Lie engendre un groupe de transformations linéaires au sens global, le théorème de M. Cartan résulte du théorème suivant, démontré récemment par M. Ado, et qui sera traité dans l'exposé de M. Chevalley.

Toute algèbre de Lie admet une réalisation fidèle par des transformations infinitésimales linéaires.

Remarquons encore qu'à une algèbre de Lie peuvent correspondre plusieurs groupes abstraits de Lie au sens global. Mais il ne lui correspond qu'un seul groupe abstrait de Lie simplement connexe. De plus, celui-ci est le groupe de recouvrement simplement connexe de tout autre groupe abstrait de Lie correspondant à l'algèbre de Lie donnée.

LES SOUS-GROUPES D'UN GROUPE DE LIE.

Soit G un groupe abstrait à r paramètres. Un sous-groupe g de G sera appelé sous-groupe de Lie, lorsque la variété g est différentiable. De même, $\mathcal{G}$ étant une réalisation de G par un groupe de transformations de Lie un sous-groupe g de $\mathcal{G}$ sera appelé sous-groupe de Lie lorsqu'il correspond à un sous-groupe de Lie g de G. Tout sous-groupe de Lie g est évidemment engendré par une famille linéaire de transformations infinitésimales de $\mathcal{G}$. Pour qu'une telle famille, $a_i Y_i$, engendre un sous-groupe il faut et il suffit que

$$[\, Y_i Y_j \,] = \gamma_{ijk} \, Y_k \qquad (i, j, k = 1, 2, \dots, h);$$

la détermination des sous-groupes de Lie est donc un problème purement algébrique. En employant un système de coordonnées formé par des paramètres canoniques, tout sous-groupe de Lie de G est représenté par une variété plane au voisinage de l'élément unité.

Concernant les sous-groupes d'un groupe de Lie, on doit à M. E. Cartan deux théorèmes importants contenus dans l'énoncé suivant qui est un peu plus général :

THÉORÈME. *G étant un groupe abstrait de Lie, soient g un ensemble fermé de G et V un voisinage de l'élément unité i tels que, si s et s' sont deux points appartenant à g et à V, le point $s's^{-1}$ appartienne à g; alors la partie de g contenu dans un voisinage suffisamment petit de i forme un voisinage de i sur un sous-groupe de Lie.*

Supposons que le système de coordonnées formé par les paramètres canoniques soit valable dans V. En utilisant les notions de géométrie euclidienne dans l'espace des paramètres canoniques, soit V' l'intérieur d'une hypersphère de centre i contenue dans V. En supposant que g ne soit pas proprement discontinu dans V, il existe une suite de points $s_1, \dots, s_n, \dots$ de g tendant vers i. Les droites is_n admettent au moins une droite d'accumulation $i\delta$. Soit s un point de $i\delta$ intérieur à V'. Soit p_n le plus grand entier tel que la distance de i au point $(s_n)^{p_n}$ soit inférieure ou égale à la distance is. Alors le point s est évidemment point d'accumulation des points $(s_n)^{p_n}$ et appartient donc à g. L'ensemble des segments de droite passant par i et appartenant à g forme évidemment la partie intérieure à V' d'une variété plane g'. Le point i admet alors un voisinage $V'' \subset V'$ tel que tous les points de g situés dans V'' appartiennent à g'. Sinon, il y aurait en dehors de g' une suite de points $\sigma_1, \dots, \sigma_n \dots$ appartenant à g et tendant vers i. Soit h une variété plane de dimension $r-r'$ (où $r =$ dimension de G, $r' =$ dimension de g') et rencontrant g' au seul point i. Appelons $\sigma g'$ la variété qui se déduit de g' par la transformation du premier groupe des paramètres correspondant au point σ. La variété $\sigma_n g'$, qui est analytique, rencontre h en un point σ'_n qui appartient à g et qui tend vers i lorsque σ_n tend vers i. L'ensemble des droites $i\sigma'_n$ admettra une droite d'accumulation située dans h. Cette droite d'accumulation devrait aussi appartenir à g' ce qui est impossible. Donc, à l'intérieur de V'', g est confondu avec g'.

Les théorèmes de M. Cartan, qui résultent immédiatement de l'énoncé précédent, sont :

I. - Si g est un sous-groupe du groupe de Lie G, et si g est fermé dans G, on peut trouver dans G un voisinage V de l'élément unité tel que les éléments de g intérieurs à V soient les éléments de la partie d'un sous-groupe de Lie intérieure à V.

II. - Tout sous-groupe continu à k paramètres d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie.

Nous disons qu'un sous-groupe g de G est continuement isomorphe à un groupe topologique $\bar{g}$, lorsque g est une représentation isomorphe et continue de $\bar{g}$ dans G. Si $\bar{g}$ est un groupe continu à k paramètres, nous disons aussi que g est un sous-groupe continu à k paramètres. Le théorème II se généralise un peu : *Lorsqu'un sous-groupe d'un groupe de Lie est continuement isomorphe à un groupe topologique localement compact, c'est un sous-groupe de Lie.*

REMARQUE. Un sous-groupe de Lie g d'un groupe de Lie G n'est pas forcément fermé dans G.

EXEMPLE. Le tore à deux dimensions est la variété d'un groupe de Lie à deux paramètres. On sait que chaque point du tore peut être représenté par un couple de deux nombres réels (x, y) *modulo 1*. Nous définissons un groupe de Lie en prenant la loi de composition suivante :

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x + x' \\ y'' &= y + y' \end{aligned}\right\} \ (mod.\ 1).$$

Les sous-groupes continus à un paramètre sont les géodésiques (de la métrique euclidienne du plan x, y) définies par $y = tx$. Si t est irrationnel, la géodésique $y = tx$ n'est pas un ensemble fermé sur le tore, mais un ensemble partout dense sur le tore.

APPLICATION À L'ISOMORPHISME DE DEUX GROUPES DE LIE.

Les sous-groupes de Lie à un paramètre ont une définition purement topologique : ce sont les sous-groupes continus à un paramètre. On en déduit le théorème suivant :

Etant donnés deux groupes de Lie, G et G', tout isomorphisme continu entre G et G' est analytique par rapport à des coordonnées locales analytiques définies dans G et dans G'.

Un système de coordonnées locales dans G est dit analytique lorsque la loi de composition de G est analytique par rapport à ce système. Si G et G' sont deux groupes continus à r et r' paramètres, tout isomorphisme continu dans un sens entre G et G' est topologique (c'est-à-dire continu dans les deux sens) et par suite $r = r'$. C'est une conséquence des théorèmes suivants :

1) Tout groupe continu à r paramètres peut être recouvert par un ensemble dénombrable des voisinages (E. Cartan, IV, p. 7).

2) Toute transformation biunivoque et continue d'un espace bicompact dans un espace de Hausdorff est une homéomorphie (P. Alexandroff et H. Hopf, TOPOLOGIE p. 95).

3) Un ensemble de dimension r ne peut pas être la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de dimensions inférieures à r.

Soit G et G' deux groupes de Lie à r paramètres et considérons un isomorphisme topologique entre G et G'. Rapportons G et G' à des systèmes de paramètres canoniques. L'isomorphisme considéré fait correspondre à toute droite de G passant par i une droite de G' passant par i'. Nous pouvons supposer que les vecteurs de base des deux systèmes de coordonnées se correspondent deux à deux. Tout élément s voisin de i est d'une façon bien déterminée le produit de r éléments $c_1,\dots, c_r$, où c_k est un élément de l'axe de coordonnées d'indice k. Le point s est une fonction analytique des points $c_1,\dots, c_r$. De même tout point s' voisin de i' est d'une façon bien déterminée le produit de r éléments $c'_1,\dots, c'_r$ appartenant respectivement aux axes de coordonnées choisis dans G'. Soient $c'_1,\dots, c'_r$, les points de G' correspondant respectivement aux points $c_1,\dots, c_r$ de G. Le point s', produit de $c'_1,\dots, c'_r$, correspond alors au point s, produit de $c_1,\dots, c_r$. La correspondance entre s et s' est donc analytique et par suite linéaire par rapport aux paramètres canoniques. Avec notre choix particulier de systèmes de coordonnées, les points s et s' ont les mêmes paramètres canoniques.

Le théorème ainsi démontré peut s'énoncer encore de la façon suivante :

Dans un groupe de Lie deux systèmes de coordonnées locales analytiques (ou deux fois différentiables), définis dans un même domaine, se déduisent l'un de l'autre *par une transformation analytique (ou deux fois différentiable).*

ESPACES HOMOGÈNES DE LIE.

Un groupe de transformations G défini dans une variété E_n est dit transitif si tous les points de E_n sont équivalents par rapport à G, c'est-à-dire s'il existe une transformation qui transforme un point arbitraire x en un point arbitraire x'. Nous appellerons *espace homogène*, une variété E_n dans laquelle on a défini un groupe de transformations continu à r paramètres qui est transitif dans E_n ; ce groupe sera appelé le *groupe de structure* de l'espace homogène. En particulier, on aura un *espace homogène de Lie* si le groupe de structure est un groupe de transformations de Lie à r paramètres.

EXEMPLES. Espace euclidien, espace affine, espace projectif.

Soit E_n un espace homogène, $\mathcal{G}$ son groupe de structure, g le sous-groupe de $\mathcal{G}$ formé par l'ensemble des transformations qui laissent fixe un point de O de E_n. Les lettres G et g désigneront les groupes abstraits correspondants. On voit facilement que g est fermé dans G. De plus, g n'admet pas de sous-groupe invariant dans G. Car s'il existait un tel sous-groupe, chacune de ses transformations laisserait invariants tous les points de E_n et serait donc la transformation identique. L'ensemble des transformations de $\mathcal{G}$ qui transforment le point O en un point x est l'ensemble sg formé par les produits d'un élément particulier s par un élément quelconque de g. Les points x correspondent donc d'une façon biunivoque aux ensembles sg. Par hypothèse, la transformation qui fait correspondre à un point s de G le point x correspondant à sg est une transformation continue.

Supposons maintenant que le groupe *abstrait* G soit un groupe de Lie à r paramètres; mais nous ne supposerons pas que le *groupe de transformation* $\mathcal{G}$ est un groupe de transformations de Lie. Comme g est fermé dans G c'est un sous-groupe de Lie de G. Soit V un voisinage de i dans lequel on peut introduire le système de coordonnées formé par les paramètres canoniques; g sera représenté dans V par une variété plane à k dimensions. Considérons dans V une variété plane P à $r-k$ dimensions qui rencontre g au seul point i. Si s est voisin de i, l'ensemble sg est une variété analytique qui rencontre P en un seul point t voisin de i. Si v est un voisinage suffisamment petit de i dans la variété plane P, les ensembles tg et $t'g$ correspondant à deux points distincts t et t' de v sont distincts. Cela nous permet de définir un espace topologique que nous appellerons espace quotient G/g et dont les points sont les ensembles sg. Nous définissons comme voisinage de l'élément origine g l'ensemble des éléments tg, où t est un point d'un voisinage v de i dans P. Un voisinage de l'élément $s_o g$ sera alors l'ensemble des éléments $s_o tg$, où t est un point quelconque de v. L'espace G/g sera donc une variété à $r-k$ dimensions. Si nous faisons correspondre à l'élément s de G la transformation $sg \to s_o sg$, l'espace G/g devient un espace homogène dont le groupe de structure est une réalisation du groupe abstrait G.

Montrons que les espaces homogènes E_n et G/g sont topologiquement équivalents. Les points de E_n et de G/g correspondant d'une façon biunivoque aux ensembles sg, nous avons bien une transformation biunivoque T entre E_n et G/g. Il suffit de démontrer que T est topologique. T est continu dans le sens de G/g sur E_n. En effet, à un voisinage d'un point x_o de E_n correspond dans G un voisinage de $s_o g$, ce voisinage étant composé d'ensembles sg. Il y correspond donc dans G/g un voisinage de l'élément $s_o g$, ce qui démontre la continuité de T dans le sens de G/g sur E_n. Le fait que la transformation est topologique résulte ensuite des propriétés suivantes :

1) l'espace G/g peut être recouvert par une famille dénombrable de voisinages.

2) toute transformation biunivoque et continue d'un espace bicompact dans un espace de Hausdorff est une homéomorphie.

3) un ensemble de dimension n ne peut pas être la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles de dimension inférieure à r.

On a donc le théorème :

Tout espace homogène E_n dont le groupe de structure est une réalisation continue d'un groupe abstrait de Lie G est équivalent à un espace quotient G/g, où g est un sous-groupe qui est fermé dans G et qui ne contient aucun sous-groupe invariant dans G.

Démontrons enfin le théorème suivant :

L'espace E_n du théorème précédent est un espace homogène de Lie. On peut choisir dans E_n et dans G des coordonnées locales, définies à des transformations analytiques près, telles que le groupe de structure soit analytique.

Reprenons les notations que nous avons employées pour définir l'espace quotient G/g. Nous pouvons toujours supposer que les paramètres canoniques des points de P sont $a_1,\dots, a_n$, et $a_\lambda = 0$ pour $\lambda > n$. Prenons dans v qui est l'image d'un voisinage du point O de E_n, le système de coordonnées défini par $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Considérons un voisinage $v_1 \subset v$. On peut trouver dans G un voisinage $V_1 \subset V$ de i tel que la variété stg rencontre v en un point t' bien déterminé lorsque $t \in v_1$, $s \in V_1$. Le point t' sera une fonction analytique de s et $t : t' = \varphi(s, t)$. Nous avons ainsi dans le voisinage v de E_n et dans le voisinage V de G des systèmes de coordonnées locales tels que les transformations du groupe de structure, $x' = sx$, sont analytiques par rapport à s et x, lorsque $s \in V_1, x \in v_1$. On en déduit ensuite, par les transformations du groupe de structure et par celles du premier groupe des paramètres, des systèmes de coordonnées locales recouvrant E_n et G. Par rapport à ces coordonnées locales le groupe de structure sera analytique. De plus, les coordonnées locales qui jouissent de cette propriété sont bien définies à des transformations analytiques près. En effet nous avons déjà démontré ce fait pour ce qui concerne la variété G. Rapportons donc les points t et t' de v à un nouveau système de coordonnées dans v tel que : $t' = \varphi(s,t)$ soit une fonction analytique, en supposant s rapporté au système des paramètres canoniques. On passe alors des anciennes coordonnées définies dans v aux nouvelles par la transformation analytique $t' = \varphi(t',i)$ où le point t' dans $\varphi(t',i)$ est rapporté aux anciennes coordonnées.

Le théorème précédent généralise le théorème suivant dû à Schur (II) :

Tout groupe de transformations de Lie qui est transitif peut être rendu analytique par un choix convenable de système de coordonnées dans la variété du groupe et dans l'espace où opère le groupe.

L'hypothèse de transitivité est essentielle pour la validité de ce théorème. Il y a des groupes de transformation de Lie intransitifs qu'on ne peut pas mettre sous forme analytique.

La notion de transitivité se définit évidemment aussi pour un noyau de groupe de transformations. On voit encore que tout noyau de groupe de transformations transitif qui est une réalisation continue d'un noyau de groupe de Lie peut être défini de la façon suivante :

Soient G un noyau de groupe de Lie et g un noyau de sous-groupe de Lie qui ne contient aucun sous-groupe invariant dans G. Soit E_n l'ensemble dont les éléments sont les classes sg, les voisinages étant définis comme précédemment. L'ensemble des transformations $sg \to s_0 sg$ forme alors un noyau de groupe de transformations de Lie qui est transitif et qu'on peut mettre sous la forme analytique.

REMARQUE SUR LA RÉCIPROQUE DU DEUXIÈME THÉORÈME FONDAMENTAL DE LIE.

D'après le théorème de M. Cartan, tout noyau de groupe abstrait de Lie admet un prolongement formant un groupe de Lie au sens global. Il reste à savoir si tout noyau de groupe de transformations de Lie a aussi un prolongement formant un groupe de transformations de Lie au sens global. D'une façon plus précise, supposons que dans un domaine D_n on ait défini r transformations infinitésimales X_i linéairement indépendantes et telles que $[X_i X_j] = c_{ijk} X_k$. Il existe alors dans D_n un voisinage v tel que les transformations infinitésimales $a_i X_i$ engendrent un noyau de groupe dont les transformations sont définies dans v. Peut-on choisir ce voisinage v de telle façon qu'il existe un groupe de transformations de Lie $\mathcal{G}$ opérant dans un espace E_n et une représentation de v sur un voisinage v' dans E_n tels que les transformations infinitésimales $s_i X_i$ dans v correspondent par cette représentation aux transformations infinitésimales $a_i X_i$ de $\mathfrak{G}$ dans v' ?

Un tel prolongement n'est pas toujours possible. En effet le noyau de groupe abstrait de Lie G admet un prolongement bien déterminé $\overline{G}$ formant un groupe de Lie simplement connexe. Le noyau de sous-groupe de Lie g (qui n'admet pas de sous-groupe invariant dans G) admet un prolongement $\overline{g}$ bien déterminé dans $\overline{G}$. Si $\overline{g}$ n'est pas fermé dans $\overline{G}$, le noyau de groupe de transformations défini par G et g n'admet pas de prolongement formant un groupe de transformations au sens global. On donne facilement un exemple d'un groupe $\overline{G}$ simplement connexe, admettant un sous-groupe $\overline{g}$ qui ne soit pas fermé dans $\overline{G}$ et qui ne contienne aucun sous-groupe invariant dans $\overline{G}$ (voir IX).

Dans cet exposé, j'ai dû passer sous silence plusieurs problèmes importants de la théorie des groupes de Lie; par exemple le problème de la détermination de tous les groupes de Lie et celui de l'équivalence par rapport à un groupe de transformations de Lie (théorie du repère mobile). Les questions que j'ai traitées ici conduisent au problème général : trouver des critères de nature topologique pour qu'un groupe soit un groupe de Lie. Est-ce que tout groupe abstrait continu à r paramètres est un groupe de Lie ? Une réponse partielle à cette question a été donnée par J. Von Neumann, qui a démontré que, lorsqu'un groupe continu à r paramètres est compact, c'est un groupe de Lie. Le résultat est encore valable lorsque le groupe considéré est un groupe topologique compact, localement connexe et de dimension finie.

Un complément intéressant aux résultats indiqués est aussi fourni par un théorème de E. Cartan :

Tout noyau de groupe de transformations continu à r paramètres dont les transformations sont analytiques complexes est un noyau du groupe de Lie.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

I - S. LIE . Theorie der Transformations-gruppen (tomes 1, 2, 3).

II - F. SCHUR. Uber den analytischen Charakter der eine endlische continuierliche Transformationsgruppe darstellenden Funktionnen (Math. Ann. t. 41).

III - E. CARTAN. La géométrie des groupes de transformations (Journal de Mathémaques pures et appl. 1927).

IV - E. CARTAN. La théorie des groupes finis et continus et l'analysis situs (Mémorial 1930, Fasc. XLII).

V - E. CARTAN. Repère mobile - Groupes continus - Espaces généralisés (Actualités scient. et ind. 194).

VI - E. CARTAN. La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie (Enseignement math. 1936).

VII - E. CARTAN. La théorie des groupes continus finis et la géométrie différentielle traitée par la théorie du repère mobile (Gauthiers-Villars 1937).

VIII - E. CARTAN. Sur les groupes de transformations analytiques. (Actualités scient. et ind. 198).

IX - C. EHRESMANN. Sur les espaces localement homogènes (Enseignement math. 1936).

/ 39 /

Structures locales (*).

Mémoire de CHARLES EHRESMANN (à Princeton, New Jersey, U.S.A.).

Résumé. - *Définition d'une espèce de structures locales par la notion de loi d'induction vérifiant certains axiomes, en particulier l'axiome du recollement. Pseudogroupe des automorphismes locaux d'une structure locale. Espèce des structures locales associées à un pseudogroupe de transformations. Exemples d'espèces de structures locales (les structures fibrées et les structures infinitésimales forment d'autres exemples, non étudiés dans cette conférence d'introduction). La notion de jet local est l'outil principal pour l'étude des structures locales. Groupoïde des jets d'automorphismes locaux, groupe d'isotropie locale. La considération de l'espace des jets locaux permet de démontrer en particulier le théorème fondamental de la théorie des espaces localement homogènes de* LIE.

1. La notion d'espèce de structures mathématiques [1].

Pour expliquer la notion générale d'espèce de structures mathématiques, partons de l'exemple des structures topologiques.

Sur l'ensemble E une structure topologique est définie par la donnée d'un ensemble O de parties de E, qui seront appelées les ensembles ouverts de la structure topologique. Cet ensemble O devra vérifier les deux axiomes suivants:

(O_1) - L'intersection d'une famille finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

(O_2) - La réunion d'une famille quelconque d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

En particulier l'ensemble E lui-même et l'ensemble vide sont des ensembles ouverts.

Soit $\mathfrak{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. O est une partie de $\mathfrak{P}(E)$, c'est-à-dire un élément de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$, que nous pourrons appeler l'élément structural définissant une topologie. Les axiomes (O_1) et (O_2) définissent une partie Ω de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$, ensemble des éléments vérifiant ces axiomes. Tout élément O de Ω définit une structure topologique sur E. Nous pouvons remplacer E par un ensemble quelconque. La loi de formation de $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(E))$ à partir de E et en plus les deux axiomes (O_1) et (O_2) définissent l'espèce des structures topologiques, c'est-à-dire la classe des structures topologiques sur un ensemble quelconque.

(*) Conférence polycopiée à Rome en Mars 1952. Cette conférence est l'introduction d'un cycle de 8 conférences faites par l'auteur à Rome sur le sujet: Structures locales, structures fibrées, structures infinitésimales.

(1) N. BOURBAKI, *Théorie des Ensembles*, fasc. de Résultats (Paris, Hermann).

D'une façon générale, une espèce de structures mathématiques est définie par:

1° – La donnée d'un certain nombre d'ensembles auxiliaires A_1, $A_2, \ldots, A_k$.

2° – La donnée d'une loi de formation d'un ensemble M à partir d'un ensemble quelconque E et des ensembles $A_1, \ldots, A_k$. Cette loi de formation indique une suite d'opérations du type suivant: *a*) formation de l'ensemble des parties d'un ensemble déjà obtenu, *b*) formation du produit de deux ensembles déjà obtenus.

3° – La donnée d'un système d'axiomes imposant des conditions aux éléments de M, c'est-à-dire déterminant une partie W de M. On prendra pour E un ensemble quelconque tel que le système d'axiomes ait un sens pour les éléments de M.

L'ensemble W constitue une espèce de structures mathématiques sur E. Tout élément S de W sera une structure de cette espèce sur E. La classe des structures S ainsi obtenue sur un ensemble E quelconque constitue une espèce de structures mathématiques.

EXEMPLES: l'espèce des structures topologiques vérifiant des axiomes supplémentaires: structures topologiques séparées, structures d'espace topologique compact, etc. Structures d'ordre. Structures algébriques. Structures composées des structures élémentaires précédentes: groupes topologiques, espaces vectoriels topologiques, etc.

2. La notion d'espèce de structures locales (2).

Une espèce de structures locales est une espèce de structures (λ) pour laquelle il existe une loi d'induction, c'est-à-dire une loi qui associe à toute structure S d'espèce (λ), donnée sur un ensemble E, un ensemble Φ de parties de E et qui détermine sur tout ensemble $U \in \Phi$ une structure d'espèce (λ) appelée structure induite par S sur U, l'ensemble U muni de cette structure induite étant appelé sous-espace distingué de E, de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites:

1° – Φ est l'ensemble des ensembles ouverts d'une topologie sur E. On dira que S est une structure locale par rapport à cette topologie.

2° – La loi d'induction est canonique, c'est-à-dire si une application biunivoque f de E sur E' transporte la structure S sur une structure S' définie sur E', la restriction de f à chaque sous-espace distingué de E est un isomorphisme sur un sous-espace distingué de E' muni de la structure S'.

3° – *Transitivité des structures induites:* Si U est un sous-espace distingué de E, les sous-espaces distingués de U sont les sous-espaces distingués de E qui sont contenus dans U.

---

(2) *Structures locales et structures infinitésimales*, « Comptes Rendus Ac. Sciences », Paris, 234, 1952, p. 587-589.

4° - *Axiome du recollement.* Si E' est la réunion d'une famille de sous-ensembles E_i dont chacun est muni d'une structure d'espèce (λ) telle que $E_i \cap E_j$ soit sous-espace distingué de E_i et de E_j, les structures induites sur $E_i \cap E_j$ par celles qui sont données sur E_i et E_j étant identiques, il existe sur E' une structure d'espèce (λ) bien déterminée telle que E_i soit sous-espace distingué de E' muni de cette structure. Nous dirons que l'espace E' muni de cette structure est obtenu par recollement de sous-espaces E_i. Les structures données sur les E_i seront dites cohérentes entre elles.

En particulier la structure induite par S sur E est identique à S.

3. Exemple des structures topologiques.

Les structures topologiques forment une espèce de structures locales. Soit T une topologie sur E, Φ est l'ensemble des ensembles ouverts de cette topologie. La topologie induite sur $U \in \Phi$ est celle dont les ouverts sont les ouverts de E contenus dans U. La transitivité des topologies induites est évidente. Soit (E_i) un recouvrement de E' et supposons donnée sur chaque E_i une topologie T_i telle que $E_i \cap E_j$ soit ouvert dans E_i et dans E_j, les topologies induites sur $E_i \cap E_j$ par T_i et T_j étant identiques. Une topologie T' sur E' telle que E_i soit ouvert et telle que T_i soit la topologie induite sur E_i par T' est forcément celle qui admet pour ensembles ouverts les réunions quelconques d'ouverts des espaces E_i.

L'espace E' muni de cette topologie peut aussi être obtenu de la manière suivante: l'espace somme $\Sigma_i E_i$ est l'ensemble des couples (i, x), où $x \in E_i$. L'application biunivoque $x \to (i, x)$ de E_i sur un sous-ensemble E_i' de $\Sigma_i E_i$ transporte la topologie de E_i sur une topologie de E_i'. La topologie d'espace somme sur $\Sigma_i E_i$ est celle dont les ouverts sont des réunions quelconques d'ouverts des espaces E_i'. Soit f l'application $(i, x) \to x$ de $\Sigma_i E_i$ sur E'. Soit ρ la relation d'équivalence associée dans $\Sigma_i E_i$. L'application biunivoque de $\Sigma_i E_i/\rho$ sur E' canoniquement associée à f est un homéomorphisme, et on peut ainsi identifier canoniquement $\Sigma_i E_i/\rho$ à E'.

On peut définir la topologie induite par T sur un sous-ensemble A quelconque de E. Mais par recollement de sous-espaces A_i formant un recouvrement de E on ne retrouve pas forcément l'espace topologique E. Il y a cependant un autre cas intéressant où E est isomorphe à $\Sigma_i A_i/\rho$, ρ étant la relation d'équivalence associée à l'application canonique de $\Sigma_i A_i$ sur E. C'est le cas où les A_i sont des ensembles fermés tels que tout point de E admette un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini des ensembles A_i.

4. - Le pseudogroupe des automorphismes locaux d'une structure locale.

Si E et E' sont deux ensembles munis de deux structures S et S', un isomorphisme de E sur E' est une application biunivoque de E sur E' qui transporte S sur S'.

Soit S une structure locale d'une espèce donnée définie sur E. Soit Γ l'ensemble des automorphismes locaux de E, c'est-à-dire des isomorphismes d'un sous-espace distingué sur un sous-espace distingué. Γ est un pseudogroupe de transformations, c'est-à-dire un ensemble de transformations vérifiant les axiomes suivants:

1° - Tout $f \in \Gamma$ est une application biunivoque de $U \in \Phi$ sur $f(U) \in \Phi$, où Φ est l'ensemble des parties de E vérifiant les deux axiomes des ensembles ouverts d'une topologie; cette topologie s'appellera la topologie sous-jacente au pseudogroupe de transformations.

2° - Soit $U = \bigcup_i U_i$ et $U_i \in \Phi$. Pour qu'une application biunivoque f de U sur un sous-ensemble $f(U)$ de E appartienne à Γ, il faut et il suffit que la restriction de f à U_i, pour chaque indice i, appartienne à Γ.

3° - Pour tout $U \in \Phi$, l'application identique de U appartient à Γ. Si $f \in \Gamma$, on a aussi $f^{-1} \in \Gamma$. Si $f \in \Gamma$ et $f' \in \Gamma$, on a aussi $f'f \in \Gamma$, où $f'f$ est l'application $x \to f'(f(x))$ pour tout x tel que $f'(f(x))$ soit défini.

D'après 3°, Γ est un groupoïde pour la loi de composition entre applications, à condition de considérer que $f'f$ est défini seulement dans le cas où le but de f est identique à la source de f'. Etant donnée une application f d'un ensemble U sur un ensemble $f(U)$, nous appelons U la source et $f(U)$ le but de f.

5. Structures localement isomorphes.

Soit S une structure locale sur E, S' une structure de même espèce sur E'. Un *isomorphisme local* f de E sur E', c'est-à-dire un isomorphisme d'un sous-espace distingué de E sur un sous-espace distingué de E', sera aussi appelé *carte locale* de E sur E'. Au couple (f_1, f_2) de deux cartes locales est associé l'automorphisme local φ_{21} de E tel que: $f_1(x) = f_2(x')$, où $x \in E$, $x' \in E$, soit équivalent à $x' = \varphi_{21}(x)$. Nous dirons que φ_{21} est le changement de cartes locales associé à (f_1, f_2).

Soit (f_i) un ensemble de cartes locales de E sur E' tel que leurs buts recouvrent E'. Un tel ensemble de cartes sera appelé *atlas* de E sur E'. S'il existe un atlas de E sur E', nous dirons que E' est localement isomorphe à E.

Propriété de transitivité: si E' est localement isomorphe à E et E'' localement isomorphe à E', alors E'' est localement isomorphe à E.

Si E' est localement isomorphe à E, l'ensemble des cartes locales de E sur E' est appelé *atlas complet* de E sur E'.

Soit $\mathcal{A} = (f_i)$ un ensemble d'applications biunivoques de sous-espaces distingués U_i de E, muni de la structure locale S, sur des sous-ensembles U_i' d'un ensemble quelconque E' sur lequel nous ne considérons aucune structure donnée d'avance. Appelons encore f_i carte locale de E sur E'. Si les U_i' recouvrent E', c'est-à-dire si $E' = \bigcup_i U_i'$, nous dirons encore que $\mathcal{A}$ est un atlas de E sur E'. Si les changements de cartes locales φ_{ji} associés aux couples (f_i, f_j) appartiennent tous à Γ, pseudogroupe des automorphismes locaux de E, nous dirons que $\mathcal{A}$ est compatible avec Γ. Soit $\mathcal{A}$ un atlas de E sur E' compatible avec Γ. En transportant par f_i la structure de U_i sur U_i', les structures ainsi definies sur les U_i' sont cohérentes. Donc l'atlas détermine sur E' une structure locale S' de même espèce que S.

6. L'espèce de structures locales associées à un pseudogroupe de transformations (3).

Soit Γ un pseudogroupe de transformations défini dans E et soit $\mathcal{A}$ un atlas de E sur E' compatible avec Γ. Chaque carte locale f_i de l'atlas $\mathcal{A}$ a pour source un ensemble $U \in \Phi$, où Φ est l'ensemble des ouverts de la topologie sous-jacente à Γ. Un atlas $\mathcal{A}$ compatible avec Γ sera dit *complet* lorsqu'il est identique à tout atlas compatible avec Γ et contenant $\mathcal{A}$. Une carte locale de E sur E' est dite compatible avec $\mathcal{A}$ lorsqu'en l'adjoignant à $\mathcal{A}$ on obtient encore un atlas compatible avec Γ. On démontre facilement:

PROPOSITION. - Etant donné un atlas $\mathcal{A}$ de E sur E' compatible avec Γ, soient f_λ et f_μ deux cartes locales de E sur E' dont chacune est compatible avec Γ. Par adjonction à $\mathcal{A}$ de f_λ et f_μ on obtient encore un atlas compatible avec Γ.

PROPOSITION. Tout atlas $\mathcal{A}$ compatible avec Γ est contenu dans un atlas complet $\bar{\mathcal{A}}$ unique compatible avec Γ, appelé atlas complet engendré par $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ s'obtient en effet par adjonction à $\mathcal{A}$ de toutes les cartes compatibles séparément avec $\mathcal{A}$.

DÉFINITION: Un atlas complet de E sur E' compatible avec Γ définit sur E' une *structure associée à* Γ. La classe des structures associées à Γ, sur un ensemble quelconque, est *l'espèce des structures associées à* Γ.

D'après la proposition précédente, un atlas incomplet compatible avec Γ détermine déjà une structure associée à Γ unique, celle qui est définie par l'atlas complet engendré.

PROPOSITION. L'espèce des structures associées à un pseudogroupe de transformations Γ est une espèce de structures locales.

Soit S' la structure définie sur E' par l'atlas complet $\mathcal{A}$ de E sur E' compatible avec Γ. L'ensemble Φ' des sous-espaces distingués de E' est l'ensemble des réunions de buts de cartes locales appartenant à $\mathcal{A}$. La structure induite par S' sur $U' \in \Phi'$ est définie par l'ensemble des cartes locales appartenant à $\mathcal{A}$ et dont le but est contenu dans U'. On vérifie facilement les axiomes d'une espèce de structures locales.

Si f est une application biunivoque de E' sur E'', la structure déduite

(3) C. EHRESMANN, *Sur la théorie des espaces fibrés* (Coll. de Topologie alg., C.N.R.S., Paris, 1947).

de S' par f est celle qui est définie par l'atlas (ff_i), où f_i est une carte quelconque appartenant à $\mathcal{A}$.

En particulier Γ définit un atlas complet de E sur E compatible avec Γ, donc une structure associée à Γ. *Cette structure locale admet* Γ *pour pseudogroupe des automorphismes locaux.*

7. Structures subordonnées.

Soit Γ_1 un sous-pseudogroupe de Γ; c'est-à-dire $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Soit $\mathcal{A}_1$ un atlas complet compatible avec Γ_1 de E sur E'. Comme $\mathcal{A}_1$ est aussi compatible avec Γ, il est contenu dans un atlas complet $\mathcal{A}$ compatible avec Γ. Ainsi toute structure associée à Γ_1 détermine une structure unique associée à Γ; la première est définie par $\mathcal{A}_1$, la deuxième par $\mathcal{A}$. Nous dirons que la première est subordonnée à la seconde, ou qu'elle est plus précise que la seconde. Mais inversement étant donné un atlas $\mathcal{A}$ complet compatible avec Γ, il n'existe pas nécessairement un atlas $\mathcal{A}_1$ contenu dans $\mathcal{A}$ et compatible avec Γ_1. Ceci pose *le problème d'existence* des structures locales associées à Γ_1 qui soient subordonnées à une structure locale donnée S associée à Γ. On a aussi *le problème d'équivalence* de deux structures locales subordonnées à S; deux structures S_1 et S_1' subordonnées à S peuvent être dites équivalentes lorsqu'il existe un automorphisme de la structure S qui transporte S_1 sur S_1'.

Par exemple Γ_1 peut se réduire à l'application identique de E. Considérons sur E la structure locale définie par Γ, sur E' la structure locale S définie par un atlas complet $\mathcal{A}$ de E sur E' compatible avec Γ. Un atlas $\mathcal{A}_1$ contenu dans $\mathcal{A}$ et compatible avec Γ_1 se réduit alors à un isomorphisme global de E sur E'.

8. Les structures de variétés topologiques et leurs structures subordonnées.

L'espace numérique réel R^n, à n dimensions, est muni d'une topologie canonique: un sous-ensemble U de R^n est ouvert lorsque tout point x de U est centre d'une boule contenue dans U. Une variété topologique V_n est un ensemble muni d'une structure topologique localement homéomorphe (c'est-à-dire localement isomorphe) à R^n, mais vérifiant de plus une *propriété de caractère non local,* à savoir l'axiome de HAUSDORFF. Une structure de variété topologique sur V_n peut donc être définie par un atlas de R^n sur V_n compatible avec le pseudogroupe Λ_n des automorphismes locaux de R^n, à condition que la topologie ainsi définie sur V_n vérifie l'axiome de HAUSDORFF.

On est conduit à considérer des structures associées à des sous-pseudogroupes de Λ_n. Soit $\overset{+}{\Lambda}_n$ le pseudogroupe des automorphismes locaux de R^n ayant le degré topologique égal à $+1$; ce sont les automorphismes locaux qui conservent une orientation donnée de R^n (On prendra l'orientation canonique définie par la suite des vecteurs de base canoniques $e_1, e_2, \dots, e_n$ de R^n). Une structure associée à $\overset{+}{\Lambda}_n$ est une structure de variété topologique orientée. Une variété topologique admet ou bien deux orientations (c'est-à-dire structures subordonnées associées à $\overset{+}{\Lambda}_n$), ou bien aucune.

Soit Λ_n^r le pseudogroupe des automorphismes locaux de R^n qui sont r fois continûment différentiables ainsi que leurs inverses (c'est-à-dire le rang en chaque point de $\varphi \in \Lambda_n^r$ est égal à n). Une structure associée à Λ_n^r est une structure de r-variété (ou variété r fois différentiable).

Soit $\overset{+}{\Lambda}{}_n^r$ le sous-pseudogroupe de $\overset{+}{\Lambda}_n$ formé par les $\varphi \in \Lambda_n^r$ dont le déterminant jacobien est positif en chaque point. Les structures associées sont les structures de r-variétés orientées. Une r-variété admet ou bien deux orientations ou bien aucune. Soit Λ_n^∞ le sous-pseudogroupe de Λ_n^r formé par les automorphismes locaux indéfiniment différentiables de R^n. Les structures associées sont les structures de variétés indéfiniment différentiables. On peut encore considérer $\overset{+}{\Lambda}{}_n^\infty$.

Soit Λ_n^ω le sous-pseudogroupe de Λ_n^r formé des automorphismes locaux analytiques de R^n. Les structures associées sont les structures de variétés analytiques réelles. De même $\overset{+}{\Lambda}{}_n^\omega$.

Soit Λ_n^c le pseudogroupe des automorphismes locaux analytiques complexes et inversibles de C^n, espace numérique complexe à n dimensions complexes qu'on peut identifier à R^{2n}. On a $\Lambda_n^c \subset \overset{+}{\Lambda}{}_{2n}^\omega$. Les structures associées à Λ_n^c sont les structures de variétés analytiques complexes. On obtient les structures analytiques pseudocomplexes, en considérant de même le pseudogroupe des automorphismes locaux de C^n qui sont analytiques complexes ou antianalytiques complexes (c'est-à-dire composés d'un automorphisme analytique complexe et de l'antiinvolution $z_i \to \bar{z}_i$).

Soit Λ_n^a le sous-pseudogroupe de Λ_n^ω formé par les automorphismes locaux algébriques réels; de même Λ_n^{ac} le sous-pseudogroupe de Λ_n^c formé par les automorphismes locaux algébriques complexes de C^n. Les structures locales associées peuvent s'appeler les structures de variété localement algébrique réelle ou complexe. Toute variété algébrique sans singularités au sens classique est munie d'une telle structure.

On peut aussi considérer les sous-pseudogroupes de Λ_n^a ou de Λ_n^{ac} formés par les automorphismes locaux birationnels de R^n ou de C^n. Les structures locales associées sont les structures de variétés localement rationnelles réelles ou complexes.

Pour toutes les structures du type précédent on a le problème d'existence de structures subordonnées: par exemple à une structure de variété topologique ou de variété différentiable donnée sur V_n. On a de même le problème d'équivalence de deux structures subordonnées. Par exemple une structure de r–variété sur V_n admet toujours une structure de variété analytique réelle subordonnée, en vertu d'un théorème de WHITNEY affirmant la possibilité de plonger une variété différentiable dans un espace numérique sur une variété analytique plongée. Par contre une structure différentiable sur V_{2n} n'admet pas toujours une structure analytique complexe subordonnée (4); par exemple la sphère S_{2n} n'en admet pas pour $2n \neq 2$ ou 6. Pour S_6 le problème n'est pas résolu.

9. Structures locales associées à un pseudogroupe de transformations de Lie.

L'ensemble des automorphismes locaux différentiables de R^{2n} qui laissent invariante la forme différentielle extérieure

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

forme un ***pseudogroupe de Lie*** (groupe « infini » dans la terminologie de LIE). Une structure locale associée peut s'appeler structure de variété ***symplectique.***

A tout pseudogroupe de LIE (notion que nous définirons (5) d'une façon générale) correspond ainsi une espèce de structures associées. Considérons en particulier un groupe de LIE G opérant sur un espace E. Le composé sx de $s \in G$ et $x \in E$ est une fonction deux fois différentiable de (s, x). Soit φ une application biunivoque d'un ouvert U de R^n sur un ouvert $\varphi(U)$ de E telle que la restriction de φ à un voisinage suffisamment petit d'un point quelconque x de U soit la restriction d'une transformation appartenant à G. L'ensemble des applications de cette espèce forme un pseudogroupe Γ; c'est le *pseudogroupe de Lie déduit de G.* On est ainsi conduit à considérer les structures locales associées à Γ. En particulier, on obtient ainsi les espaces localement euclidiens, localement non-euclidiens, localement affines, localement projectifs, etc.; si G est transitif dans E, les espaces localement isomorphes à E sont appelés espaces localement homogènes de LIE.

10. Structures fibreuses et structures feuilletées.

Les relations d'équivalence dans un espace topologique forment une espèce de structures locales. Si ρ est une relation d'équivalence dans l'espace topologique E, les sous-espaces distingués pour cette structure sont les ensembles ouverts saturés de E (c'est-à-dire les ouverts qui sont réunions de classes d'équivalence). La structure induite sur un ouvert saturé U est définie par la topologie induite sur U et par la relation d'équivalence induite sur U.

Les relations d'équivalence telles que les classes d'équivalence soient toutes homéomorphes à un espace topologique F forment également une espèce

(4) Voir (3) et C. EHRESMANN, *Sur les variétés presque complexes,* « Proc. Int. Congr. Math. », 1950, ainsi que A. BOREL et J. P. SERRE, « Comptes Rendus », 233, 1951, p. 680.

(5) *Structures locales et structures infinitésimales,* « Comptes Rendus », 234, p. 587-589.

de structures locales, qu'on pourrait appeler l'espèce des structures fibreuses à classes d'équivalence homéomorphes à F. Ces classes d'équivalence peuvent s'appeler les fibres de la structure. Les structures fibrées s'obtiennent en précisant cette notion de structure fibreuse.

Une autre espèce de structures locales est définie de la manière suivante : Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur E et $\mathcal{T}'$ une topologie plus fine que $\mathcal{T}$ telle que l'application identique de E soit localement un homéomorphisme d'un ouvert relativement à $\mathcal{T}'$ sur un sous-espace de E relativement à $\mathcal{T}$ et supposons de plus $\mathcal{T}'$ localement connexe. La structure définie par $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ pourra s'appeler structure feuilletée généralisée. La classe des structures de cette espèce est une espèce de structures locales. Les sous-espaces distingués relativement à la structure $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ sont les ouverts relativement à $\mathcal{T}$ munis des topologies induites par $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. Les composantes connexes relativement à $\mathcal{T}'$ sont appelées feuilles de la structure feuilletée.

Par exemple, dans R^n considérons la partition par les sous-espaces linéaires de R^n définis par $x_i = \text{const.}$, où $i = p+1, \ldots, n$. Soit $\mathcal{T}$ la topologie naturelle sur R^n et soit $\mathcal{T}'$ la topologie somme de ces sous-espaces linéaires. Le couple $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$ définit la structure feuilletée canonique sur R^n, dont les feuilles sont les sous-espaces linéaires considérés. Une structure sur V_n localement isomorphe à cette structure s'appelle ***structure feuilletée sur*** V_n. Elle sera définie par un atlas de R^n sur V_n compatible avec le pseudogroupe Γ des automorphismes locaux de la structure feuilletée canonique sur R^n. Si l'on considère le sous-pseudogroupe de Γ formé d'automorphismes locaux r fois différentiables, les structures locales associées sont les structures feuilletées r fois différentiables. Un atlas de R^n sur V_n compatible avec Γ détermine sur V_n d'une part une topologie $\mathcal{T}_1$ localement homéomorphe à $\mathcal{T}$, d'autre part une topologie $\mathcal{T}_1'$ localement homéomorphe à $\mathcal{T}'$. Les composantes connexes de V_n relativement à $\mathcal{T}_1'$ sont les feuilles de la structure feuilletée.

11 - La notion de jet local.

Soient E et E' deux espaces munis de deux structures locales S et S' de même espèce. Soient f et f_1 deux isomorphismes locaux de E dans E', définis dans deux voisinages ouverts distingués de $x \in E$. (La topologie considérée sur E est celle dont les ensembles ouverts sont les sous-espaces distingués pour la structure de S.) Nous dirons que f et f_1 sont de même classe locale en x lorsque les restrictions de f et de f_1 à un voisinage ouvert distingué de x sont identiques. L'ensemble des isomorphismes locaux de E dans E' qui sont de même classe locale en x que f sera appelé le jet local de f en x; il peut se noter $j_x^\lambda f$ et x peut s'appeler la source du jet local, $f(x)$ son but. Si f' est un isomorphisme local de E' dans un espace E'' muni encore d'une structure de même espèce, on peut définir le composé de $j_x^\lambda f$ et $j_{x'}^\lambda f'$, en supposant $x' = f(x)$, par la formule $j_x^\lambda(f'f) = (j_{x'}^\lambda f')(j_x^\lambda f)$.

Soit $\Pi(E)$ l'ensemble des jets locaux d'automorphismes locaux de E dans E. Muni de la loi de composition entre jets locaux, $\Pi(E)$ est un groupoïde. Soit $\Pi_x(E)$ le sous-ensemble des jets locaux des automorphismes locaux laissant fixe $x \in E$. $\Pi_x(E)$ est un groupe qu'on peut appeler *groupe d'isotropie locale* de E au point x. L'espace E est dit localement homogène lorsque $\Pi(E)$ est transitif dans E, c'est-à-dire lorsqu'il existe un automorphisme local de E transformant un point x arbitraire en un point x' arbitraire. Si E est localement homogène, les groupes d'isotropie locaux de E sont tous isomorphes.

Soit $\Pi(E, E')$ l'ensemble des jets locaux d'isomorphismes locaux de E dans E'. Nous pouvons munir $\Pi(E, E')$ de la topologie suivante: si f est un isomorphisme local de E dans E' défini dans l'ouvert distingué U, l'ensemble des jets locaux $j_x^\lambda f$, pour $x \in U$, sera un ouvert élémentaire de $\Pi(E, E')$. Un ouvert quelconque de $\Pi(E, E')$ sera une réunion quelconque d'ouverts élémentaires. Soient α et β les deux projections canoniques de $\Pi(E, E')$ sur E et sur E'; pour $x \in \Pi(E, E')$, $\alpha(X)$ est la source de X, $\beta(X)$ son but. Les projections α et β sont des homéomorphismes locaux au sens généralisé suivant: les restrictions de α et β à un ouvert élémentaire sont des homéomorphismes.

Les notions précédentes permettent, par exemple, de faire l'étude globale d'un espace localement homogène de Lie, ou, plus généralement, localement isomorphe à un espace muni d'un groupe de transformations de Lie. Soient E' un espace homogène de Lie, E un espace localement isomorphe à E'. Alors la topologie de $\Pi(E, E')$ vérifie l'axiome de Hausdorff. Toute composante connexe de $\Pi(E, E')$ est un revêtement de E pour la projection α; elle se projette par β sur un ensemble ouvert de E'. Si E est compact et simplement connexe, toute composante connexe de $\Pi(E, E')$ est isomorphe à E et forme un revêtement simplement connexe de E'; elle définit un isomorphisme de E sur ce revêtement. Nous arrivons ainsi au théorème (6):

Si un espace localement homogène de Lie est compact et simplement connexe, il est isomorphe à un espace homogène de Lie.

Plus généralement, cet énoncé, est valable en y remplaçant le mot compact par complet.

(6) C. Ehresmann, *Sur les espaces localement homogènes*, « L'Enseignement Mathématique », 5-6, 1936, p. 325.

ANNALI DI MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

Serie IV - Tomo XXXVI - 1954

CHARLES EHRESMANN. **Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie.**

Sea Π un grupoide diferenciable. Sea Π_o el conjunto de sus unidades; $\alpha(f)$ y $\beta(f)$ designan las unidades a derecha y a izquierda de $f \in \Pi$. Llamaremos seccion de Π, a todo levantamiento s de un abierto U de la variedad Π_o en Π, tal que αs sea la aplicación idéntica de U y βs un homeomorfismo de U sobre un abierto U_1 de Π_o. U se llama la fuente de s y U_1 el blanco de s. El conjunto Γ de las secciones de Π es un pseudogrupo respecto de la multiplicación siguiente : Sean $s, s' \in \Gamma$ entonces $s's$ es la sección s'' tal que $s''(x) = s'(x)s(x)$, donde $x' = \beta(s(x))$, $x \in U'' \subset U$ tal que $x' \in U'$ *(fuente de* s'*)*. Si Π opera de manera continua sobre un espacio topologico E, a toda sección $s \in \Gamma$ corresponde el homeomorfismo $z \to s(p(z))z$ de $\overset{-1}{p}(U)$ sobre $\overset{-1}{p}(U_1)$ donde p es la proyección de E *sobre* Π_o. El conjunto de estas aplicaciones es un *pseudogrupo de transformaciones*, representación del pseudogrupo Γ.

Sea Γ^r el subgrupo de Γ formado por las secciones diferenciables de clase r de Π. Los elementos de contacto de orden r de estas secciones forman un grupoide Π^r, *prolongación de orden* r de Π. Sea Φ^r un subgrupoide de Π^r. Una sección de s de Π sera llamada solución de Φ^r cuando sus elementos de contacto de orden r pertenezcan a Φ^r. El conjunto de las soluciones de Φ^r se llamara *pseudogrupo de Lie* (generalizado) Λ. Las soluciones cuya fuente y blanco están en Π_o forman un grupo, llamado subgrupo maximal de Λ.

TEOREMA. *Sea Φ^1 un subgrupoide de Π^1 representado por un campo diferenciable de elementos de contacto en Π. En este caso el subgrupo maximal del pseudogrupo de las soluciones de Φ^1 es un grupo de Lie.*

COROLARIO. *Dada sobre una variedad diferenciable una G - estructura que admita una conexión afin covariante subyacente, el grupo de sus automorfismos es un grupo de Lie.*

Este corolario se aplica, por ejemplo, a las métricas riemannianas o casi-hermitianas y también a las estructuras casi-cuaternonianas. Ver : *Catégories topologiques et catégories différentiables,* Colloque Bruxelles 1958; *Sur les pseudogroupes de Lie de type fini,* Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, Janvier 1958; *Estructuras locales y geometria diferencial,* Curso en la Universidad de Buenos Aires, Agosto-Noviembre 1959.

TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE VOL. VI
Séminaire dirigé par Charles Ehresmann
JUIN 1964

/78/

PROLONGEMENTS DES CATÉGORIES DIFFÉRENTIABLES *

par Charles EHRESMANN

Soit $\mathcal{C}^r$ une catégorie d'applications r fois différentiables d'un ouvert d'un espace affine localement convexe séparé vers un autre vérifiant les conditions suivantes:

1) $\mathcal{C}^r$ est une sous-catégorie inductive, saturée par induction et stable par produits finis, de la catégorie de toutes les applications continues d'un ouvert d'un espace affine localement convexe dans un autre.

2) Si $F \in \mathcal{C}^r$ et si la différentielle de F en x est un isomorphisme, il existe un voisinage U de x tel que la restriction de F à U soit un isomorphisme sur $F(U)$ (Théorème des fonctions implicites).

3) La classe des applications r fois différentiables entre ouverts d'espaces numériques est contenue dans $\mathcal{C}^r$.

Nous ne préciserons pas ici la notion d'application r fois différentiable. Mais en particulier $\mathcal{C}^r$ peut être la catégorie des applications r fois différentiables entre ouverts d'un espace numérique, ou entre ouverts d'un espace de Banach, r fois différentiable signifiant r fois différentiable au sens de Fréchet.

Soit $\tilde{\mathcal{C}}^r$ la catégorie obtenue par élargissement de $\mathcal{C}^r$ au-dessus de la catégorie $\tilde{\mathcal{J}}$ des applications continues entre espaces topologiques. Un objet de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ est une variété r fois différentiable, c'est-à-dire un atlas complet V compatible avec le pseudogroupe formé par les éléments inversibles de $\mathcal{C}^r$, et tel que les buts des cartes de V forment un recouvrement d'un ensemble, noté $\delta(V)$. La topologie sur $\delta(V)$ sous-jacente à V, ayant pour ouverts les buts des cartes de V, est représentée par $\tau(V)$. Les morphismes de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ sont les applications r fois différentiables entre variétés r fois

* Texte d'une conférence préparée (mais non donnée effectivement) pour le Colloque international de Géométrie différentielle globale (Bucarest, Juin 1964).

différentiables entre variétés r fois différentiables. Les applications source et but dans $\tilde{\mathcal{C}}^r$ sont notées α et β.

Nous supposons donné, pour tout entier r, une catégorie $\mathcal{C}^r$ de sorte que l'on ait $\mathcal{C}^r \subset \mathcal{C}^k$, si $k < r$. L'expression «r fois différentiable» signifie appartenant à $\tilde{\mathcal{C}}^r$.

Soit $J^{\lambda, r}$ la classe quotient de la classe des couples (F, x), où $F \in \tilde{\mathcal{C}}^r$ et $x \in \alpha(F)$, par la relation d'équivalence ρ_λ:

$(F, x) \sim (F', x)$ si $\alpha(F)$ et $\alpha(F')$ ont même germe (de variété r fois différentiable) en x, si $\beta(F)$ et $\beta(F')$ ont même germe en $F(x)$, et s'il existe un voisinage U de x tel que F et F' aient même restriction à U.

L'élément $(F, x) \bmod \rho_\lambda$ est appelé *jet local* de F en x, et noté $j_x^\lambda F$. Soit aussi $J^{\lambda, r}$ la catégorie obtenue en munisant $J^{\lambda, r}$ de la loi de composition :

$$j_{x'}^\lambda F' . j_x^\lambda F = j_x^\lambda (F'F)$$

si $\alpha(F')$ et $\beta(F)$ ont même germe en $F(x) = x'$.

La catégorie $J^{\lambda, r}$ admet une catégorie quotient $J^{k, r}$ relativement à la relation d'équivalence ρ_k :

$j_x^\lambda F \sim j_x^\lambda F'$ s'il existe $g \in V$ et $g' \in V'$, où $V = \alpha(F)$, $V' = \beta(F)$, tels que $x \in \beta(g)$, $F(x) \in \beta(g')$ et que la différentielle homogène d'ordre k' de $(g'^{-1}Fg - g'^{-1}F'g)$ en $u = g^{-1}(x)$ soit nulle si $k' \leq k$.

$(j_x^\lambda F) \bmod \rho_k$ est désigné par $j_x^k F$ et appelé *jet d'ordre* k *de* F *en* x. Par suite on a : $j_{x'}^k F' . j_x^k F = j_x^k(F'F)$ si $\alpha(F')$ et $\beta(F)$ ont le même germe en $x' = F(x)$. La classe des unités est identifiée à la classe des germes de variétés r fois différentiables; les applications source et but dans $J^{k, r}$ sont notées α^r et β^r. Si V et V' sont deux variétés r fois différentiables, la sous-classe $J^{k, r}(V', V)$ des $X \in J^{k, r}$ tels que $\alpha^r(X)$ soit un germe de V et $\beta^r(X)$ un germe de V' est canoniquement munie d'une structure de variété $r-k$ fois différentiable, sous-jacente à sa structure d'espace fibré de base $V \times V'$. La classe de ces structures $r-k$ fois différentiables est une classe compatible au-dessus de $\tilde{\mathcal{J}}$ et détermine une variété $r-k$ fois différentiable non séparée $A^{k, r}$ telle que $J^{k, r} = \delta(A^{k, r})$. Soit $\Pi^{k, r}$ le groupoïde des éléments inversibles de $J^{k, r}$.

$J^{\lambda, r}$ opère sur $J^{k, r}$ relativement à la loi de composition :

$$(j_{x'}^\lambda F', j_x^k F) \to j_x^k(F'F) \quad \text{si} \quad \beta^r(j_x^k F) = \alpha(j_{x'}^\lambda F').$$

De plus on définit une loi de composition entre $\tilde{\mathcal{C}}^r$ et $J^{k, r}$ en posant $F'(j_x^k F) = j_x^k(F'F)$ si $\beta^r(j_x^k F)$ est le germe de $\alpha(F')$ en $F(x)$.

Si $(V', F, V) \in \tilde{\mathcal{C}}^r$, nous désignerons par $T_x F$ l'application : $X \to FX$ de $T_x V$ dans $T_y V'$, où $x \in \delta(V)$, $y = F(x)$ et $T_x V$ est l'espace tangent à V en x (considéré comme l'ensemble des $X \in J^{1,r}(V, R)$ tels que $\alpha^r(X)$ soit le germe de R en 0, que $\beta^r(X)$ soit le germe de V en x).

Soit $S(\tilde{\mathcal{C}}^r)$ la sous-catégorie de $\tilde{\mathcal{C}}^r$ formée des surjections régulières, c'est-à-dire des applications r fois différentiables (V', F, V) telles que, pour tout $x \in \delta(V)$, le noyau de $T_x F$ admette un supplémentaire topologique M' dans $T_x V$ et que $T_x F$ définisse un isomorphisme de M' sur $T_y V'$, où $y = F(x)$.

Nous appelons *catégorie r fois différentiable* une catégorie $\tilde{\mathcal{C}}^r((S(\tilde{\mathcal{C}}^r), S(\tilde{\mathcal{C}}^r)), \tilde{\mathcal{C}}^r)$-structurée, c'est-à-dire un couple $(C^\cdot, A)$ d'une catégorie $C^\cdot$ et d'une variété r fois différentiable A telle que $\delta(A)$ soit la classe C sous-jacente à $C^\cdot$, satisfaisant aux conditions suivantes :

1) Soient α et β les applications source et but dans $C^\cdot$ et soit $C^\cdot_0$ la classe des unités de $C^\cdot$; il existe une variété r fois différentiable A_0 telle que $\delta(A_0) = C^\cdot_0$, que l'injection canonique de $C^\cdot_0$ dans C définisse une application r fois différentiable (A, ι, A_0) et que α et β définissent des surjections régulières de A dans A_0.

2) Soit $A * A$ la sous-variété propre de $A \times A$ produit fibré de (A_0, α, A) et de (A_0, β, A) dans $\tilde{\mathcal{C}}^r$. La loi de composition κ de $C^\cdot$ définit une application r fois différentiable de $A * A$ sur A.

Sauf indication contraire, toutes les variétés A utilisées dans la suite sont supposées séparées (c'est-à-dire $\tau(A)$ est une topologie séparée).

THÉORÈME. *Soit $(C^\cdot, A)$ une catégorie r fois différentiable; alors A_0 est une sous-variété propre fermée de A. Le groupoïde $C^\cdot_\gamma$ des éléments inversibles de $C^\cdot$ forme un ouvert pour $\tau(A)$ et l'application $h \to h^{-1}$ définit un automorphisme de la sous-variété déterminée par $C^\cdot_\gamma$.*

On dira que $(C^\cdot, A)$ est une *catégorie r fois régulièrement différentiable* si $(C^\cdot, A)$ est une catégorie r fois différentiable vérifiant la condition supplémentaire :

3) La sous-classe $C^\cdot_0 \wedge C^\cdot_0$ de $C^\cdot_0 \times C^\cdot_0$ formée des couples (e', e) tels que $Hom(e', e) \neq \emptyset$ définit une sous-variété r fois différentiable $A_0 \wedge A_0$ de $A_0 \times A_0$ et l'application $[\beta, \alpha] : f \to (\beta(f), \alpha(f))$ définit une surjection régulière de A sur $A_0 \wedge A_0$.

Si on suppose de plus $C^\cdot_0 \wedge C^\cdot_0$ ouvert pour $\tau(A_0 \times A_0)$, la catégorie $(C^\cdot, A)$ est dite *localement triviale.*

Un exemple important de catégorie $r-k$ fois différentiable (non séparée) est celui de la catégorie localement triviale $(J^{k,r}, A^{k,r})$, où $k < r$, appelée la *catégorie des jets d'ordre k d'applications r fois différentiables.* $A^{k,r}_0$ est la variété $r-k$ fois différentiable sous-jacente à $A^{0,r}_0$, laquelle est une variété r fois différentiable «universelle» définie sur la classe des germes de variétés r fois différentiables. Toute variété $V \in \tilde{\mathcal{C}}^r$ admet la bijection canonique $x \to \hat{x}$, où $\hat{x}$ est le germe de V en x, sur la sous-variété de $A_o^{k,r}$ définie par la classe $\hat{V}$ des germes de V.

Si $X_i \in J^{k,r}$, $i = 1, 2$, et $\beta^r(X_1) = \beta^r(X_2)$, on dit, en accord avec la théorie générale, que $((X_1, X'_1), (X_2, X'_2))$ est un produit fibré naturalisé si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $X'_i \in J^{k,r}$ et $X_1 . X'_1 = X_2 . X'_2$;

2) Si $X''_i \in J^{k,r}$, $i = 1, 2$ et si $X_1 . X''_1 = X_2 . X''_2$, alors il existe un et un seul $\overline{X} \in J^{k,r}$ tel que $X'_i . \overline{X} = X''_i$.

Dans ce cas, $\alpha^r(X'_i)$ est appelé produit fibré de (X_1, X_2) dans $J^{k,r}$. En particulier un tel produit fibré naturalisé est défini si $X_i = j^k_{x_i} f_i$, $\beta^r(X_1) = \beta^r(X_2)$ et $f_i \in S(\tilde{\mathcal{C}}^r)$.

Soit $(C^\cdot, A)$ une catégorie r fois différentiable, soit $\hat{A} . J^{k,r}$ la sous-classe de $J^{k,r}$ formée des jets X d'ordre k tels que $\beta^r(X)$ soit un germe de A. Soit $\hat{A} . J^{k,r} . \hat{x}$ la classe des $X \in \hat{A} . J^{k,r}$ tels que $\alpha^r(X) = \hat{x}$.

Soient $a = (A_o, \alpha, A)$ et $b = (A_o, \beta, A)$. Si $z = (y_1, y_2) \in C^\cdot * C^\cdot$, les jets $j^k_{y_1} a$ et $j^k_{y_2} b$ admettent un produit fibré naturalisé :

$$((j^k_{y_1} a, \tilde{a}_{y_1}), (j^k_{y_2} b, \tilde{b}_{y_2})) \qquad \text{tel que } \alpha^r(\tilde{b}_{y_2}) = \hat{z}$$

Si $X_i \in \hat{A} . J^{k,r} . \hat{x}$ et $a X_2 = b X_1$, il existe un et un seul $Z \in J^{k,r}$ tel que si $\hat{y}_i = \beta^r(X_i)$, on ait : $\alpha^r(Z) = \hat{x}$, $\beta^r(Z) = \hat{z}$, $\tilde{b}_{y_2} . Z = X_2$, $\tilde{a}_{y_1} . Z = X_1$.

Posons : $X_2 \circ X_1 = (A, \kappa, A * A)\ Z \in \hat{A} . J^{k,r} . \hat{x}$.

THÉORÈME. *$\hat{A} . J^{k,r}$, muni de la loi de composition $\circ$ («prolongement de κ»), est une catégorie admettant $J^{k,r}$ pour catégorie d'opérateurs à droite relativement à la loi de composition :*

$$(X, Y) \to X . Y \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \alpha^r(X) = \beta^r(Y).$$

$\hat{A} . J^{k,r} . \hat{x}$ définit une sous-variété propre de $A^{k,r}$ et une catégorie $r-k$ fois différentiable.

Supposons $X_i \in \hat{A} . J^{k,r}$ tels qu'il existe un produit fibré naturalisé : $((a X_2, Y_2), (b X_1, Y_1))$. Soit $X_2 \blacklozenge X_1$ la sous-classe de $J^{k,r}$ formée des éléments $(X_2 . Y_2 \circ X_1 . Y_1) . G$, où $G \in \Pi^{k,r}$. La loi de composition multiforme $\blacklozenge$ a les propriétés suivantes («pseudo-catégorie») :

1) Si $X \in \hat{A} . J^{k,r}$, $\beta^r(X) = \hat{y}$, $e = \alpha(y)$, $e' = \beta(y)$, on a :

$$X \blacklozenge j^k_e a = j^k_{e'} b \blacklozenge X = X . \Pi^{k,r}.$$

2) Si $X_3 \blacklozenge X_2$ et $X_2 \blacklozenge X_1$ sont définis, on a :

$$X_3 \blacklozenge (X_2 \blacklozenge X_1) = (X_3 \blacklozenge X_2) \blacklozenge X_1 .$$

Soit C^k la sous-classe de $\hat{A} . J^{k,r}$ formée des $X \in \hat{A} . J^{k,r} . \hat{A}_o$ tels que $aX = \alpha^r(X)$. Si $X_i \in C^k$ et si $\alpha^r(X_2) = \beta^r(X_1)$, il existe un $Z \in X_2 \blacklozenge X_1$ tel que $\alpha^r(Z) = \alpha^r(X_1)$, à savoir $Z = (X_2 . bX_1) \circ X_1$, que nous noterons $X_2 \bullet X_1$; on a $Z \in C^k$.

THÉORÈME. *$(C^{k\bullet}, A^k)$ est une catégorie $r-k$ fois différentiable, où A^k est une structure de sous-variété propre de $A^{k,r}$. Si $(C^\cdot, A)$ est régulièrement différentiable, $(C^{k\bullet}, A^k)$ est régulièrement différentiable. De plus $C^{k\bullet}$ s'identifie à la sous-catégorie de la catégorie produit croisé (dual) de $\hat{A} . J^{k,r} . \hat{A}_o$ et $\hat{A}_o . J^{k,r} . \hat{A}_o$ formée des triplets $(\beta^r(bX), bX, X)$.*

Nous appellerons $(C^{k\bullet}, A^k)$ le *prolongement d'ordre k de $(C^\cdot, A)$.*

La source de $X \in C^{k\bullet}$ est $\alpha^r(X)$, son but $\beta^r(bX)$. Pour que X soit inversible, il faut et il suffit que bX soit inversible dans $J^{k,r}$ et que $\beta^r(X) = \dot{z}$, où $z \in C^\cdot_\gamma$. L'application $X \to bX$ définit un foncteur $r-k$ fois différentiable de $(C^{k\bullet}, A^k)$ vers la catégorie $r-k$ fois différentiable définie par $\hat{A}_o . J^{k,r} . \hat{A}_o$. L'application $j_C^{k',k} : j_x^k f \to j_x^{k'} f$, où $k' < k$, définit un foncteur $r-k$ fois différentiable, appelé foncteur canonique, de $(C^{k\bullet}, A^k)$ sur $(C^{k'\bullet}, A^{k'})$.

Puisque $(C^{k\bullet}, A^k)$ est une catégorie $r-k$ fois différentiable, on peut définir le prolongement d'ordre k' de $(C^{k\bullet}, A^k)$, pour tout $k' \leq r-k$; c'est une catégorie $r-k-k'$ fois différentiable. En particulier, on définit par récurrence $(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$, prolongement non holonome d'ordre k de $(C^\cdot, A)$, en posant : $(\tilde{C}^{0\bullet}, A^0) = (C^\cdot, A)$ et :

$$(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k) = ((\tilde{C}^{k-1\bullet})^{1\bullet}, (\tilde{A}^{k-1})^1).$$

PROPOSITION. *$(C^{k\bullet}, A^k)$ s'identifie à une sous-catégorie différentiable de $(\tilde{C}^{k\bullet}, A^k)$.*

Le composé des foncteurs canoniques

$$(\tilde{C}^{i\bullet}, \tilde{A}^i) \leftarrow (\tilde{C}^{i+1\bullet}, \tilde{A}^{i+1}) \leftarrow \cdots \leftarrow (\tilde{C}^{k-1\bullet}, \tilde{A}^{k-1}) \leftarrow (\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$$

est un foncteur $(r-k)$ fois différentiable $\tilde{j}_C^{i,k}$.

Soit $\overline{\varphi} = (A, \varphi, V) \in \tilde{\mathcal{C}}^r$. Soit V^k la classe des $X \in \hat{V} . J^{k,r} . \hat{A}$ tels que $\overline{\varphi} X \in C^k$. La classe $\overline{\varphi} V^k$ est appelée le prolongement d'ordre k de l'ensemble différentiable paramétré $(\varphi(\delta(V)), \overline{\varphi})$. Par récurrence, on définit le prolongement non holonome d'ordre k de $(\varphi(\delta(V)), \overline{\varphi})$.

Soit $\overline{\varphi} = (V', \varphi, V) \in \tilde{\mathcal{C}}^r$, où V est une sous-variété de A telle que $\delta(V)$ soit ouvert pour $\tau(A)$. Soit $O \in V'$ et $w = \overset{-1}{\varphi}(O)$; le couple $(w, j_w^\lambda A)$, où $j_w^\lambda A$ est le germe (jet local) de A autour de w, s'appelle variété élémentaire extraite de A. Soit W une variété extraite de A, c'est-à-dire une classe complète de variétés élémentaires extraites de A. On appelle *prolongement d'ordre k de W* la classe W^k des $X \in C^k$

tels qu'il existe une variété élémentaire extraite $(w, j_w^\lambda A)$ définie par $\overline{\varphi}$, où $w = \overset{-1}{\varphi}(O)$, et que $\overline{\varphi} X$ soit le jet de l'application constante sur O. On définit d'une manière analogue le prolongement non holonome d'ordre k de W, noté $\tilde{W}^k$.

PROPOSITION. *La classe des* $X \in \tilde{C}^{k+1}$ *tels que* $\tilde{j}_C^{k-1,k} X = z$, *où* $\beta^r(X) = \hat{z}$, *définit une sous-catégorie* $r-k-1$ *fois différentiable de* $(\tilde{C}^{k+1\bullet}, \tilde{A}^{k+1})$, *est appelée prolongement semi-holonome d'ordre 1 de* $(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$.

Par récurrence, on définit, en partant de $(C^{1\bullet}, A^1)$, le prolongement semi-holonome $(\overline{C}^{k\bullet}, \overline{A}^k)$ d'ordre k de $(C^\bullet, A)$, qui est une sous-catégorie $r-k$ fois différentiable de $(\tilde{C}^{k\bullet}, \tilde{A}^k)$ et qui admet pour sous-catégorie $r-k$ fois différentiable le prolongement ("holonome") $(C^{k\bullet}, A^k)$. Posons : $\overline{j}_C^{i,k} = (\overline{C}^{i\bullet}, \tilde{j}_C^{i,k}\iota, \overline{C}^{k\bullet})$.

La construction précédente peut s'appliquer à la catégorie r fois différentiable (non séparée) $(J^{0,r}, A^{0,r})$; on obtient de cette façon les catégories $r-k$ fois différentiables (non séparées) des jets non holonomes et semi-holonomes d'ordre k, associées à $\tilde{\mathcal{C}}^r$, notées respectivement $(\tilde{J}^{k,r}, \tilde{A}^{k,r})$ et $(\overline{J}^{k,r}, \overline{A}^{k,r})$. En particulier, si $k > 1$, on a :

$$\tilde{C}^k \subset \tilde{J}^{k,r} \quad \text{et} \quad \overline{C}^k \subset \overline{J}^{k,r}.$$

Soit V une variété r fois différentiable et $E = \delta(V)$. Soit $(C^\bullet, A)$ une catégorie r fois différentiable. On dira que $((C^\bullet, A), V, \kappa')$ est une *espèce de structures r fois différentiable*, ou que $(C^\bullet, A)$ est une catégorie r fois différentiable d'opérateurs sur V, relativement à κ', si les conditions suivantes sont vérifiées :

1) $(C^\bullet, E, \kappa')$ est une espèce de structures; soit $C^\bullet * E$ la classe des couples composables (i.e. tels que $\kappa'(f, z)$ soit défini) et soit p l'application canonique de E sur $C_o^\bullet$ telle que $p(z) = e$ si $(z, e) \in C^\bullet * E$ et $e \in C_o^\bullet$.

2) (A_o, p, V) est une surjection régulière.

3) Soit $A * V$ la sous-variété r fois différentiable de $A \times V$ produit fibré de (A_o, α, A) et de (A_o, p, V); alors κ' définit une application r fois différentiable de $A * V$ dans V.

La catégorie des hypermorphismes associée à $(C^\bullet, E, \kappa')$ est désignée par $(C^\bullet * E)^\bullet$.

THÉORÈME. *Soit* $((C^\bullet, A), V, \kappa')$ *une espèce de structures r fois différentiable et* $E = \delta(V)$. *Si, pour tout* $f \in C$, *l'application* $z \to \kappa'(f, z)$ *définit une surjection régulière de la sous-variété* $\overset{-1}{p}(\alpha(f))$ *de* V *dans* $\overset{-1}{p}(\beta(f))$ *et si* $(C^\bullet, A)$ *est régulièrement différentiable, alors* $((C^\bullet * E)^\bullet, A * V)$ *est une catégorie r fois régulièrement différentiable.*

L'application $z \to (p(z), z)$ définit un isomorphisme r fois différentiable de V

sur $(A * V)_o$.

Soit $((C^{\bullet}, A), V, \kappa')$ une espèce de structures r fois différentiable vérifiant les conditions du théorème précédent. Soit $((C^{\bullet} * E)^{\bullet}, A * V)$ la catégorie r fois différentiable des hypermorphismes correspondante. Soit $z \in E$ et $X \in C^k$ tels que: $\alpha^r(X) = \beta^r(p\hat{z})$, où $\hat{z}$ désigne le germe de V en z. Soit $[Xp, \hat{z}]$ le jet de source $\hat{z}$, de but le germe de $A * V$ en (f, z), où $\hat{f} = \beta^r(X)$, tel que $p_1[Xp, \hat{z}] = Xp$ et $p_2[Xp, \hat{z}] = \hat{z}$, en désignant par p_1 et p_2 les projections canoniques de $A * V$ vers A et V respectivement. Soit

$$X\hat{z} = (V, \kappa', A * V)[Xp, \hat{z}]$$

(jet de source $\hat{z}$ et de but $\hat{z}'$, où $z' = fz$, obtenu par prolongement de κ'). La catégorie $C^{k\bullet}$ opère sur E relativement à la loi de composition $\kappa'^k : (X, z) \to fz$. Soit $(C^{k\bullet} * E)^{\bullet}$ la catégorie des hypermorphismes correspondante.

THÉORÈME. *$((C^{k\bullet}, A^k), V, \kappa'^k)$ est une espèce de structures $r-k$ fois différentiable; $((C^{k\bullet} * E)^{\bullet}, A^k * V)$ est une catégorie $r-k$ fois régulièrement différentiable et s'identifie à une sous-catégorie du prolongement d'ordre k de $((C^{\bullet} * E)^{\bullet}, A * V)$ par l'application $(X, z) \to [Xp, \hat{z}]$.*

THÉORÈME. *Si $\eta' = (((C^{k\bullet} * E)^{\bullet}, A^k * V), V', \kappa'')$ est une espèce de structures $r-k$ fois différentiable, alors $\eta'' = ((C^{k\bullet}, A^k), V', \bar{\kappa}')$ est une espèce de structures $r-k$ fois différentiable, isomorphe à η', où $\bar{\kappa}'$ est la loi de composition*

$$(X, z') \to \kappa''((X, p'(z')), z'),$$

en désignant par p' la projection canonique de $\delta(V')$ dans $C_o^{k\bullet}$.

La $\tilde{\mathcal{C}}^r$- application covariante inversible définissant l'isomorphisme est $(\eta'', (\Phi, \varphi_o), \eta')$, où $\Phi(X, z') = ((X, p'(z')), z')$ et $\varphi_o(z) = z$, si $z \in E$.

THÉORÈME. *Les deux théorèmes précédents sont encore valables en y remplaçant C^k par $\bar{C}^k$.*

Le théorème de transitivité des prolongements d'une variété r fois différentiable W est un cas particulier des théorèmes précédents lorsqu'on prend pour $C^{\bullet}$ une sous-catégorie localement triviale de $\hat{W}.\bar{J}^{k,r}.\hat{W}$.

Soit $(C^{\bullet}, A)$ un groupoïde r fois différentiable et soit $\bar{C}_\gamma^{k\bullet}$ le sous-groupoïde de tous les éléments inversibles de $\bar{C}^{k\bullet}$. Supposons $k+3 < r$ et A de dimension finie. Soit φ un foncteur 3 fois différentiable section du foncteur de $\bar{C}_\gamma^{k\bullet}$ vers $\bar{C}_\gamma^{k-1\bullet}$ restriction de $\bar{j}_C^{k-1,k}$. Soit Φ la sous-variété de $\bar{C}^k$ définie par $\varphi(\bar{C}^{k-1})$ (on peut considérer Φ comme un système différentiel). Alors $(\varphi(\bar{C}^{k-1})^{\bullet}, \Phi)$ est un sous-groupoïde différentiable de $\bar{C}^{k\bullet}$.

THÉORÈME. *Soit Σ la classe des applications k fois différentiables σ de A_o dans A*

telles que $a.\sigma = A_o$, *que* $b.\sigma$ *soit un automorphisme de* A_o *et que* $j_x^k \sigma \in \Phi$ *pour tout* $x \in C_o^{\bullet}$. *Alors* Σ *est canoniquement muni d'une structure de groupe de Lie.*

Ce qui précède permet d'étudier les sous-groupoïdes $r-1$ fois différentiables $(C^{\bullet}, A)$ de $((\hat{V}.\Pi^{k,r}.\hat{V})^{\bullet}, A_V^{k,r})$, où V est une variété r fois différentiable et $A_V^{k,r}$ la sous-variété de $A^{k,r}$ définie par $\hat{V}.\Pi^{k,r}.\hat{V}$. En particulier ces résultats s'appliquent à la théorie des G-structures (cas où $(C^{\bullet}, A)$ est localement trivial) et à la théorie des connexions d'ordre supérieur.

NOTES. Les notations utilisées sont celles de :

Catégories et structures (cours multigraphié, Paris 1964) et d'une série de Notes à l'Académie des Sciences : 233, 1951, p. 598, 777, 1081; 234, 1952, p. 587, 1028, 1424 ; 239, 1954, p. 1762; 240, 1955, p. 397, 1755.

Voir aussi : *Sur les connexions d'ordre supérieur,* Atti V Congresso Un. Mat. It., 1956.

La notion de catégorie r fois différentiable est définie dans :

Catégories topologiques et catégories différentiables, Coll. Géo. diff. Globale, Bruxelles, 1959, p. 137,

Catégories structurées. Ann. Ec. Norm. Sup. 1963.

Le dernier théorème se ramène au cas $k = 1$, indiqué dans une conférence au Congrès de l'Union Mat. Argentina (Cordoba, 1959) :

Grupoides diferenciables y pseudogrupos de Lie, Rev. Un. mat. Argentina, XIX, 1960.

Un cas particulier du théorème est démontré dans *Sur les pseudogroupes de Lie de type fini,* C.R.A.S. 246, 1958, p. 360.

Les résultats esquissés dans cet article, ainsi que leurs applications à la théorie des connexions d'ordre supérieur, ont fait l'objet de plusieurs cours et seront prochainement développés dans un livre.

/111/

ESPACES FIBRÉS

par A. et C. EHRESMANN

Ce texte reproduit un chapitre d'un cours de Maîtrise fait en 1971 par C. Ehresmann à l'Université Paris VII et par A. Ehresmann à l'Université d'Amiens. C'est la seule partie de ce cours qui a été multigraphiée, car elle contient des résultats encore inédits.

1. Définitions et exemples.

A. Une catégorie C est dite *transitive* si l'ensemble $e'.C.e$ des morphismes de e vers e' est différent du vide quelles que soient les unités e et e' de C.

Rappelons qu'une *catégorie topologique* est un couple (C, T), où C est une catégorie et T une topologie sur l'ensemble $\underline{C}$ des morphismes de C telle que :

1. Les applications source α et but β définissent des applications continues

$$a : T \to T \quad \text{et} \quad b : T \to T.$$

2. La loi de composition définit une application continue k de la topologie produit fibré $a \vee b$ (induite par $T \times T$ sur la classe

$$C * C = \alpha \vee \beta$$

des couples composables) vers T.

On pose alors $T_0 = T/C_0$ (où C_0 est la classe des unités) et on appelle (C_0, T_0) la *base de* (C, T).

Un groupoïde topologique est une catégorie topologique (C, T) où C est un groupoïde dont l'inversion définit une application continue de T sur T. Il est appelé *localement trivial* si, pour toute unité e, il existe un voisinage U de e dans T_0 et une application continue s de T_0/U vers T telle que

$$a(s(x)) = e \quad \text{et} \quad b(s(x)) = x$$

pour tout $x \in U$.

B. Rappelons qu'une *espèce de structures* est un triplet (C, E, k') où C est une catégorie, E un ensemble, k' une application $(h, z) \mapsto hz$ d'une partie C∗E de C×E dans E telle que :

1. Si les composés $h'.h$ et $h\,z$ sont définis, alors les deux composés $(h'.h)z$ et $h'(h\,z)$ sont définis et égaux.
2. Pour chaque $z \in E$, il existe une et une seule unité e de C (notée $\pi(z)$) telle que $e\,z$ soit défini, et on a $e\,z = z$.
3. $h\,z$ est défini ssi $\alpha(h) = \pi(z)$.

Une *espèce de structures topologiques* est un triplet

$$\eta = ((C, T), T', k')$$

où (C , T) est une catégorie topologique, T' une topologie sur un ensemble $E = \underline{T'}$ et (C, E, k') une espèce de structures telle que

1. La projection canonique : $z \to \pi(z)$ définit une application continue de T' vers T.
2. La composition k' définit une application continue de T∗ T' induite par T×T' sur C∗E vers T'.

On appelle *espace fibré* une espèce de structures topologiques η où (C, T) est un groupoïde localement trivial ; on appelle alors

$$(\pi^{-1}(e), T'/\pi^{-1}(e))$$

la fibre sur e , et (e.C. e, T/e.C. e) le groupe structural (topologique) en e pour toute unité e de C. En particulier, si C est transitif, toutes les fibres sont homéomorphes, tous les groupes structuraux isomorphes.

C. **Exemple.** Soit $\mathbf{C}^{n+1}$ l'espace complexe de dimension complexe $2n+1$; soit S^{2n+1} la sphère de dimension $2n+1$, c'est-à-dire l'ensemble des

$$(z_i)_{i<n} \in \mathbf{C}^{n+1} \quad \text{tels que} \quad z_0\bar{z}_0 + z_1\bar{z}_1 + \dots + z_n\bar{z}_n = 1,$$

muni de la topologie T induite par celle de $\mathbf{C}^{n+1}$.

Par définition, l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^n$ de dimension (complexe) n est l'espace topologique quotient de $\mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence r :

$$z \sim z' \quad \text{ssi} \quad z' \in \mathbf{C}z.$$

On montre que $\mathbf{P}^n$ est isomorphe à l'espace topologique quotient de S^{2n+1}, par la relation d'équivalence induite par r ; les classes d'équivalence sont alors les cercles $\mathbf{C}z \cap S^{2n+1}$.

Soit K le groupoïde topologique des couples

$$((S^{2n+1}\times S^{2n+1})^{o},\ T\times T).$$

On considère sur $S^{2n+1}\times S^{2n+1}$ la relation d'équivalence ρ définie par

$$(z',\ z) \sim (k\ z',\ k\ z) \quad \text{ssi} \quad k \in \mathbf{C} \quad \text{et} \quad |k| = 1.$$

On montre facilement :

Proposition 1. *Il existe un groupoïde topologique, soit* $(H,\ T)$, *quotient de* K *par* ρ*; c'est un groupoïde topologique localement trivial dont la base est homéomorphe à* $\mathbf{P}^n$*. De plus* $((H,\ T), S^{2n+1},\ k')$ *est un espace fibré, où* k' *est l'application*

$$(f,z) \mapsto z' \qquad ssi \quad f = (z',\ z) \ mod\ r.$$

Les fibres sont les cercles, le groupe structural étant isomorphe au groupe des rotations du cercle.

2. Fibrations principales.

On appelle *catégorie topologique pointée* un triplet $(C,\ T,\ e)$ où $(C,\ T)$ est une catégorie topologique et e une unité.

Proposition 1. *Soit* $(C,\ T, e)$ *un groupoïde topologique pointé ; on pose*

$$H = C.e = \{h \in C \mid \alpha(h) = e\}\ , \quad T' = T/H.$$

Si K *est la sous-catégorie de* C *engendrée par* H *, le triplet* $(K,\ T',\ e)$ *vérifie les conditions suivantes :*

1° K est une catégorie, $e \in K_0$, $K_0 = \beta(H)$, où $H = K.e$, $e.K.e$ est un groupe G, T' une topologie sur H, si $(h',h) \in H^2$ et $b(h') = b(h)$, il existe un et un seul

$$g_{h'h} \in G \quad tel\ que \quad h'.g_{h'h} = h\ .$$

2° $(G,\ T'/G)$ est un groupe topologique ; les applications

$$(h,\ g) \mapsto h.g \qquad où \quad (h,g) \in H\times G\ ,$$
$$(h',\ h) \mapsto g_{h'h} \quad où \quad (h',h) \in H\times H \quad et \quad \beta(h') = \beta(h)\ ,$$

définissent des applications continues de $T'\times T'/G$ vers T' et de $T'\times T'/\alpha\vee\beta$ vers T'/G respectivement.

Si (C,T) est localement trivial et C transitif, on a de plus :

3° T_0 est la topologie image de T' par β et pour tout $h \in H$ il existe un voisinage U de $\beta(h)$ dans T_0 tel que $T'/U.H$ soit homéomorphe à $T_0/U \times T'/G$.

4° Pour tout $x \in K_0$, il existe un voisinage U de x dans la topolo-

gie T_0 *image de* T' *par* β, *et une application continue*

$$d : T/U \to T'' \text{ telle que } \beta(d(x')) = x' \text{ pour tout } x' \in U.$$

Δ. Les deux premières conditions sont évidentes, $g_{h'h}$ étant égal à $h'^{-1}.h$. Supposons (C, T) localement trivial et C transitif, et soit $x \in K_0$. Par hypothèse, il existe $h \in x.C.e$ et une application continue s: $T_0/U \to T$, où U est un voisinage de x dans T_0, telle que

$$s(x') \in x'.C.x \qquad \text{pour tout } x' \in K_0.$$

L'application $d : x' \mapsto s(x').h$ définit une application continue d de T_0/U dans T' telle que

$$d(x') \in x'.H \qquad \text{pour tout } x' \in U.$$

De plus l'application

$$\underline{f} : h' \mapsto (b(h'), g), \qquad \text{où } g = g_{d(b(h'))h'}, \quad h' \in U.H,$$

définit une application continue f de T/U.H vers $T_0/U \times T/G$, qui est un homéomorphisme, car elle admet pour inverse l'application continue

$$(x', g) \mapsto d(x').g \qquad \text{de } T_0/U \times T/G \text{ vers } T/U.H.$$

Puisque

$$U.H = \beta^{-1}(U) \qquad \text{et} \qquad \beta' = b/U.H = p.f$$

où p est la projection canonique de UxG sur U, l'application continue β': $T' \to T_0/U$ est ouverte ; a fortiori T_0 est la topologie image de T' par β'. ∇

Proposition 2. *Soit* (K, T'') *une catégorie topologique vérifiant la condition 1 de la Proposition 1. Si* $\{e\}$ *et* K_0 *sont fermés dans* T'' *(par exemple, si* T'' *est séparée), alors* T'' *est la topologie somme fibrée de*

$$(\{e\} \hookrightarrow T''_0, \ \{e\} \hookrightarrow T'), \quad \text{où} \quad T' = T''/H.$$

Δ. Soit T la topologie somme fibrée. T est plus fine que T'' et l'on a

$$T/K_0 = T''_0 \qquad \text{et} \qquad T/H = T'.$$

Comme K_0 et $H = \alpha^{-1}(e)$ sont fermés dans T'', on trouve

$$T''/H' = T/H', \quad \text{où} \quad H' = H \setminus \{e\}.$$

Enfin, si V est un voisinage de e dans T, il existe des voisinages U et V' de e dans T''_0 et dans T'' tels que

$$U\, U(V' \cap H) \subset V\ .$$

Il s'ensuit que $\beta^{-1}(U) \cap V'$ est un voisinage de e dans T'' contenu dans V. Ainsi T'' = T. ∇

Remarque. Avec les hypothèses de la Proposition 1 et si T est séparée, la topologie T/K est entièrement déterminée par la donnée de T_0 et de T' ; par suite le triplet (K, T', e) définit bien la sous-catégorie topologique (K, T/K) de (C, T).

Définition. On appelle *fibration principale (resp. presque principale)* un triplet (K, T', e) vérifiant les conditions 1, 2 et 4 (resp. 1 et 2) de la Proposition 1.

La fin de la preuve de la Proposition 1 n'utilisant que les propriétés 1, 2 et 4, elle montre que, si (K, T', e) est une fibration principale, la condition 3 de cette proposition est satisfaite.

Soit **U** un univers. Nous noterons $\mathbf{L}_0$ l'ensemble des groupoïdes topologiques pointés (C, T, e) tels que C soit transitif et C $\in$ **U**. Soit **L** la catégorie des foncteurs continus pointés entre éléments de $\mathbf{L}_0$; ses éléments sont les

$$\hat{f} = ((\hat{C}, \hat{T}, \hat{e}), f, (C, T, e)) \in \mathbf{L}_0 \times \mathbf{M} \times \mathbf{L}_0$$

tels que f définisse un foncteur $C \to \hat{C}$ et une application continue $T \to \hat{T}$, et que $\hat{e} = f(e)$. Soit $\mathbf{L}'_0$ la sous-classe de $\mathbf{L}_0$ ayant pour éléments les (C, T, e) tels que (C, T) soit un groupoïde localement trivial, et **L'** la sous-catégorie pleine de **L** ayant $\mathbf{L}'_0$ pour classe d'objets.

Soit $\mathbf{H}_0$ l'ensemble des fibrations presque principales (K, T', e), où K $\in$ **U**. Soit **H** la catégorie des *homomorphismes entre fibrations presque principales associée à* **U** ; ses éléments sont les triplets

$$((\hat{K}, \hat{T}', \hat{e}),\ g,\ (K, T', e)) \in \mathbf{H}_0 \times \mathbf{M} \times \mathbf{H}_0$$

tels que $g\colon K \to \hat{K}$ soit un foncteur, que $g(e) = \hat{e}$ et que $g_\iota\colon T' \to \hat{T}'$ soit une application continue. Soit **H'** la sous-catégorie pleine de **H** ayant pour classe d'objets l'ensemble $\mathbf{H}'_0$ des fibrations principales appartenant à $\mathbf{H}_0$. (**M** est la catégorie des applications entre éléments de **U**.)

D'après la Proposition 1, il existe un foncteur canonique P de **L** vers **H**. Ce foncteur associe le triplet (K, T', e) défini dans la Proposition 1 (et qui est une fibration presque principale) à (C, T, e) ; de plus

$$P(\hat{f}) = (P(\hat{C}, \hat{T}, \hat{e}), f', (K, T', e)),$$

où f' est la restriction de f à $(K, \hat{K})$.

P admet pour restriction un foncteur P' de **L'** vers **H'** (Proposition 1).

Proposition 3. *Le foncteur* P *définit une équivalence de* **L** *vers* **H**, *et le foncteur* P' *une équivalence de* **L'** *vers* **H'**.

Δ. Il nous suffit de prouver que, si $(K, T', e) \in \mathbf{H}_0$, il existe une P-structure libre $(\hat{C}, \hat{T}, \hat{e})$ associée telle que

$$(K, T', e) \quad \text{et} \quad P(\hat{C}, \hat{T}, \hat{e})$$

soient isomorphes dans **H** et que, si de plus $(K, T', e) \in \mathbf{H}'_0$, alors

$$(\hat{C}, \hat{T}, \hat{e}) \in \mathbf{L}'_0 .$$

1° Supposons que K soit une catégorie vérifiant la condition 1 de la Proposition 1 et telle que $K \in \mathbf{U}$. Montrons qu'il existe un groupoïde transitif C et un foncteur injectif $j : K \to C$ tels que j soit un $(\mathbf{F'}, \mathbf{F})$-projecteur, où **F'** est la sous-catégorie pleine de la catégorie **F** des foncteurs associés à **U** ayant pour objets les groupoïdes.

a) Considérons le groupoïde $(H\mathrm{x}H)^o$ des couples de H et la relation r sur HxH ayant pour graphe l'ensemble des couples

$$((h', h), (h'.g, h.g)), \quad \text{où} \quad (h', h) \in H\mathrm{x}H \quad \text{et} \quad g \in G .$$

On voit facilement que r est une relation d'équivalence bicompatible sur $(H\mathrm{x}H)^o$ et que, si

$$(h', h) \in H\mathrm{x}H \quad \text{et} \quad (h.g, h.g) \sim (h, h) ,$$

il existe

$$(h'.g, h.g) \in (h', h) \mod r$$

de source $(h.g, h.g)$. Donc, il existe un groupoïde C quotient strict de $(H\mathrm{x}H)^o$ par r. Nous noterons :

$$/h', h/ = (h', h) \mod r, \qquad /h, h'/ = /h', h/^{-1}.$$

Puisque H appartient à **U**, il en est de même pour HxH, donc pour son quotient C.

b) Si $x \in K_0$ et si h et h' appartiennent à $x.K.\,e$, on voit que

$$/h', h'/ = /h, h/, \quad \text{car} \quad h = h'.g_{h'h}$$

(condition 1). Il en résulte qu'on définit une application j de K dans C en posant :

$$j(x) = /h, h/ \qquad \text{si} \quad x \in K \quad \text{et} \quad h \in x.H.e,$$
$$j(h) = /h, e/ \qquad \text{si} \quad h \in H.$$

Cette application est injective, et elle définit un foncteur $\hat{j}$ de K vers C. De plus $C = j(K)^{-1}.j(K)$, étant donné que

$$/h', h/ = /h', e/./e, h/ = j(h')^{-1}.j(h).$$

A fortiori, C est transitif.

c) Soit S un groupoïde et $f : K \to S$ un foncteur. L'application :

$$(h', h) \to f(h')^{-1}.f(h), \quad \text{où} \quad (h', h) \in H \times H,$$

définit un foncteur de $(H\times H)^o$ vers S compatible avec r. On en déduit qu'il existe un unique foncteur

$$f' : C \to S \quad \text{tel que} \quad f'.j = f,$$

à savoir

$$f'(/h', h/) = f(h')^{-1}.f(h).$$

Ceci prouve que $\hat{j}$ est un (**F'**, **F**)-projecteur.

2° Supposons que (K, T', e) soit une fibration presque principale et que $K \in$ **U**. Avec les notations de la Partie 1, notons de plus T la topologie sur $\underline{C}$ quotient de $T'' = T'\times T'$ par r. Montrons que

$$(C, T, \hat{e}), \quad \text{où} \quad \hat{e} = j(e) = /e, e/,$$

est une P-structure libre associée à (K, T', e).

a) r est une relation d'équivalence ouverte sur T''. En effet, soit W un ouvert de T'' ; son saturé W' par r est la réunion des Wg pour $g \in G$, où $W g$ désigne l'ensemble des éléments

$$(h'.g, h.g) \quad \text{tels que} \quad (h', h) \in W \quad \text{et} \quad g \in G.$$

Soit $g \in G$; l'application $h \mapsto h.g$, où $h \in H$, définit un homéomorphisme, $\bar{g}$, de T' sur T' d'après la condition 2, dont l'inverse est défini par l'application $h' \mapsto h'.g^{-1}$. L'application

$$(h', h) \mapsto (h'.g, h.g)$$

définit l'homéomorphisme $\bar{g}\times\bar{g}$ de T'' sur T'' ; donc $Wg = \bar{g}\times\bar{g}(W)$ est T''-ouvert. Par conséquent W' est ouvert pour T''.

b) Les applications source, but et passage à l'inverse dans C définissent des applications continues de T vers T, à savoir les applications continues quotients des applications continues source, but et passage à l'inverse relatives au groupoïde topologique $((H\times H)^o, T'')$. Comme r est ouvert pour T'', la topologie quotient $T''\times T''/r\times r$ est homéomorphe à la topologie produit TxT. Soit $r*r$ la relation d'équivalence induite par $r\times r$ sur la classe A des couples composables. La loi de composition de C définit une application continue de $T''*T''/r*r$ vers T, quotient de la loi de composition continue de $((H\times H)^o, T'')$. Pour prouver que (C, T) est un groupoïde topologique, il nous suffit de voir que $T''\times T''/r\times r$ est homéomorphe à

$$T*T = T\times T/C*C .$$

c'est-à-dire que $T''*T''/r*r$ est la topologie induite par $T''\times T''/r\times r$ sur $A/r*r$. Ceci revient à prouver que, si W est un ouvert de $T''*T''$ saturé pour $r*r$, il existe un ouvert de $T''\times T''$ saturé pour $r\times r$ dont W soit la trace sur A. Pour cela supposons

$$u = ((c'', c'), (c', c)) \in W.$$

Il existe des voisinages V'' de c'', V' de c' et V de c dans T' tels que

$$W' \subset W, \quad \text{où} \quad W' = ((V''\times V')\times(V'\times V))\cap A.$$

D'après la condition 2, il existe des voisinages ouverts Y de e dans T'/G et Y'' de c'' dans T' tels que $Y''.Y \subset V''$. Il existe aussi un voisinage ouvert Y' de c' dans T' tel que $Y' \subset V'$ et que

$$g \in Y \quad \text{lorsque} \quad h' \in Y' \quad \text{et} \quad h'.g \in Y'.$$

Le saturé de $((Y''\times Y')\times(Y'\times V))$ pour $r\times r$ contient un voisinage ouvert Wu de u dans $T''\times T''$. Si nous montrons que $Wu\cap A \subset W$, il s'ensuivra que : $W = \bar{W}\cap A$, où $\bar{W}$ est l'ouvert de $T'\times T'$ saturé pour $r\times r$ réunion des Wu, $u \in W$. Or un élément de Wu est de la forme

$$u' = ((h''.g', \bar{h}'.g'), (h'.g, h.g)),$$
$$((h'', \bar{h}'), (h', h)) \in (Y''\times Y')\times(Y'\times V), \quad \text{où} \quad g \in G \quad \text{et} \quad g' \in G.$$

On a

$$u' \in Wu\cap A \quad \text{ssi} \quad \bar{h}'.g' = h'.g.$$

Dans ce cas les relations

$$\bar{h}' \in Y', \quad h' \in Y' \quad \text{et} \quad h' = \bar{h}'.g'.g^{-1}$$

entraînent $g'.g^{-1} \in Y$. Comme

$$h''.g' = \bar{h}''.g', \quad \text{où} \quad \bar{h}'' = h''.g'.g^{-1} \in Y''.Y \subset V'',$$

u' est équivalent à $((\bar{h}'', h'), (h', h))$, lequel appartient à $W' \subset W$. Puisque W est saturé pour $r*r$, on en déduit $u' \in W$, ce qui prouve l'affirmation.

c) Ceci montre que $(C, T, \hat{e})$, où $\hat{e} = /e, e/$, appartient à $\mathbf{L}_0$.

De plus, j' définit une application continue $T' \to T$, de sorte que

$$\bar{J} = (P(C, T, \hat{e}), j', (K, T', e)) \in \mathbf{H}.$$

en notant j' la restriction de j à $(j(K), K)$. Montrons que j est inversible, c'est-à-dire que $j'\iota : T' \to T/j(H)$ est un homéomorphisme. Ceci revient à montrer que $T''/H\times\{e\}$ est homéomorphe à $T/j(H)$, i.e. que tout ouvert W de $T''/H\times\{e\}$ est la trace sur $H\times\{e\}$ d'un ouvert de T'' saturé pour r. En effet, soit $(h, e) \in W$. Il existe un voisinage ouvert V' de h dans T' tel que $V'\times\{e\} \subset W$. D'après la condition 2, il existe des voisinages V'' de h dans T' et V de e dans T' tels que $V''.(V\cap G) \subset V'$, et l'on peut supposer

$$V\cap G = (V\cap G)^{-1},$$

le groupe (G, T'/G) étant topologique. Le saturé pour r de $V''\times V$ est un voisinage ouvert Wh de (h, e) dans T''. Tout $u \in$ Wh est de la forme

$$(h'.g,\ h''.g), \quad \text{où} \quad h' \in V'', \quad h'' \in V \quad \text{et} \quad g \in G.$$

Il appartient à $H\times\{e\}$ ssi $h''.g = e$; dans ce cas

$$g = h''^{-1} \in (V\cap G)^{-1} \subset V \quad \text{et} \quad h'.g \in V''.(V\cap G) \subset V',$$

d'où

$$u = (h'.g,\ e) \in W.$$

La réunion W' des Wh, $h \in V'$, est un ouvert de T'' saturé pour r, et on on a $W = (H\times\{e\})\cap W'$.

d) Soit $(S, T_S, e') \in \mathbf{L}_0$ et

$$\bar{f} = (P(S, T_S, e'), f, (K, T', e)) \in \mathbf{H}\ .$$

Nous avons vu que l'application

$$f' : /h', h/ \mapsto f(h')^{-1}.f(h)$$

définit l'unique foncteur $C \to S$ tel que $f'.j = f$. L'application

$$(h', h) \mapsto f'(/h', h/)$$

est continue de T'' vers T_S, car (S, T_S) est un groupoïde topologique. Il s'ensuit que, par passage au quotient, $f' : T \to T_S$ est continue.

$$\hat{f}' = ((S, T_S, e'), f', (C, T, e)) \in \mathbf{L}$$

est l'unique élément de $\mathbf{L}$ vérifiant

$$P(f').\bar{J} = \bar{f}.$$

Donc $((C, T, \hat{e}), \bar{j})$ est un P-projecteur, et $\bar{j} \in \mathbf{H}$. Le foncteur P admet un adjoint Q, et P.Q est équivalent au foncteur identique de $\mathbf{H}$. Ceci prouve que les catégories $\mathbf{L}$ et $\mathbf{H}$ sont équivalentes.

3° Avec les mêmes hypothèses et en notant T'_0 la topologie image de T' par β, montrons que l'application j'' restriction de j à K_0 définit un homéomorphisme de T'_0 sur T_0. Par construction, j'' est une bijection et définit une application continue $T'_0 \to T_0$, car

$$h \mapsto (h, h) \mapsto /h, h/$$

définit une application continue de T' vers T_0. Inversement, soit

$$x \in K_0 , \quad h \in x.H$$

et U un voisinage ouvert de x dans T'_0 ; l'ensemble $U.H = \beta^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert V de h dans T', et VxV est un voisinage ouvert de (h, h) dans T'' saturé pour r. Par suite $j''(U)$ est un voisinage ouvert de $\hat{x} = j''(x)$ dans T_0, puisque

$$j''(U) = \hat{r}\,(V \times V) \cap C$$

où $\hat{r}$ est la surjection canonique de HxH sur C. Ceci montre que j'' est un homéomorphisme.

4° Supposons de plus (K, T', e) dans $\mathbf{H}'$, et montrons que (C, T) est un groupoïde localement trivial, d'où il résultera que $(C, T, \hat{e})$ est aussi une P'-structure libre associée à (K, T', e) et, a fortiori, que que les catégorie $\mathbf{L}'$ et $\mathbf{H}'$ sont équivalentes. En effet, supposons

$$\hat{x} = /h, h/ \in C_0 .$$

Si U est un voisinage de $x = j''^{-1}(\hat{x})$, dans T'_0, la partie 3 affirme que $U' = j''(U)$ est un voisinage de $\hat{x}$ dans T_0. On peut prendre pour U un voisinage tel qu'il existe une application continue

$$d\colon T'/U \to T', \quad \text{où} \quad d(x') \in x'.H \quad \text{si } x' \in U.$$

L'application

$$\hat{x}' \mapsto /d(x'), h/, \qquad x' = j''^{-1}(\hat{x}'),$$

définit une application continue s de T_0/U' vers T telle que

$$s(\hat{x}') \in \hat{x}'.G \qquad \text{pour tout } \hat{x}' \in U'.$$

Donc (C, T) est localement trivial. ∇

Il y a donc équivalence entre les notions de fibrations principales et groupoïdes localement triviaux pointés.

3. Applications fibrantes.

La notion de fibration principale peut être présentée sous une forme un peu différente.

Soit (K, T', e) une fibration principale ; nous reprenons les notations de la définition et nous posons $T_G = T'/G$. Alors les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mu = ((G^*, T_G), T', k')$ est une espèce de structures topologique, i.e. le groupe topologique (G, T_G) opère continuement à droite sur (H, T') relativement à la loi $k' : (h, g) \mapsto h.g$.

2. Soit (B, T_B) l'espace topologique quotient de T' par la relation d'équivalence ρ :

$$h \sim h' \quad \text{ssi on a} \quad h' \in h.G$$

Pour tout $\hat{x} \in B$, il existe un voisinage U de $\hat{x}$ dans T_B, et une application continue d: $T_B/U \to T'$ telle que

$$\hat{x}' = d(\hat{x}') \bmod \rho \qquad \text{pour tout} \qquad \hat{x}' \in U.$$

3. (G^*, T_G) opère simplement sur (H, T'), i.e. si h et h' appartiennent à H et si $h' \in h.G$, il existe un et un seul $g \in G$ tel que $h' = h.g$; de plus l'application $(h', h) \mapsto g$ définit une application continue de T''_A vers T_G, où T''_A est la topologie induite par T'xT' sur le graphe de ρ.

4. b': $T' \to T'_0$ est une application continue définie par $\beta\iota$: $H \to K_0$.

5. Pour tout élément x de K_0, il existe un voisinage U de x dans T'_0 et un homéomorphisme f de $T'_0/U \times T_G$ sur $T'/b'^{-1}(U)$ tel que :

$$b'(f(x', g')) = x' \quad \text{et} \quad f(x', g'.g) = f(x', g').g$$

si $x' \in U$, $g \in G$ et $g' \in G$. (En effet, avec les notations de la condition 4 de la Proposition 1-2, on peut prendre pour f l'application

$$(x', g) \mapsto d(x').g. \;)$$

La condition 5 est équivalente à la suivante :

5'. Pour toute unité x de K, il existe un voisinage U de x dans T'_0 et un isomorphisme covariant (μ_1, T_G, f, μ), où μ est l'espèce de structures topologique, triviale,

$$((G^*, T_G), T'/U \times T_G, \hat{k}'), \quad \text{si} \quad \hat{k}' : ((x', g'), g) \mapsto (x', g'.g)$$

et μ_1 la sous-espèce de structures topologique

$$((G^*, T_G), T'/b'^{-1}(U), k_1) \quad \text{de} \quad \mu.$$

Proposition 1. *Notons* (G, T_G) *un groupe topologique d'opérateurs à droite sur un espace topologique* (H, T')*; supposons les conditions 2 et 3 (resp. 4 et 5) ci-dessus vérifiées. Alors, pour tout* $e \in H$ *il existe une fibration principale* (K, T', e), *dont le groupe structural* $e.K.e$ *en* e *soit isomorphe à* (G, T_G), *et les conditions 4 et 5 (resp. 2 et 3) sont vérifiées.*

Δ. Notons b' la projection canonique $T' \to T_B$ associée à p (notons $T_B = T'_0$, $B = \underline{T}$) et soit $K = H \cup B \setminus \{b'(e)\}$. L'application $g \to e.g$ définit un isomorphisme de (G, T_G) sur un groupe topologique $(\bar{G}, T'/\bar{G})$, où $\bar{G} \subset H$. On obtient une catégorie K en posant :

$$\begin{array}{lll} h.\hat{g} = h.g & \text{si} & h \in H \quad \text{et} \quad \hat{g} = e.g \in \bar{G}, \\ x.h = h & \text{si} & h \in H \quad \text{et} \quad x = b'(h) \neq e, \\ x.x = x & \text{si} & x \in B. \end{array}$$

Cette catégorie admet $\bar{G}$ pour sous-groupe (e.K.e), et l'application but b est définie par :

$$b'(h) = b(h) \quad \text{si} \quad h \in H \setminus \{e\}, \qquad b(x) = x \quad \text{si} \quad x \in (B \setminus \{b'(e)\}) \cup \{e\}.$$

De plus la topologie T''_0 image de T' par b est homéomorphe à la topologie T_B car T_B est l'image de T' par b'.

1° Si les conditions 2 et 3 sont satisfaites, (K, T', e) est évidemment une fibration principale, de sorte que les conditions 4 et 5 sont aussi vérifiées, en prenant pour T'_0 la topologie image de T' par b.

2° Supposons les conditions 4 et 5 vérifiées et soit h et h' deux éléments de K de même but x, et f un homéomorphisme dont la condition 5 assure l'existence. Si h_0 et h'_0 sont des éléments de H tels que

$$b(h_0) = b(h'_0) = x' \in U$$

on a

$$h_0 = f(x', g), \quad h'_0 = f(x', g') = f(x', g).(g^{-1}.g') = h.(g^{-1}.g'),$$

et $\hat{g}'' = (g^{-1}.g').e$ est l'unique élément de $\bar{G}$ vérifiant $h'_0 = h_0.\hat{g}''$. On voit que l'application $(h'_0, h_0) \mapsto \hat{g}''$ définit une application continue de $T' \times T'/b' \vee b'$ vers $T'/\bar{G}$. Enfin l'application

$$x' \mapsto f(x', g) \quad \text{si} \quad x' \neq e, \qquad e \mapsto f(b'(e), g) \quad \text{si} \quad e \in U$$

définit une application continue de T''_0/U vers T'. Il s'ensuit que le triplet (K, T', e) est une fibration principale et que les conditions 2 et 3 sont remplies. ∇

Définition. On appelle *application fibrante principale* un couple (b', μ) vérifiant les condition 1, 4 et 5. On appelle *application fibrante* une application continue $b' : T' \to T'_0$ telle que, pour tout $x \in \underline{T'_0}$, il existe un voisinage U de x dans T'_0 et un homéomorphisme de $T'/b'^{-1}(U)$ sur un produit $T'_0/U \times T_F$, où T_F est une topologie donnée, appelée fibre de b'.

Si (b', μ) est une application fibrante principale, b' est une application fibrante. Si ((C, T), T'_E, k') est un espace fibré et si C est transitif, la projection canonique de T'_E sur T_0 est aussi une application fibrante.

4. Espaces fibrés associés à une fibration principale.

Soit μ = ((C, T), T_E, k') une espèce de structures topologique, où C est un groupoïde transitif et (C, T) un groupoïde topologique. Notons (K, T', *e*) la fibration quasi-principale associée à $e \in C_0$ et reprenons pour elle les notations de la Proposition 1-2. Alors les conditions suivantes sont vérifiées :

1° (K, E, k') est une espèce de structures, où $k'(h, z) = hz$; soit π la projection associée et E_x la fibre sur *x*.

2° $\pi : T_E \to T'_0$ est une application continue ; on pose

$$T_x = T_E / E_x .$$

3° La restriction de k' à $H \times E_e$ définit une application continue de $T' \times T_e$ vers T_E.

4° Si $h \in H$, l'application $z \mapsto hz$ définit un homéomorphisme $\hat{h}$ de T_e vers $T_{b(h)}$; l'application $(h, z') \mapsto \hat{h}^{-1}(z')$ définit une application continue de $T' \times T_E / \pi V \beta$ vers T_E.

Définition. Soit (K, T', *e)* une fibration quasi-principale. On appelle *espace fibré associé à* (K, T', e) un triplet (K, T_E, k') vérifiant les conditions 1, 2, 3 et 4 précédentes.

Proposition 1. *Soit* (K, T', k') *un espace fibré associé à la fibration quasi-principale* (K, T', *e)* *et* (C, T, *ê)* *le groupoïde topologique, projection de* (K, T', *e)* *(Proposition 3-1). Il existe une et une seule espèce de structures topologique* ((C, T), T', $\hat{k}'$) *telle que* (K, E, k') *soit isomorphe à une sous-espèce de structures de* (C, E, $\hat{k}'$).

Δ. Soit **U** un univers auquel appartient E et **M** et **T** les catégories des applications et des applications continues correspondantes. Soit F le foncteur de K vers **M** définissant l'espèce de structures (K, E, k'). La condition 4 signifie qu'il existe un et un seul foncteur $\bar{F}$ de K vers le groupoïde des homéomorphismes tel que $\theta.\bar{F} = F$, où θ est le foncteur d'oubli de **T** vers **M.** D'après la preuve de la Proposition 3-2 (dont nous reprenons les notations), Partie 1, il existe un et un seul foncteur $\bar{F}'$ de C vers **T** tel que $\bar{F}'.j = \bar{F}$, en notant *j* le foncteur canonique de K vers C. Le foncteur $F' = \theta.\bar{F}'$ définit une espèce de structures (C, E, $\hat{k}'$), et (K, E, k') est isomorphe à la sous-espèce de structures

$$(j(K),\ E,\ k'') \quad \text{de} \quad (C,\ E,\ \hat{k}').$$

La projection canonique $\hat{\pi}$ de E sur C_0 définit une application continue de T_E sur T_0, car c'est la composée des applications continues (Proposition 3-1, preuve)

$$j : T'_0 \to T_0 \quad \text{et} \quad \pi : T_E \to T'_0 .$$

L'application $\hat{k}'$ est l'application :

$$(/h',\ h/,\ z) \mapsto h'(h^{-1}(z)) \quad \text{ssi} \quad \hat{\pi}(z) = b(h).$$

La relation d'équivalence définissant C (notée r) est ouverte dans T" = T'xT' (Proposition 3-1), de sorte que la relation d'équivalence $r \times id_E$ est ouverte sur $T''\times T_E$. Il en résulte que

$$T\times T_E = T''/r \times T_E \approx T''\times T_E/r\times id_E .$$

Comme l'ensemble A des couples

$$((h',\ h),\ z) \in (H\times H)\times E \quad \text{tels que} \quad b(h) = \hat{\pi}(z)$$

est saturé pour r, la topologie quotient de $T''\times T_E/A$ par la relation d'équivalence induite r' par $r\times id_E$ est homéomorphe à la topologie induite par $T''\times T_E/r\times id_E$ sur A/r', c'est-à-dire à la topologie $T{*}T_E$ induite par $T\times T_E$ sur $C{*}E$. L'application

$$((h',\ h),\ z) \mapsto (h',\ h^{-1}(z)) \mapsto /h',\ h/z$$

définit une application continue de $T''\times T_E/A$ vers T_E. Il s'ensuit par passage au quotient que l'application $\hat{k}'$ définit une application continue de $T{*}T_E$ vers T_E. Ceci prouve que $((C,\ T),\ T_E,\ \hat{k}')$ est une espèce de structures topologique. ∇

La construction des espaces fibrés associés à une fibration principale revient donc à celle des espèces de structures topologiques. Pour étudier ce problème, nous utiliserons le résultat suivant (Théorème d'extension de Kan) :

Proposition 2. *Soit* $\boldsymbol{L}$ *une catégorie à* J*-limites inductives pour toute catégorie* J *de* $\mathbf{F}$*, et soit* p: S $\to$ C *un foncteur dans* $\mathbf{F}$*. Si* F *est un foncteur de* S *vers* $\boldsymbol{L}$*, on peut construire un foncteur* F'*, de* C *vers* $\boldsymbol{L}$ *et une transformation naturelle* t : F $\to$ F'.p. *Si de plus* p *est le foncteur injection canonique vers* C *d'une sous-catégorie pleine* S *et s'il existe un foncteur d'homomorphismes saturé* Q : $\boldsymbol{L} \to \mathbf{M}$ *compatible avec les* $\mathbf{M}$*-sommes, alors* F' *est équivalent à un prolongement de* F.

Δ. Choisissons une application $\mathbf{F}_0$-limite inductive μ sur $\boldsymbol{L}$ et soit *Lim* le foncteur limite inductive associé.

1° Soit $x \in C_0$; notons D_x la catégorie des triplets

$$(f', f, h) \in C \times C \times S \quad \text{tels que} \quad f'.p(h) = f \quad \text{et} \quad \beta(f) = x,$$

munie de la loi de composition

$$(f''', f'', h').(f', f, h) = (f''', f, h'.h) \quad \text{ssi} \quad f'' = f' \text{ et } \alpha(h') = \beta(h).$$

Nous identifierons l'unité (f, f, s) au couple (f, s) . L'application

$$(f', f, h) \mapsto F(h)$$

définit un foncteur F_x de D_x vers $\boldsymbol{L}$. Comme C et S appartiennent à **U**, il en est de même pour D_x , et il existe une limite inductive naturalisée $\mu(F_x) = (F'(x)\hat{}, v_x, F_x)$ vers le foncteur constant sur $F'(x) = Lim\, F_x$.

2° Si $k \in x'.C.x$, l'application

$$(f', f, h) \mapsto (k'.f, k.f, h)$$

définit un foncteur D_k de D_x vers $D_{x'}$ et l'on a $F_{x'}.D_k = F_x$. Comme $\mu(F_{x'}).D_k$ est une transformation naturelle de F_x vers le foncteur constant sur $F'(x')$ il existe un et un seul $F'(k) \in \boldsymbol{L}$ tel que

$$F'(k)\, \mu(F_x) = \mu(F_{x'}).D_k .$$

L'application $k \mapsto F'(k)$ définit un foncteur de C vers $\boldsymbol{L}$, que nous noterons F', car si $k' \in x''.C.x'$, les relations

$$F'(k)\, \mu(F_x) = \mu(F_{x'}).D_k \quad \text{et} \quad F'(k')\mu(F_{x'}) = \mu(F_{x''})$$

entraînent

$$(F'(k').F'(k))\, \mu(F_x) = F'(k)\, (\mu(F_{x'}).D_{k'}) = \mu(F_{x''}).D_{k'}.D_k =$$
$$= F'(k'.k)\ \mu(F_x) , \quad \text{d'où} \quad F'(k').F'(k) = F'(k'.k). \, .$$

3° Si $s \in S_0$ et $x = p(s)$, on a : $(x, s) \in D_x$ et $F_x(x,s) = F(s)$, de sorte que

$$v_x(x, s) \in F'(p(s)).\boldsymbol{L}.F(s).$$

Le triplet $\tau = (F'.p, t, F)$, où t est l'application : $s \mapsto v_{p(s)}(p(s), s)$, de S_0 dans $\boldsymbol{L}$ est une transformation naturelle. En effet, si

$$h \in s'.S.s, \quad x = p(s) \quad \text{et} \quad x' = p(s'),$$

on trouve

$$v_{x'}(x', s').F(h) = v_{x'}(x', s').F_x(x', p(h), h) = v_{x'}(p(h), s)$$
$$= v_{x'}(D_{p(h)}\ (x, s)) = F'(p(h)).v_x(x, s).$$

4° Supposons que p soit le foncteur injection canonique vers C de sa sous-catégorie pleine S et que Q soit un foncteur d'homomorphismes saturé de $\boldsymbol{L}$ vers **M** compatible avec les sommes. Montrons que τ est une équivalence. Il s'ensuivra que F peut être prolongé en un foncteur de C vers $\mathbf{L}$ équivalent à F'. Pour cela, il suffit de voir que $v_S(s, s)$ est inversible pour tout $s \in S_0$. Or une limite inductive $F'(s)$ de F_S peut être construite comme suit : Il existe une somme M de

$$F_S(f, s'), \quad (f, s') \in D_{x_0} ,$$

telle que Q(M) soit la somme canonique E' de

$$Q.F_S(f, s'), \quad (f, s') \in D_X$$

(car Q est saturé), et $F'(s)$ est une Q-structure quasi-quotient de M par la relation d'équivalence engendrée par

$$(z, (f', s'')) \sim (z', (f, s')) \quad \text{ssi il existe} \quad (f', f, h) \in D_X \quad \text{tel que } z' = Q(F(h))(z).$$

Si $w_{(f, s')}$ désigne l'injection canonique de $F_S(f, s')$ vers M, et j la quasi-surjection de M vers $F'(s)$, on obtient

$$v_S(f, s') = j.w_{(f, s')} \quad , \quad \text{d'où} \quad t(s) = j.w_{(s, s)}.$$

Par ailleurs, comme $s.C.S \subset S$, on a

$$F(f) \in F(s).\mathbf{L}.F(s') \quad \text{pour tout } (f, s') \in D_X,$$

de sorte qu'il existe un unique

$$w \in F(s).\mathbf{L}.M \quad \text{vérifiant} \quad w.w_{(f, s')} = F(f) \;;$$

l'application $Q(w)$ est compatible avec r, car

$$Q(w)(z, (f, s)) = Q(F(f))(z) = Q(F(f')).Q(F(h))(z) = Q(w)(z', (f'.h, s))$$

si $z' = Q(F(h))(z)$. Par suite il existe un unique

$$w' \in F(s).\mathbf{L}.F'(s) \quad \text{tel que} \quad w'.j = w. \;.$$

Les égalités

$$w_{(s, s)}.w'.t(s) = w_{(s, s)}.w'.j.w_{(s, s)} = w_{(s, s)}.w.w_{(s, s)} = w_{(s, s)}$$

où $w_{(s,s)}$ est un monomorphisme, et

$$t(s).w'.v_S(f,s') = t(s).w'.j.w_{(f, s')} = t(s).w.w_{(f, s')} = v_S(s, s).F(f) = v_S(f, s')$$

pour tout $f \in s.C.s'$ entraînent que w' est l'inverse de $t(s)$. ∇

Corollaire 1. *Soit* S *une sous-catégorie pleine de* C, *et* (S, E, k) *une espèce de structures. Si* $x.C.S \neq \emptyset$ *pour tout* $x \in C_0$, *il existe une espèce de structures* (C, E', $\hat{k}'$) *admettant* (S, E', k) *pour sous-espèce.*

Δ. D'après la proposition, le foncteur F de S vers **M** définissant (S, E, k') se prolonge en un foncteur F' de C vers **M**. Par construction de F', l'ensemble $F(x)$ n'est pas vide si $x \in C_0$, car x.C.S $\neq \emptyset$. Donc F' définit un espèce de structures (C, E', k'). ∇

Corollaire 2. *Si* Q *:* $L \to$ **M** *est un foncteur d'homomorphismes saturé à* F_0*-limites inductives et si (S, F) est une catégorie* Q*-dominée et* S *une sous-catégorie pleine de* C*, et si* x. C . S $\neq \emptyset$ *pour tout* $x \in C_0$ *il existe une catégorie* Q*-dominée* (C, F'), *où* F *est une restriction de* F'.

Δ. F' existe d'après la proposition et Q.F' définit une espèce de structures vu le Corollaire 1. ∇

Complément. F' possède la propriété universelle suivante :

> Soit P le foncteur $\tau' \mapsto \tau'.P$ de la catégorie **N**(L, C) des transformations naturelles de C vers L, vers catégorie **N**(L, S). Alors (F', τ) est un P-projecteur.
>
> Ce résultat est le *Théorème d'extension de Kan.*

Proposition 3. *Soit* (C, T) *et* (S, T/S) *des groupoïdes topologiques localement triviaux, où* S *est une sous-catégorie pleine de* C. *Si* x.C.S $\neq \emptyset$ *pour tout* $x \in C_0$ *et si* μ = ((S, T/S), T_E, k') *est un espace fibré, il existe un et un seul espace fibré* ((C, T), $T_{E'}$, k') *dont* μ *soit une sous-espèce de structures topologique.*

Δ. D'après la Proposition 1, il existe une espèce de structures (C, E', k') dont (S, E, k'), où E = $\underline{T_E}$, est une sous-espèce. Soit $x \in C_0$ et soit U un voisinage de x dans T_0 tel qu'il existe une application continue $d : T_0/U \to T$ vérifiant

$$d(x') \in x'.C.x \quad \text{pour tout} \quad x' \in U.$$

Si $f \in$ x.C.S, soit $\hat{f}$ la bijection

$$(x', z) \mapsto (d(x').f)z \quad \text{de} \quad U\times Ee \quad \text{dans} \quad E',$$

où Ee est la fibre sur $e = \alpha(f)$, prenons pour $T_{E'}$ la topologie la plus fine sur E' rendant continue $\hat{f}$ de $T_0/U\times T_E/Ee$ vers $T_{E'}$ pour chaque $f \in$ e.C.S. Comme S est un sous-groupoïde plein de C, on montre que les topologies $\hat{f}(T_0/U \times T_E/Ee)$ sont compatibles, i.e. qu'elles induisent la même topologie sur l'intersection des ensembles sous-jacents, et que ((C, T), $T_{E'}$, k') est un espace fibré "prolongeant" μ. ∇

En particulier, supposons que (C, T) soit un groupoïde topologique localement trivial tel que C soit transitif et soit

$$e \in C \quad \text{et} \quad G = e.C.e$$

Supposons que $\mu = ((G, T/G), T_E, k')$ soit une espèce de structures topologique. D'après la Proposition 3, il existe un espace fibré $((C, T), T_{E'}, \bar{k}')$ dont μ soit une sous-espèce de structures topologique (et qui admet donc T_E pour fibre en e). Des propositions précédentes, il résulte que la fibre E'_x pour tout $x \in C$ est le quotient de $x.C.e \times E$, où $E = \underline{T}_E$, par la relation d'équivalence r_x :

$$(h, z) \sim (h', z') \quad \text{ssi il existe} \quad g \in G \text{ tel que } h = h'.g,\ z' = gz\,;$$

posons $/h, z/ = (h, z) \bmod r_x$; alors $\bar{k}'$ est définie par

$$(h', /h, z/) \mapsto /h'.h, z/ \quad \text{ssi} \quad a(h') = b(h).$$

Enfin, si $/h, z/ \in E'_x$ et si $s : T_0/U \to T$ est une application continue, si $x \in U$ et $s(x') \in x'.C.x$ pour $x \in U$, une base de voisinages de $/h, z/$, dans $T_{E'}$ est formée des ensembles

$$\{ (s(x).h)\, z' \mid z' \in V \},$$

où V est un voisinage de z dans $T_{E'}$.

Complément.

Notons (C, T) un groupoïde topologique localement trivial, où C est transitif et soit e une unité de C. Soit G' un sous-groupe de G, où $G = e.C.e$. Existe-t-il un groupoïde topologique (C', T') localement trivial qui soit un sous-groupoïde topologique de (C, T) tel que $C'_0 = C_0$ et que $G' = e.C'.e$? Si oui, on dit que (C', T') est obtenu par ***restriction du** groupe structural* de (C, T) à G'.

Ce problème n'a pas toujours de solution. En effet, soit $H = C.e$, $T_H = T/H$ et (E, T'') l'espace topologique quotient de (H, T_H) par la relation d'équivalence

$$r_{G'} : h \sim h.g \quad \text{si} \quad g \in G'.$$

Soit p la projection canonique de (H, T_H) vers (E, T''). L'application continue $b' : T_H \to T_0$ étant compatible avec $r_{G'}$, elle se factorise sous la forme $p'.p$.

a) Supposons que (C', T') soit obtenu par restriction du groupe structural à G'. Pour tout $x \in C_0$, on a

$$s(x) = x.\,C'.e \in E, \quad \text{car} \quad s(x) = h.\,G', \quad \text{où} \quad h \in x.\,C'.e.$$

L'application $x \mapsto s(x)$ définit une application continue de T_0 vers T'' section de p' (i.e. telle que $p'.s = id_{T_0}$).

b) Supposons que $s : T \to T''$ soit une section de p' et posons

$H' = p^{-1}(s(C_0))$. Le sous-groupoïde C' de C engendré par H' vérifie

$$e.C'.e = G' \quad \text{et} \quad H' = C'.e\,.$$

En général il n'est pas localement trivial. Toutefois supposons que la restriction de p à (G/G', G), où G/G' est le quotient de G par la relation d'équivalence induite par $r_{G'}$ sur G soit une application fibrante (qui est alors sous-jacente à une application fibrante principale). On montre alors que p est également une application fibrante, et que (C',T/C') est un groupoïde localement trivial, i.e. que l'on peut restreindre le groupe structural de (C, T) à G'.

5. Revêtements.

Dans ce paragraphe, les démonstrations seront seulement esquissées. Si T est un espace topologique, $\underline{T}$ désigne l'ensemble sous-jacent et $x \in T$ signifie $x \in \underline{T}$.

Définition. On appelle *espace discrètement fibré* un espace fibré de la forme ((C, T), T', k') où les topologies T/e.C.e et T'/E_e sont discrètes, où $e \in C_0$ et où E_e désigne la fibre sur e.

Supposons qu'il en soit ainsi et soit U un voisinage de e dans T_0 tel qu'il existe une section continue $s : T/U \to T$ de l'application but vérifiant $s(e) = e$. Soit $\bar{T}'$ la topologie induite par T' sur l'image réciproque de U par la projection canonique p. Alors $\bar{T}'$ est somme des ouverts

$$U_z = \{ s(x')z \mid x' \in U \}, \qquad \text{où } z \in E_e\,,$$

et la restriction de p à U_z définit un homéomorphisme de T'/U_z sur T/U. Autrement dit, p est un revêtement au sens suivant :

Définition. On appelle *revêtement* une application continue $p : T' \to B$ telle que, pour tout $x \in B$, il existe un voisinage ouvert U de x dans B, dit *voisinage p-distingué de x*, vérifiant la condition :

> Pour tout $z \in E_x = p^{-1}(x)$ il existe un voisinage U_z de z dans T' tel que p/U_z définisse un homéomorphisme de T'/U_z sur B/U et que $T'/p^{-1}(U)$ soit la somme topologique de
> $$(T'/U)_z,\ z \in E_x\,.$$

Remarque. Plus généralement, on appelle *espace étalé* une application continue p de T' vers B telle que, pour tout $z \in T'$, il existe un voisinage V de z dans T' auquel la restriction $p \mid V$ définisse un homéomorphisme sur un voisinage de $p(z)$ dans B. Un revêtement est a fortiori un espace étalé.

Proposition 1. *Soit* $p : T' \to B$ *un revêtement et posons* $E_x = p^{-1}(x)$ *pour*

$x \in B$. *Soit* K *le groupoïde formé des bijections de la forme* $g : E_x \to E_{x'}$ *où* x *et* x' *appartiennent à* B *; nous identifions la bijection canonique de* E_x *à* x. *Il existe une topologie* T *sur* K *et un espace fibré de la forme* ((K, T), T', k') *dont* p *est la projection associée.*

Δ. Soit U un voisinage ouvert distingué de x dans B et soit (U_z), $z \in E_x$ la décomposition correspondante de $p^{-1}(U)$. Pour tout $y \in U$, notons g_{yx} la bijection de E_x sur E_y associant à z l'unique élément de $U_z \cap E_y$. On obtient une topologie T sur K en prenant pour base de voisinages de $g : E_x \to E_{x'}$ l'ensemble des ensembles U' g U, où U et U' sont des ouverts p-distingués de x et x' respectivement, et où

$$U' g\, U = g_{y'x'}.g.(g_{yx})^{-1} \quad y \in U,\ y' \in U' .$$

On montre que (K, T) est un groupoïde topologique localement trivial à groupes discrets. Il opère continuement sur T' pour la loi k':

$$(g, z) \mapsto g(z) \quad \text{si} \quad z \in E_x . \quad \nabla$$

Définition. Soit f et f' deux applications continues de T vers T'. On appelle *homotopie de f vers f'* une application continue h de TxI vers T' telle que

$$h(x, 0) = f(x) \quad \text{et} \quad h(x, 1) = f'(x).$$

(On note toujours I l'intervalle [0, 1] muni de la topologie induite par la droite réelle **R**.)

Proposition 2. *Il existe une catégorie* $\mathbf{T_h}$ *quotient strict de la catégorie* **T** *des applications continues par la relation d'équivalence :*

$$f' \sim f \quad \textit{ssi il existe une homotopie de } f \textit{ vers } f'.$$

Proposition 3. *(Théorème de relèvement des homotopies) Soit* $p : T' \to B$ *un revêtement. Soit* $f' : Y \to T'$ *une application continue et* h *une homotopie de* $f = p.f'$ *vers* g. *Il existe une unique homotopie* h' *de* f' *vers* g' *telle que* $p.h' = h$.

A. a) **Lemme.** Si Y est connexe et si f' et g' sont deux applications continues de Y vers T' telles que $p.f' = p.g'$, alors $f' = g'$ ssi il existe un y dans Y tel que $f'(y) = g'(y)$.

b) **Lemme.** Si k est une application continue de I vers B et si $z \in T'$ et $p(z) = k(0)$, il existe un et un seul $k' : I \to T'$ continu tel que

$$p.k' = k \quad \text{et} \quad k'(0) = z.$$

Pour construire k', on recouvre $k(I)$ par un nombre fini d'ouverts p-distingués et l'on relève progressivement k au-dessus de chacun de ces ouverts.

c) Soit h_y l'application continue de I vers B telle que

$$h_y(t) = h(y, t) \quad \text{pour tout} \quad y \in Y.$$

Si

$$z \in T' \quad \text{et} \quad p(z) = f(y) = h_y(0),$$

il existe un unique h'_{yz} continu de I vers T' tel que

$$h'_{yz}(0) = z \quad \text{et} \quad p.h'_{yz} = h_y .$$

On montre que l'application

$$(y, t) \mapsto h'_{y\,f'(y)}(t)$$

définit l'homotopie h' cherchée. ∇

Nous allons maintenant construire un groupoïde topologique localement trivial à groupe discret de base donnée.

Soit B un espace topologique. On définit un système multiplicatif $C(B)^\circ$, des chemins de B, en munissant l'ensemble C(B) des chemins de B (c'est-à-dire des applications continues de I vers B) de la loi :

$$(g, f) \mapsto k, \quad \text{où} \quad k(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad t < \frac{1}{2} \\ g(1-2t) & \text{si} \quad t \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{ssi} \quad g(0) = f(1).$$

On obtient une relation d'équivalence $\sim$ sur C(B) en posant :

> $f \sim f'$ ssi il existe une homotopie pointée h, de f vers f' (c'est-à-dire une homotopie h de f vers f' telle que
> $h(0, t) = f(0)$, $h(1, t) = f(1)$ pour tout $t \in I$).

Proposition 4. *Il existe un groupoïde* P(B), *quotient de* $C(B)^\circ$ *par la relation* $\sim$*; sa classe d'unités s'identifie à* B.

Δ. Les unités sont les chemins $\hat{x}$, où $\hat{x}$ dénote le chemin "constant sur x". On montre que la classe de f admet pour unité à droite $\hat{x}$, où $x = f(0)$, pour unité à gauche $\hat{x}'$, où $x' = f(1)$. De plus son inverse est la classe de g, si g est défini par

$$g(t) = f(1-t) \quad \text{pour tout} \quad t \in I.$$

Corollaire. *Si* B *est connexe et localement connexe par arcs, le groupoïde* P(B) *est transitif.*

Définition. On dit qu'un espace topologique B est *localement simplement connexe* si tout voisinage de x contient un voisinage ouvert U de x tel que $\pi_1(B/U, x) = \{e\}$, pour tout $x \in B$. On dit que B est *localement simple* s'il est localement connexe par arcs et localement simplement connexe.

Cette définition utilise la

Définition. P(B) est appelé *groupoïde fondamental* (ou de Poincaré) de B, et son sous-groupe $\hat{x}.P(B).\hat{x}$, où $x \in B$, est dit *groupe fondamental* (ou de Poincaré) de B en x , noté $\pi_1(B, x)$.

Proposition 5. *Supposons que* B *soit localement simple. Pour tout* $x \in B$, *il existe un voisinage* U *de* x *dans* B, *dit voisinage simple de* x, *tel que l'ensemble* $\hat{x}.P(B).\hat{y}$ *soit réduit à un seul élément (noté* c_{xy}*) pour tout* $y \in U$. *On définit une topologie* $\bar{T}$ *sur* P(B) *telle que le filtre des voisinages de* c, *où* $a(c) = \hat{x}$ *et* $b(c) = \hat{x}'$, *ait pour base l'ensemble des* $U' c U$ *où* U *et* U' *sont des voisinages simples de* x *et de* x' *respectivement et*

$$U' \text{ c } U = \{ (c_{x'y'})^{-1}.c.c_{xy} \mid y \in U, \ \ y' \in U' \} .$$

(P(B), $\bar{T}$) *est un groupoïde topologique localement trivial à groupes discrets.*

Corollaire. *Si, avec les conditions de la Proposition 5,* B *est connexe et si* $x \in B$, *soit* (b', μ) *l'application fibrante principale associée au triplet* (P(B), $\bar{T}$, $\hat{x}$). *Alors* $\bar{T}$ *est connexe et* $u.b'$, *où* u *est l'homéomorphisme*

$$\hat{x} \mapsto x \quad \text{de} \quad \bar{T}/P(B) \qquad \text{sur} \quad B$$

est un revêtement de B , *noté* $p_{B,x}$. *De plus*

$$\pi_1(\bar{T}/P(B).\hat{x}, \ \hat{x}) = \{e\} .$$

Proposition 6. *Soit* $p : T' \to B$ *un revêtement. Si les conditions de la Proposition 5 sont vérifiées, il existe un espace fibré* ((P(B), $\bar{T}$), T', k'), *dont* p *est le projection associée.*

Δ. On définit k' comme suit :

$$cz = k'(c, z) \quad \text{est défini ssi} \quad p(z) = x, \quad \text{où} \quad \hat{x} = a(c).$$

Dans ce cas le théorème de relèvement des homotopies entraîne que, si $f \in c$, il existe un unique chemin f' de T', tel que

$$p.f' = f \quad \text{et} \quad f'(0) = z \ ;$$

posons $z_f = f'(1)$. Si h est une homotopie pointée de f vers g , il existe de plus une unique homotopie h' de f' vers g' telle que $p.h' = h$; en particulier $h'' : t \mapsto h'(1, t)$ est un chemin de T' dont l'image est contenue dans $p^{-1}(x')$, où $\hat{x}' = b(c)$, et tel que

$$h''(0) = z_f \quad \text{et} \quad h''(1) = z_g .$$

Comme $T'/p^{-1}(x')$ est la topologie discrète, il s'ensuit $z_g = z_f$. Ainsi, z_f dépend seulement de (c, z) et l'on peut poser : $cz = z_f$. ∇

Soit **U** un univers. On suppose que B est un espace topologique connexe et localement simple et que $x \in B$. Soit $R(B, x)_0$ l'ensemble des couples (p, z), tels que $p : T' \to B$ soit un revêtement de B, que $\underline{T'} \in \mathbf{U}$, que $z \in T'$ et $p(z) = x$. Soit $R(B, x)$ la catégorie formée des triplets

$$((p', z'), v, (p, z)),$$

tels que (p, z) et (p', z') appartiennent à $R(B, x)_0$ et que v soit une application continue vérifiant

$$p'.v = p \qquad \text{et} \qquad v(z) = z'.$$

Proposition 7. *Si* B *appartient à* **U**, *la catégorie* $R(B, x)$ *admet le revêtement pointé* $(p_{B,x}, \hat{x})$ *(Proposition 5, Corollaire) pour élément initial. Si* $p : T' \to B$ *est un revêtement tel que* T' *soit connexe et si*

$$((p, z), v, (p_{B,x}, \hat{x})) \in R(B, x),$$

alors v *est surjectif.*

Δ. $(p_{B,x}, \hat{x})$ appartient à $R(B, x)_0$, car $P(B)$ appartient à **U**, le segment $[0, 1]$ appartenant à **U** de même que l'ensemble des chemins de B. Si

$$(p, z) \in R(B, x)_0 \text{ et } p : T' \to B,$$

reprenons les notations de la Proposition 6. On définit une application continue v de $\overline{T}/P(B).\hat{x}$ vers T' en associant cz à c. On vérifie que $((p, z), v, (p_{B,x}, \hat{x}))$ est l'unique morphisme de $R(B, x)$ de source $(p_{B,x}, \hat{x})$, de but (p, z), car T est connexe. Si T' est connexe et si $z' \in T'$, il existe un chemin f' de T' tel que

$$f'(0) = z \qquad \text{et} \qquad f'(1) = z' ;$$

si c est la classe d'homotopie pointée du chemin $p.f'$, l'unicité du chemin relevé entraîne

$$z' = cz = v(c), \quad \text{d'où} \quad v(P(B).\hat{x}) = T' \quad . \quad \nabla$$

Définition. Un élément initial de $R(B, x)$ est appelé *revêtement universel de* B.

SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES *Exposé III.-B, 2/12/35*
Troisième Année 1935-36
TOPOLOGIE

/5/

TOPOLOGIE COMBINATOIRE. GROUPES D'HOMOLOGIE

par Charles EHRESMANN

Le but de cette conférence est d'exposer, d'une façon nécessairement sommaire, les notions essentielles ainsi que les premiers résultats fondamentaux de la *topologie combinatoire*. Je ne cherche pas à donner une définition précise du terme "topologie combinatoire". Il ne désigne pas une branche spéciale de la topologie mais simplement une méthode spéciale de la topologie, méthode qui convient à la résolution de certains problèmes et qui permet de déterminer un certain nombre d'invariants topologiques d'un espace topologique. Cette méthode combinatoire repose surtout sur les notions de *simplexe* et de *complexe*. Elle s'applique directement à tout espace qui peut être considéré comme un agrégat de simplexes, c'est-à-dire comme un complexe. Par exemple, toute variété algébrique peut être considérée comme un complexe. Plus généralement, d'après un résultat publié tout récemment par M. Nöbeling, toute variété topologique admet une subdivision formant un complexe (on désigne par variété topologique, un espace topologique normal satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité et tel que tout point admet un voisinage homéomorphe à l'intérieur d'une sphère S^n à n dimensions. La méthode combinatoire s'applique même à des espaces qui ne sont pas des complexes mais qui peuvent être approximés par des complexes ou définis par des suites de complexes. Le champ d'application de la topologie combinatoire comprend ainsi tous les ensembles fermés de l'espace ordinaire à n dimensions ainsi que tous les espaces métriques compacts.

Je commencerai par définir les notions de simplexe et de complexe. Je définirai ensuite les groupes d'homologie et les invariants numériques qui s'en déduisent. Je démontrerai enfin l'invariance topologique des groupes d'homologie.

I. DÉFINITIONS

Simplexe à r dimensions.

Soit $\mathbf{R}^n$ l'espace cartésien à n dimensions ; chaque point de $\mathbf{R}^n$ est défini par l'ensemble de n nombres réels. Soient

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \ldots, \quad P_r$$

$r+1$ points de l'espace $\mathbf{R}^n$, et supposons que ces points n'appartiennent pas à un même espace linéaire à moins de r dimensions.

Attachons à chacun des points P_i une masse μ_i telle que :

$$\sum_i \mu_i = 1, \qquad \mu_i \geq 0. \tag{1}$$

Le centre de gravité de ces masses est le point

$$P = \sum_i \mu_i P_i .$$

Les quantités μ_i sont appelées les coordonnées barycentriques de P. L'ensemble des points P dont les coordonnées barycentriques satisfont aux conditions (1) forme un espace topologique e^r qu'on appelle simplexe à r dimensions. Le simplexe est complètement défini par ses r+1 sommets. En annulant r-k des coordonnées barycentriques μ_i, le point P engendre un simplexe qu'on appelle face à k dimensions de e^r.

Représentation barycentrique.

Soit deux simplexes e^r et e_1^s tels que $r \geq s$. Faisons correspondre à chaque sommet P_i de e^r un sommet $Q_{t(i)}$ de e_1^s de façon que tout sommet de e_1^s corresponde au moins à un sommet de e^r. Faisons correspondre au point

$$P = \sum_i \mu_i P_i \quad \text{le point} \quad Q = \sum_i \mu_i Q_{t(i)} .$$

La correspondance entre P et Q définit une représentation barycentrique du simplexe e^r sur le simplexe e^s.

Simplexe orienté.

On définit une orientation d'un simplexe en choisissant une certaine permutation de ses sommets. Deux permutations définissent la même orientation ou deux orientations opposées suivant qu'elles diffèrent par une permutation paire ou impaire. Tout simplexe non orienté correspond ainsi à deux simplexes orientés qu'on peut désigner par: e^r et $-e^r$. Si e^r est défini par $(P_0, P_1, \dots, P_r)$, le simplexe orienté $-e^r$ est défini par $(P_1, P_0, \dots, P_r)$.

Simplexe topologique.

Soit A un espace topologique homéomorphe à un simplexe rectiligne e^r. L'espace A associé à une représentation topologique de e^r sur A définit un simplexe topologique E^r. Si A est considéré comme l'image topologique d'un autre simplexe rectiligne e_1^r, il définit un simplexe topologique E_1^r. Les 2 simplexes E^r et E_1^r sont considérés comme identiques lorsque les points de e^r et e_1^r qui sont représentés par le même point de A se correspondent par une transformation barycentrique. Les notions de sommet, face, orientation, correspondance et coordonnées barycentriques sont alors applicables à un simplexe topologique. D'une façon générale, nous considérons par la suite des simplexes topologiques.

Complexe simplicial.

Un complexe simplicial est un espace topologique K défini par l'ensemble d'un nombre *fini* ou *dénombrable* de simplexes, satisfaisant

(1) Tout point de K appartient à un nombre fini des simplexes donnés et à un simplexe au moins.

(2) Les faces d'un simplexe de l'ensemble des simplexes appartiennent aussi à cet ensemble.

(3) Etant donné deux simplexes de l'ensemble considéré, ou bien ils n'ont pas de points communs, ou bien l'un est une face de l'autre.

(4) Si l'on considère un voisinage d'un point P dans chacun des simplexes auxquels ce point appartient, la réunion de ces voisinages définit un voisinage de P dans le complexe K.

Exemples. La sphère ou un polyèdre admettent des décompositions en simplexes définissant des complexes finis. L'espace $\mathbf{R}^n$ ou un domaine quelconque dans $\mathbf{R}^n$ admettent des décompositions en simplexes définissant des complexes infinis.

Si on peut établir une correspondance biunivoque entre les sommets d'un complexe K et ceux d'un complexe K' de façon que les sommets d'un simplexe de l'un des complexes correspondent aux sommets d'un simplexe de l'autre, cette correspondance définit une transformation topologique simpliciale de K en K', c'est-à-dire une transformation topologique par laquelle tout simplexe de K subit une transformation barycentrique. En désignant par K^n un complexe composé de simplexes à n dimensions au plus, et en admettant au moins un simplexe à n dimensions, on démontre facilement le théorème suivant :

Théorème. *Tout complexe K^n est simplicialement homéomorphe à un complexe rectiligne de l'espace $\mathbf{R}^{2n+1}$.*

Sous-complexe.

Un sous-complexe d'un complexe K est un complexe composé de simplexes de K.

Subdivision.

Une subdivision d'un complexe K est un complexe K' tel que tout simplexe de K coïncide avec un sous-complexe de K'. En particulier, la subdivision *normale* d'un complexe K est définie de la façon suivante : sur tout simplexe E^r de K nous considérons le centre de gravité, c'est-à-dire le point dont les r coordonnées barycentriques sont égales. Considérons une suite de simplexes

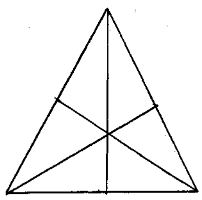
$$E^{r_1},\ E^{r_2},\ \dots\ E^{r_k}$$

tels que

$$E^{r_1} \subset E^{r_2} \subset \dots \subset E^{r_k}, \qquad r_1 < r_2 \dots < r_k .$$

Les centres de gravité de ces simplexes définissent dans E^{r_k} un simplexe $\bar{E}^k$ qui sera le simplexe général de la subdivision normale de K. La subdivision normale de K s'appelle aussi *complexe dérivé* de K. La figure (1) représente la subdivision normale d'un triangle.

Figure (1)



Une question fondamentale de la Topologie combinatoire est la suivante :

Si deux complexes K et K_1 sont homéomorphes, existe-t-il une subdivision K' de K et une subdivision K_1' de K_1 telles que K' et K_1' soient homéomorphes?

Dans le travail déjà cité, M. Nöbeling répond par l'affirmative à cette question.

II. GROUPES D'HOMOLOGIE

Chaînes.

Soit K un complexe simplicial. Fixons l'orientation de chaque simplexe de K et désignons par E_i^r les simplexes orientés ainsi considérés, l'indice supérieur indiquant la dimension. Une *chaîne, à r dimensions,* est une forme linéaire par rapport aux symboles E_i^r :

$$C = \Sigma\, u_i\, E_i^r$$

où u_i désigne un entier positif, négatif ou nul ; dans le cas d'un complexe infini nous supposerons de plus qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres u_i qui soient différents de zéro.

Chaîne-frontière.

Soit E^r le simplexe orienté

$$\varepsilon(P_0\ P_1 \dots P_r),\quad \text{où}\quad \varepsilon = \mp 1.$$

On peut associer à E^r une chaîne appelée chaîne-frontière et définie par :

$$F(E^r) = \varepsilon \Sigma\ (-1)^i (P_0 P_1 \dots P_{i-1}\ P_{i+1} \dots P_k).$$

La relation entre E^r et $F(E^r)$ s'exprime souvent par les symbole :

$$(\rightarrow) :\quad E^r \rightarrow F(E^r).$$

Relations d'incidence.

Les chaînes-frontières des simplexes orientés de K sont définies par des relations

$$E^r_i \rightarrow \sum_j e^r_{ij}\, E^{r-1}_j,\quad (e^r_{ij} = 0, +1, -1)$$

appelées relations d'incidence de K.

A la chaîne $C^r = \Sigma\ u_i E^r_i$ est associée une chaîne-frontière définie par

$$C^r \rightarrow F(C^r) = \Sigma\, u_i\, F(E^r_i) = \sum_{i,j} u_i\ e^r_{ij} E^{r-1}_j\ .$$

On a

$$F(E^r) \rightarrow 0,\quad \text{d'où}\quad F(C^r) \rightarrow 0.$$

Un complexe K est complètement déterminé par ses relations d'incidence. Nous nous proposons de déduire de ces relations d'incidence des invariants topologiques de K.

Chaînes par rapport à un groupe abélien G.

Soit G un groupe abélien additif quelconque. Une chaîne par rapport à G est une forme linéaire finie

$$C^r = \sum_i u_i\ E^r_i\ ,$$

où les symboles u_i désignent des éléments de G. La somme de deux chaînes

$$\sum_i u_i E^r_i \quad \text{et} \quad \sum_i v_i\, E^r_i$$

sera la chaîne $\sum_i (u_i + v_i) E^r_i$. Les chaînes C^r forment donc un groupe abélien $\mathbf{L}^r_G$.

A la chaîne $\Sigma\, u_i E^r_i$ on peut associer la chaîne

$$\sum_{i,j} u_i e^r_{ij} \; E^r_j$$

appelée *chaîne-frontière par rapport à* G.

$$\sum_i u_i E^r_i \underset{G}{\rightarrow} \sum_{i,j} u_i e_{ij} E^{r-1}_j .$$

Cette correspondance définit un homomorphisme du groupe $\mathbf{L}^r_G$, sur un sous-groupe $\mathbf{H}^{r-1}_G$ de $\mathbf{L}^{r-1}_G$. Dans cet homomorphisme, les chaînes de $\mathbf{L}^r_G$ qui correspondent à la chaîne 0 de $\mathbf{H}^{r-1}_G$ définissent un sous-groupe $\mathbf{Z}^r_G$ de $\mathbf{L}^r_G$. Une chaîne Γ^r appartenant à $\mathbf{Z}^r_G$ s'appelle aussi cycle par rapport à G ; on a : $\Gamma^r \underset{G}{\rightarrow} 0$. Le groupe $\mathbf{H}^{r-1}_G$ est un sous-groupe du groupe $\mathbf{Z}^{r-1}_G$. Un cycle Γ^{r-1} de $\mathbf{H}^{r-1}_G$ est la chaîne-frontière d'une chaîne C^r :

$$C^r \underset{G}{\longrightarrow} \Gamma^{r-1} .$$

On exprime ce fait en disant que Γ^{r-1} *est homologue à* 0 *par rapport à* G, et on écrit

$$\Gamma^{r-1} \underset{G}{\sim} 0.$$

Deux cycles Γ^{r-1} et Γ^{r-1}_1 sont dits *homologues par rapport à* G si

$$\Gamma^{r-1}_1 - \Gamma^{r-1} \underset{G}{\sim} 0 \; ; \quad \text{on écrit aussi } \Gamma^{r-1}_1 \underset{G}{\sim} \Gamma^{r-1}.$$

Groupes d'homologie par rapport à G.

Soit $\mathbf{K}^r_G$ le groupe quotient

$$\mathbf{K}^r_G = \mathbf{Z}^r_G / \mathbf{H}^r_G .$$

C'est le *groupe d'homologie par rapport à* G, et correspondant à la dimension r. Un élément de $\mathbf{K}^r_G$ peut être considéré comme la classe des cycles $\underset{G}{\sim}$ à un cycle donné Γ^r. Le groupe $\mathbf{K}^r_G$ a été défini pour une subdivision simpliciale de l'espace topologique K ; mais nous verrons plus loin que c'est un invariant topologique de K : Il ne dépend pas de la décomposition particulière en simplexes.

Le groupe $\mathbf{K}^r_G$ dépend de G. Les cas les plus importants sont les suivants :

(1) G est le groupe additif des nombres entiers. On a alors le groupe d'homologie proprement dit $\mathbf{K}^r$.

(2) G est le groupe des restes modulo m des nombres entiers. on a alors le groupe d'homologie modulo m : $\mathbf{K}^r(\mathrm{mod}\ m)$. En particulier

si $m=2$, on peut faire abstraction de l'orientation des simplexes.

Supposons que K soit un complexe fini. Les groupes $\mathbf{Z}^r$ et $\mathbf{H}^r$ sont alors des groupes abéliens à un nombre fini de générateurs. Il en sera de même du groupe $\mathbf{K}^r$. Les éléments d'ordre fini de $\mathbf{K}^r$ forment un sous-groupe $\mathbf{T}^r$ appelé *groupe de torsion* . Un élément de $\mathbf{T}^r$ est de la classe des cycles homologues à un cycle Γ^r pour lequel on a :

$$t\Gamma^r \sim 0, \quad t \text{ étant un nombre entier.}$$

On convient d'écrire $\Gamma^r \approx 0$ pour un cycle qui satisfait à une homologie de la forme $t\Gamma^r \sim 0$; on convient de même d'écrire

$$\Gamma^r \approx \Gamma_1^r \quad \text{lorsqu'on a} \quad t\,\Gamma^r \sim t\Gamma_1^r .$$

Groupe de Betti.

Le groupe de Betti pour la dimension r est le groupe quotient

$$\mathbf{B}^r = \mathbf{K}^r/\mathbf{T}^r .$$

Un élément de $\mathbf{B}^r$ est de la classe des cycles Γ^r tels que $\Gamma^r \approx \Gamma_1^r$, où Γ_1^r est un cycle donné. Le groupe $\mathbf{B}^r$ est un groupe abélien *libre* à b^r générateurs. Le nombre b^r s'appelle *nombre de Betti* pour la dimension r. On peut trouver b^r cycles

$$\Gamma_1^r, \ \Gamma_2^r, \ \dots, \ \Gamma_{b^r}^r$$

tels que tout cycle Γ^r soit lié par une homologie de la forme :

$$\Gamma^r \approx \mu_1\Gamma_1^r + \mu_2\Gamma_2^r + \dots + \mu_{b^r}\Gamma_{b^r}^r .$$

Ces b^r cycles définissent une *base du groupe de Betti.*

Le groupe de torsion $\mathbf{T}^r$ est la somme directe d'un certain nombre de groupes cycliques dont les ordres sont des entiers

$$t_1, \ t_2, \ \dots, \ t_s .$$

Ces entiers sont complètement déterminés si l'on impose les conditions:

$$t_{i+1} = 0 \pmod{t_i} .$$

Les nombres t_i ainsi déterminés s'appellent *coefficients de torsion* pour la dimension r.

Considérons de même le groupe $\mathbf{K}^r(\text{mod. } m)$. Ce groupe est la somme directe de $b^r(m)$ groupes cycliques d'ordre m et d'un certain nombre de groupes cycliques ayant respectivement pour ordres des entiers

$$t_1(m)\ ,\ \ t_2(m)\ ,\ \ \ldots,\ t_s(m)$$

inférieurs à m et tels que

$$t_{i+1}(m) \equiv 0\ (\text{mod. } t_i\ (m)\ ).$$

Le nombre $b^r(m)$, et les nombres $t_i(m)$, s'appellent respectivement *nombre de Betti et coefficients de torsion modulo m.*

Les invariants numériques précédents déterminent complètement les groupes $\mathbf{K}^r$ et $\mathbf{K}^r(\text{mod } m)$. On peut les calculer effectivement quand on connait les relations d'incidence de K. Soit (e^r) *la matrice d'incidence* formée par les coefficients e^r_{ij}. Les coefficients de torsion t_i pour la dimension r sont les diviseurs élémentaires supérieurs à 1 de la matrice (e^r). Le nombre de Betti b^r est donné par

$$b^r = \alpha^r - \rho^r - \rho^{r-1},$$

où α^r désigne le nombre de simplexes E^r_i à r dimensions, ρ^r étant le rang de la matrice (e^r). De l'égalité précédente on tire :

$$\sum_r (-1)^r \alpha^r = \sum_r (-1)^r b^r .$$

On a de même

$$\sum_r (-1)^r \alpha^r = \sum_r (-1)^r b^r(m)\ .$$

La quantité $\Sigma\ (-1)^r \alpha^r$ s'appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* du complexe K. C'est un invariant topologique comme les nombres de Betti.

(Pour les démonstrations, voir Seifert-Threlfall, Chapitres III et XII.)

Groupes d'homologie modulo L.

Soit L un sous-complexe de K. On peut convenir de négliger partout dans les chaînes les simplexes appartenant à L. On définit ainsi les chaînes mod L, les cycles mod L, les groupes d'homologie mod L. D'une façon générale, on aura le groupe d'homologie $\mathbf{K}^r_G(\text{mod L})$.

III. INVARIANCE TOPOLOGIQUE DES GROUPES D'HOMOLOGIE

Pour démontrer l'invariance topologique du groupe $\mathbf{K}^r_G$ nous allons montrer que ce groupe est isomorphe à un groupe $\overline{\mathbf{K}}^r_G$ que nous appellerons groupe d'homologie topologique. Pour éviter toute confusion, $\mathbf{K}^r_G$ sera appelé groupe d'homologie combinatoire. Cela nous oblige à introduire les notions de simplexe singulier et de chaîne singulière.

Simplexe singulier.

Soit x^r un simplexe rectiligne et considérons une représentation continue (pas nécessairement biunivoque) de x^r sur un ensemble de points A d'un espace topologique K. L'ensemble de points A associé à la représentation continue de x^r sur A définit un *simplexe singulier* X^r sur K. Etant donné sur K deux simplexes singuliers X^r et X_1^r images continues des simplexes rectilignes x^r et x_1^r, on dit que les deux simplexes singuliers sont identiques lorsqu'ils coïncident en tant qu'ensembles de points et lorsqu'il existe une correspondance barycentrique entre x^r et x_1^r telle que deux points correspondants de x^r et x_1^r aient pour images le même point de K. Une représentation continue de x^r sur K fait correspondre aux deux simplexes orientés x^r et $-x^r$ deux simplexes singuliers orientés X^r et $-X^r$. Il se peut qu'il existe une correspondance biunivoque entre x^r et $-x^r$ telle que deux points correspondants soient représentés par le même point de K. On a $X^r = -X^r$ et on dit que X^r est un simplexe dégénéré singulier.

Exemple. Considérons une représentation barycentrique t d'un simplexe rectiligne E^r sur un simplexe rectiligne E^{r-h} où $h > 0$. Le simplexe E^{r-h} définit alors un simplexe singulier X^r. Le simplexe E^r admet au moins deux sommets P_0 et P_1 qui soient représentés sur un même sommet de E^{r-h}. Considérons la transformation barycentrique de E^r en $-E^r$ qui échange les sommets P_0 et P_1 et qui laisse fixes les autres sommets de E^r. Deux points correspondants de E^r et de $-E^r$ sont évidemment représentés par t sur le même point de E^{r-h} ou X^r. Par suite X^r est un simplexe singulier dégénéré.

Chaînes singulières.

Une chaîne singulière sera une forme linéaire finie

$$\Sigma\, u_i\, X_i^r,$$

où les symboles X_i^r désignent des simplexes singuliers *non dégénérés*, définis sur un complexe K, les coefficients u_i étant des nombres entiers. Supposons que X^r soit une image continue d'un simplexe rectiligne x^r. Les faces x_i^{r-1} de x^r sont représentées par des simplexes singuliers X_i^{r-1} appelés faces de X^r. Soit $\Sigma\, e_i x_i^{r-1}$ la chaîne frontière de x^r. Nous appellerons *chaîne-frontière de* X^r la chaîne singulière $\Sigma e_i X_i^{r-1}$, où l'on négligera tous les simplexes singuliers dégénérés.

Chaînes singulières par rapport à un groupe abélien G.

Une chaîne singulière par rapport à G sur un complexe K sera une forme linéaire finie

$$C^r = \sum_i u_i X^r_i \qquad (u_i = \text{élément de G}),$$

les symboles X^r_i désignant des simplexes singuliers non dégénérés sur K. A la chaîne C^r est associée une chaîne-frontière par rapport à G :

$$X^r_i \to \sum_j e_{ij}\, X^{k-1}_j, \qquad C^r \underset{G}{\to} \sum_{i,j} u_i\, e_{ij}\, X^{k-1}_j .$$

Groupes d'homologie topologiques.

L'ensemble des chaînes singulières sur un complexe donné K permet de définir les groupes abéliens suivants :

$\mathbf{L}^r_G$ = groupe des chaînes singulières par rapport à G.

$\mathbf{Z}^r_G$ = groupe des cycles singuliers par rapport à G.

$\mathbf{H}^r_G$ = groupe des cycles singuliers $\underset{G}{\sim} 0$.

$\bar{\mathbf{K}}^r_G = \mathbf{Z}^r_G/\mathbf{H}^r_G$ = groupe d'homologie topologique.

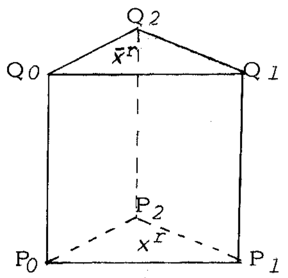
Il est évident que tous ces groupes sont des invariants topologiques du complexe K ; car une transformation topologique de K en un complexe K_1 transforme toute chaîne singulière C^r sur K en une chaîne singulière C^r_1 sur K_1, la chaîne-frontière de C^r correspondant à la chaîne-frontière de C^r_1. Je me propose de démontrer maintenant le fait remarquable et surprenant que le groupe d'homologie $\bar{\mathbf{K}}^r_G$ est isomorphe au groupe d'homologie $\mathbf{K}^r_G$ défini précédemment. Il en résultera l'invariance topologique des groupes d'homologie combinatoire $\mathbf{K}^r_G$.

Déformations continues.

Soit a un espace topologique et considérons une représentation continue de a sur un ensemble de points A d'un espace topologique K. Désignons par [1] l'intervalle fermé (0,1) et soit $a \times [1]$ le produit topologique de a par [1]. Désignons par a_t l'ensemble des points de $a \times [1]$ qui correspondent à un point t de l'intervalle [1]. Considérons une représentation continue de $a \times [1]$ dans l'espace K telle que a_0 soit représenté sur A et a_1 sur $\bar{A}$. Une telle déformation continue s'appelle aussi une *homotopie*. En particulier, lorsque l'image A_t de a_t est homéomorphe à a_t, quelque soit t, la déformation continue est appelée *isotopie*.

Déformation continue d'un simplexe singulier.

Soit x^r un simplexe rectiligne. Le produit $x^r \times [1]$ peut être considéré comme un prisme dont les deux bases seront désignées par x^r et $\bar{x}^r$. Soit P_0, P_1, ..., P_r les sommets du simplexe x^r et Q_0, Q_1,



..., Q_r les sommets correspondants du simplexe $\bar{x}^r$. On peut décomposer le prisme en simplexes. Soit x_i^{r+1} le simplexe orienté

$$(Q_0\, Q_1 \dots Q_i,\ P_i \dots P_r).$$

On peut associer au prisme $x^r \times [1]$ la chaîne orientée suivante :

$$\mathbf{D}x^r = \Sigma\ (-1)^{i-1}\ x_i^{r+1}$$

que nous appellerons *chaîne de déformation* du simplexe x^r. La même loi associe à une face x_i^{r-1} de x^r une chaîne de déformation $\mathbf{D}\, x_i^{r-1}$. Par suite, à la chaîne-frontière $F(x^r) = \Sigma\ \varepsilon_i\, x_i^{r-1}$ correspond la chaîne de déformation

$$\mathbf{D}F(x^r) = \Sigma\, \varepsilon_i\, \mathbf{D}x_i^{r-1}.$$

La chaîne-frontière de $\mathbf{D}x^r$ est donnée par la relation suivante :

$$\mathbf{D}x^r \rightarrow x^r - \bar{x}^r - \mathbf{D}F(x^r).$$

Considérons maintenant une représentation continue du prisme produit $x^r \times [1]$, dans l'espace K. On définit ainsi une déformation continue du simplexe singulier X^r, image de x^r, en un simplexe singulier $\bar{X}^r$, image de $\bar{x}^r$. A la chaîne $\mathbf{D}x^r$ correspond dans K une chaîne singulière $\mathbf{D}F(X^r)$, et on a :

$$\mathbf{D}X^r \rightarrow X^r - \bar{X}^r - \mathbf{D}F(X^r).$$

Déformation continue d'une chaîne singulière.

Soit c un complexe simplicial et soit C le complexe singulier obtenu par représentation continue de c dans l'espace K. Une déformation continue de C en un autre complexe singulier $\bar{C}$ est définie par une représentation continue dans K du produit topologique $c \times [1]$. A chaque simplexe singulier X^r de C correspond un simplexe déformé $\bar{X}^r$ de $\bar{C}$ et une chaîne de déformation $\mathbf{D}X^r$. Soit

$$C^r = \sum_i u_i X_i^r$$

une chaîne singulière formée de simplexes de C, les coefficients u étant des éléments du groupe abélien G. A cette chaîne C^r correspond une chaîne de déformation

$$\mathbf{D}C^r = \sum u_i X_i^r.$$

Soit $\bar{C}^r = \sum u_i \bar{X}_i^r$ la chaîne déformée. On a la relation :

$$\mathbf{D}C^r \underset{G}{\to} C^r - \bar{C}^r - \mathbf{D}F(C^r).$$

En particulier, si $F(C^r) = 0$, on a :

$$\mathbf{D}C^r \underset{G}{\to} C^r - \bar{C}^r, \quad \text{donc} \quad C^r \underset{G}{\sim} \bar{C}^r.$$

C'est-à-dire *deux cycles singuliers homotopes* (se déduisant l'un de l'autre par une homotopie) *sont aussi homologues.*

Nous pouvons démontrer maintenant le théorème fondamental qui établit un lien entre les chaînes singulières et les sous-chaînes d'un complexe simplicial K.

Théorème fondamental sur les déformations *(Alexander, Veblen).*

1° Tout complexe singulier sur K admet une subdivision qu'on peut déformer en un sous-complexe de K.

2° Toute chaîne singulière C sur K admet une subdivision qu'on peut déformer en une sous-chaîne de K, les chaînes considérées étant définies par rapport à un groupe abélien G.

Soit C un complexe singulier sur K. On peut subdiviser les simplexes singuliers de C en simplexes suffisamment petits de façon qu'on obtienne une subdivision C' de C jouissant de la propriété suivante : Il existe au moins un aster du complexe K contenant à son intérieur un aster singulier quelconque du complexe C' ; (on appelle aster de centre O l'ensemble des simplexes d'un complexe donné ayant le point O comme sommet). A chaque sommet P_m de C', faisons alors correspondre un sommet Q_m de K tel que l'aster singulier de centre P_m soit contenu dans l'aster de centre Q_m. De cette façon, nous faisons correspondre aux sommets d'un simplexe singulier de C' les sommets d'un simplexe de K. En effet, soit P un point quelconque d'un simplexe singulier X^r de C. Soit E^k un simplexe de K contenant le point P. Tout aster de K qui contient P contient E^k. Donc les sommets de X^r ne peuvent correspondre qu'à des sommets de E^k ; c'est-à-dire les sommets de X^r correspondent aux sommets d'un simplexe E^h qui appartient à E^k. Soit c' un complexe rectiligne tel que le complexe singulier C' se déduise de c' par une représentation continue T. Appelons x^r un simplexe de c', qui est représenté sur X^r par T. La correspondance entre les sommets de X^r et ceux de E^h définit une représentation barycentrique de x^r sur E^h. On a ainsi une représentation barycentrique bien déterminée pour tous les simplexes de c' , ce qui fournit une représentation simpliciale $\bar{T}$ de c' sur un sous-complexe C de K. Un point P de x^r est représenté par T sur un point P de X^r et par T sur un point $\bar{P}$ de E^k. Les points P et $\bar{P}$ appartiennent à un même simplexe, à savoir E^k, et peuvent être joints dans ce simplexe par un segment rectiligne bien déterminé. Le produit topologique $c' \times [1]$ admet alors une représentation continue f dans K définie de la façon suivante : f coïncide avec T pour l'ensemble de points $c' \times 0$, produit topologique de c' par le point 0 de l'intervalle $[1]$ et f coïncide avec $\bar{T}$ pour l'ensemble de points $c \times 1$; pour les points du segment $p\bar{p} \times [1]$, où p est un point donné de c', f est la représentation barycentrique de ce segment sur le segment rectiligne $P\bar{P}$. La représentation continue f définit donc une déformation continue du simplexe singulier C' en un sous-complexe C de K. Ceci démontre la première partie du théorème. On peut encore l'exprimer de la façon suivante :

Toute représentation continue d'un complexe simplicial c *dans un complexe simplicial* K *est homotope à une représentation simpliciale d'une subdivision* c' *de* c *dans le complexe* K.

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, nous considérons une chaîne singulière C^r sur K. L'ensemble de ses simplexes singuliers et de leurs faces forme un complexe singulier C. On peut trouver une subdivision C' de C qui soit déformable en un sous-complexe $\bar{C}$ de K. Notons x^r un simplexe rectiligne et orienté ; nous pouvons subdiviser x^r en un certain nombre de simplexes partiels x_1^r et orienter chacun des simplexes partiels x_1^r de telle façon que la transformation linéaire qui fait passer du simplexe orienté x_1^r au simplexe orienté x^r soit une transformation à déterminant positif dans l'espace cartésien à r dimensions défini par x^r. La somme des simplexes orientés x_1^r sera appelée : *subdivision* de la chaîne définie par le simplexe orienté x^r. De cette notion se déduit immédiatement la notion de : *subdivision d'un simplexe singulier ou d'une chaîne singulière.* A la chaîne singulière C^r correspond donc sur C' une chaîne singulière bien déterminée C_1^r , appelée subdivision de C^r. En déformant C' en C, nous faisons correspondre à C_1^r une chaîne $\bar{C}_1^r$, qu'on appelle chaîne déformée et qui est composée de simplexes de K. Ceci démontre le théorème.

Nous aurons encore besoin de la propriété suivante :

La subdivision C_1^r de la chaîne singulière C^r peut être déformée en C^r sur le simplexe singulier C.

Il suffit de démontrer cette propriété pour le cas de chaînes non singulières. Or si C est une sous-chaîne de K et C_1^r une subdivision de C^r, on peut montrer que la déformation définie plus haut réduit C_1^r à C^r, tout point de C_1^r restant pendant la déformation sur le simplexe de C^r auquel il appartient initialement. En particulier, tout cycle singulier est homologue à l'une quelconque de ses subdivisions.

Invariance topologique des groupes d'homologie.

D'après le théorème fondamental et la propriété précédente, tout cycle singulier Γ^r sur le complexe K est homologue à un sous-cycle $\bar{\Gamma}^r$ de K, les cycles étant définis par rapport à un groupe abélien donné G. Si Γ^r est homologue à 0, $\bar{\Gamma}^r$ est aussi homologue à 0 ; c'est-à-dire, il existe une chaîne singulière C^{r+1} telle que

$$C^{r+1} \underset{G}{\rightarrow} \bar{\Gamma}^r .$$

En vertu du théorème fondamental il existe alors également une sous-chaîne $\bar{C}^{r+1}$ de K telle que

$$\bar{C}^{r+1} \underset{G}{\rightarrow} \Gamma^r ;$$

c'est-à-dire Γ^r est aussi homologue à 0 au sens combinatoire. La correspondance entre Γ^r et $\bar{\Gamma}^r$ établit donc une correspondance biunivoque et isomorphique entre les groupes $\bar{\mathbf{K}}_G^r$ et $\mathbf{K}_G^r$. Donc :

Théorème. *Les groupes d'homologie $\mathbf{K}_G^r$ d'un complexe K sont des invariants topologiques de K.*

Invariance topologique des groupes $\mathbf{K}_G^r$(mod L).

Soit L un sous-complexe de K. D'une chaîne singulière sur K on déduit une chaîne singulière modulo L en y supprimant tous les simplexes qui sont situés sur L. A l'aide des chaînes singulières modulo L on peut définir des groupes d'homologie topologiques désignés par $\bar{\mathbf{K}}_G^r$(modL). Il résulte du théorème fondamental sur les déformations que le groupe $\bar{\mathbf{K}}_G^r$(modL) est isomorphe au groupe d'homologie combinatoire $\mathbf{K}_G^r$(modL). Donc les groupes $\mathbf{K}_G^r$(mod L) sont tous des invariants topologiques de l'ensemble du complexe K et de son sous-complexe L. Monsieur S. Lefschetz a démontré que ces groupes sont même des invariants topologiques de l'espace K-L.

Remarques sur la détermination effective des groupes d'homologie.

Théoriquement les groupes d'homologie peuvent être déterminés à partir des relations d'incidence du complexe K. Mais cette méthode ne peut être appliquée pratiquement lorsque K est composé d'un grand nombre de simplexes. On trouvera une méthode pratique ainsi que de nombreuses applications dans ma thèse : "Sur la topologie de certains espaces homogènes" (Ann. of Math. 35, 1934, p. 411). Mais avant de terminer, il est indispensable d'indiquer au moins les groupes d'homologie de l'espace S^n, espace sphérique à n dimensions. L'espace S^n est homéomorphe à la frontière d'un simplexe E^{n+1}. Or le cycle $F(E^{n+1})$ est un cycle à n dimensions défini sur S^n. Tout autre cycle à n dimensions est homologue à un multiple de celui-ci. Donc $\mathbf{K}^n$ est le groupe cyclique infini : $b^n = 1$. L'espace S^n est aussi l'espace $\mathbf{R}^n$ que l'on suppose fermé par un point à l'infini. Or toute chaîne C^r sur $\mathbf{R}^n$, où $r < n$, peut être réduite au point à l'infini par déformation continue (par exemple par une homothétie dont le rapport tend vers l'infini). Donc le groupe $\mathbf{K}^r$ se réduit à 0, pour $0 < r < n$. Le groupe $\mathbf{K}^0$ est le groupe cyclique infini. Il n'y a pas de coefficients de torsion. Les nombres de Betti sont

$$b^0 = b^n = 1, \quad b^r = 0 \quad \text{si} \quad 0 < r < n.$$

Remarquons encore que pour tout complexe de dimension n, les groupes $\mathbf{K}^r$, où $r > n$, se réduisent à 0.

BIBLIOGRAPHIE

Pour une étude plus détaillée du sujet de cet exposé, voir :

G. LEFSCHETZ, Topology, Chapitres I et II.
SEIFERT und THRELFALL, Lehrbuch der Topologie, Chapitres II, III et IV.

/ 136 /

NOTICE SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES
de Charles EHRESMANN

Charles Ehresmann a écrit cette Notice en vue de sa candidature à l'Université de Paris en 1955. Le texte initial (multigraphié à Strasbourg) contenait de plus une brève biographie et une liste de ses publications jusqu'à cette date (groupées par années). Cette liste ayant été supprimée ici, les numéros entre parenthèses renvoient à la Liste des publications située au début de ce volume.

1. INTRODUCTION.

La Géométrie m'a intéressé sous ses multiples aspects, depuis qu'à l'Ecole Normale Supérieure, Ernest Vessiot m'a conseillé de lire Sophus Lie et que, dans son cours sur les espaces de Riemann, Elie Cartan m'a fait entrevoir les directions de recherches en Géometrie Différentielle ainsi que la portée et l'élégance de ses propres méthodes.

La Géométrie est la théorie des structures plus ou moins riches, dans lesquelles on discerne en général des structures algébriques et des structures topologiques sous-jacentes. Le point de départ est la Géométrie élémentaire, qui se réduit à la théorie d'un espace topologique bien déterminé (l'espace numérique à trois dimensions) muni du groupe des déplacements. Les théories qui s'en déduisent par généralisation sont considérées comme appartenant à la Géométrie. Ainsi, d'une part, on a les structures essentiellement algébriques définies sur un ensemble par un groupe de transformations (suivant l'idée développée, par exemple, par Felix Klein dans son programme d'Erlangen); d'autre part, on a les structures topologiques, qui forment l'objet de la Topologie. Mais la notion de groupe de transformations est un cas particulier de la notion de pseudogroupe de transformations, dont les transformations ne sont définies que sur certains sous-ensembles de l'espace considéré. Ces sous-ensembles sont les ensembles ouverts d'une structure topologique, de sorte qu'un pseudogroupe déjà une structure topologique sous-jacente. On est conduit ensuite à une notion générale de structure locale (39), étroitement liée à celle de pseudogroupe. Par combinaison de structures algébriques et de structures topologiques, on aboutit à des structures de plus en plus riches : groupes topologiques, groupes de Lie, espaces homogènes de Lie, espaces feuilletés, espaces fibrés, enfin toutes les structures qu'on peut appeler structures infinitésimales (40) et qui forment l'objet de la Géométrie Différentielle. Les structures infinitésimales ont une certaine structure locale sous-jacente; c'est la structure de variété différentiable de classe r, dont la définition fait intervenir la notion de fonction différentiable.

Cette esquisse caractérise sommairement les structures étudiées en Géométrie, et permet de reconnaître l'unité de la Géométrie sous sa grande diversité, grâce à la notion de structures mathématiques élémentaires sous-jacentes. Je l'ai développée dans une conférence (non publiée) sur

"L'évolution de la Géométrie" à la Faculté de Philosophie de l'Université du Brésil à Rio de Janeiro (novembre 1952).

Mes recherches concernent les structures mentionnées ci-dessus, et je me suis particulièrement intéressé à leur aspect topologique.

2. LA TOPOLOGIE DE CERTAINS ESPACES HOMOGENES (1, 2, 4, 8).

Le point de départ de mes recherches a été le mémoire d'Elie Cartan "Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes et les propriétés topologiques de ces espaces" (Annales Soc. pol. Math. 8, 1929, pages 181-225).

Soit E un espace homogène de Lie, c'est-à-dire un espace muni d'un groupe de transformations de Lie G, opérant transitivement dans E. Si nous supposons que E est compact, la détermination des nombres de Betti de E est ramenée par Elie Cartan à celle des formes différentielles extérieures sur E invariantes par G, en tenant compte des théorèmes de de Rham. Si de plus E est symétrique au sens d'Elie Cartan, le nombre de Betti de E pour la dimension p est simplement le nombre maximum de formes invariantes linéairement indépendantes de degré p. Pour déterminer les formes invariantes par G, il suffit de déterminer, en un point x de E, les formes invariantes par le groupe linéaire d'isotropie, S, en x. On est finalement ramené à un problème purement algébrique: Trouver les formes linéaires invariantes par un certain groupe linéaire S_p, représentation linéaire de S. Le nombre de ces formes est le nombre de Betti pour la dimension p.

Dans ma thèse (4) j'ai appliqué cette méthode à la classe d'espaces homogènes symétriques irréductibles qui, de plus, sont munis d'une structure analytique complexe invariante. Abstraction faite de deux espaces correspondant à un groupe simple G de type exceptionnel, cette classe comprend :

1. Les espaces projectifs complexes.
2. Les variétés de Grassmann complexes.
3. Les quadriques complexes non dégénérées.
4. La variété des génératrices planes de dimension p d'une quadrique complexe de dimension $2p$.
5. La variété des sous-espaces projectifs de dimension p appartenant à un complexe linéaire non dégénéré de l'espace projectif complexe de dimension $2p+1$.

Dans le cas des variétés de Grassmann, par exemple, on est ainsi ramené à chercher les composantes irréductibles de certaines représentations linéaires du produit de deux groupes linéaires unitaires unimodulaires. J'ai résolu ce problème à l'aide de la théorie des poids dominants d'Elie Cartan et de H. Weyl. La même méthode m'a permis d'indiquer les nombres de Betti de toutes les variétés de la famille considérée. Pour l'espace projectif complexe et les quadriques complexes, le problème avait d'ailleurs été résolu déjà par Elie Cartan.

Je n'ai pas déterminé explicitement une base du module des formes invariantes, mais une méthode topologique plus directe m'a permis d'indiquer des bases d'homologie. Les variétés considérées ayant une définition géométrique simple, j'ai réussi à en construire une subdivision en cellules permettant d'obtenir explicitement des bases d'homologie pour chaque dimension. Les cellules utilisées sont d'un type très général auquel j'ai étendu la méthode des subdivisions simpliciales.

Pour les variétés de Grassmann, par exemple, les bases d'homologie sont formées par les variétés de Schubert. J'ai indiqué aussi la matrice des nombres d'intersection des couples de variétés de Schubert de dimension complémentaire, ce qui fournit une démonstration rigoureuse des formules de géométrie énumérative données par Schubert. J'ai résolu les mêmes problèmes pour les autres variétés de la classe considérée.

Ces méthodes topologiques directes s'appliquent à beaucoup d'autres variétés. En particulier, j'ai étudié ainsi les variétés généralisant les variétés de Grassmann, dont les éléments sont des suites de sous-espaces projectifs incidents qu'on pourrait appeler des drapeaux. L'exemple le plus simple est l'espace des éléments linéaires de l'espace projectif complexe de dimension n. La variété des drapeaux les plus longs (formés de sous-espaces incidents de dimension 0, 1, ..., $n-1$) est l'espace quotient du groupe unitaire unimodulaire par un sous-groupe abélien maximal. Pour toutes ces variétés j'ai indiqué des bases d'homologie.

Les variétés considérées jusqu'ici sont toutes des variétés complexes rationnelles. Elles n'ont pas de torsion, et les nombres de Betti pour les dimensions impaires sont nuls. De plus, elles sont simplement connexes. J'ai montré que cette dernière propriété appartient à toute variété complexe rationnelle sans singularité. Plus généralement, deux variétés algébriques sans singularité qui se correspondent par une transformation birationnelle ont leurs groupes de Poincaré isomorphes.

Les subdivisions cellulaires s'obtiennent de la même manière pour toutes les variétés réelles (8) correspondant aux variétés complexes étudiées dans (4). Mais les relations d'incidence nécessitent une étude approfondie. Pour les variétés de Grassmann réelles, les variétés de Schubert forment une base d'homologie mod 2. Il y a des coefficients de torsion égaux à 2. On a des résultats analogues pour les autres variétés réelles étudiées dans (8). Mais la détermination des bases d'homologie modulo les entiers présente de sérieuses difficultés. Je l'ai amorcée, mais cette question a été élucidée plus tard par Pontrjagin, en ce qui concerne les revêtements simplement connexes des variétés de Grassmann réelles (dont le groupe de Poincaré est d'ordre 2) ; voir aussi Wu Wen Tsun [1]. De plus Pontrjagin et Chern ont réussi à déterminer explicitement les formes extérieures invariantes sur les variétés de Grassmann réelles et complexes. La connaissance des propriétés d'homologie des variétés de Grassmann et de ces formes extérieures invariantes est de grande importance pour la théorie des variétés différentiables et, plus générale ment, des espaces fibrés ayant pour groupe structural le groupe orthogonal ou le groupe unitaire.

Remarquons que les résultats démontrés pour les variétés complexes s'étendent immédiatement aux variétés de Grassmann quaternioniennes. Les méthodes s'appliquent aussi aux quadriques réelles ainsi qu'aux hyperquadriques définies dans l'espace projectif complexe ou quaternionien par une forme d'Hermite indéfinie. J'ai indiqué les principaux résultats sous forme d'exercices, et le sujet a été développé par J. Nordon dans son Diplôme d'Etudes Supérieures [2].

Les résultats que j'ai obtenus concernant l'homologie de la variété des éléments linéaires de l'espace projectif réel à n dimensions m'ont conduit à poser le problème d'existence d'un parallélisme global dans un espace projectif réel. J'ai montré qu'un tel parallélisme ne peut exister si la dimension de l'espace est différente de $16r-1$. Ce problème a été abordé indépendamment par Stiefel à la même époque.

3. GROUPES DE LIE (9, 12, 13).

Dans (9) j'ai donné un exposé condensé de la théorie générale des groupes de Lie, en m'inspirant surtout des travaux d'Elie Cartan, et en faisant ressortir certains problèmes topologiques. Les définitions posées sont valables du point de vue global, et reposent sur les notions de variété différentiable, de champ de vecteurs et de forme de Pfaff. J'ai montré qu'un groupe de Lie n'a qu'une seule structure analytique sous-jacente. De même un espace topologique E sur lequel opère transitivement et d'une façon continue un groupe de Lie G admet une structure analytique bien déterminée pour laquelle la loi de composition entre éléments de E et éléments de G soit analytique : ceci renforce un théorème de Schur. Enfin, j'ai attiré l'attention sur le fait qu'un noyau de groupe de transformations n'admet pas toujours un prolongement formant un groupe de transformations.

Un groupe simple compact de type non exceptionnel, c'est-à-dire un groupe orthogonal, unitaire ou unitaire quaternionien peut être représenté par la variété des génératrices de dimension maximum d'une quadrique réelle, ou d'une hyperquadrique définie par une forme d'Hermite dans l'espace complexe ou quaternionien (12, 13). Plus généralement, il en est ainsi pour la variété $V_{n,p}$ des suites de p vecteurs unitaires orthogonaux d'origine O, dans l'espace euclidien, dans l'espace hermitien unitaire ou dans l'espace hermitien unitaire quaternionien de dimension n. Les subdivisions cellulaires de ma thèse s'étendent à ces variétés, et j'ai déterminé ainsi les bases d'homologie des variétés $V_{n,p}$ et en particulier des groupes simples compacts. Dans le cas du groupe orthogonal, la méthode donne les bases d'homologie modulo 2. Il y a des coefficients de torsion qui sont tous égaux à 2 . Dans le cas complexe et quaternionien la torsion est nulle. Ces derniers résultats (12, 13) étaient nouveaux, mais les polynômes de Poincaré de ces groupes étaient connus (Cartan, Bauer, Pontrjagin). Dans une conférence faite à Francfort (1939) j'ai développé ces résultats en esquissant de plus une autre démonstration utilisant la théorie des espaces fibrés, en particulier le théorème que Feldbau venait de démontrer sur les espaces fibrés ayant pour base un simplexe, et qui conduit aussi à une subdivision cellulaire des variétés $V_{n,p}$.

4. STRUCTURES LOCALES. ESPACES LOCALEMENT HOMOGÈNES (3, 6, 36, 39, 40, 125)

C'est l'exposé d'Elie Cartan sur les espaces localement euclidiens ("Leçons sur la théorie des espaces de Riemann") et le livre de Veblen-Whitehead sur "The foundation of Differential Geometry" qui m'ont conduit à étudier les espaces localement homogènes de Lie et à chercher une définition générale des structures de caractère local. Dans (36, 39, 40) les idées fondamentales de Veblen-Whitehead sont formulées avec des axiomes plus stricts.

Un pseudogroupe de transformations défini dans E est un ensemble de transformations Γ tel que :

1° $\phi \in \Gamma$ est une application biunivoque d'un sous-ensemble de E sur un sous-ensemble de E.

2° Si ϕ, $\phi' \in \Gamma$, on a $\phi^{-1} \in \Gamma$ et $\phi\,\phi' \in \Gamma$ (le composé de deux applications est toujours défini, voir (40)).

3° L'application identique de E appartient à Γ.

4° Si une famille d'applications $\phi_i \in \Gamma$ admet une réunion ϕ, et si ϕ est biunivoque, alors $\phi \in \Gamma$.

Une structure associée à Γ est définie sur un ensemble E' par un atlas complet de E sur E' compatible avec Γ. Depuis 1943 ces définitions ont été le point de départ de mes cours sur les variétés différentiables (17), les espaces fibrés (20) et les espaces feuilletés.

Etant donné un pseudogroupe Γ défini dans B et un pseudogroupe Γ' défini dans F, on définit dans BxF le pseudogroupe $\Gamma \# \Gamma'$ engendré par les transformations

$$(x,y) \to (\phi(x), \phi'(y)), \qquad \text{où } \phi \in \Gamma,\ \phi' \in \Gamma'.$$

Les structures associées à ce pseudogroupe sont les structures de produit local. Plus généralement, on définit le pseudogroupe $\Gamma//\Gamma'$, engendré par les transformations

$$(x,y) \to (\phi(x), \psi(x,y)) ,$$

où $\phi \in \Gamma$ et où $y \to \psi(x,y)$ est pour tout $x \in B$ une transformation $\phi'_x \in \Gamma'$. Les structures associées sont les structures feuilletées. Si Γ' est un groupe de transformations G, les structures associées à $\Gamma//G$ sont les structures fibrées. On peut considérer aussi certains sous-groupes de $\Gamma//G$. Ainsi, en imposant la continuité de la fonction $x \to \phi'_x$, on a les espaces fibrés à groupe structural topologique G. De cette façon on obtient aussi les structures de prolongement.

Si Γ est le pseudogroupe des applications identiques des ouverts d'un espace topologique B, les structures associées à Γ sont les espaces étalés dans B, dont un cas particulier est formé par les revêtements de B (point de vue développé dans (125)).

Les variétés algébriques abstraites de A. Weil peuvent être définies par le même procédé. Plus généralement j'ai défini les variétés localement algébriques ou localement rationnelles qui conduisent à des problèmes intéressants à peine abordés.

Enfin j'ai défini une notion générale d'espèce de structures locales (36, 39, 125) dont j'ai développé la théorie dans mes cours à Rio de Janeiro, Strasbourg et Princeton ; cette théorie a été approfondie par Dedecker et correspond dans le cas des variétés analytiques à la théorie de H. Cartan. On est conduit à introduire la notion de jet local et de germe de structure locale. A un pseudogroupe de transformations on associe ainsi un groupoïde de jets locaux et en chaque point un groupe d'isotropie locale.

Etant donné un groupe d'automorphismes G d'un espace topologique E, les restrictions aux ensembles ouverts des transformations appartenant à G engendrent un pseudogroupe Γ, déduit de G par "localisation". Une structure associée à Γ est une structure d'espace localement équivalent à E (considéré avec la structure définie par G). En particulier, si G est un groupe transitif de Lie, on définit ainsi les espaces localement homogènes de Lie (39). La définition donnée dans (6) est différente, et équivaut à la définition énoncée en remplaçant G par le groupe d'automorphismes de G. On peut définir la notion de germe de groupe de transformations en un point de E et munir l'espace de ces germes d'une topologie analogue à celle de l'espace des jets locaux. Un relèvement continu de E dans l'espace de ces germes définit alors un germe de pseudogroupe de transformations sur E. En particulier, supposons qu'on associe ainsi à chaque point un germe de groupe de transformations de Lie et supposons de plus que ces germes soient localement transitifs. On obtient alors un espace localement homogène de Lie sous la forme définie dans (6).

Dans (6) je démontre que tout espace localement homogène de Lie supposé compact et simplement connexe est équivalent à un espace homogène de Lie. Une autre démonstration est esquissée dans (39) à l'aide des jets locaux. Je définis la notion d'espace complet (localement homogène de Lie) et je démontre que le revêtement universel d'un tel espace E est un espace homogène de Lie $\hat{E}$. Le groupe d'automorphismes de cette structure de revêtement est un groupe d'automorphismes de $\hat{E}$ relativement à sa structure d'espace homogène de Lie, ce groupe est proprement discontinu ; de plus, si une transformation appartenant à ce groupe laisse un point fixe, elle se réduit à l'identité. La recherche des espaces complets localement équivalents à $\hat{E}$ revient à la recherche des groupes d'automorphismes de E ayant ces propriétés.

J'étudie en particulier les espaces localement projectifs et localement affines (6). Un espace localement projectif complet est isomorphe à un espace localement sphérique compact (3). Un espace localement projectif compact n'est pas nécessairement complet ; par exemple $S_n \times S_1$ admet une structure localement affine, mais son revêtement universel n'est pas équivalent à l'espace affine. J'aborde l'étude des espaces localement projectifs ou affines qui ne sont pas complets, en introduisant la notion d'espace localement projectif convexe. Dans le cas de 2 dimensions, je donne une classification de ces espaces ; celle-ci a été complétée récemment par Kuiper.

5. LA THÉORIE DES ESPACES FIBRÉS (11, 14-18, 20-23, 28, 30, 44).

Depuis 1941, la plupart de mes publications concernent la théorie des espaces fibrés et ses applications. Déjà dans ma thèse (4) j'ai étudié certaines structures fibrées, sans les appeler ainsi. En effet, j'y montre (p. 398-399) que dans un groupe de Lie G les classes $s\,g$, où g est un sous-groupe fermé de G, forment une fibration de G au sens strict (localement équivalente à la fibration d'un produit) ayant pour base l'espace homogène G/g. D'autre part, dans le cas des courbes, j'y démontre le relèvement des homotopies et les relations entre groupes d'homotopie de l'espace fibré, de la base et d'une fibre. Dans (11) j'étudie certaines fibrations d'un espace projectif réel ou complexe ; elles correspondent aux fibrations des sphères indiquées par H. Hopf, dont j'ignorais les résultats (parus dans Fund. Math., 1935). A ces fibrations je rattache les parallélismes découverts par Elie Cartan dans l'espace projectif réel à 7 dimensions. L'espace de base d'une de ces fibrations est l'espace projectif quaternionien, dont j'indique les bases d'homologie.

Dans une série de Notes publiées de 1941 à 1944, je me propose de donner les éléments d'une théorie générale des espaces fibrés à groupe structural G, généralisant la théorie de H. Whitney des espaces fibrés en sphères, où le groupe structural est le groupe orthogonal. D'ailleurs l'idée dun espace fibré à groupe structural G et de l'espace des "repères" associé se trouve déjà dans (10), où je donne une définition valable du point de vue global d'un espace muni d'une connexion de Cartan. La Note (14), rédigée en collaboration avec J. Feldbau, donne une définition d'un espace fibré à groupe structural G, représenté par le symbole E(B, F, G, H). La "méthode de construction" de (15) donne une deuxième définition équivalente. Celle-ci rentre dans le cadre de la définition générale indiquée dans le § 4 ci-dessus : structure définie par des cartes locales formant un atlas compatible avec le pseudogroupe $\Gamma//G$. La définition est indiquée sous cette forme dans (20), en supposant cependant Γ réduit au pseudogroupe des transformations identiques des ouverts de l'espace B ; de cette façon on ne tient pas compte de structures locales données éventuellement sur B. La définition donnée dans (14) n'implique aucune topologie donnée sur G. La deuxième définition permet de distinguer entre cette notion générale et les structures plus précises où G est un groupe topologique. Pour une structure de cette espèce plus précise on peut définir (15) les espaces fibrés associés à E(B, F, G, H) et en particulier l'espace fibré principal associé H, appelé aussi espace des repères. A tout espace F' qui admet G comme groupe continu d'opérateurs correspond un espace fibré associé à fibres isomorphes à F'.

L'ensemble des isomorphismes d'une fibre quelconque sur une fibre quelconque de l'espace E(B, F, G, H) forme un groupoïde Π qu'on peut identifier (30) à un espace quotient de HxH. Sur tout espace fibré associé Π est groupoïde continu d'opérateurs, notion définie dans (44), où je propose la généralisation suivante de la notion d'espace fibré :

> un espace E muni d'un groupoïde continu d'opérateurs $\emptyset$ est appelé espace fibré associé à $\emptyset$.

Ses fibres auront en général des structures variables. Pour un tel espace, on peut encore définir la notion d'espace fibré associé et la notion d'application covariante (38) sur un espace fibré associé.

La théorie de l'homotopie dans les espaces fibrés est abordée dans (14) avec l'indication du théorème du relèvement des homotopies ainsi que des relations qui existent entre les groupes d'homotopie de l'espace fibré, de la base et d'une fibre. Ces résultats ont été publiés indépendamment par Hurewicz et Steenrod (Proc. Nat. Ac. Sc. 1941) à la même époque (où les échanges d'informations scientifiques entre la France et l'Amérique étaient pratiquement interrompus). Quelques applications immédiates à la détermination de groupes d'homotopie sont données dans (14), et j'ai eu l'occasion d'en faire beaucoup d'autres, que je n'ai pas publiées à ce moment. Dans (15) les structures fibrées isomorphes à un espace produit sont caractérisées par l'existence d'une section dans l'espace fibré principal associé. De plus, je démontre par le relèvement des homotopies qu'un espace fibré dont la base est contractile en un point est isomorphe à un espace produit.

Dans (18) je donne une démonstration détaillée du théorème du relèvement des homotopies avec quelques applications. Dans le cas des revêtements, le théorème prend une forme plus précise. Je caractérise les applications continues de A dans B qui sont la projection d'une application continue d'un revêtement de A dans un revêtement de B. En particulier je montre ainsi que tout revêtement d'un groupe topologique est muni d'une structure de groupe revêtement. Enfin, je caractérise les classes d'applications d'un espace connexe et localement simplement connexe dans un espace complet localement euclidien ou non euclidien hyperbolique (le raisonnement s'applique aussi aux espaces localement affines complets). Enfin, dans (16) je pose le problème général des structures fibrées ayant comme structure sous-jacente une structure fibrée donnée $E(B, F, G, H)$ et obtenues par réduction du groupe structural G à un sous-groupe G'. Le problème est ramené au problème d'existence d'une section de l'espace fibré associé ayant pour fibre l'espace homogène G/G'. J'indique une méthode de construction d'une section conduisant à un premier obstacle si les groupes d'homotopie de la fibre ne sont pas nuls. J'étais arrivé à une théorie du premier obstacle à l'existence d'une section (16, 20, 21) dans le cas où l'espace fibré des groupes d'homotopie des fibres est un espace produit. Ceci n'est qu'une généralisation immédiate de résultats de Stiefel, et de la théorie des obstacles, à l'extension d'une application continue (Eilenberg). J'en ai donné diverses applications, ignorant la théorie la plus complète développée par Steenrod à la même époque. Une première application est donnée dans (16). Si le groupe structural G est un groupe de Lie semi-simple connexe, il peut être réduit à un sous-groupe compact maximal. Dans (20) j'indique que ce résultat est valable pour un groupe de Lie connexe quelconque, en vertu d'un théorème de Malcev.

D'autres applications (exposées pour la première fois à Zürich en 1942) sont données dans (17). Je définis d'abord avec précision l'espace fibré des vecteurs tangents à une variété différentiable V_n. Son groupe structural est le groupe linéaire homogène L_n. Les espaces fibrés associés sont les prolongements du premier ordre de V_n. Je pose le problème de la réduction du groupe structural L_n à un sous-groupe G de L_n, définissant ainsi les G-structures sur V_n. Comme L_n peut toujours être réduit au groupe orthogonal, il existe toujours sur V_n une structure riemannienne à métrique définie positive. Pour qu'il existe une métrique riemannienne indéfinie, il faut et il suffit qu'il existe un champ d'éléments de contact de dimension p. Le problème conduit à des obstacles. Ainsi, pour que sur une variété compacte V_4 il existe une métrique de la signature exigée par la théorie de la relativité, il faut et il suffit que la caractéristique d'Euler-Poincaré de V_4 soit nulle. L'Univers, s'il est compact, possède donc cette propriété topologique. Dans (17) je fais une hypothèse sur l'orientabilité des directions de temps (distinction entre passé et avenir), mais cette hypothèse est superflue.

Les structures fibrées obtenues par réduction du groupe structural G, à un sous-groupe G' sont réparties en classes d'homotopie, dont chacune est formée de structures isomorphes en vertu du "Lemme d'isotopie" (16). Ce lemme est équivalent à un deuxième théorème de relèvement des homotopies (24, 30), qu'on peut ramener d'ailleurs au premier en utilisant (30) l'espace des isomorphismes d'une fibre quelconque de $E(B, F, G, H)$ sur une fibre quelconque de $E'(B', F, G, H')$. J'ai donné plusieurs applications de ce théorème. Il conduit à définir la notion d'espace fibré universel pour les structures à groupe structural G ainsi que la notion de classe d'homotopie caractéristique. Ces dernières notions, introduites par Steenrod dans le cas particulier où $G = L_n$, ont été obtenues à peu près en même temps par plusieurs auteurs.

Dans (27) j'ai posé un autre problème général de la théorie des espaces fibrés : étant donné une extension $\bar{G}$ du groupe G (c'est-à-dire G est un groupe quotient de $\bar{G}$) et un espace fibré principal H à groupe structural G, chercher un espace fibré principal $\bar{H}$ à groupe structural $\bar{G}$ qui soit une extension associée de H. Ce problème, qui ne se réduit pas à la construction d'une section, conduit aussi à des obstacles esquissés dans (27). Il se pose dans diverses questions de Géométrie différentielle, et il vient de faire l'objet d'une étude approfondie par Dedecker.

6. LES VARIÉTÉS PRESQUE COMPLEXES (20, 29, 31)

Soit V_{2n} une variété différentiable, et soit $T(V_{2n})$ l'espace fibré des vecteurs tangents, à groupe structural L_{2n}. Si V_{2n} est muni d'une superstructure de variété analytique complexe (c'est-à-dire admettant la structure de variété différentiable donnée comme structure sous-jacente), l'espace $T(V_{2n})$ est aussi muni d'une structure fibrée à groupe structural L'_n, groupe linéaire homogène complexe de l'espace numérique complexe $\mathbf{C}^n$. Celle-ci correspond à une réduction du groupe structural L_{2n} à un sous-groupe L'_n. J'appelle structure presque complexe (20, 29) sur V_{2n} une superstructure fibrée quelconque sur $T(V_{2n})$ obtenue par réduction de L_{2n} à L'_n, c'est-à-dire une G-structure sur V_{2n}, où $G = L'_n$. Si V_{2n} admet une superstructure de variété analytique complexe, elle admet donc une structure presque complexe particulière. Mais en général une structure presque complexe sur V_{2n} ne dérive pas de cette façon d'une superstructure de variété analytique complexe.

Une structure presque complexe sur V_{2n} peut être définie aussi par la donnée dans l'espace tangent T_x au point x, d'une structure vectorielle complexe ayant la structure vectorielle réelle de T_x comme structure sous-jacente, et dépendant d'une façon continue de x. Une telle structure vectorielle complexe est déterminée par la donnée dans T_x d'une transformation linéaire I_x telle que

$$(I_x)^2 = -1 ,$$

ou encore par la donnée d'un sous-espace vectoriel complexe $X(x)$ de T_x^c (extension complexe de l'espace vectoriel réel T_x) tel que

$$\dim X(x) = n ,$$

et tel que l'intersection de $X(x)$ avec son complexe conjugué $\bar{X}(x)$ se réduise au point x. Une structure presque complexe sur V_{2n} est donc déterminée par un champ continu de transformations I_x ou d'éléments de contact complexes $\bar{X}(x)$ qui vérifient les conditions indiquées. On peut définir $X(x)$ par n formes linéaires complexes ω_h sur T_x telles que les formes ω_h et leurs complexes conjuguées $\bar{\omega}_h$ soient $2n$ formes indépendantes. Localement, une structure presque complexe est donc aussi définie par un système de Pfaff $\omega_h = 0$, vérifiant les conditions indiquées. Si la structure presque complexe dérive d'une structure complexe sur V_{2n}, ce système de Pfaff est équivalent à $dz_h = 0$, où $(z_1,\dots,z_n)$ est un système de coordonnées complexes de la structure complexe.

D'une façon générale, j'ai étudié pour un espace fibré E à groupe structural L_{2n} le problème de la réduction du groupe orthogonal à L'_n. On peut toujours réduire L_{2n} au groupe orthogonal O_{2n} ; de même on peut toujours réduire L'_n au groupe unitaire O'_n. Une O'_n-structure sur V_{2n} peut être appelée une structure presque hermitienne sur V_{2n} ; elle est déterminée par la donnée d'une structure presque complexe et d'une forme d'Hermite définie positive dans chaque T_x. Le problème posé se ramène au problème de la réduction du groupe orthogonal connexe O^+_{2n} à O'_n, c'est-à-dire à la recherche d'une section d'un espace fibré dont les fibres sont isomorphes à l'espace homogène O^+_{2n}/O'_n. Cet espace est un des espaces riemanniens symétriques compacts irréductibles de Elie Cartan. En utilisant une structure fibrée de cet espace, j'ai obtenu un certain nombre de résultats concernant ses groupes d'homotopie. Cette fibration fournit aussi une subdivision en cellules donnant les bases d'homologie ; les groupes d'homologie sont isomorphes à ceux du produit de sphères

$$S_{2n-2} \times S_{2n-4} \times \dots \times S_2 .$$

Ces propriétés de O^+_{2n}/O'_n permettent de démontrer les résultats suivants:

Le premier obstacle à la réduction de O^+_{2n} à O'_n est une classe de cohomologie caractéristique W_3 de dimension 3, que j'ai identifiée avec la classe de Stiefel-Whitney de dimension 3. Si $W_3 = 0$, il y a un deuxième obstacle, de dimension 4 pour $2n = 4$, de dimension 8 pour $2n = 6$ et de dimension 7 pour $2n \geqslant 6$. En particulier $W_3 = 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une structure presque complexe sur une variété orientable V_6.

J'ai indiqué une méthode particulière s'appliquant aux sphères de la forme S_{2n}. Ainsi, on trouve que S_4 n'admet pas de structure presque complexe et a fortiori pas de structure complexe. S_6 admet pour chaque orientation des structures presque complexes (et presque hermitiennes) formant une seule classe d'homotopie. Un exemple d'une telle structure a été défini par Kirchoff à l'aide des octaves de Cayley. Je suis arrivé au même exemple en considérant un parallélisme dans l'espace projectif réel à 7 dimensions qui correspond (11) à une fibration d'une quadrique complexe à 6 dimensions complexes par des génératrices planes à 3 dimensions complexes. Si S_6 est la partie réelle d'une telle quadrique, ces fibres déterminent un champ d'éléments de contact complexes sur S_6 définissant une structure presque complexe.

L'existence d'une structure presque complexe sur V_{2n} est équivalente à l'existence d'une forme extérieure quadratique Ω de rang $2n$ en chaque point. Une structure de l'une de ces deux espèces détermine une classe de structures de l'autre. Si Ω est une forme fermée, elle définit sur V_{2n} une structure que j'ai proposé d'appeler structure de variété symplectique. Une structure presque hermitienne sur V_{2n} détermine une structure riemannienne et une structure presque symplectique (c'est-à-dire une forme Ω) sous-jacentes. Si cette forme Ω est fermée, la structure presque hermitienne est dite presque kahlérienne.

J'ai étudié les sous-variétés d'une variété presque complexe V_{2n}, en définissant d'une part les sous-variétés réelles et d'autre part les sous-variétés presque complexes (29). Il existe toujours des sous-variétés réelles de dimension inférieure ou égale à n ; mais en général il n'existe pas de sous-variétés presque complexes (qui sont les variétés intégrales d'un certain système différentiel). Cependant, si la structure presque complexe sur V_{2n} est de classe analytique, toute courbe analytique réelle appartient à une sous-variété presque complexe de dimension 2. Pour la structure presque complexe particulière considérée sur S_6, il n'y a pas de sous-variété presque complexe de dimension > 2. Il n'y a pas non plus d'applications locales presque complexes non constantes de S_6 dans le plan complexe **C**. Une application d'une variété presque complexe V_{2n}, dans une autre est dite presque complexe si son prolongement aux vecteurs tangents est en chaque point de V_{2n} une application vectorielle complexe. Dans (29) j'ai indiqué quelques résultats topologiques concernant les sous-variétés. Enfin, toute variété différentiable V_n peut être considérée comme une sous-variété réelle d'une variété analytique complexe V_{2n} (extension complexe de V_n), et un voisinage de V_n dans V_{2n} est isomorphe à un voisinage de la diagonale de $V_n \times V_n$.

Le problème d'équivalence locale des structures presque complexes est un cas particulier du problème d'équivalence des G-structures, qui n'est autre que le problème d'équivalence d'Elie Cartan, que j'ai formulé d'une façon plus générale dans (36). J'ai proposé ce problème comme sujet de thèse à Melle P. Libermann [3] . Si une structure presque complexe est définie sur V_{2n} par n formes de Pfaff complexes ω_h, on a

$$d\omega_h = \Sigma\ \omega_l \wedge \omega_{hl} + \Sigma\, a^h_{lm}\ \omega_l \wedge \omega_m ,$$

où les a^h_{lm} définissent un tenseur du type hermitien que nous avons appelé tenseur de torsion de la structure. Ce tenseur est nul si la structure dérive d'une structure complexe. En utilisant le théorème de Frobenius dans une extension complexe de V_{2n}, j'ai montré que si ce tenseur est nul, la structure presque complexe dérive d'une structure complexe, à condition de supposer que la structure presque complexe est de classe analytique. Il semble difficile de démontrer ce résultat sans faire cette dernière hypothèse.

Pour une structure presque hermitienne, on peut définir deux tenseurs de torsion ainsi que la courbure (31, en collaboration, avec Melle Libermann). Une structure presque hermitienne isotrope est localement équivalente à la structure des espaces hermitiens classiques. Par une condition d'isotropie restreinte, on obtient de plus la structure presque hermitienne considérée sur S_6. Sa deuxième torsion n'est pas nulle. C'est celle de la structure presque complexe sous-jacente qui par conséquent ne dérive pas d'une structure presque complexe. Sur S_6, toute structure presque hermitienne localement homogène se réduit à la précédente. On ignore toujours si S_6 admet une structure complexe. Mais S_2 et S_6 sont les seules sphères admettant des structures presque complexes, d'après Borel-Serre.

J'ai introduit également la notion de structure presque quaternionienne sur une variété V_{4n} ; c'est une G-structure, où G est le groupe linéaire quaternionien L_n''. Quelques résultats concernant le premier obstacle à la réduction de L_n' à L_n'' se trouvent dans (20).

Depuis 1947, les variétés presque complexes ont fait l'objet de nombreuses recherches dont un trouvera un résumé dans la Notice historique rédigée par Melle Libermann (à paraître dans Bull. Soc. Math. de France). Deux thèses sur ce sujet ont été préparées sous ma direction [1, 3].

7. VARIÉTÉS FEUILLETÉES (19, 21-23, 28, 30).

Une définition générale des structures feuilletées a été indiquée au § 4 ci-dessus : structures associées à un pseudogroupe $\Gamma//\Gamma'$. On a alors des structures feuilletées dont les feuilles elles-mêmes ont des structures locales associées à Γ'. Le cas particulier le plus important est celui d'un feuilletage défini sur une variété différentiable V_n par un champ complètement intégrable $\emptyset$ d'éléments de contact de dimension p. Un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans V_n est distingué pour cette structure lorsque $\emptyset$ y est représenté par

$$d\,x_1 = d\,x_2 = \ldots = d\,x_{n-p} = 0\,.$$

Les feuilles sont les variétés intégrales complètes de $\emptyset$. Celles-ci sont définies (19) comme étant les composantes connexes de V_n relativement à une topologie T' déterminée par $\emptyset$. On peut définir un feuilletage général (39) d'un espace topologique E par la donnée d'une topologie T' plus fine que la topologie T, de l'espace E, et telle que l'application identique de E soit localement un homéomorphisme d'un voisinage relativement à T', sur un sous-espace de E relativement à T. J'ai défini aussi les feuilletages avec singularités et les germes de feuilletage (40). Les structures feuilletées généralisent les structures fibrées. La théorie de ces structures est une généralisation de la théorie globale des équations différentielles (H. Poincaré).

J'ai proposé l'étude des variétés feuilletées comme sujet de thèse à G. Reeb [4]. En 1944, nous avons publié en collaboration les premiers résultats (19). Dans cette Note nous indiquons une structure feuilletée sur la sphère S_3 dont les feuilles sont à 2 dimensions, l'une d'elle étant un tore. Nous démontrons le théorème :

Pour une structure feuilletée sur $\mathbf{R}^{2p+1}$ ou S_{2p+1}, la caractéristique d'Euler-Poincaré de toute feuille compacte est nulle.

J'ai généralisé ce théorème de plusieurs façons. Si V_p est une feuille compacte d'une structure feuilletée sur V_n, et si V_p est homologue à 0 dans V_n, la caractéristique d'Euler-Poincaré de V_p est nulle (21). J'étends ce théorème à d'autres classes caractéristiques de Stiefel-Whitney de V_p, et je le formule plus généralement pour les "sections" d'un champ d'éléments de contact. Le deuxième théorème du relèvement des homotopies dans les espaces fibrés m'a permis de démontrer le résultat suivant (23) :

Si V_p est une feuille contractile sur V_n en un point, alors V_p est parallélisable, et l'espace des vecteurs normaux à V_p est isomorphe à $V_p \times \mathbf{R}^{n-p}$.

Dans (23, 30) je démontre de plus un certain nombre de propriétés des variétés plongées dans une variété différentiable, en considérant la variété de tous les éléments de contact.

La première Note (19) contient aussi le théorème de stabilité (Théorème 2) pour un feuilletage de V_n dont les feuilles sont de dimension $n-1$:

Les feuilles vooisines d'une feuille compacte V_p à groupe de Poincaré fini sont aussi compactes. Si de plus V_n est compact, toutes les feuilles sont compactes. Elles forment même une fibration de V_n en supposant que l'ensemble des normales aux feuilles est orientable.

Ce théorème de stabilité a été étendu par G. Reeb aux structures feuilletées quelconques, où les feuilles sont de dimension p. En 1953 j'en ai donné une démonstration différente (non publiée) dans une série de conférences au Séminaire sur les équations différentielles à Princeton, en utilisant la théorie des jets locaux.

Etant donné un espace fibré E de base B, considérons une structure feuilletée transversale aux fibres (22, 28). Si les fibres sont compactes connexes, on a la propriété : Tout chemin de B peut être relevé dans n'importe quelle feuille. Supposons vérifiée cette dernière propriété ; les feuilles forment alors des revêtements de B. La structure ainsi définie par un feuilletage transversal d'un espace fibré peut aussi être considérée comme une structure fibrée à groupe structural discret (en supposant B localement connexe), ou encore comme une connexion intégrable dans l'espace fibré. Cette structure est complètement caractérisée par une représentation du groupe fondamental de B sur le groupe d'holonomie de cette connexion

(22, 28). Ce théorème m'a permis d'étudier la structure du voisinage tubulaire d'une feuille stable V_p d'un feuilletage quelconque. Si le groupe de Poincaré de V_p est fini, cette structure est caractérisée par un certain groupe de rotations euclidiennes. Enfin, j'ai caractérisé les variétés plongées V_p dans une variété différentiable telles que dans le voisinage de V_p il existe un feuilletage admettant V_p comme feuille. Pour toute feuille V_p d'un feuilletage, on peut définir un groupe d'holonomie local ; c'est un groupe de jets locaux inversibles défini dans une variété transversale à V_p au point $x \in V_p$. Dans le cas différentiable, on en déduit un groupe d'automorphismes dans l'espace des vecteurs normaux à V_p en x; c'est un groupe structural discret pour l'espace fibré des vecteurs normaux à V_p.

Dans (32) j'ai défini une notion de feuilletage d'ordre supérieur, généralisant par exemple le système de géodésiques d'un espace de Riemann.

8. LES CONNEXIONS INFINITÉSIMALES DANS UN ESPACE FIBRÉ (7, 10, 22, 27, 28, 38, 42, 46).

Dans (10) j'ai donné une définition valable du point de vue global d'une connexion au sens d'Elie Cartan. J'ai précisé et généralisé cette définition dans (22, 27, 28). J'ai déjà indiqué la notion de connexion intégrable qui revient à celle de structure fibrée à groupe structural discret. Etant donné un espace fibré différentiable E(B, F, G, H) à groupe structural de Lie G, considérons le groupoïde $\Phi = HH^{-1}$ des isomorphismes de fibre sur fibre. Φ admet deux projections a et b sur B. Si θ est un isomorphisme de la fibre F_x sur $F_{x'}$ nous posons

$$a(\theta) = x\ , \quad b(\theta) = x'.$$

Soit $\hat{x}$ l'isomorphisme identique de F_x. L'ensemble des $\hat{x}$ forme une section A de Φ. Un déplacement infinitésimal de la fibre F_x est un vecteur tangent à Φ d'origine x dont la projection par a se réduit au point x. Un élément de connexion infinitésimale au point x est un élément de contact X de dimension $n = \dim B$ tel que sa projection aX se réduise au point x et tel que bX soit l'élément de contact de dimension n de B en x. Tout vecteur d'origine x est alors la projection par b d'un déplacement infinitésimal appartenant à X. L'ensemble des éléments de connexion X forme un espace fibré de base B ayant un groupe structural déterminé en fonction de G. Une section de cet espace fibré est par définition une connexion infinitésimale dans E(B, F, G, H). On peut définir (46) de même un élément de connexion d'ordre supérieur par un élément de contact X non holonome d'ordre supérieur dans Φ vérifiant des conditions analogues. Par prolongement d'une connexion du premier ordre, on est conduit à une connexion d'ordre supérieur. L'existence d'une connexion résulte immédiatement du fait que les éléments de connexion en un point x forment un espace numérique (28).

La définition donnée entraîne deux autres définitions équivalentes d'une connexion (28) : d'une part, champ d'éléments de contact transversaux dans H, d'autre part, forme de Pfaff définie dans H à valeurs dans l'algèbre de Lie de G. On définit le groupe d'holonomie d'une telle connexion, et on voit que le groupe structural de E(B, F, G, H) peut être réduit à ce groupe d'holonomie. Enfin, on définit la courbure et la différentiation covariante. Celle-ci revient dans le cas des connexions d'ordre quelconque à une composition de jets non holonomes (46).

Les connexions considérées par Elie Cartan concernent des espaces fibrés E(B, F, G, H) soudés à la base B, c'est-à-dire l'espace tangent à F_x en x est identifié avec l'espace tangent à B en x. Dans ce cas, on définit le développement des courbes de B sur des courbes de F_x. De même, un élément de contact d'ordre supérieur de B admet un développement dans F_x ; c'est un élément de contact, de même ordre, mais en général non holonome. Je donne la définition d'un espace complet à connexion de Cartan (toute courbe de F_x y admet un développement dans B) et je démontre le théorème (7, 10) :

Etant donnés deux espaces à connexion de Cartan de classe analytique, supposés de plus complets et simplement connexes, tout isomorphisme local se prolonge en un isomorphisme global.

Dans une conférence (non publiée) faite au Congrès International de Géométrie Différentielle (Italie 1953) ainsi que dans (42) j'ai étudié l'ensemble des éléments de connexion affine associés à une G-structure donnée sur une variété différentiable. Pour une telle G-structure on peut toujours définir la notion de torsion, et dans certains cas un tenseur de torsion. Si la torsion de la G-structure est identiquement nulle, on peut y associer une connexion affine sans torsion. J'ai caractérisé les G-structures auxquelles on peut associer canoniquement une connexion affine. Il en est toujours ainsi lorsque G est sous-groupe du groupe orthogonal.

9. FONDEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE GÉNERALE (32-38, 40-44)

Depuis 1951, je me suis intéressé surtout aux fondements de la Géométrie différentielle. J'ai défini d'une façon générale les éléments infinitésimaux et les structures infinitésimales qui forment l'objet de la Géométrie différentielle. La notion fondamentale est celle de jet d'ordre r d'une variété différentiable V_n dans une autre V_m. C'est la classe d'équi-

valence d'applications de classe r de V_n dans V_m dont les dérivées partielles, à l'aide de coordonnées locales admissibles, prennent les mêmes valeurs en un point x de V_n pour tous les ordres $\leqslant r$.
On définit la loi de composition de jets d'ordre r ; c'est la structure algébrique qui est à la base de toute la Géométrie différentielle.

La notion de jet donne en particulier celle de vitesse d'ordre r, d'élément de contact d'ordre r et celle de repère d'ordre r. L'ensemble des repères d'ordre r de V_n forme le prolongement principal $H^r(V_n)$ de V_n. Il admet une structure fibrée de groupe structural L_n^r, extension du groupe L_n. J'appelle prolongement d'ordre r de V_n tout espace fibré associé à $H^r(V_n)$. Ces espaces admettent en fait une structure plus précise qu'une structure fibrée, et que j'appelle structure de prolongement. Leurs éléments sont les éléments infinitésimaux d'ordre r. Une section d'un prolongement d'ordre r est une structure infinitésimale pure d'ordre r sur V_n ; cette notion généralise celle d'objet géométrique qui n'avait guère été définie du point de vue global.

J'ai étudié l'espace $J^r(V_n,V_m)$ des jets d'ordre r de V_n dans V_m. Un sous-espace Φ peut être considéré comme un système différentiel général pour lequel j'ai défini aussi la notion de prolongement. Ceci m'a conduit à définir la notion de jet non holonome (41, 43) et à y étendre le calcul des jets. On est conduit à une définition plus générale de la notion de prolongement de V_n ; c'est celle de prolongement associé à un groupoïde Φ de jets inversibles de V_n dans V_n. De cette façon, on obtient, par exemple, des prolongements de V_n supposés munis d'une structure infinitésimale, Φ étant le groupoïde associé à cette structure infinitésimale. J'ai démontré un théorème de transitivité pour les prolongements généralisés (43). Pour ces prolongements généralisés, on peut définir aussi la notion de covariant différentiel. La théorie des jets non holonomes permet en particulier de faire la théorie des connexions infinitésimales d'ordre r.

10. PSEUDOGROUPES DE LIE (36, 40, 42).

Dans (36) j'ai fait remarquer que les "groupes infinis" de Lie sont en réalité des pseudogroupes de transformations, dont Sophus Lie et Elie Cartan n'ont considéré en fait que des noyaux. J'ai donné une définition de ces pseudogroupes dans le cadre de la théorie des jets. Ce point de vue a été développé par Melle Libermann dans sa thèse [3] et dans un article plus récent (Colloque de Topologie de Strasbourg 1954). La théorie revient à l'étude du groupoïde $J^r(\Gamma)$ des jets d'ordre r associé au pseudogroupe Γ.

Dans (42) j'ai montré qu'un système différentiel Φ de Mayer-Lie d'ordre r se ramène à un champ d'éléments de contact dans la variété de jets représentant $\emptyset$. Il est complètement intégrable si ce champ est complètement intégrable. A ces systèmes on peut donc appliquer le théorème de stabilité de la théorie des variétés feuilletées ; ce théorème ne s'applique pas à des systèmes plus généraux. Comme application de ces remarques, j'ai montré qu'un pseudogroupe de Lie Γ de type fini, défini sur une variété compacte simplement connexe, est déduit par localisation d'un groupe de transformations de Lie. Enfin, dans des conférences faites à Yale University et à Columbia University, j'ai démontré le théorème suivant (non publié) :

Etant donné un pseudogroupe de Lie Γ de type fini sur une variété V_n le groupe formé par les transformations de Γ définies sur toute la variété est un groupe de Lie.

Dans (42) j'ai défini, sur un pseudogroupe de Lie Γ, des topologies pouvant servir à définir les notions de noyau et de germe de pseudogroupe de Lie.

1. WU WEN TSUN, Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, Hermann, Paris, 1952.
2. J. NORDON, Les éléments d'homologie des quadriques et des hyperquadriques, Bull. Soc. Math. de France 74, 1946, p. 116-129.
3. P. LIBERMANN, Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, Annali di Mate., 1954.
4. G. REEB, Propriétés topologiques des variétés feuilletées, Hermann, Paris, 1952.

COMMENTS ON PARTS I-1 AND I-2

INTRODUCTION

by Andrée CHARLES EHRESMANN

Parts II, III and IV of these "Oeuvres" contain Charles Ehresmann's papers on Category Theory, which have not always been well understood ; so I made "pointwise" comments on them to help to overcome notational difficulties, to make a link with other literature, and to point out later or still possible developments.

The (older) papers included in this Part I are of a very different kind : almost all the notions they introduce and deal with (fibre bundles, foliated manifolds, jets as a foundation for Differential Geometry, almost complex manifolds, locally homogeneous spaces, local structures associated to a pseudogroup,...) are now common knowledge and have often opened new domains of research. Hence it seemed more interesting to give varied commentaries written by specialists well acquainted with these domains.

Briefly, the following Comments contain :

- 8 papers (I to VIII) which present a synthetic view of a series of papers concerning a particular domain. They replace Charles's results in their human and historical framework, point out subsequent developments, applications and possible prolongations.

- A reproduction of 4 papers written on Charles's works after his death. IX, X and XI were firstly published in the "Gazette des Mathématiciens" (n° 13, 1980) ; XII is the text of a talk given at the Arnsberg Category Meeting dedicated to Charles (one month after his death), and preprinted in "Seminarberichte Fernuniversität Hagen" (n° 7, 1980).

-The list of the 79 Theses prepared under Charles's direction.

The subsequent brief Synopsis may be used as a guide for the reading of the papers and of the commentaries.

Notations :

-The numbers between / / refer to the "Liste des Publications de Charles Ehresmann" at the beginning of this volume (pp. XI-XVIII).

-The numbers between [ ] refer to the bibliographies at the end of each commentary.

TABLE OF CONTENTS

I

THE PAPERS OF Charles EHRESMANN ON HOMOGENEOUS SPACES AND LIE GROUPS /1, 2, 3, 4, 6-10, 12, 13, 25, 28, 39/

by W. T. VAN EST

The purpose of this commentary is mainly to situate the papers referred to above with regards to Lie group theory, algebraic topology and geometry in the thirties and early fourties, the period in which most of these papers were written. A discussion of them in the broader context of the historical development of these major subjects over a period of years is to be found in papers referred to below. /6/ is commented more extensively.

Homogeneous spaces /1, 2, 4, 8, 12, 13/.

Recall that Elie Cartan [1929], anticipating the de Rham theorems, had studied the de Rham cohomology of compact homogeneous spaces by means of invariant differential forms. In particular it turned out that for symmetric spaces the invariant forms just constituted a base for the cohomology. The interpretation of exactness-classes of forms as cohomology classes was proved to be correct by de Rham [1931]. As a matter of fact the formal cohomology concept emerged in the second half of the thirties, and the results of Cartan and de Rham were rather formulated in terms of Betti numbers.

The work of Cartan and de Rham thus made clear that sufficient information on the differential forms on a manifold would yield results on the Betti numbers and the intersection ring of homology classes. (The notion of intersection ring on a manifold and its behaviour under mappings was well established at the time, see J. W. Alexander [1925], S. Lefschetz [1926], H. Hopf [1930].)

In any case in the early thirties algebraic topology had matured enough to allow for the sort of applications Poincaré had in mind in writing his memoirs [1895]. As a matter of fact there was already a record of applications such as Lefschetz [1924] and van der Waerden [1929] in algebraic geometry, Hopf [1925] in differential geometry, and the paper of E. Cartan [1929] in the theory of Lie groups, to mention only a few examples.

Now in /4/ Ehresmann sets out with the observation that in classical geometry there is a category of well-studied manifolds which are symmetric spaces in the sense of E. Cartan and for which the method of Cartan [1929] might apply to compute Betti numbers.

For the complex Grassmannians this approach is worked out and a formula for the Betti numbers is obtained (/4/ p. 409, Théorème). However, an explicit description of the invariant differential forms is lacking and the ring structure of the cohomology remains obscure. The first point has been taken care of later by Chern [1946] by making extensive use of the results obtained by the second approach developed by Ehresmann ; in addition, this partly fills out the lacuna in the knowledge of the multiplicative structure.

This approach which describes a cell-decomposition in terms of the Schubert manifolds, does yield an explicit description of a homology base in terms of "Schubert-cycles" and allows at the same time to study the intersection of cycles of complementary dimensions (/4/ p. 418, and § 11). For flag-manifolds similar results are obtained by the same method (/4/, Ch. V).

Among the by-results that deserve perhaps separate mention there is first a technical result in algebraic topology proper that states precise conditions under which a cell-decomposition of a polyhedron permits to calculate the homology by utilizing cellular chains (Ch. III, § 8, 9). Furthermore there is the corollary that two algebraic subvarieties of a Grassmannian are homologous (as cycles) iff they have the same Schubert symbol.

The same method of cell-decomposition is used in /8/ to study the homology of real Grassmannians and flag-manifolds.

In principle this should allow to determine the integral homology and to obtain information on the intersection ring. The calculations have been carried out partly. Later Chern [1947] used this cell-decomposition in order to calculate the ring structure with mod 2 coefficients, obtaining at the same time an explicit description of the Stiefel-Whitney classes in terms of specific Schubert cycles.

/12/ and /13/ employ the same method to compute the homology of the manifolds of orthonormal $(p+1)$-frames in euclidean $(n+1)$-space in the real, complex and quaternionic case. As a corollary the homology of the classical simple groups comes out. Except for this special case the results were new at the time.

Undoubtedly /4/ and /8/ at the time stirred the interest in that they calculated for the first time Betti numbers and intersection invariants for a particularly interesting class of algebraic manifolds.

A discussion of the results of /1, 2, 4, 8, 12, 13/ within the broader framework of the developments of algebraic topology connected with Lie groups over a longer period is to be found in Samelson [1952] and Borel [1955]. Furthermore Kleimann and Laksov [1972], § 5, contains an evaluation of the results of /4/ in the context of enumerative geometry.

Lie groups proper /9, 25/.

/9/ is an exposition of the elements of Lie theory entirely in the spirit of E. Cartan putting emphasis on the Maurer-Cartan forms as a tool rather than on the infinitesimal transformations. The exposition aims at comprising the global as well as the local case of transformation groups and Lie groups, the local case being always somewhat delicate in handling. E. g. on p. 37 there is a minor slip in the statement

> "... tout noyau de groupe abstrait de Lie admet un prolongement formant un groupe de Lie au sens global"
>
> whereas the statement should rather read
>
> ... tout noyau de groupe abstrait de Lie contient un noyau ouvert admettant un prolongement formant un groupe de Lie au sens global".

(The original statement would have been correct if the notion of group germ had been taken instead of "noyau".)

In comparing this presentation à la Cartan to the approach in terms of infinitesimal transformations à la Lie - and this latter is the type of approach one usually finds in most treatises on Lie theory - one might argue that basically it does not make much difference which of the two presentations one chooses. In both cases one has to avail oneself sooner or later of the integrability criterion for a distribution of plane elements. In the Lie type of treatment it is formulated in terms of infinitesimal transformations and their commutators, whereas in the treatment à la Cartan one uses the Frobenius formulation in terms of pfaffians and their derivatives.

However, the presentation à la Cartan lends a more "geometric flavour" to the whole theory. This is perhaps most notable in the treatment of the *global* converse of Lie's third fundamental theorem.

The vector field approach putting the Lie algebra to the fore, in order to attain its goal, avails itself of the Levi decomposition theorem in Lie algebra theory. The approach in terms of Maurer-Cartan forms leads to exploiting the geometric fact that the de Rham cohomology of a simply connected Lie group vanishes in dimension 2. Once given this fact no Levi decomposition is needed (see E. Cartan [1936] in particular p. 192-195 (1322-1325)). At the time no simple proof of this geometric property was available. Nowadays one would adapt part of the argument due to Hopf [1941] in manufacturing such a simple proof.*

*) In the same spirit there is a relatively simple proof of Ado's Theorem where one uses the vanishing of the rational de Rham cohomology in dimension 2 of an algebraic linear group, nowhere using Levi's Theorem, see e.g. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. A 69 (1966), 176-191.

In any case, Ehresmann's presentation of the Cartan ideas should perhaps be taken up one day and be worked out to a more complete treatment of "geometric Lie theory".

/25/ takes a rather isolated position in the total work of Charles Ehresmann. The results have been incorporated in the thesis of Lorenzo Calabi [1951].

Locally homogeneous spaces /6, 7, 10, 28, 39/.

We shall only comment /6/ since this paper contains all the main results of Ehresmann on the subject. /7/ announces results that appear in /6/. /10/ gives a new definition of the notion of locally homogeneous space and sketches another proof of one of the main results. However, the essence of /10/ is incorporated later in /28/ in the broader context of connections in fibre bundles ; there the locally homogeneous spaces are characterized as base spaces of fibre bundles with an integrable Cartan-connection. Once more the subject turns up very briefly in /39/.

Our main concern will be to point out how the main result of /6/ fits in with a theory of coverings and fundamental groups for the category of spaces equipped with a pseudogroup. It should be observed in passing that the notion of pseudogroup, introduced originally by Veblen and Whitehead [1932], has been broadened slightly by Ehresmann to the notion that is current at present.

For the future discussion we take the definition in terms of Lie algebras of vector fields as a basis. In recalling that definition we assume manifolds, maps, vector fields, etc. to be taken in the analytic category for convenience.

A manifold V is called a *locally homogeneous space,* or is said to carry a *locally homogeneous structure,* if it is endowed with an open cover $\{U_i\}$ and an assignment of a finite dimensional Lie algebra of vector fields L_i on every U_i subject to the following conditions :

(*) $L_i|U_i \cap U_j = L_j|U_i \cap U_j$ for every pair i, j for which $U_i \cap U_j \neq \emptyset$,
(**) at every $u \in U_i$ the vectors $X(u)$, $X \in L_i$ span the tangent space T_u.

Using sheaf language one might say that a locally homogeneous structure on V is just a section in the sheaf of germs of transitive Lie algebras of vector fields.

For every $u \in U_i$, $K_i(u)$ will denote the isotropy subalgebra of L_i, i.e. the subalgebra of $X \in L_i$ with $X(u) = 0$.

Since restriction of L_i to a non-empty open subset of U_i induces an isomorphism of Lie algebras, the condition (*) shows that $L_i \cong L_j$

as abstract Lie algebras if $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. *Supposing for the rest of the discussion* V *to be connected,* it follows that all the L_i are isomorphic to each other as abstract Lie algebras. Therefore one may identify them with a fixed abstract Lie algebra L via isomorphisms φ_i. Putting

$$\varphi_i(K_i(u)) =: K_i(u)$$

observe that $K_i(u)$ changes by conjugation (via the adjoint group of L_i) if u varies within a connected component of U_i. Since the locally homogeneous structure remains essentially the same in replacing the cover $\{U_i\}$ by a finer one (maintaining of course the same assignment of locally defined Lie algebras) we may as well assume the U_i to be domains, and hence $K_i(u)$, $u \in U_i$, lie all in the same conjugacy class $\underline{K}_i$.

Let K be a subalgebra chosen once for all in one of these classes $\underline{K}_i$. Let G be the simply connected Lie group generated by L and F the Lie subgroup generated by K. For the time being F *is assumed to be closed*. It should be observed that this would then likewise be the case for any other choice of K in $\cup\underline{K}_i$. Taking H := G/F, denoting the canonical projection G → H by π, and identifying L with the Lie algebra of right invariant vector fields on G,

$$\pi_*(L) =: \mathcal{L}$$

is a well defined Lie algebra of vector fields on H isomorphic to L (under π_*). As such H obtains a locally homogeneous structure ; we shall also refer to the couple H, $\mathcal{L}$ as the homogeneous space associated to the locally homogeneous structure on V. It should be observed that due to the various choices made, H, $\mathcal{L}$ is determined up to an isomorphism of locally homogeneous spaces (the notion of isomorphism being taken as that of a diffeomorphism commuting with the Lie algebra assignment).

$\mathcal{L}$ generates on H the group of left translations $\tau(g)$ associated to the elements $g \in$ G. By the whole construction it turns out that τ is an *injective* homomorphism of G into the group *Aut*(H, $\mathcal{L}$) of automorphisms of the couple H, $\mathcal{L}$. Usually the triple H, G, $\mathcal{L}$ is called a homogeneous space. However, in the further discussion it is primarily the couple H, $\mathcal{L}$ with its automorphism group *Aut*(H, $\mathcal{L}$) that will play the main rôle.

Returning to the notion of locally homogeneous structure, observe that locally homogeneous structures admit pullbacks with respect to étale maps. Therefore, if V carries a locally homogeneous structure, it lifts to any covering of V.

In particular it lifts by the canonical projection $\tilde{V} \to V$ to the universal covering of V ; it is called the *induced locally homogeneous structure on* $\tilde{V}$.

Now the main result of /6/ may be restated somewhat pedantically in the following way.

Let V *be a connected manifold with a locally homogeneous structure such that* H , **L** *is the associated homogeneous space. Then there is an étale map* $\tilde{\sigma} : \tilde{V} \to H$ *such that the induced locally homogeneous structure on* $\tilde{V}$ *is the pullback of the locally homogeneous structure on* H, $\tilde{V}$ *being the universal covering space of* V.

$\tilde{\sigma}$ *is determined up to an automorphism of* H, **L**. $\tilde{\sigma}$ *behaves equivariantly with respect to the action of the fundamental group of the universal covering* $\tilde{V} \to V$ *and the action of* Aut(H, **L**).

§ 11 of /39/ indicates a very short illuminating argument for this result.

In any case it follows now that, if $\tilde{V}$ is compact, $\tilde{\sigma}$ as an étale map is necessarily a covering map, and therefore, on account of the simple connectedness of $\tilde{V}$ and H, $\tilde{\sigma}$ must be an isomorphism. Hence V, as a locally homogeneous space, is the quotient of H , **L** , with respect to a discontinuous subgroup of Aut(H, **L**) that operates freely.

In general if $\tilde{\sigma}$ is an isomorphism, the locally homogeneous space is called *normal* or *complete*, and as such V (as a locally homogeneous space) is a quotient of H, **L**.

Now this result is very reminiscent of "covering theory" (or algebraically minded people might say "dual Galois theory"), of which the theory of locally connected topological spaces and their covering spaces is a classical example.

Without aiming at a categorical axiomatization of what "covering theory" should be, one may state in categorical language a few characteristics that existing examples have in common.

In each of these cases one is dealing with a category in which certain morphisms are declared to be "covering morphisms" or "coverings". Isomorphisms are coverings ; an object A is said to be *simply connected* if it only admits isomorphisms $\tilde{A} \to A$ as coverings. The product of coverings is a covering (within the class of connected and locally connected spaces, this holds only for the subclass of spaces that admit a cover consisting of simply connected domains). Any object A admits a universal covering $\pi : \tilde{A} \to A$ in which $\tilde{A}$ is simply connected ; the group of automorphisms of $\tilde{A}$ that commute with π is called the *fundamental group* $F(\pi)$. For any covering $\gamma : A^* \to A$ there is a unique factorization $\pi = \gamma_0 \gamma$ in which $\gamma_0 : \tilde{A} \to A^*$ is a covering ; γ_0 is again a universal covering, and

$$F(\gamma_0) \subset F(\pi) ;$$

γ_0 will be denoted by $\gamma\backslash\pi$. Conversely for any subgroup $F' \subset F(\pi)$ there is a factorization $\pi = \gamma\gamma_0$, γ, γ_0 being coverings, such that $F' = F(\gamma_0)$. Furthermore a covering γ factorizes into coverings $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ iff $F(\gamma\backslash\pi)$ is conjugate to a subgroup of $F(\gamma_1\backslash\pi)$.

Finally any morphism $\sigma: A \rightarrow B$ admits a lift

$$\tilde{\sigma} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B} \quad \text{with} \quad \pi_B \tilde{\sigma} = \sigma\, \pi_A$$

(π_B and π_A denoting universal coverings), $\tilde{\sigma}$ is unique up to a multiplication by an element of $F(\pi_B)$.

Now observing that for locally homogeneous spaces the natural notion of morphism is that of an étale map which "preserves" the local choice of Lie algebras, the situation described in the main result looks like the upper left corner of a diagram associated to the lift of a morphism

$$\begin{tikzcd}
\tilde{V} \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[d, "\pi"'] & H \arrow[d, dashed, "\pi\,?"] \\
V \arrow[r, dashed, "\sigma\,?"] & X
\end{tikzcd}$$

the lower right corner remaining hypothetical.

Similarly the notion of complete locally homogeneous space looks like the definition of a covering in between H and X

$$\begin{tikzcd}
\tilde{V} \arrow[d] & = & H \arrow[ddl, dashed, "\pi"] \\
V \arrow[dr, dashed] & & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Now actually these hypothetical arrows do possess reality within the broader category of manifolds equipped with a pseudogroup, i.e. the category of S-atlases.

Without entering into details, we briefly explain the interpretation in terms of S-atlases, and we recall first some terminology.

A manifold P equipped with a pseudogroup Γ of local diffeomorphisms will be called an *S-atlas*.

A *morphism* Ψ of A-atlases

$$(P_1 ; \Gamma_1) \rightarrow (P_2 ; \Gamma_2)$$

is a collection of partial maps $\psi : P_1 \to P_2$ (i.e. ψ is only defined on an open subset of P_1) such that the following requirements are satisfied

(i) $\Gamma_2 \Psi \Gamma_1 = \Psi$.

(ii) $\alpha(\Psi) = \bigcup_{\psi \in \Psi} \alpha(\psi) = P_1$, $\alpha :=$ source assignment.

(iii) $p \in P_1$, $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$, $\psi_1(p)$, $\psi_2(p) \Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma_2$ such that $\psi_1 = \gamma\, \psi_2$ in a neighborhood of p.

An atlas of a manifold is a particular case of an S-atlas if one takes P to be the disjoint union of the charts and Γ to be the pseudogroup generated by the changes of charts. For this class of S-atlases, the morphism concept is just the translation in terms of atlases of a map of manifolds.

The S-atlases constitute a category ***S***.

Particular S-atlases are those of the type $(P\,;\,E_P)$, where E_P is the trivial pseudogroup generated by id_P. A morphism

$$\Psi : (P_1\,;\,E_{P_1}) \to (P_2\,;\,E_{P_2})$$

is essentially an ordinary morphism of manifolds $\psi : P_1 \to P_2$ in the sense that Ψ consists of all the partial maps contained in ψ. In other words, the category of manifolds is in fact a subcategory of ***S***.

For any pseudogroup Γ on P, $\Gamma : (P\,;\,E_P) \to (P\,;\,\Gamma)$ is a morphism; it is called the *canonical projection.*

If A is a group of transformations on P, and

$$\Gamma_A \;:=\; \text{pseudogroup generated by } A,$$

we shall write (by abuse of notation) $(P\,;\,A)$ for the S-atlas $(P\,;\,\Gamma_A)$.

The category ***S*** admits a perfectly good covering theory showing up all the characteristics summed up before (Haefliger [1982], van Est [1982]), and which on the subcategory of manifolds is just the usual one.

Now we return to the situation of the main result.

The locally homogeneous structure on V is specified by the open cover $\{U_i\}$ and the Lie algebras $\boldsymbol{L}_i$. The local flows generated by the elements of $\boldsymbol{L}_i$ are families of local diffeomorphisms and as such they generate a pseudogroup Γ on V. Let the arrow

$$(V\,;\,E_V) \to (V\,;\,\Gamma)$$

denote the canonical projection.

Let A denote the automorphism group of H preserving $\mathcal{L}$. A contains the group G generated by $\mathcal{L}$.

Now covering theory shows that the canonical projection

$$\pi : (H\ ;\ E_H) \to (H\ ;\ A)$$

is a universal covering, A being the fundamental group.

Furthermore by elementary Lie theory and general nonsense in $\mathcal{S}$ there is a uniquely defined morphism $\tau : (V\ ;\ \Gamma) \to (H\ ;\ A)$; τ turns out to be a covering. Denoting the composition

$$(V\ ;\ E_V) \to (V\ ;\ \Gamma) \xrightarrow{\tau} (H\ ;\ A)$$

by σ, it turns out that one obtains a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{V}\ ;\ E_{\tilde{V}}) & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & (H\ ;\ E_H) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ (V\ ;\ E_V) & \xrightarrow[\sigma]{} & (H\ ;\ A) \end{array}$$

and V is a complete locally homogeneous space iff σ is a covering.

Remember that up to now we have assumed that the locally homogeneous structure on V does possess an associated connected and simply connected homogeneous space H (with Lie algebra $\mathcal{L}$). This came down to assuming that the Lie subgroup F in the Lie group G was closed.

However, once we are operating in $\mathcal{S}$, there is a perfectly good quotient G/F also in the case that F is not closed. In that case G/F is taken to be an S-atlas associated to the transverse structure of the foliation *) in G defined by the cosets of F. Hence $(H\ ;\ E_H)$ is then replaced by some connected and simply connected S-atlas $(M\ ;\ \Gamma)$ **) describing the transverse structure of the foliation. Again there is a well-defined Lie algebra $\mathcal{L}$ on M. There is furthermore an automorphism group A of $(M\ ;\ \Gamma)$ preserving $\mathcal{L}$, and a well-defined quotient which we still indicate by $(M\ ;\ A)$. Now the preceding diagram still holds if $(H\ ;\ E_H)$ and $(H\ ;\ A)$ are replaced by $(M\ ;\ \Gamma)$ and $(M\ ;\ A)$.

Returning once more to the main result and assuming again that V admits an associated homogeneous structure H , $\mathcal{L}$, there is for every element φ of the fundamental group Φ of the covering $\tilde{V} \to V$ a well-defined

$$a_\varphi \in A \quad \text{such that} \quad \tilde{\sigma}\,\varphi = a_\varphi\,\tilde{\sigma}, \quad A_\Phi := \{\, a_\varphi \mid \varphi \in \Phi \,\}.$$

*) For the notion of an S-atlas associated to the transverse structure of a foliation, see e.g. A. Haefliger [1982] or W. T. van Est [1982].

**) The notions of "connected" and "simply connected" are defined in $\mathcal{S}$.

The homomorphism $a \mapsto a_\varphi$ may or may not be injective. A_Φ may or may not be contained in G (= group generated by L) ; the locally homogeneous structure on V already discloses whether or not $A_\Phi \subset G$. In fact suppose that one of the elements of the cover $\{U_i\}$, say U_1 is a simply connected domain. Put

$$\Gamma_1 := \text{pseudogroup on } U_1 \text{ generated by } L_1 ,$$

and

$$_{U_1}\Gamma_{U_1} := \{ \gamma \mid \gamma \in \Gamma,\ \alpha(\gamma) \subset U_1,\ \beta(\gamma) \subset U_1 \},$$

β being the target assignment. Then one has :

$$A_\Phi \subset G \Longleftrightarrow \Gamma_1 = {}_{U_1}\Gamma_{U_1}.$$

In general of course one has $\Gamma_1 \subset {}_{U_1}\Gamma_{U_1}$. In the case of $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ with the locally homogeneous structure defined by the Lie algebra of the infinitesimal rotations, $H = S^2$, $G = SO(3)$ and A_Φ is just the 2-cyclic group containing the antipodal reflection of S^2, so that $A_\Phi \cap G = 1$.

The examples below show various possibilities for the homomorphism $\varphi \mapsto a_\varphi$ and the position of A_Φ relative G. They concern various circular bands V described by the strip

$$\Sigma = \{ (x, y) \mid |x| < 1,\ |y| < \tfrac{1}{2} \}$$

in $\mathbf{R}^2$ with a suitable identification ψ of the negative half $-1 < x < 0$ with the positive half $0 < x < 1$. The Lie algebra on V is the one obtained from the constant vector fields on X. The associated homogeneous space is $\mathbf{R}^2$ with G being the full group of translations and A the affine group on $\mathbf{R}^2$. In all three cases (to be considered), $\tilde\sigma(\tilde V)$ is described (for a suitable choice of $\tilde\sigma$) and the morphism $\varphi \mapsto a_\varphi$ is described by specifying $a_{\varphi_1} =: a_1$ where φ_1 is a generator of the infinite fundamental group.

$$\psi : (x, y) \mapsto (x + 1, y),$$
$$\tilde\sigma(\tilde V) = \{(x, y) \mid |y| < \tfrac{1}{2}\}, \quad a_1 : (x, y) \mapsto (x + 1, y),$$
$$\psi : (x, y) \mapsto (x + 1, -y),$$
$$\tilde\sigma(\tilde V) = \{(x, y) \mid |y| < \tfrac{1}{2}\}, \quad a_1 : (x, y) \mapsto (x + 1, -y),$$

$$\psi : (x, y) \mapsto (\tfrac{1}{2} - y,\ x + \tfrac{1}{2}),$$
$$\tilde\sigma(\tilde V) = \{(x, y) \mid |x| < 1,\ |y| < 1,\ (x, y) \neq (0, 0)\}, \quad a_1 : (x, y) \mapsto (-y, x).$$

The paper closes with stating results on locally projective spaces and in particular on convex locally projective spaces. The results announced for dimension 2 have been reconsidered and completed by Kuiper [1954], who also looked at the case of dimension 1 [1953/54] and who studied various other types of locally homogeneous structures (see the references in Kuiper [1954]).

Complete locally affine spaces have been studied by Auslander [1964].

However, it is clear that the subject is by no means exhausted.

References.

J. W. ALEXANDER, On the intersection invariants of a manifold, Proc. Nat. Acad. Sc. 11 (1925), 143-146.

L. AUSLANDER, The structure of complete locally affine manifolds, Topology 3 (1964) 130-139.

A. BOREL, The topology of Lie groups and characteristic classes, Bull. A.M.S. 61 (1955), 397-432.

L. CALABI, Sur les extensions des groupes topologiques, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 32 (1951), 295-370.

E. CARTAN, Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, Ann. Soc. Pol. Math. 8 (1929), 181-225. - Oeuvres I, 2, 1081-1126.

- La topologie des espaces représentatifs des groupes de Lie, Ensei. Math. 35 (1936), 177-200. - Oeuvres I, 2, 1307-1330.

S. S. CHERN, Characteristic classes of hermitian manifolds, Ann. of Math. 47 (1946) 85-121.

- On the multiplication in the characteristic ring of a sphere bundle, Ann. of Math. 49 (1948), 1362-1370.

W. T. van EST, Rapport sur les S-atlas, Journées sur les structures transverses, Toulouse 1982, Astérisque 116 (1984).

A. HAEFLIGER, Groupoïdes d'holonomie et classifiants, Idem

H. HOPF, Über die Curvatura Integra geschlossener Hyperflächen, Math. Ann. 95 (1925), 340-367.

- Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, J. reine u. angew. Math. 163 (1930), 71-88.

- Über die Topologie der Gruppenmannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen, Ann. of Math. 42 (1941), 22-52.

S. KLEIMAN & D. LAKSOV, Schubert calculus, Am. Math. Monthly 79 (1972), 1061-1082.

N. H. KUIPER, Locally projective spaces of dimension 1, Mich. J. Math. 2 (1953/54), 95-97.

- On convex locally projective spaces, Convegno Intern. di Geom. Diff., Ed. Cremonese, Roma (1954), 200-213.

S. LEFSCHETZ, L'Analysis situs et la géométrie algébrique, Collection Borel, 1924. Intersections and transformations of complexes and manifolds, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), 1-29.

H. POINCARE, Analysis situs, J. Ec. Polytech. (2) 1 (1895), 1-123. - Oeuvres VI.

G. de RHAM, Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions, J. Math. Pures Appl. 10 (1931), 115-200.

H. SAMELSON, The topology of Lie groups, Bull. A.M.S. 58 (1952), 2-37.

O. VEBLEN & J.H.C. WHITEHEAD, The foundations of differential geometry, Cambridge Tracts #29, 1932.

B. L. van der WAERDEN, Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Ann. 102 (1929), 337-362.

II

LES TRAVAUX DE CHARLES EHRESMANN SUR LES ESPACES FIBRES /14-18, 20, 22, 23/

par M. ZISMAN

Les diverses notions d'espaces fibrés sont tellement familières aux mathématiciens d'aujourd'hui qu'ils ont peut-être quelque peine à imaginer quelle a été la genèse de cette théorie. Aussi n'est-ce pas sans émotion que le lecteur verra apparaître les définitions et théorèmes maintenant classiques dans un langage qui n'utilise pas encore les diagrammes commutatifs ni les suites exactes inventés seulement quelques années plus tard.

a) **Les quatre premières notes /14-17/.**

(Rappelons que les deux premières ont été écrites en collaboration avec Jacques Feldbau.) Ce sont celles où sont définis les espaces fibrés et où sont créés les principaux outils qui permettent de les étudier. Dans la Note /14/, C. Ehresmann et J. Feldbau définissent ce que l'on appellerait aujourd'hui les fibrés localement triviaux à groupe structural et en donnent quelques exemples : les revêtements, les projections d'un produit sur un de ses facteurs $B \times F \to B$ avec pour groupe structural soit Aut F, soit le groupe réduit à son élément neutre, et enfin le fibré

$$S^1 \longrightarrow S^{2k+1} \longrightarrow P_k(\mathbf{C})$$

sans indication de groupe structural. Sous le nom de *Lemme de déformation* ils énoncent la propriété de relèvement des homotopies pour les complexes simpliciaux finis et donnent l'esquisse d'une démonstration en 4 lignes très convaincante. Les auteurs utilisent aussitôt ce résultat pour établir la suite exacte d'homotopie des fibrés, ou plutôt ce qui en tient lieu lorsqu'on ne connaît ni la notion de suite exacte ni surtout l'existence de l'opérateur

$$\partial : \pi_* F \to \pi_{*-1} B.$$

La Note se termine par quelques applications : groupes d'homotopie d'un revêtement, calcul de $\pi_n P_k(\mathbf{C})$ (en fonction de $\pi_n(S^{2k+1})$ pour $n > 2$) ; une troisième application concernant les variétés admettant S^n pour revêtement universel est donnée avec un énoncé qui n'est pas entièrement correct (il n'est pas indiqué en effet que l'on suppose la variété orientable) : l'énoncé correct apparaîtra dans /18/.

La Note /15/ introduit les notions d'espaces fibrés associés et de fibrés principaux de groupe structural G, via le 1-*cocyle* qui apparaît ici pour la première fois, appelé plus tard *coordinate transformation* par N. Steenrod, mais qui ici ne porte pas de nom. Un point mérite d'être signalé. Appelons F la fibre et

$$\{t_{ij} : U_i \cap U_j \to G\}$$

le 1-cocycle. Nous avons donc des applications

$$(U_i \cap U_j) \times F \to (U_i \cap U_j) \times F \quad \text{données par} \quad (x, y) \longmapsto (x, t_{ij}(x)(y))$$

qui sont des homéomorphismes. Mais comme, tant dans la Note /14/ que dans le premier pararaphe de /15/, G est un groupe discret d'homéomorphismes de F, alors bien entendu on ne suppose pas que les fonctions t_{ij} sont continues. A partir du paragraphe 2, le groupe G est muni d'une topologie. La distinction entre les "fibre bundles" de N. Steenrod et les fibrés de C. Ehresmann et J. Feldbau relevée par N. Steenrod dans son ouvrage fameux (The Topology of fibre bundles, Princeton 1951) est donc sans objet. Rappelons que /15/ a été publié en 1941 et que les communications en cette période et dans l'immédiat après-guerre n'ont probablement pas permis à cette Note d'être diffusée comme elle le méritait. Disons enfin pour en terminer sur ce sujet qui a prêté à controverse que le passage du discret au topologique n'y est pas très explicite.

Après avoir introduit la notion d'*isomorphismes* entre fibrés (mais sans la traduire en termes des cocycles) les deux auteurs montrent que deux fibrés de fibres, groupes et bases donnés sont isomorphes ssi les fibrés principaux associés le sont. En particulier ils montrent qu'un fibré est isomorphe à un produit ssi le fibré principal associé possède une *section* (appelée curieusement *système continu de représentants de* B *)*. Faisant appel au lemme de relèvement des homotopies ils en déduisent que, si la base B est contractile, alors tout fibré de base B est isomorphe à un produit.

L'important problème de la *réduction du groupe structural*, appelé par C. Ehresmann recherche d'une *structure plus précise* qu'une structure de fibré donnée, est le sujet de la Note /16/, et cette fois-ci il est clairement énoncé que tous les groupes structuraux sont munis d'une topologie. On retrouve dans cette Note tous les résultats classiques de la théorie : Soit E un fibré de groupe structural G et de base B, soit H le fibré principal associé et supposons que l'application canonique $G \to G/G'$ soit un fibré. Alors E possède une structure plus précise de groupe structural $G' \subset G$ ssi le *fibré quotient* $H/G' \to B$ possède une section. Par ailleurs la Note indique que la projection $G \to G/G'$ est un fibré ssi il existe une section locale, et elle donne l'exemple du quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe fermé. L'étude de l'existence de sections est conduite lorsque B est un complexe fini de dimension n et que

$$\pi_i(G/G') = 0 \quad \text{pour} \quad i \leq n-1 \quad (\text{resp. } i \leq n) :$$

utilisant la théorie des obstructions due à Stiefel dès 1935, C. Ehresmann montre que les conditions précédentes impliquent l'existence d'une structure plus précise de groupe G' (resp. l'existence et l'unicité à isomorphisme près). A titre d'exemple il indique le cas où G est un groupe de Lie non compact et G' un sous-groupe compact tel que G/G' soit un espace numérique, donc contractile.

Enfin la Note /17/ introduit les constructions associées aux variétés différentiables. Après avoir rappelé la définition d'une variété topologique ou différentiable, donné la définition d'une *carte locale* et d'un *atlas*, nous voyons construire pour nous le fibré vectoriel tangent et les fibrés tensoriels associés au fibré tangent ; *les champs de tenseurs* sur les variétés apparaissent comme étant des sections des fibrés correspondants. Les notions d'orientation, de parallélisme, d'existence sur une variété V (ou plutôt sur le fibré tangent) d'une forme quadratique de signature donnée sont énoncées en termes de réduction du groupe structural. Charles Ehresmann montre alors l'existence d'une structure riemannienne sur les variétés et termine sa Note par un résultat qui a dû fortement impressionner le monde savant des années 40 : l'espace de la relativité générale n'est ni $P_{\mathbf{R}}(4)$ ni S^4 puisque le fibré tangent à ces variétés ne supporte pas de forme quadratique du type $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$.

Ainsi en quelques pages voyons-nous surgir quelques outils fondamentaux de la Géométrie différentielle et la Topologie algébrique, dans un style clair et en général précis, sauf sur un point sur lequel plane au contraire souvent une ambiguité : les hypothèses de validité du théorème de relèvement des homotopies. Ce théorème est démontré dans /14/ pour les complexes simpliciaux finis et dans /18/, trois années plus tard pour les complexes simpliciaux quelconques, mais souvent employé sans justification pour des variétés ou des espaces quelconques, tant dans /14-17/ que dans /20/. Or le même genre de démonstrations fonctionne pour les espaces C_σ (= union dénombrable d'ouverts W_n (n entier ≥ 0) d'adhérence compacte et vérifiant $\overline{W}_n \subset W_{n+1}$ pour tout n). Par ailleurs, moyennant des hypothèses peu contraignantes sur l'espace de base B du fibré, tout fibré localement trivial de base B est un fibré de Hurewicz, i.e., vérifie les hypothèses du relèvement des homotopies pour tout espace (cf. Dold [3], t. Tom Dieck-Kamps-Dold [2]). Il est curieux qu'à aucun moment C. Ehresmann n'ait cherché à débroussailler le terrain dans cette fructueuse direction de recherche. Peut-être doit-on en rechercher la raison dans le fait qu'à cette époque il est fondamentalement un géomètre et que les variétés auxquelles il pense sont des sphères, des variétés de Stiefel qui se présentent toutes (grâce en particulier à des travaux antérieurs de l'auteur) avec une structure explicite de complexe simplicial.

b) **Les travaux ultérieurs.**

Charles Ehresmann consacre encore à la théorie des espaces fibrés deux articles /18/ et /20/ qui vont chacun à la fois mettre au point les résultats déjà acquis et les prolonger dans de fructueuses directions, et deux Notes /22/ et /23/ aux C.R.A.S. de moindre portée.

Signalons cependant deux résultats intéressants : dans /22/ il est énoncé que si $f : V \to V'$ est une application différentiable partout de rang maximum d'une variété V dans une variété V', alors c'est une fibration, et dans /23/ figure une variante d'un théorème de classification des fibrés de groupe structural $GL(p, \mathbf{R})$.

L'article /18/ publié au Bulletin de la S.M.F., débute par la définition des espaces fibrés, mais cette fois sans référence à un groupe structural et ne retenant que la propriété de trivialité locale de fibre donnée, qui seule est utile pour étudier le relèvement des homotopies. Nous trouvons ensuite une démonstration fort soignée et complète du relèvement des homotopies pour les complexes simpliciaux ou pour les espaces quelconques dans le cas des revêtements. Le reste de l'article a pour but principal d'étudier, à l'aide des résultats précédents et dans quelques cas intéressants l'ensemble des classes d'homotopie d'applications d'un espace A dans un espace B : lorsque A est une variété simplement connexe de dimension n et B l'espace de base d'un revêtement à p feuillets dont l'espace total est S^n (un parfum de transfert avant l'heure!) ; lorsque A est connexe, localement connexe et localement simplement connexe et que B est le quotient de $\mathbf{R}^n$ par l'action de groupes discrets de nature géométrique (des groupes de déplacements euclidiens ou hyperboliques) ; et enfin lorsque A est un complexe simplicial et que B est un $K(\pi, 1)$ auquel cas on trouve

$$[A, K(\pi, 1)] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}\,(\pi_1(A), \pi)$$

(en fait l'existence de $K(\pi, 1)$ pour π donné n'était certainement pas claire en 1944, aussi C. Ehresmann suppose-t-il que l'on a

$$\pi_i(B) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 < i \leqq n\ , \quad \text{et} \quad \dim A \leqq n;$$

par ailleurs il ne se limite pas aux classes d'homotopie d'applications respectant des points bases : aussi doit-il diviser l'ensemble $\mathrm{Hom}(\pi_1(A), \pi)$ par l'action (via automorphismes intérieurs) de π).

L'article /20/ publié dans les Actes du Colloque de Topologie Algébrique de Paris 1947 revient aux fibrés à groupe structural, qui sont ici définis à l'aide de la notion de pseudogroupe de transformations qui apparaît ainsi pour la première fois. Après avoir rappelé le contenu des Notes /15/ et /16/ (et changé un peu la terminologie) l'auteur définit les variétés presque complexes et montre qu'une variété V_{2n} possède une telle structure ssi elle porte une forme différentielle extérieure de degré 2 : il constate en effet que l'obstruction est la même pour les deux problèmes. L'étude de cette obstruction l'amène à considérer l'espace

$$\Gamma_{(n)} = SO_{2n}(\mathbf{R})/U_n$$

dont il donne une décomposition en cellules pour $n = 2, 3, 4$ et il semble (mais ce n'est pas très clair) indiquer l'existence de la fibration

$$\Gamma(n-1) \longrightarrow \Gamma(n) \longrightarrow S^{2n-2} .$$

C. Ehresmann pose alors le problème important de déterminer les sphères presque complexes. Sa connaissance des $\Gamma_{(n)}$ lui permet de démontrer que S^4 n'admet pas de structure presque complexe et que S^6 en admet une. Le résultat pour S^6 est donc démontré de façon homotopique grâce à la nullité de $\pi_5\, \Gamma_{(3)}$ et la théorie de l'obstruction, alors que l'on sait exhiber une structure presque complexe sur S^6 en utilisant les octaves de Cayley (A. Kirchoff en 1948) : peut-être fallait-il savoir d'avance qu'une telle structure existait pour se lancer dans des calculs sur les octaves qui, même aujourd'hui, ne sont pas considérés comme vraiment simples. Quelques années plus tard, les résultats de Borel-Serres [1] donneront une réponse complète au problème. Entre temps il aura fallu voir se créer un début d'artillerie lourde en Topologie Algébrique.

Bibliographie.

(Chacun des ouvrages cités contient une importante bibliographie.)

1. A. BOREL & J.P. SERRE, Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod, Amer. J. Math. 75 (1953), 409-448.
2. t. Tom DIECK, K. KAMPS & D. PUPPE, Homotopietheorie, Lecture Notes in Math. 157 Springer (1970).
3. A. DOLD, Partition of unity in the theory of fibrations, Ann. of Math. 78 (1963) 223-255.
4. D. HUSEMOLLER, Fibre bundles, McGraw Hill, New York, 1966.
5. P. LIBERMANN, Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières, Bull. Soc. Math. France 83 (1955), 195-224.
6. N. STEENROD, The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press 1951, Princeton Math. Series n° 14.

M. ZISMAN,
U. E. R. de Mathématiques
Université Paris VII

III

VARIÉTÉS FEUILLETÉES
par Georges REEB

Ch. Ehresmann s'est engagé dans d'innombrables "aventures" géométriques, toujours avec enthousiasme et succès, souvent acculé à batailler pour ses idées. L'aventure qui nous concerne ici - l'étude des variétés feuilletées - est un cas pur, une de ces situations idéales souhaitées dans les laboratoires, fait sur mesure pour illustrer la stratégie et le rayonnement d'un maître.

Cette sublimation je la vois caractérisée ainsi :

a) L'idée de feuilletage est une idée simple, géométrique avant tout ; elle invite tantôt à des vues générales, tantôt à des problèmes précis.

b) Malgré ce qui est dit en a, l'idée était apparemment quelque peu en avance sur son temps et elle rencontrait une bienveillante, mais ferme, ironie.

c) Ehresmann a dégagé très rapidement les idées et outils de base. Il a devancé ainsi bien des études détaillées ultérieures du vaste courant de recherche qui des années 1955 est allé grandissant pour atteindre son maximum vers 1970.

d) Si des centaines de chercheurs sont encore attelés à l'exploration du domaine de recherche ouvert par l'étude des feuilletages, le dernier mot est encore loin d'être dit. D'importants développements dans le droit fil des réflexions de Ch. Ehresmann sont encore à espérer.

Commentons quelque peu les affirmations précédentes :

a) En 1944 le sujet était indéniablement "dans l'air". On lisait le livre de C. Chevalley sur les groupes de Lie dont un chapitre traite amplement des systèmes de Pfaff complètement intégrables. D'autre part H. Hopf - selon Ehresmann - avait posé le problème :

"Existe-t-il sur la sphère euclidienne à trois dimensions un champ de vecteurs unitaires $\vec{u}$ tel que $\vec{u}.\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$?"

Mais il appartient à Ehresmann d'inaugurer un vaste domaine de recherche et d'inviter une assez nombreuse équipe d'élèves à le suivre. Dès le départ il s'exprimait volontiers sur les (lointaines) applications à des domaines variés (thermodynamique, cristaux liquides, relativité...) qu'il entrevoyait.

Le sujet était dans l'air, disions-nous. On peut en fait faire remonter l'idée de feuilletage à P. Painlevé et même Briot et Bouquet (fonctions elliptiques et abéliennes). Ch. Ehresmann était très sensible à cet aspect historique, auquel il ne pouvait, malgré une érudition rare, consacrer que peu de temps.

b) Curieusement deux sentiments contradictoires entretenaient une attitude réservée ou attentiste chez de nombreux géomètres. D'une part la crainte d'une structure très pauvre, peu rigide offrant une prise tout à fait insuffisante aux outils disponibles. (Aussi l'illusion de problèmes par trop simplistes: "étudier la condition de complète intégrabilité $\omega \wedge d\omega \equiv 0$ " revient *banalement*, à étudier, selon les enseignements de de Rham, les formes fermées).

D'autre part le sentiment d'une insurmontable complexité due aux feuilles de dimension p . Ce sentiment tirait sa substance de la réelle difficulté de l'étude des systèmes dynamiques - alors très en vogue - dont les feuilles pourtant avaient le bon goût d'être de dimension un et donc topologiquement très simples.

Ch. Ehresmann a donné par sa persévérance un bel échantillon de la sûreté de son intuition géométrique et de son art du problème rentable.

c) Les contributions d'Ehresmann à l'élaboration des idées de base dans la théorie des structures feuilletées sont bien connues. Les souligner aujourd'hui est presqu'une banalité. Peut-être sera-t-il plus intéressant - pour une fois - d'insister sur ce que Ch. Ehresmann n'aura pas vu ou prévu.

Il me semble que deux directions de recherche, illustrées l'une par R. Bott, l'autre par A. Connes sont à citer en priorité :

En effet Ehresmann a accordé beaucoup d'attention et dès le départ au problème d'existence d'une structure feuilletée sur une variété donnée ; d'autre part il possédait les notions et outils de la théorie des connexions dans les fibrés. Néanmoins je crois qu'il est juste de dire qu'il n'a guère fait avancer le problème ultérieurement brillamment résolu par R. Bott.

Les investigations de Connes sur les feuilletages concernent, dans leur principe, l'étude chère à Ehresmann de (ce que peut bien être) l'espace des feuilles, mais il n'a aucunement pressenti l'outil forgé par Connes (dont l'application aux feuilletages est une parmi bien d'autres).

d) L'explosion qu'a connue la théorie des feuilletages est telle qu'il n'est guère envisageable de classifier raisonnablement les thèmes explorés. Il est un peu plus facile de tenter une très brève bibliographie qui permette de remonter à peu près toutes les filières. Cette bibliographie je la vois ainsi :

Deux ouvrages munis de bibliographies étendues :

Bruce L. REINHART, *Differential Geometry of Foliations,* Ergebnisse Math. Grenzgebiete, Springer, Heidelberg 1983.

Gilbert HECTOR et Ulrich HIRSCH, *Introduction to the theory of foliations,* VIEWEG, Braunschweig 1983.

Ensuite un survey :

D. FUKS, *Foliations,* Itogi Nauki i Teckniki, Seriya Algebra, Topologia, Geometriza 18 (1981), 151 - 213. (Traduit aussi en anglais.)

Enfin quatre titres spécialisés avec de bonnes bibliographies :
A. CONNES, Leafwise homotopy equivalence and Pontrjagin classes, En préparation I.H.E.S.
A. CONNES, Feuilletages et algèbres d'opérateurs, Séminaire Bourbaki Fév. 80, n° 551 ; Springer *Lecture Notes in Math.* 842 (1981), 139 - 155.
A. LICHNEROWICZ, Variétés de Poisson et feuilletages, *Annales Fac. Sciences Toulouse* 4 (1982), 195-262.
D. CERVEAU et J.F. MATTEI, Formes intégrables holomorphes singulières, *Astérisque* 97 (1982).

Devant l'importance et la justesse de vues de Ch. Ehresmann la bonne question devant l'avenir est : dégager - dans la perspective de Ch. Ehresmann - des développements prometteurs. Il me semble que Ch. Ehresmann attendait des retombées dans les domaines suivants :

a) Etude des systèmes différentiels intégrables dans le champ complexe conformément aux suggestions de P. Painlevé (cf. Oeuvres de Painlevé).

b) Thermodynamique selon la voie ouverte par Carathéodory.

c) Feuilletages d'ordre supérieur (les vrais feuilletages étant d'ordre un).

d) Théorie générale (par exemple selon la ligne esquissée en /45/).

Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX.

IV

LES TRAVAUX DE CHARLES EHRESMANN EN GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE /17, 20, 26-29, 31-38, 40-44, 46, 48/

par Paulette LIBERMANN

La Géométrie Différentielle, sujet de ce commentaire, joue un rôle central dans l'oeuvre de pionnier de C. Ehresmann ; ce domaine des Mathématiques est en effet étroitement lié aux théories des groupes de Lie, des espaces fibrés et feuilletés, des structures locales, des pseudogroupes et groupoïdes, etc ; c'est pourquoi certains articles analysés ici sont aussi l'objet d'autres commentaires (cf. R. Hermann, J. Pradines, G. Reeb, R. Thom, M. Zisman, A. Kock).

Pendant la préparation de ma thèse à Strasbourg sous la direction de C. Ehresmann (de 1947 à 1953) j'ai eu la chance d'assister à l'élaboration et à la maturation des idées dégagées par celui-ci en Géométrie Différentielle ; ainsi que le remarque Bénabou (Gazette des Mathématiciens n° 13, Février 1980 ; cf. ici p. 562), ces idées "vont à l'essentiel tout en étant très simples et naturelles, et une fois dégagées, elles font partie de ce que "tout le monde doit savoir" ; ces idées sont si indispensables que parfois leur auteur a été oublié ou imité !

C. Ehresmann partageait très généreusement ses idées (publiées ou non) avec d'autres mathématiciens à l'occasion de conversations privées ou dans ses cours ; un cours de Géométrie Différentielle donné à Paris en 1957-58 a été une source d'inspiration pour de nombreux mathématiciens qui étaient directement ses élèves (Pradines, Ver Eecke, de Barros, Haefliger, Srinivasacharyulu, Nguyen Dinh Ngoc, Kumpera, F. Benzecri-Leroy) ou ses auditeurs (Qué, D. Lehmann, J. Lehmann-Lejeune, J.-P. Benzécri, Shih Weishu,...)

Les exposés oraux étaient illustrés de nombreuses figures (par exemple un vecteur tangent à une variété était représenté par une flèche comme en géométrie euclidienne) qui les rendaient plus concrètes, alors que les travaux écrits, rédigés de manière très condensée, paraissaient plus abstraits. Comme beaucoup de créateurs, C. Ehresmann était indifférent à la "mode du jour", si bien que ses travaux ne se sont pas démodés.

En raison de "l'unité de la Géométrie sous sa grande diversité", il est difficile de diviser ce commentaire en rubriques séparées, c'est pourquoi nous avons utilisé un ordre voisin de l'ordre chronologique. D'ailleurs nous essayerons de situer les travaux de C. Ehresmann de la période 1947-1955 par rapport aux développements de la Géométrie Différentielle contemporains ou postérieurs à cette époque.

I. Espaces fibrés et fondements de la Géométrie Différentielle. G-structures. Cas particulier des structures presque complexes et presque symplectiques.

Dans la Note /17/ publiée en 1943 (cf. le commentaire de Zisman) C. Ehresmann donne pour la première fois la définition d'une variété topologique ou différentiable au moyen d'une famille de cartes locales constituant un atlas ; il donne également une définition précise du fibré vectoriel tangent à une variété ainsi que celle de fibré tensoriel associé. Dans cette Note est posé le problème de la réduction du groupe structural ; le fibré principal H(V) associé au fibré tangent à une variété V admet pour groupe structural le groupe linéaire $L_n = GL(n, R)$ (où n est la dimension de V) ; C. Ehresmann montre que l'existence d'un sous-fibré principal H'(V) de H(V) dont le groupe structural est un sous-groupe G de L_n est équivalente à celle d'une section d'un fibré différentiable de fibre type $L_n|G$; une G-réduction du groupe structural L_n a été appelée ensuite /36/ structure infinitésimale régulière du premier ordre. Le sujet de ma thèse a été l'étude du problème d'équivalence des structures infinitésimales régulières. Ultérieurement S. Chern, dans la version écrite de son exposé au Colloque International de Strasbourg (1953) a désigné ces structures infinitésimales sous le nom de G-structures (voir S. Chern [6₂]). L'exemple le plus "classique" de G-structure est celui de structure riemannienne, ou pseudo-riemannienne.

Parmi les G-structures introduites par C. Ehresmann se trouvent notamment les structures presque complexes (G est le groupe linéaire complexe) et les structures presque symplectiques (G est le groupe symplectique), toutes deux définies sur des variétés de dimension $n = 2p$, ainsi que des structures subordonnées (presque hermitiennes ou hermitiennes, presque kählériennes, presque quaternioniennes). Lorsque la structure presque symplectique est définie par une forme fermée, la structure est dite symplectique.

C'est le problème de la recherche des variétés différentiables admettant une structure analytique complexe subordonnée à la structure différentiable qui a conduit C. Ehresmann à introduire les structures presque complexes. Ces structures ont été étudiées dans /20/ (cf. le commentaire de M. Zisman) et /29/ (conférence au Congrès International des Mathématiciens à Harvard en 1950). Dans ce deuxième article, C. Ehresmann complète les résultats obtenus dans /20/ concernant les obstacles à l'existence d'une structure presque complexe : le premier obstacle étant la classe W_3 de Stiefel-Whitney de dimension 3 ; si $W_3 = 0$ il y a un deuxième obstacle de dimension 4 pour $2n = 4$, dimension 8 pour $2n = 6$ et de dimension 7 pour $2n > 6$. Ceci permet de démontrer que S_4 n'admet pas de structure presque complexe contrairement à S_6. Dans sa thèse, sous la direction de C. Ehresmann, W.T. Wu [55] a étudié les conditions d'existence de structures presque complexes ; il a montré notamment que les sphères S_4 n'admettaient pas de structure presque complexe. En 1951, A. Borel et J. P. Serre [3] ont montré que

S_2 et S_6 étaient les seules sphères presque complexes (voir l'historique de cette question dans mon rapport sur les structures presques complexes et autres structures infinitésimales régulières, P. Libermann [23]).

Dans ce même article /29/, C. Ehresmann a étudié les sous-variétés réelles et complexes d'une variété presque complexe.

Enfin C. Ehresmann aborde le problème de l'intégrabilité des structures presque complexes ; une structure presque complexe peut être définie par un champ I d'endomorphismes du fibré tangent tel que $I^2 = -1$ (opérateur appelé parfois presque complexe même dans le cas complexe!), ou bien par la donnée, dans le complexifié du fibré tangent, de deux champs d'éléments de contact (de dimension n) X_n et $\bar{X}_n$ tels que

$$X_n \cap \bar{X}_n = 0$$

en tout point de la variété ; en utilisant ce deuxième point de vue, on définit la structure presque complexe localement par n formes de Pfaff complexes C-linéairement indépendantes $(\omega^1, \dots, \omega^n)$; C. Ehresmann a introduit la torsion de la structure presque complexe qui est un champ de tenseurs, nul si la structure est complexe ; cette torsion s'exprime par la suite

$$(d\omega^1 \bmod I, \dots, d\omega^n \bmod I)$$

où I est l'idéal engendré par $\omega^1, \dots, \omega^n$. C. Ehresmann a montré qu'inversement si les données sont analytiques, la nullité de la torsion entraîne que la structure est complexe (en raison du Théorème de Frobenius). Si l'on se limite à une variété différentiable, le théorème a été démontré seulement en 1957 par Newlander et Nirenberg [34] en utilisant des méthodes fines d'analyse (cf. le commentaire de R. Hermann) ; ensuite d'autres démonstrations ont été données en améliorant les hypothèses de différentiabilité (Nijenhuis et Woolf, Koszul et Malgrange) ; Nijenhuis a défini une torsion à partir de l'opérateur I opérant sur les champs de vecteurs.

En utilisant comme ci-dessus la bigraduation des formes différentielles (au moyen des ω^j et $\bar{\omega}^j$) j'ai traité dans ma thèse le problème d'équivalence des structures presque complexes et obtenu une classification complète pour les variétés de dimension 4 (P. Libermann [21]).

C. Ehresmann a introduit les strutures presque quaternioniennes /20/ et étudié leurs conditions d'existence ; il a montré (démonstration non publiée) qu'une structure presque quaternionienne intégrable est localement affine ; on peut trouver une démonstration, valable pour toutes les G-structures telles que le choix de la torsion détermine la connexion dans ma thèse (P. Libermann [21]).

Les structures presque symplectiques se sont introduites naturellement puisque l'existence d'une structure presque complexe est équivalente à celle d'une structure presque symplectique /20/. La construction d'une structure presque hermitienne subordonnée à une structure presque complexe (et par suite aussi à une structure presque symplectique) peut se faire en utilisant la décomposition polaire d'une application linéaire ; une première construction a été donnée dans le livre de A. Lichnérowicz [28] ; ces résultats ont été étendus ces dernières années aux fibrés vectoriels complexes.

L'étude du problème d'équivalence des structures presque symplectiques a été le sujet initial qui m'a été proposé par C. Ehresmann. Dans deux Notes /24, 26/ écrites en collaboration nous avons d'abord étudié les 2-formes de rang maximum $2n$ qui sont complètement intégrables (c'est-à-dire telles que pour tout n-élément intégrable il existe une sous-variété intégrale qui lui est tangente) ; ce sont les formes fermées (en vertu du Théorème de Darboux) et les formes admettant un facteur intégrant ; dans la deuxième Note ces résultats sont repris en utilisant la dualité par rapport à la 2-forme Ω (cette technique d'un usage courant actuellement était nouvelle en 1948-49 sous forme globale) ; on définit par analogie avec la géométrie Riemannienne, l'adjointe $\tilde{*}\varphi$ d'une p-forme φ puis la codifférentielle

$$\tilde{\delta}\varphi = \tilde{*}d\tilde{*}\varphi \ ;$$

en particulier la forme $\tilde{\delta}\Omega$, de degré 1 (introduite par Lee au moyen de coordonnées locales) joue un rôle important en Géométrie conforme : la forme Ω admet un facteur intégrant si, et pour $n > 2$ seulement si,

$$d\Omega = \frac{1}{n-1}\,\frac{\delta\Omega \wedge \Omega}{n-1} \ .$$

Ces résultats ont été inspirés par les travaux de Lepage [20] datant de la même époque. Les méthodes utilisées dans la deuxième Note ont été développées dans ma thèse (P. Libermann [21]) et ont notamment permis de démontrer les théorèmes de divisibilité de Lepage.

Une autre Note /31/ écrite en collaboration traite des structures presque hermitiennes isotropes ; on associe de manière canonique une connexion à une structure presque hermitienne en imposant à la torsion de se décomposer en la somme d'une forme de type (2, 0) (première torsion) et d'une forme de type (0, 2) (deuxième torsion ou torsion de la structure presque complexe), relativement à la bigraduation définie par les ω^j et $\bar{\omega}^j$; cette connexion généralise les connexions définies par Chern [61] pour les structures hermitiennes ; elle permet également de définir, au moyen de sa courbure, des classes caractéristiques généralisant celles de Chern ; dans /31/ on détermine les structures presque hermitiennes isotropes et localement homogènes relativement au groupe U_n : elles sont localement équivalentes à une structure d'espace hermitien elliptique, hyperbolique ou linéaire ; si l'on se restreint au groupe unitaire unimodulaire on trouve en outre des structures localement équivalentes à la structure presque hermitienne sur S_6 ,définie au moyen des octaves de Cayley (cf. le commentaire de Zisman) ; cette structure sur S_6, qui ne dérive pas d'une structure complexe, admet le groupe exceptionnel G_2 , à 14 paramètres, comme groupe d'automorphismes ; des résultats voisins, par d'autres méthodes, ont été obtenus à la même époque par Eckmann-Frölicher [7]. On ignore toujours s'il existe sur S_6 des structures complexes.

Remarquons que l'on peut associer d'autres connexions à des structures presque hermitiennes, par un choix différent de la torsion (A. Lichnerowicz [28], P. Libermann [23]).

La Géométrie Symplectique en liaison avec la Mécanique Analytique, a pris un extension considérable ces trente dernières années ; inspirés par les travaux de S. Lie et E. Cartan, A. Lichnerowicz [27], G. Reeb [44, 45], J.M. Souriau [48], ainsi que F. Gallissot [8], ont été les initiateurs de ce renouveau de la Mécanique Analytique.

II. Connexions infinitésimales /7, 10, 22, 27, 28, 42/.

Intéressé par les "espaces généralisés" de E. Cartan (espaces à connexion euclidienne, affine projective ou conforme), C. Ehresmann a publié des Notes /7, 10/ sur ce sujet en 1936 et 1938.

Une des motivations principales pour introduire les espaces fibrés a été justement de donner une formulation globale des connexions et du transport par parallélisme ; ainsi en 1947, après avoir publié ses Notes fondamentales sur les espaces fibrés (cf. le commentaire de Zisman), C. Ehresmann aborde dans /22/ les espaces fibrés à connexion infinitésimale.

Ces notions sont précisées dans /27/ et surtout dans /28/. Ce dernier article, publié dans les Actes du Colloque de Bruxelles de 1950, est fondamental dans l'évolution ultérieure de la théorie moderne des connexions infinitésimales. Il est à noter que le même volume contient un article de H. Cartan [4] où les connexions sont abordées d'un point de vue plus algébrique et dans lequel est démontré un théorème de A. Weil, base de la théorie des classes caractéristiques de S. Chern [6_1].

Dans un style clair et précis, C. Ehresmann fonde les bases de la théorie des connexions dans les espaces fibrés ; il en donne plusieurs définitions équivalentes ; notamment une connexion infinitésimale dans un espace fibré différentiable E, à groupe structural de Lie G peut être définie par un champ d'éléments de contact supplémentaires des éléments de contact verticaux ou, dans le cas d'un fibré principal, par une forme sur E à valeurs dans l'algèbre de Lie de G. L'auteur définit la courbure, la différentiation covariante ainsi que le groupe d'holonomie (obtenu en considérant le groupoïde des chemins fermés de la base) ; c'est ainsi qu'apparaît l'utilisation des groupoïdes en Géométrie Différentielle (cf. le commentaire de Pradines). Dans le cas des connexions intégrables (c'est-à-dire dont le champ horizontal est complètement intégrable), C. Ehresmann montre que cette connexion détermine un homomorphisme du groupe de Poincaré de la base B sur le groupe d'holonomie définissant chaque variété intégrale du champ horizontal comme un revêtement de B ; il utilise cette propriété pour construire des feuilletages transverses à une fibration et étudier sur une variété feuilletée le voisinage d'une feuille (cf. le commentaire de Reeb).

Les groupoïdes différentiables apparaissent encore de la manière suivante ; à tout fibré principal H, C. Ehresmann associe le groupoïde $\Phi = HH^{-1}$ formé des isomorphismes de fibre sur fibre, ce qui permet de définir la notion de déplacement infinitésimal (généralisant les notions introduites par E. Cartan dans la théorie du repère mobile), d'où l'introduction des éléments de connexion ; une connexion est alors une section dans l'espace fibré des éléments de connexion et l'on montre l'existence de connexions principales si la base est paracompacte ; cette théorie a été étendue aux connexions d'ordre supérieur (voir § III).

Enfin l'auteur définit la notion de connexion de Cartan sur un espace fibré soudé à sa base (correspondant à un parallélisme sur le fibré principal) ; au moyen d'une connexion de Cartan on développe une courbe de la base dans la fibre, ce qui permet à C. Ehresmann de démontrer que pour les espaces de Cartan analytiques simplement connexes complets tout isomorphisme local se prolonge en un isomorphisme global.

Ultérieurement (conférence non publiée au Congrès International de Géométrie Différentielle de Venise, Bologne, Pise en 1953 et /42/), C. Ehresmann a caractérisé les G-structures pour lesquelles le choix de la torsion détermine une connexion affine ; il a introduit dans /42/ le tenseur de structure d'une G-structure dont la nullité est la condition d'existence d'une G-connexion sans torsion ; cette question du tenseur de structure a été traitée autrement par D. Bernard [2]. On trouve une bibliographie détaillée sur les connexions associées aux G-structures dans le rapport que j'ai rédigé à la demande de la S.M.F. (P. Libermann [23]) ; voir aussi ma thèse (P. Libermann [21]).

La théorie moderne des connexions s'est beaucoup développée depuis 1950 (voir par exemple le livre de A. Lichnerowicz [28]). Un autre point de vue, introduit par Koszul, apparaît pour la première fois dans la littérature en 1954 dans la thèse de Nomizu [36] ; il consiste à définir une connexion linéaire sur une variété comme une dérivation (c'est la dérivation covariante ∇) dans l'algèbre tensorielle de la variété ; ce point de vue, qui n'utilise pas les espaces fibrés, est particulièrement efficace en Géométrie Riemannienne, où l'on retrouve rapidement la connexion de Levi-Civita ; mais certains auteurs, dans le traitement des U_n-structures n'utilisent que cette connexion de Levi-Civita alors que les connexions associées aux U_n-structures sont d'un maniement plus facile (surtout pour les problèmes conformes).

Les symboles de Christoffel d'une connexion se retrouvent dans le point de vue de C. Ehresmann en utilisant les jets (voir § III). La comparaison entre les deux points de vue est expliquée notamment dans le premier volume de l'ouvrage de Kobayashi et Nomizu [13], anciens élèves d'Ehresmann, ainsi que dans le deuxième volume de l'ouvrage de Spivak [50].

Enfin depuis une quinzaine d'années le traitement des équations de Yang-Mills et la théorie de jauge (qui font intervenir des connexions dans les fibrés principaux) ont pris une grande extension en Physique Mathématique (voir le commentaire de R. Hermann).

III. Jets infinitésimaux.

Le souci d'établir un calcul différentiel intrinsèque sur les variétés, déjà apparent dans son article sur les connexions /28/, a conduit C. Ehresmann à introduire la notion de jet comme base de la Géométrie Différentielle. Alors que vers 1950, sous l'influence notamment du livre de Chevalley sur "les Groupes de Lie" (paru en 1946), on définissait les vecteurs tangents comme des dérivations, C. Ehresmann cherchait une théorie qui corresponde à l'intuition de la Géométrie Différentielle et de la Mécanique dans un espace numérique (un vecteur tangent est défini comme la vitesse d'un point décrivant une courbe). Il s'est avéré que cette théorie s'étend naturellement aux variétés banachiques dont l'étude s'est développée à partir de 1960.

La théorie des jets a été exposée dans une série de Notes parues en 1951 et 1952 /35-38/, reprise en détails dans /32/ et surtout dans /40/ (contribution au Colloque International du C.N.R.S. de Strasbourg en 1953). Il est à noter que dans le même volume du Colloque de Strasbourg est exposée la théorie des "points proches" de A. Weil [54], autre approche du calcul différentiel sur les variétés.

Ainsi que l'a fait remarquer A. Haefliger dans l'Analyse de l'oeuvre de C. Ehresmann (Gazette des Mathématiciens 13, 1980 ; cf. ici p. 555) "la notion de jet, adoptée maintenant universellement, nous est devenue si familière que l'on oublie combien son introduction a permis de mieux poser les problèmes fondamentaux de la Géométrie différentielle locale et globale". La théorie des singularités des applications différentiables a pris son essor avec les travaux de R. Thom (voir le commentaire de celui-ci) : il a trouvé dans les jets l'outil essentiel pour étudier ces singularités.

Au moyen des jets, C. Ehresmann a défini les prolongements des variétés : ce sont les fibrés principaux des repères ou corepères d'ordre supérieur ou égal à 1 ou tout espace fibré associé ; une structure de prolongement possède une structure plus précise qu'une structure fibrée.

La notion de *système différentiel* (ou système d'équations aux dérivées partielles global) se dégage naturellement : étant donné deux variétés M et N, un système différentiel d'ordre k est une sous-variété S_k de la variété des jets $J^k(M, N)$; beaucoup d'objets en Géométrie Différentielle peuvent être considérés comme des systèmes différentiels (G-structures, connexions, etc.), ce qui montre l'intérêt des systèmes différentiels même quand ils ne sont pas complètement intégrables ou formellement intégrables (voir P. Libermann [26]).

C'est l'étude des systèmes différentiels qui a conduit C. Ehresmann à introduire, en plus des jets usuels (appelés holonomes), les jets *non-holonomes* (obtenus par itération des jets d'ordre 1) et parmi ceux-ci les *jets semi-holonomes* ; ces derniers s'obtiennent à partir des jets holonomes en "oubliant" la condition de symétrie de Schwarz pour les dérivées partielles d'ordre supérieur ; J. Pradines a montré que les jets semi-holonomes peuvent se définir comme noyaux de doubles flèches (cf. le commentaire de celui-ci). Les jets non holonomes et semi-holonomes ont été introduits dans /41, 43, 44/ ; la terminologie a été empruntée à la Mécanique. On peut, pour un système différentiel régulier, se ramener au cas où le système est une sous-variété R_k de l'espace $J_k E$ des k-jets de sections d'une submersion $\Pi : E \to M$, ce qui permet de définir le prolongement holonome R_{k+s} d'ordre s ainsi que le prolongement semi-holonome $\bar{R}_{k+s}$ de R_k (on a : $R_{k+s} \subset \bar{R}_{k+s}$) ; les prolongements semi-holonomes sont des variétés ; un système R_k est de type fini s'il existe r tel que R_{k+r} soit une variété difféomorphe à R_{k+r-1} ; un système de type fini (défini par un système dit de Mayer-Lie) s'identifie à un champ d'éléments de contact ; le système différentiel de type fini est complètement intégrable ssi le champ d'éléments de contact est complètement intégrable, condition équivalente à

$$R_{k+r+1} = \bar{R}_{k+r+1}$$

(cf. /48/). L'obstacle à l'intégrabilité est la courbure, obtenue en anti-symétrisant la "différence" entre le prolongement holonome et le prolongement semi-holonome.

Ceci s'applique notamment aux connexions dans un espace fibré E, de base M ; une connexion du premier ordre est un relèvement de E dans $J_1 E$ (dont un système différentiel de type fini) ; dans le cas où E est un fibré vectoriel et la connexion linéaire, on retrouve les symboles de Christoffel, ainsi que la courbure au sens usuel ; ces résultats s'étendent aux connexions holonomes et semi-holonomes d'ordre supérieur /46/.

Le tenseur de structure d'une G-structure /42/ (cf. § I) s'obtient en considérant les fibrés $J_1 H$ et $J_1 H_G$ (où H est l'espace des repères et H_G le sous-fibré principal de H définissant la G-structure) ; ces fibrés $J_1 H$ et $J_1 H_G$ sont difféomorphes à des fibrés principaux $\bar{H}^2$ et $\bar{H}^2_G$, définis au moyen des jets semi-holonomes ; le tenseur de structure est "nul" si $J_1 H_G$ est difféomorphe à un sous-fibré de l'espace H^2 des repères holonomes ; ceci s'étend à l'ordre supérieur.

Alors que la théorie des jets holonomes fait partie du "domaine public", il semble que la compréhension des jets semi-holonomes présente un obstacle psychologique pour de nombreux Géomètres. Ces jets semi-holonomes ont été utilisés notamment par les élèves de C. Ehresmann (Kumpera, Libermann, Pradines, Ver Eecke, Yuen) ainsi que par des géomètres tchèques (Kólar, Virsik). Récemment T. Morimoto a utilisé les prolongements semi-holonomes pour étudier le problème d'équivalence des structures géométriques.

Les jets qui permettent de globaliser les systèmes d'équations aux dérivées partielles ont leurs applications en Analyse et en Mécanique Analytique (ils jouent un grand rôle en géométrie de contact) ; ces questions connaissent actuellement un grand développement. Bien que C. Ehresmann se soit plus intéressé au qualitatif qu'au quantitatif, ses idées ont permis de traiter des problèmes quantitatifs (cf. le commentaire de R. Hermann).

IV. Pseudogroupes et pseudogroupes infinitésimaux de Lie /36, 40, 42, 48/ (voir le commentaire de J. Pradines).

Une des motivations qui ont conduit C. Ehresmann à introduire les jets a été de donner une définition globale des "groupes infinis" de Lie et E. Cartan. Ces "groupes" sont en réalité des pseudogroupes dont ces auteurs ne considèrent qu'un noyau.

Un pseudogroupe de Lie Γ, d'ordre k, sur une variété M peut être défini comme l'ensemble des solutions d'un système différentiel complètement intégrable Φ^k, où Φ^k est un sous-groupoïde différentiable du groupoïde $\Pi^k(M)$ de tous les k-jets inversibles de M.

Dans ma thèse (Libermann [21]) j'ai développé les idées de C. Ehresmann sur les pseudogroupes de Lie, ce qui m'a permis de démontrer des théorèmes de E. Cartan (prolongement en un pseudogroupe du premier ordre, définition au moyen d'une forme de relèvement, "équations de structure" d'un pseudogroupe, etc.). Un article faisant suite à celui-ci (P. Libermann [22]) contient de nombreuses suggestions de C. Ehresmann ; il est consacré à l'étude des sous-pseudogroupes d'un pseudogroupe de Lie ainsi que de leurs prolongements ; les feuilletages associés à un pseudogroupe (définis par des intégrales premières invariantes sous l'action du pseudogroupe) forment l'outil essentiel utilisé. Il serait intéressant de reprendre l'étude des pseudogroupes de Lie du point de vue des feuilletages en admettant des singularités.

C. Ehresmann a démontré /48/ deux théorèmes importants relatifs aux pseudogroupes de Lie de type fini (énoncés sans démonstration en 1953 et en 1955 dans la Notice sur ses travaux /136/) (cf. le commentaire de J. Pradines).

1° Un pseudogroupe de Lie Γ, de type fini, sur une variété simplement connexe compacte (ou complète relativement à Γ) se déduit par localisation d'un groupe de Lie.

2° Le plus grand groupe de transformations contenu dans un pseudogroupe de Lie de type fini est un groupe de transformations de Lie ; en particulier le groupe des automorphismes d'une G-structure de type fini est un groupe de Lie (ce qui généralise un résultat de Kobayashi [12] concernant le parallélisme).

J'ai redémontré ces mêmes théorèmes (P. Libermann [24]) en m'appuyant sur la théorie des faisceaux et sur la théorie de Palais [37].

Les démonstrations nécessitent l'utilisation de la notion de *pseudogroupe infinitésimal* (cette notion introduite indépendamment par C. Ehresmann /48/ et par moi-même (Libermann [24]) en 1958 a été retrouvée sous le nom de L.A.S. par Singer et Sternberg [47]). Un pseudogroupe infinitésimal est une famille de champs de vecteurs locaux dont les germes constituent un faisceau d'algèbres de Lie (voir les algébroïdes de Lie dans le commentaire de J. Pradines) ; à tout pseudogroupe de Lie Γ on associe le pseudogroupe infinitésimal engendré par les Γ-champs de vecteurs. Un sous-groupoïde différentiable d'un groupoïde différentiable est une *équation de Lie* non linéaire ; on lui associe (en considérant les déplacements infinitésimaux) une équation de Lie linéaire dont les solutions forment un pseudogroupe infinitésimal ; moyennant des hypothèses de complétude (voir ci-dessus), le pseudogroupe de Lie Γ est engendré par son pseudogroupe infinitésimal.

Depuis les années 1960, l'étude des pseudogroupes de Lie a pris un essor considérable. Citons d'abord les travaux de Matsushima et de Kuranishi. Ensuite, Spencer, par l'introduction de méthodes cohomologiques liées à la théorie des faisceaux a été l'initiateur d'un grand développement de ce sujet ("suites de Spencer", systèmes formellement intégrables, algèbres de Lie formelles, déformations des pseudogroupes, etc.). Parmi les travaux consacrés aux pseudogroupes de Lie, citons les articles de Goldschmidt, Guillemin, Guillemin-Sternberg, Kumpera, Qué ; les équations de Lie ont été étudiées par Malgrange et par Kumpera-Spencer dans un livre. Enfin Molino a fourni une importante contribution. On trouvera dans le commentaire de Kock une évocation rapide du point de vue développé par Malgrange et Kumper-Spencer concernant les jets.

Ces travaux ont permis d'avancer l'étude des "groupes infinis" ; ils ont permis notamment de clarifier la notion d'involution pour les systèmes différentiels. Mais certains auteurs ont développé un trop grand formalisme qui, de même que l'abus des indices au début du siècle, "cache une réalité géométrique fort simple".

Bibliographie.

La bibliographie donne des références d'articles ou de livres contenant eux-mêmes une bibliographie détaillée. C'est ainsi que A. Lichnérowicz et D. Spencer ont peu de travaux cités, le livre du premier et le rapport du second contenant des références à des travaux antérieurs.

1. C. ALBERT & P. MOLINO, Pseudogroupes de Lie et structures différentiables (Polycopié Université de Montpellier), A paraître chez Hermann.
2. D. BERNARD, Thèse, Ann. Inst. Fourier **X**, Grenoble (1960), 151-270.
3. A. BOREL & J.P. SERRE, CRAS Paris **235** (1951), 680-682.
4. E. CARTAN, Groupes infinis, Oeuvres complètes Partie II-2, pp. 571-926.
5. H. CARTAN, Notions d'algèbre différentielle, Coll. Top. Bruxelles (1950), 15-27.
6. S.S. CHERN, 1. Characteristic classes of hermitian manifolds, Ann. Math. **47** (1946), 85-121.
   2. Pseudogroupes infinis continus, Coll. Int. CNRS Géom. Diff. Strasbourg (1953), 575-581.
7. B. ECKMANN & A. FRÖLICHER, CRAS Paris **232** (1951), 2284.
8. F. GALLISSOT, Les formes extérieures en Mécanique, Ann. Inst. Fourier **4** (1952).
9. H. GOLDSCHMIDT, 1. Non-linear partial differential equations, J. Diff. Geom. **1** (1967), 269-307. - 2. Sur la structure des équations de Lie, Idem **6** (1972), 357-373 ; **7** (1972), 67-85.
10. V. GUILLEMIN, The integrability problem for G-structures, Trans. AMS **116** (1965), 544.
11. V. GUILLEMIN & S. STERNBERG, 1. An algebraic model of transitive differential Geometry, Bull. AMS **70**, 1 (1964), 16-47.
    2. Deformation theory of pseudogroup structures, Mem. AMS **116** (1966).
12. S. KOBAYASHI, Le groupe des transformations qui laissent invariant le parallélisme, Coll. Top. Strasbourg (1954).
13. S. KOBAYASHI & K. NOMIZU, Foundations of Differential Geometry, Interscience Publ. : I, 1963 ; II : 1969.
14. I. KOLAR, Canonical forms on the prolongation of principal bundles, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. **16** (1971), 1091-1106.
15. L. KOSZUL, Lectures on fibre bundles and Differential Geometry, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1960.
16. A. KUMPERA & D. SPENCER, Lie equations, Ann. of Math. Studies **73**, Princeton Univ. Press, 1972.
17. M. KURANISHI, 1. On the local theory of continuous infinite pseudogroups : Nagoya Math. J., I, **15** (1959), 229-260 ; II, **19** (1961), 55-91.
    2. Lectures on involutive systems, São Paulo, 1967.
18. D. LEHMANN, Sur l'intégrabilité des G-structures, Symp. Math. (Convegno di Geom. Diff.) Roma (1971), 127-140.
19. J. LEHMANN-LEJEUNE, Intégrabilité des G-structures définies par une 1-forme 0-déformable à valeurs dans le fibré tangent, Ann. Inst. Fourier **16**,2 (1966).
20. Th. LEPAGE, Sur certaines congruences de formes alternées, Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège (1946), 21-31.
21. P. LIBERMANN, Sur le problème d'équivalence des structures infinitésimales régulière (Thèse Strasbourg 1953), Ann. Mat. Pura Appl. **36** (1954), 27-120.

22. P. LIBERMANN, Sur les pseudogroupes de Lie, Coll. Top. Strasbourg 1954-55.
23. P. LIBERMANN, Structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières, Bull. Soc. Math. France **83** (1955), 195-224.
24. P. LIBERMANN, Pseudogroupes infinitésimaux, Idem **87** (1959), 409-425.
25. P. LIBERMANN, Prolongements des fibrés principaux et groupoïdes différentiables, Sém. Analyse Globale, Montréal, 1969, 7-108.
26. P. LIBERMANN, Introduction à l'étude de certains systèmes différentiels (Proc. Haïfa), Lecture Notes in Math. **792,** Springer (1979). - Remarques sur les systèmes différentiels, Cahiers Top. et Géom. Diff. **XXIII**, 1 (1982).
27. A. LICHNEROWICZ, Les relations intégrales d'invariance et leurs applications à la dynamique, Bull. Soc. Math. France **70** (1946), 82-95.
28. A. LICHNEROWICZ, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Rome, Ed. Cremonese, 1955. - Géométrie des groupes de transformations, Paris, Dunod, 1958.
29. B. MALGRANGE, Sur l'intégrabilité des structures presque complexes, Symp. Math. II (1969), 289-296.
30. B. MALGRANGE, Equations de Lie, J. Diff. Geom. : I, **6** (1972), 503-522 ; II, **7** (1972), 117-141.
31. Y. MATSUSHIMA, Pseudogroupes de Lie transitifs, Sém. Bourbaki 118 (1955).
32. P. MOLINO, 1. Sur quelques propriétés des G-structures, J. Diff. Geom. **7** (1972), 489-518.
2. Théorie des G-structures, Lecture Notes in Math. **588** (1977).
33. T. MORIMOTO, Sur le problème d'équivalence des structures géométriques, Japonese J. of Math., New Series **9** n° 2 (1983), 293-372.
34. A. NEWLANDER & L. NIRENBERG, Complex analytic coordinates in almost-complex manifolds, Ann. of Math. **65** (1957), 391-404.
35. A. NIJENHUIS, & W.B. WOOLF, Some integration problems in almost-complex manifolds, Ann. of Math. **77** (1963), 424-483.
36. K. NOMIZU, Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math. **76** (1954), 36-65.
37. R. PALAIS, A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Mem. AMS **22** (1957).
38. J. PRADINES, Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables, Atti Conv. Int. Geom. Diff., Bologna (1967).
39. J. PRADINES, Théorie de Lie, CRAS : **263** (1966), 907-910 ; **264** (1967), 245-248 ; **266** (1968), 1194-1196 ; **267** (1968), 21-23.
40. J. PRADINES, Fibrés vectoriels doubles et calcul des jets non-holonomes, Esquisses Math. **22**, Amiens, 1976.
41. QUE, NGO Van, Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales, Ann. Inst. Fourier **XVII**, 1, Grenoble (1967), 157-224.
42. D. QUILLEN, Formal properties of over-determined systems, Thèse, Harvard 1964.
43. G. REEB, Propriétés topologiques des trajectoires des systèmes dynamiques, Mém. Acad. Sc. Bruxelles **27** (1952).
44. G. REEB, Espaces de Finsler et espaces de Cartan, Coll. Int. CNRS Géom. Diff. Strasbourg (1953), 35-40.
45. G. REEB, Problèmes relatifs aux variétés presque symplectiques et systèmes dynamiques, Conv. Int. Geom. Diff. Venise-Bologne-Pise (1953), 104-113.
46. A. RODRIGUES, G-structures et pseudogroupes de Lie, Cours Univ. Grenoble 1967.
47. I.M. SINGER & S. STERNBERG, The infinite groups of Lie and Cartan, J. Anal. Math. Israel **XV** (1965).

48. J.M. SOURIAU, Géométrie symplectique différentielle. Applications, Coll. Int. CNRS Géom. Diff, Strasbourg (1953), 53-60.
49. D.C. SPENCER, Overdetermined systems of linear partial differential equations, Bull. AMS **75**, 2 (1969), 179-239.
50. M. SPIVAK, Differential Geometry, II, Publish or Perish, 1970.
51. P. VER EECKE, Sur les connexions d'éléments de contact (Thèse Paris 1963), Cahiers Top. et Géom. Diff. **V** (1963).
52. P. VER EECKE, Geometria Differenziale, São Paulo, 1967. - Conexiones de orden superior, Zaragoza 1968 (Traduction anglaise par Cross & Smith, Melbourne 1978).
53. J. VIRSIK, On the holonomity of higher order connections, Cahiers Top. et Géom. Diff. **XII**, 2 (1971), 197-212.
54. A. WEIL, Théorie des points proches sur les variétés différentiables, Coll. Int. CNRS Géom. Diff., Strasbourg (1953), 111-118.
55. WU WEN TSUN, Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, ASI 1183, Hermann, Paris 1952.
56. P.C. YUEN, Prolongements de G-structures (Thèse, Paris 1970), Esquisses Math. **11** (1971).

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris VII
2 Place Jussieu
75005 PARIS.

V

LA THÉORIE DES JETS ET SES DÉVELOPPEMENTS ULTÉRIEURS
par René THOM

Je voudrais consacrer ici à la mémoire de Charles Ehresmann ces quelques pages en témoignage de ma profonde gratitude. J'ai eu le très grand privilège d'avoir été un auditeur du séminaire Ehresmann à Strasbourg durant les années 1947-51. A cette époque, on pouvait observer réellement la Topologie Algébrique "in statu nascendi". Je me souviens d'avoir appris de la bouche de C. Ehresmann ces notions de base de la topologie alors toutes nouvelles : complexes simpliciaux, homologie singulière, cohomologie, groupes d'homotopie, fibrés vectoriels, espaces fibrés généraux, groupe structural d'un fibré, fibré principal, espace classifiant, classes caractéristiques, variétés différentiables, pseudogroupes... Pour moi, la théorie des jets telle qu'elle devait apparaître vers 1950 constitue très certainement l'une des plus belles synthèses de Géométrie Différentielle qui aient jamais été conçues.

Cependant, la théorie des jets n'a pas encore conquis dans l'enseignement toute la place qui lui est due. Connue et pratiquée chez les spécialistes en Topologie et Géométrie Différentielles, elle ne s'est encore que peu répandue dans les exposés classiques de calcul différentiel. Et cependant, quel merveilleux instrument elle constitue pour toutes les situations où l'on a à traiter des objets définis par dérivation et différentiation dans des situations "non linéaires". A cet égard, je me rappellerai toujours l'impression éblouie que m'a laissée la définition par Ehresmann de la différentielle df d'une fonction scalaire

$$f : x \to y, \quad x \in \mathrm{R}^n,\ y \in \mathrm{R}.$$

Si on désigne par i_y la forme différentielle fondamentale sur l'axe Oy, qui attribue à tout vecteur tangent sa mesure algébrique, alors $df = f^*(i_y)$. "L'invariance par application" de la différentielle devient alors triviale, alors que dans les manuels classiques elle apparaît comme une sorte de miracle inexpliqué : si $g : z \to x$ est une application $\mathrm{R}^p \to \mathrm{R}^n$, alors

$$d(g \circ f) = (g \circ f)^*(i_y) = f^* \circ g^*(i_y) = f^*(dg)$$

où f^* désigne $(j^1 f)$ contraposé.

L'énorme avantage de la théorie des jets est de pouvoir donner la notion intrinsèque de "dérivée d'ordre k" d'une application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ entre deux variétés différentiables X, Y. Rappelons ici cette définition : On constitue le fibré des jets $\mathrm{J}^k(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ fibré sur le produit $\mathrm{X}^n \times \mathrm{Y}^p$ par les applications (α, ω), α : point source, ω : point but. La fibre est l'espace $\mathrm{J}^k(n, p)$ des jets locaux de $(\mathrm{R}^n, 0)$ dans $(\mathrm{R}^p, 0')$ d'ordre k. Le groupe structural du fibré $\mathrm{J}^k(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ est le groupe $\mathrm{L}^k(n) \times \mathrm{L}^k(p)$ des jets de difféomorphismes locaux de R^n, resp. R^p. Alors la dérivée k-ème d'une application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ de classe C^k et la section continue du fibré

$J^k(X, Y) \longrightarrow (X, Y)$ définie au-dessus du graphe de f dans X, Y en attachant à chaque couple de points (x, y), $y = f(x)$ le jet local $j^k(f)$ en ce point - défini par exemple dans un système de cartes locales de X et Y.

C'est à partir de cette définition qu'est sortie toute la théorie des singularités d'applications différentiables telle qu'elle s'est constituée vers les années 1954-5 à partir des travaux d'Hassler Whitney. A cet égard, je suis certain qu'Ehresmann s'est penché très précocement sur la notion de singularité. J'ai souvenir d'une conférence faite par H. Whitney à Strasbourg en 1949 ou 50 sur l'invitation de C. Ehresmann, où Whitney a exposé son grand théorème - alors non publié - de classification des singularités des applications lisses de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$. Il y a eu également vers cette époque le mémoire de R. Iss, un élève du séminaire, consacré aux singularités des courbes, où Iss établissait l'existence de "modules" pour des singularités des courbes gauches assez dégénérées. Mais la théorie ne pouvait se développer qu'après l'introduction des méthodes de transversalité, en particulier le lemme de transversalité par les sous-variétés de l'espace des jets. Il apparaissait dès lors qu'un type de singularités de germes $f: (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0')$ pouvait être défini par une sous-variété invariante de $J^k(n, p)$ sous l'action (algébrique) du groupe $L^k(n) \times L^k(p)$. L'action algébrique du groupe $L^k(n) \times L^k(p)$ définit canoniquement des sous-variétés invariantes constituées de blocs d'orbites, les "strates". Ainsi apparaissait la notion d'*espace stratifié*, qui devait se constituer vers 1960. Là aussi les travaux de Whitney sur la décomposition (stratification) des ensembles analytiques ont joué un rôle essentiel ; les propriétés (a), (b) qui imposent des contraintes de continuité entre les plans tangents aux strates (pour l'incidence d'une strate sur une autre) permettent l'extension des théorèmes de transversalité sur des objets stratifiés. De là sont résultés tous les grands théorèmes de la théorie des applications différentiables : théorème de stabilisation des jets (presque toute extension d'un jet $z \in J^k(n, p)$ dans $J^{k+s}(n, p)$ est un jet "suffisant" pour s assez grand : deux représentants quelconques de ce jet ont des germes qui sont topologiquement équivalents), théorème de densité des applications différentiables d'une variété dans une autre (J. Mather). Peut-être s'écarte-t-on quelque peu, ici, de l'oeuvre d'Ehresmann. Mais je ne suis pas éloigné de penser que l'on peut trouver dans la structure en cellules des variétés grassmanniennes qu'il a élucidée dans sa thèse l'origine de la notion d'espace stratifié. Et l'usage des symboles de Schubert pour engendrer cette stratification n'est pas sans rappeler la stratification canonique des jets d'ordre un (rappelons que cette notion a trouvé dans la théorie des "groupes de perversité" de Goretzky-Mac Pherson un prolongement inattendu). Je n'insisterai pas davantage sur les extensions qu'a connues la théorie des singularités des applications différentiables, notamment en direction de la théorie de la bifurcation et de la Dynamique Qualitative. Qu'il suffise de dire qu'ici également, le séminaire Ehresmann a préparé la voie ; il n'était pas fermé aux interprétations mécaniques, et c'est là que j'ai entendu pour la première fois évoquer la fibration de Hopf

$$S^{2n-1} \to P_n(C)$$

comme l'ensemble des trajectoires d'un oscillateur linéaire à n variables d'énergie fixée. D'ailleurs les travaux de Reeb sur les feuilletages maintenaient un contact constant avec la Dynamique ainsi que les rappels sur les invariants intégraux de Cartan et les structures symplectiques.

Devant cette variété des directions possibles qu'offrait à son début le séminaire d'Ehresmann, certains ont pu s'étonner du caractère relativement spécialisé (en théorie des catégories) qu'il a pris par la suite. Il faut ici le constater : Chaque mathématicien a sa forme d'esprit propre, qui l'entraîne vers un destin auquel il pourrait difficilement échapper. Je crois que Charles Ehresmann était avant tout profondément sensible à l'aspect conceptuel des constructions qu'il avait à manipuler, des objets qu'il avait à concevoir, mais qu'il répugnait profondément à se laisser guider par un formalisme calculatoire qu'il n'aurait pu à chaque instant dominer par la pensée. De là, je crois chez lui, une certaine aversion pour l'algèbre pure, et les calculs aveugles, qui l'ont écarté à la fois de la topologie algébrique dans ses développements ultérieurs (calculs de groupes d'homotopie, K-théorie, etc.) et des Géométries Algébrique ou Analytique, dont une certaine connaissance lui aurait été nécessaire pour aborder efficacement la théorie des singularités. Il reste de son oeuvre tant de grandes intuitions qu'on ne saurait, sans une certaine indécence, regretter tout ce vers quoi elle aurait pu, en d'autres circonstances, déboucher.

Institut des Hautes Études Scientifiques
35 Route de Chartres
91440 BURES-SUR-YVETTE. FRANCE

VI

AU COEUR DE L'OEUVRE DE CHARLES EHRESMANN ET DE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE : LES GROUPOÏDES DIFFÉRENTIABLES

par Jean PRADINES

Les remarques qui suivent complètent et parfois précisent les très précieux "Comments" figurant notamment en II,2, pp. 734 et 737-745, et en IV-1, pp. 341-342. Elles sont centrées sur la notion de groupoïde différentiable.

1. Un concept charnière dans l'oeuvre d'Ehresmann.

a) Un aboutissement. Dès les premiers travaux de Charles Ehresmann sur les *espaces fibrés* en 1941 /14/, l'accent est mis sur l'espace fibré principal associé H, défini d'abord comme espace de corepères, puis bientôt de *repères*, c'est-à-dire d'isomorphismes de la fibre type sur les fibres, espace dans lequel le groupe structural G opère à la source.

En 1950 /28/ (Colloque de Bruxelles) apparaît le *groupoïde* $G' = HH^{-1}$, muni de l'application canonique

$$H \times H \to HH^{-1}, \qquad (h', h) \mapsto h'h^{-1},$$

qui permet de le décrire aussi comme quotient de H x H par l'action de G ; G' opère sur H au but.

Ce groupoïde est le cadre naturel pour formaliser la vision la plus géométriquement intuitive d'un élément de *connexion* comme jet infinitésimal d'une famille d'isomorphismes d'une fibre sur les fibres d'un voisinage, point de vue qui conduira plus tard aux connexions d'ordre supérieur en 1956 /46/, et sera développé notamment par P. ver Eecke [23], P. Libermann [11], I. Kolar [9].

Cette notion fondamentale de *jet* apparaît à la même époque dans une série de Notes inaugurée en 1951 /33/. L'espace des jets devient aussitôt le domaine naturel de la Géométrie Différentielle : Colloque de Strasbourg, 1953 /40/.

Cet espace est muni naturellement d'une *double structure :*

- une structure de *variété* (munie de fibrations naturelles sur les espaces de jets d'ordre inférieur, en particulier d'ordre 0) ;
- une loi de composition partielle, qui en fait une *catégorie* (dont les flèches sont les jets eux-mêmes).

La double action, à la source et au but, du groupoïde des jets inversibles, joue un rôle fondamental ; ses orbites sont les singularités des jets /40/ (voir les commentaires de R. Thom).

Ainsi se présente naturellement un deuxième exemple fondamental de *"catégorie différentiable"*, et de lois d'action (partielles) différentiables.

Notons d'ailleurs que, dans les travaux de cette période, la structure différentiable de HH^{-1}, bien qu'utilisée systématiquement, n'est en fait explicitée que pour les groupoïdes de jets.

. La puissance remarquable de cette technique de groupoïdes de jets est illustrée par la démonstration en 1955 (publiée en 1958 /41/) d'un théorème sur les automorphismes des G-structures de type fini, englobant les résultats de Palais-Kobayashi. Malheureusement la démonstration n'est qu'esquissée.

Il devenait donc indispensable, pour comprendre aussi bien la structure des espaces fibrés que celle des espaces de jets, d'avoir une définition axiomatique précise des concepts de groupoïdes (et plus généralement de catégories) différentiables, et de lois d'action de ceux-ci sur une variété, reconnus comme concepts de base de la Géométrie Différentielle.

Cette définition apparaît au Colloque de Bruxelles en 1959 /50/. Elle généralise de façon naturelle et inévitable celle des groupes de Lie et de leurs actions.

b) Un point de départ. Une lecture rétrospective et attentive de l'exposé de synthèse de ces notions et de leurs développements donné au Congrès de Bologne en 1967 /103/ (qui résume /78/ et /101/) fera comprendre à l'évidence (ou peut-être seulement soupçonner) que l'étude des catégories différentiables et de leurs actions, et, pour commencer, des catégories topologiques sous-jacentes, constitue sans doute l'un des moteurs principaux de la quasi-totalité de l'oeuvre postérieure considérable de cet auteur, même si les mentions explicites de cette motivation se font progressivement de plus en plus rares, et ce d'une façon parfois systématique (voir à ce sujet l'Introduction du livre /122/ en 1965).

Rappelons /103/ que l'idée directrice est de traiter les catégories différentiables dans le cadre général des "catégories structurées", introduites en 1963 /63/. Mais les théorèmes généraux obtenus dans ce cadre supposent en général de bonnes propriétés de complétude pour la catégorie "structurante" et son foncteur d'oubli vers **Ens**. Or ces propriétés, qui sont vérifiées dans la catégorie **Top**, ne le sont plus dans **Dif**. Ces théorèmes ne s'appliquent donc directement qu'aux catégories topologiques. D'où les efforts parallèles pour obtenir des théorèmes de "complétion" de catégories (ou plus précisément de foncteurs), grâce auxquels les théorèmes s'appliquent, en remplaçant **Dif** par une "complétion" convenable.

Notre propos n'est pas ici de commenter cette oeuvre gigantesque, où abondent les théorèmes fins, mais dont l'accès est rendu difficile, non seulement par l'omission volontaire des exemples et des motivations (que le lecteur est appelé à deviner), mais aussi par l'emploi d'une terminologie lourde et fluctuante, et de notations que leur "rigueur" supposée rend peu maniables. Nous renvoyons pour cette partie de l'oeuvre aux remarquables "Comments" qui, rétablissant les fils conducteurs et fournissant les indispensables dictionnaires, pallient partiellement ces défauts de forme, et permettront sans doute à de nouveaux lecteurs de découvrir des mines insoupçonnées.

Soulignons que ce culte d'un certain ésotérisme, que l'on pourrait retrouver chez d'autres, n'explique pas à lui seul l'écho relativement limité rencontré sur le moment par les notions nouvelles introduites dans /50/. Car il faut songer qu'à l'époque le concept d'une catégorie différentiable avait de quoi dérouter tant les géomètres différentiels que les "catégoriciens".

Les premiers pensaient que les concepts catégoriques n'étaient qu'un langage destiné seulement à axiomatiser la notion de structure mathématique, et malheureusement la terminologie de "foncteurs d'hypermorphismes" et d'"espèces" ou "systèmes de structures" adoptée pour décrire les lois d'action semblait faite pour les conforter dans cette opinion (notons d'ailleurs que la terminologie concurrente d'opfibration discrète ne peut guère leur paraître plus séduisante!).

Les seconds de leur côté, issus le plus souvent de la Topologie Algébrique ou de la Géométrie Algébrique, avaient principalement en tête les catégories préadditives (Grothendieck [7], 1957), dans lesquelles on structure seulement les ensembles Hom (catégories "dominées"), et manifestaient une tendance à ériger en tabou la considération simultanée de toutes les flèches.

Ici au contraire on a affaire à un exemple de ce que l'on appellerait aujourd'hui une structuration "interne", ou encore une catégorie dans la catégorie **Dif** des morphismes de variétés. Ce point de vue "interne" ne s'est vraiment imposé que beaucoup plus tard, notamment en liaison avec la théorie des topos.

Pourtant, ici, le concept de ("petit") groupoïde différentiable (auquel nous nous limitons par la suite) est à peine plus élaboré que celui de groupe de Lie, et son champ d'application paraît largement dépasser, nous le verrons, les motivations initiales, pourtant déjà considérables, de C. Ehresmann.

Notons que la démarche de cet auteur n'épuise pas les problèmes soulevés par l'étude des catégories différentiables, car elle ne répond pas à la question fondamentale de savoir quels résultats restent valables *sans sortir de* **Dif.** Nous nous proposons dans ce qui suit de mettre l'accent sur cet aspect complémentaire des problèmes, et sur la spécificité du cas différentiable, en nous limitant au cas des groupoïdes. Les indications que nous donnons ont été développées dans des cours de Troisième Cycle et de nombreux exposés de Séminaires (ainsi que dans de brèves communications : Palma 1977, Paris VII 1979, Toulouse 1982, Oberwolfach 1983), mais ces développements sont encore en grande partie inédits.

2. Commentaires sur les axiomes des groupoïdes différentiables : hypothèses de rang.

a) Sur le rang de la source α. Fixons pour la suite quelques *notations*.

E = **Ens** = catégorie des applications entre ensembles.

D = **Dif** = catégorie des morphismes de variétés (banachiques) de classe fixée [2].

D^* = sous-groupoïde des difféomorphismes.

S = sous-catégorie des *surmersions* (= submersions surjectives).

I = sous-catégorie des *plongements.*

Pour un (petit) *groupoïde* G de *base* B (ensemble des objets, identifié à l'ensemble des unités par l'injection canonique ω: B $\to$ G), on note α, β les applications *source, but* et on pose

$$\pi = (\alpha, \beta) : G \to B \times B.$$

On note $G * G$ l'ensemble des couples composables, $\gamma : G * G \to G$ la *loi de composition,* ΔG l'ensemble des couples de même source,

$$\delta : \Delta G \to G \qquad \text{la } loi \quad (y, x) \longmapsto yx^{-1},$$

σ *l'inversion* $x \mapsto x^{-1}$.

Avec de nombreux abus de langage et de notations, que l'on voudra bien nous pardonner, et que nous espérons transparents, nous posons :

Définition. Un *groupoïde* G de base B est dit *différentiable* si l'on s'est donné sur G et B des structures de variétés telles que l'on ait :

$$\omega \in D, \qquad \alpha \in S, \qquad \delta \in D.$$

Ceci implique :

$$\omega \in I, \qquad \beta \in S, \quad \delta \in S, \qquad \gamma \in S, \quad \sigma \in D^*;$$

on *identifie* B et ω(B).

L'hypothèse $\alpha \in S$ assure l'existence de la variété Δ G comme sous-variété de G x G, et *donne un sens à la condition* $\delta \in D$.

Contrairement à ce qu'affirment certains auteurs, elle n'est impliquée par l'hypothèse plus faible $\alpha \in D$ que si l'on suppose G "α-connexe", c'est-à-dire si les α-fibres $\alpha^{-1}(x)$ ($x \in$ B) sont connexes. En général la "*composante* α-*connexe*" est un sous-groupoïde ouvert, engendré par tout voisinage α-connexe de la base, qui peut n'être ni fermé ni distingué.

La définition précédente équivaut à celle de /103/, à ceci près qu'on ne suppose pas G séparé, donc B fermé, ce qui priverait de l'exemple des pseudogroupes ; en revanche il est souvent utile de supposer B paracompacte.

La définition originelle de /50/ ($\omega\alpha$ de rang localement constant et *constant sur chaque α-fibre*) ne vaut qu'en dimension finie. L'omission des mots soulignés dans la version de /50/ publiée sans corrections a pu laisser entendre que l'auteur n'imposait pas $\alpha \in S$. Ceci amène Kumpera [10] à postuler seulement la transversalité de α et β, pour assurer l'existence de la sous-variété $G * G$ de $G \times G$; mais il ne développe pas cette définition, qui ne semble correspondre à aucun exemple connu.

b) Sur le rang de $\pi = (\beta, \alpha)$. Les deux exemples fondamentaux mentionnés supra inciteraient à imposer la condition plus forte $\pi \in S$. Mais nous verrons que ceci écarterait l'application aux feuilletages.

L'hypothèse (plus faible que la précédente) que π soit une subimmersion ("régulière différentiabilité") priverait encore de l'application aux feuilletages singuliers. Elle entraîne aussitôt que les groupes d'isotropie $\pi^{-1}(x, x)$ ($x \in B$) sont des groupes de Lie. Mais en réalité, contrairement à ce qui est indiqué dans [10], on peut s'en passer, du moins en dimension finie : on démontre *sans hypothèse nouvelle*, grâce à la notion de "translation locale", que le rang de la restriction de β aux α-fibres $\alpha^{-1}(x)$ ($x \in B$) est *toujours* localement constant, d'où résulte que les groupes d'isotropie sont bien des groupes de Lie. Ce dernier point (qui semble implicitement admis chez Ehresmann) ne paraît pas établi dans le cas banachique.

Suivant la terminologie de Matsushima-Qué [16] (différente de celle de [10]), qui semble s'être imposée par la suite, nous réserverons le terme de ***groupoïde de Lie*** aux groupoïdes différentiables vérifiant $\pi \in S$. Si π est une submersion non nécessairement surjective, nous dirons avec Ehresmann que G est ***localement trivial***, car on peut trouver un recouvrement ouvert (U_i) de B tel que le groupoïde induit sur U_i soit isomorphe à $G_i \times (U_i \times U_i)$, où G_i est un groupe de Lie.

c) Sur l'axiomatisation de la condition $\alpha \in S$. Comme on l'a dit, le traitement des groupoïdes différentiables dans le cadre général des catégories structurées conduit à utiliser diverses "complétions" $\hat{D}$ de D, et à étudier les groupoïdes $\hat{D}$-structurées. Nous avons proposé dans [15f] une démarche complémentaire, ***qui ne fait pas sortir de D***. Elle consiste à axiomatiser les propriétés du triplet (D ; I, S), muni du foncteur d'oubli $p : D \to E$. Nous disons que ces propriétés munissent D d'une structure de "***diptyque de Godement" sur E***, l'accent étant mis sur le théorème de Godement, qui caractérise les relations d'équivalence régulières par leur graphe [2] (5.9.5).

Essentiellement cette axiomatisation prend en compte les propriétés du premier ordre liées au théorème d'inversion locale, mais non celles du deuxième ordre liées au crochet, qui exigent d'autres ingrédients. Elle fonctionne en classe C^1 mais non C^0. Toutefois la catégorie **Top** (ainsi que beaucoup d'autres) possède une structure de diptyque de Godement en prenant pour S les applications (continues) *ouvertes* surjectives. Ceci conduit donc à privilégier, parmi les groupoïdes topologiques, ceux pour lesquels l'application *source* α est ouverte, cas fréquent dans les applications, mais qui ne semble pas avoir suffisamment retenu l'attention.

Voici, à titre d'exemple, un théorème obtenu initialement dans le cas différentiable [15b] et dont la démonstration s'étend, en se simplifiant sans pour autant devenir triviale, dans le cadre précédent, sans pouvoir être déduit du théorème général sur les quotients de catégories structurées.

Si H est un sous-groupoïde invariant D-structuré de G (l'injection canonique est dans I), et si on a $\pi_H \in I\ S$, le groupoïde quotient (qui est formé des classes *bilatères* HxH) est un groupoïde D-structuré tel que la projection canonique soit dans S.

La démonstration repose sur un *principe heuristique* très général d'"internalisation" dans le cadre des diptyques, très utile pour transférer les propriétés algébriques des groupoïdes au cas différentiable :

"décrire les constructions algébriques au moyen de diagrammes de **Ens**, mettre en évidence les injections et surjections, puis réécrire ces diagrammes dans $(D\ ;\ I,\ S)$ ".

3. Propriétés infinitésimales.

a) Prolongement. Cette notion clé de l'oeuvre d'Ehresmann semble encore aujourd'hui assez mal utilisée par beaucoup de géomètres. Un groupoïde différentiable donne naissance à de nouvelles structures de groupoïdes différentiables, d'une part sur les espaces de jets à valeurs dans le groupoïde, d'autre part, de façon plus intrinsèque, sur l'espace des jets de section de α "admissibles", c'est-à-dire celles qui, composées avec β , donnent un difféomorphisme local de la base. Notons SG ce dernier prolongement et s_G sa projection naturelle dans G (but du jet). Il est utile de considérer S comme un endo-foncteur de la catégorie des (foncteurs différentiables entre) groupoïdes différentiables, et s comme une transformation naturelle de S vers le foncteur identité. L'itération de S définit les *"prolongements non-holonomes"*, tandis que le prolongement *semi-holonome* se décrit agréablement comme noyau de s_{SG} et de $S(s_G)$. Ce point de vue a été systématisé et utilisé dans [15g, h] .

Le point de vue des jets semi-holonomes ramène les systèmes différentiels à des systèmes du premier ordre. Cette géométrisation des équations aux dérivées partielles, inaugurée dans /48/, se développe beaucoup aujourd'hui et est à la base des beaux travaux de Shih Weishu [19].

b) Le foncteur de Lie. Les vecteurs tangents à G qui sont α-verticaux et issus de la base sont considérés dans /28/ sous le nom de "déplacements infinitésimaux des fibres" et utilisés implicitement dans /48/. Dans [15a], l'espace G = L(G) de ces vecteurs est considéré systématiquement, dans le cadre général des groupoïdes différentiables (non nécessairement de Lie), comme l'analogue pour les groupoïdes de l'algèbre de Lie pour un groupe de Lie, d'où le nom d'"*algébroïde de Lie*". On a ici une structure de fibré vectoriel muni d'une algèbre de Lie locale sur le faisceau de ses sections, avec en outre un morphisme canonique vers le fibré tangent TB.

Quand la base est paracompacte, une connexion vectorielle de G détermine un voisinage tubulaire de la base de G (exponentielle).

Il est utile de voir L comme un foncteur. Par exemple, si G est un groupe, $\delta : G \times G \to G$ est un *foncteur* différentiable, et $L(\delta)$ est la forme de Maurer-Cartan (interprétation interdite si l'on ne sort pas de la catégorie des groupes).

L'intégration des "morphismes d'algébroïdes de Lie" (qui fournit un cadre unificateur pour de nombreux problèmes géométriques : Frobenius, équations de Maurer-Cartan, feuilletages de Lie, connexions plates, différentielles de Darboux) soulève d'intéressants problèmes algébrico-différentiels :

- le problème d'*holonomie*, vue comme obstacle à la globalisation de la structure différentiable d'un sous-groupoïde localement différentiable, qui contient en particulier la construction de la structure différentiable du groupoïde d'holonomie d'un feuilletage (la structure topologique sous-jacente est celle introduite dans /54/ ; cette structure différentiable a été retrouvée par une autre voie par Winkelnkemper [24] et Connes [5] ; une troisième construction est donnée dans [15j]) ;
- le problème de *monodromie*, vue comme obstacle à la globalisation d'un foncteur défini localement, qui se résoud en réunissant les revêtements universels de chaque α-fibre (le groupoïde de Poincaré est un cas particulier) ;
- le troisième théorème de Lie, précédemment résolu par Douady-Lazard [8] dans le cas particulier des fibrés en algèbres de Lie.

4. Exemples de groupoïdes différentiables.

Les groupoïdes différentiables constituent une passerelle entre les groupes de Lie, les fibrations, les relations d'équivalence régulières, les feuilletages, les pseudogroupes.

a) Fibrés principaux et groupoïdes de Lie ($\pi \in S$). C'est le premier exemple fondamental ci-dessus. On peut appeler "*foncteur d'Ehresmann*", le foncteur qui, à tout fibré principal (à droite) P de base B, de groupe structural G, associe le groupoïde de Lie

$$E(P) = (P \times P)/G$$

(de même base), que nous noterons ici H.

Il nous semble important de noter que (contrairement à ce que beaucoup croient!) ce foncteur *n'est pas* une équivalence de catégorie, car il n'est *pas fidèle* (avec les notations de [2] 6.3.1, si (f, φ, h) est un morphisme, on définit un morphisme (f', φ', h) qui aura même image par E en posant

$$f'(x) = f(x).u^{-1} \quad \text{et} \quad \varphi' = \hat{u} \circ \varphi$$

où $\hat{u}$ est l'automorphisme intérieur défini par $u \in G'$).

Cependant E induit une équivalence entre la catégorie des morphismes de fibrés principaux *pointés* (en un point de P) et celle des groupoïdes de Lie dont la *base* est pointée. (Nous verrons plus loin qu'il y a aussi une équivalence au niveau des lois d'action de G et H sur P).

C'est en quelque sorte une "équivalence non canonique", qui explique que les deux théories, bien qu'essentiellement équivalentes, ne soient pas identiques. Dans la théorie des G-structures, le point de vue des groupoïdes est souvent plus intrinsèque, et évite l'apparition de conjugaisons parasites.

Le fibré vectoriel TP/G de base B est le "*fibré d'Atiyah-Molino* " m = M(P) ; ses éléments sont les déplacements infinitésimaux des fibres au sens de /28/.

L'application canonique P x P → H, prolongée à TP x TP → TH, puis restreinte à la diagonale de P x P, et enfin aux couples dont le deuxième vecteur est nul, définit, en passant au quotient par l'action de G, un *isomorphisme canonique* (que l'on peut appeler *isomorphisme d'Ehresmann* /28/) entre M(P) et L(H).

Le prolongement d'Ehresmann S(H) a aussi son pendant dans la catégorie des fibrés principaux : c'est le *foncteur prolongement principal de Kolar-Libermann,* formé des jets de trivialisation du fibré [9, 11].

Le cas particulier où π est *étale* surjectif pourrait être nommé *groupoïde galoisien* : ses α-fibres sont des revêtements galoisiens de la base. Un cas particulier est le groupoïde de Poincaré.

Notons que le Théorème 4 de [15b] exprime une propriété remarquable mais peu connue, valable en dimension finie : tout groupoïde différentiable peut être muni canoniquement d'une structure de groupoïde localement trivial induisant la même structure sur les α-fibres. Cette "structure fine" définit un feuilletage singulier au sens de Stefan [20]. Chaque orbite du groupoïde, muni de sa structure fine, devient un groupoïde de Lie.

Tout groupoïde différentiable peut donc être vu comme une déformation d'un groupoïde de Lie, donc d'une fibration principale.

b) Feuilletages, graphes et graphoïdes ($\pi \in \mathcal{J}$). Si le cas $\pi \in S$, lié aux fibrations, a été le premier considéré, et le plus fréquemment (et parfois le seul) développé par d'autres auteurs, le cas opposé où π est une immersion n'est pas moins intéressant, étant directement lié, on va le voir, aux feuilletages. L'intérêt pour ce cas croît très rapidement à l'heure actuelle.

Introduisons d'abord quelques nouvelles sous-catégories de D :

$\mathcal{J}$ = sous-catégorie des immersions.

$\mathcal{J}'$ = sous-catégorie des "*immersions fidèles*", c'est-à-dire des immersions $i : X \to Y$ telles que la factorisation canonique de i à travers la variété des germes de sous-variétés de Y soit injective ("espaces extraits" d'Ehresmann).

I' = sous-catégorie des "*plongements faibles*" ou "*immersions strictes*" c'est-à-dire des immersions $i : X \to Y$ telles que, pour toute variété Z et toute application $f: Z \to X$, la condition $i \circ f \in D$ implique $f \in D$ (propriété de "p -sous-structure").

Soit alors G un groupoïde différentiable de base B. Posons $R = \pi(G)$: c'est un graphe de relation d'équivalence dans B ; soit Q l'ensemble quotient (*espace des orbites*).

Si $\pi \in D^*$, on dit que G est "grossier".

Si $\pi \in I$, R est un graphe d'équivalence régulière (théorème de Godement).

Si $\pi \in I'$, et de plus α est étale, $B \to Q$ est un Q-atlas de Barre [1] .

Définition [15j]. On dit que G est un *graphoïde* si on a $\pi \in \mathcal{J}'$.

Alors la structure fine de G définit un feuilletage (régulier) de B admettant pour groupoïde d'holonomie la composante α -connexe de G. G s'identifie à un sous-groupoïde ouvert d'un "*graphoïde universel*" ayant pour base la variété $\hat{B}$ des germes de feuilletage de B (étalée sur B).

Pour que Q soit l'espace des feuilles d'un feuilletage, il faut et il suffit que G contienne un sous-groupoïde ouvert dense à base dénombrable d'ouverts.

Pour que Q soit une V-*variété de Satake* (ou *orbifold de Thurston)* [18, 21], il faut et il suffit que π soit *propre*.

Les deux cas $\pi \in S$ et $\pi \in \mathcal{J}$ sont englobés par le cas où π est une *subimmersion* (cas "régulièrement différentiable" d'Ehresmann). On démontre alors que π se factorise par une surmersion sur un graphoïde, d'où le nom proposé d' "épi-graphoïde".

Dans un travail prochain, nous montrerons comment la théorie des graphoïdes peut être étendue aux feuilletages singuliers.

c) *Pseudogroupes, schémas, atlas (* α *étale).* Un *schéma de van Est* [22] peut être identifié à un groupoïde différentiable pour lequel l'application source α est étale. Les QF-atlas rentrent dans ce cas [15i], et en particulier les V-atlas définissant les V-variétés de Satake.

Parmi les précédents, les *pseudogroupes* s'identifient aux graphoïdes pour lesquels α est étale. Les Q-atlas de Barre rentrent dans ce cas.

Ces exemples généralisent la notion d'*atlas*, au sens classique, sur un ensemble Q (d'où la terminologie): on prend pour B la variété triviale somme disjointe des buts des cartes, avec la projection canonique q : B $\to$ Q, et G sera le graphe de la relation d'équivalence dans B définie par q. Nous étendrons ce point de vue dans la conclusion.

5. Foncteurs différentiables entre groupoïdes.

Le "principe d'internalisation" décrit supra permet de transporter de façon naturelle les notions de foncteur fidèle, bien fidèle, plein, essentiellement surjectif, dans le cadre D-structuré, grâce aux diagrammes suivants dans D, où H est un groupoïde de base E, et f : H $\to$ G un foncteur différentiable :

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, bend right=60, "\alpha_H"'] & & \\
W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(I)}"] \arrow[rr, bend left, "q"] & G \arrow[r, "\beta_G"] \arrow[d, "\alpha_G"] & B \\
E \arrow[r, "p"] & B &
\end{tikzcd}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_H"'] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(II)}"] & G \arrow[d, "\pi_G"] \\
E \times E \arrow[r, "p \times p"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

où (I) est D -cartésien.

On dira que f est D -fidèle si $(f, \pi_H) \in I$, D -pleinement fidèle si de plus (II) est cartésien, D -essentiellement surjectif si l'on a $q \in S$, d'où la notion de *D-équivalence* entre D -groupoïdes. Par composition, ceci définit une *relation d'équivalence entre groupoïdes différentiables.*

Dans le cas particulier des graphoïdes, cette équivalence peut se formuler de différentes façons qui redonnent comme cas particuliers l'équivalence de van Est pour les schémas et de Skandalis-Haefliger pour les groupoïdes [8].

On dira que f est un *D-foncteur d'action* (ou *D-acteur)* si

$$f \in S \quad \text{et} \quad u \in D^* ;$$

f décrit alors une loi d'action différentiable de G sur (E $\to$ B). (Cette terminologie nous semble préférable pour les géomètres à celles d'Ehresmann et de Grothendieck.) Inversement toute loi d'action définit un sous-groupoïde H de G $\times_{B \times B}$(E $\times$ E), muni d'un foncteur d'action vers G (par composition avec la projection).

L'action sera dite *principale* si l'on a $\pi_H \in I$ (dans le cas où G est un groupe, c'est-à-dire B un singleton, E est alors un fibré principal, de base B' = E/G). Le foncteur δ : Δ G $\to$ G est appelé "acteur principal canonique".

Cette définition permet de rétablir une symétrie parfaite entre les actions "principales" du groupe G et du groupoïde G' sur un fibré principal. Plus précisément, on a un foncteur auto-adjoint canonique dans la catégorie qui a pour objets les "acteurs principaux" (les morphismes étant les diagrammes commutatifs évidents). Cette symétrie apparaît sur le "diagramme de conjugaison" suivant, ou "diagramme du papillon" (où on écrit P à la place de E), qui reste valable même si B n'est pas un point (et même si G et G' ne sont pas de Lie) :

$$\begin{tikzcd}
P \times_{B'} P \arrow[dr] \arrow[dd, "f"'] & & P \times_B P \arrow[dl] \arrow[dd, "f'"] \\
& K \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
G & & G'
\end{tikzcd}$$

Les diagonales sont des suites exactes de groupoïdes, le terme central K pouvant être considéré comme induit aussi bien par G que par G'.

Un autre exemple important de ce diagramme est donné par les actions "principales conjuguées" du groupoïde d'holonomie et du pseudogroupe Γ sur les germes distingués d'une Γ-structure régulière.

Ce diagramme permet de construire une factorisation universelle canonique d'un foncteur D-fidèle en D-équivalence et D-acteur (il s'agit là, semble-t-il, d'un théorème d' "expansion structurée", mais valable sans sortir de D, et non réductible à un cas particulier des théorèmes généraux d' "expansion structurée").

Pour montrer qu'il s'agit là de Géométrie fort concrète, signalons que les situations suivantes rentrent comme cas particuliers dans ce cadre :

1° la globalisation d'une loi d'action locale de Palais [14] ; la condition de globalisabilité rencontrée par Palais se traduit simplement par le fait que les triplets $(g\ ;\ g.x,\ x)$ (où . est la loi d'action locale) définissent un sous-groupoïde H de G x(M x M) ; l'action locale est alors décrite par le foncteur $H \to G$ et sa globalisation de Palais par la factorisation universelle annoncée ;

2° la construction du fibré principal ou de la Γ-structure associés à un cocycle (vu comme un foncteur) ;

3° l'action d'un groupe sur un de ses espaces homogènes.

6. Perspectives.

Comme on l'a vu, la théorie des groupoïdes différentiables contient

- la théorie des fibrés principaux, équivalente à celle des groupoïdes de Lie ;
- la théorie des feuilletages, équivalente à celle des graphoïdes α-connexes ;
- la notion d'atlas différentiable, et ses généralisations : Q-atlas de Barre, V-atlas de Satake, QF-atlas, pseudogroupes, schémas de van Est.

De ce point de vue, l'équivalence des atlas, et les notions d'équivalence spécifiques à chaque type d'atlas généralisé, sont des cas particuliers de la notion générale d'équivalence entre groupoïdes différentiables évoquée ci-dessus.

Etendant le langage des atlas, *on peut donc voir un groupoïde différentiable* (plus généralement structuré) *comme un atlas généralisé sur l'ensemble* Q *de ses orbites, et une classe d'équivalence de groupoïdes différentiables comme une "structure différentiable" généralisée sur* Q. Celle-ci ne s'identifie plus en général à un objet réel de la catégorie "structurante" **Dif** (c'est-à-dire une variété), mais peut être pensée comme un *objet "virtuel"* selon la terminologie de Mackey.

Ce point de vue est bien sûr sans intérêt dans le cas des fibrés (cas transitif) puisqu'il donne seulement pour Q un point "structuré" par un groupe de Lie.

Mais dans le cas des feuilletages, il définit la *structure de l'espace des feuilles,* ou *structure transverse,* qui est la classe d'équivalence du groupoïde d'holonomie.

L'étude des "morphismes" entre ces "objets virtuels" revient à celle d'un foncteur différentiable modulo la composition avec des équivalences à la source et au but, ce qui motive fortement l'étude des factorisations universelles esquissée au paragraphe précédent. L'espace $H^1(X, \Gamma)$ de Haefliger est le cas particulier de l'espace des morphismes de l'objet "réel" X dans l'objet "virtuel" défini par la classe de Γ [8].

Observons que ce point de vue est très "ehresmannien", puisqu'il aboutit à une "complétion" de **Dif** au moyen d' "atlas" qui sont en fait des "groupoïdes structurés".

Il ne semble pas toutefois que cette "complétion" puisse s'obtenir comme un cas particulier des théorèmes généraux de /107/ (voir les "Comments" de IV-1, notamment pp. 341-342). Elle est très "économique", n'introduisant que des "limites" adaptées à des problèmes très spécifiques, et descriptibles par des diagrammes explicites.

Comme l'a remarqué P. Cartier, ce point de vue, issu de courants lointains et convergents en provenance de branches variées des Mathématiques, s'est imposé de façon indépendante à différents auteurs, notamment A. Connes, W. T. van Est, A. Haefliger, qui utilisent aussi d'ailleurs des structures topologiques et mesurables.

La rencontre organisée à Toulouse en Février 1982 [26], sur une suggestion de P. Cartier et avec le soutien de P. Molino, était centrée sur ce thème, qu'elle avait pour but de faire progresser.

Signalons une autre approche des objets quotients (très voisine du point de vue des H-atlas de [15i]) au moyen des "difféologies" de J.M. Souriau. Il s'agit d'une généralisation de la notion d'atlas qui est duale de celle des "fusées" d'Ehresmann (et des Γ-structures). Ces points de vue duaux sont essentiellement équivalents pour les feuilletages réguliers, mais conduisent à des notions distinctes de feuilletages singuliers.

Ainsi les groupoïdes structurés sortent aujourd'hui de leur purgatoire, et sont de plus en plus considérés comme des outils, jusque dans l'enseignement universitaire [4, 25], et jusque chez des physiciens théoriciens, qui y voient le cadre naturel du "non commutatif".

Beaucoup parmi les auteurs qui les utilisent ignorent d'ailleurs souvent l'origine de cette notion, qui semble s'être répandue par bouturage, drageonnage et marcottage [3]. Peut-être aussi par osmose. La même remarque vaut d'ailleurs aussi pour les "jets", qui, dans de jeunes écoles mathématiques françaises, sont curieusement prononcés comme leur homonyme franglais!

Cette situtation réjouirait sans doute Charles Ehresmann, qui, dans sa générosité, avait coutume d'y voir le signe de la justesse de ses vues. Espérons cependant que cette édition complète et commentée sera pour beaucoup l'occasion de retrouver à sa source le jaillissement d'une pensée géométrique à l'état pur, qui exige un incessant approfondissement et une perpétuelle redécouverte.

Références.

Les /chiffres/ renvoient à la liste des travaux figurant en tête de chaque partie des Oeuvres, les autres [chiffres] à la liste ci-dessous.

1. BARRE, R., De quelques aspects de la théorie des Q-variétés différentielles et analytiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 23 (1973), 227-312.
2. BOURBAKI, N., Variétés, Fascicule de résultats.
3. BOTT, R., Some remarks on continuous cohomology, Proc. Int. Cong. on Manifolds, Tokyo, 1973, 161-170.
4. BROWN, R., Elements of modern Topology, Mc Graw Hill, 1968.
5. CONNES, A., A survey of foliations and operator algebras, IHES, 1981.
6. DOUADY, A. & LAZARD, M., Fibrés en groupes et en algèbres de Lie, Inv. Math. Vol. 1, 2 (1966), 133-151.
7. GROTHENDIECK, A., Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J. 9 (1957), 119-121.
8. HAEFLIGER, A., Groupoïde d'holonomie et classifiant, Astérisque 116 (1984).
9. KOLAR, I., Canonical forms on the prolongation of principal bundles, Rev. Roum. Math. Pures & Appl. 16 (1971), 1091-1106.
10. KUMPERA, A. & SPENCER, D., Lie equations (Appendice), Ann. of Math. Studies 73 (1972), Princeton.
11. LIBERMANN, P., Prolongements des fibrés principaux et des groupoïdes différentiables, Sém. Anal. Glob., Montréal, 1969.
12. MACKENZIE, K., Cohomology of locally trivial groupoids and Lie algebroids, PhD Thesis, Monash University, Melbourne, 1975.
13. MOLINO, P., Sur la géométrie transverse des feuilletages, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 25 (1975), 279-284.
14. PALAIS, R., A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Memoirs of the AMS 22 (1957).
15. PRADINES, J., a) Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables, Atti Conv. Int. Geom. Dif., Bologna, 1967.

b), c), d), e) Théorie de Lie, CRAS Paris, 263 (1966), 907-910 ; 264 (1967), 245-248 ; 266 (1968), 1194-1196 ; 267 (1968), 21-23.

f) Building categories ..., Cahiers Top. et Géom. Diff. XVI-3 (1975), 301-306.

g) Fibrés vectoriels doubles et calcul des jets non holonomes, Esquisses Math. 22, Amiens, 1976.

h) (avec J. WOUAFO KAMGA) CRAS Paris 280 (1975), 125-128.

i) CRAS 288 (1979), 245-248 ;

j) Holonomie et graphes locaux, CRAS Paris, Février 1984.

16. QUE, NGO van, Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales, Ann. Fourier XVII-1 Grenoble (1967), 157-224.
17. RODRIGUES, A.M., The first and second fundamental theorems of Lie for infinite Lie pseudogroups, Amer. Math. J., 1962.
18. SATAKE, S.I., Proc. Nat. Ac. Sc. 42 (1956), 359-363.
19. SHIH WEISHU, Sur l'équation intégro-différentielle non linéaire et la topologie algébrique, Cahiers Top. et Géom. Diff. XXIII-2 (1982), 157-163.
20. STEFAN, S., Accessible sets, orbits, and foliations with singularities, Proc. London Math. SOc. 3, 29 (1974), 699-713.
21. THURSTON, W., Hyperbolic structures on 3-manifolds, Mimeographed Notes.
22. Van EST, W. T., Rapport sur les S-atlas, Astérisque 116 (1984).
23. Ver EECKE, P., Sur les connexions d'éléments de contact, Thèse Paris 1963, Cahiers Top. et Géom. Dif. V (1963).
24. WINKELNKEMPER, H.E., The graph of a foliation, Ann. Glo. Anal. Geom., 1982.
25. ZISMAN, M., Topologie algébrique élémentaire, A. Colin, Coll. U, Paris 1972.
26. Structure transverse des feuilletages, Journées SMF, Toulouse, Fév. 1982, Astérisque 116, Juin 1984.

U.E.R. de Mathématiques
Université Paul Sabatier
31062 TOULOUSE CEDEX. FRANCE

VII

THE WORK OF Charles EHRESMANN IN THE 1950'S AND ITS APPLICATIONS IN PHYSICS AND CONTROL THEORY

by R. HERMANN

In 1953-54, Ehresmann visited Princeton, where I was a graduate student, and gave a course on the foundations of differential geometry. These lectures were very wide ranging and have served me over the years as an intellectual basis for what I have done in Geometry, Physics, and Control Theory. Unfortunately, his work of this period was never codified in a treatise, and much of the detail has been lost. However, it lives on in the basic concepts and ideas he introduced into Geometry : jet spaces, pseudogroups, prolongations, foliations,...

What I found most striking and powerful in Ehresmann's lectures was the unified view it gave of geometry based on the pseudogroup, foliation, and prolongation structures. Here I see Ehresmann as the follower (and virtually the last representative) of a tradition in geometry, which goes back at least as far as Riemann, and was extensively pursued and developed in the 19th and early 20th centuries : Christoffel, Klein, Lie, Helmholtz, Hilbert, Ricci, Levi-Civita, Cartan, Vessiot, et al. Ehresmann's work was very prophetic, and provided a general framework for describing geometry and the mathematics which has a geometric component. Of course, even within pure mathematics this had profound influences, most especially in various aspects of topology and analysis. Certainly differential topology, as it flourished in the 1960's, made magnificent use of Ehresmann's ideas, most especially the theory of jet spaces and foliations.

However, it was in what later came to be called "geometric analysis" that one can recognize his most characteristic concepts, although in a disguised form. Differential geometry has always been concerned with the theory of differential equations. Certainly Lie and Vessiot, who Ehresmann thought of as his most direct predecessors - as he mentions in his "Notice sur les Travaux scientifiques" /136/ - were mainly concerned with ways of classifying differential equations and their properties on geometric and group-theoretic grounds. Ehresmann's insight that the theory of jet spaces and prolongations is closely linked to the geometric theory of partial differential equations was crucial to the later developments of D. C. Spencer, his co-workers and students (of whom I am one).

I must admit that I found Ehresmann's approach too abstract and general. He had a profound knowledge of the classical geometric background, which motivated his general ideas, but this did not readily appear in his work : I had to dig up the historical and intuitive background on my own. My thought was that the applications would provide the motivation that was needed. Indeed, as my own work proceeded, first into control theory, then into physics, I found the core Ehresmann ideas to be fundamental in these applications. I have also found the Ehresmann mathematical philosophy to be useful as a guide through the jungle of mathematical problems thrown up by the applied world :

> *Formulate the general setting of particular problems in a way which maximizes the geometric clarity and insight. Embed a particular problem in a whole class of problems, which can be analysed and treated in a systematic, general way.*

Ehresmann applied this point of view himself to two areas, which have been extremely important in the development of pure and applied mathematics in the last thirty years : The theory of *complex* and *symplectic manifolds*. In the first, he analysed the basic role of the *almost complex structures* and their integrability conditions. Extending from the *real analytic* to the *infinitely differentiable* case was the motivation of much of the work of Spencer and the group he influenced in the 1950's. The high point was the Newlander-Nirenberg theorem [1], and the solution of it by Spencer's " ∂-Newmann problem" method by J. J. Kohn [2]. I treated [3] the theory of submanifolds of complex manifolds in the Ehresmann spirit in a paper which foreshadowed the recent theory of "CR-manifolds".

Similarly, the development of the theory of *symplectic manifolds* has been of great importance, especially in mathematical physics and the theory of partial differential equations. One driving force here has the renewed understanding of classical Hamilton-Jacobi theory, i.e., the theory of first order partial differential equations for one unknown function and their Cauchy characteristics. As Cartan showed brilliantly in his book "Leçons sur les Invariants intégraux", this involves what were called later the theory of *symplectic* and *contact structures*.

Rather than go into all possible applied ramifications of Ehresmann's work, in this essay I will deal with two areas : *Geometric control theory* and *elementary particle physics*. Of course, I cannot hope to provide a complete survey here of these fields. My intention is only to suggest how Ehresmann's ideas can be used to provide a unified geometric framework. In each of these fields, I have also chosen an illustrative topic in which I have personally been involved.

2. Geometric Control Theory.

Control theory is an interdisciplinary subject between mathematics and electrical engineering. Its historical roots are in two directions : The classical Calculus of variations and the theory of Electrical Circuits and Servomechanisms. I will concentrate on the former area, since it is there that concepts originated by Ehresmann have had the most influence, particularly the *optimal* control problem, as it developed in the 1960's, which is the part of the subject in closest contact with geometry.

Let us begin with the classical problem of Lagrange [4]. A *Lagrange variational problem* is to extremize the integral

$$\int_a^b L\,(y(t), \frac{dy}{dt}, t)\, dt \tag{2.1}$$

over a space of piecewise smooth curves

$$t \mapsto y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$$

in R^m, which satisfies certain *boundary conditions* and *differential equation constraints* :

$$M\,(y(t), \frac{dy}{dt}, t) = 0 \tag{2.2}$$

L and M are smooth functions on $R^n \times R^n \times R$.

In the 1950's, the *optimal control problem* was formulated as a variant (with different notation!), and extensions of (2.1) and (2.2). It was assumed that the space of y's, and the constraint equations (2.2), had a product structure :

$$y = (x, \mu), \quad x \in R^n, \ \mu \in R^m, \ p = n + m,$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \mu, t). \tag{2.3}$$

Because of the way these variables occur in (2.3), and the way that such equations occur in applied situations, the x 's are called *state variables*, the μ *control variables*. The applied motivation is then to extremize (2.1), by choosing the *control curve* $t \mapsto \mu(t)$. As Caratheodory [4] (extended to various "non-classical" problems by Bellman and Pontryagin), the extremal curves can be found by solving the *Hamilton equation :*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), t), \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), t) \tag{2.4}$$

where $p, x \in R^n$, $t \in R$, and

$$(x, p, t) \mapsto H\,(x, p, t)$$

is a real-valued function - the *Hamiltonian* - constructed algorithmically from the functions L and M, which appear in (2.1) and (2.2). As we know from the Hamilton-Jacobi theory, n-parameter families of solutions of (2.4) can be constructed (classically this arises from "geometric optics") from a *single* solution

$$(x, t) \mapsto S(x, t)$$

of the *Hamilton-Jacobi first order partial differential equations*

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\,(x, \frac{\partial S}{\partial x}) = 0 \tag{2.5}$$

In fact, the solutions of the following ordinary differential equations ("ray equations", "Cauchy characteristics") are solutions of (2.4) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}(x(t),\ p(t),\ t), \qquad p(t) = \frac{\partial S}{\partial x}(x(t),\ t). \tag{2.6}$$

What has been especially important [5] for applications is the case where the Hamilton equations are *linear*. Special solutions of (2.5) can then been found of the form

$$S(x,\ t) = x^T P(t)\ x \tag{2.7}$$

where $t \mapsto P(t)$ is an nxn metric function of t, which satisfies a ***matrix Ricatti equation***. (This is a special case of what Vessiot called a *Lie system* of ordinary differential equations.)

Thus, we see that the road is open to geometrize along Cartan-Ehresmann lines (as I have partially done [6-8]) much of control theory. Here is one possible set up :

> Let Y be a manifold, $J^1(R,\ Y)$ the one-jets of mappings from R to Y. A ("simple integral") variational problem is a pair consisting of a map
>
> $$L : J^1(R,\ Y) \to R \tag{2.8}$$
>
> and a submanifold
>
> $$C \subset J^1(R,\ Y) \tag{2.9}$$

One can now construct prolongation bundles

$$E \to J^1(R,\ Y) \tag{2.10}$$

and closed two-differential forms on E (functorially attached to the data (2.8)-(2.9)) such that the Cauchy characteristic curves of ω are, when projected via the map (2.10), the extremal curves of the variational problem (2.8)-(2.9). The maximal integral submanifolds of ω (often called "Lagrangian submanifolds" in the contemporary literature) are related to the solutions of the Hamilton-Jacobi equation (2.8). Pseudogroups acting on E and $J^1(R,\ Y)$ which preserve ω and the constraint manifold C are also important in the applied situations : They are related to the role that *feedback* plays in control theory.

This is essentially my geometric picture of *optimal* control theory as it is developed from 1960-65. Unfortunately, this geometric point of view was not understood at the time. However, in recent years it has become important and influential in the theory of *input-output systems* and *feedback control* - areas which, in a sense, are a natural extension of the more classical *optimal control* material sketched above. (Engineering problems rarely involve a straightforward application of the classical optimization techniques.) I will not go into this material here ; however, it too involves intrinsically the basic prolongation, foliation, and pseudogroup concepts involved in Ehresmann's work.

What is most important in my mind about this is that it reinforces the intuitive picture I learned from Ehresmann's lectures and from reading the work of Cartan and Lie :

> Given a geometric structure on a space Y, one constructs a fiber space $Z \longrightarrow Y$ over Y, "simpler" geometric structures on Z which are related to the given structure on Y, and pseudogroups acting on Z, which preserve these geometric structures.

What is also extremely interesting and important is that the same broad picture has played a key role in the evolution of elementary particle physics.

3. Cartan-Ehresmann connections and elementary particle physics.

Ehresmann's 1950 paper, "Les cponnexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable" /28/, is one of the historical classics in differential geometry, ushering in our present era, just as Ricci and Levi-Civita's 1900 paper [9] inaugurated the era of tensor analysis. They presented the diverse developments of differential geometry in the 19th century in a unified form, and sketched a quasi-algebraic formalism and notation which could be used in many parts of pure and applied mathematics. (And, of course, the very term "tensor" came from physics!)

One of my favorite quotations is the following one from their Preface :

> Poincaré has written that a *good notation has the same philosophical importance in Mathematics as a good classification system has in the Natural Sciences*. One may extend this remark, with even greater force, to cover *methods*, since they determine the possibility of *grouping diverse facts which have no obvious interconnection according to certain natural relations.*
>
> One may also say that a theorem is only half-proved when it is proved by a tortuous route or by using artifices with no essential links with the material. Almost always the same theorem can be developed in a more complete and general manner, if one approaches it by a more direct route and with appropriate methods.

What made their paper even more prescient is that it was the basic mathematical document in Einstein's development of General Relativity. Similarly, the codification by Ehresmann in his 1950 paper of the theory of connections was followed by work of physicists in the 1960's on what was later called *Yang-Mills* or *gauge fields*, and that were later recognized to be local versions of Ehresmann's general ideas. In the 1970's there has been a triumphant confirmation of these ideas, and now much of elementary particle physics has a differential geometric foundation, with Ehresmann's work at the very heart.

The new ideas about elementary particles are from the geometric point of view an extension of Einstein's. Recall that he postulated aa four-dimensional space-time manifold X, with two sorts of geometric objects on X :

- A Riemannian metric of Lorentz type, i.e., in terms of real orthonormal moving frame

$$ds^2 = -\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 ,$$

and in terms of coordinates

$$(x^\mu), \quad 0 \leqq \mu, \nu \leqq 3, \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

(summation convention in force).
Physically, this metric determines the *gravitational field.*
- A two-differential form

$$\omega = F_{\mu\nu i} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

on X, which represents the electromagnetic field.

These two geometric structures are now to be linked by (nonlinear) *field equations* of a certain sort, satisfying certain physical (and esthetic) conditions that I will not go into here. Among these conditions are those of *invariance* under the pseudogroup of local diffeomorphisms on X.

Now this beautiful picture of how physics is to be determined by geometry inspired Cartan in his papers of the 1920's on connection theory which are now collected in Part III of his "Collected Works", and which suggested to Ehresmann the definition of *Cartan connection.*

The physical situation can then be described as follows :

Let L be the Lie group of Lorentz transformations on R^4, i.e., the group of linear maps : $R^4 \to R^4$, which leave invariant a quadratic form whose normal form has one minus and three plus signs. Let G be the Poincaré group, i.e., the semi-direct product of L and the group of translations of R^4. Let E be a principal fibre bundle over X, with L as structure group. Suppose given a Cartan connection for this bundle, modelled on the homogeneous space G/L. This connection determines the gravitational field. The electromagnetic field is then a cross-section of a bundle over X, which is associated to the principal bundle. The field equations are constructed from the natural differential operators associated with the prolongations of these bundles and the pseudogroups they determine.

The key idea for generalization is to replace the Tensor Analysis method of Einstein by fibre bundle-geometric methods developed by Cartan, Ehresmann and Steenrod. A key observation here is that the electromagnetic field is itself a "curvature" form associated with a connection in a principal fibre bundle. Consider S^1, the compact, connected abelian Lie group of dimension one, and a principal S^1-bundle P over X. The Lie algebra of S^1 is then just the real numbers. A connection, in the sense of Ehresmann, for this principal bundle is then just a one-differential form on P which annihilates the vertical tangent vectors, and is invariant under the S^1-action. Pulled back to X via local cross sections, this one-form is the *electromagnetic potential* ; the electromagnetic field is, then, the *curvature* of this connection.

This leads to a reformulation of the Einstein framework in terms of principal bundles and connections. Consider the product group $S^1 \times L$, and a principal bundle, with it as structure group. A *connection* for this bundle then gives enough data to determine both the electromagnetic and gravitational fields. The automorphisms of this bundle are called *gauge transformations* by the physicists.

The way is now open to much more extensive generalizations. The criteria are mainly physical and experimental, although geometric insight does play an important role. The first step, in the 1950's, was to replace the group "S^1" in the construction of the electromagnetic field (in particle physics terms, the *photons*) by other compact groups to accomodate new elementary particles which were then being discussed. I cannot go into the elaborate reasoning that motivates these constructions, but must refer the reader to the physics literature.

In the original paper by Yang and Mills, S^1 was replaced by SU(2). There was one great difficulty : The particles which went along with this assignment had to have *zero* mass, as does the photon. The modification of the construction and interpretation needed to accomodate particles of non-zero mass was not understood for another fifteen years, and led to today's successful unified models of electromagnetic and weak interactions.

In the spirit of Ehresmann's work, we can then propose a geometric framework for much of physics. Let X be a four-dimensional manifold, to be identified with space-time. Let G be a Lie group, M a manifold on which G acts *effectively* (on the right), i.e.,

$$p_0 \cdot g = p_0 \text{ for } p_0 \in M,\ g \in G \qquad \text{implies} \qquad pg = g \text{ for all } p \in M.$$

Suppose $\pi : M \to X$ is a smooth submersion map whose fibers are the orbits of G. (Then, (M, X, G, π) is a principal bundle over X, with G as structure group.)

Let $\mathbf{G}$ be the Lie algebra of G. The basic physical objects are $\mathbf{G}$-valued, one-differentials ω on forms M, which are invariant under G and isomorphisms on the *vertical* tangent vectors, i.e., the

$$v \in T(M) \quad \text{such that} \quad T_*(v) = 0.$$

The *curvature* is then defined as a **G**-valued two-form :

$$\Omega = d\omega - \tfrac{1}{2}[\omega, \omega],$$

ω and Ω define the basic physical objects. Auxiliary *fields* can be defined by means of linear representations $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ of G on vector spaces V. Each such representation defines a vector bundle E_ρ over X. The cross-section $\Gamma(\rho)$ are then the maps $\pi : M \to V$ such that

$$\gamma(pg) = \rho(g^{-1})(\gamma(p)) \quad \text{for} \quad p \in M, \ g \in G .$$

As Ehresmann indicated, the connection ω defines *covariant derivative operations* ∇ on $\Gamma(\rho)$. (Of course, these are ultimately defined in terms of exterior derivative d and the projection on the horizontal tangent vectors, i.e., the kernel of π.) The basic field equations are then defined by means of the covariant derivatives and the curvature operator $\omega \to \Omega$.

Unfortunately, I cannot go into more detail here, since motivating and understanding it requires a detailed knowledge of physical reasoning that has gone into the classification of elementary particles and their interactions. As an introduction to the recent literature in this area, I can recommend the books by Huang [10] and Fadeev and Slavnov [11]. The book by Bleeker [12] starts the job of translating the physical language into the fibre-bundle theoretic concepts. My own books [12-16] contain much mathematical raw material for the development of physics, but they have the defect of being written before the codification of particle physics in its present form - if I wrote them today, they would be much different, since the experimental and theoretical situation has become much clearer.

In any case, I want to state my belief that Ehresmann's work has played a role in the development of elementary particle physics analogous to the role of the work of Riemann, Ricci and Levi-Civita in Einstein's "General Theory of Relativity". Unfortunately, intellectual collaboration between physicists and mathematicians is very weak, and the physicists had to painfully "invent" the mathematics by themselves. I believe that there is much in Ehresmann's work after 1950 which would be very useful and important in physics (and control theory) if it were better known.

References.

1. A. NEWLANDER & I. NIRENBERG, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Ann. Math. **65** (1957), 391-404.
2. J. J. KOHN, Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I, Ann. Math. **78** (1963), 112-148 ; II, **79** (1964), 450-472.
3. R. HERMANN, Convexity and pseudoconvexity for complex manifolds, I, J. Math. Mech. **13** (1964), 243-248.
4. C. CARATHEODORY, Variationsrechnung, B.G. Teubner, Leipzig, 1935.
5. R. E. KALMAN, Contributions to the theory of optimal control, Bol. Soc. Matem. Mex. (1960), 102-119.
6. R. HERMANN, On the accessibility problem in control theory, in Intern. Symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics, 1961 (J.P. LaSalle & S. Lefschetz, eds.), Academic Press, New York (1963), 325-332.
7. R. HERMANN, Some differential-geometric aspects of the Lagrange variational problem, Ill. J. Math. **6** (1962), 634-673.
8. R. HERMANN, Differential geometry and the calculus of variations, Academic Press 1968. 2d edition in Interdisciplinary Math. 17, Math. Sci. Press, Brookline 1977.
9. G. RICCI & T. LEVI-CIVITA, Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, Math. Ann. **54** (1900). Translation with comments in "Lie groups : History, frontiers and applications" 2, Math. Sci. Press, Brookline, MA, 1975.
10. K. HUANG, Quarks, leptons and gauge fields, World Scient., Singapore, 1982.
11. L. D. FADEEV & A. A. SLAVNOV, Gauge fields, Benjamin, Reading, MA, 1980.
12. R. HERMANN, Lie groups for physicists, W. A. Benjamin, New York, 1966.
13. R. HERMANN, Fourier analysis on groups and partial wave analysis, W.A. Benjamin, New York, 1969.
14. R. HERMANN, Lie algebras and quantum mechanics, W.A. Benjamin, New York, 1970.
15. R. HERMANN, Vector bundles in mathematical Physics, Vols. I & II, W.A. Benjamin, New York, 1970.
16. R. HERMANN, Geometry, Physics and Systems, M. Dekker, New York, 1973.
17. D. BLEEKER, Gauge theory and variational principles, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

R. HERMANN
53 Jordan Road
BROOKLINE, Mass., U.S.A.

VIII

EHRESMANN AND THE FUNDAMENTAL STRUCTURES OF DIFFERENTIAL GEOMETRY SEEN FROM A SYNTHETIC VIEWPOINT

by Anders KOCK

1. Jets as the synthetic foundation of differential geometry.

On the eve of the 1950's, C. Ehresmann made the discovery of the notion of *jet* as the fundamental element of differential geometry. Many of his papers from this decade deal with and exploit this foundation, which soon became a standard tool for differential geometers.

His work here may be seen as an effort to understand differential geometry by concepts which synthesize rigour and intuition ; - one might say, by synthetic concepts. For instance, a *tangent vector* of a manifold M is, from such synthetic viewpoint, a 1-jet of a map $\mathbf{R} \to M$, and is not identified with the differential operator $C^{\infty}(M) \to \mathbf{R}$ to which it gives rise.

The advent in the mid 70's of synthetic differential geometry in the specific sense (of [4], or [7], say, inspired by a lecture of Lawvere in 1967), which we shall here for short denote SDG, provides a setting in which jet-theoretic constructions become more transparent. This is not surprising since the basis assumption of SDG is that

the notion of jet should be representable

("Kock-Lawvere Axiom") ; this means that an r-jet at $x \in M$ is not an equivalence class of maps but *is* a map defined on a certain infinitesimal subset ("r-monad") $\boldsymbol{M}_r(x)$ around x. This assumption will hold if one enlarges the category of C^{∞}-manifolds to the category of "C^{∞}-schemes" [2], or certain toposes related hereto [1, 5, 7, 16]. For instance, the notion of 1-jet at $0 \in \mathbf{R}$ is represented by a scheme D whose only point is 0, but whose structure sheaf is the ring $\mathbf{R}[\varepsilon]$, of dual numbers ; a tangent vector at $x \in M$ then is a map $D \to M$ with $0 \mapsto x$.

The role of $\mathbf{R}[\varepsilon]$ for representing the notion of tangent vector goes back to A. Weil's [20] 1953 ; he states that his theory of "Points proches" has a double source : Fermat, and "la théorie des jets développée dans ces dernières années par C. Ehresmann".

Thus SDG is a natural continuation and completion of Ehresmann' s foundational work of the 50's, and it is not surprising that a revisiting of this work with ideas and notions of SDG leads to clarification and simplification.

One needs, however, one step beyond Weil's "local algebras" or the corresponding "infinitesimal manifolds" of SDG, to be able to make this revisiting, namely to represent the notion of r-jet at a point $x \in M$, where M is something more general than coordinate space. To describe the necessary notion of *r-monad* around $x \in M$, one needs a relation of "r-neighbours", $x \sim_r y$ between the elements of M, or, equivalently *), a subset $M_{(r)} \subset M \times M$, "the r'th neighborhood of the diagonal". Then the r-monad $\boldsymbol{M}_r(x)$ is the set of r-neigbours of x and represents r-jets at x. The neighborhoods $M_{(r)}$ of the diagonal have a prehistory in algebraic geometry (Grothendieck et al), and analogous schemes $M_{(r)}$ were utilized later by Malgrange [15] and Kumpera-Spencer [13] for representing jet bundles in differential geometry. An axiomatic-synthetic approach to a neighbour relation for representing the jet notion was initiated in [6]; such an approach is necessary for the SDG formulations that follow below.

The relationship between the scheme theoretic and the axiomatic approach to "first neighborhood of the diagonal" has been studied in [3].

In what follows we shall attempt a synopsis of part of C. Ehresmann's work on jet theory and some subsequent developments, by paraphrasing it into the "neighbour"-language of SDG. Some such paraphrasing was carried out in [6], notably concerning Lie algebroids of Lie groupoids, G-structures, Lie equations, and prolongations of differentiable categories. This will not be repeated here.

To make sense to the paraphrasing, one needs only know about the r-neighbour-relation that it is reflexive, symmetric, not transitive (but rather :

$$x \sim_r y, \quad y \sim_s z \implies x \sim_{r+s} z \;)$$

and that it is preserved by any map.

If $f : \boldsymbol{M}_r(x) \to N$ is an r-jet at x, with values in N, and $f(x) = y$, one calls /33/ x the *source*, and y the *target*, of the jet f. Since f preserves the relation $\sim_r$, it follows immediately that f factors through

$$\boldsymbol{M}_r(y) \subset N,$$

and so can be composed with any r-jet at y. Thus r-jets form a category.

*) Only from the viewpoint of SDG is it true that the two ideas mentioned here are equivalent. From the scheme theoretic viewpoint, only the latter makes sense since M and $M_{(r)}$ have the same points and only differ by their structure sheaves, so that one cannot talk about a *pair* of neighbour points. We have followed the tradition of SDG in omitting the word "differentiable" everywhere, and writing "set" instead of "manifold" or "scheme". This use, or abuse, of language stems from the fact that SDG embeds the category of all manifolds into a topos (a well adapted model for SDG) about which we talk as if it were the category of sets. This may be justified in terms of categorical logic (see e.g. [7], Ch. II), which in turn is an offspring of the idea of "functorial semantics" [14], or of "realizing a sketch in a category" (Part IV of these works)).

The category of those r-jets whose source and target belong to the same manifold M is denoted $C_r M$. This is the prime type of example of what C. Ehresmann calls a *differentiable category* in /50/ (or category internal to the category of manifolds). Thus important structures in differential geometry *are* categories. We discuss these in §2 below.

The "non-holonomous" jets introduced in /41/ play a role in the context of formal integrability considerations, which we shall discuss at the end of §2. The notion itself can be paraphrased as follows. Let $\sim$ denote the 1-neighbour relation. A *non-holonomous* r-jet at $x \in M$ (with values in N, say) is a law which to each "r-chain" in M

$$x \sim x_1 \sim x_2 \sim \dots \sim x_r$$

associates an element of N. The set of such r-chains may be called the *non-holonomous r-monad* $\widetilde{\mathbf{M}}_r(x)$ around x ; it is not a subset of M. If

$$f(x, x_1, \dots, x_r)$$

depends only on x_r, f may be identified with an ordinary ("holonomous") r-jet at x since the map

$$\partial_1 : \widetilde{\mathbf{M}}_r(x) \to \mathbf{M}_r(x)$$

associating to an r-chain its extremity x_r, may be assumed (for nice N) to be surjective.

2. Categories in differential geometry.

This is the title of the last survey article /116/ by C. Ehresmann, who in categories recognized a decisive motive force in the foundations of differential geometry. Among the roots of this recognition are Lie's theory of continuous transformation groups, and the Lie-Klein Erlangen program. Lie etc. considered in this context structures more general than those we now call Lie groups - namely "pseudogroups" (possible infinite-dimensional) and with multiplication only locally defined.

To understand differential geometry in the spirit of the Erlangen program means thus more than understanding the formal notions of *group* and *group actions.* The necessary comprehensive notion for this were brought to the day by E. Cartan and C. Ehresmann, in particular with the realization that pseudogroups are categories (in fact groupoids).

With the concept of (small) category in the center of the study of the foundations of differential geometry, C. Ehresmann was led to two deepenings of this concept in two directions :

1. ordered categories,
2. differentiable categories.

The deepening 1 comes about when reflecting on the word "local", and an example is the groupoid of all local diffeomorphisms of a manifold, with the notion of "restriction" providing the ordering. Ordered categories are commented on in these Oeuvres, II. - The deepening 2 comes about when reflecting on jets, and realizing that jets form categories which themselves are manifolds. We shall, in terms of SDG, comment in more detail on 2, in particular on aspects of the theory of connections.

Just as Lie groups G are considered in conjunction with their actions (i.e., as groups of transformations on a manifold), differentiable categories Φ, and in particular differentiable groupoids are considered in conjunction with their actions on manifolds E fibered over M (M = the manifold of objects of Φ) /42/. This, in the language of present day category theory, is the notion of discrete fibration over Φ, or presheaf on Φ. In SDG (in fact in any topos), one may, equivalently, express this structure in terms of a functor over M, $\Phi \to \mathrm{Full}(E)$, where Full(E) is the category over M with maps from one E-fibre to another as arrows.

In case Φ is the groupoid $\Pi_r M$ of invertible k-jets with source and target in M, an action of it on some $E \to M$ is called an r'th order *prolongation* of M, and a cross section σ of $E \to M$ is an r'th order *infinitesimal structure* on M /32/-/38/. Any tensor bundle over M is a 1st order prolongation. An example of a 2nd order structure on M is an affine connection on M. The relevant 2nd order prolongation here is an example of a bundle of connection elements, see below.

Any r'th order infinitesimal structure σ on M gives rise to a subgroupoid Fix(σ) of $\Pi_r M$, consisting of those r-jets that preserve σ. One of the benefits which C. Ehresmann derived from the systematic consideration of such differentiable categories was the "right" comprehensive notion of connection, namely connection with values in a category (usually a groupoid) /46/. The intuitive idea behind any connection notion is that it is a law for infinitesimal transport, and that this transport preserves some given infinitesimal structure σ. Thus it should be "something" which takes value in the groupoid Fix(σ).

The combinatorial aspects (the neighbour relation), which SDG introduces, allows us to describe such notion in a simple way [6]. Let Φ be a groupoid (or category) with M as its set of objects. A (k'th order) *connection element* X *at* $x \in M$ *with values in* Φ is a law which, to each y with $x \sim_k y$ associates an arrow $X(y) : x \to y$ of Φ (one requires $X(x)$ to be the identity arrow at x). These connection elements form a bundle $Q^k(M, \Phi)$ over M (which is in fact a k'th order prolongation of M) and a cross section of this bundle is a Φ-valued k'th order *connection* on M.

One could even replace $\sim$ by an arbitrary (oriented) *graph* Γ over M ; by this we understand a set Γ equipped with "face" maps

$$\partial_0 , \partial_1 : \Gamma \to M$$

and a "degeneracy" map $i: M \to \Gamma$ splitting ∂_0 and ∂_1. A category Φ over M is evidently a graph, by forgetting composition of arrows ; and also a reflexive relation Φ is a graph. Thus, we may describe the notion Φ-valued connection relative to Γ : it is a map $\Gamma \to \Phi$ of graphs over M. The groupoid valued connections were studied from this viewpoint in [10] (which is close to /28/ in content), and in [11], which takes departure in /41, 43/ : the relevant graph Γ to describe r'th order non-holonomous connections in combinatorial terms is the graph $\Gamma = \widetilde{M}(r)$ of r-chains

$$\underline{x} = (x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_r) \quad \text{with}$$
$$\partial_0(\underline{x}) = x_0 , \quad \partial_1(\underline{x}) = x_r , \text{ and } i(\underline{x}) = (x \sim x \sim \dots \sim x).$$

If for instance ∇ is a Φ-valued 1st order connection, we get a 2nd order non-holonomous connection $\nabla_* \nabla$ by

$$(\nabla_* \nabla)(x_0, x_1, x_2) := \nabla(x_1, x_2) \circ \nabla(x_0, x_1),$$

cf. /46/, and [19, 12, 11]. (Then ∇ is curvature free iff $\nabla_*\nabla$ is holonomous, cf below.)

An alternative connection notion was considered by Joyal (unpublished, but see [9]), who considered for an arbitrary "bundle" $E \to M$ an action of the graph $\sim$ on E (in analogy with an action of a category over M on E). It becomes a special case of the groupoid-valued connection notion, by taking $\Phi = \text{Full}(E)$. Conversely, a Φ-valued connection for a general groupoid Φ over M can be seen as a "bundle"-connection in the bundle $\partial_1 : \Phi \to M$ with a certian equivariance property. In fact, both notions and the proof of their equivalence can be paraphrased from /28/ Section 4.

While groupoid-valued higher order connections always give rise to "absolute differentiation" /46/, essentially only 1st order connections give rise to (global) parallel transport. The relationship between the integration problem raised by the latter, and the notion of curvature of the connection, was stated in /46/, and in [19]. SDG allows us to paraphrase the notion of curvature and its role in integrability questions in an "unforgettable" way :

Any category Ψ over M gives rise to a graph $\Psi_{(1)}$ over M, consisting of the "near-identities" of Ψ, i.e., those arrows f, with $f \sim_1 \partial_0(f)$. In attempting to extend a graph map

$$\nabla : \Psi_{(1)} \to \Phi$$

(where Φ is a category over M) into a functor $\Psi \to \Phi$, which is what the integration problem amounts to, it is necessary that ∇ preserves those composites which happen to exist in $\Psi_{(1)}$. To say ∇ is *curvature free* is to say that it does preserve such composites. The *Representation Theo-*

rem for Lie groupoids [17, 18] gives conditions on Φ and Ψ in order that the curvature is the only obstruction to extending ∇ to a functor.

The integrability theorem for curvature free connections is the special case when

$$\Psi = M\times M, \quad \text{so} \quad \Psi_{(1)} = M_{(1)},$$

the 1-neighbour relation. A special case of that, again, is the integration theorem of [8], giving conditions on M when Lie-group valued 1-forms on M are exact (take $\Phi = M\times G\times M$).

References.

1. E. DUBUC, Sur les modèles de la géométrie différentielle synthétique, Cahiers Top. et Géom. Diff. XX (1979), 231-279.
2. E. DUBUC, C^∞-schemes, Amer. J. Math. 103 (1981), 683-690.
3. E. DUBUC & A. KOCK, On 1-form classifiers, Communications in Algebra (to appear 1984).
4. A. KOCK, A simple axiomatics for differentiation, Math. Scand. 40 (1977), 183.
5. A. KOCK, Properties of well-adapted models for synthetic differential geometry, J. Pure Appl. Algebra 20 (1981), 55-70.
6. A. KOCK, Formal manifolds and synthetic theory of jet bundles, Cahiers Top. et Géom. Diff. XXI (1980), 227-246.
7. A. KOCK, Synthetic Differential Geometry, London Math. Soc. Lecture Notes Series 51, Cambridge 1981.
8. A. KOCK, Differential forms with values in groups, Bull. Austr. Math. Soc. 25 (1982), 357-386.
9. A. KOCK, in Proceed. of "Seminario Taller, Teoria de las Categorias y sus Aplicaciones", Bogota 1983.
10. A. KOCK, Combinatorial notions relating to principal fibre bundles, Aarhus Preprint Series 1982/83, N°23 (submitted to J. Pure Appl. Algebra).
11. A. KOCK, Combinatorics of non-holonomous jets, Aarhus Preprint Series 1983/84, N° 37 (submitted to Czechoslovak Math. J.).
12. I. KOLAR, Some higher order operations with connections, Czechoslovak Math. J. 24 (1974), 311-330.
13. A. KUMPERA & D. SPENCER, Lie equations, Ann. of Math. Studies 73, Princeton, 1972.
14. F.W. LAWVERE, Functorial semantics of algebraic theories, Proc. Nat. Acad. Sci. 50 (1963), 869-873.
15. B. MALGRANGE, Equations de Lie I, J. Diff. Geom. 6 (1972), 503-522.
16. I. MOERDIJK & G.E. REYES, C^∞-rings (Monograph in preparation).
17. J. PRADINES, Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables, in Atti del Convegno Intern. di Geom. Diff. Bologna 1967.
18. N.V. QUE, Sur l'espace de prolongement différentiable, J. Diff. Geom. 2 (1968), 33-40.
19. J. VIRSIK, On the holonomity of higher order connections, Cahiers Top. et Géom. Diff. XII (1971), 197-212.
20. A. WEIL, Théorie des points proches sur les variétés différentiables, in Coll. Top. et Géom. Diff., Strasbourg 1953.

GAZETTE DES MATHÉMATICIENS
Société Mathématique de France
n° 13, Février 1980, pages 27-35

IX

EHRESMANN : UN GÉOMÈTRE

par André HAEFLIGER

Elève d'Elie Cartan, Ehresmann a été profondément influencé par la pensée de son maître. Attiré par la géométrie, il s'est attaché à dégager patiemment et par approximations successives les concepts fondamentaux nécessaires pour définir et comprendre d'un point de vue global les structures géométriques étudiées par S. Lie et E. Cartan.

Dans ce qui suit nous nous proposons de passer en revue les contributions d'Ehresmann aux divers domaines qui l'ont intéressé dans la période qui s'étend de 1932 à 1955 (date de sa nomination à Paris), laissant à d'autres plus compétents le soin de parler de ses travaux sur les catégories. La notice qu'Ehresmann avait rédigée sur ses travaux scientifiques en 1955 nous a été très utile.

Topologie des espaces homogènes.

Dans sa thèse soutenue à Paris en 1932 intitulée "Sur la topologie de certains espaces homogènes" (parue en 1934 dans les Annals of Mathematics 35, p. 396-443), Ehresmann étudie l'homologie des espaces homogènes X symétriques complexes, tels que les variétés de Grassmann complexes, les variétés de drapeaux ou les quadriques complexes. Il détermine d'abord leurs nombres de Betti en calculant la dimension de l'espace vectoriel des formes différentielles invariantes sur X qui est isomorphe à la cohomologie réelle de X, d'après un théorème de Cartan et les théorèmes de de Rham.

Il utilise ensuite une méthode plus géométrique et plus directe pour donner une base de l'homologie de ces variétés, méthode qui a été reprise plus tard par Chern (1946 et 1948) et Pontrjagin (1942) dans leurs travaux fondamentaux sur la cohomologie des grassmanniennes réelles et complexes conduisant à la construction des classes caractéristiques des fibrés vectoriels réels ou complexes. Cette méthode est basée sur l'observation originale que certaines sous-variétés algébriques (les cycles de Schubert dans le cas des grassmanniennes) fournissent une décomposition cellulaire d'un type beaucoup plus général que celles que l'on avait considérées auparavant, remarquablement économique (puisque dans le cas complexe par exemple toutes les cellules sont de dimension paire), et qui permet de calculer aisément l'homologie. Il détermine également la matrice d'intersection des variétés de Schubert, donnant ainsi une justification homologique rigoureuse à la géométrie énumérative de Schubert.

Dans un travail ultérieur (Sur la topologie de certaines variétés algébriques, J. de Math. XVI, 1937, p. 69-100), il applique la même méthode aux variétés algébriques réelles analogues. Dans ce cas le problème est plus délicat puisqu'il faut déterminer les relations d'incidence. Cette même méthode lui permet également de calculer l'homologie des variétés de Stiefel réelles, complexes ou quaternioniennes, et des groupes de Lie compacts (dans deux Notes aux C.R.A.S. Paris 208 (1939), p. 321 et 1263).

Espaces fibrés.

Ses recherches sur les espaces homogènes conduisent Ehresmann à étudier les espaces fibrés. Il avait déjà remarqué dans sa thèse que, sur un groupe de Lie, les classes modulo un sous-groupe étaient les fibres d'une fibration localement triviale (sans utiliser encore cette terminologie). Dans une Note aux C.R.A.S. en 1938 (Sur les arcs analytiques d'un espace de Cartan), il introduit la notion de fibré principal associé pour définir les espaces de Cartan. Mais c'est dans la Note publiée en collaboration avec son élève J. Feldbau (C.R.A.S. Paris 213 (1941), p. 762) qu'elle est formulée explicitement. Dans cette note, les auteurs énoncent le théorème de relèvement des homotopies (Ehresmann en donnera plus tard une démonstration détaillée dans un cas plus général dans son article au Bull. Soc. Math. France 72, 1944, p. 27-54) et ils établissent la suite exacte d'homotopie (découverte indépendamment et simultanément par Eckmann et Hurewicz-Steenrod).

Suit une série de Notes (213, 1941, p. 762 et 214, 1942, p. 144) où Ehresmann précise les définitions de *fibré principal,* et de *fibrés associés,* la notion de groupe structural jouant un rôle prépondérant. Le problème de la réduction du groupe structural G d'un fibré à un sous-groupe fermé H est ramené à celui de la construction d'une section du fibré associé de fibre G/H. Comme conséquence de cette observation; il observe qu'une telle réduction est toujours possible si G/H est n-connexe, n étant la dimension de la base, et qu'elle est unique à homotopie près si G/H est $(n+1)$-connexe. Il remarque que ce sera le cas si H est compact maximal, car alors G/H est contractile.

Ces considérations, il les applique dans une Note intitulée "Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable" (216, 1943, p. 628) aux problèmes qui lui ont servi de motivation, à savoir l'existence de structures géométriques supplémentaires, qui implique une réduction du groupe structural. On trouve aussi dans cette note la définition maintenant universellement adoptée d'une variété différentiable à l'aide d'un *atlas* et de son prolongement. Il remarque par exemple que l'existence d'une métrique indéfinie, de type (p, q), équivaut à celle d'un champ continu de p-plans ; en particulier sur une variété de dimension 4 compacte il n'existe de métrique de Lorentz que si sa caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle.

Dans une Note "Sur les espaces fibrés différentiables" (224, 1947, p. 1611), il esquisse la démonstration du fait qu'une submersion d'une variété compacte dans une autre est la projection d'une fibration.

Le rôle que joue la topologie du groupe structural G n'est pas encore bien dégagé dans ces premières notes (ce qui justifie les remarques de Steenrod dans son livre sur les espaces fibrés). Par contre Ehresmann clarifie déjà complètement ce point dans son exposé sur les espaces fibrés au Colloque de Topologie algébrique de Paris en 1947 (publié en 1949). Cet exposé résume admirablement ses réflexions antérieures sur la notion d'espace fibré qui apparaît ici comme un cas particulier d'une structure définie par un atlas compatible avec un pseudogroupe de transformations. L'élégance et la concision de la présentation contraste avec la lourdeur des premières pages du livre de Steenrod publié en 1950.

Dans ce même exposé il pose le problème de l'existence, sur une variété de dimension $2n$, d'une *structure presque complexe*, condition nécessaire pour l'existence d'une section du fibré associé au fibré tangent de fibre $O(2n)/U(n)$, ou encore à l'existence d'une forme différentielle de degré 2 et de rang $2n$. Il démontre que, pour une variété orientable de dimension 6, une condition nécessaire et suffisante est l'annulation de la troisième classe de Stiefel-Whitney. Donc la sphère S^6 admet une structure presque complexe, alors qu'il montre que S^4 n'en possède pas.

Dans sa thèse écrite sous la direction d'Ehresmann, Wu Wen Tsun a fait une étude détaillée des structures presque complexes sur les variétés de dimension 4 (voir aussi la conférence d'Ehresmann dans Proc. Intern. Congress of Math., Harvard 1950, Vol. 2, p. 412-419, et le rapport de M^elle^ Libermann "Structures presque complexes et autres structures infinitésimales", Bull. Soc. Math. France 83, 1955, p. 192-224).

Variétés feuilletées.

Dans les années quarante, à Clermont-Ferrand où l'Université de Strasbourg s'est repliée, Ehresmann propose comme sujet de thèse à son élève G. Reeb, l'étude des propriétés globales des systèmes complètement intégrables, domaine inexploré dans le cas où les sous-variétés intégrales sont de dimension supérieure à 1. La théorie des espaces fibrés existait déjà en germe avant la guerre (Whitney 1935, Stiefel 1936), la preuve en est qu'elle s'est développée simultanément en France avec Ehresmann, à Zürich avec Eckmann, Gysin, Hopf, et aux Etats-Unis avec Whitney, Hurewicz, Steenrod, pendant les premières années de la guerre, à une époque où les communications scientifiques étaient très difficiles. Il n'en est pas de même pour les variétés feuilletées (c'est ainsi que Reeb a appelé plus tard les variétés munies d'un système complètement intégrable), et c'est l'un des grands mérites d'Ehresmann d'avoir dirigé Reeb dans cette direction. La thèse de Reeb est un travail de pionnier, largement en avance sur son temps, qui contient déjà en germe beaucoup de développements ultérieurs.

C'est dans une Note aux C.R.A.S. Paris 218, 1944, p. 955, qu'Ehresmann et Reeb définissent les variétés intégrales complètes (feuilles dans la terminologie de Reeb) d'un champ de p-plans complètement intégrable sur une variété V comme les composantes connexes d'une topologie plus fine sur V. Reeb y donne le premier cas particulier de son théorème de stabilité et le fameux exemple de feuilletage de la sphère S^3 par des surfaces. Ehresmann remarque que la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une feuille F d'un feuilletage de S^n ou R^n est toujours nulle. Il revient sur cette question dans deux Notes ultérieures (224, 1947, p. 1611 et 226, 1948, p. 1879) où il montre qu'il suffit que F soit homologue à zéro dans V, et que si de plus F est homotope à une constante, alors elle est parallélisable comme conséquence immédiate du théorème de relèvement des homotopies dans les espaces fibrés (cf. aussi sa conférence sur la théorie des variétés feuilletées, Rend. di Mat. e delle sue appl., Serie V, 10, 1951, p. 64-83).

Mais la contribution la plus importante d'Ehresmann à la théorie des variétés feuilletées est d'avoir parfaitement dégagé la notion de *pseudogroupe d'holonomie* du feuilletage, notion sous-jacente, mais pas explicitée, dans la thèse de Reeb et qui joue un rôle primordial dans toute la théorie.

Déjà dans sa note sur les espaces fibrés différentiables (C.R.A.S Paris, 224, 1947, p. 1611) et plus tard dans son exposé sur "Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable", Colloque de Topologie de Bruxelles, 1950, il considère le cas particulier d'une connexion infinitésimale intégrable sur un espace fibré de base B, c'est-à-dire d'un feuilletage transverse aux fibres tel que tout chemin c dans B peut se relever dans n'importe quelle feuille (ce qui est toujours le cas si la fibre est compacte). Alors E muni de la topologie des feuilles est un revêtement de B classé à conjugaison près par un homomorphisme du groupe fondamental de B sur un sous-groupe G du groupe des difféomorphismes de la fibre, appelé le *groupe d'holonomie* de la connexion ou du feuilletage. Inversement, la donnée d'un tel homomorphisme permet de reconstruire le fibré et le feuilletage. Cette construction donne des exemples très intéressants de feuilletages. On retrouve une telle situation chaque fois que l'on a un voisinage tubulaire saturé d'une feuille. Si toutes les feuilles sont compactes, Ehresmann esquisse la démonstration que le groupe d'holonomie est fini et qu'il est isomorphe à un groupe d'isométries d'une fibre du voisinage tubulaire. Plus généralement, il associe à toute feuille F une représentation de son groupe fondamental, cette fois dans le groupe des germes en x de difféomorphismes d'une petite section transverse S coupant F en x. Il appelle cet homomorphisme l'holonomie de la feuille (et son image, le groupe d'holonomie de F). Il généralise également le théorème de stabilité de Reeb au cas où le groupe d'holonomie d'une feuille compacte est fini. Ehresmann a démontré ces résultats dans une série de conférences données à Princeton en 1953. Les démonstrations ont été publiées plus tard dans une Note aux C.R.A.S. Paris 243, 1956, p. 344, rédigée en commun avec Shih Weishu.

En passant aux jets d'ordre un, Ehresmann obtient *l'holonomie infinitésimale* de la feuille qui donne une réduction à la topologie discrète du groupe structural du fibré normal à la feuille (ou encore une connexion linéaire plate canonique). Il remarque que, inversement, pour qu'une sous-variété F soit une feuille d'un feuilletage défini au voisinage F, il suffit que son fibré normal admette un groupe structural discret.

Le pseudogroupe d'holonomie définit la *structure transverse* au *feuilletage* (notion que le soussigné a largement utilisé dans sa thèse écrite sous la direction d'Ehresmann et toute imprégnée de sa pensée). L'importance du pseudogroupe d'holonomie n'a fait que se confirmer dans les développements ultérieurs. Ehresmann a rédigé un exposé très complet sur les "Structures feuilletées" dans Proc. 5th Math. Congress, Montréal (1961), p. 109-172.

Théorie des connexions.

Pour Ehresmann une des principales motivations pour introduire les espaces fibrés était de donner une définition intrinséque globale des connexions considérées par E. Cartan et du transport parallèle (c'est pour cette même raison que les physiciens se sont enfin décidés à étudier la théorie des espaces fibrés!). Bien qu'il ait déjà esquissé une définition des espaces de Cartan dans une Note aux C.R.A.S. en 1938 et dans sa Note "Sur les espaces fibrés différentiables" en 1947, c'est dans son exposé au Colloque de Topologie de Bruxelles en 1950 (p. 29-55) qu'Ehresmann clarifie complètement la notion de connexion, compare entre elles les diverses définitions et précise la notion de connexion de Cartan et de développement d'une courbe de la base dans la fibre. Il montre aussi que tout isomorphisme local entre deux espaces de Cartan analytiques complets et simplement connexes s'étend suivant un isomorphisme global.

Théorie des jets. Pseudogroupes de Lie. Structures locales.

Dans une série de 5 Notes aux C.R.A.S. publiées en 1951 et 1952, intitulées: "Les prolongements d'une variété différentiable", Ehresmann introduit la notion de *jet* comme base de la Géométrie Différentielle. Cette notion, adoptée maintenant universellement, nous est devenue si familière qu'on oublie combien son introduction a permis de mieux poser les problèmes fondamentaux de la Géométrie différentielle locale et globale. Comment imaginer sans elle la théorie des singularités des applications différentiables et René Thom a maintes fois répété qu'il avait beaucoup profité de ses contacts avec Ehresmann. Pour un bon exposé d'ensemble, on pourra lire l'exposé d'Ehresmann au Colloque de Topologie de Strasbourg de 1953 : "Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie".

Ehresmann remarque par exemple que la variété des r-repères (jets d'ordre r des cartes locales à l'origine) sur une variété V est un fibré principal $H^r(V)$ ayant pour groupe structural une extension de groupe linéaire par un sous-groupe contractile. Ainsi on n'obtient pas de nouvelles classes caractéristiques en considérant les repères d'ordre supérieur à 1. Cependant $H^r(V)$ possède une structure supplémentaire qui provient du fait que tout difféomorphisme local de V se *prolonge* en un difféomorphisme local de $H^r(V)$.

Dans ce nouveau langage, Ehresmann définit un système différentiel comme un sous-espace de l'espace des jets d'ordre r , et il définit leurs prolongements. Il donne aussi une définition d'un pseudogroupe de Lie en termes du groupoïde de ses jets d'ordre r (théorie développée dans la thèse de Melle Libermann). Il démontre qu'un pseudogroupe de Lie de type fini sur une variété compacte simplement connexe provient par localisation d'un groupe de Lie de transformations, et qu'en général le plus grand groupe de transformations contenu dans un pseudogroupe de Lie de type fini est un groupe de Lie (théorème démontré en 1955 et publié aux C.R.A.S. Paris 246, 1958, p. 360).

C'est en 1952 qu'Ehresmann commence à jeter les bases d'une théorie des structures locales qu'il publie dans un article paru en 1954 dans les Annali di Mate. (Serie IV, 36, p. 133-142). L'exemple typique est celui d'une structure définie par un atlas compatible avec un pseudogroupe de transformations (dans son exposé au Colloque de Topologie de Paris en 1947, Ehresmann avait déjà précisé la définition d'un pseudogroupe de transformations en ajoutant l'axiome de réunion et de localisation aux axiomes donnés par Veblen et J.H.C. Whitehead dans leur livre "The foundations of differential Geometry", 1932).

A la fin de cet article, comme application de la notion de *jet local*, il donne une démonstration remarquablement simple et élégante du fait qu'un espace localement homogène de Lie compact et simplement connexe est isomorphe à un espace homogène de Lie (théorème qu'il avait déjà démontré en 1936 dans sa conférence sur les espaces localement homogènes, Enseignement Math. 5-6, 1936).

C'est un bel exemple d'un cas où l'introduction de concepts appropriés rend une démonstration tellement transparente qu'elle paraît triviale. On pourra évaluer le chemin parcouru et les progrès de la terminologie en se reportant au livre de Veblen-Whitehead cité plus haut et à l'article de J.H.C. Whitehead : "Locally homogeneous spaces in differential Geometry", Ann. of Math. 33, 1932.

Ehresmann montrait plus généralement dans ses cours en 1955 qu'à toute variété X localement isomorphe à une variété B munie d'un groupe G de transformations analytiques, on pouvait associer un homomorphisme Φ du groupe fondamental π de X dans G (appelé l'holonomie), et une immersion f du revêtement universel $\tilde{X}$ de X dans B, équivariante relativement à l'action de π sur X et sur B via Φ. A ma connaissance, il n'a pas publié ce théorème qui a été redémontré plus tard par plusieurs auteurs.

Je terminerai cette analyse par quelques remarques générales.

Dans ce qui précède, si les mots "notions" et "définitions" reviennent constamment, c'est qu'Ehresmann a consacré presque tous ses efforts à forger des concepts adéquats nouveaux et créer une terminologie suggestive plutôt qu'à démontrer des théorèmes techniquement difficiles. Dans presque tous ses écrits (sa thèse mise à part), il se contente d'esquisser les démonstrations et d'illustrer les définitions générales par quelques exemples, laissant à d'autres le soin de prospecter en profondeur. Il aimait répéter qu'il travaillait pour la trivialisation des mathématiques, voulant dire par là que son but était de trouver un cadre si bien adapté que les démonstrations deviennent évidentes. Il ne faut pas cacher le danger à la longue de cette philosophie, mais ses idées générales ont été une source d'inspiration remarquable pour des élèves qui avaient le goût du concret, tel que Feldbau, son premier élève, disparu tragiquement pendant la guerre, Reeb ou Wu Wen Tsun.

Ehresmann organisa à Strasbourg de 1945 à 1953 une série de colloques qui attirèrent un très grand nombre de mathématiciens étrangers, en particulier beaucoup de jeunes. Ces rencontres contribuèrent grandement à rapprocher les mathématiciens européens après la guerre. Dans son Séminaire de Topologie, la participation internationale était très large et à Paris, il continua d'accueillir de multiples visiteurs dans son Séminaire de Topologie et Géométrie Différentielle.

Ehresmann avait une personnalité rayonnante et généreuse. Son oeuvre écrite ne reflète que partiellement la richesse de sa pensée mathématique qu'il aimait partager avec ceux qui l'entouraient.

Département de Mathématiques
Université de Genève
GENEVE. SUISSE

GAZETTE DES MATHEMATICIENS
Société Mathématique de France
n° 13, Février 1980, pages 45-47

X

SUR LES STRUCTURES LOCALES DE C. EHRESMANN
par Jean BENABOU

De l'œuvre scientifique, si riche, de C. Ehresmann, je voudrais aborder brièvement l'un des thèmes.

On m'excusera, j'espère, de donner un ton personnel, et un peu passionné, à ce témoignage.

Dans les années 1955-57, C. Ehresmann introduisait et étudiait la notion de structure locale. Comme toutes les notions vraiment fondamentales, celle-ci était *simple*, d'une grande *élégance*, et *pleine de possibilités*.

C. Ehresmann partait de la remarque, évidente, que pour toutes les notions touchant au recollement et à la localisation, les points de l'espace topologique n'intervenaient pas : si deux espaces X et Y sont tels que les ensembles ordonnés *Ouv*(X) et *Ouv*(Y) sont isomorphes, les catégories de faisceaux sur X et Y le sont aussi.

Ce qui, en 1955!, était beaucoup moins évident c'est :

(i) de dégager parmi les propriétés des ouverts, la structure indispensable pour faire de la "topologie sans points" : celle de treillis local ou de Brouwer (i.e. ensemble ordonné, complet pour l'ordre, et tel que

$$x \wedge \bigvee_i y_i = \bigvee_i x \wedge y_i \text{).}$$

(ii) Surtout d'avoir l'intuition qu'une telle notion, mis à part sa simplicité, pouvait être plus qu'une simple curiosité et une généralisation sans portée mathématique réelle.

(iii) Enfin, de mener à bien, tout seul, et très vite, les constructions fondamentales : faisceau associé à un préfaisceau, champ associé à un préchamp (sous le nom de complétion qui n'est pas plus mauvais qu'un autre!), topologie sur un treillis local, etc...

On objectera, sans doute, que les topologies et topos de Grothendieck généralisent ces notions.

Mais d'une part ils sont postérieurs, et d'autre part leur introduction ne diminue en rien l'intérêt et l'importance du cas particulier considéré par C. Ehresmann, bien *au contraire*.

1. Un théorème dû à Barr montre qu'il y a "suffisamment" de treillis locaux : i.e. tout topos de Grothendieck est "quotient" d'un topos de faisceaux sur un treillis local. En clair, cela signifie que : une propriété est vraie pour tout topos de Grothendieck ssi elle l'est pour ceux de C. Ehresmann.

Il convient à ce sujet de noter que l'affirmation analogue pour les espaces topologiques est fausse. L'exemple, attribué à Deligne, d'un topos sans point, est une évidence dans le cadre des structures locales, et c'est même, d'une certaine façon, la motivation majeure de C. Ehresmann pour l'introduction de ces structures.

Le théorème de Barr vient d'être précisé par Tierney et Joyal, qui montrent que tout topos de Grothendieck est même un "conoyau" par l'action d'un groupoïde dans la catégorie des treillis locaux.

2. Un grand nombre de travaux sont en cours actuellement sur les treillis locaux par des gens qui connaissent bien les topos de Grothendieck (Johnstone, Tierney, Joyal, Mulvey, ...). Leur point de vue, celui d'Ehresmann en 1955, est de les regarder comme espaces topologiques sans points et de se poser des questions du type : compactification, connexité locale ou globale, etc.. . Leur ignorance du travail d'Ehresmann les conduit parfois à "retrouver" des résultats obtenus par lui il y a plus de vingt ans.

3. La notion de modèle Booléen en logique classique, ou celle plus récente de modèle "Brouwérien" en logique intuitionniste, sont en rapport très étroit avec les treillis locaux.

4. Tout l'aspect "pseudogroupe" dans les treillis locaux, abondamment étudié par C. Ehresmann n'est pas encore exploité. Nul doute que d'ici un certain temps quelque chercheur retrouvera, dans un langage bien sûr conforme à la "mode du jour", une partie de ces notions et de ces résultats.

D'autres, mieux que moi, pourront montrer dans bien des domaines le rôle de précurseur de C. Ehresmann, et l'importance des idées qu'il a introduites. Une caractéristique très évidente : elles vont à l'*essentiel* tout en étant très simples et naturelles, et une fois dégagées elles font très vite partie de ce que "tout le monde doit savoir".

Qu'il me soit permis, pour terminer, d'aligner à ce sujet quelques *mots*, qui sont autant de jalons : espaces fibrés, jets, connexions, feuilletages, holonomie, et ... structures locales.

ADDENDUM (écrit en 1984, pour ce volume).

Depuis la parution de cet article de très nombreux travaux sur les treillis locaux ont vu le jour.

Il serait fastidieux de citer même les plus saillants, mais il est difficile de passer sous silence le livre important de P. Johnstone :

Stone spaces, Cambridge University Press (1982),

qui fait un point assez complet sur l'état actuel de la théorie, fournit une bibliographie très détaillée, et donne à la fin de chaque chapitre une note historique montrant quelles ont été les étapes et les contributions principales.

Dans ce livre le rôle essentiel des treillis locaux est mis en évidence. Notamment le fait qu'ils fournissent un cadre naturel et suffisamment large pour que certains phénomènes "déplaisants" dans la catégorie des espaces topologiques y trouvent une explication et une solution plus satisfaisante.

L'auteur y souligne que c'est à C. Ehresmann que revient l'idée de considérer les treillis locaux comme des espaces topologiques généralisés et de les étudier comme tels. Il mentionne aussi certaines de ses contributions à cette étude (e.g. le théorème de Tychonoff pour les treillis locaux démontré en 1957, et "retrouvé" plusieurs années plus tard par d'autres).

Mais ce livre axé sur les théorèmes de dualité "à la Stone" ne rend que partiellement compte des idées d'Ehresmann. En particulier le fait que l'aspect "recollement" (i.e. faisceaux et champs) était tout à fait présent dès 1957 et constituait même une des motivations essentielles pour l'étude des structures locales ne semble pas avoir été perçu.

Bien d'autres idées de C. Ehresmann sur ce sujet n'ont encore été que très partiellement exploitées et je suis convaincu que la publication de ses oeuvres complètes sera une source d'inspiration des plus précieuses pour de nombreux travaux futurs.

Département de Mathématiques
Université Paris-Nord
Av. J. Baptiste Clément
93430 VILLETANEUSE

GAZETTE DES MATHEMATICIENS
Société Mathématique de France
n° 13, Février 1980, pages 37-43

XI

SUR LES CONTRIBUTIONS DE CHARLES EHRESMANN A LA THEORIE DES CATEGORIES

par René GUITART

Dans un prochain numéro des "Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle", on trouvera une bibliographie complète des travaux de C. Ehresmann, comprenant environ 120 titres, parmi lesquels 60 - publiés ces 20 dernières années - sont consacrés à la théorie des categories ; voici quelques indications sommaires sur cette dernièere partie de ses travaux.

I. Vers 1957 les recherches d'Ehresmann l'ont amené à considérer comme fondamentale la notion de structure locale, c'est-à-dire de structure définie par la donnée d'un atlas complet compatible avec un pseudogroupe de transformations. Il développe cela ensuite avec, par exemple, l'étude systématique de diverses extensions de l'idée d'atlas, comme ce qu'il appelle fusées et superfusées, dans le cadre général des groupoïdes inductifs et *catégories ordonnées* (i.e. catégories dont l'ensemble des morphismes est ordonné de sorte que la composition des morphismes, et les applications "domaine" et "codomaine" soient croissantes - cf. § 4). Le théorème qu'il juge principal à ce sujet est ce qu'il appelle théorème d'élargissement complet d'une espèce de structure locale ou plus généralement d'une catégorie ordonnée inductive au-dessus d'une autre : ainsi, très particulièrement, en appliquant ce théorème à la catégorie des applications C^n entre ouverts d'espaces numériques R^p on obtient la construction de la catégorie des variétés C^n.

Cette partie des travaux représente plus de 700 pages dans lesquelles il est fructueux de lire aujourd'hui l'éclairage original qu'Ehresmann a donné sur les questions de faisceaux, algèbres de Heyting (qu'il appelle treillis locaux, et qui sont maintenant d'actualité dans les travaux de théorie des topos sous le nom de "locale"), et sur l'holonomie et la cohomologie des catégories ordonnées. (A ce sujet il introduit comme outil les "catégories d'opérateurs sur les catégories", qu'il appelle "espèces de morphismes", et qui ne sont rien de plus que les fibrations scindées de Grothendieck, mais sous la forme adéquate à "l'internalisation", que l'on pratique maintenant couramment, dans un topos par exemple.)

2. Dans le but probable de couvrir aussi le cas des structures locales, en 1960 Ehresmann pense à itérer transfiniment la méthode de Bourbaki de description des espèces de structures par schéma de construction d'échelon, et il obtient ainsi la catégorie des foncteurs types, introduisant en même temps pour la première fois la 2-catégorie des transformations naturelles entre foncteurs. Les catégories ordonnées et la 2-catégorie des transformations naturelles sont des exemples de *catégories doubles,* dont Ehresmann donne la définition en 1961. Il donne l'exemple de la catégorie double des carrés commutatifs d'une catégorie fixée, et surtout le cas de la catégorie **Q(Cat)**, dont les 2-blocs sont de la forme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "P"'] & Y \arrow[d, "S"] \\
X \arrow[r, "R"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow t"] & B
\end{tikzcd}$$

avec P, Q, R, S foncteurs, t : R.P → Q.S transformation naturelle.

Plusieurs auteurs ont mis l'accent sur le cas particulier important de catégories doubles que sont les 2-catégories. En fait, si à la place de **Cat,** on prend une 2-catégorie abstraite $\underline{C}$, on peut, en considérant comme 2-blocs les quintettes (P, Q, R, S ; t), avec P, Q, R, S des 1-morphismes de $\underline{C}$ et t : R.P→ S.Q un 2-morphisme de $\underline{C}$, obtenir une catégorie double **Q**($\underline{C}$). Il est remarquable que dans le dernier article qu'Ehresmann publie (avec sa femme Andrée Ehresmann, en 1979) on trouve ce théorème suivant lequel toute catégorie double se plonge dans une catégorie double de la forme **Q**($\underline{C}$).

3. Dans plusieurs textes et cours, Ehresmann a très clairement décrit sa conception de la Géométrie Différentielle (comprise en particulier avec les outils introduits antérieurement par lui-même : espaces fibrés, G-structures, calculs des jets, prolongements infinitésimaux, connexions) comme essentiellement l'étude des *catégories* C *différentiables,* et fondamentalement de la catégorie différentiable des jets (ayant pour objets les germes de variétés et pour morphismes les jets infinitésimaux d'ordre n fixé de germes d'applications C^n entre ces objets). Par exemple, pour lui un espace fibré consiste avant tout en un groupoïde différentiable ayant pour objets les fibres, pour morphismes des difféomorphismes entre ces fibres (rappelons qu'un groupoïde est, suivant la définition donnée en 1926 par H. Brandt, la même chose qu'une catégorie dont tous les morphismes sont inversibles). De ce point de vue, les prolongements de variétés, d'espaces fibrés, deviennent des prolongements de catégories différentiables particulières, et on les obtient par simple application des foncteurs jets.

4. Catégories ordonnées, topologiques, différentiables, doubles, sont des cas particuliers d'objets catégories internes à une catégorie C, et dans ces cas (où donc

C = **Ord, Top, Diff** ou **Cat**)

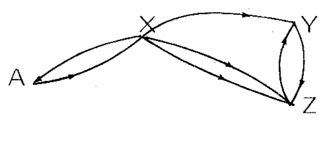
on dispose de plus d'un foncteur U : C → **Ens.** Ehresmann préfère alors parler de *catégorie* U-*structurée* la notion de catégorie interne ne se dégageant que plus tard (sous le nom de catégorie structurée généralisée), en "oubliant le foncteur d'oubli" U.

Ehresmann a découvert la bonne définition universelle du quotient X/r d'un objet X de C par une équivalence r sur U(X) : c'est ce qu'il appelle le U-*quasi-quotient* de X par r. Dans le cas où X est une structure algébrique, $X/r = X/\hat{r}$, le quotient de X par la relation d'équivalence compatible avec la structure algébrique en question engendrée par r (notée $\hat{r}$). De manière semblable il introduit la notion de U-sous-structure $\bar{A}$ de X engendrée par une partie A de U(X). Il étudie ensuite les catégories U-structurées essentiellement à l'aide de ces deux outils. Dans le cas spécial C = **Cat,** il obtient, avant Gabriel-Zisman, des résultats très précis sur le calcul des catégories de fractions. Toutefois, ces résultats, sous la forme où ils sont repris dans "Catégories et Structures", Chapitre 5, sont difficilement reconnaissables : il faut lire dans le texte original paru en 1961. Dans le cas C = **Top,** il reprend de nombreux résultats sur les groupes topologiques et les adapte aux catégories topologiques. Cela donne en 1966 trois articles directement accessibles /92/.

5. En 1966, non informé des travaux (inédits à cette époque) de Gabriel-Ulmer, Ehresmann introduit les *esquisses*, très voisines des catégories marquées de Chevalley, puisque ce sont des "graphes multiplicatifs" marqués de cônes, il n'explicite pas du tout le lien avec les sites et catégories de faisceaux, car il faut dire que son point de vue est tout autre que celui de Grothendieck. En effet, Ehresmann n'aime pas travailler "hom par hom" avec l'outil fondamental qu'est le Lemme de Yoneda (voir néanmoins § 6) et il préfère toujours les calculs et descriptions "dessinées" par de petits diagrammes bien visuels. Cela se rattache probablement à sa formation en Topologie Algébrique, et se voit jusque dans sa manière de représenter les diagrammes dans les catégories. Par exemple là où tout le monde écrirait :

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl] \arrow[r] \arrow[dd, equal] & Y \arrow[dd, shift left] \\
A \arrow[dr] & & \\
 & X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & Z \arrow[uu, shift left]
\end{tikzcd}$$

il écrit



Ainsi, pour lui une catégorie est d'abord un graphe orienté, plus une loi de composition des paires de flèches consécutives ; vers 1965 cela fait une différence entre lui et les autres catégoriciens, différence conceptuelle, à laquelle s'ajoutent des différences de notations : Il emploie

(F, f, E) pour $f: E \to F$,
α et β pour "dom" et "codom",
$e'.C.e$ pour $\mathrm{Hom}(e, e')$.

Avec parfois le choix d'une terminologie à l'apparence "provisoire" (comme plus haut le terme "quasi-quotient") pour des concepts au demeurant simples et excellents, cela a certainement contribué à une mauvaise diffusion des travaux catégoriques d'Ehresmann jusqu'en 1970 environ. Mais revenons aux esquisses.

Il existe une esquisse S_{Cat} (à savoir le début de la catégorie simpliciale) telle que la catégorie **Cont**(S_{Cat}, **Ens**) des foncteurs continus de S_{Cat} vers **Ens** soit équivalente à **Cat.** Alors les catégories U-structurées, avec $U : C \to$ **Ens**, sont précisément les objets de

Cont(S_{Cat}, C)

et beaucoup de résultats à leur sujet sont encore valables lorsque S_{Cat} est remplacée par une autre esquisse S, décrivant un autre type de structure.

La définition d'Ehresmann de foncteur adjoint (comme "éjecteur") est moins agréable que celle de Kan ; d'un autre côté, il travaille toujours sous la forme "locale" (= existence d'obje libre), ce qui est la manière naturelle de construire les adjoints. Travaillant avec des univers de Grothendieck emboîtés, il donne en particulier un théorème de structures libres dont la preuve est une imitation des constructions de compactifications ou complétions en Topologie (avec $U : C \to$ **Ens**, la U-structure libre sur E est

$$\mathrm{im}\left(E \xrightarrow{\text{cano}} \prod_{E \to U(Y)} Y \right).$$

Dans le même esprit, il construit le "type" associé à une esquisse, diverses complétions de catégories et catégories structurées, de foncteurs et foncteurs structurés. Ces derniers résultats semblent maintenant intéresser beaucoup de gens, les catégoriciens allemands en particulier.

6. A côté des catégories structurées, l'autre manière d'enrichir les catégories, hom par hom, intéresse néanmoins Ehresmann (ainsi, dans son cours de Maîtrise de 1967-68, il donne à un moment une présentation personnelle des catégories additives et de l'algèbre homologique). Et même, inspiré surtout d'exemples venant de l'Analyse (e.g., catégories où les homs sont des espaces de Banach, ou de Fréchet, ...) il donne dans des cas particuliers la définition de *catégorie dominée*, dont la "bonne" formulation viendra plus tard (1965) avec la notion de V-catégorie (Eilenberg-Kelly). Dans les articles qu'il publie à partir de 1972 avec sa femme, il adopte la terminologie des V-catégories et des catégories monoïdales fermées, et aussi, progressivement, les notations des autres catégoriciens. Dans l'article de 1972 intitulé "Catégories of sketched structures" /115/, après avoir présenté la théorie des esquisses sous une forme très simple, il donne les principales méthodes pour obtenir des enrichissements et des produits tensoriels sur les catégories de la forme **Cont**(S, **Ens**). Cela constitue une belle illustration de la méthode des esquisses. Et l'étude du cas $S = S_{Cat} \otimes n$, c'est-à-dire l'étude des catégories n-uples, avec en particulier les notions de limites "relâchées" ou lax-limites (très voisines des limites homotopiques) dans les catégories doubles, est développée dans quatre articles qui se suivent de 1974 à 1979 /117, 119-121/, et constituent un véritable livre.

Nous nous sommes limité ici à un survol rapide, et le lecteur voulant en savoir davantage trouvera en référence une sélection de textes d'Ehresmann directement lisibles.

L'influence exercée par cette oeuvre, aussi bien sur certains mathématiciens étrangers que sur les nombreux élèves qu'Ehresmann a dirigés et accueillis dans son Séminaire, a été très grande, et l'on connaît déjà certains perfectionnements ou prolongements d'idées ou de thèmes inventés ou travaillés par Ehresmann ; sur cela il serait utile de donner des explications (comme première indication signalons que, en théorie des catégories, Andrée et Charles Ehresmann ont fait préparer une quarantaine de thèses de troisième cycle et une dizaine de thèses d'Etat). Rappelons aussi que, en 1965, un prix de l'Académie (le prix Petit d'Ormoy) a été décerné à Ehresmann, pour ses travaux en théorie des catégories. Aujourd'hui, on peut voir dans ses travaux une évolution très nette de problèmes particuliers vers des problèmes de plus en plus généraux, avec dans les 4 derniers articles un retour, à l'aide d'outils plus puissants, vers les problèmes sur les catégories doubles des années 1960-63. Mais le retour aux structures locales et à la Géométrie Différentielle, source des préoccupations catégoriques d'Ehresmann, reste à accomplir. En réalité, il n'est pas sûr qu'Ehresmann lui-même ait désiré à toute force prouver l'"utilité" - fusse par rapport à ses motivations originelles des années 1955-1960 - des théories qu'il développait (souvent librement, pour leurs propres beautés). Très certainement l'intérêt en soi de la théorie des catégories naissante, et ses relations avec de nombreux autres domaines des Mathémtiques, le passionnaient et motivaient aussi profondément. Cela est particulièrement clair si l'on se rappelle ce qu'il disait de l'art mathématique : "le mathématicien est engagé dans la poursuite d'un rêve sans fin, dont la traduction en formules précises exige un effort extraordinaire. (...) Je ne crois pas qu'un mathématicien voit dans cette efficacité (dans les applications pratiques) la justification de ses efforts, car le vrai but de son rêve perpétuel est de comprendre la structure de toute chose".

RÉFÉRENCES.

Les titres des travaux de C. Ehresmann sont remplacés par les numéros correspondants dans la Liste des Publications située au début de ce volume.

1. Articles /39, 47, 75, 86, 110/.
2. /52, 59/.
3. /78, 101, 116/.
4. /66, 100, 93, 122 (chapitre V), 92/.
5. /106, 115, 108, 117, 119-121/.

U.E.R. de Mathématiques
Université Paris 7
2 Place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05.

SEMINARBERICHTE 7
FernUniversität Hagen 1980

XII

CHARLES EHRESMANN
*by Andrée CHARLES EHRESMANN**

I have been deeply moved by your idea of dedicating this meeting to my husband. Please excuse me if this talk is somewhat informal, and if my english (which has never been very good) is particularly awful. But my husband died only one month ago, after a year long illness during which he needed incessant care. In any case, it would not have been possible for me to speak objectively about Charles, since we have been so closely related for so many years.

Hence this talk will be melting Mathematics and more personal recollections ; but this is not too inadequate in a Category meeting, our life having been completely devoted to Mathematics, and more precisely to Category Theory and its Applications. Even as he was very ill, Charles often repeated that he wanted to do Mathematics ; he still said it during the two days of wakefulness which preceded his death.

1. His liking of travels.

The first thing that striked me when we met in 1957 was his marvelous blue eyes which, up to the end, kept their childish look. These eyes twinkled particularly when he spoke of his travels for mathematical purposes (we almost never took vacations, the last one being in 1966 when we toured the United States in Greyhound buses, talking about Mathematics most of the time).

For his first "mathematical" journey, he spent some months at Göttingen, to study with Hermann Weyl. His thesis was written in Princeton, where he was a Procter Visiting Fellow from 1932 to 1934.

In the fifties, he was proud of his about half year long lecturing in foreign universities ; most of the papers written at that time begin with a long list of towns in which he had given talks on the subject, and I gently teased him for that.

He was very attracted by the oriental thinking he had just

* This is the text of the talk given by A. C. Ehresmann at the Category meeting of Arnsberg, on October 27, 1979.

discovered in India and Iran ; for him the most beautiful monument was the Tadj Mahall and (later on, in 1972) we converted ourselves to vegetarianism. He hoped to have an opportunity to visit China.

Up to 1966, we had some other long trips in America. Afterwards we prefered to stay in Paris or in Amiens partially because the **Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle** took more of our time (they became a quaterly Journal in 1967, as explained in /139/ *). But he liked to dream in front of maps, and one of the last times we went out we were looking for a new atlas. In fact, the only non-mathematical books he perused in his last years were atlasses and the **Annuaire de l'Association des anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieure** (he remembered his years at the Ecole Normale Supérieure d'Ulm with a great fondness, and our last travel to Paris in May 1978 was for the yearly "pot de la promotion").

2. His conception of Mathematics.

Though always serene (I almost never saw him out of temper), he had a communicative passion for Mathematics. His lectures (generally informal) were often followed by long discussions which inspired a great number of mathematicians.

We had many talks about the essence of Mathematics, especially in Kansas in 1966 where the paper "Trends toward unity in Mathematics" /94/ was written. He said that I was a Platonist since I think that the motivation for research work is the quest for the pre-existing idea (in Plato's sense) of a structure ; while for him discovery was an entirely free creation, the value of which lies in its possible expansion. We both agreed that Mathematics is an Art as well as a Science (perhaps more than a Science). And this thought was always his : he already exposed it to his pupils in the year he spent at Rabat as a secondary-level teacher in 1928-29 ; he was reminded of this by one of these pupils met fortuitly in a bus in Paris some 40 years later! (He had asked to go to Rabat to "take a vacation" before undertaking research work, as he explained to me).

Charles was also interested in the History of Mathematics. He wrote a paper "Archimède et la Science moderne" /56/ for the commemoration of the Archimedes's 2.000 th anniversary in Syracuse. One of the Greek mathematicians he most admired was Eudoxus, for his theory of ratios so similar to the Dedekind's definition of real numbers. From 1975 to 1978 he gave a course on the history and foundations of Mathematics in Amiens, in which he tried to show how the deep structure of the notions was gradually revealed. His last lecture was on December 4,

* The numbers between / / refer to the "Liste des Publications" at the beginning of this volume.

1978, the day before he fell on the street and could not deny his illness any more.

3. His former works.

On our first rendez-vous, he introduced me to his works on Topology and Differential Geometry (he was then considered as one of the best geometers).

His thesis /4, 8/ on the topology of homogeneous spaces (in 1934) was prepared under the direction of Elie Cartan, for whom he had a great admiration. Very modestly, he often said that many of his ideas were implicit in Cartan's works (but I could not find these ideas in the papers he showed me).

In Clermont-Ferrand during the war he introduced fibre bundles /14-18, 20/ apart from Steenrod (the communications between France and the U.S.A. being then broken), and he used them in the early fifties to develop a beautiful theory of jet bundles, prolongations of manifolds and higher order connections /22-24, 26-38, 40-44, 46, 48, 51/. He also defined foliated manifolds /19, 21, 30/ and more general foliations /45/. While we were in Montréal in August 1961, a long paper /54/ was written, full of important results (e. g. stability theorems for topological foliations, holonomy groupoids, "unspreadings" of a foliation, a theorem on transverse foliations,...), but this paper is often ignored by the specialists, since it was not reviewed in the **Mathematical Reviews.**

Charles was also eager to learn new things and I had no difficulty in coinvincing him of the beauty of the geometry of topological linear spaces and of infinite-dimensional polyhedrons /49/ on which I was preparing a thesis (*) under the direction of G. Choquet. In memory of these first discussions, there is an icosahedron on our grave (as well as the sketch of categories).

4. How Charles came to categories.

Long before knowing category theory, he had to use groupoids (i. e. categories in which all the morphisms are invertible). Oddly enough, groupoids, which were defined by Brandt in 1926 (**), are often called Ehresmann's groupoids ; and this somewhat irritated us since so many notions introduced by my husband are attributed to others or considered as "universal knowledge" (as jets).

Indeed, groupoids intervene in fibre bundles theory in two different ways :

A. Actions of a topological groupoid.

Denote by E a fibre bundle. The isomorphisms from fibre to

* "Polyèdres convexes dans les espaces vectoriels topologiques", Cahiers Top. et Géom. Diff. 1 (1957-58).

** "Ueber eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes", Math. Ann. 96 (1926), fibre form a groupoid, which is equipped with a topology compatible with the maps domain, codomain, composition and inversion. This gives a topological groupoid (in the sense : internal groupoid in the category **Top** of topological spaces), which acts continuously on the topological space E. This topological groupoid G satisfies the axiom :

(LT) For each object, say x, of G (identified with a point of the base B of E), there exists a local section $s: U \to G$ of the codomain map on a neighborhood U of x such that $s(y): x \to y$ for each $y \in U$.

Conversely, to a topological groupoid satisfying (LT) (called a locally trivial groupoid) naturally corresponds a principal fibre bundle, and to its actions, the associated fibre bundles. This defines an equivalence from the category of fibre bundles to the category of actions of locally trivial groupoids (*). In this setting, connections, prolongations of manifolds,... are very easily defined.

More generally, the jets between all germs of manifolds form a (big) differentiable category (i.e., internal category in the category **Diff** of differentiable maps) and Charles described Differential Geometry as the study of this category and of the actions of its subcategories /116/.

This "categorical" point of view is indicated in a series of very concise papers from 1958 to 1969 /50, 78, 101, 103, 105, 111/. Charles always thought of writing a book on this subject, and he regretted to have spent so much time in Bourbaki's team in the fourties instead of developing his own ideas.

B. Local structures.

Fibre bundles may also be defined by atlasses "gluing together" products, the transition functions between charts being compatible with the action of the structural group on the fibres. To unify the treatment of structures defined by such a "gluing together" process (as are topological or differentiable, analytic, foliated manifolds,...), Charles introduced the notion of local structures, which are those structures defined by an atlas compatible with a pseudogroup of transformations (i. e., a subgroupoid of the groupoid of homeomorphisms of a topological space whose set of morphisms, equipped with the "restriction" order, satisfies conditions turning it into a "local groupoid").

Improving his earlier results /36, 39/ he wrote the paper "Gattungen von lokalen Strukturen" /47/. During the correction of its proofs in 1958, I learnt the fundamentals of Category Theory... and also a little German. (Charles, whose first language was German, always discouraged me from studying Goethe's language saying that he could translate it for me and that it would be more useful to learn something he did not know.)

This paper was the starting point of many of the subsequent papers on discrete fibrations and extensions of functors, on ordered categories and "local completion" theorems. Perhaps it will be clearer to see how all these questions occur on an example.

To define, say, differentiable manifolds, the problem is

* Cf. Pradines's comments.

decomposed as follows : Let $P_B : \mathbf{Diff}_B \to \mathbf{Top}$ be the forgetful functor from the groupoid of diffeomorphisms between open subsets of a Banach space B ; it is a discrete fibration (defined by a "species of structures") over a subgroupoid of the groupoid $\mathbf{Top}_g$ of all homeomorphisms.

1° Enlargement of the species of structures : P_B is "universally" extendded into a discrete fibration $P : D \to \mathbf{Top}_g$, which is defined "pointwise". In modern terms P is the discrete fibration associated to the Kan extension, along the insertion toward $\mathbf{Top}_g$ of the **Set**-valued functor associated to the discrete fibration P_B.

2° Local completion of a local functor : On D there is an order deduced from the "restriction order" on $\mathbf{Diff}_B$. With this order, D becomes a local groupoid (i. e., essentially, an internal groupoid in the category of distributive complete $\wedge$-lattices). However D is not (order-)complete over **Top**, in the sense that there exist $\wedge$-compatible families $(A_i)_{i \in I}$, of objects of D (i. e.,

$$P(A_i \wedge A_j) = P(A_i) \cap P(A_j) \quad \text{for each } i, j \in I)$$

which have no upper bound in D. The process of "local completion" consists in adding such upper bounds. It leads from P to the forgetful functor from the groupoid of diffeomorphisms between manifolds modelled on a Banach space. In fact, this step amounts to construct, over each topological space T, the sheaf associated to the presheaf determined by P_B over T.

3° Extension of a functor : To get the category of differentiable manifolds, an analogous completion process is applied to the category of differentiable maps between the objects of $\mathbf{Diff}_B$. This construction is well described in /110/.

5. Structured categories.

As Charles came to categories from groupoids and to groupoids from groups, he "felt" a category as a (small) set, equipped with a partially defined composition, rather than as a (big) class of sets Hom(E, E') (which is more usual when categories of structures are first considered). Hence it seems natural to equip the "set" of morphisms of a category with some kind of structure, compatible with the maps domain, codomain and composition, as in the two preceding examples (a topology in the case A, a "local order" in the case B).

In 1963 these reflections led to the definition of a P-structured category, where $P : H \to \mathbf{Set}$ is a forgetful functor. In modern terms, it is an internal category in H ; but we thought of it as the data of a category C and of an object S of H sent by P to the set of morphisms of C in such a way as :

1° The maps domain and codomain "lift" into morphisms from S to a subobject of S,

2° The map composition "lifts" into a morphism toward S from a P-subobject of the product SxS.

Hence the necessity of defining P-subobjects /60, 66, 67, 69/. (Oddly enough, it is the dual notion of quotient object /66/ which led us to the notion of a reflection of a category into a subcategory /66/ and, more generally, to the notion of a free object, via the construction of a comma category ; this did not simplify the exposition of several papers where adjoint functors are used in this way!).

We marveled at the number of important examples which were unified :

1° Topological categories, introduced in /50/, whose general theory is developed in /92/ ; in this paper, classical results on the uniform structure of topological groups are adapted to "microtransitive categories" (using quasi-uniform structures, which are a "localization" of uniform spaces), and prolongations of (quasi-)topological categories /81/ are constructed.

2° Differentiable categories (see § 4).

3° Double categories (internal categories in **Cat**) /57, 58, 63, 64, 117/, whose first example was the 2-category of natural transformations (already introduced in the paper "Catégories de foncteurs types" /52/ written while we were in Buenos-Aires for a four months stay in 1959), the second one being the category of commutative squares /55/ of a category A (or "category of morphisms" of A). Notice that, in our latest paper /121/ (written during the summer of 1978, while Charles was already in poor health) we prove that all double categories "are" subcategories of the double category of squares of a 2-category (or double category of quintets in the terminology of /58, 64/).

4° Multiple categories, defined in /57, 63/, whose theory is developed in our last series of papers /119-121/ and for which theorems of existence of "lax limits" (very conveniently defined in this frame) are proved by a short "structural" method.

5° Ordered categories and their specializations such as local categories, which are considered in numerous papers (700 pages odd) /53, 55, 62, 68, 71, 75, 76, 85/ that should be read after the "Guide sur les catégories ordonnées" /86/. Among the main results, still to be exploited (I'll show it elsewhere, e. g. in relation with topos theory) are those concerning local jets and atlasses (as well as their generalizations : rockets and super-rockets) which are used to get (order-)completion theorems for ordered categories (e. g., to construct the complete holonomy groupoid of a foliation in /75/) and for ordered functors. They culminate in a theorem of complete enlargement of a local functor /110/, which generalizes the associated sheaf construction.

General theorems on structured categories are given in a series of papers from 1963 to 1969 /57, 63-66, 82-84, 88, 100, 102, 109/. For instance, to study the existence of colimits, we thought of constructing them as quotients of coproducts. But such quotients are scarce /65, 66/, even in **Cat** /61, 80, 91/. Hence the idea of defining quasi-quotient objects /82, 100/ ; fine constructions of quasi-quotient structured categories are made in /65, 82-84, 100/ and used to study a "non-abelian" cohomology. But in general only existence theorems may be obtained, and this led to develop theorems on existence of free objects /100, 102, 108/ in which the functor is "extended to a higher universe" instead of "restricted" like in the solution set condition of Freyd's Theorems.

These general theorems on P-structured categories require that P satisfies some "good" conditions, such as creation of some kinds of limits or colimits, existence of quasi-quotients, existence of a smallest subobject S' of an object S of H such that P(S') contains a given subset A of P(S) (⌐-generating functors), or such that P(S') = A (called ⌐-spreading functors). Hence arise the questions :

1° Is it possible to define classes of functors by some properties, e. g., functors "of a topological type" (=⌐-spreading functors admitting limits = topological functors in Herrlich's sense), or "of an algebraic type" (=⌐-generating functors admitting quasi-quotients) ; the word "algebraic" means here "partially defined compositions" (and not everywhere defined compositions, as in monadic functors)? We thought that one of the future task of the mathematician would be to study such classes (as explained in /94/), and this prevision seems right enough if for instance we look at the recent works of the german school.

2° If a functor is not "good enough", may it be extended universally in a good enough functor? The motivating example was the forgetful functor from **Diff**, which does not create kernels. This problem is tackled in /99, 107/, where universal completions of functors are constructed by transfinite induction. Here again the german school seems to carry on.

6. Sketched structures.

The idea of a category consists in the graph formed by its maps domain = α , codomain = β , and composition = κ ; and such a graph in **Set** determines a category if it satisfies axioms expressing associativity,

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "\iota"] & C \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[l, bend left, "\beta"] & C*C \arrow[l, "\kappa"'] \end{tikzcd}$$

unitarity and the fact that $C*C$ is the pullback of (α, β). This remark led to "isolate" the sketch of categories, whose underlying category is the full subcategory Σ_{Cat} of the simplicial category Δ with objects 0, 1, 2 and 3.

The realizations in a category H of this sketch are the internal categories in H (called generalized structured categories in /93, 104, 105/). Categories of internal categories are studied in /112, 113, 115/.

An internal category in H gives rise to a category object in Grothendieck's sense /104/, but the inverse is valid only if H admits pullbacks. So arised the question : may we universally add pullbacks to a category H, so that both notions coincide? To answer it, theorems of completion of categories by some types of limits or colimits were devised /102/. The completions were asked to be "universal up to isomorphisms" for some choice of limits ; the astonishing result is that they are also "universal up to equivalences" for all limits of the given type. Later on /115/ we extended this result, replacing the choice of limits by a "relational choice" (and then explicit constructions of the completion are necessary, for the existence theorems cannot be applied).

More generally, "algebraic structures" may be sketched by the data of a neocategory (graph, equipped with some partial composition) and of cones on it ; the corresponding structures (resp. internal structures in a category H) are the functors from the neocategory into **Set** (resp. into H) sending the cones onto limit-cones ; this is developed in /93, 98, 106/. The interest of taking a neocategory with cones instead of a category with limit-cones (for instance, Σ_{Cat}, instead of Δ) is to get a "finitely-presented" model. Completion theorems led from the sketch to the prototype (category with limit-cones) and to the type /114, 115/, which is the "complete" model (no more finitely presented).

Though categories of sketched structures are locally-presentable in the sense of Gabriel-Ulmer (whose work was published later on), the theory of sketches is fruitful in many problems. General theorems on sketched structures may be found in /106, 115/.

7. Discrete fibrations and enriched categories.

Motivated by fibre bundle theory where both topological actions of a locally trivial groupoid and local discrete fibrations are considered (cf. § 4), Charles defined in /47/ the notion of a category C acting on set S, the points of which are called structures, hence the name "species of structures" over C ; and he proved the equivalence between the notions : species of structures, discrete fibrations (called "foncteurs d'hypermorphismes" in /55/), functors toward **Set** .

Actions of categories may be defined by a sketch, so that internal actions in a category H are well-defined. They correspond to internal discrete fibrations in H (while the notion of a **Set**-valued functor cannot be internalized). They are considered in /59, 60, 64, 90/, but a general theory is not written yet, though we knew several results on them. The particular case of topological or differentiable species of structures, and of ordered species of structures, are studied in /50, 78, 101, 105, 75/. Topological fibrations were generalized into germs of fibrations for use in optimization problems (*).

To solve the problem of enlargement of a species of structures (mentioned in § 4 B), Charles did not extend the corresponding **Set**-valued functor (as in the more recent Kan extension theorems), but he took the situation "upside-down" and extended the discrete fibration into another one /47/. Then it is natural to replace the discrete fibration by any functor, and this led to the general theorems on extensions of functors /55, 72, 77, 79/ to which is devoted the fifth chapter of "Catégories et structures" /122/. These theorems also encompass the construction of categories of fractions (made for the first time, under the name of "perfectionnement d'une catégorie" in the Appendix of /55/, written during our stay in São Paulo in 1960). These extension theorems are "internalized" in /89, 90, 95, 96/.

Theorems on extensions of functors and on local completion of local functors were devised in such a way that they may be applied in Analysis to define distructures (**), which unify various concepts of "generalized functions" (Schwartz distributions, Sato hyperfunctions, Mikusinski operators,...) and give for instance "infinite-dimensional distributions"(***). The idea is to dissect the local definition of a distribution namely : the sheaf of distributions is the sheaf associated to the presheaf of "formal" derivatives of continuous functions. This led us to consider :

1° Enriched species of structures, called "espèces de structures dominées" in /64, 77, 122/, which are simply functors taking their values into a concrete category, and more particularly :

2° Species of morphisms (or functors toward **Cat**), to which the notions of crossed product of a group acting on a group and of crossed homomorphisms are adapted in /70/, giving rise to the (split) fibration associated to a functor toward **Cat**, and to its first cohomology class ; a general theory of non-abelian cohomology is developed in /73, 74, 91/ (but it may be much improved) ;

3° Enriched species of structures in the category of discrete fibrations and the special case in which all the fibrations have the same base which gives a pair of acting categories /77/ ; this notion is equivalent to that of a Bénabou's distributor ; when distributors are so considered as "double fibrations", their composition is similar to the composition of atlasses of a category /75/ ;

* A. Ehresmann, "Systèmes guidables et problèmes d'optimisation", *Labo. Automatique Théorique, Univ. Caen,* I à IV (1963-64).

** Idem, "Différentiablitité dans les espaces localement convexes; distructures, Thèse Univ. Paris, 1962.

*** Idem, "Sur les distributions vectorielles", as in *, 1964.

4° "Partial" actions of categories, called systems of structures /122/, enriched in a concrete category H, i. e., the fibres of the associated "partial fibration" are equipped with objects of H (e. g. for distructures, take H =the category of Banach spaces). A theorem on extension of an enriched system of structures into an enriched species of structures is given in /87/ (it is used to define the analogue of "formal derivatives").

An application of the notion of an enriched species of structures gives a special case of enriched categories : Let C be a category, $C^* \times C$ acts on the set of morphisms of C (where C^* is the opposite category), the corresponding **Set**-valued functor being Hom_C. To say that the action is enriched in a category H means that the sets $\mathrm{Hom}_C(E,E')$ are "naturally" equipped with objects of H ; this gives a way to add structures on a category, more adapted for "big" categories. Examples also occur in Analysis (e. g. enriched categories in the category of Banach spaces).

However, we did not come across the notions of a closed category **V**, and of a **V**-category, on our own, because we only thought of enriched categories in a concrete category. When we discovered Eilenberg-Kelly's paper (*) we extensively used monoidal closed categories. For instance, we constructed monoidal closed structures on general categories of sketched structures (/115/, Part II), on categories of internal categories /109, 112/, on categories of topological ringoids /118/, on the category of all multiple categories /119/ and on the category of n-fold categories /120, 121/.

8. Some critical comments.

It may seem weird that the 2.000 pages odd written in the sixties on Category Theory are almost unknown, although some of them are still quite original. But this is understandable : during this period, we had few relations with categorists, because Charles and I were essentially considered respectively as a Geometer and an Analyst (and anyway I was completely isolated from the world up to 1968). So we did not realize that most papers are difficult because of their abstraction, their heavy and unusual notations, their evolving terminology and their length (e. g. the important completion theorems of /102/ come after a first part devoted to very technical results). Moreover, we ignored notions that would have simplified the redaction, for instance adjoint functors are introduced as a complicated thing, general limits are used very late, and all the constructions are given "pointwise" because we had difficulties in "seeing" global results such as the Yoneda Lemma.

* Closed categories, *Proc. Conf. on Categ. Algebra, La Jolla,* Springer, 1966.

The book "*Catégories et Structures*" also badly influenced people against Charles : it was received as an unsuccessful general treatment of Category Theory, while in our mind it had to show how we felt Category Theory. Hence the deliberate omission of fundamental notions such as general limits, adjoints in the usual way,... (given in the Appendices). Also it includes very elementary parts beside deeper results (such as the ends of Chapter 2 and 3, and the Chapter 5) ; it comes from the fact that some parts were taken from mimeographed courses, and others from research papers. The aim of the book "*Algèbre*" /123/ (no more available) is much clearer.

From 1972 on, we gradually adopted a more usual terminology, and yet only our last series of papers is about standard on this point. Notice that we wrote less papers from 1970 to 1977 ; we had too many occupations then : teaching and administrative duties, direction of too big a research team (about 50 theses defended in 8 years!), entire publication of the "*Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*", organization of several meetings /142-144/. So we only could do personal research during the summer vacation. In 1977, for different reasons (in particular the refusal of a "3ième cycle" in Amiens), we found time enough for a true research work again.

To be sure that my husband's work will not be forgotten, I am going to publish (as "Supplements to the "Cahiers") a complete commented edition of Charles' work. The comments will explain not only how the ideas evolved, but how the use of modern tools allows to go further on these subjects. Indeed, Charles thought that the future is more important than the past, and he often said to me that it comforted him to think his work would be pursued after his death, thanks to the 30 years of age between us. But it might be too heavy a weight for me, and so I hope you will all help me to carry it on.

NOTE. Some biographical notes were added as an Appendix in the paper published in Seminarberichte 7 ; they are omitted here, as they are already included in the biographies at the beginning of each Part of these "Oeuvres".

XIII

LISTE DES THÈSES PRÉPARÉES SOUS LA DIRECTION DE CHARLES EHRESMANN

0. Conventions.

1. Le titre de la thèse est suivi des lieu et date de soutenance et, le cas échéant, du lieu de publication (totale ou partielle).

2. Abréviations :
CTGD = "Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle",
EM = "Esquisses Mathématiques" (Paris-Amiens).
P = Publié en partie seulement.

3. Les thèses précédées du signe * ont été préparées dans le cadre de l'équipe de recherche "Théorie et Applications des Catégories" (Paris-Amiens", avec A.C. Ehresmann pour rapporteur.

1. Doctorats d'Etat.

0. J. FELDBAU (déporté en Allemagne et mort en 1945), Thèse inachevée sur la Théorie des espaces fibrés et l'Homotopie (cf. le rapport manuscrit reproduit au début de ce volume).
1. G. REEB, Propriétés topologiques des variétés feuilletées, Strasbourg 1948 (A.S.I., Hermann, Paris).
2. WU WEN TSUN, Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, Strasbourg 1949 (A.S.I., Hermann, Paris).
3. L. CALABI, Sur les extensions des groupes topologiques, Strasbourg 1951 (Annali di Mat.)
4. YEN CHIH TA, Sur la connexion projective normale associée à un feuilletage du deuxième ordre, Strasbourg 1953 (Annali di Mat.).
5. P. LIBERMANN, Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, Strasbourg 1953 (Annali di Mat. 36).
6. A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, Paris 1958 (Comment. Math. Helv. 32).
7. K. SRINIVASACHARYULU, Sur les structures différentiables et les variations de structures complexes, Paris 1962 (CTGD IV).
8. F. BENZECRI-LEROY, Classification des sections méromorphes des espaces fibrés projectifs, Paris 1962 (CTGD IV).
9. NGUYEN DINH NGOC, Sur les espaces fibrés et les prolongements, Paris 1963 (CTGD IV).
10. V. POENARU, Sur les variétés tridimensionnelles ayant le type d'homotopie de S_3, Paris 1963 (CTGD VI).
11. P. VER EECKE, Sur les connexions d'éléments de contact, Paris 1963 (CTGD V).
12. G. JOUBERT, Contribution à l'étude des catégories ordonnées. Applications aux structures feuilletées, Dijon 1966 (CTGD VIII).
13. C.M. de BARROS, Espaces infinitésimaux, Paris 1966 (CTGD VII).
14. J. HOUDEBINE, Théorie des classes et théorie des catégories, Rennes 1967.

15. J. BENABOU, Structures algébriques dans les catégories, Paris 1966 (CTGD X).
16. A. KUMPERA, Etude des invariants différentiels attachés à un pseudogroupe de Lie, Paris 1967.
17. H.D. IBISCH, Sur la conjecture annulaire et les microfibrés stables, Paris 1967 (CTGD X).
18. P. VINCENT, Algèbre combinatoire et algèbre des catégories, Paris 1969.
19. S. LEGRAND, Quelques problèmes universels relatifs aux catégories multiples, Paris 1969 (P, CTGD X).
20. N. STAVROULAKIS, Sous-structures des variétés différentiables. Espaces riemanniens avec singularités, Paris 1969 (P, CTGD XI).
*21. J. CHACRON, Structures relationnelles, Amiens 1970 (CTGD XI).
22. P.C. YUEN, Sur lès prolongements des G-structures, Paris 1970 (EM 9).
*23. A. MACHADO, Quasi-topologie algébrique, Paris 1970 (EM 10).
*24. F. FOLTZ, Contributions à l'étude des catégories enrichies, Paris 1974 (CTGD XI-XIV).
25. J. PRADINES, Fibrés vectoriels doubles et calculs des jets non holonomes, Toulouse 1975 (EM 29).
*26. C. LAIR, Esquissabilité des structures algébriques, Amiens 1977 (EM 23 et CTGD XII, XIII, XV, XVIII).
*27. L. COPPEY, Algèbres de décompositions et précatégories, Amiens 1978 (Diagrammes 3, Paris).
*28. R. GUITART, Relations et structures dans les catégories, Amiens, Juin 1979 (CTGD XIII, XV, XVI, XVIII).

2. Doctorats d'Université.

1. M.T. SADR, Structures topogènes dans une catégorie, Paris 1967 (CTGD X).
2. A. CAMPOS, Sur le problème d'équivalence des équations différentielles ordinaires par rapport aux transformations de contact, Paris 1970.
*3. I. FOLDES, Etude des relations d'ordre, Paris 1973.
4. L. VAN DEN BRIL, Carrés exacts et extensions de Kan, Amiens 1978 (Rapporteur : R. Guitart).

3. Doctorats de Troisième cycle. (Tous ont été soutenus à Paris).

1. F. FOLTZ, Produit tensoriel généralisé, 1967 (CTGD X).
2. N. BAROUDI, Sur l'homologie des catégories, 1967.
3. G. PALIAS, Sur la catégorie des applications quasi-uniformes, 1967.
4. A. ZAND, Sur les catégories préadditives, 1968.
5. V. DAVAR-PANAH, Catégories de relations, 1968 (P, CTGD XVI).
6. K. LELLAHI, Catégories préadditives structurées, 1969 (EM 7).

* 7. D. CHAMAILLARD, Catégories structurées par des catégories non associatives, 1969 (EM 6).
* 8. R. GUITART, Relations, Fermetures, Continuité, 1970 (EM 1). 6
* 9. C. LAIR, Construction d'esquisses. Transformations naturelles généralisées, 1970 (EM 2).
*10. G. WEIDENFELD, Objets injectifs et catégories de fractions, 1970 (EM 3).
*11. M. WEIDENFELD, Idéaux d'une catégorie préadditive, 1970 (EM 3).
*12. E. BURRONI, Catégories discrètement structurées. Triples, 1970 (EM 4). 6
*13. A. BURRONI, Esquisses des catégories à limites et des quasi-topologies, 1970 (EM 5).
*14. F. CONDUCHE, Sur les structures définies par limites projectives, 1970 (EM 11).
*15. N. CHARRAUD, Sur les catégories de foncteurs types, 1970.
*16. C. LEGRAND, Etude des notions catégoriques sous-jacentes à l'interpolation, 1970.
*17. G. HOFF, Sur une cohomologie des catégories, 1970.
*18. S. HARARI, Pureté et platitude dans les catégories de foncteurs, 1971 (EM 11).
*19. G. DARTOIS, Catégories préadditives et modules, 1971 (EM 13).
*20. J.P. BARTHELEMY, Esquisses pointées, 1971 (EM 12).
*21. D. PROCHASSON, Catégories complètes à gauche et triples, 1971 (EM 12).
*22. L. COPPEY, Feuilletages. Catégories avec modèles, 1971 (CTGD X et EM 8).
*23. J.M. CORDIER, Catégories auto-dominées : Transformations naturelles. Espaces fonctionnels quasi-uniformes, 1971 (EM 15 et CTGD X).
*24. N. BEDNARZ, Noyaux d'espèces de structures, 1971 (P, CTGD XI).
*25. J. KLASA, Sur la régularité au sens de Von Neumann et la compacité des catégories, 1971.
*26. G. BLANC, Foncteurs types et structures, 1971 (EM 14).
*27. M.C. LEBLOND, Complétion de foncteurs ordonnés et de foncteurs doubles, 1971 (EM 15).
*28. M. CHARTRELLE, Quasi-topologies. Enrichissement de catégories, 1971 (P, CTGD XIV).
*29. G. DETOURBET, Espaces à fermeture, 1971 (EM 16).
*30. M. SIMONNET, Calcul différentiel dans les espaces non normables, 1972 (CTGD XIII, XIV).
*31. J. PENON, I-enclos. Objets séparés et objets compacts, 1972 (EM 17).
*32. J.J. HORRENT, Sur la catégorie produit croisé, 1972 (EM 18).
*33. D. TANRE, T-espaces simples. Groupes feuilletés, 1972 (EM 18, 20).
*34. P. VARIOT, Sur les 2-catégories, 1972 (EM 19).
*35. D. BOURN, Objets de Kleisli et d'Eilenberg-Moore d'un triple dans une 2-catégorie, 1973 (EM 19).
*36. G. BOURDAUD, Sur les espaces de convergence, 1973.
*37. F. BERQUIER, Calcul différentiel dans les espaces quasi-bornologiques, 1973 (EM 20).

*38. R. MIJOULE, Catégories hilbertiennes. Modèles et esquisses, 1973 (P, EM 21).
*39. E. VAUGELADE, Application des bicatégories à l'étude des catégories internes, 1974 (EM 21).
*40. J. B. LANGBAUM, Sur les structures quasi-quotients, et application aux catégories structurées, 1974 (EM 22).
*41. G. MOREAU, Catégories doubles à isomorphisme près, 1975.
*42. J.M. SIROT, Les fins cartésiennes, 1975 (EM 26).
*43. S. BOZAPALIDES, Théorie formelle des bicatégories, 1976 (EM 25).
*44. N. ABOUL-DAHAB, Complétion de Cauchy des catégories, 1976.
*45. B. FERRIF, Catégories topologiques, catégories différentiables et prolongements, 1976 (P, EM 22).
*46. F. CURY, Graphes multiplicatifs structurés, 1976 (EM 27).
*47. A.M. KEMPF, Complétions de foncteurs. Fibrations, 1976.

SYNOPSIS
by A. C. EHRESMANN

The complete edition (4 Parts) of these "Oeuvres" collect all the research papers of C. Ehresmann /1-121/, two "cours multigraphiés" /125, 126/, and some miscellaneous texts /134, 136, 137, 139, 142-144/.

Charles's works may be divided in two great sections :

- those on Algebraic Topology and Differential Geometry (about 500 pages, reproduced in this Part I), namely : all the papers /1-51, 136, 137, 139/ written from 1932 to 1959, except /47/ ; 5 later articles on differentiable groupoids and categories /78, 101, 103, 111, 116/ ;

- those on Category Theory and its applications (about 1800 pages), which originate in /47/, and have been written from 1960 to 1978 ; they are reproduced in the 6 volumes of Parts II, III, IV to the Synopses of which we refer for a guide through their maze (cf. also the papers by R. Guitart and A.C. Ehresmann in this volume, pp. 565-581).

Let us give a short outline of the present Part I (papers and comments).

1. On the former papers.

The "Notice" /136/ written in 1955 (to back up Charles's application for a Paris professorship) represents a very good summary of his works on Algebraic Topology and Differential Geometry up to this date /1-46/, and of the subsequent notes /48-51/. A general analysis of these papers (with an emphasis on foliations) is given by Haefliger (pp. 555-561).

The Note /49/ (the only article on Analysis written by Charles) answers a question asked in my 3[d] cycle Thesis (CTGD I) on polyhedra in infinite dimensional topological vector spaces : it constructs such a polyhedron without vertices.

The following commentaries replace specialized series of papers in their historical framework and point out later developments :

- W.T. van Est (pp. 491-501) deals with homogeneous and locally homogeneous spaces, and Lie groups. Taking the definition of locally homogeneous spaces in terms of Lie algebras of vector fields, he gives an interpretation of the main result of /6/ (proved anew in /39/) in a suitable category of atlasses, in which complete locally homogeneous spaces correspond to coverings.

- M. Zisman (pp. 502-506) outlines the genesis of fibre bundle theory in the fourties, before the theory of commutative diagrams and exact sequences be developed ; and he indicates subsequent generalizations of Charles's results.

- G. Reeb (pp. 507-509) shows how daring and prophetic it was to implant a theory of foliations in the fourties (he modestly omits his own part in it) ; and he points out two recent developments by Bott and Connes, not foretold by Charles.

- P. Libermann (pp. 510-523) tackles with the long series of concise papers on the foundations of Differential Geometry : differentiable fibre bundles and infinitesimal structures, connections, jets, Lie pseudogroups. She emphasizes the later developments of infinitesimal structures (now called G-structures), in particular almost complex and almost symplectic manifolds ; while she regrets semi-holonomic jets have not yet received all the attention they deserve. A bibliography of 56 titles is given.

- R. Thom (pp. 524-525) makes vivid the atmosphere of the Strasbourg Seminar in the late fourties and early fifties. He stresses the interest of jet theory for the study of singularities of mappings, and its links with stratifications.

- R. Hermann (pp. 540-549), who followed Charles's Princeton course in 1953-54, comments on two important applications of Charles's works : a geometric picture of optimal control theory (linked with feedback control) in the setting of jet bundles and their prolongations ; in elementary particle Physics, a reformulation of the Einstein framework in terms of principal bundles and connections, which englobes the Yang-Mills theory (e.g. the electromagnetic field is interpreted as the curvature of a connection).

- J. Bénabou (pp. 562-564) shows the modernity of Charles's papers on local structures : the idea of considering "topologies without points" has recently taken up a new start through topos theory and the theory of presheaves over locales.

2. On differentiable categories and groupoids.

Charles was led to introduce differentiable groupoids, categories and species of structures (= actions of categories) to study fibre bundles and jets. Though differentiable groupoids are used in some of his earlier papers (cf. my Arnsberg's lecture, pp. 571-582), topological and differentiable categories are precisely defined only in /50/ (1958), and the differentiable category of jets (mentioned in his courses as soon as 1953) in /53/ (Part II of these "Oeuvres").

The main result of /50/ is the equivalence between the notions : a principal fibre bundle H and a locally trivial groupoid E(H) ; an associated to H fibre bundle and an action of E(H). The map H $\mapsto$ E(H) extends into a functor E. In fact, as Pradines points out (p. 532) the "Ehresmann's functor" E is not an equivalence ; but it gives rise to an equivalence from the category of pointed principal fibre bundles to the category of pointed locally trivial groupoids (C, e). This equivalence is obtained in /111/, via the notion of a principal fibration (an axiomatization of the properties of the subcategory C_0UCe of C), which allows a generalization to some non locally trivial topological groupoids, and a link with the fibring maps of Bourbaki.

The last section of /111/ studies coverings (as discrete fibre bundles) and constructs the universal covering of a locally simple topological space (initial object in the category of pointed coverings over B).

The (holonomous, non-holonomous and semi-holonomous) prolongations of differentiable categories and of differentiable actions of categories are constructed in /78, 101/, with applications to connections and Lie derivatives ; these results are taken back in the synthesis /103/. The brief abstract /116/ points out that the essential tool is the k-jet functor $J^k(V, -)$: $\mathbf{Diff}^r \to \mathbf{Diff}^{r-k}$, which associates to the r-differentiable manifolds V and V' the $(r-k)$-manifold of k-jets from V to V', where $0 < r \leq k$.

Two commentaries relate to this categorical framework of Differential Geometry :

- Pradines (pp. 526-539) stresses the importance and ubiquity of differentiable or Lie groupoids : The Lie functor sends a Lie groupoid to the "Lie algebroid" consisting of the vertical tangent vectors to its base ; the integration of morphisms between Lie algebroids unifies numerous geometric problems (e.g. Frobenius, Maurer-Cartan equations, Lie foliations, flat connections). The theory of differentiable groupoids also encompasses the theory of foliations (when (β, α) is a strict immersion) and several notions of differentiable atlasses introduced to study their transverse structures (e.g. van Est schemes, atlasses of Barr, Satake,...). In fact, Pradines suggests to look at equivalence classes of groupoids as a generalized differentiable structure on the set of orbits ; whence a completion of the category **Diff** in which a foliation admits as its transverse structure the equivalence class of its holonomy groupoid.

- Kock (pp. 549-554) reports on the recent development of Synthetic Differential Geometry and its interactions with Charles's theory. SDG attempts to introduce Algebraic Geometry methods in Differential Geometry, by enlarging the category **Diff** into a topos (e.g. the category of C^∞-schemes). In this topos, an r-jet is representable as a map (and not only an equivalence class of maps) : to each point x of an r-manifold V, there is associated an r-monad $M_r(x)$ (the object of "r-neighbours" of x) and an r-jet from x to y becomes a map $M_r(x) \to M_r(y)$. Charles's results on connections and prolongations of differentiable groupoids are easily rephrased in the "neighbour-language" of SDG ; thus his constructions become more transparent, and conversely they suggest new directions of research to synthetic differential geometers.

INDEX DE LA PARTIE I

TABLE DES MATIÈRES DE LA PARTIE I