Diagrammes d'espaces fibrés principaux et sphères d'homologie

Horst IBISCH (Nantes)

Le but de ce travail est de généraliser la théorie de la classification homotopique des espaces fibrés principaux aux espaces fibrés principaux doubles dont la structure est beaucoup plus riche. Comme première application, nous obtenons une relation nouvelle entre les sphères d'homologie entière et les groupes d'homotopie encore peu connus de certains groupes de transformations d'espaces euclidiens.

Les définitions fondamentales et les premiers résultats dans le domaine des espaces fibrés principaux et leurs espaces classifiants sont dus à C. EHRESMANN à partir de 1934 ([3],[4]). En particulier, on lui doit la décomposition cellulaire des variétés Grassmanniennes, ouvrant l'accès à leur anneau de cohomologie et aux classes caractéristiques de STIEFEL-WHITNEY ([2],[7]). Il a également examiné les espaces fibrés associés à des variétés munies de structures définies par des pseudo-groupes de transformations, e.g. les structures différentiables, les structures presque complexes ou les structures feuilletées ([5],[6],[7],[8]).

I. Espaces fibrés principaux doubles et leur classification homotopique. Enoncé des résultats.

Définition. Soit K un groupe topologique, G et H des sous-groupes de K ; soit X un espace topologique. On désigne par $\mathcal{C}_K(X\,;G,H)$ la classe des triplets (η,Φ,ζ) sur X, où η est un G-fibré principal sur X, ζ est un H-fibré principal sur X et $\Phi : \eta\times_G K \to \zeta\times_H K$ est un K-isomorphisme sur X. Les triplets (η,Φ,ζ) seront aussi appelés « espaces fibrés principaux doubles ».

Plus explicitement, soit $p_\eta : E(\eta) \to X$ un G-fibré principal localement trivial sur X et soit $p_\zeta : E(\zeta) \to X$ un H-fibré principal localement trivial sur X. En formant les produits tordus $E(\eta)\times_G K$ et $E(\zeta)\times_H K$, on obtient deux K-fibrés principaux localement triviaux sur X :
$\pi_\eta : E(\eta)\times_G K \to X$ avec la projection $\pi_\eta[e,k] = p_\eta(e)$
$\pi_\zeta : E(\zeta)\times_H K \to X$ avec la projection $\pi_\zeta[e,k] = p_\zeta(e)$.

On décrit facilement les trivialisations locales de ces K-fibrés principaux :
si $\varphi_i : U_i\times G \to E(\eta)\,|\,U_i$ est une trivialisation locale sur $U_i \subset X$ de η, alors

$$\begin{array}{ccccc}
U_i\times K & \xrightarrow{\delta_i} & (U_i\times G)\times_G K & \xrightarrow{\varphi_i\times_G K} & (E(\eta)\times_G K)\,|\,U_i \cong (E(\eta)\,|\,U_i)\times_G K \\
\downarrow pr_1 & & \downarrow & & \downarrow \pi_\eta \\
U_i & = & U_i & = & U_i
\end{array}$$

est une trivialisation locale de $E(\eta)\times_G K$, avec $\delta_i(x,k) = [(x,1_G),k]$, $\delta_i^{-1}\,[(x,g),k] = (x,gk)$, $(\varphi_i\times_G K)((x,g),k) = [\varphi_i(x,g),k]$. En d'autres termes, un espace fibré principal « double » est un isomorphisme Φ

$$\begin{array}{ccc}
E(\eta)\times_G K & \longrightarrow & E(\zeta)\times_H K \\
\downarrow \pi_\eta & & \downarrow \pi_\zeta \\
X & = & X
\end{array}$$

de K-fibrés principaux sur X.

Deux triplets (η,Φ,ζ) et (η',Φ',ζ') sont « isomorphes sur X » s'il existe un G- isomorphisme $\sigma : \eta \to \eta'$ et un H-isomorphisme $\tau : \zeta \to \zeta'$ sur X tel que le carré de K-isomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \eta \times_G K & \xrightarrow{\Phi} & \zeta \times_H K \\ \downarrow \sigma \times_G K & & \downarrow \tau \times_H K \\ \eta' \times_G K & \xrightarrow{\Phi'} & \zeta' \times_H K \end{array}$$

est commutatif. On note $k_K(X\,;G,H)$ l'ensemble des classes d'isomorphie sur X des espaces fibrés principaux doubles sur X.

Exemple : Si K=G=H, $k_K(X\,;K,K) = k_K(X)$ est l'ensemble des classes d'isomorphie des K-fibrés principaux sur X.

Théorème 1.
Le foncteur $k_K(\,-\,;G,H)$: Top $\rightarrow$ Ens est représentable. Il existe un espace classifiant B(K;G,H) et une bijection naturelle

$$\Im : \quad [X\,;B(K;G,H)] \overset{\cong}{\rightarrow} k_K(X;G,H)$$

entre l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues $X \rightarrow B(K;G,H)$ et $k_K(X;G,H)$.

Plus précisément, il existe un fibré pricipal double universel $(\gamma_G,\Phi_\gamma,\gamma_H)$ de base B(K;G,H) et la bijection $\Im$ associe à toute application continue $f : X \rightarrow B(K;G,H)$ le fibré principal double induit $(f^{\times}(\gamma_G), f^{\times}(\Phi_\gamma), f^{\times}(\gamma_H))$.

Dans le cas K=G=H, B(K ;G,H) est équivalent à l'espace classifiant BK de J.W. MILNOR [9] des K-fibrés principaux.

Remarque concernant l'Unicité.

Il suit de la théorie générale des foncteurs représentables que l'espace classifiant B(K ;G,H) est unique à équivalence d'homotopie près.

Le fibré principal double universel associé est unique dans le sens suivant. Supposons donné deux bijections naturelles

$$\Im : [X;\, B] \cong k_K(X;G,H) \quad \text{et} \quad \Im' : [X;B'] \cong k_K(X;G,H)$$

et soient $\{(\gamma_G,\Phi,\gamma_H)\} = \Im[\mathrm{id}_B]$ et $\{(\gamma_G',\Phi',\gamma_H')\} = \Im'[\mathrm{id}_{B'}]$ les classes d'isomorphie des fibrés principaux doubles universels associés à B et B′. Soit $f : B \to B'$ une équivalence d'homotopie d'inverse homotopique $f' : B' \to B$, dont l'existence est assuré par les propriétés générales des foncteurs représentables. On a alors

$$k_K(f\,;G,H)\,\{(\gamma_G',\Phi',\gamma_H')\} = \{(\gamma_G,\Phi,\gamma_H)\} \quad \text{et} \quad k_K(f';\,G,H)\,\{(\gamma_G,\,\Phi,\gamma_H)\} = \{(\gamma_G',\,\Phi',\gamma_H')\}\ .$$

Théorème 2.

(1) Il existe une suite exacte de groupes d'homotopie

$$\dots \to \pi_i\,(B(K;G,H)) \to \pi_{i-1}(G) \quad \pi_{i-1}(H) \xrightarrow{\varphi} \pi_{i-1}(K) \to \pi_{i-1}(B(K;G,H)) \to \dots$$
$$\dots \to \pi_0(B(K;G,H))\ .$$

L'homorphisme φ a la forme $\varphi(a \quad b) = i_{G\times}(a) - i_{H\times}(b)$, où $i_G : G \to K$ et $i_H : H \to K$ sont les inclusions des sous-groupes G et H dans K.

(2) Si $i_H : H \to K$ est une équivalence d'homotopie pointée, $i_{H\times} : \pi_i(H) \to \pi_i(K)$ est un isomorphisme et la suite exacte dégénère en un isomorphisme $\pi_i(B(K;G,H)) \cong \pi_{i-1}(G)$ pour $i \geq 1$.

II. Construction de l'espace classifiant B(K;G,H) et du fibré principal double universel. L'application classifiante.

II.1. Rappel : Le K-fibré principal universel ξ_K de MILNOR.

Soit K un groupe topologique, soit E_K l'ensemble des suites $(t_0,k_0,t_1,k_1,t_2,k_2,\dots)$ telles que $k_i \in K$, $t_i \in [0,1] = I$; $t_i \neq 0$ pour un nombre fini de $i \in N$ seulement et $\Sigma_{i\geq 0}\, t_i = 1$.
Dans E_K on définit la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$:

$(t_0,k_0,t_1,k_1,\dots) <_{\mathfrak{R}} (t_0',k_0',t_1',k_1',\dots)$ ™ (1) $t_i = t_i'$ pour $i\geq 0$

(2) pour tout $i\geq 0$ on a soit $t_i = 0$ soit $k_i = k_i'$.

On note $\mathsf{E}_K/\mathfrak{R} = EK$ et l'on note $(t_0k_0,t_1k_1,\dots)$ la classe d'équivalence de la suite $(t_0,k_0,t_1,k_1,\dots)$. On munit EK de la topologie initiale T des projections sur les coordonnées notées

$$\tilde{t}_i : EK \to I \qquad (t_0k_0,t_1k_1,\dots) \mapsto t_i$$
$$\tilde{k}_i : \tilde{t}_i^{-1}(0,1] =: W_i^K \to K \qquad (t_0k_0,t_1k_1,\dots) \mapsto k_i \quad \text{pour } i\geq 0\ .$$

La topologie T est identique à la topologie finale des inclusions W_i^K EK. EK admet une K-action libre et continue à droite

$EK\times K \to EK$ définie par $(t_0k_0,t_1k_1,\dots)\cdot k = (t_0k_0k,t_1k_1k,\dots)$.

La projection sur le quotient $p_K : EK \to EK/K =: BK$ est le fibré principal universel de MILNOR, BK l'espace classifiant. Les parties $V_i^K = p_K(W_i^K)$ sont ouvertes dans BK et la topologie quotient de BK coïncide avec la topologie finale des inclusions V_i^K BK.

II.2. Sous-groupes topologiques et sous-espaces classifiants.

Soit G un sous-groupe topologique de K. L'inclusion i_G : EG EK est continue et EG est un sous-espace topologique de EK (il suffit de comparer les générateurs des topologies T_K et T_G ; en particulier on a $W_i^K \cap EG = W_i^G$ pour $i\geq 0$). L'application composée $p_K \circ i_G$ se factorise par p_G et induit une application continue ω_G dans le diagramme commutatif

i_G

$$\begin{array}{ccc} EG & \rightarrow & EK \\ \downarrow p_G & & \downarrow p_K \\ BG & \xrightarrow{\omega_G} & BK \end{array} \quad .$$

L'application continue ω_G est injective et l'on observe que BG est un sous-espace de BK (en particulier $V_i^K \cap BG = V_i^G$ pour $i \geq 0$). Dans EK on considère les K-sous-espaces

$EK^{od} = \{ (t_0k_0, t_1k_1, \ldots) \in EK : t_{2i+1} = 0, i \geq 0 \}$ et
$EK^{ev} = \{ (t_0k_0, t_1k_1, \ldots) \in EK : t_{2i} = 0, \quad i \geq 0 \}$.

On munit les parties $EK^{od}/K = BK^{od}$ et $EK^{ev}/K = BK^{ev}$ de la topologie de sous-espaces de BK, qui coïncide avec la topologie quotient donnée par la division par K.

Soit G et H des sous-groupes topologiques de K. Alors $BG^{od} = BK^{od} \cap BG$ et $BH^{ev} = BK^{ev} \cap BH$ sont des sous-espaces de BK et l'on a les diagrammes d'inclusions

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & BG \arrow[dr] & \\ BG^{od} \arrow[ur] \arrow[dr] & & BK \\ & BK^{od} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & BH \arrow[dr] & \\ BH^{ev} \arrow[ur] \arrow[dr] & & BK \\ & BK^{ev} \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad .$$

II.3. Construction de l'espace classifiant B(K;G,H).

Soit $\Omega(EK ; EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})$ l'espace des chemins continues
$\lambda : \ (I ; \{0\},\{1\}) \rightarrow (EK ; EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})$, muni de la topologie de la convergence compacte.

Définition. Soit $\lambda \in \Omega(EK ; EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})$. On dira que λ est un chemin linéaire, s'il existe des suites $\{ t_i \in [0,1], i \geq 0\}$ et $\{ k_i \in K, i \geq 0\}$ tels que
$\lambda(s) = ((1-s)t_0k_0, st_1k_1, (1-s)t_2k_2, st_3k_3, \ldots)$ pour $s \in [0,1]$, les éléments t_i et k_i étant indépendants de $s \in [0,1]$.
On notera $L(EK ; EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})$ le sous-espace des chemins linéaires de $\Omega(EK ; EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})$.

Dans $\Omega(EK ; EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})$ on définit une action continue de K à droite par $(\omega \oplus k)(s) = \omega(s) \oplus k$ pour $\omega \in \Omega$, $k \in K$, $s \in [0,1]$. Cette action de K dans Ω est libre, car EK est un K-espace libre. $L(EK ; EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})$ est un K-sous-espace de Ω ; en effet, si λ est linéaire, $\lambda(s) = ((1-s)t_0k_0, st_1k_1, (1-s)t_2k_2, st_3k_3, \ldots)$, donc $(\lambda \oplus k)(s) = \lambda(s) \oplus k = ((1-s)t_0k_0k, st_1k_1k, \ldots)$, donc $\lambda \oplus k$ linéaire.

Définition. On définit

$$B(K;G,H) := L(EK ; EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) / K$$

muni de la topologie quotient.
Comme nous l'affirmons dans le Théorème 1, B(K;G,H) est l'espace classifiant associé au foncteur $k_K(- ; G,H)$. Pour tout espace topologique X il existe une bijection naturelle

$$\Im : \quad [X ; B(K ;G,H)] \quad \cong \quad k_K(X ;G,H)$$

entre l'ensemble des classes d'homotopie des applications continues $X \to B(K;G,H)$ et l'ensemble $k_K(X ;G,H)$ des classes d'isomorphie sur X des espaces fibrés principaux doubles sur X.

L'application quotient $q_K : L(EK ; EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) \to B(K;G,H)$ est un K-fibré principal localement trivial. On peut, par exemple, le montrer de la manière suivante :

<u>Proposition.</u> On munit le produit $EK|BG^{od} \times EK|BH^{ev}$ de l'action diagonale de K. Alors le quotient

$$EK|BG^{od} \times EK|BH^{ev} \to (EK|BG^{od} \times EK|BH^{ev}) / K$$

est un K-fibré principal localement trivial et l'application

$$f : \quad L(EK ;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) \to EK|BG^{od} \times EK|BH^{ev}$$

définie par l'évaluation $f(\lambda) = (\lambda(0), \lambda(1))$ est un isomorphisme de K-espaces.

II.4. <u>L'espace fibré principal double universel sur B(K;G,H).</u>

En appliquant le foncteur Ω des chemins à la projection $p_K : EK \to BK$ du fibré universel ξ_K de MILNOR on obtient l'application continue

$$\Omega(p_K) : \quad \Omega(EK ;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) \to \Omega(BK ;BG^{od}, BH^{ev})$$

avec la restriction

$$Lp_K := \Omega(p_K)| \, L(EK ;EK|BG^{od} ; EK|BH^{ev}).$$

Soit $\varepsilon : \Omega(BK ;BG^{od}, BH^{ev}) \to BG^{od} \times BH^{ev}$ l'application continue définie par la double évaluation $\varepsilon(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$. Alors l'application composée $\varepsilon \circ Lp_K$ se factorise par l'action de K et définit l'application continue p^B dans le carré commututif suivant :

$$\begin{array}{ccc} L(EK ; EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) & \xrightarrow{Lp_K} & \Omega(BK ;BG^{od}, BH^{ev}) \\ \downarrow q_K & & \downarrow \varepsilon \\ B(K;G,H) & \xrightarrow{p^B} & BG^{od} \times BH^{ev} \end{array} .$$

Explicitement, par définition, $Lp_K(\lambda)(s) = p_K(\lambda(s))$ pour $s \in [0,1]$ et
$\varepsilon \circ Lp_K(\lambda) = (p_K(\lambda(0)),p_K(\lambda(1))) = (p_K(\lambda(0)\oplus k), p_K(\lambda(1)\oplus k)) = \varepsilon \circ Lp_K(\lambda\oplus k)$.
Donc $\varepsilon \circ Lp_K$ induit l'application continue $p^B(q_K(\lambda)) = (p_K\lambda(0), p_K\lambda(1))$. On pose $p^B = (p_0{}^B, p_1{}^B)$, donc $p_i{}^B[\lambda] = p_K(\lambda(i))$ pour $i = 0,1$. On regarde le diagramme avec fibré induit

$$L(EK ;EK|BG^{od},EK|BH^{ev}) \xrightarrow{\qquad \varepsilon_0 \qquad}$$

$$
\begin{array}{lccc}
\downarrow & e_0 & & \downarrow \\
 & & (p_0^B)^*EK|BG^{od} \xrightarrow{\quad} & EK|BG^{od} \\
\downarrow q_K & & & \\
 & & \downarrow p_K^* & \downarrow p_K \\
\downarrow & & & \\
 & \xrightarrow{\qquad\qquad} & B(K\,;G,H) \xrightarrow{\ p_0^B\ } & BG^{od} \quad .
\end{array}
$$

$\varepsilon_0(\lambda) = \lambda(0)$ est l'évaluation des chemins linéaires en 0, et $p_K \circ \varepsilon_0(\lambda) = p_K(\lambda(0)) =$ $= p_0^B \circ q_K(\lambda)$. Donc le carré extérieur est commutatif et par définition du fibré induit (pull-back) il existe un morphisme de K-fibrés principaux $e_0(\lambda) = (\, q_K(\lambda), \lambda(0))$ sur B(K;G,H,).

En plus, en tenant compte du pull-back

$$
\begin{array}{ccc}
(p_0^B)^*EG^{od} & \rightarrow & EG^{od} \\
\downarrow \gamma_G & & \downarrow p_G^{od} \\
B(K;G,H) & \xrightarrow{\ p_0^B\ } & BG^{od}
\end{array}
$$

et du K-isomorphisme canonique induit par la K-action dans EK

$$
\begin{array}{lccc}
\mu_G : & (p_0^B)^*EG^{od} \times_G K & \cong & (p_0^B)^*(EK|BG^{od}) \\
 & [([\lambda],u),k] & \rightarrow & (\,[\lambda],\, u\oplus k\,)
\end{array}
$$

pour $u \in EG^{od}$, on obtient, en posant $\nu_G = \mu_G^{-1} \circ e_0$, la

<u>Proposition.</u> Les applications

$$\nu_G : \quad L(EK\,;\, EK|BG^{od}\,,\, EK|BH^{ev}) \xrightarrow{\ \cong\ } (p_0^B)^*EG^{od} \times_G K$$

$$\nu_H : \quad L(EK\,;\, EK|BG^{od}\,,\, EK|BH^{ev}) \xrightarrow{\ \cong\ } (p_1^B)^*EH^{ev} \times_H K$$

sont des isomorphismes de K-fibrés principaux sur B(K ;G,H).
Explicitement, on peut écrire

$\nu_G(\lambda) = [\,(q_K(\lambda), u)\,,\, a]$ où $u \in EG^{od}$, $a \in K$ tels que $\lambda(0) = u\oplus a$

$\nu_H(\lambda) = [\,(q_K(\lambda), v)\,,\, b]$ où $v \in EH^{ev}$, $b \in K$ tels que $\lambda(1) = v\oplus b$.

<u>Définition.</u>

<u>Le fibré principal double universel $(\gamma_G\,,\Phi_\gamma\,,\gamma_H)$ sur B(K ;G,H)</u> est défini par le diagramme

$$(p_0^B)^*EG^{od} \times_G K \xleftarrow[\cong]{\ \nu_G\ } L(EK\,;EK|BG^{od}\,,\, EK|BH^{ev}) \xrightarrow[\cong]{\ \nu_H\ } (p_1^B)^*EH^{ev} \times_H K$$

qu'on notera, en posant $\nu_G^{-1} \circ \nu_H = \Phi_\gamma$,

$$E(\gamma_G) \times_G K \xrightarrow[\cong]{\ \Phi_\gamma\ } E(\gamma_H) \times_H K \ .$$

II.5. <u>Définition de l'application classifiante</u>

<u>$\Im : \ [X\,;\, B(K\,;G,H)\,] \longrightarrow k_K(X\,;\, G,H)$.</u>

Soit $f : X \to B(K;G,H)$ une application continue. Elle définit les applications continues f^G et f^H par le diagramme

$$\begin{tikzcd} & BG^{od} \\ X \arrow[ur, "f^G"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^H"'] & B(K;G,H) \arrow[u, "p_0^B"'] \arrow[d, "p_1^H"] \\ & BH^{ev} \end{tikzcd}$$

et les fibrés principaux induits du diagramme

$$\begin{tikzcd} f^*(p_0^B)^*EG^{od} \times_G K \arrow[d, "="] & f^*L(EK;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) \arrow[l, "f^*\nu_G"', "\cong"] \arrow[r, "f^*\nu_H", "\cong"'] & f^*(p_1^B)^*EH^{ev} \times_H K \arrow[d, "="] \\ (f^G)^*EG^{od} \times_G K & & (f^H)^*EH^{ev} \times_H K \end{tikzcd}$$

noté aussi

$$E(f^*\gamma_G) \times_G K \xrightarrow{\quad f^*\Phi_\gamma \quad} E(f^*\gamma_H) \times_H K \;.$$

On définit $\Im[f] = [\,(f^*(\gamma_G), f^*\Phi_\gamma, f^*(\gamma_H))\,]$, $[f]$ étant la classe d'homotopie de f. $\Im$ est bien défini à cause du théorème suivant.

II.6. Théorème d'Homotopie.

Soit $f : X \times I \to B(K;G,H)$ une homotopie entre $f_0 = f| X \times \{0\}$ et $f_1 = f| X \times \{1\}$; et f^G et f^H les homotopies associées à f par le diagramme

$$\begin{tikzcd} & BG^{od} \\ X \times I \arrow[ur, "f^G"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^H"'] & B(K;G,H) \arrow[u, "p_0^B"'] \arrow[d, "p_1^B"] \\ & BH^{ev} \;. \end{tikzcd}$$

Alors il existe un G-isomorphisme σ, un H-isomorphisme τ et un K-isomorphisme ρ dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} (f_0^G)^*EG^{od} \times_G K & f_0^*(L(EK;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})) \arrow[l, "f_0^*\nu_G"', "\cong"] \arrow[r, "f_0^*\nu_H", "\cong"'] & (f_0^H)^*EH^{ev} \times_H K \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow \sigma \times_G K & & \downarrow \rho & & \downarrow \tau_H \times K \\
(f_I{}^G)^*EG^{od} \times_G K & \xleftarrow{f_I{}^*\nu_G} & f_I{}^*(L(EK\,;\, EK|BG^{od},\, EK|BH^{ev})) & \xrightarrow{f_I{}^*\nu_H} & (f_I{}^H)^*EH^{ev} \times_H K\,.
\end{array}$$

II.7. <u>Définition de la flèche inverse $\Im'$: $k_K(X\,;G,H) \to [X\,;\,B(K.G,H)]$.</u>

<u>Lemme.</u> Soit Y un espace topologique et soient $F_0 : Y \to EK^{od}$ et $F_1 : Y \to EK^{ev}$ des applications continues. On peut leur donner la forme

$F_0(y) = (t_0(y)k_0(y), 0\,, t_2(y)k_2(y), 0\,, \;\ldots)$ et
$F_1(y) = (0\,, t_1(y)k_1(y), 0\,, t_3(y)k_3(y), 0\,, \ldots)$ pour $y \in Y$.
Alors la formule

$$F(y,s) = ((1\text{-}s)t_0(y)k_0(y)\,,\, st_1(y)k_1(y)\,,\, (1\text{-}s)t_2(y)k_2(y)\,,\, st_3(y)k_3(y)\,,\, \ldots\,)$$

définit une application continue $F : Y\times I \to EK$, notée dans la suite
$F(y,s) = (1\text{-}s)F_0(y) + sF_1(y)$ pour $(y,s) \in Y \times I$. –

<u>Exemple.</u> Pour $\lambda \in L(EK\,;EK|BG^{od},EK|BH^{ev})$, nous avons $\lambda(s) = (1\text{-}s)\lambda(0) + s\lambda(1)$.

Supposons donné un fibré principal double (η,Φ,ζ) sur X sous la forme suivante. Soit ξ un K-fibré principal, η un G-fibré principal, ζ un H-fibré principal, tous de base X, et soient $\varphi : \xi \to \zeta \times_G K$ et $\psi : \xi \to \zeta \times_H K$ des K-isomorphismes de X et $\Phi = \psi \circ \varphi^{-1}$. On choisit pour η et pour ζ des applications continues classifiantes $f^G : X \to BG^{od}$ et $f^H : X \to BH^{ev}$; il existe donc
un G-isomorphisme $\alpha^G : \eta \cong (f^G)^*(\xi_G{}^{od})$ et
un H-isomorphisme $\alpha^H : \zeta \cong (f^H)^*(\xi_H{}^{ev})$.

On obtient alors deux morphismes composés de K-fibrés principaux

$$F_G:\quad\begin{array}{ccccccccc}
\xi & \xrightarrow{\varphi} & \eta \times_G K & \xrightarrow{\alpha^G\times_G K} & (f^G)^*(\xi_G{}^{od}) \times_G K & \to & \xi_G{}^{od} \times_G K & \xrightarrow{\mu_G{}^{od}} & \xi_K{}^{od} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & = & X & = & X & \xrightarrow[f^G]{} & BG^{od} & \xrightarrow[\omega_G{}^{od}]{} & BK^{od}
\end{array}$$

$$F_H:\quad\begin{array}{ccccccccc}
\xi & \xrightarrow{\psi} & \zeta \times_H K & \xrightarrow{\alpha^H\times_H K} & (f^H)^*(\xi_H{}^{ev}) \times_H K & \to & \xi_H{}^{ev} \times_H K & \xrightarrow{\mu_H{}^{ev}} & \xi_K{}^{ev} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & = & X & = & X & \xrightarrow[f^H]{} & BH^{ev} & \xrightarrow[\omega_H{}^{ev}]{} & BK^{ev}
\end{array}$$

où $\mu_G{}^{od}$ est défini par l'action de K dans EK^{od} : pour $[u,k] \in EG^{od} \times_G K$, $\mu_G{}^{od}[u,k] = u\oplus k$.On définit alors un morphisme $F : E(\xi) \times I \to EK$ par

$$F(y,s) = (1\text{-}s)F_G(y) + sF_H(y) \qquad \text{pour } (y,s) \in E(\xi) \times I \quad .$$

F induit un morphisme de K-espaces

$$\tilde{F} : \quad E(\xi) \to L(EK\,;\, EK|BG^{od},\, EK|BH^{ev})$$

par $\tilde{F}(y)(s) = F(y,s)$ et l'application composée $q_K \circ \tilde{F}$ se factorise par l'action de K dans $E(\xi)$ et définit une application continue f dans le carré commutatif

$$\tilde{F}$$

$$\begin{tikzcd}
E(\xi) \arrow[r] \arrow[d, "p_\xi"'] \arrow[dr, phantom, "f"] & L(EK\,;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) \arrow[d, "q_K"] \\
X \arrow[r] & B(K\,;G,H)
\end{tikzcd} .$$

On montre ensuite que la classe d'homotopie [f] ne dépend pas des choix faits, c.a.d. des choix de f^G, f^H, α^G, α^H, ξ, φ, ψ . L'application $[(\eta, \Phi, \zeta)] \to [f]$ ainsi obtenue, avec $\Phi = \psi \circ \varphi^{-1}$, est l'inverse $\Im'$ de $\Im$, comme on voit facilement dans la suite.

II.8. <u>$\Im'$ est l'inverse à droite de $\Im$: $\Im \circ \Im' = \mathrm{id}$.</u>

Il suffit de vérifier que le carré de K-fibrés principaux sur f : X $\to$ B(K ;G,H) suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\xi \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dd, "\tilde{F}"] & \eta \times_G K \arrow[r, "\alpha^G \times_G K"] & (f^G)^*(\xi_G^{od}) \times_G K = f^*(p_0^B)^*(\xi_G^{od}) \times_G K \arrow[dd, "\tilde{f} \times_G K"] & X \arrow[dd, "f"] \\
& & & \\
L(EK\,;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) \arrow[r, "e_0"] & (p_0^B)^*\, \xi_K|BG^{od} & (p_0^B)^*\xi_G^{od} \times_G K \arrow[l, "\mu_G"'] & B(K\,;G,H)
\end{tikzcd}$$

En posant $\sigma := \tilde{f} \circ \alpha^G : \eta \to (p_0^B)^*\, \xi_G^{od}$ on obtient le carré commutatif qui représente un morphisme de fibrés principaux doubles sur f

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"] & \eta \times_G K \arrow[d, "\sigma \times_G K"] & \xi \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\tilde{F}"] & \zeta \times_H K \arrow[d, "\tau \times_H K"] \\
B(K\,;G,H) & \gamma_G \times_G K & L(EK\,;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) \arrow[l, "\nu_G"'] \arrow[r, "\nu_H"] & \gamma_H \times_H K
\end{tikzcd} .$$

Ce morphisme induit un isomorphisme d'espaces fibrés principaux doubles sur X :

$$\begin{tikzcd}
\eta \times_G K \arrow[d, "\Sigma \times_G K", "\cong"'] & \xi \arrow[l, "\varphi"', "\cong"] \arrow[r, "\psi", "\cong"'] \arrow[d, "P", "\cong"'] & \zeta \times_H K \arrow[d, "T \times_H K", "\cong"'] \\
f^*(\gamma_G) \times_G K & f^*(L) \arrow[l, "f^*\nu_G"'] \arrow[r, "f^*\nu_H"] & f^*(\gamma_H) \times_H K
\end{tikzcd} .$$

II.9. <u>$\Im'$ est l'inverse à gauche de $\Im$: $\Im' \circ \Im = \mathrm{id}$.</u>

Soit f : X $\to$ B(K ;G,H) une application continue. La classe $\Im$[f] est donnée par le fibré principal double induit par f à partir du fibré principal double universel (nous abrégeons L(EK ;EK|BG^{od},EK|BH^{ev}) par L) :

$$\begin{tikzcd}
f^*(p_0^B)^*EG^{od} \times_G K \arrow[d, "="] & f^*L \arrow[l, "f^*\nu_G"'] \arrow[r, "f^*\nu_H"] & f^*(p_1^B)^*EH^{ev} \times_H K \arrow[d, "="] \\
(f^G)^*EG^{od} \times_G K & & (f^H)^*EH^{ev} \times_H K
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow = & f^*\Phi_\gamma & \downarrow = \\ E(f^*\gamma_G)\times_G K & \xrightarrow{\hspace{3em}} & E(f^*\gamma_H)\times_H K \end{array}$$

avec les applications continues

$$\begin{array}{ccc} & & BG^{od} \\ & f^G & \uparrow p_0{}^B \\ X & \longrightarrow & B(K;G,H) \\ & f^H & \downarrow p_1{}^B \\ & & BH^{ev} \end{array} .$$

Nous appliquons ensuite la construction générale de la flèche inverse $\mathfrak{I}'$ décrite en II.7. au fibré principal double $(f^*\gamma_G, f^*\Phi_\gamma, f^*\gamma_H)$: on pose d'abord $\xi = f^*L$, $\eta = (f^G)^*\xi_G{}^{od}$, $\zeta = (f^H)^*\xi_H{}^{ev}$. On peut alors choisir f^G et f^H comme applications classifiantes pour η et ζ. Ce choix particulier nous permet de poser $\alpha^G = id \mid (f^G)^*EG^{od}$, $\alpha^H = id \mid (f^H)^*EH^{ev}$.
Avec ces données particulières, on obtient pour les morphismes
$F_G :\ f^*L \ \to\ \xi_K{}^{od}$ et $F_H :\ f^*L \ \to\ \xi_K{}^{ev}$ les formules
$F_G(x,\lambda) = \lambda(0)$ et $F_H(x,\lambda) = \lambda(1)$.
En effet, comme l'isomorphisme
$\nu_G :\ L \xrightarrow{\cong} (p_0{}^B)^*EG^{od}\times_G K$ est donnée par $\nu_G(\lambda) = [\ (q_K, u),a]$ pour $\lambda(0) = u\cdot a$, $u \in EG^{od}$, $a \in K$, on obtient le morphisme composé

$$\begin{array}{ccccccc} F_G :\ f^*L & \xrightarrow{f^*\nu_G} & (f^G)^*\xi_G{}^{od}\times_G K & \xrightarrow{\tilde{f}^G\times_G K} & \xi_G{}^{od}\times_G K & \xrightarrow{\mu_G{}^{od}} & \xi_K{}^{od} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & = & X & \xrightarrow{f^G} & BG^{od} & \xrightarrow{\omega_G{}^{od}} & BK^{od} \end{array}$$

et le calcul suivant, avec $(x,\lambda) \in f^*L$:

$$\begin{aligned} F_G(x,\lambda) &= \mu_G{}^{od} \circ (\tilde{f}^G\times_G K) \circ f^*\nu_G(x,\lambda) \\ &= \mu_G{}^{od} \circ (\tilde{f}^G\times_G K)\,(x, [(q_K(\lambda), u), a]) \\ &= \mu_G{}^{od}\,[\ (q_K(\lambda), u), a] = u\cdot a = \lambda(0) . \end{aligned}$$

Similairement pour $F_H(x,\lambda) = \lambda(1)$.
D'après II.7 on forme ensuite
$\tilde{F}\ (x,\lambda)\ (s) = F((x,\lambda),s) = (1\text{-}s)F_G(x,\lambda) + sF_H(x,\lambda) = (1\text{-}s)\lambda(0) + s\lambda(1) = \lambda(s)$ pour $s \in I$, donc on obtient $\tilde{F}(x,\lambda) = \lambda$. Selon la construction générale l'application continue cherchée $X \to B(K\,;G,H)$ s'obtient alors par le carré

$$\begin{array}{ccc} E(f^*L) & \xrightarrow{\tilde{F}} & L \\ \downarrow & & \downarrow q_K \\ X & \longrightarrow & B(K\,;G,H) \end{array}$$

c.-à.-d. en factorisant $q_K \circ \tilde{F}$ par l'action de K dans E(f*L). La définition du fibré induit f*L nous donne le carré similaire

$$E(f^*L) \xrightarrow{\tilde{f}} L$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & f & \downarrow q_K \\ X & \longrightarrow & B(K\,;G,H) \end{array}$$

avec la projection canonique $\tilde{f}(x,\lambda)=\lambda$

autrement dit $\tilde{F}=\tilde{f}$

donc f est induit par $\tilde{F}$,

donc $\Im'[(f^*\gamma_G, f^*\Phi_\gamma, f^*\gamma_H)] = [f]$ et $\Im' o \Im\,[f] = [f]$.

II.10. Actions de K×K et la suite exacte d'homotopie.

II.10.1. EK porte une action continue de K×K à droite notée

$$D_2 : \ EK \times K \times K \to EK$$

définie par $D_2(v;k,l) = D_2((t_0v_0, t_1v_1,\ldots) ; k,l) = (t_0v_0k, t_1v_1l, t_2v_2k, t_3v_3l, \ldots) = v\cdot(k,l)$.
Cette action n'est pas libre ! Mais elle définit une action à droite continue et libre

$$\mu_2 : \Omega(EK\,;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) \times K\times K \longrightarrow \Omega(EK\,;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})$$
$$(\omega\,;k,l) \to \omega\cdot(k,l)$$

à l'aide le l'application continue

$$\Omega(EK\,;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})\times I\times K\times K \xrightarrow{\varepsilon\times K\times K} EK\times K\times K \xrightarrow{D_2} EK$$
$$(\omega, s\,;k,l) \to (\omega(s)\,;k,l) \to D_2(\omega(s)\,;k,l) = \omega(s)\cdot(k,l)$$

ε étant l'évaluation.
$L(EK\,;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})$ est un K×K – sous-espace (libre) de $\Omega(EK\,;EK|BG^{od},EK|BH^{ev})$. L'application continue

$$Q : \Omega(EK\,;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) \longrightarrow BG^{od}\times BH^{ev}$$
$$\omega \to (p_K\, o\, \omega(0)\,,\ p_K\, o\, \omega(1))$$

(qui coïncide avec l'application $\varepsilon o\Omega(p_K)$ de II.4)
se factorise par l'action de K×K dans Ω et définit une application continue

$$\Omega(EK\,;EK|BG^{od},EK|BH^{ev})/\,K\times K \longrightarrow BG^{od}\times BH^{ev} \quad .$$

La restriction de Q au K×K-sous-espace $L(EK\,;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev})$ se factorise alors également par l'action de K×K dans L et définit, cette fois-ci, une <u>bijection</u> continue

$$L/K\times K \to BG^{od}\times BH^{ev} \quad .$$

Nous avons déjà remarqué dans II.3, que l'application

$$f : \ L(EK\,;EK|BG^{od}, EK|BH^{ev}) \to EK|BG^{od}\times EK|BH^{ev}$$

définie par l'évaluation $f(\lambda) = (\lambda(0)\,,\lambda(1))$ est un isomorphisme de K-espaces. On vérifie alors facilement que, pour l'action naturelle de K×K dans $EK|BG^{od}\times EK|BH^{ev}$, définie par $(u,v)\cdot(k,l) = (u\cdot k,\ v\cdot l)$, l'application f est même un K×K-isomorphisme.

Comme

$p_K^{od}\times p_K^{ev} :\ EK|BG^{od}\times EK|BH^{ev} \to BG^{od}\times BH^{ev}$

est évidemment un K×K-fibré principal localement trivial, on transporte cette structure par f^{-1} dans $L(EK\,;EK|BG^{od},EK|BH^{ev})$ et l'on obtient la

10.2 Proposition :

$$Q : L(EK\,;\,EK|BG^{od}\,;\,EK|BH^{ev}) \rightarrow BG^{od}\times BH^{ev}$$

est une K×K-fibration principale localement triviale.
A l'aide des ouverts trivialisants $V_i^{G,od} \subset BG^{od}$ pour i pair et $V_j^{H,ev} \subset BH^{ev}$ pour j impair, on obtient des trivialisation locales

$$\Phi_{ij} :\ V_i^{G,od} \times V_j^{H,ev}\times K\times K \longrightarrow L(EK\,;\,EK|BG^{od},\,EK|BH^{ev})\,|\,V_i^{G,od} \times V_j^{H,ev}$$

de cette fibration principale sous la forme explicite suivante :

$$\Phi_{i,j}(p_G^{od}(u),\, p_H^{ev}(v)\,;\,k,l)(s) \;=\; (1-s)ug_i^{-1}k + svh_j^{-1}l$$

avec $u \;=\; (t_0g_0,\, 0,\, t_2g_2,\, 0,\, \ldots\,) \;\in\; EG^{od}|V_i^{G,od}$
$\qquad v \;=\; (0,\, t_1h_1,\, 0,\, t_3h_3,\, \ldots\,) \;\in\; EH^{ev}|V_j^{H,ev}$.

10.3 La projection $Q : L \rightarrow BG^{od}\times BH^{ev}$ se factorise par $q_K : L \rightarrow B(K\,;G,H)$ l'application quotient associée à l'action de la diagonale $\Delta K \subset K\times K$ dans L. En regardant l'effet de la division par l'action de ΔK aux trivialisations locales de Q ; on obtient le
<u>Théorème</u> :

$$p^B :\ B(K\,;G,H) \rightarrow BG^{od}\times BH^{ev}$$

est une fibration localement triviale de fibre K (mais pas necessairement une K-fibration principale!) ; les trivialisations locales

$$\Psi_{i,j} :\ V_i^{G,od}\times V_j^{H,ev}\times K \;\rightarrow\; B(K\,;G,H)\,|\,V_i^{G,od}\times V_j^{H,ev}$$

sont des flèches composées

$$V_i^{G,od}\times V_j^{H,ev}\times K \xrightarrow{\ \mathrm{id}\times\nu\ } V_i^{G,od}\times V_j^{H,ev}\times(K\times K/\Delta K) \xrightarrow{\ \Phi'_{i,j}\ } B(K\,;G,H)\,|\,V_i^{G,od}\times V_j^{H,ev}$$

où $\Phi'_{i,j}$ est l'application induite par $\Phi_{i,j}$ sur les quotients et où $\nu : K\rightarrow K\times K/\Delta K$ est la bijection $\nu(k) = [k,1]$ d'inverse $\nu^{-1}[a,b] = ab^{-1}$.

10.4 Pour établir des suites exactes de groupes d'homotopie, on choisit des points de base de façon cohérente :
$e_G = (1\cdot 1_G,0,0,\ldots) \in EG^{od}$ $\qquad *_G = p_G^{od}(e_G) \;\in\; BG^{od}$
$e_H = (0,1\cdot 1_H,0,0,\ldots) \;\in\; EH^{ev}$ $\qquad *_H = p_H^{ev}(e_H) \;\in\; BH^{ev}$
$\lambda_0 \in L$ défini par $\lambda_0(s) = (1-s)e_G + se_H = ((1-s)1_G,\, s1_H,\, 0,0,\ldots)$.

De plus, à l'aide de la restriction du K×K-isomorphisme $f^{-1} : EK|BG^{od}\times EK|BH^{ev}\rightarrow L$ à $EG^{od}\times EH^{ev}$, on obtient l'application continue $\psi := q_K \circ f^{-1}$ dans le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} EG^{od}\times EH^{ev} & \xrightarrow{\ \psi\ } & B(K\,;G,H) \\ \downarrow p_G^{od}\times p_H^{ev} & & \downarrow p_B \\ BG^{od}\times BH^{ev} & = & BG^{od}\times BH^{ev}\ . \end{array}$$

La représentation locale de ψ est très simple : à l'aide des trivialisations locales $\Phi_i^G : V_i^{G,od}\times G\to EG^{od}\,|\,V_i^{G,od}$, i pair, et $\Phi_j^H : V_j^{H,ev}\times H \to BH^{ev}\,|\,V_j^{H,ev}$ et la trivialisation locale $\Psi_{i,j}$ de B(K ;G,H) on obtient la représentation locale $\psi_{i,j}$ de ψ par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} V_i^{G,od}\times G\times V_j^{H,ev}\times H & \xrightarrow{\Phi_i^G\times\Phi_j^H} & (EG^{od}\times EH^{ev})\,|\,V_i^{G,od}\times V_j^{H,ev} \\ \downarrow\psi_{i,j} & & \downarrow\psi \\ V_i^{G,od}\times V_j^{H,ev}\times K & \xrightarrow{\Psi_{i,j}} & B(K\,;G,H)\,|\,V_i^{G,od}\times V_j^{H,ev} \end{array}$$

sous la formule explicite $\psi_{i,j}((x,y),(g,h)) = (x,y),gh^{-1})$. On notera $\mu : G\times H\to K$ l'application $(g,h) \to gh^{-1}$, donc $\psi_{i,j}= id \times\mu$. En particulier, pour les points de base $*_G \in V_0^{G,od}$ et $*_H \in V_1^{H,ev}$, $\psi_{0,1}((*_G,*_H),(g,h)) = ((*_G,*_H),gh^{-1})$, $\psi_{0,1} = id \times\mu$.
On obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} ..\to\pi_i(EG^{od})\oplus\pi_i(EH^{ev}) & \xrightarrow{(p_G\oplus p_H)_*} & \pi_i(BG^{od})\oplus\pi_i(BH^{ev}) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{i-1}(G)\oplus\pi_{i-1}(H) & \to & \pi_{i-1}(EG^{od})\oplus\pi_{i-1}(EH^{ev}) \\ \downarrow\psi & & \downarrow id & & \downarrow\mu_* & & \downarrow\psi \\ ..\to\pi_i(B(K\,;G,H)) & \xrightarrow{p^B_*} & \pi_i(BG^{od})\oplus\pi_i(BH^{ev}) & \xrightarrow{\partial'} & \pi_{i-1}(K) & \to & \pi_{i-1}(B(K\,;G,H) \to\ldots \end{array}$$

d'où la suite exacte

$$\ldots\to\pi_i(B(K\,;G,H)) \to \pi_{i-1}(G)\oplus\pi_{i-1}(H) \to \pi_{i-1}(K) \to \pi_{i-1}(B(K\,;G,H) \to \ldots$$
$$\ldots \to \pi_0(G)\times\pi_0(H) \to \pi_0(K) \to \pi_0(B(K\,;G,H)\to 0 \quad .$$

Comme G,H,K sont des groupes topologiques, les groupes d'homotopie $\pi_i(G)$, $\pi_i(H)$ et $\pi_i(K)$ sont abéliens pour $i\geq 1$ et ces structures de groupe abélien sont induites par les structures de groupe de G,H,K. L'homomorphisme

$$\mu_* : \pi_i(G)\oplus\pi_i(H)\to\pi_i(K)$$

est donc de la forme $\qquad \mu_*(a\oplus b) = a - b \qquad$ pour $i\geq 1$.
Pour i=0, $\pi_0(G)$, $\pi_0(H)$ et $\pi_0(K)$ sont des groupes non-abéliens, en général, et l'application

$$\mu_* : \pi_0(G)\times\pi_0(H)\to\pi_0(K)$$

induite par μ, est de la forme

$$\mu_*([f],[g]) = [fg^{-1}]$$

pour $f : (S^0, -1) \to (K,1)$, $g : (S^0, -1) \to (K,1)$, où $fg^{-1} : (S^0, -1) \to (K,1)$ est défini par $fg^{-1}(+1) = f(+1)\cdot g^{-1}(+1)$, avec la multiplication et l'inversion de K. En dimension 0, μ_* n'est pas un homomorphisme, mais $\ker\{ \mu_* : \pi_0(G)\times\pi_0(H) \to \pi_0(K) \}$ est un groupe.

10.5 Si l'inclusion $i_H : H \subset K$ est une équivalence d'homotopie pointée, l'homomorphisme $\mu_* : \pi_i(G)\oplus\pi_i(H) \to\pi_i(K)$ est un epimorphisme pour $i\geq 1$ et $\ker \mu_* \cong \pi_i(G)$; de la suite exacte, on déduit alors l'isomorphisme

$$\pi_i(B(K\,;G,H)) \cong \pi_{i-1}(G) \qquad \text{pour } i\geq 2.$$

Dans le cas non-abélien, pour i = 1, il reste vrai que

$$\pi_1(B(K;G,H)) \cong \ker \mu_* \cong \pi_0(G)$$

et $\pi_0(B(K;G,H))$ est trivial. -

III. Groupes de transformation d'espaces euclidiens.

Soit $m > n$ et soit $K = H(R^m) = H(m)$ le groupe des homéomorphismes de R^m muni de la topologie de la convergence compacte. Soit $G = H(R^m, R^n) = H(m,n)$ le sous-groupe topologique des homéomorphismes des pairs (R^m, R^n) et soit $H = H.(R^m) = H.(m)$ le sous-groupe topologique des homéomorphismes de R^m fixant l'origine.

Les théorèmes 1 et 2 donnent alors l'isomorphisme

$$\pi_{i+1}(B(H(m); H(m,n), H.(m))) \xrightarrow{\cong} \pi_i(H(m,n)) \quad \text{pour } i \geq 0.$$

Pour le cas m=n+2, R.C. KIRBY et L.C.SIEBENMANN [10] ont montré que les groupes d'homotopie $\pi_i(H(n+2,n))$ sont liés à des questions importantes de la topologie géométrique : pour $n \neq 2$, toute n-sous-variété topologique M^n localement plate d'une variété topologique Q^{n+2} admet un (micro-)fibré normal.

La raison en est que le groupe de transformations $H(n+2,n)$ est homotopiquement proche du groupe orthogonal $O(n+2,n)E\, O(2)\times O(n)$:

$$\pi_i(H(n+2,n)/O(n+2,n)) = 0 \quad \text{pour } i \leq n \neq 2.$$

Autrement dit, pour $n \neq 2$, on connaît les groupes d'homotopie

$$\pi_i(H(n+2,n)) \quad E \quad \begin{cases} Z/2 & i = 0 \\ Z \quad \text{pour} & i = 1 \\ 0 & 2 \leq i \leq n \end{cases} \qquad (n \neq 2) \qquad .$$

Pour n=5 le premier groupe non connu est $\pi_4(H(5,3))$; nous allons l'examiner à l'aide de l'isomorphisme de la partie II.

IV. Faisceaux de germes de 3-structures dans S^5 et sphères d'homologie dimension 3.

On considère le pseudo-groupe $P(5,3)$ des transformations de la forme

$$f: (U, U \cap R^3) \xrightarrow{\cong} (V, V \cap R^3)$$

où U,V sont des ouverts de R^5.

$P(5,3)$ opère sur l'atlas $A(S^5)$ des cartes locales topologiques de S^5 et le quotient $A(S^5)/P(5,3)$ admet une structure canonique de faisceau sur S^5. On l'appelle le faisceau $\mathsf{F}_3(S^5)$ des germes de 3-structures sur S^5. Soit $\Gamma(S^5, \mathsf{F}_3(S^5))$ l'espace des sections continues de $\mathsf{F}_3(S^5)$. Le groupe $H(S^5)$ des homéomorphismes de S^5 agit dans $\Gamma(S^5, \mathsf{F}_3(S^5))$. Le quotient

$\Gamma(S^5, \mathsf{F}_3(S^5))/ H(S^5) = \mathbf{S}_3(S^5)$ sera appelé <u>l'espace des classes d'équivalence des 3-structures sur S^5.</u>

<u>Théorème 3.</u>

L'ensemble $\mathbf{H}_3$ des classes d'homéomorphie des 3-sphères homologiques est canoniquement plongé dans $\mathbf{S}_3(S^5)$.

Ce théorème est une conséquence du célèbre Théorème de la Double Suspension des Sphères d'Homologie ([1] Corollary 3D(Double Suspension Theorem) p. 184), issu d'un résultat fondamental de R.D. EDWARDS en théorie de décomposition des variétes.

Théorème 4.

Il existe une injection J : $\mathbf{S}_3(S^5) \rightarrow \pi_5(B(H(5) ; H(5,3),H.(5)))$.

Corollaire : $\mathbf{H}_3 \quad \pi_4(H(5,3))$.

La structure du groupe $\pi_4(H(5,3)$ apparaît donc riche et importante pour la topologie géométrique.

[1] R. J. DAVERMAN : « Decomposition of manifolds ». Acad. Press Inc. New York 1986.

[2] C. EHRESMANN : « Sur la topologie de certains espaces homogènes ». Ann. of Math. (2) 35 (1934), 396-443.

[3] C. EHRESMANN et J. FELDBAU : » Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés » C.R.Acad.Sc. Paris, 213,1941, p. 945-948.

[4] C. EHRESMANN : « Espaces fibrés associés » C.R. Acad. Sc., Paris, 213, 1941, p. 762-764.

[5] C. EHRESMANN : « Sur les espaces fibrés associés à une variété différentiable ».C.R. Acad. Sc., Paris, 216, 1943, p. 628-630.

[6] C. EHRESMANN : « Sur les espaces fibrés différentiables ». C.R.Acad. Sc. Paris, 224, 1947, p. 1611-12.

[7] C. EHRESMANN : « Sur la théorie des espaces fibrés ».
Colloques Internationaux du C.N.R.S. XII. – Topologie Algébrique, Paris,
26 juin – 2 juillet 1947 (p. 3-15).

[8] C. EHRESMANN : « Sur la théorie des variétés feuilletées ». Exposé au Congrès de Rome (26-28 avril 1951). Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni. Serie V, vol. X, Fasc. 1-2, Roma 1951.

[9] J.W. MILNOR : « Construction of universal bundles II ». Ann. of Math. (2) 63(1956),430-436.

[10] R.C.KIRBY and L.C.SIEBENMANN : « Normal bundles for codimension 2 locally flat embeddings ». Lecture Notes in Math. 438 :Geometric Topology (Proceedings of the Geometric Topology Conference held at Park City, Utah, February 19-22, 1974) Springer Verlag 1975, 310-324.