cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques

créés par CHARLES EHRESMANN en 1958
dirigés par Andrée CHARLES EHRESMANN

VOLUME LXII-1, 1er trimestre 2021

AMIENS

Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques

Directeur de la publication: Andrée C. EHRESMANN,
Faculté des Sciences, Mathématiques LAMFA
33 rue Saint-Leu, F-80039 Amiens.

Les "*Cahiers"* comportent un Volume par an, divisé en 4 fascicules trimestriels. Ils publient des articles originaux de Mathématiques, de préférence sur la Théorie des Catégories et ses applications, e.g. en Topologie, Géométrie Différentielle, Géométrie ou Topologie Algébrique, Algèbre homologique…
Les manuscrits soumis pour publication doivent être envoyés à l'un des Rédacteurs comme fichiers .pdf.

Depuis 2018, les "*Cahiers*" publient une **Edition Numérique en Libre Accès,** sans charge pour l'auteur : le fichier pdf du fascicule trimestriel est, dès parution, librement téléchargeable sur :

The "*Cahiers"* are a quarterly Journal with one Volume a year (divided in 4 issues). They publish original papers in Mathematics, the center of interest being the Theory of categories and its applications, e.g. in topology, differential geometry, algebraic geometry or topology, homological algebra…
Manuscripts submitted for publication should be sent to one of the Editors as pdf files.

From 2018 on, the "*Cahiers"* have also a **Full Open Access Edition (**without Author Publication Charge): the pdf file of each quarterly issue is immediately freely downloadable on:

https://ehres.pagesperso-orange.fr/Cahiers/Ctgdc.htm
and http://cahierstgdc.com/

cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques

créés par CHARLES EHRESMANN en 1958
dirigés par Andrée CHARLES EHRESMANN
VOLUME LXII-1, 1er trimestre 2021

SOMMAIRE

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

VOLUME LXII-1 (2021)

PURETÉ DE LA MONADE DE BATANIN, II

Jacques PENON

Résumé des deux parties. Nous montrons que la monade de Batanin $\mathbb{B}$ a une propriété très forte appelée "pureté". Dans une prochaine publication nous verrons que cette propriété nous permet de donner un ensemble d'exemples de ses algèbres (appelées ω-catégories faibles par M.Batanin). Avant de le montrer nous caractérisons $\mathbb{B}$ avec un matériel syntaxique.
La première partie est parue en *CTGDC*, LXI-1 (2020), 57-110.
Abstract of the two parts. We prove that the Batanin's monad $\mathbb{B}$ has a very strong property called "purity". In a next publication we'll see that this property enables us to give a set of examples for its algebras (called weak ω-categories by M.Batanin). Before proving it, we characterize $\mathbb{B}$ with a syntactic equipment.
The first part appeared in *CTGDC*, LXI-1 (2020), 57-110.
Keywords. Weak ω-category. Globular set. Cartesian monad. Operad. Tree. Syntax.
Mathematics Subject Classification (2010). 18D05.

.

PARTIE II
(CARACTÉRISATION DE LA MONADE DE BATANIN)

Table des matières

Introduction de la partie II

Avant de caractériser la monade de Batanin, on commence par re-présenter la monade ω des ∞-catégories strictes, puis la monade $\mathbb{P}$ des prolixes en utilisant l'outillage syntaxique de la première partie. Mais c'est surtout grâce aux arbres feuillus qu'on va pouvoir construire une monade $\mathbb{B}$ à partir de $\mathbb{P}$ qui remplira toutes les conditions requises (c'est-à-dire, finalement, d'être pure) et qui s'avérera être la monade de Batanin.

1. Monade associée à un langage relativement dimensionnel

Introduction : Toutes les monades construites dans la première partie étaient sur la catégorie $\mathbb{E}ns$. Nous allons en construire maintenant de nouvelles sur $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ en toute généralité, ce qui nous permettra dans les prochaines sections de passer à des monades sur $\mathbb{G}lob$ (la catégorie des "ensembles globulaires"). Certaines notations données dans cette section, comme $\mathrm{Op}(a,(b_o,...,b_{n-1}))$ et $a\{c_o,...,c_{n-1}\}$ sont indispensables pour la compréhension de la suite de cet article.

1.1 Variation des constantes dans le cas relativement dimensionnel

Conventions 1.1. : On se donne un langage relativement dimensionnel (S, ar, δ) (voir la définition dans la première partie, section 2) sans constante. Pour chaque $(C, dim) \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, on pose $S(C) = S \coprod C$ puis on suit les conventions données dans la première partie, section 3, où l'on définit $ar : S(C) \to \mathbb{N}$, $A(C)$ et pour toute application $f : C \to C'$, une nouvelle application $A(f) : A(C) \to A(C')$. On tient compte encore de la remarque qui fait suite à ces conventions.
On définit ensuite $\delta = (\delta(s) : \mathbb{N}^{ar(s)} \to \mathbb{N})_{s\in S(C)}$ en posant $\delta(u_0(s)) = \delta(s)$ et $\delta(u_1(c)) : \mathbb{N}^0 \simeq 1 \to \mathbb{N},\ 0 \mapsto dim(c)$. On obtient ainsi un nouveau langage relativement dimensionnel $(S(C), ar, \delta)$. On construit alors, comme on le fait à la section 2 de la partie 1, deux applications $\dim : A(C) \to \mathbb{N}$ et $\overline{\dim} : A(C) \to \mathbb{M}o(\mathbb{N})$.
On note $U : \mathbb{E}ns/\mathbb{N} \to \mathbb{E}ns$ le foncteur d'oubli canonique.

Proposition 1.2. : Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ une flèche de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$. Alors :
$\forall a \in AU(\mathbb{C}),\ \dim\tilde{f}(a) = \dim(a)$ et $\overline{\dim}\tilde{f}(a) = \overline{\dim}(a)$.

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Notations 1.3. : 1) Chaque flèche $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ induit une nouvelle flèche $\tilde{f} : (AU(\mathbb{C}), \dim) \to (AU(\mathbb{C}'), \dim)$. On construit ainsi un endo-foncteur de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$, noté $\mathcal{A}$.
2) Choisissons un objet final $\mathbb{I} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$. On notera $U(\mathbb{I}) = \{0_n/n \in \mathbb{N}\}$. Alors $dim : U(\mathbb{I}) \to \mathbb{N}$ est bijective et $dim^{-1}(n) = 0_n$.
3) Pour chaque $a \in AU(\mathbb{C})$, notons $|a| = \tilde{!}_{\mathbb{C}}(a) \in AU(\mathbb{I})$.

Proposition 1.4. : Soit $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$.
1) Soit aussi $a \in AU(\mathbb{C})$, alors $\dim(|a|) = \dim(a)$ et $\overline{\dim}(|a|) = \overline{\dim}(a)$.
2) Soient maintenant $a, a' \in AU(\mathbb{C})$. Si $|a| = |a'|$ et $l_{U\mathbb{C}}(a) = l_{U\mathbb{C}}(a')$, alors $a = a'$.

Preuve : Le (1) résulte de la proposition précédente et le (2) résulte de la première partie, section 3.

1.2 L'opération Op

Notation 1.5. : Soient $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $a \in AU(\mathbb{I})$, $n = l(a)$ et $(b_o, ..., b_{n-1})$ dans $AU(\mathbb{C})^n$. On suppose que $\overline{\dim}(a) = (\dim b_o, ..., \dim b_{n-1})$. Dans ce cas on note :

$$\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{op}(\underline{a}, (b_o, ..., b_{n-1})) \in AU(\mathbb{C}).$$

Proposition 1.6. : Posons $\hat{C} = C \coprod U(\mathbb{I})$ et $u_0 : C \to \hat{C}$, $u_1 : U(\mathbb{I}) \to \hat{C}$ les injections canoniques. Alors :

$$\tilde{u}_0\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{OP}(\tilde{u}_1(a), (\tilde{u}_0 b_o, ..., \tilde{u}_0 b_{n-1})).$$

Preuve : Posons $\alpha = \tilde{u}_0\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))$ et $\beta = \mathrm{OP}(\tilde{u}_1(a), (\tilde{u}_0 b_o, ..., \tilde{u}_0 b_{n-1}))$. On montre que $\underline{\alpha} = \mathrm{OP}(\underline{a}, (\underline{b_o}, ..., \underline{b_{n-1}}))$ $= \underline{\beta}$ et que $l_{\hat{C}}(\alpha) = l_{\hat{C}}(\beta)$. On en déduit que $\alpha = \beta$.

Proposition 1.7. : Soient $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $a \in AU(\mathbb{I})$, $n = l(a)$ et $(b_o, ..., b_{n-1})$ dans $AU(\mathbb{C})^n$ tels que $\overline{\dim}(a) = (\dim b_o, ..., \dim b_{n-1})$.
1) On a $\dim \mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \dim(a)$ et $\overline{\dim}\,\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \overline{\dim}(b_0)...\overline{\dim}(b_{n-1})$.
2) Pour toute flèche $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$, on a : $\tilde{f}\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{Op}(a, (\tilde{f}b_o, ..., \tilde{f}b_{n-1}))$.
3)a) $|\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1}))| = \mathrm{Op}(a, (|b_o|, ..., |b_{n-1}|))$.
b) $l_{U\mathbb{C}}\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = l_{U\mathbb{C}}(b_0)...l_{U\mathbb{C}}(b_{n-1})$.
4)a) $l\,\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \sum_{j\in[n]} l(b_j)$.
b) $\mathrm{L}\,\mathrm{Op}(a, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{L}(a) - l(a) + \sum_{j\in[n]} \mathrm{L}(b_j)$.
5) Si $b \in AU(\mathbb{C})$ alors $\mathrm{Op}(|b|, (b_o, ..., b_{n-1})) = \mathrm{OP}(b, (b_o, ..., b_{n-1}))$.

Preuve : Le (1) résulte de la proposition précédente modulo la section 2 de la première partie.
Les (2), (3), (4) et (5) résultent de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.8. : Soient $s \in S$ tel que $ar(s) = n \geq 1$, $(a_o, ..., a_{n-1})$ dans $AU(\mathbb{C})^n$ et $(c_o, ..., c_{n-1}) \in U(\mathbb{I})^n$ tels que $\forall j \in [n]$, $\dim(a_j) = \dim(c_j)$. On pose $\hat{s} = s(c_o(\varnothing), ..., c_{n-1}(\varnothing)) \in AU(\mathbb{I})$, alors :
1) $\overline{\dim}(\hat{s}) = (\dim a_o, ..., \dim a_{n-1})$,
2) $\mathrm{Op}(\hat{s}, (a_o, ..., a_{n-1})) = s(a_o, ..., a_{n-1})$.

Preuve : Le (1) est immédiat. Le (2) résulte de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.9. : Soit $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$.
1) Soit aussi $a \in AU(\mathbb{C})$ et $n = \dim(a)$ alors $\mathrm{Op}(0_n(\varnothing), (a)) = a$,
2) Soient $\alpha \in AU(\mathbb{I})$, $(\alpha_o, ..., \alpha_{p-1})$ dans $AU(\mathbb{I})^p$, $(\bar{a}_o, ..., \bar{a}_{p-1})$ dans $Mo(AU(\mathbb{C}))^p$ tels que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim \alpha_o, ..., \dim \alpha_{p-1})$ et $\forall j \in [p]$, $\overline{\dim}(\alpha_j) = Mo(\dim)(\bar{a}_j)$. Alors :

$$\mathrm{Op}(\alpha, (\mathrm{Op}(\alpha_0, \bar{a}_0), ..., \mathrm{Op}(\alpha_{n-1}, \bar{a}_{n-1})) = \mathrm{Op}(\mathrm{Op}(\alpha, (\alpha_o, ..., \alpha_{n-1})), \bar{a}_0 ... \bar{a}_{n-1}).$$

Preuve : Résulte de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.10. : Soient $s \in S$ tel que $n = ar(s) \geq 1$, $(\alpha_o, ..., \alpha_{n-1})$ dans $AU(\mathbb{I})^n$ et $(\bar{a}_o, ..., \bar{a}_{n-1}) \in Mo(AU(\mathbb{C}))^n$. On suppose que $\forall j \in [n]$, $\overline{\dim}(\alpha_j) = Mo(\dim)(\bar{a}_j)$. Alors :

$$s(\mathrm{Op}(\alpha_0, \bar{a}_0), ..., \mathrm{Op}(\alpha_{n-1}, \bar{a}_{n-1})) = \mathrm{Op}(s(\alpha_o, ..., \alpha_{n-1}), \bar{a}_0 ... \bar{a}_{n-1}).$$

Preuve : Résulte de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.11. : Soient $\alpha \in AU(\mathbb{I})$, $n = l(\alpha)$ et $\bar{a}, \bar{a}' \in AU(\mathbb{C})^n$ tels que $\overline{\dim}(\alpha) = Mo(dim)(\bar{a}) = Mo(dim)(\bar{a'})$. Alors on a l'implication :

$$\mathrm{Op}(\alpha, \bar{a}) = \mathrm{Op}(\alpha, \bar{a}') \Longrightarrow \bar{a} = \bar{a}'.$$

Preuve : Résulte de la section 3 de la première partie.

1.3 La notation $a\{c_o, ..., c_{n-1}\}$

Notation 1.12. : Soient $a \in AU(\mathbb{I})$ et $n = l(a)$. Soient aussi $\mathbb{C}$ dans $|\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$ et $(c_o, ..., c_{n-1}) \in U(\mathbb{C})^n$. On suppose que
$\overline{\dim}(a) = (\dim c_o, ..., \dim c_{n-1})$. Alors on note :

$$a\{c_o, ..., c_{n-1}\} = \underline{a}[c_o, ..., c_{n-1}].$$

Remarque 1.13. : En fait on a $a\{c_o, ..., c_{n-1}\} = \mathrm{Op}(a, (c_o(\varnothing), ..., c_{n-1}(\varnothing)))$

Proposition 1.14. : Soient $a \in AU(\mathbb{I}),\ n = l(a),\ (c_o, ..., c_{n-1}) \in U(\mathbb{C})^n$ tel que $\overline{\dim}(a) = (\dim c_o, ..., \dim c_{n-1})$. Alors :
1) $\underline{\dim}\ a\{c_o, ..., c_{n-1}\} = \underline{\dim}(a)$,
2) $\overline{\dim}\ a\{c_o, ..., c_{n-1}\} = \overline{\dim}(a)$,
3) $|a\{c_o, ..., c_{n-1}\}| = a$,
4) $l_{U\mathbb{C}}\ a\{c_o, ..., c_{n-1}\} = (c_o, ..., c_{n-1})$,
5) pour toute flèche $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$, on a
$\tilde{f}(a\{c_o, ..., c_{n-1}\}) = a\{f(c_o), ..., f(c_{n-1})\}$.

Preuve : Pour le (1) et (2), on utilise la remarque précédente. Pour le (3), si on pose $\forall j \in [n],\ c'_j = !_{\mathbb{C}}(c_j)$, on voit que $|a\{c_o, ..., c_{n-1}\}| = \underline{a}[c'_o, ..., c'_{n-1}] = \underline{a}[l_{U\mathbb{I}}(a)] = a$. Le (4) et le (5) résultent de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.15. : $\forall a \in AU(\mathbb{C}),\ |a|\{l_{U\mathbb{C}}(a)\} = a$.

Preuve : Résulte de la section 3 de la première partie.

Proposition 1.16. : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_o, ..., \alpha_{n-1}) \in AU(\mathbb{I})^n$ et $(\bar{c}_o, ..., \bar{c}_{n-1})$ dans $Mo(U(\mathbb{C}))^n$ tels que $\forall j \in [n],\ \overline{\dim}(\alpha_j) = Mo(\dim)(\bar{c}_j)$ Alors :
1) Pour tout $s \in S$ tel que $ar(s) = n$, on a :

$$s(\alpha_0\{\bar{c}_0\}, .., \alpha_{n-1}\{\bar{c}_{n-1}\}) = s(\alpha_0, .., \alpha_{n-1})\{\bar{c}_0 ... \bar{c}_{n-1}\}.$$

2) Pour tout $\alpha \in AU(\mathbb{I}),\ l(\alpha) = n$ et $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim \alpha_o, ..., \dim \alpha_{n-1})$, on a :

$$\mathrm{Op}(\alpha, (\alpha_0\{\bar{c}_0\}, ..., \alpha_{n-1}\{\bar{c}_{n-1}\})) = \mathrm{Op}(\alpha, (\alpha_o, ..., \alpha_{n-1}))\{\bar{c}_0 ... \bar{c}_{n-1}\}.$$

Preuve : Le (1) résulte de la proposition 1.10 et le (2) de la proposition 1.9.

1.4 La monade $\mathcal{A}$

Proposition 1.17. : Soit $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$.
1) $\forall A \in A^2U(\mathbb{C}),\ \mu_{U\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Op}(|A|, l_{AU(\mathbb{C})}(A))$.
2) a) $\forall c \in U(\mathbb{C}),\ \dim \eta_{U\mathbb{C}}(c) = \dim(c)$.
b) $\forall A \in A^2U(\mathbb{C}),\ \dim \mu_{U\mathbb{C}}(A) = \dim(A)$.

Preuve : Sans difficulté.

Notations 1.18. : On peut donc noter $\eta_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $\mu_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^2(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(\mathbb{C})$ les flèches de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ telles que $U\eta_{\mathbb{C}} = \eta_{U\mathbb{C}}$ et $U\mu_{\mathbb{C}} = \mu_{U\mathbb{C}}$. $\eta_{\mathbb{C}}$ et $\mu_{\mathbb{C}}$ sont clairement naturels en $\mathbb{C}$. On note $\eta : Id_{\mathbb{E}ns/\mathbb{N}} \to \mathcal{A}$ et $\mu : \mathcal{A}^2 \to \mathcal{A}$ les transformations naturelles obtenues.

Proposition 1.19. : 1) $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \eta, \mu)$ est une monade cartésienne sur $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ et $(U, Id_{\mathcal{A}}) : (\mathbb{E}ns/\mathbb{N}, \mathcal{A}) \to (\mathbb{E}ns, \mathbb{A})$ est un morphisme de catégories munies de monades.
2) $(\mathbb{E}ns/\mathbb{N}, U, \mathcal{A}, \eta, \mu, \mathrm{L})$ est une monade concrète syntaxique (où pour tout $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\mathrm{L}_{\mathbb{C}} = \mathrm{L}_{U\mathbb{C}}$).

Preuve : Le (1) résulte de la section 3 de la première partie. Le (2) résulte de la section 1 de la première partie.

Proposition 1.20. : Soient $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\alpha \in AU(\mathbb{I})$, $n = l(\alpha)$.
1) Soit aussi $(B_o, ..., B_{n-1}) \in A^2U(\mathbb{C})^n$ tels que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim B_o, ..., \dim B_{n-1})$. Alors :

$$\mu_{U\mathbb{C}}(\mathrm{Op}(\alpha, (B_o, ..., B_{n-1}))) = \mathrm{Op}(\alpha, (\mu_{U\mathbb{C}} B_o, ..., \mu_{U\mathbb{C}} B_{n-1})).$$

2) Soit maintenant $(b_o, ..., b_{n-1}) \in AU(\mathbb{C})^n$ tel que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim b_o, ..., \dim b_{n-1})$ Alors :

$$\mu_{U\mathbb{C}}(\alpha\{b_o, ..., b_{n-1}\}) = \mathrm{Op}(\alpha, (b_o, ..., b_{n-1})).$$

Preuve : Le (1) résulte de la proposition 1.9 et le (2) de la section 3 de la première partie.

1.5 Arbres feuillus dans le cadre relativement dimensionnel

Les conventions suivantes sont un cas particulier des conventions 1.1 et de celles de la section 5 de la première partie.

Conventions 1.21. : On se donne tout d'abord un langage (S, ar) sans constante, muni d'une structure relativement dimensionnelle $\delta = (\delta(s) : \mathbb{N}^{ar(s)} \to \mathbb{N})_{s \in S}$. A ce langage on rajoute deux nouveaux symboles Δ et $\square$ où $ar(\Delta) = 1$ et $ar(\square) = 2$. Posons $S' = S \cup \{\Delta, \square\}$.

On prolonge ensuite à (S', ar) la structure relativement dimensionnelle de (S, ar) en posant :

$$\delta(\Delta) = Id : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \delta(\square) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}, (x, y) \mapsto 1 + Sup(x, y).$$

Comme dans la section 5 de la première partie, on le munit ensuite d'une structure chargée en considérant l'application $ch : S' \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$ch(\Delta) = -1,\ ch(\square) = +1 \quad \text{et} \quad \forall s \in S,\ ch(s) = 0.$$

Ensuite, pour chaque $(C, dim) \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, on construit le nouveau langage relativement dimentionnel $(S'(C), ar, \delta)$ comme aux conventions 1.1. On le munit à son tour d'une structure chargée, comme on l'avait fait à la section 5 de la première partie, en posant :

$$\forall \sigma \in S',\ ch.u_0(\sigma) = ch(\sigma),\ \forall c \in C,\ ch.u_1(c) = 0.$$

Après les mêmes abus de langage qu'aux conventions 1.1, on note pour simplifier $A(C) = \mathbb{A}rb(S'(C), ar)$ puis $A^f(C)$ l'ensemble des $a \in A(C)$ qui sont feuillus pour $(S'(C), ar, ch)$.

Notation 1.22. : L'application $(C, dim) \mapsto (A^f(C), dim)$ se prolonge en un sous-foncteur de $\mathcal{A}$. On le note $\mathcal{A}^f$.

Proposition 1.23. : Soit $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$.
1) $\forall c \in U\mathbb{C},\ c(\varnothing) \in A^f U(\mathbb{C})$.
2) $\forall s \in S,\ (n = ar(s) \geq 1),\ \forall (a_o, ..., a_{n-1}) \in A^f U(\mathbb{C})^n$,
$s(a_o, ..., a_{n-1}) \in A^f U(\mathbb{C})$.
3) $\forall \alpha \in A^f U(\mathbb{I}),\ \forall (b_o, ..., b_{n-1}) \in A^f U(\mathbb{C})^n,\ n = l(\alpha)$ et
$\underline{\dim}(\alpha) = (\dim b_o, ..., \dim b_{n-1}) \ \Rightarrow\ \mathrm{Op}(\alpha, (b_o, ..., b_{n-1})) \in A^f U(\mathbb{C})$.

__Preuve__ : Le (1) est immédiat. Pour le (2), voir la section 2 de la première partie, et pour le (3) voir la section 5 de la première partie.

Proposition 1.24. : Soit $a \in AU(\mathbb{C})$, alors :
1) $a \in A^f U(\mathbb{C})$ ssi $|a| \in A^f U(\mathbb{I})$.
2) Lorsque $a \in A^f U(\mathbb{C})$ on a l'equivalence :
a est irréductible ssi $|a|$ est irréductible.

Preuve : Immédiat.

Proposition 1.25. : Soit $a \in A^f U(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors il existe un unique $\alpha \in A^f U(\mathbb{I})$ irréductible vérifiant $\mathrm{L}(\alpha) > 1$ et un unique $\underline{(a_o, ..., a_{n-1})}$ dans $A^f U(\mathbb{C})^n$, tels que $n = l(\alpha)$,
$\overline{\dim}(\alpha) = (\dim a_o, ..., \dim a_{n-1})$ et $a = \mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$.

Preuve : Ecrivons la décomposition canonique $a = \mathrm{op}(\beta, (a_0, ..., a_{n-1}))$ (voir la définition dans la section 5 de la première partie). Pour chaque $j \in [n]$, soit $c_j \in U(\mathbb{I})$ tel que $\dim(c_j) = \dim(a_j)$. On pose ensuite $\alpha = \beta[c_0, ..., c_{n-1}]$. La fin de la preuve est sans difficulté.

Définition 1.26. : La décomposition $a = \mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$ est appelée la *décomposition canonique (relativement dimensionnelle)* de a.

1.6 L'opération $\odot$

Notations 1.27. : Soient $a, b \in A^f U(\mathbb{I})$ tels que $l(a) = p$, $l(b) = q$ et $n = p + q$ Ecrivons $l_{U\mathbb{I}}(a) = (c_o, ..., c_{p-1})$, $l_{U\mathbb{I}}(b) = (c'_o, ..., c'_{q-1})$. On sait que $\underline{a}$, $\underline{b}$ et $\underline{a} \boxdot \underline{b}$ sont dans $A^f(1)$ et que $l(\underline{a} \boxdot \underline{b}) = n$. On pose alors : $a \odot b = (\underline{a} \boxdot \underline{b})[c_0, ..., c_{p-1}, c'_0, ..., c'_{q-1}]$.

Proposition 1.28. : 1) $l(a \odot b) = l(a) + l(b) = l(a \square b)$.
2) $\mathrm{L}(a \odot b) = \mathrm{L}(a \square b) + l(a \square b)$.
3) $l_{U\mathbb{I}}(a \odot b) = l_{U\mathbb{I}}(a).l_{U\mathbb{I}}(b)$.
4) $\underline{\dim}(a \odot b) = \underline{1} + \underline{\sup}(\underline{\dim} a, \underline{\dim} b)$.
5) $\overline{\dim}(a \odot b) = \overline{\dim}(a).\overline{\dim}(b)$.
6) $a \odot b \in A^f U(\mathbb{I})$.
7) $a \odot b$ est irréductible.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 1.29. : Soit $a \in A^f U(\mathbb{I})$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \square$ et a est irréductible. Alors il existe un unique couple $(a_1, a_0) \in A^f U(\mathbb{I})^2$ tel que $a = a_1 \odot a_0$.

Preuve : *Existence* : On a vu dans la section 5 de la première partie qu'il existe un unique (b_1, b_0) dans $A^f(1)^2$ tel que $a = b_1 \boxdot b_0$. Posons $p = l(b_1)$, $q = l(b_0)$ alors $p + q = l(a)$. Ecrivons $l_{U\mathbb{I}}(a) = (c_o, ..., c_{p+q-1})$

et posons $a_1 = b_1[c_o, ..., c_{p-1}]$, $a_0 = b_0[c_p, ..., c_{p+q-1}]$. On montre que $a_1, a_0 \in A^f U(\mathbb{I})$ et que $a = a_1 \odot a_0$.
Unicitée : Résulte encore des sections 3 et 5 de la première partie.

1.7 La monade $\mathcal{A}^f$

Proposition 1.30. : Soit $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$.
1) $\forall c \in U(\mathbb{C})$, $\eta_{U\mathbb{C}}(c) \in A^f U(\mathbb{C})$.
2) $\forall A \in A^{f2}U(\mathbb{C})$, $\mu_{U\mathbb{C}}\tilde{\imath}_{U\mathbb{C}}(A) \in A^f U(\mathbb{C})$ (où $\imath : A^f \to A$ est la transformation naturelle canonique).

Preuve : Le (1) est immédiat. Pour le (2), on a
$\mu_{U\mathbb{C}}\tilde{\imath}_{U\mathbb{C}}(A) = \mathrm{Op}(|A|, l_{A^f U(\mathbb{C})}(A))$ où $|A| \in A^f U(\mathbb{I})$ et
$l_{A^f U(\mathbb{C})}(A) \in MoA^f U(\mathbb{C}) \subset MoAU(\mathbb{C})$. Donc $\mu_{U\mathbb{C}}\tilde{\imath}_{U\mathbb{C}}(A) \in A^f U(\mathbb{C})$.

Notations 1.31. : On peut alors définir les flèches $\eta'_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{A}^f(\mathbb{C})$ et $\mu'_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{f2}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}^f(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$, par restriction de $\eta_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathcal{A}(\mathbb{C})$ et $\mu_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^2(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(\mathbb{C})$. On vérifie que $\eta'_{\mathbb{C}}$ et $\mu'_{\mathbb{C}}$ sont naturels en $\mathbb{C}$.

Proposition 1.32. : $\mathcal{A}^f = (\mathcal{A}^f, \eta', \mu')$ est une monade sur $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ qui est cartésienne.

Preuve : Le fait que $\mathcal{A}^f$ est une monade résulte de la section 3 de la première partie. Sa cartésianité vient de ce que l'inclusion $\mathcal{A}^f \to \mathcal{A}$ est un morphisme de monade qui est cartésien et $\mathcal{A}$ est cartésienne.

Proposition 1.33. : $(\mathbb{E}ns/\mathbb{N}, U, \mathcal{A}^f, \eta', \mu', \mathrm{L}')$ est une monade concrète syntaxique (où pour tout $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\mathrm{L}'_{\mathbb{C}}$ est la restriction ce $\mathrm{L}_{\mathbb{C}}$).

Preuve : Résulte de la section 1 de la première partie.

2. La monade ω

Introduction : La monade des ∞-catégories strictes est bien connue (voir [2],[4],[13] et [14]). Nous en donnons ici une présentation légèrement différente qui est en cohérence avec l'ensemble de ce travail. Bien que n'étant pas syntaxique, elle se construit malgré tout avec des arbres et en utilise de nombreuses propriétés. Le lien entre arbre et ensemble globulaire, qui apparait ici avec l'application Γ (notée $(-)^*$ dans [2]), va continuer à être fort utile dans les sections qui suivent, ainsi que les morphismes u^k.

2.1 L'ensemble globulaire $\mathbb{A}rb$

• Habituellement on appelle ensemble globulaire un foncteur $\underline{Gl}^{op} \to \mathbb{E}ns$ où $\underline{Gl}$ désigne la catégorie qui a pour objets les entiers naturels et où les morphismes ...

$$0 \overset{d_0^0}{\underset{d_0^1}{\rightrightarrows}} 1 \overset{d_1^0}{\underset{d_1^1}{\rightrightarrows}} 2 \overset{d_2^0}{\underset{d_2^1}{\rightrightarrows}} 3 \rightrightarrows . ....$$

... vérifient les équations $\forall k \in [2],\ \forall j \in [n],\ d_{j+1}^0.d_j^k = d_{j+1}^1.d_j^k$.
Nous allons maintenant en donner une définition légèrement différente plus en adéquation avec les outils utilisés ici.

Notations et définitions 2.1. : 1) Un *ensemble globulaire* $\mathbb{G}$ est la donnée :
- d'un ensemble G,
- d'une application $dim : G \to \mathbb{N}$ (Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, notons : $G/n = \{c \in G/\ dim(c) > n\}$),
- d'une famille de couples d'applications $(\partial_p^1, \partial_p^0 : G/p \to G)_{p\in\mathbb{N}}$,

vérifiant les propriétés suivantes :
$(EG1)$ $\forall c \in G, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ dim(c) > p \ \Rightarrow\ dim\ \partial_p^k(c) = p$,
$(EG2)$ $\forall c \in G, \forall p, q \in \mathbb{N}, \forall k, k' \in [2]$,

$$dim(c) > p > q \ \Rightarrow\ \partial_q^k \partial_p^{k'}(c) = \partial_q^k(c).$$

2) Un *morphisme* $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ entre ensembles globulaires est une application $g : G \to G'$ telle que :
$(MEG1)$ $\forall c \in G,\ dim\ g(c) = dim(c)$,
$(MEG2)$ $\forall c \in G, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ dim(c) > p \ \Rightarrow\ \partial_p^k g(c) = g\partial_p^k(c)$.
3) Les ensembles globulaires et leurs morphismes forment une catégorie notée $\mathbb{G}lob$.

Proposition 2.2. : On a une équivalence de catégorie :

$$[\underline{Gl}^{op}, \mathbb{E}ns] \simeq \mathbb{G}lob.$$

<u>*Preuve*</u> : Elle est donnée par $G \mapsto (\coprod_{n\in\mathbb{N}} G(n), dim, (\partial_n^k)_{k\in[2],n\in\mathbb{N}})$ où $dim(m,x) = m$ et pour $m > n,\ \partial_n^k(m,x) = (n, G(d_{nm}^k)(x))$, la flèche $d_{nm}^k : n \to m$ étant la composée $n \xrightarrow{d_n^k} n+1 \xrightarrow{d_{n+1}^k} ... \xrightarrow{d_{m-1}^k} m$.

• Considérons maintenant le langage (S, ar), où $S = \mathbb{N}$ et $ar = Id_{\mathbb{N}}$

Notations 2.3. : - On note $\mathbb{A}rb = \mathbb{A}rb(S, ar)$.
- Pour chaque $a \in \mathbb{A}rb$, on pose $\dim(a) = \mathrm{h}(a) - 1$.

Définition 2.4. : Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on définit $\partial_p : \mathbb{A}rb \to \mathbb{A}rb$, par induction sur p.
- Si $p = 0$ alors, pour tout $a \in \mathbb{A}rb$, on pose $\partial_0(a) = 0(\varnothing)$.
- Si $p > 0$ alors, pour tout $a \in \mathbb{A}rb$,
.. Si $a = 0(\varnothing)$, on pose $\partial_p(a) = 0(\varnothing)$.
.. Si $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$, on pose
$\partial_p(a) = n(\partial_{p-1}a_0, ..., \partial_{p-1}a_{n-1})$.

Proposition 2.5. : Soit $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{A}rb$.
1) - Si $p \geq \dim(a)$, alors $\partial_p(a) = a$.
- Si $\dim(a) \geq p$, alors $\dim\partial_p(a) = p$.
2) $\dim\partial_p(a) = \inf(p, \dim(a))$.
3) Pour tout $q \in \mathbb{N}$, si $q < p$, alors $\partial_q\partial_p(a) = \partial_q(a)$.

Preuve : Le (1) se montre par induction sur p. La première partie se fait sans difficulté. Pour la deuxième partie, lorsque $p > 0$ et $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$, on commence par montrer, grâce à l'hypothèse d'induction, que $\forall i \in [n],\ dim\ \partial_{p-1}(a_i) \leq p - 1$. Le (2) résulte du (1). Le (3) se montre par induction sur q.

Corollaire 2.6. : $(\mathbb{A}rb, \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est un ensemble globulaire, où pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $k \in [2]$, $\partial_p^k : \mathbb{A}rb/p \to \mathbb{A}rb$ est la restriction de ∂_p.

Proposition 2.7. : Soient $a \in \mathbb{A}rb$ et $p \in \mathbb{N}$.
1) On suppose que $\partial_p(a) = n(a'_0, ..., a'_{n-1})$, où $n \geq 1$. Alors $p > 0$ et il existe un unique $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{A}rb^n$ tel que $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$ et $\forall j \in [n]$,
$a'_j = \partial_{p-1}(a_j)$.
2) Si $p > 0$ et $\partial_p(a) = 0(\varnothing)$, alors $a = 0(\varnothing)$.

Preuve : Dans le (1), on distingue les cas $p \geq \dim(a)$ et $p < \dim(a)$. Le (2) est sans difficulté.

2.2 Les lois $\circ_p$ sur $\mathbb{A}rb$

Définition 2.8. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$. On suppose que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. On construit $a^1 \circ_p a^0$ par induction sur p (ou sur $\mathrm{L}(a^1) + \mathrm{L}(a^0)$).

- Si $\inf(\dim a^1, \dim a^0) = 0$: Soit $k \in [2]$ tel que $\dim(a^k) = 0$. Alors on pose :

$$a^1 \circ_p a^0 = a^{1-k}$$

- Si $\inf(\dim a^1, \dim a^0) > 0$:

.. si $p = 0$: On peut écrire de façon unique $\forall k \in [2],\ a^k = n_k(a_0^k, ..., a_{n_k-1}^k)$ où $n_k \geq 1$. Alors on pose :

$$a^1 \circ_p a^0 = (n_1 + n_0)(a_0^1, ..., a_{n_1-1}^1, a_0^0, ..., a_{n_0-1}^0)$$

.. si $p > 0$: Notons $b = \partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Alors b s'écrit $b = n(b_0, ..., b_{n-1})$, où $n \geq 1$ (voir la remarque $(R1)$) et dans ce cas on peut aussi écrire de façon unique $a^k = n(a_0^k, ..., a_{n-1}^k)$ (voir $(R2)$). Alors on pose :

$$a^1 \circ_p a^0 = n(a_0^1 \circ_{p-1} a_0^0, ..., a_{n-1}^1 \circ_{p-1} a_{n-1}^0)$$

Remarque 2.9. : $(R1)$ On ne peut avoir $b = 0(\varnothing)$ (voir le (2) de la proposition 2.7).

$(R2)$ Résulte du (1) de la proposition 2.7.

Proposition 2.10. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$ tels que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$.

1) Si $\inf(\dim a^1, \dim a^0) \leq p$ on a $a^1 \circ_p a^0 = a^{1-k}$ (où $k \in [2]$ est tel que $\dim(a^k) \leq p$).

2) On a $\dim(a^1 \circ_p a^0) = \sup(\dim\, a^1, \dim\, a^0)$.

3) Soit aussi $q \in \mathbb{N}$

- Si $q \leq p,\ \partial_q(a^1 \circ_p a^0) = \partial_q(a^1) = \partial_q(a^0)$.
- Si $q > p,\ \partial_q(a^1 \circ_p a^0) = \partial_q(a^1) \circ_p \partial_q(a^0)$.

Preuve : Par induction sur p.

Proposition 2.11. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^2, a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^3$ tels que $\partial_p(a^2) = \partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Alors :

$$a^2 \circ_p (a^1 \circ_p a^0) = (a^2 \circ_p a^1) \circ_p a^0.$$

Preuve : Par induction sur p.

Proposition 2.12. : Soient $p, q \in \mathbb{N}$, où $p > q$ et $(a^{ij})_{(i,j)\in[2]^2} \in \mathbb{A}rb^{[2]^2}$ tels que $\forall k \in [2],\ \partial_p(a^{k1}) = \partial_p(a^{k0})$ et $\partial_q(a^{1k}) = \partial_q(a^{0k})$. Alors :

$$(a^{11} \circ_p a^{10}) \circ_q (a^{01} \circ_p a^{00}) = (a^{11} \circ_q a^{01}) \circ_p (a^{10} \circ_q a^{00}).$$

Preuve : Par induction sur q. On distingue les cas $\inf_{(k,k')} \dim(a^{kk'}) = 0$ et $\inf_{(k,k')} \dim(a^{kk'}) > 0$ (où l'on étudie les sous-cas $q = 0$ et $q > 0$).

2.3 Le multi-foncteur $\overset{n}{\oplus}$

Notation 2.13. : Donnons-nous une liste $\bar{\mathbb{G}} = (\mathbb{G}_j)_{j\in[n]}$ d'ensembles globulaires. A partir de cette liste on construit un nouvel ensemble globulaire, de la façon suivante :
Soit $(G'_j)_{j\in[n+1]}$ la nouvelle liste d'ensembles définie par $G'_0 = [n+1]$ et $\forall j \in [n],\ G'_{j+1} = G_j$. On pose alors $\hat{G} = \coprod_{j\in[n+1]} G'_j$. On définit ensuite $dim : \hat{G} \to \mathbb{N}$ par $dim(0,j) = 0$ et $dim(j+1,c) = dim(c)+1$.
Pour chaque $p \in \mathbb{N}$ et $k \in [2]$, $\partial^k_p : \hat{G}/p \to \hat{G}$ est défini par :

$$\partial^0_0(j,c) = (0,j), \quad \partial^1_0(j,c) = (0,j-1).$$

et si $p > 0$, $\partial^k_p(j,c) = (j, \partial^k_{p-1}(c))$.
$(\hat{G}, dim, (\partial^1_p, \partial^2_p)_{p\in\mathbb{N}})$ est un ensemble globulaire que l'on note $\bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j$ (ou encore $\overset{n}{\oplus}(\bar{\mathbb{G}})$).

$\overset{n}{\oplus}(\bar{\mathbb{G}})$ est en fait solution d'un problème universel que l'on va préciser maintenant.

Notations 2.14. : • Fixons la liste $\bar{\mathbb{G}} = (\mathbb{G}_j)_{j\in[n]}$ d'ensembles globulaires et notons $\mathcal{U}$ la catégorie qui a :
- Pour objets , les triplets $(\mathbb{G}, (u_i)_{i\in[n+1]}, (f_i)_{i\in[n]})$ où :
.. $\mathbb{G}$ est un ensemble globulaire,
.. $(u_i)_{i\in[n+1]}$ est une famille d'objets de $\mathbb{G}$ (i.e. $\forall j \in [n+1],\ dim(u_j) = 0$),
.. $(f_i : \mathbb{G}_i \to \mathbb{G}(u_{i+1}, u_i))_{i\in[n]}$ est une liste de morphismes d'ensembles globulaires (où plus généralement, pour $u, v \in \mathbb{G}$ tels que

$dim(u) = dim(v) = 0$, on note $\mathbb{G}(u, v)$ l'ensemble des $c \in G/0$ tels que $\partial_0^0(c) = u$ et $\partial_0^1(c) = v$ que l'on munit des applications
$dim' : \mathbb{G}(u, v) \to \mathbb{N},\ c \mapsto dim(c) - 1$ et $\partial_p'^k : \mathbb{G}(u, v)/p \to \mathbb{G}(u, v)$,
$c \mapsto \partial_{p+1}^k(c))$.
- Pour flèches $g : (\mathbb{G}, (u_i), (f_i)) \to (\mathbb{G}', (u_i'), (f_i'))$, un morphisme d'ensemble globulaire $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ tel que :
1) $\forall i \in [n + 1],\ g(u_i) = u_i'$,
2) $\forall i \in [n],\ g|_i.f_i = f_i'$ où, $g|_i : \mathbb{G}(u_{i+1}, u_i) \to \mathbb{G}(u_{i+1}', u_i')$ est la restriction de g.
• A partir de la liste $\bar{\mathbb{G}}$, fixée précédemment, on construit
$\hat{\mathcal{G}} = (\hat{\mathbb{G}}, (\omega_i)_{i\in[n+1]}, (\sigma_i)_{i\in[n]})$ où $\hat{\mathbb{G}} = \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j,\ \omega_i = (0, i)$ et
$\sigma_i : \mathbb{G}_i \to \hat{\mathbb{G}}(\omega_{i+1}, \omega_i)$ est le morphisme d'ensembles globulaires donné par $\sigma_i(c) = (i + 1, c)$.

Proposition 2.15. : On a $\hat{\mathcal{G}} \in |\mathcal{U}|$. $\hat{\mathcal{G}}$ est même un objet initial dans $\mathcal{U}$.

Preuve : Soit $\mathcal{G} = (\mathbb{G}, (u_i), (f_i)) \in |\mathcal{U}|$. On construit $g : \hat{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$, en posant $g(0, j) = u_j$ et si $j > 0,\ g(j, c) = f_{j-1}(c)$.

Notation 2.16. : Soient maintenant $(\mathbb{G}_j)_{j\in[n]}$ et $(\mathbb{G}_j')_{j\in[n]}$ deux listes de n ensembles globulaires et $(g_j : \mathbb{G}_j \to \mathbb{G}_j')_{j\in[n]}$ une liste de morphismes d'ensembles globulaires. Alors $(\bigoplus_j \mathbb{G}_j', (\omega_j'), (\sigma_j'.g_j)) \in |\mathcal{U}|$ et donc, comme $\hat{\mathcal{G}}$ est initial, il existe un unique morphisme d'ensemble globulaire $g : \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j \to \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j'$ tel que :

$$1)\ \forall j \in [n + 1],\ g(\omega_j) = \omega_j', \quad 2)\ \forall \in [n],\ g|_j.\sigma_j = \sigma_j'.g_j.$$

g est noté $\bigoplus_{j\in[n]} g_j : \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j \to \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j'$.

Proposition 2.17. : L'application $\overset{n}{\oplus} : \mathbb{G}lob^n \to \mathbb{G}lob$ définie,
- sur les objets $(\mathbb{G}_j)_{j\in[n]}$ par $\overset{n}{\oplus}((\mathbb{G}_j)_{j\in[n]}) = \bigoplus_{j\in[n]} \mathbb{G}_j$,
- sur les flèches $(g_j : \mathbb{G}_j \to \mathbb{G}_j')_{j\in[n]}$ par $\overset{n}{\oplus}((g_j)) = \bigoplus_{j\in[n]} g_j$, est fonctorielle.

Preuve : Immédiat.

2.4 Ensemble globulaire associé à un arbre

Notation 2.18. : On construit une application $\mathbb{A}rb \to |\mathbb{G}lob|$, notée Γ , par induction sur la longueur des arbres (Dans [2], l'ensemble globulaire $\Gamma(a)$ est noté a^*). Soit $a \in \mathbb{A}rb$,
- Si $a = 0(\varnothing)$, on pose $\Gamma(a) = \Gamma_0$ où Γ_0 désigne $\{0\}$ vu comme ensemble globulaire ($dim(0) = 0$ et $\Gamma_0/0 = \varnothing$).
- Si $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$, on pose $\Gamma(a) = \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma(a_j)$.

Notation 2.19. : Pour chaque $k \in [2]$ et $p \in \mathbb{N}$ on construit des morphismes d'ensembles globulaires $\mathrm{d}^k_p(a) : \Gamma(\partial_p(a)) \to \Gamma(a)$, par induction sur p (ou sur $\mathrm{L}(a)$) :
- Si $a = 0(\varnothing)$, on pose $\mathrm{d}^k_p(a) = Id_{\Gamma_0}$.
- Si $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$, alors,
.. si $p = 0$, $\mathrm{d}^k_0(a) : \Gamma_0 \to \Gamma(a)$ est défini par :

$$\mathrm{d}^0_0(a)(0) = (0, n) = \omega_n, \quad \mathrm{d}^1_0(a)(0) = (0, 0) = \omega_0.$$

- Si $p > 0$, on pose :
$\mathrm{d}^k_p(a) = \bigoplus_{j\in[n]} \mathrm{d}^k_{p-1}(a_j) : \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma\partial_{p-1}(a_j) \to \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma(a_j)$.

Proposition 2.20. : Soient $a \in \mathbb{A}rb$, $k \in [2]$ et $p \in \mathbb{N}$.
1) Si $dim(a) \leq p$ alors $\partial_p(a) = a$ et $\mathrm{d}^k_p(a) = Id_{\Gamma(a)}$.
2) Soient aussi $q \in \mathbb{N}$ tel que $q < p$ et $k' \in [2]$, alors
$\mathrm{d}^k_q(a) = \mathrm{d}^{k'}_p(a).\mathrm{d}^k_q\partial_p(a)$.

Preuve : (1) La première identité a déjà été montrée. La seconde se montre par induction sur p. Le (2) se montre aussi par induction sur p (ou sur $\mathrm{L}(a)$).

2.5 Les morphismes u^k

Notation 2.21. : Etant donnés $p \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$ tels que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$ on va construire des morphismes d'ensembles globulaires canoniques :

$$\Gamma(a^1) \xrightarrow{\mathrm{u}^1_{p(a^1,a^0)}} \Gamma(a^1 \circ_p a^0) \xleftarrow{\mathrm{u}^0_{p(a^1,a^0)}} \Gamma(a^0)$$

par induction sur p (ou sur $\mathrm{L}(a^1) + \mathrm{L}(a^0)$). Posons $a = a^1 \circ_p a^0$. Pendant la construction on note simplement u^1 et u^0 les deux morphismes $\mathrm{u}^1_{p(a^1,a^0)}$

et $\mathrm{u}^0_{p(a^1,a^0)}$.
- Si $\inf(\dim a^1, \dim a^0) = 0$, soit $k \in [2]$ tel que $dim(a^k) = 0$, alors on pose $\mathrm{u}^k = \mathrm{d}^k_p(a)$ et $\mathrm{u}^{1-k} = Id_{\Gamma(a)}$.
- Si $\inf(\dim a^1, \dim a^0) > 0$,
.. si $p = 0$, alors on peut écrire $\forall k \in [2],\ a^k = n_k(a^k_0, ..., a^k_{n_k-1})$ avec $n_k \geq 1$ et $a = (n_1 + n_0)(a^1_0, ..., a^1_{n_1-1}, a^0_0, ..., a^0_{n_0-1})$. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, posons $\omega^0_j = (0, n_1 + j)$ et $\omega^1_j = (0, j)$, et pour chaque $k \in [2],\ j \in [n_k]$ et $x \in \Gamma(a^k_j),\ \sigma^0_j(x) = (n_1 + j + 1, x)$ et $\sigma^1_j(x) = (j + 1, x)$. On vérifie que
$\forall k \in [2], \forall j \in [n_k],\ \sigma^k_j : \Gamma(a^k_j) \to \Gamma(a)(\omega^k_{j+1}, \omega^k_j)$ est un morphisme d'ensemble globulaire et que $(\Gamma(a), (\omega^k_j), (\sigma^k_j)) \in |\mathcal{U}|$. Il existe donc un unique morphisme d'ensemble globulaire
$\mathrm{u}^k : \Gamma(a^k) = \bigoplus_{j\in[n_k]} \Gamma(a^k_j) \to \Gamma(a)$ tel que $\forall j \in [n_k + 1]$,
$\mathrm{u}^k(\omega_j) = \omega^k_j$ et $\forall j \in [n_k],\ \mathrm{u}^k|_j.\sigma_j = \sigma^k_j$ (où $\mathrm{u}^k|_j$ est la restriction de u^k à $\Gamma(a^k)(\omega_{j+1}, \omega_j) \to \Gamma(a)(\omega^k_{j+1}, \omega^k_j)$).
.. si $p > 0$, on sait qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \in [2]$, $a^k = n(a^k_0, ..., a^k_{n-1})$ et alors $a = n(a^1_0 \circ_{p-1} a^0_0, ..., a^1_{n-1} \circ_{p-1} a^0_{n-1})$. On pose alors :

$$\mathrm{u}^k = \bigoplus_{j\in[n]} \mathrm{u}^k_j : \Gamma(a^k) = \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma(a^k_j) \to \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma(a^1_j \circ_{p-1} a^0_j) = \Gamma(a).$$

(où $\mathrm{u}^k_j = \mathrm{u}^k_{(p-1)(a^1_j,a^0_j)}$).

Proposition 2.22. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$ tels que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Alors, si $\inf(\mathrm{dim}a^1, \mathrm{dim}a^0) \leq p$ (soit $k \in [2]$ tel que $\dim(a^k) \leq p$), on a $\mathrm{u}^k = \mathrm{d}^k_p(a)$ et $\mathrm{u}^{1-k} = Id_{\Gamma(a)}$ (où $a = a^1 \circ_p a^0$).

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur p.

Proposition 2.23. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$ tels que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Notons $b = \partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Alors le carré suivant commute et c'est une somme amalgamée dans $\mathbb{G}lob$:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(b) \arrow[r, "\mathrm{d}^1_p(a^0)"] \arrow[d, "\mathrm{d}^0_p(a^1)"'] & \Gamma(a^0) \arrow[d, "\mathrm{u}^0"] \\ \Gamma(a^1) \arrow[r, "\mathrm{u}^1"] & \Gamma(a^1 \circ_p a^0) \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{u}^k = \mathrm{u}^k_{p(a^1,a^0)}$.

Preuve : Pour la commutation du carré, on l'obtient par induction sur p. Pour la somme amalgamée, on montre successivement que :
- Pour tout $k \in [2]$, u^k est injectif,
- $\forall (x^1, x^0) \in \Gamma(a^1) \times \Gamma(a^0)$, $\mathrm{u}^1(x^1) = \mathrm{u}^0(x^0) \Rightarrow \exists y \in \Gamma(b), \forall k \in [2]$, $\mathrm{d}_p^{1-k}(a^k)(y) = x^k$,
- la famille $\Gamma(a^1) \xrightarrow{\mathrm{u}^1} \Gamma(a^1 \circ_p a^0) \xleftarrow{\mathrm{u}^0} \Gamma(a^0)$ est épimorphe dans $\mathbb{E}ns$,
- notre carré vérifie la propriété universelle.
Les trois premières étapes se montrent par induction sur p.

Proposition 2.24. : Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $(a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^2$ tels que $\partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. Pour simplifier, on note $a = a^1 \circ_p a^0$ et $\forall k \in [2]$, $\mathrm{u}^k = \mathrm{u}^k_{p(a^1,a^0)}$. Alors :
1) Si $q < p$, $\forall k, k' \in [2]$, $\mathrm{d}_q^k(a) = \mathrm{u}^{k'}.\mathrm{d}_q^k(a^{k'})$,
2) Si $q = p$, $\forall k \in [2]$, $\mathrm{d}_q^k(a) = \mathrm{u}^k.\mathrm{d}_q^k(a^k)$,
3) Si $q > p$, $\forall k, k' \in [2]$, $\mathrm{d}_q^k(a).\mathrm{u}_q^{k'} = \mathrm{u}^{k'}.\mathrm{d}_q^k(a^{k'})$, où $\mathrm{u}_q^{k'} = \mathrm{u}^{k'}_{p(\partial_q a^1, \partial_q a^0)}$.

Preuve : par induction sur p.

Proposition 2.25. : Soient $p \in \mathbb{N}$ et $(a^2, a^1, a^0) \in \mathbb{A}rb^3$ tels que $\partial_p(a^2) = \partial_p(a^1) = \partial_p(a^0)$. On note $\mathrm{u}^\varepsilon_{ij} = \mathrm{u}^\varepsilon_{p(a^i,a^j)}$, $\mathrm{u}^\varepsilon_{i(jk)} = \mathrm{u}^\varepsilon_{p(a^i, a^j \circ_p a^k)}$, $\mathrm{u}^\varepsilon_{(ij)k} = \mathrm{u}^\varepsilon_{p(a^i \circ_p a^j, a^k)}$ Alors :
1) $\mathrm{u}^1_{(21)0}.\mathrm{u}^0_{21} = \mathrm{u}^0_{2(10)}.\mathrm{u}^1_{10}$,
2) $\mathrm{u}^0_{(21)0} = \mathrm{u}^0_{2(10)}.\mathrm{u}^0_{10}$,
3) $\mathrm{u}^1_{2(10)} = \mathrm{u}^1_{(21)0}.\mathrm{u}^1_{21}$.

Preuve : Par induction sur p.

Proposition 2.26. : Soient $p, q \in \mathbb{N}$, où $p > q$ et $(a^{ij})_{(i,j) \in [2]^2} \in \mathbb{A}rb^{[2]^2}$ tels que $\forall k \in [2]$, $\partial_p(a^{k1}) = \partial_p(a^{k0})$ et $\partial_q(a^{1k}) = \partial_q(a^{0k})$. On note :
$e = (a^{11} \circ_p a^{10}) \circ_q (a^{01} \circ_p a^{00}) = (a^{11} \circ_q a^{01}) \circ_p (a^{10} \circ_q a^{00})$, $\mathrm{u}^\varepsilon_t = \mathrm{u}^\varepsilon_{t(\alpha,\beta)}$,

$\mathrm{u}^{\varepsilon}_{\bullet k} = \mathrm{u}^{\varepsilon}_{q(a^{1k},a^{0k})}$, $\mathrm{u}^{\varepsilon}_{k\bullet} = \mathrm{u}^{\varepsilon}_{p(a^{k1},a^{k0})}$. Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(a^{11}) \arrow[r, "\mathrm{u}^1_{\bullet 1}"] \arrow[d, "\mathrm{u}^1_{1\bullet}"'] & \Gamma(a^{11} \circ_q a^{01}) \arrow[d, "\mathrm{u}^1_p"] & \Gamma(a^{01}) \arrow[l, "\mathrm{u}^0_{\bullet 1}"'] \arrow[d, "\mathrm{u}^1_{0\bullet}"] \\
\Gamma(a^{11} \circ_p a^{10}) \arrow[r, "\mathrm{u}^1_q"] & \Gamma(e) & \Gamma(a^{01} \circ_p a^{00}) \arrow[l, "\mathrm{u}^0_q"'] \\
\Gamma(a^{10}) \arrow[r, "\mathrm{u}^1_{\bullet 0}"] \arrow[u, "\mathrm{u}^0_{1\bullet}"] & \Gamma(a^{10} \circ_q a^{00}) \arrow[u, "\mathrm{u}^0_p"'] & \Gamma(a^{00}) \arrow[l, "\mathrm{u}^0_{\bullet 0}"'] \arrow[u, "\mathrm{u}^0_{0\bullet}"']
\end{tikzcd}$$

Preuve : Par induction sur q.

2.6 L'∞-catégorie stricte $\omega(\mathbb{G})$

Notations 2.27. : Soit $\mathbb{G}$ un ensemble globulaire. On note $\omega(\mathbb{G})$ l'ensemble des triplets (n, a, g) où $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{A}rb$, tel que $dim(a) \leq n$, et $g : \Gamma(a) \to \mathbb{G}$ est un morphisme d'ensemble globulaire. On définit ensuite l'application $dim : \omega(\mathbb{G}) \to \mathbb{N}$ en posant $dim(n, a, g) = n$. Pour chaque $p \in \mathbb{N}$ et $k \in [2]$ on définit aussi une application $\partial^k_p : \omega(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G})$ en posant $\partial^k_p(n, a, g) = (p, \partial_p(a), g.\mathrm{d}^k_p(a))$.

Proposition 2.28. : $(\omega(\mathbb{G}), dim, (\partial^1_p, \partial^0_p)_{p\in\mathbb{N}})$ est un ensemble globulaire.

Preuve : Résulte essentiellement de la proposition 2.20.

Notations 2.29. : Lorsque $\alpha \in \omega(\mathbb{G})$, on définit $\underline{\alpha} \in \mathbb{A}rb$ et $g_\alpha : \Gamma(\underline{\alpha}) \to \mathbb{G}$ la flèche de $\mathbb{G}lob$ telle que $\alpha = (dim(\alpha), \underline{\alpha}, g_\alpha)$.

On va maintenant montrer que $\omega(\mathbb{G})$ a canoniquement une structure d'∞-catégorie stricte. Commençons donc par donner une définition "globale" des ∞-catégories strictes (Pour le concept originel voir [8]) :

Définition 2.30. : On appelle ∞-*catégorie stricte* la donnée :
- d'un ensemble C,
- d'une application $dim : C \to \mathbb{N}$,
- d'une application $\imath : C \to C$,
- d'une famille d'applications $(\partial^k_p : C \to C)_{(k,p)\in[2]\times\mathbb{N}}$,

- d'une autre famille d'applications $(\circ_p : \underset{p}{\circledast} C \to C)_{p\in\mathbb{N}}$ où on note $\underset{p}{\circledast} C = \{(x_1, x_0)\ C^2/\ dim(x_1) = dim(x_0) > p$ et $\partial_p^0(x_1) = \partial_p^1(x_0)\}$.

Ces données doivent satisfaire les axiomes suivants :

$(GD)\ \forall k \in [2], \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in C,\ dim\, \partial_p^k(x) = p$,

$(GG)\ \forall k, k' \in [2], \forall p, q \in \mathbb{N}, \forall x \in C,\ q < p\ \Rightarrow\ \partial_q^k \partial_p^{k'}(x) = \partial_q^k(x)$,

$(GR)\ \forall k \in [2], \forall p, n \in \mathbb{N}, \forall x \in C,\ p \geq n = dim(x)\ \Rightarrow\ \partial_p^k(x) = \imath^{p-n}(x)$,

$(CD)\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall (x_1, x_0) \in \underset{p}{\circledast} C,\ dim(x_1 \circ_p x_0) = dim(x_1) = dim(x_0)$,

$(CG)\ \forall p, q \in \mathbb{N}, \forall (x_1, x_0) \in \underset{p}{\circledast} C, \forall k \in [2]$,

$$q \leq p\ \Rightarrow\ \partial_q^k(x_1 \circ_p x_0) = \partial_q^k(x_k),$$
$$q > p\ \Rightarrow\ \partial_q^k(x_1 \circ_p x_0) = \partial_q^k(x_1) \circ_p \partial_q^k(x_0),$$

$(Uni)\ \forall p, n \in \mathbb{N}, \forall x \in C,\ p < n = dim(x)\ \Rightarrow\ x \circ_p (\imath^{n-p}.\partial_p^0)(x) = x$ et $(\imath^{n-p}.\partial_p^1)(x) \circ_p x = x$,

$(Ass)\ \forall p \in \mathbb{N}, \forall (x_2, x_1, x_0) \in C^3$,

$(x_2, x_1), (x_1, x_0) \in \underset{p}{\circledast} C\ \Rightarrow\ x_2 \circ_p (x_1 \circ_p x_0) = (x_2 \circ_p x_1) \circ_p x_0$,

$(Ech)\ \forall p, q \in \mathbb{N}, \forall (x_{00}, x_{01}, x_{10}, x_{11}) \in C^4,\ p > q$ et $\forall k \in [2]$,

$(x_{k1}, x_{k0}) \in \underset{p}{\circledast} C$ et $(x_{1k}, x_{0k}) \in \underset{q}{\circledast} C\ \Rightarrow$

$(x_{11} \circ_p x_{10}) \circ_q (x_{01} \circ_p x_{00}) = (x_{11} \circ_q x_{01}) \circ_p (x_{10} \circ_q x_{00})$.

Notations et définitions 2.31. : Sur $\omega(\mathbb{G})$ on définit les lois suivantes :

- une application $\imath : \omega(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G})$, en posant $\imath(n, a, g) = (n+1, a, g)$,
- pour chaque $p \in \mathbb{N}$ l'application $\circ_p : \underset{p}{\circledast} \omega(\mathbb{G}) \to \mathbb{G},\ (\alpha_1, \alpha_0) \mapsto \alpha_1 \circ_p \alpha_0$

où $\alpha_1 \circ_p \alpha_0$ est défini de la façon suivante :

Tout d'abord posons, pour chaque $k \in [2],\ \alpha_k = (n_k, a_k, g_k)$. Alors, par hypothèse, $n_1 = n_0,\ \partial_p(a_1) = \partial_p(a_0)$ et on a l'identité $g_1.\mathrm{d}_p^1(a_0) = g_0.\mathrm{d}_p^0(a_1)$ et donc, grâce à la somme amalgamée donnée à la proposition 2.23, on obtient l'unique morphisme d'ensemble globulaire $g_{10} : \Gamma(a_1 \circ_p a_0) \to \mathbb{G}$ qui vérifie $g_{10}.\mathrm{u}^1 = g_1$ et $g_{10}.\mathrm{u}^0 = g_0$ (où $\mathrm{u}^k = \mathrm{u}^k_{p(a_1, a_0)}$).

On peut alors poser $\alpha_1 \circ_p \alpha_0 = (n, a_1 \circ_p a_0, g_{10})$ (où $n = n_1 = n_0$).

Proposition 2.32. : $(\omega(\mathbb{G}), \mathrm{dim}, \imath, (\partial_p^k)_{(k,p)\in[2]\times\mathbb{N}}, (\circ_p)_{p\in\mathbb{N}})$ est une ∞-catégorie stricte.

<u>*Preuve*</u> : Remarquons déjà que (GD) et (CD) sont immédiats. Ensuite on obtient :

(GG) par la proposition 2.20,
(GR) par la proposition 2.5 et la proposition 2.20,
(CG) par la proposition 2.10 et la proposition 2.24,
(Uni) par la proposition 2.10 et la proposition 2.22,
(Ass) par la proposition 2.11 et la proposition 2.25,
(Ech) par la proposition 2.12 et la proposition 2.26.

2.7 ∞-catégorie stricte libre

Donnons déjà une version globale de la notion d'∞-foncteur strict.

Définition 2.33. : $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$ étant deux ∞-catégories strictes, un ∞-foncteur strict $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ est la donnée d'une application $F : C \to C'$ vérifiant les conditions suivantes :
(FD) $\forall x \in C,\ dimF(x) = dim(x)$,
(FG) $\forall x \in C, \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ F\partial_p^k(x) = \partial_p^k F(x)$,
(FC) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall (x_1, x_0) \in \underset{p}{\circledast} C,\ F(x_1 \circ_p x_0) = F(x_1) \circ_p F(x_0)$.

Notations 2.34. : On note ∞-$\mathbb{C}at$ la catégorie des ∞-catégories strictes et de leurs ∞-foncteurs stricts. Notons aussi $U : \infty\text{-}\mathbb{C}at \to \mathbb{G}lob$ le foncteur d'oubli canonique.

2.7.1 Construction de g_*

Notation 2.35. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensembles globulaires. On construit une application $g_* : \omega(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G}')$ en posant
$g_*(n, a, \gamma) = (n, a, g.\gamma)$.

Proposition 2.36. : 1) $g_* : \omega(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G}')$ est un ∞-foncteur strict.
2) L'application $g \mapsto g_*$ est fonctorielle (On note ω l'endo-foncteur de $\mathbb{G}lob$ obtenu).

<u>*Preuve*</u> : Sans difficulté.

2.7.2 Construction de $v_{\mathbb{C}}$

Notation 2.37. : Soient maintenant $\mathbb{C} \in |\infty - \mathbb{C}at|$ et $\alpha \in \omega U(\mathbb{C})$. On construit $v_{\mathbb{C}}(\alpha) \in C$ tel que $dim\ v_{\mathbb{C}}(\alpha) = \dim(\alpha)$ par induction sur $\dim(\alpha)$. Écrivons $\alpha = (m, a, \gamma) \in \omega U(\mathbb{C})$.
- Si $a = 0(\varnothing)$, alors $\Gamma(a) = \Gamma_0$. Posons $v_{\mathbb{C}}(\alpha) = \imath^m\gamma(0)$.
- Si $a = n(a_0, ..., a_{n-1})$, où $n \geq 1$. Alors $\Gamma(a) = \bigoplus_{j\in[n]} \Gamma(a_j)$. Pour chaque $j \in [n+1]$, posons $\omega_j = (0, j) \in \Gamma(a)$. Notons aussi
$\mathbb{C}_j = \mathbb{C}(\gamma(\omega_{j+1}), \gamma(\omega_j))$ et $\gamma|_j$ la restriction de γ à
$\Gamma(a)(\omega_{j+1}, \omega_j) \to \mathbb{C}_j$. On pose ensuite $\alpha_j = (m-1, a_j, \gamma|_j.\sigma_j) \in \omega U(\mathbb{C}_j)$
Alors, par hypothèse d'induction, $v_{\mathbb{C}_j}(\alpha_j) \in C_j$ et
$dim\ v_{\mathbb{C}_j}(\alpha_j) = \dim(\alpha_j) = m - 1$. On vérifie que $\forall j \in [n]$,
$(v_{\mathbb{C}_j}(\alpha_j), v_{\mathbb{C}_{j+1}}(\alpha_{j+1})) \in \underset{0}{\circledast}\mathbb{C}$. On peut donc poser

$$v_{\mathbb{C}}(\alpha) = \iota_0 v_{\mathbb{C}_0}(\alpha_0) \circ_0 \iota_1 v_{\mathbb{C}_1}(\alpha_1) \circ_0 ... \circ_0 \iota_{n-1} v_{\mathbb{C}_{n-1}}(\alpha_{n-1}).$$

(où $\iota_j : \mathbb{C}_j \to \mathbb{C}$ est l'injection canonique. Signalons que $dim\ \iota_j(c) = dim(c) + 1$ et que $\iota_j(c_1 \circ_p c_0) = \iota_j(c_1) \circ_{p+1} \iota_j(c_0)$). On vérifie enfin que $dim\ v_{\mathbb{C}}(\alpha) = \dim(\alpha)$.

Proposition 2.38. : 1) $v_{\mathbb{C}} : \omega U(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est un ∞-foncteur strict.
2) $v_{\mathbb{C}}$ est naturel en $\mathbb{C}$.

Preuve : par induction sur la dimension des cellules de $\omega U(\mathbb{C})$ où $\mathbb{C}$ est quelconque.

2.7.3 Construction de $\eta_{\mathbb{G}}$

Notation 2.39. : Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, notons α_n l'arbre $1^n(0(\varnothing))$ (Rappelons que 1 est un symbole fonctionnel d'arité 1 du langage de base).

Proposition 2.40. : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\Gamma(\alpha_n) = \{g^k_p(n)/k \in [2], p \in [n+1]\}$ où $g^k_p(n)$ est défini par induction sur n par :
- si $n = 0$, $g^0_0(0) = g^1_0(0) = 0$,
- si $n > 0$ et,
.. si $p = 0$, $g^0_0(n) = (0, 1)$, $g^1_0(n) = (0, 0)$,
.. si $p > 0$, $g^k_p(n) = (1, g^k_{p-1}(n-1))$.

Preuve : sans difficulté.

Notation 2.41. : Pour chaque $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, on construit $\eta_{\mathbb{G}} : G \to \omega(\mathbb{G})$ en posant $\eta_{\mathbb{G}}(c) = (n, \alpha_n, g_{(c)})$ où $n = dim(c)$ et $g_{(c)} : \Gamma(\alpha_n) \to G$ est défini par $g_{(c)}(g_p^k(n)) = \partial_p^k(c)$. (On remarque que cette définition a bien un sens, même si $g_p^k(n) = g_p^{k'}(n)$ pour $k \neq k'$). On vérifie que $g_{(c)}$ est un morphisme d'ensemble globulaire.

Proposition 2.42. : 1) $\eta_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \omega(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensemble globulaire.
2) $\eta_{\mathbb{G}}$ est naturel en $\mathbb{G}$ (On note $\eta : Id_{\mathbb{G}lob} \to \omega$ cette transformation naturelle).

Preuve : (1) On montre que pour $n > p$ on a $\partial_p(\alpha_n) = \alpha_p$ et $g_{(\partial_p^k c)} = g_{(c)}.\mathrm{d}_p^k(\alpha_n)$.
(2) On montre que pour $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ dans $\mathbb{G}lob$ et $c \in G$, on a $g.g_{(c)} = g_{(gc)}$.

Proposition 2.43. : Soit $\mathbb{C} \in |\infty\text{-}\mathbb{C}at|$. Alors on a $v_{\mathbb{C}}.\eta_{U(\mathbb{C})} = Id_{U(\mathbb{C})}$.

Preuve : par induction sur la dimension des cellules de $\mathbb{C}$.

2.7.4 Construction de $1_{(c_0,c_1)}$

Remarques 2.44. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et
$c_0, c_1 \in G(0) = \{c \in G/dim(c) = 0\}$. On va construire un ∞-foncteur strict $1_{(c_0,c_1)} : \omega(\mathbb{G}(c_0, c_1)) \to \omega(\mathbb{G})(\eta_{\mathbb{G}}c_0, \eta_{\mathbb{G}}c_1)$.

Soit $(n, a, \gamma) \in \omega(\mathbb{G}(c_0, c_1))$. On constate que : $\Gamma(1a) = \overset{1}{\oplus}\Gamma(a) = \{(0,0),(0,1)\} \cup \{(1,x)/x \in \Gamma a\} = \{\omega_0, \omega_1\} \cup \{\sigma_0(x)/x \in \Gamma a\}$. En fait $\sigma_0 : \Gamma(a) \to \Gamma(1a)(\omega_1, \omega_0)$ est un isomorphisme d'ensemble globulaire. A partir de $\gamma : \Gamma(a) \to \mathbb{G}(c_0, c_1)$ on construit l'application $\bar{\gamma} : \Gamma(1a) \to \mathbb{G}$ en posant $\forall k \in [2]$, $\bar{\gamma}(\omega_k) = c_{1-k}$ et $\bar{\gamma}.\sigma_0(x) = \gamma(x) \in \mathbb{G}(c_0, c_1) \subset G$. On vérifie que $\bar{\gamma} : \Gamma(1a) \to \mathbb{G}$ est un morphisme d'ensembles globulaires.

Notation 2.45. : On note $1_{(c_0,c_1)} : \omega(\mathbb{G}(c_0, c_1)) \to \omega(\mathbb{G})$ l'application définie par $1_{(c_0,c_1)}(n, a, \gamma) = (n + 1, 1a, \bar{\gamma})$.

Proposition 2.46. : 1) $\forall \alpha \in \omega(\mathbb{G}(c_0, c_1)),\ 1_{(c_0,c_1)}(\alpha) \in \omega(\mathbb{G})(\eta_{\mathbb{G}} c_0, \eta_{\mathbb{G}} c_1)$.
2) $1_{(c_0,c_1)} : \omega(\mathbb{G}(c_0, c_1)) \to \omega(\mathbb{G})(\eta_{\mathbb{G}} c_0, \eta_{\mathbb{G}} c_1)$ est un ∞-foncteur strict.
3) On a l'identité $1_{(c_0,c_1)}.\eta_{\mathbb{G}(c_0,c_1)} = \eta_{\mathbb{G}}|$, où $\eta_{\mathbb{G}}|$ est la restriction de $\eta_{\mathbb{G}}$ à $\mathbb{G}(c_0, c_1)) \to \omega(\mathbb{G})(\eta_{\mathbb{G}} c_0, \eta_{\mathbb{G}} c_1)$.
4) Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensembles globulaires et $c_0, c_1 \in G(0)$. Alors on a l'identité :

$$g_*|.1_{(c_0,c_1)} = 1_{(gc_0,gc_1)}.(g|)_*$$

où $g|$ et $g_*|$ sont des restrictions de g et g_*.
5) Soient $\mathbb{C}$ une ∞-catégorie stricte et $c_0, c_1 \in C(0)$. Alors on a l'identité :

$$v_{\mathbb{C}}|.1_{(c_0,c_1)} = v_{\underline{\mathbb{C}}}$$

où $v_{\mathbb{C}}|$ est une restriction de $v_{\mathbb{C}}$ et $\underline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}(c_0, c_1)$.

Preuve : On le vérifie sans difficulté.

2.7.5 La propriété universelle

Théorème 2.47. : Le foncteur d'oubli $U : \infty\text{-}\mathbb{C}at \to \mathbb{G}lob$ admet pour adjoint à gauche le foncteur L (où $L(\mathbb{G})$ est $\omega(\mathbb{G})$ muni de sa structure d'∞-catégorie stricte et pour tout $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}', L(g)$ est g_* considéré comme ∞-foncteur strict).

Preuve : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $\mathbb{C} \in |\infty\text{-}\mathbb{C}at|$. On montre que l'application $can : \infty\text{-}\mathbb{C}at(L\mathbb{G}, \mathbb{C}) \to \mathbb{G}lob(\mathbb{G}, U\mathbb{C})$, donnée par $can(F) = U(F).\eta_{\mathbb{G}}$, a pour inverse l'application $can' : g \mapsto v_{\mathbb{C}}.g_*$. On voit en effet facilement l'égalité $can.can' = Id$ et donc que can est surjective. Pour l'injectivité, on montre l'implication suivante : $can(F) = g \Rightarrow F = can'(g)$. Pour cela, F étant fixé on vérifie, par induction sur la longueur de $\underline{\alpha}$ et en faisant intervenir ce qui précède, que :
$\forall \alpha \in \omega(\mathbb{G}),\ F(\alpha) = v_{\mathbb{C}}.g_*(\alpha)$.

Remarque 2.48. : L'adjonction...

$$\begin{tikzcd} \infty - \mathbb{C}at \arrow[r, bend right, "U"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbb{G}lob \arrow[l, bend right, "L"'] \end{tikzcd}$$

... induit une monade (ω, η, μ) sur $\mathbb{G}lob$, où ω et η ont déjà été définies et où $\mu : \omega^2 \to \omega$ est donnée par $\mu_{\mathbb{G}} = Uv_{L(\mathbb{G})}$.

3. La monade $\mathbb{P}$

Introduction : La monade $\mathbb{P}$ est une version non-réflexive de la monade qui a été présentée dans [10] (Elle est explicitement définie dans [3] et [7]) . On la construit ici tout naturellement à l'aide des outils introduits dans les sections précédentes. Cette monade que l'on rend concrète est syntaxique et cartésienne(voir [3]) (On montre ce dernier résultat grâce à la notion de polarisation d'une opération - voir la notation 3.33). Cependant elle n'est pas pure (voir la proposition 3.40). C'est pour combler cette lacune que nous construirons la monade $\mathbb{B}$ à la section suivante.

3.1 Domaine et co-domaine d'un arbre

On se place maintenant dans un cas particulier des conventions 1.1.

Conventions 3.1. : On fixe maintenant le langage $(S_{\mathbb{P}}, ar)$ donné par :

$$S_{\mathbb{P}} = \{\star_p / p \in \mathbb{N}\} \cup \{\Box\}.$$

où $ar(\star_p) = ar(\Box) = 2$. On lui donne une structure relativement dimensionnelle en considérant les applications $\delta(\star_p), \delta(\Box) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définies par
$\delta(\star_p)(x,y) = \sup(p+1, x, y)$ et $\delta(\Box)(x,y) = 1 + \sup(x,y)$. Ensuite, pour chaque ensemble $C \in |\mathbb{E}ns|$ on note $A'(C) = \mathbb{A}rb(S_{\mathbb{P}}(C), ar)$ (pour la distinguer de la notation $A(C)$ qui sera utilisée dans la prochaine section).

Remarque 3.2. : On constate que le langage relativement dimensionnel $(S_{\mathbb{P}}(C), ar, \delta)$ est croissant (voir la première partie, section 2).

Notations 3.3. : Fixons déjà un ensemble globulaire
$\mathbb{G} = (G, dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p \in \mathbb{N}})$ et soit $a \in A'(G)$.
On note $\mathrm{I}(a) = a \Box a$. On voit que $\dim \mathrm{I}(a) = 1 + \dim(a)$ et donc
$\dim \mathrm{I}^n(a) = n + \dim(a)$.
Soient maintenant $p \in \mathbb{N}, k \in [2]$. On définit $\partial_p^k(a)$ de la façon suivante :
- Si $p \geq \dim(a)$, on pose $\partial_p^k(a) = \mathrm{I}^{p-n}(a)$ (où $n = \dim(a)$).
- Si $p < \dim(a)$, on définit $\partial_p^k(a)$ par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
.. Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in G$, alors on pose $\partial_p^k(a) = \partial_p^k(c)(\varnothing)$.
.. Si $a = a_1 \star_q a_0$, on pose :

... pour $q \geq p,\ \partial_p^k(a) = \partial_p^k(a_k)$,
... pour $q < p,\ \partial_p^k(a) = \partial_p^k(a_1) \star_q \partial_p^k(a_0)$,
.. Si $a = a_1 \square a_0$, on pose $\partial_p^k(a) = \partial_p^k(a_k)$.

Proposition 3.4. : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2], \forall a \in A'(G),\ \dim \partial_p^k(a) = p$.

Preuve : Par induction sur $L(a)$.

Proposition 3.5. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensemble globulaire. Alors :
1) $\forall a \in A'(G),\ \tilde{g}\mathrm{I}(a) = \mathrm{I}\tilde{g}(a)$.
2) $\forall a \in A'(G), \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ \tilde{g}\partial_p^k(a) = \partial_p^k \tilde{g}(a)$.

Preuve : Le (1) est immédiat. Pour le (2), par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Corollaire 3.6. : 1) $\forall a \in A'(G),\ |\mathrm{I}(a)| = \mathrm{I}(|a|)$.
2) $\forall a \in A'(G), \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ |\partial_p^k(a)| = \partial_p^k(|a|)$.

Proposition 3.7. : 1) $\forall A \in A'^2(G),\ \mu_G(\mathrm{I}A) = \mathrm{I}\mu_G(A)$.
2) $\forall A \in A'^2(G), \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ \mu_G \partial_p^k(A) = \partial_p^k \mu_G(A)$.

Preuve : Le (1) est immédiat.Pour le (2), par induction sur $\mathrm{L}(A)$.

3.2 Arbres compatibles avec un ensemble globulaire

Notation 3.8. : $\mathbb{G} = (G, dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p \in \mathbb{N}})$ étant un ensemble globulaire fixé, on va construire une nouvelle classe d'arbres notée $A'^g(\mathbb{G})$. On la construit par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in A'(G)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in G$, alors $a \in A'^g(\mathbb{G})$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, alors $a \in A'^g(\mathbb{G})$ ssi
$a_1, a_0 \in A'^g(\mathbb{G}),\ \forall k \in [2],\ \dim(a_k) = \dim(a)$ et $\partial_p^0(a_1) = \partial_p^1(a_0)$.
- Si $a = a_1 \square a_0$, alors $a \in A'^g(\mathbb{G})$ ssi $a_1, a_0 \in A'^g(\mathbb{G})$ et $a_1 // a_0$ (c.a.d. $\dim(a_1) = \dim(a_0)$ et, n étant cette dimension,
.. si $n = 0,\ a_1 = a_0$,
.. si $n > 0,\ \forall k \in [2],\ \partial_{n-1}^k(a_1) = \partial_{n-1}^k(a_0)$).

Proposition 3.9. : 1) $\forall a \in A'^g(\mathbb{G}),\ \mathrm{I}(a) \in A'^g(\mathbb{G})$.
2) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2], \forall a \in A'^g(\mathbb{G}),\ p \leq \dim(a) \Rightarrow \partial_p^k(a) \in A'^g(\mathbb{G})$.
3) $\forall p, q \in \mathbb{N}, \forall k, k' \in [2], \forall a \in A'^g(\mathbb{G})$,
$q < p < \dim(a) \Rightarrow \partial_q^k \partial_p^{k'}(a) = \partial_q^k(a)$.

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $L(a)$.

Corollaire 3.10. : $(A'^g(\mathbb{G}), \dim, (\partial^1_p, \partial^0_p)_{p\in\mathbb{N}})$ est un ensemble globulaire. On le note $\mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$.

Proposition 3.11. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensemble globulaire. Alors :
1) $\forall a \in A'^g(\mathbb{G}),\ \tilde{g}(a) \in A'^g(\mathbb{G}')$.
2) $\tilde{g} : \mathcal{A}'^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G}')$ est un morphisme d'ensemble globulaire.

<u>*Preuve*</u> : Pour le (1), par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Le (2) est immédiat.

Proposition 3.12. : 1) $\forall A \in A'^g\mathcal{A}'^g(\mathbb{G}),\ \mu_G\tilde{\imath}_G(A) \in A'^g(\mathbb{G})$, où
$\imath_G : A'^g(\mathbb{G}) \to A'(G)$ est l'injection canonique. On note
$\mu'_{\mathbb{G}} : A'^g\mathcal{A}'^g(\mathbb{G}) \to A'^g(\mathbb{G})$ la restriction de μ_G.
2) $\mu'_{\mathbb{G}} : (\mathcal{A}'^g)^2(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensemble globulaire.

<u>*Preuve*</u> : Pour le (1), par induction sur $\mathrm{L}(A)$. Le (2) est immédiat.

Remarques 3.13. : 1) L'application $g \mapsto \tilde{g} : \mathcal{A}'^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G}')$ est fonctorielle. On note $\mathcal{A}'^g$ l'endo-foncteur de $\mathbb{G}lob$ obtenu.
2) L'application $\eta'_{\mathbb{G}} : G \to A'^g(\mathbb{G})$, restriction de η_G est un morphisme d'ensemble globulaire $\mathbb{G} \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$. Etant naturelle en $\mathbb{G}$, on obtient une transformation naturelle $\eta' : Id_{\mathbb{G}lob} \to \mathcal{A}'^g$.
3) De même, $\mu'_{\mathbb{G}}$ est naturelle en $\mathbb{G}$. On obtient une transformation naturelle notée $\mu' : (\mathcal{A}'^g)^2 \to \mathcal{A}'^g$.

Proposition 3.14. : 1) $(\mathcal{A}'^g, \eta', \mu')$ est une monade sur $\mathbb{G}lob$.
2) $(\mathbb{G}lob, U, \mathcal{A}'^g, \eta', \mu', \mathrm{L}')$ est une monade concrète syntaxique, où
$\mathrm{L}'_{\mathbb{G}} = \mathrm{L}_{(G,dim)}.\imath_G$.

<u>*Preuve*</u> : Pour le (1) voir la section 3 de la première partie et pour le (2) cela résulte de la section 1 de la première partie.

3.3 La classe $A'^c(\mathbb{G})$

Avant de définir cette classe d'arbres commençons par introduire le concept de "globalisation totale" d'une ∞-catégorie stricte (c'est essentiellement le même concept que dans [10], page 67).

Notations et définitions 3.15. : 1) Soit $\mathbb{C} = (C, dim, \imath, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}}, (\circ_p)_{p\in\mathbb{N}})$ une ∞-catégorie stricte. On note $Tot(\mathbb{C}) = C \coprod 1$. Par abus de notation on écrit $Tot(\mathbb{C}) = C \cup \{\omega\}$, où $\omega \notin C$. On munit $Tot(\mathbb{C})$ des applications suivantes :
- $\overline{dim} : Tot(\mathbb{C}) \to \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est défini par $\overline{dim}(x) = dim(x)$ si $x \in C$ et $\overline{dim}(\omega) = \infty$. (Attention ! Il y a un risque de confusion avec la notation donnée dans la partie 1, section 2).
- $\bar{\imath} : Tot(\mathbb{C}) \to Tot(\mathbb{C})$ est donné par $\bar{\imath}(x) = \imath(x)$ si $x \in C$ et $\bar{\imath}(x) = \omega$ sinon.
- Pour tout $(k,p) \in [2] \times \mathbb{N}$, $\bar{\partial}_p^k : Tot(\mathbb{C}) \to Tot(\mathbb{C})$ est défini par : $\bar{\partial}_p^k(x) = \partial_p^k(x)$ si $x \in C$, $\bar{\partial}_p^k(x) = \omega$ sinon.
- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\bar{\circ}_p : Tot(\mathbb{C})^2 \to Tot(\mathbb{C})$ est donné par :
$x \bar{\circ}_p x' = x \circ_p x'$ si $x, x' \in C$ et $(x, x') \in \underset{p}{\circledast} C$ et $x \bar{\circ}_p x' = \omega$ sinon.
- $\overline{\Box} : Tot(\mathbb{C})^2 \to Tot(\mathbb{C})$ est donné par :
$x \overline{\Box} x' = \bar{\imath}(x)$ si $x = x'$ et $x \overline{\Box} x' = \omega$ sinon.

2) On définit ensuite, pour chaque $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, une application $\delta_{\mathbb{G}} : A'(G) \to Tot\ \omega(\mathbb{G})$ par induction sur la longueur d'un arbre. Soit $a \in A'(G)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in G$, on pose $\delta_{\mathbb{G}}(a) = \eta_{\mathbb{G}}(c) \in \omega(\mathbb{G})$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, on pose $\delta_{\mathbb{G}}(a) = \delta_{\mathbb{G}}(a_1) \bar{\circ}_p \delta_{\mathbb{G}}(a_0)$.
- Si $a = a_1 \Box a_0$, on pose $\delta_{\mathbb{G}}(a) = \delta_{\mathbb{G}}(a_1) \overline{\Box} \delta_{\mathbb{G}}(a_0)$.

On est maintenant en mesure de construire la classe $A'^c(\mathbb{G})$ (notée $\hat{\mathcal{T}}^e(D)$ dans [10], page 72).

Notation 3.16. : $A'^c(\mathbb{G})$ est un sous-ensemble de $A'(G)$ défini par induction sur la longueur des arbres de la façon suivante. Soit $a \in A'(G)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in G$, alors $a \in A'^c(\mathbb{G})$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, alors $a \in A'^c(\mathbb{G})$ ssi $a_1, a_0 \in A'^c(\mathbb{G})$, $\forall k \in [2]$, $\dim(a_k) = \dim(a)$ et $\partial_p^0(a_1) = \partial_p^1(a_0)$.
- Si $a = a_1 \Box a_0$, alors $a \in A'^c(\mathbb{G})$ ssi $a_1, a_0 \in A'^c(\mathbb{G})$, $a_1 // a_0$ et $\delta_{\mathbb{G}}(a_1) = \delta_{\mathbb{G}}(a_0)$.

Remarque 3.17. : On a $A'^c(\mathbb{G}) \subset A'^g(\mathbb{G})$.

Proposition 3.18. : Soit $a \in A'^c(\mathbb{G})$, alors :
1) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ p < \dim(a) \ \Rightarrow\ \partial_p^k(a) \in A'^c(\mathbb{G})$,
2) $\overline{dim}\ \delta_{\mathbb{G}}(a) = \dim(a)$,
3) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ p < \dim(a) \ \Rightarrow\ \bar{\partial}_p^k \delta_{\mathbb{G}}(a) = \delta_{\mathbb{G}} \partial_p^k(a)$.

Preuve : On montre (1),(2) et (3) dans une même induction sur $L(a)$.

Corollaire 3.19. : 1) $(A'^c(\mathbb{G}), \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est un sous-ensemble globulaire de $\mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$.
2) $\forall a \in A'^c(\mathbb{G}),\ \delta_{\mathbb{G}}(a) \in \omega(\mathbb{G})$.

Notations 3.20. : L'ensemble globulaire $(A'^c(\mathbb{G}), \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est noté $\mathcal{A}'^c(\mathbb{G})$ ou encore $P(\mathbb{G})$. On note aussi $p_{\mathbb{G}}$ la restriction de $\delta_{\mathbb{G}}$ à $P(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G})$.

Remarques 3.21. : $p_{\mathbb{G}}$ a les propriétés suivantes. Soit $a \in A'^c(\mathbb{G})$,
1) - si $a = c(\varnothing),\ p_{\mathbb{G}}(a) = \eta_{\mathbb{G}}(c)$,
- si $a = a_1 \star_p a_0,\ p_{\mathbb{G}}(a) = p_{\mathbb{G}}(a_1) \circ_p p_{\mathbb{G}}(a_0)$,
- si $a = a_1 \Box a_0,\ p_{\mathbb{G}}(a) = \imath p_{\mathbb{G}}(a_1) = \imath p_{\mathbb{G}}(a_0)$ (car $p_{\mathbb{G}}(a_1) = p_{\mathbb{G}}(a_0)$).
2) $p_{\mathbb{G}} : P(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensembles globulaires.

Proposition 3.22. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensembles globulaires, alors
1) $\forall a \in A'^c(\mathbb{G}),\ \tilde{g}(a) \in A'^c(\mathbb{G}')$,
2) $\forall a \in A'^c(\mathbb{G}),\ p_{\mathbb{G}'}.\tilde{g}(a) = \omega(g).p_{\mathbb{G}}(a)$.

Preuve : Le (1) et le (2) se montrent successivement dans une même induction sur $L(a)$.

Proposition 3.23. : 1) $\forall A \in A'^c\mathcal{A}'^c(\mathbb{G}),\ \mu_{\mathbb{G}}\tilde{\imath}_{\mathbb{G}}(A) \in A'^c(\mathbb{G})$, où
$\imath_{\mathbb{G}} : A'^c(\mathbb{G}) \to A'(\mathbb{G})$ est l'injection canonique. On note
$\mu'_{\mathbb{G}} : A'^c\mathcal{A}'^c(\mathbb{G}) \to A'^c(\mathbb{G})$ la restriction de $\mu_{\mathbb{G}} : A'\mathcal{A}'(\mathbb{G}) \to A'(\mathbb{G})$.
2) $\mu'_{\mathbb{G}} : P^2(\mathbb{G}) \to P(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensembles globulaires.

Preuve : Le (1) résulte du lemme suivant :

Lemme 3.24. : Pour tout $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, on a la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
UP^2(\mathbb{G}) \arrow[r, "\imath_{P(\mathbb{G})}"] \arrow[d, "p_{P(\mathbb{G})}"'] & A'UP(\mathbb{G}) \arrow[r, "\tilde{\imath}_{\mathbb{G}}"] & A'^2U(\mathbb{G}) \arrow[r, "\mu_{U(\mathbb{G})}"] & A'U(\mathbb{G}) \arrow[d, "\delta_{\mathbb{G}}"] \\
\omega P(\mathbb{G}) \arrow[r, "\omega(p_{\mathbb{G}})"'] & \omega^2(\mathbb{G}) \arrow[r, "\mu_{\mathbb{G}}"'] & \omega(\mathbb{G}) \arrow[r, "i"'] & Tot\omega(\mathbb{G})
\end{tikzcd}$$

où $i : \omega(\mathbb{G}) \to Tot\omega(\mathbb{G})$ est l' injection canonique.

<u>*Preuve*</u> : (du lemme) Par induction sur la longueur des arbres.

Remarques 3.25. : 1) Pour toute flèche $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}lob$,
$\tilde{g} : P(\mathbb{G}) \to P(\mathbb{G}')$ est un morphisme d'ensembles globulaires.
2) L'application $g \mapsto \tilde{g} : P(\mathbb{G}) \to P(\mathbb{G}')$ est fonctorielle. On note P l'endo-foncteur de $\mathbb{G}lob$ obtenu.
3) Dans $\mathbb{G}lob$ les morphismes $p_{\mathbb{G}} : P(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G})$ sont naturels en $\mathbb{G}$. On note $p : P \to \omega$ la transformation naturelle obtenue.
4) L'application, encore notée $\eta'_{\mathbb{G}}$, restriction de $\eta'_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to A'^g(\mathbb{G})$ à $\mathbb{G} \to A'^c(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensembles globulaires $\mathbb{G} \to P(\mathbb{G})$. Etant naturel en $\mathbb{G}$, on en fait une transformation naturelle $\eta' : Id_{\mathbb{G}lob} \to P$.
5) De même, $\mu'_{\mathbb{G}}$ est naturel en $\mathbb{G}$. On note $\mu' : P^2 \to P$ la transformation naturelle obtenue.

Proposition 3.26. : 1) $\mathbb{P} = (P, \eta', \mu')$ est une sous-monade de $(\mathcal{A}'^g, \eta', \mu')$ sur $\mathbb{G}lob$.
2) $p : (P, \eta', \mu') \to (\omega, \eta, \mu)$ est un morphisme de monade.
3) $(\mathbb{G}lob, U, \mathbb{P}, \mathrm{L}')$ est une monade concrète syntaxique, où
$\mathrm{L}'_{\mathbb{G}} : UP(\mathbb{G}) \to \mathbb{N}$ est la restriction de $\mathrm{L}'_{\mathbb{G}} : U\mathcal{A}'^g(\mathbb{G}) \to \mathbb{N}$.

<u>*Preuve*</u> : Le (1) résulte de la section 3 de la première partie, le (2) essentiellement du lemme 3.24 et le (3) de la section 1 de la première partie.

Voici encore un résultat utile sur $\mathbb{P}$:

Proposition 3.27. : Soient $m : \mathbb{G}' \to \mathbb{G}$ un morphisme injectif d'ensembles globulaires et $a \in A'^c(\mathbb{G})$ tel que $l_{\{G\}}(a) \subset m(G')$. Alors il existe un unique $a' \in A'^c(\mathbb{G}')$ tel que $\tilde{m}(a') = a$.

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Corollaire 3.28. : Soient $m : \mathbb{G}' \to \mathbb{G}$ un morphisme injectif d'ensembles globulaires et $a' \in A'(G')$ tel que $\tilde{m}(a') \in A'^c(\mathbb{G})$. Alors $a' \in A'^c(\mathbb{G}')$.

3.4 Polarisation

Rappelons que le concept de polarisation a été introduit pour montrer la cartésianité de $\mathbb{P}$. Il aura son pendant dans la section 5.

- Retournons brièvement à la monade ω .

Notation et définition 3.29. : Lorsque $\alpha = (n, a, !_{\Gamma a}) \in \omega(\mathbb{I})$, on note $Pol(\alpha) = (n, a, Id_{\Gamma a}) \in \omega(\Gamma a)$. On dit que c'est la *polarisation de* α *dans* ω.

Proposition 3.30. : Soit $p \in \mathbb{N}$.
1) $\forall k \in [2], \forall \alpha \in \omega(\mathbb{I}),\ p < \dim(\alpha) \ \Rightarrow\ \partial_p^k Pol(\alpha) = \omega(\mathrm{d}_p^k(\underline{\alpha})).Pol(\partial_p^k \alpha)$.
2) $\forall (\alpha_1, \alpha_0) \in \underset{p}{\circledast}\omega(\mathbb{I}) \ \Rightarrow\ Pol(\alpha_1 \circ_p \alpha_0) = \omega(\mathrm{u}^1)Pol(\alpha_1) \circ_p \omega(\mathrm{u}^0)Pol(\alpha_0)$
où on note $\mathrm{u}^k = \mathrm{u}^k_{p(\underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_0)}$.

Preuve : Sans difficulté.

• Revenons maintenant à la monade $\mathbb{P}$. Dorénavant on identifie $P(\mathbb{G})$ et $A'^c(\mathbb{G})$ (qui est son ensemble sous-jacent). De plus, comme en 1.3, notons 0_n, où $n \in \mathbb{N}$, les éléments d'un ensemble globulaire final $\mathbb{I}$ fixé.

Notations et définitions 3.31. : 1) Pour chaque $a \in P(\mathbb{I})$ et $j \in [la]$, on définit $\mathrm{Cell}_j(a) \in \Gamma(\underline{p_{\mathbb{I}}(a)})$ (voir la notation $\underline{\alpha}$ dans 2.29), par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
- Si $a = 0_n(\varnothing)$, on a $l(a) = 1$ donc $j = 0$, et $\underline{p_{\mathbb{I}}(a)} = \alpha_n = 1^n(0(\varnothing))$. On pose alors $\mathrm{Cell}_j(a) = g_n^0(n) = g_n^1(n) \in \Gamma(\alpha_n)$ (voir la proposition 2.40).
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, alors :
.. si $j < l(a_1)$, on pose $\mathrm{Cell}_j(a) = \mathrm{u}^1\mathrm{Cell}_j(a_1)$, où $\mathrm{u}^k = \mathrm{u}^k_{p(\underline{p_{\mathbb{I}}(a_1)}, \underline{p_{\mathbb{I}}(a_0)})}$,
.. si $l(a_1) < j \leq l(a)$, on pose $\mathrm{Cell}_j(a) = \mathrm{u}^0\mathrm{Cell}_{j-la_1}(a_0)$.
- Si $a = a_1 \Box a_0$, alors :
.. si $j < l(a_1)$, on pose $\mathrm{Cell}_j(a) = \mathrm{Cell}_j(a_1)$,
.. si $l(a_1) < j \leq l(a)$, on pose $\mathrm{Cell}_j(a) = \mathrm{Cell}_{j-la_1}(a_0)$.

2) On note ensuite $\mathrm{Cell}(a) = (\mathrm{Cell}_0(a), ..., \mathrm{Cell}_{n-1}(a))$, où $n = l(a)$.

Proposition 3.32. : $\forall a \in P(\mathbb{I}), \forall j \in [la],\ \dim \mathrm{Cell}_j(a) = \dim(c_j)$, où $(c_0, ..., c_{n-1}) = l_{\mathbb{I}}(a)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Notation 3.33. : Soit $a \in P(\mathbb{I})$. On peut maintenant noter :

$$\mathcal{P}ol(a) = a\{\mathrm{Cell}(a)\}$$

(voir la notation $a\{-\}$ au 1.12). $\mathcal{P}ol(a)$ est appelée la *polarisation* de a dans $\mathbb{P}$.

Proposition 3.34. : $\forall a \in P(\mathbb{I}), \forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2]$,
$p < \dim(a) \ \Rightarrow\ \partial_p^k \mathcal{P}ol(a) = \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a)$.

Preuve : Faisons le par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Posons $n = \dim(a)$.
- Si $a = 0_n(\varnothing)$, on voit que $\mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a) = g_p^k(n)(\varnothing) = \partial_p^k \mathcal{P}ol(a)$.
- Si $a = a_1 \star_q a_0$, alors $\mathcal{P}ol(a) = \tilde{\mathrm{u}}^1 \mathcal{P}ol(a_1) \star_q \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathcal{P}ol(a_0)$.
.. Si $p \leq q$, on a $\partial_p^k \mathcal{P}ol(a) = \tilde{\mathrm{u}}^k \partial_p^k \mathcal{P}ol(a_k) = \tilde{\mathrm{u}}^k . \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a_k})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_k) \underset{*1}{=}$
$\mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a)$.
$(*1)$ En utilisant la proposition 2.24.
.. Si $p > q$, on a $\partial_p^k \mathcal{P}ol(a) = \tilde{\mathrm{u}}^1 \partial_p^k \mathcal{P}ol(a_1) \star_q \tilde{\mathrm{u}}^0 \partial_p^k \mathcal{P}ol(a_0) =$
$\tilde{\mathrm{u}}^1 \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a_1})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_1) \star_q \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a_0})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_0) \underset{*1}{=}$
$\mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a})} (\tilde{\mathrm{u}}_p^1 \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_1) \star_q \tilde{\mathrm{u}}_p^0 \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_0)) = \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a)$.
- Si $a = a_1 \square a_0$, alors $\mathcal{P}ol(a) = \mathcal{P}ol(a_1) \square \mathcal{P}ol(a_0)$ et $p \leq n-1$.
.. Si $p = n-1$, $\mathrm{d}_p^k(\underline{p_{\mathbb{I}} a}) = Id$, d'où la formule voulue.
.. Si $p < n-1$, $\partial_p^k \mathcal{P}ol(a) = \partial_p^k \mathcal{P}ol(a_k) = \mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a_k})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a_k) =$
$\mathrm{d}_p^k \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a})} \mathcal{P}ol(\partial_p^k a)$.

Proposition 3.35. : Soit $a \in P(\mathbb{I})$. Notons brièvement $\Gamma a = \Gamma(\underline{p_{\mathbb{I}} a})$. Alors $\mathcal{P}ol(a) \in P\Gamma a$ et $p_{\Gamma a} \mathcal{P}ol(a) = Pol p_{\mathbb{I}}(a)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
- Si $a = 0_n(\varnothing)$, alors $\mathcal{P}ol(a) = g_n^{\varepsilon}(n)(\varnothing) \in P\Gamma a$. On a aussi l'identité voulue.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, $\mathcal{P}ol(a) = \tilde{\mathrm{u}}^1 \mathcal{P}ol(a_1) \star_p \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathcal{P}ol(a_0)$, où $\forall k \in [2]$,
$\tilde{\mathrm{u}}^k \mathcal{P}ol(a_k) \in P\Gamma a$, $\dim \tilde{\mathrm{u}}^k \mathcal{P}ol(a_k) = \dim \mathcal{P}ol(a)$ et $\partial_p^0 \tilde{\mathrm{u}}^1 \mathcal{P}ol(a_1) \underset{*1}{=}$
$\tilde{\mathrm{u}}^1 \mathrm{d}_p^0 \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a_1})} \mathcal{P}ol(\partial_p^0 a_1) \underset{*2}{=} \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathrm{d}_p^1 \widetilde{(\underline{p_{\mathbb{I}} a_0})} \mathcal{P}ol(\partial_p^1 a_0) \underset{*1}{=} \partial_p^1 \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathcal{P}ol(a_0)$.
$(*1)$ Grâce à la proposition précédente, $(*2)$ voir la proposition 2.23.

On en déduit que $\mathcal{P}ol(a) \in P\Gamma a$ et $p_{\Gamma a} \mathcal{P}ol(a) =$
$p_{\Gamma a} \tilde{\mathrm{u}}^1 \mathcal{P}ol(a_1) \circ_p p_{\Gamma a} \tilde{\mathrm{u}}^0 \mathcal{P}ol(a_0) = \omega(\mathrm{u}^1) p_{\Gamma a_1} \mathcal{P}ol(a_1) \circ_p \omega(\mathrm{u}^0) p_{\Gamma a_0} \mathcal{P}ol(a_0) =$
$\omega(\mathrm{u}^1) Pol p_{\mathbb{I}}(a_1) \circ_p \omega(\mathrm{u}^0) Pol p_{\mathbb{I}}(a_0) = Pol(p_{\mathbb{I}}(a_1) \circ_p p_{\mathbb{I}}(a_0)) = Pol p_{\mathbb{I}}(a)$.
- Si $a = a_1 \square a_0$, $\mathcal{P}ol(a) = \mathcal{P}ol(a_1) \square \mathcal{P}ol(a_0)$, où $\forall k \in [2]$,
$\mathcal{P}ol(a_k) \in P\Gamma a_k = P\Gamma a$, $\mathcal{P}ol(a_1) // \mathcal{P}ol(a_0)$ et
$p_{\Gamma a_1} \mathcal{P}ol(a_1) \underset{*3}{=} Pol p_{\mathbb{I}}(a_1) \overset{*1}{=} Pol p_{\mathbb{I}}(a_0) \underset{*3}{=} p_{\Gamma a_0} \mathcal{P}ol(a_0)$.
$(*3)$ par hypothèse d'induction.

On en déduit que $\mathcal{P}ol(a) \in P\Gamma a$. De plus
$p_{\Gamma a}\mathcal{P}ol(a) = \imath\, p_{\Gamma a_0}\mathcal{P}ol(a_0) = \imath\, Polp_{\mathbb{I}}(a_0) = Polp_{\mathbb{I}}(a)$.

Proposition 3.36. : Soit $a \in P(\mathbb{G})$. Ecrivons $p_{\mathbb{G}}(a) = (n, \alpha, g)$. Alors on a :

$$Mo(g)(\mathrm{Cell}(|a|)) = l_G(a).$$

Preuve : Cela revient à montrer que si $l_G(a) = (c_0, ..., c_{n-1})$, on a $\forall j \in [m],\ g(\mathrm{Cell}_j(|a|)) = c_j$. On l'obtient par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 3.37. : La transformation naturelle $p : P \to \omega$ est cartésienne.

Preuve : Il suffit de le montrer pour les flèches de la forme $!_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathbb{I}$. Notons $\gamma : P(\mathbb{G}) \to \omega(\mathbb{G}) \underset{\omega(\mathbb{I})}{\times} P(\mathbb{I})$ le morphisme canonique. Montrons qu'il est bijectif.
surjectivité : Soit $(\alpha, a) \in \omega(\mathbb{G}) \underset{\omega(\mathbb{I})}{\times} P(\mathbb{I})$, où $\alpha = (n, \underline{\alpha}, g)$. On pose $\bar{a} = \tilde{g}\mathcal{P}ol(a)$. On vérifie que $\bar{a} \in P(\mathbb{G})$ et que $\gamma(\bar{a}) = (\alpha, a)$.
injectivité : Soit $a \in P(\mathbb{G})$. Posons $p_{\mathbb{G}}(a) = \alpha = (n, \underline{\alpha}, g)$. Alors
$\gamma(a) = (\alpha, |a|)$ et donc $a = |a|\{l_{\mathbb{G}}(a)\} \underset{*}{=} |a|\{Mo(g)(\mathrm{Cell}|a|)\} = \tilde{g}|a|\{\mathrm{Cell}|a|\} = \tilde{g}\mathcal{P}ol(|a|) = \bar{|a|}$.
$(*)$ voir la proposition précédente.
D'où l'injectivité de γ.

Théorème 3.38. (voir [3]) : $\mathbb{P} = (P, \eta', \mu')$ est une monade cartésienne.

Preuve : : Car $p : \mathbb{P} \to \omega$ est un morphisme de monades cartésien et ω est cartésienne.

Remarque 3.39. Maintenant que nous avons montré que $p : P \to \omega$ était cartésien, on voit que, pour tout $a \in P(\mathbb{I})$, $\mathcal{P}ol(a) \in P\Gamma(a)$ est complètement caractérisé par les deux identités suivantes :

$$|\mathcal{P}ol(a)| = a \quad \text{et} \quad p_{\Gamma a}\mathcal{P}ol(a) = Polp_{\mathbb{I}}(a).$$

(Pour Γa voir la notation 3.35).

Proposition 3.40. : $\mathbb{P} = (\mathbb{G}lob, U, \mathbb{P}, \mathrm{L}')$, qui est une monade syntaxique cartésienne, n'est pas pure.

<u>*Preuve*</u> : Soient $u_d = (0_1(\varnothing) \star_0 \mathrm{I}0_0(\varnothing))\Box 0_1(\varnothing)$ et $u_g = (\mathrm{I}0_0(\varnothing) \star_0 0_1(\varnothing))\Box 0_1(\varnothing)$ où, rappelons le, par définition $\mathrm{I}(a) = a\Box a$. Clairement $u_d, u_g \in P(\mathbb{I})$, $\dim(u_d) = \dim(u_g) = 2$ et $\overline{\dim}(u_d) = (1,0,0,1)$, $\overline{\dim}(u_g) = (0,0,1,1)$. Pour chaque $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et chaque $a \in P(\mathbb{G})$ tel que $\dim(a) = 1$, notons $u_d(a) = \mathrm{Op}(u_d, (a, \partial_0^0 a, \partial_0^0 a, a))$ et $u_g(a) = \mathrm{Op}(u_g, (\partial_0^1 a, \partial_0^1 a, a, a))$. On vérifie que $u_d(a), u_g(a) \in P(\mathbb{G})$ et que, si $a \in P(\mathbb{I})$, on a $u_d \underset{\mathbb{P}}{\leq} u_d(a)$ et $u_g \underset{\mathbb{P}}{\leq} u_g(a)$, où $\underset{\mathbb{P}}{\leq}$ est la relation d'antériorité pour $\mathbb{P}$. On voit aussi que u_d et u_g sont primitifs pour $\mathbb{P}$. Pourtant, lorsque $a = \mathrm{I}0_0(\varnothing)$, on a $u_d(a) = u_g(a)$. Mais $u_d \neq u_g$ et $\mathrm{L}(u_d) = \mathrm{L}(u_g) > 1$, ce qui prouve que $\mathbb{P}$ n'est pas pure.

4. La monade $\mathbb{B}$

Introduction : A partir de la monade $\mathbb{P}$ et des arbres feuillus on construit la monade $\mathbb{B}$. On donne ici les différentes étapes qui aboutissent à sa construction. La monade concrète $\mathbb{B}$ est syntaxique. Sa cartésianité et sa pureté demandant plus de technicité seront montrées dans la prochaine section.

4.1 Le morphisme π

On se place maintenant dans un cas particulier des conventions 1.21.

Conventions 4.1. : On fixe, cette fois, le langage $(S_{\mathbb{B}}, ar)$ donné par :

$$S_{\mathbb{B}} = \{\star_p / p \in \mathbb{N}\} \cup \{\Delta, \Box\}.$$

où $ar(\star_p) = ar(\Box) = 2$ et $ar(\Delta) = 1$. On lui donne :
- une structure chargée, en considérant l'application $ch : S_{\mathbb{B}} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$ch(\star_p) = 0,\ ch(\Delta) = -1,\ ch(\Box) = +1.$$

- une structure relativement dimensionnelle, en considérant $\delta(\star_p), \delta(\Box) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définies par :
$\delta(\star_p)(x,y) = \sup(p+1, x, y)$ et $\delta(\Box)(x,y) = 1 + \sup(x,y)$ mais aussi $\delta(\Delta) = Id_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Pour chaque $C \in |\mathbb{E}ns|$ on note $A(C) = \mathbb{A}rb(S_{\mathbb{B}}(C), ar)$ et $A^f(C)$ l'ensemble des $a \in A(C)$ qui sont feuillus pour $(S_{\mathbb{B}}(C), ar, ch)$.

Remarques 4.2. : 1) Les restrictions de ar et δ à $S_{\mathbb{P}} \subset S_{\mathbb{B}}$ correspondent à leurs homologues de 3.1.
2) Comme pour le langage $(S_{\mathbb{P}}(C), ar, \delta)$ le langage relativement dimensionnel $(S_{\mathbb{B}}(C), ar, \delta)$ est croissant (voir la première partie, section 2).

Notation 4.3. : On construit maintenant, pour tout $C \in |\mathbb{E}ns|$, une application $\pi_C : A(C) \to A'(C)$ par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in A(C)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in C$, on pose $\pi_C(a) = a$.
- Si $a = \Delta(a')$, on pose $\pi_C(a) = \pi_C(a')$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, on pose $\pi_C(a) = \pi_C(a_1) \star_p \pi_C(a_0)$.
- Si $a = a_1 \Box a_0$, on pose $\pi_C(a) = \pi_C(a_1) \Box \pi_C(a_0)$.

Remarque 4.4. : Clairement $A'(C) \subset A(C)$ et la restriction de π_C à $A'(C)$ est l'identité.

Proposition 4.5. : Soit $C \in |\mathbb{E}ns|$. Alors :
1) $\forall a \in A(C),\ l\pi_C(a) = l(a)$,
2) $\forall a \in A(C),\ l_C\pi_C(a) = l_C(a)$,
3) π_C est naturel en C (Notons $\pi : A \to A'$ la transformation naturelle obtenue).

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 4.6. : Soient $C \in |\mathbb{E}ns|$, $\alpha \in A(1)$ et $n = l(\alpha)$.
1) Soit aussi $(a_0, ..., a_{n-1}) \in A(C)^n$. Alors :

$$\pi_C \mathrm{op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1})) = \mathrm{op}(\pi_1(\alpha), (\pi_C a_0, ..., \pi_C a_{n-1}).$$

2) Soit encore $(c_0, ..., c_{n-1}) \in C^n$. Alors :

$$\pi_C(\alpha[c_0, ..., c_{n-1}]) = \pi_1(\alpha)[c_0, ..., c_{n-1}].$$

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(\alpha)$.

Proposition 4.7. : $\pi : (A, \eta, \mu) \to (A', \eta, \mu)$ est un morphisme de monade.

Preuve : Pour l'identité $\pi.\mu = \mu.\pi^2$, on utilise la proposition précédente.

Proposition 4.8. : Soient maintenant $(C, dim) \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$ et $a \in A(C)$, alors :
1) $\forall a \in A(C),\ \underline{\dim}\pi_C(a) = \underline{\dim}(a)$,
2) $\forall a \in A(C),\ \overline{\dim}\pi_C(a) = \overline{\dim}(a)$.

Preuve : Sans difficulté.

Notations 4.9. : Notons $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}'$) l'endo-foncteur de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ défini sur les objets par $\mathcal{A}(C, dim) = (A(C), \mathrm{dim})$
(resp. $\mathcal{A}'(C, dim) = (A'(C), \mathrm{dim})$) et sur les flèches $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$, $\mathcal{A}(f) = \tilde{f} : \mathcal{A}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}(\mathbb{C}')$ (même chose pour $\mathcal{A}'$).
La proposition précédente montre que $\forall \mathbb{C} = (C, dim) \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\pi_C : \mathcal{A}(\mathbb{C}) \to \mathcal{A}'(\mathbb{C})$ est un morphisme de $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$ (noté $\pi_{\mathbb{C}}$). Etant naturel en $\mathbb{C}$, on en fait une transformation naturelle notée $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$.

Proposition 4.10. : Soit $\mathbb{C} = (C, dim) \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\alpha \in AU(\mathbb{I})$ et $n = l(\alpha)$.
1) Soit aussi $(a_0, ..., a_{n-1}) \in A(C)^n$ tel que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim\, a_0, ..., \dim\, a_{n-1})$. Alors :

$$\pi_C \mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1})) = \mathrm{Op}(\pi_{\mathbb{I}}(\alpha), (\pi_{\mathbb{C}} a_0, ..., \pi_{\mathbb{C}} a_{n-1}).$$

2) Soit encore $(c_0, ..., c_{n-1}) \in C^n$ tel que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim\, c_0, ..., \dim\, c_{n-1})$. Alors :

$$\pi_{\mathbb{C}}(\alpha\{c_0, ..., c_{n-1}\}) = \pi_{\mathbb{I}}(\alpha)\{c_0, ..., c_{n-1}\}.$$

Preuve : Résulte de la proposition 4.6.

Proposition 4.11. : $\pi : (\mathcal{A}, \eta, \mu) \to (\mathcal{A}', \eta, \mu)$ est un morphisme de monade.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 4.12. : Soient $a, b \in A^f U(\mathbb{I})$. Alors $\pi_{\mathbb{I}}(a \odot b) = \pi_{\mathbb{I}}(a) \Box \pi_{\mathbb{I}}(b)$ (pour la définition de $a \odot b$ voir notation 1.27).

Preuve : Résulte de la proposition 4.6.

4.2 Les arbres $\partial^k(a)$

Notations 4.13. : Soient $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$ et $a \in A^f U(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \square$. Ecrivons sa décomposition canonique (relativement dimensionnelle) $a = \mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{n-1}))$ (voir définition 1.26). Comme α est irréductible et que $\mathrm{sym}(\alpha) = \square$, il s'écrit $\alpha = \alpha_1 \odot \alpha_0$, où $\alpha_1, \alpha_0 \in A^f U(\mathbb{I})$. Posons $p = l(\alpha_1)$, $n = l(\alpha)$ (donc $l(\alpha_0) = n - p$). Comme $\overline{\dim}(\alpha_1) = (\dim a_0, ..., \dim a_{p-1})$ et $\overline{\dim}(\alpha_0) = (\dim a_p, ..., \dim a_{n-1}$) (voir proposition 1.28), on peut poser :

$$\partial^1(a) = \mathrm{Op}(\alpha_1, (a_0, ..., a_{p-1})) \quad \text{et} \quad \partial^0(a) = \mathrm{Op}(\alpha_0, (a_p, ..., a_{n-1})).$$

Remarque 4.14. : Lorsque $\mathbb{C} = \mathbb{I}$ et a est irréductible alors $\forall k \in [2]$, $\partial^k(a) = \alpha_k$ (et $a = \alpha$).

Proposition 4.15. : 1) $\partial^1(a), \partial^0(a) \in A^f U(\mathbb{C})$.
2) Pour tout $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ dans $\mathbb{E}ns/\mathbb{N}$, $\tilde{f}(\partial^k a) = \partial^k \tilde{f}(a)$.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 4.16. : Comme $\mathrm{sym}(a) = \mathrm{sym}(\alpha) = \square$, on peut écrire $a = b_1 \square b_0$ et $\alpha = \beta_1 \square \beta_0$, où $b_1, b_0 \in AU(\mathbb{C})$ et $\beta_1, \beta_0 \in AU(\mathbb{I})$. Alors : $b_1 = \mathrm{Op}(\beta_1, (a_0, ..., a_{p-1}))$ et $b_0 = \mathrm{Op}(\beta_0, (a_p, ..., a_{n-1}))$.

Preuve : Notons $b'_1 = \mathrm{Op}(\beta_1, (a_0, ..., a_{p-1}))$ et $b'_0 = \mathrm{Op}(\beta_0, (a_p, ..., a_{n-1}))$.On montre que $\forall k \in [2]$, $|b_k| = |b'_k|$ et $l_C(b_k) = l_C(b'_k)$. D'où les égalités $b_k = b'_k$.

Corollaire 4.17. : Sous les mêmes hypothèses et notations, soit $k \in [2]$. Alors :
1) $l(\partial^k a) = l(b_k)$,
2) $l_{U\mathbb{C}}(\partial^k a) = l_{U\mathbb{C}}(b_k)$,
3) $\mathrm{L}(\partial^k a) = \mathrm{L}(b_k) - l(\alpha_k)$.

Preuve : Sans difficulté.

Remarque 4.18. : $\forall k \in [2]$, $\mathrm{L}(\partial^k a) < \mathrm{L}(a)$.

Proposition 4.19. : Soit $a \in A^f U(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{sym}(a) = \Box$. On pose $n = l(a)$ Soient aussi $(b_0, ..., b_{n-1}) \in A^f U(\mathbb{C})^n$ tel que $(\dim b_0, ..., \dim b_{n-1}) = \overline{\dim}(a)$. Posons enfin $\hat{a} = \mathrm{Op}(a, (b_0, ..., b_{n-1}))$ et $p = l(\partial^1 a)$. Alors :
$\partial^1(\hat{a}) = \mathrm{Op}(\partial^1 a, (b_0, ..., b_{p-1}))$ et $\partial^0(\hat{a}) = \mathrm{Op}(\partial^0 a, (b_p, ..., b_{n-1}))$.

Preuve : On pose $a^1 = \mathrm{Op}(\partial^1 a, (b_0, ..., b_{p-1}))$ et $a^0 = \mathrm{Op}(\partial^0 a, (b_p, ..., b_{n-1}))$ et on montre que $\forall k \in [2]$, $|a^k| = |\partial^k(\hat{a})|$ et $l_{U\mathbb{C}}(a^k) = l_{U\mathbb{C}}(\partial^k \hat{a})$. Donc $a^k = \partial^k(\hat{a})$.

Corollaire 4.20. : Soient $\alpha \in A^f U(\mathbb{I})$ tel que $\mathrm{sym}(\alpha) = \Box$, $n = l(\alpha)$. Soient aussi $(c_0, ..., c_{n-1}) \in U(\mathbb{C})^n$ tel que $\overline{\dim}(\alpha) = (\dim c_0, ..., \dim c_{n-1})$. Posons $a = \alpha\{c_0, ..., c_{n-1}\}$. Alors $\partial^1(a) = \partial^1(\alpha)\{c_0, ..., c_{p-1}\}$ et $\partial^0(a) = \partial^0(\alpha)\{c_p, ..., c_{n-1}\}$ où $p = l(\partial^1 \alpha)$.

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 4.21. : Soit $a \in A^f U(\mathbb{C})$ tel que $a = a_1 \Box a_0$. Alors :

$$\forall k \in [2],\ \pi_{\mathbb{C}} \partial^k(a) = \pi_{\mathbb{C}}(a_k).$$

Preuve : Résulte des propositions 4.6,4.12 et 4.16.

Proposition 4.22. : Soit $A \in A^{f2} U(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{sym}(A) = \Box$. Alors :

$$\forall k \in [2],\ \mu'_{U\mathbb{C}}(\partial^k A) = \partial^k \mu'_{U\mathbb{C}}(A).$$

Preuve : On utilise la proposition 1.20.

4.3 Domaine et co-domaine d'un arbre feuillu

Notations et définitions 4.23. : Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, posons $i_p = 0_p(\varnothing) \odot 0_p(\varnothing)$. On a $i_p \in A^f U(\mathbb{I})$ et $\dim i_p = p+1$. Soit maintenant $\mathbb{C}$ dans $|\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$ et $a \in A^f U(\mathbb{C})$ tel que $\dim(a) = p$. Alors $\overline{\dim}(i_p) = (\dim(a), \dim(a))$ et donc, on peut poser $\mathrm{I}(a) = \mathrm{Op}(i_p, (a, a))$. On a $\mathrm{I}(a) \in A^f U(\mathbb{C})$ et $\dim \mathrm{I}(a) = p + 1$. On définit ensuite $\mathrm{I}^n(a)$ par induction sur n, en posant $\mathrm{I}^0(a) = a$ et $\mathrm{I}^{n+1}(a) = \mathrm{I}(\mathrm{I}^n(a))$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}^n(a) \in A^f U(\mathbb{C})$ et $\dim \mathrm{I}^n(a) = n + p$.

Proposition 4.24. : Soit $a \in A^f U(\mathbb{C})$, alors $\forall k \in [2],\ \partial^k \mathrm{I}(a) = a$.

Preuve : Sans difficulté.

Notations et définitions 4.25. : Soient maintenant $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|,\ p \in \mathbb{N}$ et $k \in [2]$. Pour chaque $a \in A^f U(\mathbb{G})$ on construit $\partial^k_p(a)$ de la façon suivante :
Notons $n = \dim(a)$.
- Si $n \leq p$, on pose $\partial^k_p(a) = \mathrm{I}^{p-n}(a)$.
- Si $n > p$, on définit $\partial^k_p(a)$ par induction sur $\mathrm{L}(a)$.
.. Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in U(\mathbb{G})$, on pose $\partial^k_p(a) = \partial^k_p(c)(\varnothing)$.
.. Si $a = a_1 \star_q a_0$, alors :
... si $p \leq q,\ \partial^k_p(a) = \partial^k_p(a_k)$,
... si $p > q,\ \partial^k_p(a) = \partial^k_p(a_1) \star_q \partial^k_p(a_0)$.
.. Si $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors $\partial^k_p(a) = \partial^k_p \partial^k(a)$.

Proposition 4.26. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $a \in A^f U(\mathbb{G}),\ k \in [2]$ et $p \in \mathbb{N}$.
1)a) Pour tout $k \in [2]$ et $p \in \mathbb{N},\ \partial^k_p(a) \in A^f U(\mathbb{G})$,
b) $\dim \partial^k_p(a) = p$.
2) Soient $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme d'ensembles globulaires, alors :
a) $\tilde{g}(\mathrm{I}(a)) = \mathrm{I}\tilde{g}(a)$,
b) $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall k \in [2],\ \tilde{g}\partial^k_p(a) = \partial^k_p \tilde{g}(a)$.
3)a) $\pi_{U\mathbb{G}} \mathrm{I}(a) = \mathrm{I}\pi_{U\mathbb{G}}(a)$,
b) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ \pi_{U\mathbb{G}} \partial^k_p(a) = \partial^k_p \pi_{U\mathbb{G}}(a)$.
4) Soit $A \in A^{f2} U(\mathbb{G})$. Alors :
a) $\mu_{U\mathbb{G}} \mathrm{I}(A) = \mathrm{I}\mu_{U\mathbb{G}}(A)$,
b) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ \mu_{U\mathbb{G}} \partial^k_p(A) = \partial^k_p \mu_{U\mathbb{G}}(A)$.

Preuve : Essentiellement, par induction sur la longueur des arbres.

4.4 Les monades $\mathcal{A}^g$ et $\mathcal{A}^c$

Notations et définitions 4.27. : Soit $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$. On construit les parties $A^g(\mathbb{G})$ et $A^c(\mathbb{G})$ de $A^f U(\mathbb{G})$ par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in A^f U(\mathbb{G})$. On pose $n = \dim(a)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in U(\mathbb{G})$, alors $a \in A^g(\mathbb{G})$ et $a \in A^c(\mathbb{G})$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$ (dans ce cas $p < n$), alors $a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a \in A^c(\mathbb{G})$),

ssi $a_1, a_0 \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a_1, a_0 \in A^c(\mathbb{G})$), $\forall k \in [2]$, $\dim(a_k) = n$ et $\partial_p^0(a_1) = \partial_p^1(a_0)$.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors $a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a \in A^c(\mathbb{G})$) ssi $\partial^1(a), \partial^0(a) \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\partial^1(a), \partial^0(a) \in A^c(\mathbb{G})$), $\partial^1(a)//\partial^0(a)$ et, pour l'appartenance à $A^c(\mathbb{G})$, $\pi_{U\mathbb{G}}(a) \in P(\mathbb{G})$.

Remarque 4.28. : Clairement on a $A^c(\mathbb{G}) \subset A^g(\mathbb{G})$.

Proposition 4.29. : 1) $\forall a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a \in A^c(\mathbb{G})$), $\mathrm{I}(a) \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\mathrm{I}(a) \in A^c(\mathbb{G})$).
2) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2], \forall a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a \in A^c(\mathbb{G})$),
$p \leq \dim(a) \Rightarrow \partial_p^k(a) \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\in A^c(\mathbb{G})$).
3) $\forall p, p' \in \mathbb{N}, \forall k, k' \in [2], \forall a \in A^g(\mathbb{G})$,
$p < p' < \dim(a) \Rightarrow \partial_p^k \partial_{p'}^{k'}(a) = \partial_p^k(a)$.

Preuve : Le (1) est immédiat. Pour le (2) et le (3), par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Corollaire 4.30. : $(A^g(\mathbb{G}), \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est un ensemble globulaire, noté $\mathcal{A}^g(\mathbb{G})$, et $(A^c(\mathbb{G}), \dim, (\partial_p^1, \partial_p^0)_{p\in\mathbb{N}})$ est un sous-ensemble globulaire de $\mathcal{A}^g(\mathbb{G})$, noté $\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$.

Proposition 4.31. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ une flèche de $\mathbb{G}lob$. Alors :
1) $\forall a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $a \in A^c(\mathbb{G})$), $\tilde{g}(a) \in A^g(\mathbb{G}')$ (resp. $\in A^c(\mathbb{G}')$),
2) Les restrictions de $\tilde{g}$ à $\mathcal{A}^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^g(\mathbb{G}')$ et à $\mathcal{A}^c(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^c(\mathbb{G}')$ sont des morphismes d'ensembles globulaires.

Preuve : Pour le (1), par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Le (2) est immédiat.

Proposition 4.32. : 1) Soit $a \in A^f U(\mathbb{G})$. Alors on a les implications suivantes :
a) $a \in A^g(\mathbb{G}) \Rightarrow \pi_{U\mathbb{G}}(a) \in A'^g(\mathbb{G})$,
b) $a \in A^c(\mathbb{G}) \Rightarrow \pi_{U\mathbb{G}}(a) \in A'^c(\mathbb{G})$.
2) Les restrictions de $\pi_{U\mathbb{G}}$ à $\mathcal{A}^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$ et à $\mathcal{A}^c(\mathbb{G}) \to P(\mathbb{G})$ sont des morphismes d'ensembles globulaires. On note chacun d'eux $\pi_{\mathbb{G}}$.

Preuve : Pour le (1), par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 4.33. : Soit $m : \mathbb{G}' \to \mathbb{G}$ un morphisme injectif d'ensembles globulaires.
1) Si $a' \in AU(\mathbb{G}')$ est tel que $\tilde{m}(a') \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\in A^c(\mathbb{G})$) alors $a' \in A^g(\mathbb{G}')$ (resp.$\in A^c(\mathbb{G}')$).
2)Si $a \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\in A^c(\mathbb{G})$) est tel que $l_{\{U\mathbb{G}\}}(a) \subset m(U\mathbb{G}')$, alors il existe un unique $a' \in A^g(\mathbb{G}')$ (resp.$\in A^c(\mathbb{G}')$) tel que $\tilde{m}(a') = a$.

Preuve : Pour le (1) par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Le (2) résulte du (1).

Proposition 4.34. : Soit $a \in A^g(\mathbb{G})$. Alors, pour tout $k \in [2]$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p < \dim(a)$, on a :

$$\mathrm{L}\partial_p^k(a) \leq \mathrm{L}(a).$$

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$.

Proposition 4.35. : 1) $\forall A \in U\mathcal{A}^{g2}(\mathbb{G})$ (resp. $\in U\mathcal{A}^{c2}(\mathbb{G})$),
$\mu'_{U\mathbb{G}}\tilde{\imath}_{\mathbb{G}}(A) \in A^g(\mathbb{G})$ (resp. $\in A^c(\mathbb{G})$) où $\imath_{\mathbb{G}}$ désigne les inclusions de $A^g(\mathbb{G})$ et $A^c(\mathbb{G})$ dans $A^fU(\mathbb{G})$. On note $\mu_{\mathbb{G}}$ chacune des restrictions de $\mu'_{U\mathbb{G}}$ à $U\mathcal{A}^{g2}(\mathbb{G}) \to U\mathcal{A}^g(\mathbb{G})$ et à $U\mathcal{A}^{c2}(\mathbb{G}) \to U\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$.
2) $\mu_{\mathbb{G}} : \mathcal{A}^{g2}(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^g(\mathbb{G})$ et $\mu_{\mathbb{G}} : \mathcal{A}^{c2}(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ sont des morphismes d'ensembles globulaires.

Preuve : Pour le (1), par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Le (2) est immédiat.

Remarques 4.36. : 1) Les applications $g \mapsto \tilde{g}$ de $\mathcal{A}^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^g(\mathbb{G}')$ et de $\mathcal{A}^c(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^c(\mathbb{G}')$ sont fonctorielles. On note $\mathcal{A}^g$ et $\mathcal{A}^c$ les deux endo-foncteurs de $\mathbb{G}lob$ obtenus.
2) Les restrictions de $\eta'_{U(\mathbb{G})} : U(\mathbb{G}) \to A^fU(\mathbb{G})$ à $U(\mathbb{G}) \to A^g(\mathbb{G})$ et à $U(\mathbb{G}) \to A^c(\mathbb{G})$ sont des morphismes d'ensembles globulaires de $\mathbb{G} \to \mathcal{A}^g(\mathbb{G})$ et de $\mathbb{G} \to \mathcal{A}^c(\mathbb{G})$. On note chacun d'eux $\eta_{\mathbb{G}}$. Les morphismes $\eta_{\mathbb{G}}$ sont naturels en $\mathbb{G}$. On obtient des transformations naturelles, notées η, de $Id_{\mathbb{G}lob} \to \mathcal{A}^g$ et de $Id_{\mathbb{G}lob} \to \mathcal{A}^c$.
3) De même les morphismes $\mu_{\mathbb{G}}$ de $\mathcal{A}^{g2}(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^g(\mathbb{G})$ et de $\mathcal{A}^{c2}(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ sont naturels en $\mathbb{G}$. On note μ chacune des transformations naturelles $\mathcal{A}^{g2} \to \mathcal{A}^g$ et $\mathcal{A}^{c2} \to \mathcal{A}^c$.
4) Les morphismes $\pi_{\mathbb{G}}$ de $\mathcal{A}^g(\mathbb{G}) \to \mathcal{A}'^g(\mathbb{G})$ et de $\mathcal{A}^c(\mathbb{G}) \to P(\mathbb{G})$ sont naturels en $\mathbb{G}$. On note π chacune des transformations naturelles $\mathcal{A}^g \to \mathcal{A}'^g$ et $\mathcal{A}^c \to P$.

Proposition 4.37. : 1) $(\mathcal{A}^g, \eta, \mu)$ est une monade sur $\mathbb{G}lob$.
2) $(\mathcal{A}^c, \eta, \mu)$ est une sous-monade de $(\mathcal{A}^g, \eta, \mu)$.
3) $\pi : \mathcal{A}^g \to \mathcal{A}'^g$ et $\pi : \mathcal{A}^c \to \mathbb{P}$ sont des morphismes de monades.

<u>*Preuve*</u> : Pour le (1) et le (2), cela résulte de la section 3 de la première partie, et pour le (3), cela résulte de la proposition 4.11.

Proposition 4.38. : $(\mathbb{G}lob, U, \mathcal{A}^g, \eta, \mu, \mathrm{L})$ et $(\mathbb{G}lob, U, \mathcal{A}^c, \eta, \mu, \mathrm{L})$ sont des monades concrètes syntaxiques.

<u>*Preuve*</u> : Résulte de la section 1 de la première partie.

4.5 La monade $\mathbb{B}$

Notations et définitions 4.39. : Soit $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$. On construit $A^b(\mathbb{G}) \subset A^f U(\mathbb{G})$ par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in A^f U(\mathbb{G})$. On pose $n = \dim(a)$.
- Si $a = c(\varnothing)$, où $c \in U(\mathbb{G})$, alors $a \in A^b(\mathbb{G})$.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$ (dans ce cas $p < n$), alors $a \in A^b(\mathbb{G})$ ssi $a_1, a_0 \in A^b(\mathbb{G})$, $\forall k \in [2]$, $\dim(a_k) = n$ et $\partial_p^0(a_1) = \partial_p^1(a_0)$.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors $a \in A^b(\mathbb{G})$ ssi $\partial^1(a), \partial^0(a) \in A^b(\mathbb{G})$, $\partial^1(a)//\partial^0(a)$; de plus :
.. si a est irréductible, $\pi_{\mathbb{G}}(a) \in P(\mathbb{G})$,
.. si a n'est pas irréductible, notons $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ la décomposition canonique de a (voir la définition 1.26), on demande que $\alpha \in A^b(\mathbb{I})$, $\forall j \in [m], a_j \in A^b(\mathbb{G})$ et $\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\} \in A^b\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$.

Remarque 4.40. : On aurait aimé demander que $\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\}$ soit dans $(A^b)^2(\mathbb{G})$, mais ce n'est pas encore possible car on n'a pas encore montré que $A^b(\mathbb{G})$ a une structure d'ensemble globulaire (voir la proposition 4.46).

Proposition 4.41. : On a $A^b(\mathbb{G}) \subset A^c(\mathbb{G})$.

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur la longueur des arbres. Soit $a \in A^b(\mathbb{G})$. Pour montrer que $\pi_{\mathbb{G}}(a) \in P(\mathbb{G})$ lorsque $\mathrm{sym}(a) = \square$ et a n'est pas irréductible, on procède comme suit : Ecrivons $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ la décomposition canonique de a. On a
$\pi_{\mathbb{G}}(a) = \mathrm{Op}(\pi_{\mathbb{I}}\alpha, (\pi_{\mathbb{G}}a_0, ..., \pi_{\mathbb{G}}a_{m-1})) = \mu_{\mathbb{G}}(\pi_{\mathbb{I}}(\alpha)\{\pi_{\mathbb{G}}a_0, ..., \pi_{\mathbb{G}}a_{m-1}\}) =$

$\mu_{\mathbb{G}}\tilde{\pi}_{\mathbb{G}}(\pi_{\mathbb{I}}(\alpha)\{a_0, ..., a_{m-1}\})$. Or $\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\} \in A^c\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ (par hypothèse d'induction) donc $\pi_{\mathbb{I}}(\alpha)\{a_0, ..., a_{m-1}\} = \pi_{\mathcal{A}^c\mathbb{G}}(\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\})$ dans $UP\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ et alors $\tilde{\pi}_{\mathbb{G}}(\pi_{\mathbb{I}}(\alpha)\{a_0, ..., a_{m-1}\}) \in UP^2(\mathbb{G})$. Ainsi $\pi_{\mathbb{G}}(a) \in P(\mathbb{G})$.

Proposition 4.42. : 1) $\forall a \in A^b(\mathbb{G}),\ \mathrm{I}(a) \in A^b(\mathbb{G})$.
2) $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall k \in [2], \forall a \in A^b(\mathbb{G}),\ p \leq \dim(a) \ \Rightarrow\ \partial^k_p(a) \in A^b(\mathbb{G})$.

Preuve : (1) On a $\mathrm{sym}(\mathrm{I}(a)) = \square,\ \forall k \in [2],\ \partial^k\mathrm{I}(a) = a \in A^b(\mathbb{G})$ et $\partial^1\mathrm{I}(a)//\partial^0\mathrm{I}(a)$ De plus :
- si $\mathrm{I}(a)$ est irréductible, $\pi_{\mathbb{G}}\mathrm{I}(a) = \mathrm{I}\pi_{\mathbb{G}}(a) \in P(\mathbb{G})$,
- si $\mathrm{I}(a)$ n'est pas irréductible, comme $\mathrm{Op}(i_p, (a, a))$ est la décomposition canonique de $\mathrm{I}(a)$, où $i_p \in A^b(\mathbb{I}),\ a \in A^b(\mathbb{G})$ et $i_p\{a, a\} = \mathrm{I}(a(\varnothing))$ dans $A^b\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ (car $\mathrm{I}(a(\varnothing))$ est irréductible), on a toujours $\mathrm{I}(a) \in A^b(\mathbb{G})$.
(2) On le fait par induction sur $\mathrm{L}(a)$ (Lorsque $\mathrm{sym}(a) = \square$, on remarque que $\partial^k_p(a) = \partial^k_p\partial^k(a)$).

Corollaire 4.43. : $(A^b(\mathbb{G}), \dim, (\partial^1_p, \partial^0_p)_{p\in\mathbb{N}})$ est un sous-ensemble globulaire de $\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$. On le note $B(\mathbb{G})$.

Proposition 4.44. : Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ une flèche de $\mathbb{G}lob$. Alors :
1) $\forall a \in A^b(\mathbb{G}),\ \tilde{g}(a) \in A^b(\mathbb{G}')$,
2) $\tilde{g} : B(\mathbb{G}) \to B(\mathbb{G}')$ est un morphisme d'ensembles globulaires.

Preuve : Le (1) se fait par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Lorsque $\mathrm{sym}(a) = \square$ où a n'est pas irréductible, écrivons $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ la décomposition canonique de a alors celle de $\tilde{g}(a)$ est $\mathrm{Op}(\alpha, (\tilde{g}a_0, ..., \tilde{g}a_{m-1}))$, où $\alpha \in A^b(\mathbb{I}),\ \forall j \in [m], \tilde{g}(a_j) \in A^b(\mathbb{G}')$ et $\alpha\{\tilde{g}a_0, ..., \tilde{g}a_{m-1}\} = \tilde{\tilde{g}}(\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\}) \in A^b\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ (les deux, par hypothèse d'induction). Donc $\tilde{g}(a) \in A^b(\mathbb{G}')$. Les autres cas sont sans difficulté. Le (2) est immédiat.

Proposition 4.45. : Soit $m : \mathbb{G}' \to \mathbb{G}$ un morphisme injectif d'ensembles globulaires.
1) Si $a' \in AU(\mathbb{G}')$ est tel que $\tilde{m}(a') \in A^b(\mathbb{G})$ alors $a' \in A^b(\mathbb{G}')$.
2) Si $a \in A^b(\mathbb{G})$ est tel que $l_{\{U\mathbb{G}\}}(a) \subset m(U\mathbb{G}')$. Alors il existe un unique $a' \in A^b(\mathbb{G}')$ tel que $\tilde{m}(a') = a$.

<u>*Preuve*</u> : Le (1) se fait par induction sur $\mathrm{L}(a')$. Lorsque $\mathrm{sym}(a') = \square$, où a' n'est pas irréductible, Ecrivons $\mathrm{Op}(\alpha, (a'_0, ..., a'_{m-1}))$ la décomposition canonique de a'. Alors, comme $\mathrm{Op}(\alpha, (\tilde{m}a'_0, ..., \tilde{m}a'_{m-1}))$ est la décomposition canonique de $\tilde{m}(a')$, on en déduit que $\alpha \in A^b(\mathbb{I})$ et $\forall j \in [m]$,
$a'_j \in A^b(\mathbb{G}')$ (par hypothèse d'induction) et comme
$\tilde{\tilde{m}}(\alpha\{a'_0, ..., a'_{m-1}\}) = \alpha\{\tilde{m}a'_0, ..., \tilde{m}a'_{m-1}\}$, on a aussi $\alpha\{a'_0, ..., a'_{m-1}\}$ dans $A^b\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$ (par hypothèse d'induction).
Le (2) résulte du (1).

Proposition 4.46. : Soit $a \in A^b(\mathbb{G})$, où $\mathrm{sym}(a) = \square$. On suppose que $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ est la décomposition canonique de a. Alors on a :
$\alpha \in A^b(\mathbb{I})$, $\forall j \in [m]$, $a_j \in A^b(\mathbb{G})$ et $\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\} \in A^bB(\mathbb{G})$.

<u>*Preuve*</u> : Essentiellement car $l_{\{A^c\mathbb{G}\}}(\alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\}) = \{a_0, ..., a_{m-1}\}$ qui est contenu dans $A^b(\mathbb{G})$.

Proposition 4.47. : 1) $\forall A \in A^bB(\mathbb{G})$, $\mu_{U\mathbb{G}}\tilde{\imath}_{\mathbb{G}}(A) \in A^b(\mathbb{G})$ (où $\imath_{\mathbb{G}}$ est l'inclusion de $A^b(\mathbb{G})$ dans $A^c(\mathbb{G})$). On note encore
$\mu_{\mathbb{G}} : A^bB(\mathbb{G}) \to A^b(\mathbb{G})$ la restriction de $\mu_{\mathbb{G}} : A^c\mathcal{A}^c(\mathbb{G}) \to A^c(\mathbb{G})$.
2) $\mu_{\mathbb{G}} : B^2(\mathbb{G}) \to B(\mathbb{G})$ est un morphisme d'ensembles globulaires.

<u>*Preuve*</u> : Le (1) se montre par induction sur $\mathrm{L}(A)$. Lorsque $\mathrm{sym}(a) = \square$ et $\mu_{U\mathbb{G}}\tilde{\imath}_{\mathbb{G}}(A)$ n'est pas irréductible, écrivons $A' = \tilde{\imath}_{\mathbb{G}}(A)$ et sa décomposition canonique $\mathrm{Op}(\alpha, (A'_0, ..., A'_{m-1}))$. Alors $\mathrm{Op}(\alpha, (\mu_{U\mathbb{G}}A'_0, ..., \mu_{U\mathbb{G}}A'_{m-1}))$ est la décomposition canonique de $\mu_{U\mathbb{G}}(A')$, où $\alpha \in A^b(\mathbb{I})$, $\forall j \in [m]$, $\mu_{U\mathbb{G}}(A'_j) \in A^b(\mathbb{G})$ (par hypothèse d'induction) et $\alpha\{\mu_{U\mathbb{G}}A'_0, ..., \mu_{U\mathbb{G}}A'_{m-1}\} = \tilde{\mu}_{U\mathbb{G}}(\alpha\{A'_0, ..., A'_{m-1}\})$ qui est dans $A^b\mathcal{A}^c(\mathbb{G})$.

Remarque 4.48. : Comme en 4.36, on obtient un endo-foncteur B de $\mathbb{G}lob$ et des transformations naturelles $\eta : Id_{\mathbb{G}lob} \to B$ et $\mu : B^2 \to B$.

Proposition 4.49. : 1) $\mathbb{B} = (B, \eta, \mu)$ est une sous-monade de $(\mathcal{A}^c, \eta, \mu)$.
2) $(\mathbb{G}lob, U, \mathbb{B}, \mathrm{L})$ est une monade concrète syntaxique.
3) $\pi : \mathbb{B} \to \mathbb{P}$ est un morphisme de monades.

<u>*Preuve*</u> : Le (1) résulte de la section 3 de la première partie, le (2) de la section 1 de la première partie, et pour le (3), le morphisme π est la restriction de son homologue de $\mathcal{A}^c \to P$.

5. La monade de Batanin

Introduction : Le but de cette section est de montrer que $\mathbb{B}$ est la monade de Batanin. Pour cela, nous allons montrer successivement que $\mathbb{B}$ est cartésienne puis qu'elle est pure. La cartésianité de $\mathbb{B}$ se montre en plusieures étapes après avoir introduit les concepts de polarisation de niveau 1, comme on l'a fait pour $\mathbb{P}$, puis de niveau 2.

5.1 Polarisation de niveau 1

Convention 5.1. : A partir de maintenant si M est un endo-foncteur de $\mathbb{G}lob$ on écrira "$a \in M(\mathbb{G})$" au lieu de "$a \in UM(\mathbb{G})$".

Notations 5.2. : 1) Soit $a \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$. On pose $\mathcal{P}ol(a) = a\{\mathrm{Cell}\pi(a)\}$ (où, pour simplifier, on note $\pi = \pi_{\mathbb{I}} : \mathcal{A}^c(\mathbb{I}) \to P(\mathbb{I})$ et où $\mathrm{Cell}(-)$ est défini au 3.31).
2) Lorsque $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, on note b la transformation naturelle composée suivante :

$$\mathcal{A}^c \xrightarrow{\pi} P \xrightarrow{p} \omega.$$

3) Quand $a \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$ on écrit $b(a)$ au lieu de $\underline{b_{\mathbb{I}}(a)}$ (pour la notation $\underline{\alpha}$ voir au 2.29).

Proposition 5.3. : Soit $a \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$. Alors :
1) $\mathcal{P}ol(a) \in A(\Gamma b(a))$.
2) $\pi_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol(a) = \mathcal{P}ol\ \pi(a)$.
3) $|\mathcal{P}ol(a)| = a$.

Preuve : Immédiat.

Proposition 5.4. : Soit $a \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$.
1) On suppose que $\mathrm{sym}(a) = \square$. Alors $\forall k \in [2],\ \partial^k\mathcal{P}ol(a) = \mathcal{P}ol\partial^k(a)$.
2) $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [2],\ p < \dim(a)\ \Rightarrow\ \partial^k_p\mathcal{P}ol(a) = \widetilde{\mathrm{d}^k_p(ba)}\mathcal{P}ol\partial^k_p(a)$.
3) On a $\mathcal{P}ol(a) \in \mathcal{A}^c\Gamma b(a)$.

Preuve : (1) Ecrivons $a = a_1\square a_0$. Alors
$\partial^k\mathcal{P}ol(a) = \partial^k(a\{\mathrm{Cell}\pi(a)\}) = \partial^k(a)\{\mathrm{Cell}\pi(a_k)\} = \partial^k(a)\{\mathrm{Cell}\pi(\partial^k(a)\}$
$= \mathcal{P}ol\ \partial^k(a)$.
(2) Par induction sur $\mathrm{L}(a)$. On s'inspire de la preuve de la proposition 3.34.
(3) Même induction. On s'inspire ici de la proposition 3.35.

Proposition 5.5. : La transformation naturelle $b : \mathcal{A}^c \to \omega$ est cartésienne.

Preuve : On le vérifie sur les flèches de la forme $!_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \to \mathbb{I}$. La encore, on s'inspire de la preuve de la proposition 3.37.

Corollaire 5.6. : 1) $\mathcal{A}^c$ est une monade cartésienne.
2) $\pi : \mathcal{A}^c \to P$ est cartésien.

Preuve : (1) car b est un morphisme de monade qui est cartésien et ω est une monade cartésienne.
(2) car p et b sont cartésiens.

Remarque 5.7. On voit, comme à la remarque 3.39, que pour tout $a \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$, $\mathcal{P}ol(a) \in \mathcal{A}^c\Gamma b(a)$ est complètement caractérisé par les deux identités suivantes :

$$|\mathcal{P}ol(a)| = a \quad \text{et} \quad b_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol(a) = Pol\, b_{\mathbb{I}}(a).$$

puisque $b : \mathcal{A}^c \to \omega$ est lui aussi cartésien.

5.2 Polarisation de niveau 2

5.2.1 Pour ω

Notation 5.8. : Soit $A \in \omega^2(\mathbb{I})$, on pose $\alpha = \mu_{\mathbb{I}}(A) \in \omega(\mathbb{I})$. Comme $Pol(\alpha) \in \omega\Gamma(\underline{\alpha})$ et que $\omega(!)Pol(\alpha) = \alpha = \mu_{\mathbb{I}}(A)$, on en déduit, grâce à la cartésianité de $\mu : \omega^2 \to \omega$, qu'il existe une unique cellule, notée $Pol^2(A) \in \omega^2\Gamma(\underline{\alpha})$ telle que :

$$\omega^2(!)Pol^2(A) \underset{I_1}{=} A \quad \text{et} \quad \mu_{\Gamma\underline{\alpha}}Pol^2(A) = Pol(\alpha) = Pol\mu_{\mathbb{I}}(A).$$

Remarques et notations 5.9. : 1) On a $\dim Pol^2(A) = \dim(A)$ et $\underline{Pol^2(A)} = \underline{A}$.
2) Notons $pol_A = g_{Pol^2A} : \Gamma(\underline{A}) \to \omega\Gamma(\underline{\alpha})$ la flèche de $\mathbb{G}lob$ (où la notation g_α est définie en 2.29). Alors, grâce à (I_1), on a l'identité :
$g_A \underset{I_2}{=} (\Gamma(\underline{A}) \xrightarrow{pol_A} \omega\Gamma(\underline{\alpha}) \xrightarrow{\omega(!)} \omega(\mathbb{I}))$.
3) Pour tout $c \in \Gamma(\underline{A})$, $\underline{pol_A(c)} = \underline{g_A(c)}$ (grâce à (I_2)). Notons enfin $\delta_A(c) = g_{pol_A(c)} : \Gamma(\underline{g_A(c)}) \to \Gamma(\underline{\alpha})$ la flèche de $\mathbb{G}lob$.

5.2.2 Pour $\mathcal{A}^c$

Notation 5.10. : Soit $A \in \mathcal{A}^{c2}(\mathbb{I})$. Posons $a = \mu_{\mathbb{I}}(A) \in \mathcal{A}^c(\mathbb{I})$. Comme $\mathcal{P}ol(a) \in \mathcal{A}^c\Gamma b(a)$ et que $\mathcal{A}^c(!)\mathcal{P}ol(a) = a = \mu_{\mathbb{I}}(A)$, on en déduit, grâce à la cartésianité de $\mu : \mathcal{A}^{c2} \to \mathcal{A}^c$ (voir le corollaire 5.6), qu'il existe une unique cellule, notée $\mathcal{P}ol^2(A) \in \mathcal{A}^{c2}\Gamma b(a)$, telle que :

$$\mathcal{A}^{c2}(!)\mathcal{P}ol^2(A) = A \quad \text{et} \quad \mu_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A) = \mathcal{P}ol(a) = \mathcal{P}ol\mu_{\mathbb{I}}(A)$$

.

Proposition 5.11. : On a l'identité : $b^2_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A) = Pol^2 b^2_{\mathbb{I}}(A)$.

<u>*Preuve*</u> : Soient $U = Pol^2 b^2_{\mathbb{I}}(A)$ et $V = b^2_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A)$. On remarque que $\omega^2(!)(U) = b^2_{\mathbb{I}}(A) = \omega^2(!)(V)$ et $\mu_{\Gamma b(a)}(U) = Pol\, b_{\mathbb{I}}\mu_{\mathbb{I}}(A) = \mu_{\Gamma b(a)}(V)$. On en déduit que $U = V$ car $\mu : \omega^2 \to \omega$ est cartésien.

Remarque 5.12. : On a la composition des carrés cartésiens suivants dans $\mathbb{G}lob$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{c2}\Gamma b(a) \arrow[r, "b_{\mathcal{A}^c\Gamma b(a)}"] \arrow[d, "\mathcal{A}^{c2}(!)"'] & \omega\mathcal{A}^c\Gamma b(a) \arrow[r, "\omega b_{\Gamma b(a)}"] \arrow[d, "\omega\mathcal{A}^c(!)"] & \omega^2\Gamma b(a) \arrow[d, "\omega^2(!)"] \\
\mathcal{A}^{c2}(\mathbb{I}) \arrow[r, "b_{\mathcal{A}^c\mathbb{I}}"'] & \omega\mathcal{A}^c(\mathbb{I}) \arrow[r, "\omega b_{\mathbb{I}}"'] & \omega^2(\mathbb{I})
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{c2}\Gamma b(a) \arrow[r, "b^2_{\Gamma b(a)}"] \arrow[d, "\mathcal{A}^{c2}(!)"'] & \omega^2\Gamma b(a) \arrow[d, "\omega^2(!)"] \\
\mathcal{A}^{c2}(\mathbb{I}) \arrow[r, "b^2_{\mathbb{I}}"'] & \omega^2(\mathbb{I})
\end{tikzcd}$$

car b est cartésienne (voir la proposition 5.5) et ω commute aux produits fibrés. De ce fait $\mathcal{P}ol^2(A)$ peut être caractérisé par les identités suivantes :

$$\mathcal{A}^{c2}(!)\mathcal{P}ol^2(A) = A \quad \text{et} \quad b^2_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A) = Pol^2 b^2_{\mathbb{I}}(A).$$

Proposition 5.13. : On a l'identité $\mathcal{P}ol^2(A) = \tilde{\gamma}_A\mathcal{P}ol(|A|)$ où $\gamma_A : \Gamma b(|A|) \to \mathcal{A}^c\Gamma b(a)$ est la flèche de $\mathbb{G}lob$ définie, pour tout $c \in \Gamma b(|A|)$, par

$$\gamma_A(c) = \delta_B\tilde{(c)}\mathcal{P}ol g_{B'}(c) \quad \text{où} \quad B = b^2_{\mathbb{I}}(A) \quad \text{et} \quad B' = b_{\mathcal{A}^c\mathbb{I}}(A).$$

Preuve : - Commençons par utiliser, dans le carré composé de la remarque précédente, la cartésianité du carré de droite. Comme $\omega^2(!)Pol^2b_{\mathbb{I}}^2(A) = b_{\mathbb{I}}^2(A) = \omega(b_{\mathbb{I}})b_{\mathcal{A}^c\mathbb{I}}(A)$, il existe une unique cellule, notée $\mathcal{G}_A \in \omega\mathcal{A}^c\Gamma b(a)$ telle que $\omega(b_{\Gamma b(a)})(\mathcal{G}_A) = Pol^2b_{\mathbb{I}}^2(A)$ et $\omega\mathcal{A}^c(!)(\mathcal{G}_A) = b_{\mathcal{A}^c\mathbb{I}}(A)$. On constate que $\mathcal{G}_A \underset{*1}{=} (dim(A), b(|A|), \gamma_A)$.

$(*1)$ Grâce à la preuve de la proposition 5.5.

- Toujours dans la remarque 5.12, on utilise ensuite la cartésianité du carré de gauche ou plutôt la cartésianité du carré suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{c2}\Gamma b(a) \arrow[r, "b_{\mathcal{A}^c\Gamma b(a)}"] \arrow[d, "\mathcal{A}^c(!)"'] & \omega\mathcal{A}^c\Gamma b(a) \arrow[d, "\omega(!)"] \\
\mathcal{A}^c(\mathbb{I}) \arrow[r, "b_{\mathbb{I}}"] & \omega(\mathbb{I})
\end{tikzcd}$$

Comme $b_{\mathcal{A}^c\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A) = \mathcal{G}_A$ et $\mathcal{A}^c(!)\mathcal{P}ol^2(A) = |A|$. Cela implique que $\mathcal{P}ol^2(A) \underset{*1}{=} \tilde{\gamma}_A\mathcal{P}ol(|A|)$.

Proposition 5.14. : Notons, pour tout $j \in [lA]$, $\delta^j = \delta_{b_{\mathbb{I}}^2(A)}\mathrm{Cell}_j\pi(|A|)$. Alors, on a les identités suivantes, où $m = l(A)$ et $(a_0, ..., a_{m-1}) = l_{\mathcal{A}^c\mathbb{I}}(A)$:

1) $\mathcal{P}ol(a) = \mathrm{Op}(|A|, (\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})))$.

2) $\mathcal{P}ol^2(A) = |A|\{\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})\}$.

Preuve : (2) On a $\mathcal{P}ol^2(A) = \tilde{\gamma}_A\mathcal{P}ol(|A|) =$
$\tilde{\gamma}_A(|A|\{\mathrm{Cell}_0\pi|A|, ..., \mathrm{Cell}_{m-1}\pi|A|\}) =$
$|A|\{\gamma_A\mathrm{Cell}_0\pi|A|, ..., \gamma_A\mathrm{Cell}_{m-1}\pi|A|\} \underset{*1}{=}$
$|A|\{\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})\}$.

$(*1)$ Car $\gamma_A\mathrm{Cell}_j\pi|A| = \tilde{\delta}^j\mathcal{P}olg_A\mathrm{Cell}_j\pi|A| \underset{*2}{=} \tilde{\delta}^j\mathcal{P}ol(a_j)$.

$(*2)$ Voir proposition 3.36

(1) On a $\mathcal{P}ol\mu_{\mathbb{I}}(A) = \mu_{\Gamma b(a)}\mathcal{P}ol^2(A) =$
$\mu_{\Gamma b(a)}(|A|\{\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})\}) \underset{*3}{=}$
$\mathrm{Op}(|A|, (\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})))$.

$(*3)$ Voir proposition 1.20.

Théorème 5.15. : Soit $a \in B(\mathbb{I})$, alors $\mathcal{P}ol(a) \in B\Gamma b(a)$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Lorsque $\mathrm{sym}(a) = \Box$ et a n'est pas irréductible, on note $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ la décomposition canonique de a. Posons
$A = \alpha\{a_0, ..., a_{m-1}\}$. Alors $A \in B\mathcal{A}^c(\mathbb{I}) \subset \mathcal{A}^{c2}(\mathbb{I})$, $\mu_{\mathbb{I}}(A) = a$ et on a la décomposition canonique
$\mathcal{P}ol(a) = \mathrm{Op}(\alpha, (\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})))$, où $\alpha \in B(\mathbb{I})$,
$\forall j \in [m]$, $\tilde{\delta}^j\mathcal{P}ol(a_j) \in B\Gamma b(a)$ (car, par hypothèse d'induction,
$\mathcal{P}ol(a_j) \in B\Gamma b(a_j)$) et $\alpha\{\tilde{\delta}^0\mathcal{P}ol(a_0), ..., \tilde{\delta}^{m-1}\mathcal{P}ol(a_{m-1})\} = \mathcal{P}ol^2(A)$ dans $B\mathcal{A}^c\Gamma b(a)$ (car $\mathcal{P}ol^2(A) = \tilde{\gamma}_A\mathcal{P}ol(\alpha)$ où $\mathcal{P}ol(\alpha) \in B\Gamma b(\alpha)$, par hypothèse d'induction). Les autres cas ont été essentiellement traités à la proposition 5.4 (3). D'où la conclusion voulue.

Corollaire 5.16. : 1) La transformation naturelle $b : B \to \omega$ est cartésienne.
2) $\pi : B \to P$ est cartésienne.
3) $\mathbb{B}$ est une monade cartésienne.

Preuve : On procède comme aux propositions 5.5 et 5.6.

5.3 Pureté de $\mathbb{B}$

Remarque 5.17. : Au lieu de "Pureté de $\mathbb{B}$" on aurait dû, plus correctement, écrire "Pureté de $(\mathbb{G}lob, U, \mathbb{B}, L)$ ", qui est une monade concrète syntaxique cartésienne.

Proposition 5.18. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, $a \in \mathcal{A}^f(\mathbb{I})$, $m = l(a)$ et $(b_0, ..., b_{m-1})$ dans $\mathcal{A}^f(\mathbb{G})^m$ tels que $\overline{\dim}(a) = (\dim b_0, ..., \dim b_{m-1})$.
Si $\mathrm{Op}(a, (b_0, ..., b_{m-1})) \in B(\mathbb{G})$ alors $\forall j \in [m], b_j \in B(\mathbb{G})$.

Preuve : Par induction sur $\mathrm{L}(a)$. Posons déjà $\hat{a} = \mathrm{Op}(a, (b_0, ..., b_{m-1}))$.
- Si $a = 0_n(\varnothing)$, c'est immédiat.
- Si $a = a_1 \star_p a_0$, posons $\forall k \in [2]$, $m_k = l(a_k)$, $\bar{B}_1 = (b_0, ..., b_{m_1-1})$ et $\bar{B}_0 = (b_{m_1}, ..., b_{m-1})$. On voit que $\hat{a} = \mathrm{Op}(a_1, \bar{B}_1) \star_p \mathrm{Op}(a_0, \bar{B}_0)$. Donc $\forall k \in [2]$, $\mathrm{Op}(a_k, \bar{B}_k) \in B(\mathbb{G})$. Alors, grâce à l'hypothèse d'induction on obtient la conclusion voulue.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \Box$ alors, quand a est irréductible, $\mathrm{Op}(a, (b_0, ..., b_{m-1}))$ est la décomposition canonique de $\hat{a} \in B(\mathbb{G})$. Donc $\forall j \in [m]$,
$b_j \in B(\mathbb{G})$. Quand a n'est pas irréductible, soit $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{q-1}))$ la décomposition canonique de a. Alors la décomposition canonique de $\hat{a}$ est

$\mathrm{Op}(\alpha, (\mathrm{Op}(a_0, \bar{B}_0), ..., \mathrm{Op}(a_{q-1}, \bar{B}_{q-1})))$ où $\bar{B}_j = (b_{\hat{j}}, ..., b_{\widehat{j+1}-1})$ avec $\hat{j} = \sum_{i\in[j]} l(a_i)$. Donc, par hypothèse d'induction $\forall j \in [q]$, $\mathrm{Op}(a_j, \bar{B}_j) \in B(\mathbb{G})$ et donc, à nouveau par hypothèse d'induction, on a la conclusion voulue.

Proposition 5.19. : Soit $(a, b) \in B(\mathbb{I})^2$ et $n = l(a)$. Alors :
$a \underset{\mathbb{B}}{\leq} b \iff \exists \bar{b} \in \mathcal{A}^f(\mathbb{I})^n,\ b = \mathrm{Op}(a, \bar{b})$ et $a\{\bar{b}\} \in B^2(\mathbb{I})$.

Preuve : $(\Leftarrow)$ On pose $B = a\{\bar{b}\}$. Alors $B \in B^2(\mathbb{I})$, $\mu_{\mathbb{I}}(B) = b$ et $|B| = a$.
$(\Rightarrow)$ Soit $B \in B^2(\mathbb{I})$ tel que $\mu_{\mathbb{I}}(B) = b$ et $|B| = a$. On pose $\bar{b} = l_{B\mathbb{I}}(B)$. Alors $b = \mathrm{Op}(a, \bar{b})$ et $a\{\bar{b}\} = B \in B^2(\mathbb{I})$.

Proposition 5.20. : Soit $a \in B(\mathbb{I})$.
1) Si $\mathrm{sym}(a) = \star_p$ et $n = \dim(a)$, alors on a l'équivalence suivante :
a est primitif ssi $a = 0_n(\varnothing) \star_p 0_n(\varnothing)$.
2) Si $\mathrm{sym}(a) = \square$, alors on a l'équivalence suivante :
a est primitif ssi a est irréductible.

Preuve : Pour le (1) et le (2) ce sont essentiellement les mêmes preuves que leurs homologues dans les sections 3 et 5 de la première partie.

Théorème 5.21. : $(\mathbb{G}lob, U, \mathbb{B}, L)$ est pure.

Preuve : Soit $a \in B(\mathbb{I})$ tel que $\mathrm{L}(a) > 1$. Posons $n = \dim(a)$.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \star_p$. On écrit $a = a_1 \star_p a_0$. Posons $\alpha = 0_n(\varnothing) \star_p 0_n(\varnothing)$. Alors $a = \mathrm{Op}(\alpha, (a_1, a_0))$ et $\alpha\{a_1, a_0\} \in B^2(\mathbb{I})$. Donc $\alpha \leq a$ où α est primitif. L'unicité est immédiate.
- Si $\mathrm{sym}(a) = \square$. Soit $\mathrm{Op}(\alpha, (a_0, ..., a_{m-1}))$ la décomposition canonique de a. Alors $\alpha \leq a$ où $\alpha \in B(\mathbb{I})$ est primitif. L'unicité résulte de la proposition 1.25.

5.4 La catégorie $\mathfrak{B}$

Notations 5.22. : $\omega = (\omega, \eta, \mu)$ étant la monade des ∞-catégories strictes sur $\mathbb{G}lob$, posons, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\hat{0}_m = \eta_{\mathbb{I}}(0_m) \in \omega(\mathbb{I})$, pour tout $m, p \in \mathbb{N}$ tels que $m > p$, $\hat{0}^m_p = \hat{0}_m \circ_p \hat{0}_m$ et $\hat{0}^m_m = \hat{0}_m$. On pose ensuite :

$$C_{\mathbb{B}} = \{\hat{0}^m_p / (m, p) \in \mathbb{N}^2, m \geq p\}.$$

Remarques 5.23. : $C_{\mathbb{B}}$ est un sous-ensemble globulaire de $\omega(\mathbb{I})$. $(C_{\mathbb{B}}, \imath)$, où $\imath : C_{\mathbb{B}} \to \omega(\mathbb{I})$ est l'injection canonique, peut être vu comme une collection sur ω. On pointe cette collection en considérant la restriction de $\eta_{\mathbb{I}}$ à $\mathbb{I} \to C_{\mathbb{B}}$, dans $\mathbb{G}lob$.

Notations 5.24. : Soit maintenant (C, π) une collection quelconque sur ω. On pose :

$$\bar{\bar{C}} = \{(x_1, x_0) \in C \times C / \ x_1 /\tilde{/} x_0 \ , \ \pi(x_1) = \pi(x_0)\}.$$

où $x_1 /\tilde{/} x_0$ signifie
1) $\dim(x_1) = \dim(x_0)$ (notons $m = \dim(x_1) = \dim(x_0)$) et
2) $m = 0$ ou si $m > 0$, $\forall k \in [2]$, $\partial^k_{m-1}(x_1) = \partial^k_{m-1}(x_0)$.
Cette définition diffère légèrement de $x_1 // x_0$ donnée dans 3.8).

Définition 5.25. :(Rappel - voir [1]) 1) Une *contraction* sur la collection (C, π) est une application $Cr : \bar{\bar{C}} \to C$ (on note $[x_1, x_0] = Cr(x_1, x_0)$) vérifiant les conditions suivantes :
$(c1)$ $\dim[x_1, x_0] = 1 + m$ (où $m = \dim(x_1) = \dim(x_0)$),
$(c2)$ $\forall k \in [2]$, $\partial^k_m[x_1, x_0] = x_k$,
$(c3)$ $\pi[x_1, x_0] = \imath\pi(x_1) = \imath\pi(x_0)$.
2) Une *collection contractile* est un triplet (C, π, Cr) où (C, π) est une collection sur ω et Cr une contraction sur (C, π).
3) Un *morphisme* de collections contractiles $g : (C, \pi, Cr) \to (C', \pi', Cr')$ est un morphisme de collections (c.a.d. une flèche de $\mathbb{G}lob/\omega(\mathbb{I})$) qui vérifie en plus :

$$\forall (x_1, x_0) \in \bar{\bar{C}}, \ [g(x_1), g(x_0)] = g[x_1, x_0].$$

Proposition 5.26. : $(B(\mathbb{I}), b_{\mathbb{I}}, Cr)$ est une collection contractile (où $Cr(a_1, a_0) = a_1 \odot a_0$ - voir notation 1.27).

<u>Preuve</u> : Remarquons déjà que dans $B(\mathbb{I})$, on a $a_1 /\tilde{/} a_0 \iff a_1 // a_0$ (car $\dim(a) = 0 \iff a = 0_0(\varnothing)$). Prenons maintenant $(a_1, a_0) \in \bar{\bar{B}}(\mathbb{I})$, alors $[a_1, a_0] = a_1 \odot a_0 \in B(\mathbb{I})$ (on le voit facilement car $\forall k \in [2]$, $\partial^k[a_1, a_0] = a_k$ et $[a_1, a_0]$ est irréductible). Le fait que Cr est une contraction se vérifie sans difficulté.

Notation 5.27. : Notons maintenant $\mathfrak{B}$ la catégorie qui a :
- pour objets, les données $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, Cr, c)$ où :

.. $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$ est une monade sur $\mathbb{G}lob$,
.. $\pi : \mathbb{M} \to (\omega, \eta, \mu)$ est un morphisme de monades qui est cartésien.
.. Cr est une contraction sur la collection $(M(\mathbb{I}), \pi_{\mathbb{I}})$,
.. $c : C_{\mathbb{B}} \to M(\mathbb{I})$ est un morphisme de collections pointées sur ω (c.a.d. que c est un morphisme dans $Glob$ tel que $\pi_{\mathbb{I}}.c = \imath$ et $c.\eta_{\mathbb{I}}| = \eta_{\mathbb{I}}$, où $\eta_{\mathbb{I}}|$ est la restriction de $\eta_{\mathbb{I}}$ à $\mathbb{I} \to C_{\mathbb{B}}$) ;
- pour flèches $m : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, la donnée d'une transformation naturelle : $m : M \to M'$ telle que :
.. $m : \mathbb{M} \to \mathbb{M}'$ est un morphisme de monade,
.. $\pi'.m = \pi$,
.. $m_{\mathbb{I}} : (M(\mathbb{I}), \pi_{\mathbb{I}}, Cr) \to (M'(\mathbb{I}), \pi'_{\mathbb{I}}, Cr')$ est un morphisme de collections contractiles,
.. $m_{\mathbb{I}}.c = c'$.

Proposition 5.28. : $\mathcal{B} = (\mathbb{B}, b, Cr, c)$ est un objet de $\mathfrak{B}$ où $c : C_{\mathbb{B}} \to B(\mathbb{I})$ est donné par $c(\hat{0}^m_p) = 0_m(\varnothing) \star_p 0_m(\varnothing)$ si $m > p$ et $c(\hat{0}^m_m) = 0_m(\varnothing)$.

<u>*Preuve*</u> : Il reste seulement à vérifier que c est un morphisme de collections pointées sur ω ce qui se fait sans difficulté.

Notations 5.29. : Fixons maintenant $\mathcal{M} \in |\mathfrak{B}|$ et soit $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, $m, p \in \mathbb{N}$ tels que $m > p$. Pour chaque $(x_1, x_0) \in M(\mathbb{G})^2$ tel que $\dim(x_1) = \dim(x_0) = m$ et $\partial^0_p(x_1) = \partial^1_p(x_0)$, on a $\omega(!_{M\mathbb{G}})(\eta_{M\mathbb{G}}(x_1) \circ_p \eta_{M\mathbb{G}}(x_0)) = \hat{0}^m_p = \pi_{\mathbb{I}}(c(\hat{0}^m_p))$. Alors, comme π est cartésien, il existe une unique cellule, notée $\langle x_1, x_0 \rangle \in M^2(\mathbb{G})$ tel que $\pi_{M\mathbb{G}}\langle x_1, x_0 \rangle = \eta_{M\mathbb{G}}(x_1) \circ_p \eta_{M\mathbb{G}}(x_0)$ et $M(!_{M\mathbb{G}})\langle x_1, x_0 \rangle = c(\hat{0}^m_p)$. On pose ensuite $x_1 \circ_p x_0 = \mu_{\mathbb{G}}\langle x_1, x_0 \rangle \in M(\mathbb{G})$.

Proposition 5.30. : 1) $\pi_{\mathbb{G}}(x_1 \circ_p x_0) = \pi_{\mathbb{G}}(x_1) \circ_p \pi_{\mathbb{G}}(x_0)$.
2) $\dim(x_1 \circ_p x_0) = m$.
3) Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $q < m$. Alors :
- si $q \leq p$, $\partial^k_q\langle x_1, x_0 \rangle = \eta_{M\mathbb{G}}\partial^k_q(x_k)$ et $\partial^k_q(x_1 \circ_p x_0) = \partial^k_q(x_k)$,
- si $q > p$, $\partial^k_q\langle x_1, x_0 \rangle = \langle \partial^k_q x_1, \partial^k_q x_0 \rangle$ et $\partial^k_q(x_1 \circ_p x_0) = \partial^k_q(x_1) \circ_p \partial^k_q(x_0)$.
4) Soit $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ un morphisme de $\mathbb{G}lob$. Alors :
$M^2 g\langle x_1, x_0 \rangle = \langle Mg(x_1), Mg(x_0) \rangle$ et $Mg(x_1 \circ_p x_0) = Mg(x_1) \circ_p Mg(x_0)$.
5) Soient $X_1, X_0 \in M^2(\mathbb{G})$ tels que $\dim(X_1) = \dim(X_0) = m > p$ et $\partial^0_p(X_1) = \partial^1_p(X_0)$, alors :
$M\mu_{\mathbb{G}}\langle X_1, X_0 \rangle = \langle \mu_{\mathbb{G}} X_1, \mu_{\mathbb{G}} X_0 \rangle$ et $\mu_{\mathbb{G}}(X_1 \circ_p X_0) = \mu_{\mathbb{G}}(X_1) \circ_p \mu_{\mathbb{G}}(X_0)$.

6) Soient $p, m \in \mathbb{N}$ tels que $p < m$. Alors :
$\langle \eta_{\mathbb{I}}(0_m), \eta_{\mathbb{I}}(0_m) \rangle = M\eta_{\mathbb{I}}.c(\hat{0}_p^m)$ et $\eta_{\mathbb{I}}(0_m) \circ_p \eta_{\mathbb{I}}(0_m) = c(\hat{0}_p^m)$.

<u>*Preuve*</u> : Sans difficulté.

Proposition 5.31. : Soient $\mathcal{M}, \mathcal{M}' \in |\mathfrak{B}|$ et $m : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ une flèche de $\mathfrak{B}$. Alors, pour tout $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, tout $(x_1, x_0) \in M(\mathbb{G})^2$ tel que $\dim(x_1) = \dim(x_0) = n > p$ et $\partial_p^0(x_1) = \partial_p^1(x_0)$, on a :
$m_{\mathbb{G}}^2\langle x_1, x_0 \rangle = \langle m_{\mathbb{G}}(x_1), m_{\mathbb{G}}(x_0) \rangle$ et $m_{\mathbb{G}}(x_1 \circ_p x_0) = m_{\mathbb{G}}(x_1) \circ_p m_{\mathbb{G}}(x_0)$.

<u>*Preuve*</u> : Sans difficulté.

Proposition 5.32. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $a_1, a_0 \in B(\mathbb{G})$ tels que $\dim(a_1) = \dim(a_0) = m > p$ et $\partial_p^0(a_1) = \partial_p^1(a_0)$, alors :
$\langle a_1, a_0 \rangle = \eta_{B\mathbb{G}}(a_1) \star_p \eta_{B\mathbb{G}}(a_0)$ et $a_1 \circ_p a_0 = a_1 \star_p a_0$.

<u>*Preuve*</u> : Sans difficulté.

5.5 Matériel pour induction

Remarque 5.33. : Notre but est de montrer que $\mathcal{B} = (\mathbb{B}, b, Cr, c)$ est un objet initial de $\mathfrak{B}$. Or, étant donné un objet $\mathcal{M}$ de $\mathfrak{B}$, pour construire l'unique flèche $u : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$, il nous faudra faire une induction et pour ce faire nous aurons besoin d'un certain matériel que nous allons préciser maintenant.

Notation 5.34. : On commence par définir, très généralement (c.a.d. dans les mêmes conventions qu'à la section 3 de la première partie), pour tout $C \in |\mathbb{E}ns|$, une nouvelle "longueur" sur $A^2(C)$. Soit $A \in A^2(C)$, alors :
- si $A = a(\varnothing)$, où $a \in A(C)$, on pose $\mathrm{L}'(A) = \mathrm{L}(a)$.
- si $A = s(A_0, ..., A_{m-1})$, où $m = ar(s) \geq 1$, alors
$\mathrm{L}'(A) = \sup_{j \in [m]} \mathrm{L}'(A_j)$.

Proposition 5.35. : Soit $A \in A^2(C)$. Alors :
1) $\mathrm{L}'(A) \leq \mathrm{L}\mu_C(A)$,
2) On a l'implication suivante :

$$\mathrm{L}'(A) = \mathrm{L}\mu_C(A) \;\Rightarrow\; A = \eta_{AC}\mu_C(A),$$

3) si $n = l(A)$ et $(a_0, ..., a_{n-1}) = l_{AC}(A)$, on a l'identité suivante :

$$\mathrm{L}'(A) = \sup_{j \in [n]} \mathrm{L}(a_j).$$

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $\mathrm{L}(A)$.

Proposition 5.36. : Soient $\mathbb{C} \in |\mathbb{E}ns/\mathbb{N}|$, $\alpha \in U\mathcal{A}(\mathbb{I})$, $n = l(\alpha)$ et $(A_0, ..., A_{n-1})$ dans $U\mathcal{A}^2(\mathbb{C})^n$ tels que $\overline{\dim}(\alpha) = (\mathrm{dim}A_0, ..., \mathrm{dim}A_{n-1})$. Posons $A = \mathrm{Op}(\alpha, (A_0, ..., A_{n-1}))$. Alors :

$$\mathrm{L}'(A) = \sup_{j \in [n]} \mathrm{L}'(A_j).$$

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $\mathrm{L}(\alpha)$.

Proposition 5.37. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $A \in U\mathcal{A}^{g2}(\mathbb{G})$. Alors :

$$\forall k \in [2], \forall p \in \mathbb{N},\ p < \dim(A) \ \Rightarrow\ \mathrm{L}'\partial_p^k(A) \leq \mathrm{L}'(A).$$

<u>*Preuve*</u> : Par induction sur $\mathrm{L}(A)$. On commence par montrer que $\mathrm{L}'\partial^k(A) \leq \mathrm{L}'(A)$ si $\mathrm{sym}(A) = \square$.

Notation 5.38. : Soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $n, m \in \mathbb{N}$. On pose :

$$B|_n^m(\mathbb{G}) = \{a \in B(\mathbb{G}) /\ \mathrm{L}(a) \leq n,\ \dim(a) \leq m\}.$$

Proposition 5.39. : 1) $\forall \mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $B|_n^m(\mathbb{G}) \in |\mathbb{G}lob|$.
2) Pour toute flèche $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}lob$, on a la factorisation $\tilde{g} : B|_n^m(\mathbb{G}) \to B|_n^m(\mathbb{G}')$ dans $\mathbb{G}lob$. En faisant varier g on obtient un sous-endofoncteur, noté $B|_n^m$, de B.

<u>*Preuve*</u> : Le (1) résulte de l'inégalité $\mathrm{L}\partial_p^k(a) \leq \mathrm{L}(a)$. Le (2) est immédiat.

Proposition 5.40. : Soit $A \in B^2(\mathbb{G})$. On a l'implication suivante :
Si $\mathrm{L}'(A) \leq n$ et $\dim(A) \leq m$ alors $A \in B(B|_n^m)(\mathbb{G})$.

<u>*Preuve*</u> : Notons $(a_0, ..., a_{p-1}) = l_{B\mathbb{G}}(A)$. Alors on voit que $\forall j \in [p]$, $a_j \in B|_n^m(\mathbb{G})$ et donc $A \in BB|_n^m(\mathbb{G})$ (On utilise la proposition 4.45 (2)).

Notation 5.41. : soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $n, m \in \mathbb{N}$. On pose :

$$B^2|_n^m(\mathbb{G}) = \{A \in B^2(\mathbb{G}) /\ \mathrm{L}\mu_{\mathbb{G}}(A) \leq n,\ \dim(A) \leq m\}.$$

Proposition 5.42. : 1) $\forall \mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|, \forall n, m \in \mathbb{N},\ B^2|_n^m(\mathbb{G}) \in |\mathbb{G}lob|$.
2) Pour toute flèche $g : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ de $\mathbb{G}lob$, on a la factorisation $\tilde{\tilde{g}} : B^2|_n^m(\mathbb{G}) \to B^2|_n^m(\mathbb{G}')$ dans $\mathbb{G}lob$. En faisant varier g on obtient un sous-endofoncteur, noté $B^2|_n^m$, de B^2 .

Preuve : Sans difficulté.

Proposition 5.43. : Soit $\mathcal{A} \in B^3(\mathbb{G})$. On a l'implication suivante :
Si $\mathrm{L}'B\mu_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}) \leq n$ et $\dim(\mathcal{A}) \leq m$ alors $\mathcal{A} \in B(B^2|_n^m)(\mathbb{G})$.

Preuve : On procède comme à la proposition 5.40.

Proposition 5.44. : soient $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$ et $n, m \in \mathbb{N}$. Alors :
1) $\mu_{\mathbb{G}}$ se factorise par $B^2|_n^m(\mathbb{G}) \to B|_n^m(\mathbb{G})$. On la note $\mu_{\mathbb{G}}|_n^m$.
2) $(B^2|_n^m)(\mathbb{G}) \subset (B|_n^m)^2(\mathbb{G})$.

Preuve : Pour le (2), on utilise le fait que $\forall A \in B^2|_n^m(\mathbb{G})$, $\mathrm{L}'(A) \leq \mathrm{L}\mu_{\mathbb{G}}(A)$ et $\mathrm{L}(A) \leq \mathrm{L}\mu_{\mathbb{G}}(A)$.

5.6 Construction de u

Remarque 5.45. : Soit $\mathcal{M} = (\mathbb{M}, \pi, Cr, c) \in |\mathfrak{B}|$. Pour trouver la flèche $u : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$, on construit, pour chaque $\mathbb{G} \in |\mathbb{G}lob|$, une famille d'applications
$(u^m_{n\mathbb{G}} : B|_n^m(\mathbb{G}) \to M(\mathbb{G}))_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ qui doit satisfaire les conditions suivantes :
$(H0)$ Pour tout $m, m', n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $m' \leq m$ et $n' \leq n$ alors $u^{m'}_{n'\mathbb{G}}$ est la restriction de $u^m_{n\mathbb{G}}$,
$(H1)$ $u^m_{n\mathbb{G}} : B|_n^m(\mathbb{G}) \to M(\mathbb{G})$ est un morphisme de $\mathbb{G}lob$,
$(H2)$ $u^m_{n\mathbb{G}}$ est naturel en $\mathbb{G}$ (on note $u^m_n : B|_n^m \to M$ la transformation naturelle obtenue),
$(H3)$ On a l'identité $\pi.u^m_n = b|_n^m$ (où $b|_n^m : B|_n^m \to \omega$ est la restriction de b),
$(H4)$ On a l'identité $\mu_{\mathbb{G}}.M(u^m_{n\mathbb{G}}).u^m_{n\hat{\mathbb{G}}}.i^m_{n\mathbb{G}} = u^m_{n\mathbb{G}}.(\mu_{\mathbb{G}}|_n^m)$ (où $i^m_{n\mathbb{G}} : B^2|_n^m(\mathbb{G}) \to (B|_n^m)^2(\mathbb{G})$ est l'injection canonique et $\hat{\mathbb{G}} = B|_n^m(\mathbb{G})$).
Cette famille se construit par induction sur $m + n$.

• *cas où* $n = 1$:
Soit $a \in B|_1^m(\mathbb{G})$. On peut écrire $a = c(\varnothing)$ où $c \in U(\mathbb{G})$. Dans ce cas on pose $u_{1\mathbb{G}}^m(a) = \eta_{\mathbb{G}}(c)$ (où $\eta : Id_{\mathbb{G}lob} \to M$). On vérifie facilement les conditions de $(H0)$ à $(H4)$.

• *cas où* $m = 0$:
On remarque que $B|_n^0(\mathbb{G}) = B|_1^0(\mathbb{G})$. Alors on peut poser $u_{n\mathbb{G}}^0 = u_{1\mathbb{G}}^0$. les conditions demandées sont donc encore vérifiées.

• *cas où* $m > 0$ *et* $n > 1$:
Soit $a \in B|_n^m(\mathbb{G})$.
- Si $\mathrm{L}(a) + \dim(a) < n + m$ alors $a \in B|_{n'}^{m'}(\mathbb{G})$ où $m' = \dim(a)$ et $n' = \mathrm{L}(a)$. Alors on pose $u_{n\mathbb{G}}^m(a) = u_{n'\mathbb{G}}^{m'}(a)$.
- Si $\mathrm{L}(a) + \dim(a) = n + m$ alors $\mathrm{L}(a) = n$ et $\dim(a) = m$.
.. Si $a = a_1 \star_p a_0$ alors, pour tout $k \in [2]$, $\dim(a_k) = m > p$. On a aussi $\dim u_{n-1\mathbb{G}}^m(a_k) = m$ et $\partial_p^0 u_{n-1\mathbb{G}}^m(a_1) = \partial_p^1 u_{n-1\mathbb{G}}^m(a_0)$. On peut donc poser $u_{n\mathbb{G}}^m(a) = u_{n-1\mathbb{G}}^m(a_1) \circ_p u_{n-1\mathbb{G}}^m(a_0)$.
.. Si $\mathrm{sym}(a) = \square$:
... Cas où a est irréductible :
.... On commence par supposer que $\mathbb{G} = \mathbb{I}$. Alors on peut écrire $a = a_1 \odot a_0$ où $a_1, a_0 \in B|_n^{m-1}(\mathbb{I})$ et $(u_{n\mathbb{I}}^{m-1}(a_1), u_{n\mathbb{I}}^{m-1}(a_0)) \in \overline{\overline{M}}(\mathbb{I})$. On peut donc poser $u_{n\mathbb{I}}^m(a) = [u_{n\mathbb{I}}^{m-1}(a_1), u_{n\mathbb{I}}^{m-1}(a_0)]$.
.... On suppose maintenant $\mathbb{G}$ quelconque : Soit $\alpha = |a|$. On vérifie que $\pi_{\mathbb{I}}.u_{n\mathbb{I}}^m(\alpha) = \omega(!_{\mathbb{G}})b_{\mathbb{G}}(a)$. Alors, comme π est cartésien, il existe une unique cellule, notée $u_{n\mathbb{G}}^m(a)$, dans $M(\mathbb{G})$ telle que $\pi_{\mathbb{G}}.u_{n\mathbb{G}}^m(a) = b_{\mathbb{G}}(a)$ et $M(!_{\mathbb{G}}).u_{n\mathbb{G}}^m(a) = u_{n\mathbb{I}}^m(\alpha)$.
... Cas où a n'est pas irréductible : Comme a est non-primitif et $\mathrm{L}(|a|) > 1$, soit α la composante primitive de a et $A \in B^2(\mathbb{G})$ la décomposition primitive de a (voir les deux définitions dans la section 1 de la première partie). On voit que $A \in (B|_{n-1}^m)^2(\mathbb{G})$ et que $u_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}^m(A) \in MB|_{n-1}^m(\mathbb{G})$, où $\tilde{\mathbb{G}} = B|_{n-1}^m(\mathbb{G})$. On peut alors poser $u_{n\mathbb{G}}^m(a) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu_{n-1\mathbb{G}}^m.u_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}^m(A)$.

• Pour la vérification des conditions de l'induction, on constate que $(H0)$ est immédiat. Pour $(H1)$, seul le cas où $\mathrm{L}(a) = n$, $\dim(a) = m$, $\mathrm{sym}(a) = \square$ et a est non-irréductible, est un peu délicat. On voit que pour $q < \dim(a) = m$ alors par hypothèse d'induction on a $\partial_q^k u_{n\mathbb{G}}^m(a) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu_{n-1\mathbb{G}}^m.u_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}^m \partial_q^k(A)$. Mais $\partial_q^k(A) \in (B|_{n-1}^q)^2(\mathbb{G})$.

On peut donc écrire, en posant $\bar{\mathbb{G}} = B|_n^q(\mathbb{G})$, $\mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\mathbb{G}}.u^m_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}\partial_q^k(A) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu^q_{n\mathbb{G}}.u^q_{n\bar{\mathbb{G}}}\partial_q^k(A) = u^q_{n\mathbb{G}}.\mu_{\mathbb{G}}.\partial_q^k(A) = u^m_{n\mathbb{G}}.\mu_{\mathbb{G}}.\partial_q^k(A) = u^m_{n\mathbb{G}}.\partial_q^k.\mu_{\mathbb{G}}(A) = u^m_{n\mathbb{G}}.\partial_q^k(a)$.
$(H2)$ et $(H3)$ se vérifient sans difficulté.
Pour $(H4)$, soit $A \in (B^2|_n^m)(\mathbb{G})$, on pose $a = \mu_{\mathbb{G}}(A)$ et $\alpha = |A|$. Alors $\alpha \leq B(!_{\mathbb{G}})(a)$. La encore, seul le cas où $n = \mathrm{L}(a)$,
$m = \dim(a) = \dim(A)$ et $\mathrm{sym}(a) = \square$, est un peu plus délicat.
- Si A est irréductible, on distingue alors les cas où $\alpha = B(!_{\mathbb{G}})(a)$ (dans ce cas a est primitif et donc $A = \eta_{B\mathbb{G}}(a)$ ou $A = B\eta_{\mathbb{G}}(a)$) et $\alpha \neq B(!_{\mathbb{G}})(a)$ (dans ce cas $A \in (B|_{n-1}^m)^2(\mathbb{G})$ et, par définition,
$u^m_{n\mathbb{G}}(a) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\mathbb{G}}.u^m_{n-1\hat{\mathbb{G}}}(A) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n\mathbb{G}}.u^m_{n\hat{\mathbb{G}}}(A)$, où $\hat{\mathbb{G}} = B|_n^m(\mathbb{G})$).
- Si A n'est pas irréductible, considérons α_0 la composante primitive de α. C'est aussi la composante primitive de a. Soient encore les uniques cellules suivantes :
.. $A_0 \in B^2(\mathbb{I})$ telle que $B(!_{B\mathbb{I}})(A_0) = \alpha_0$ et $\mu_{\mathbb{I}}(A_0) = \alpha$,
.. $\mathcal{A} \in B^3(\mathbb{G})$ telle que $B^2(!_{B\mathbb{G}})(\mathcal{A}) = A_0$ et $\mu_{B\mathbb{G}}(\mathcal{A}) = A$.
Posons enfin $A' = B\mu_{\mathbb{G}}(\mathcal{A})$. On a $B(!_{B\mathbb{G}})(A') = \alpha_0$ et $\mu_{\mathbb{G}}(A') = a$. Donc A' est la décomposition primitive de a. On voit que $\mathcal{A} \in B|_{n-1}^m B^2|_{n-1}^m(\mathbb{G})$, qui est dans $(B|_{n-1}^m)^3(\mathbb{G})$, et que $\mathcal{A}$ est la décomposition primitive de A. On a donc $u^m_{n\hat{\mathbb{G}}}(A) = \mu_{\hat{\mathbb{G}}}.Mu^m_{n-1\hat{\mathbb{G}}}.u^m_{n-1\tilde{\hat{\mathbb{G}}}}(\mathcal{A})$ où rappelons le
$\hat{\mathbb{G}} = B|_n^m(\mathbb{G})$ et $\tilde{\mathbb{G}} = B|_{n-1}^m(\mathbb{G})$. D'un autre côté $\mathrm{L}'(A) \leq n$ et $\mathrm{L}(A) \leq n$.
- Si $\mathrm{L}'(A) = n$, alors $A = \eta_{B\mathbb{G}}(a)$ et donc A vérifie $(H4)$ (se voit facilement).
- Si $\mathrm{L}(A) = n$, alors $A = B\eta_{\mathbb{G}}(a)$. La encore A vérifie $(H4)$.
On peut maintenant supposer que $\mathrm{L}'(A) \leq n-1$ et $\mathrm{L}(A) \leq n-1$. Dans ce cas $A \in (B|_{n-1}^m)^2(\mathbb{G}) = \tilde{\tilde{\mathbb{G}}}$ et on a les identités suivantes (où $\mathcal{G} = B^2|_{n-1}^m(\mathbb{G})$ et $j : \mathcal{G} \to \tilde{\tilde{\mathbb{G}}}$ est l'injection canonique) :
$\mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n\mathbb{G}}.u^m_{n\hat{\mathbb{G}}}(A) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n\mathbb{G}}.\mu_{\hat{\mathbb{G}}}.Mu^m_{n-1\hat{\mathbb{G}}}.u^m_{n-1\tilde{\hat{\mathbb{G}}}}(\mathcal{A}) =$
$\mu_{\mathbb{G}}.\mu_{M\mathbb{G}}.M^2u^m_{n\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\hat{\mathbb{G}}}.u^m_{n-1\tilde{\hat{\mathbb{G}}}}(\mathcal{A}) =$
$\mu_{\mathbb{G}}.M\mu_{\mathbb{G}}.M^2u^m_{n-1\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}.Mj.u^m_{n-1\mathcal{G}}(\mathcal{A}) =$
$\mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\mathbb{G}}.M(\mu_{\mathbb{G}}|_{n-1}^m).u^m_{n-1\mathcal{G}}(\mathcal{A}) = \mu_{\mathbb{G}}.Mu^m_{n-1\mathbb{G}}.u^m_{n-1\tilde{\mathbb{G}}}(A') = u^m_{n\mathbb{G}}(a) = u^m_{n\mathbb{G}}.(\mu_{\mathbb{G}}|_n^m)(A)$.

• A partir de la famille $(u^m_{n\mathbb{G}})$ on construit une application $u_{\mathbb{G}} : B(\mathbb{G}) \to M(\mathbb{G})$ de façon évidente. On obtient ainsi un morphisme $u : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ (se vérifie facilement). L'unicité de la flèche u se montre par induction sur $\mathrm{L}(a) + \dim(a)$ (sans difficulté particulière).
On a ainsi montré le théorème suivant :

Théorème 5.46. : $\mathcal{B} = (\mathbb{B}, b, Cr, c)$ est un objet initial de $\mathfrak{B}$. (Ce qui prouve que $\mathbb{B}$ est "la" monade de Batanin).

Remarque 5.47. : Finalement on a bien montré que la monade de Batanin, qui n'est autre que $\mathbb{B}$ comme on vient de le voir,muni de U et de L, est une monade concrète syntaxique cartésienne et surtout pure.

Références

[1] M.A.BATANIN, *On the definition of weak ω-category*, Macquarie University Report, 96(207) : 24, (1996).

[2] M.A.BATANIN, *Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak n-categories*, Advances in Mathematics 136 (1998), p. 39-103.

[3] M.A.BATANIN, *On the Penon method of weakening of algebraic structures*, Journal of Pure and Applied Algebra (2002), volume 172, pages 1-23.

[4] M.BATANIN AND R.STREET, *The universal property of the multitude of trees*, Journal of Pure and Applied Algebra (2000), volume 154, pages 3-13.

[5] J.M.BOARDMAN AND R.M.VOGT, *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces*, Lecture Notes in Mathematics (1973), volume 347.

[6] A.CARBONI AND P.JOHNSTONE, *Connected limits, familial representability and Artin glueing*, Mathematical Structures in Computer Science (1995) pages 441-459.

[7] E.CHENG AND M.MAKKAI, *A note on the Penon definition of n-category*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (2010),volume LI-3, pages 205-223.

[8] C.EHRESMANN, *Catégories et structures*, Dunod, Paris, (1965).

[9] C.KACHOUR, *Aspects of Globular Higher Category Theory*, Thesis (2012), Macquarie University, Faculty of Science.

[10] J.PENON, *Approche polygraphique des ∞-catégories non strictes*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (1999), volume 1, pages 31-80.

[11] J.PENON, *Une classe d'exemples d' ∞-catégories faibles au sens de Batanin*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (à paraitre).

[12] V.A.SMIRNOV, *Simplicial and Operad Methods in Algebraic Topology*, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs 198

[13] R.STREET, *The role of Michael Batanin's monoidal globular categories*, Proceedings of the Workshop on Higher Category Theory and Physics at Northwestern, (1997).

[14] R.STREET, *The petit Topos of Globular Sets* Journal of Pure and Applied Algebra (2000), volume 154, pages 299-315.

Jacques PENON
25, rue Chapsal,
94340, Joinville-le-Pont
France
Email : `tryphon.penon@gmail.com`

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

VOLUME LXII-1 (2021)

ON THE COMPARISON OF SPANS AND BISET

Ivo DELL'AMBROGIO and James HUGLO

Résumé. Nous comparons la bicatégorie des spans et celle des bïensembles (aussi appelés bimodules, distributeurs ou profoncteurs) dans le contexte des groupoïdes. En particulier, nous construisons un pseudo-foncteur avec de bonnes propriétés défini sur les spans et à valeurs dans les bïensembles. Nous en déduisons une application en théorie de la représentation axiomatique des groupes finis ; notamment, une nouvelle preuve et une amélioration de l'identification, due à Ganter et Nakaoka, des foncteurs à bïensembles de Bouc avec une sous-catégorie réflexive des foncteurs de Mackey globaux. À ce but, nous démontrons aussi un résultat de monadicité tensorielle pour les catégories de foncteurs linéaires.

Abstract. We compare the bicategory of spans with that of bisets (a.k.a. bimodules, distributors, profunctors) in the context of finite groupoids. We construct in particular a well-behaved pseudo-functor from spans to bisets. This yields an application to the axiomatic representation theory of finite groups, namely a new proof and a strengthening of Ganter and Nakaoka's identification of Bouc's category of biset functors as a reflective subcategory of global Mackey functors. To this end, we also prove a tensor-monadicity result for linear functor categories.

Keywords. Groupoid, span, Mackey functor, biset functor, tensor monadicity.

Mathematics Subject Classification (2010). 18A25, 18B40, 18C15, 18D05, 18D10, 20J05, 16B50.

Contents

1. Introduction and results

The motivation behind this paper is to provide a new proof of a result of Nakaoka [Nak16b] [Nak16a] identifying the tensor category of biset functors as a full tensor ideal subcategory of global Mackey functors (see Corollary 1.6 below, where we state the result in question after some recollections). In our approach, Nakaoka's theorem arises as a formal consequence of a 'higher' result of independent interest, comparing two bicategories whose objects are, in both cases, finite groupoids:

(1) The *bicategory of spans*, denoted Span. In this bicategory, a 1-morphism $H \to G$ between groupoids H, G is a span of functors $H \leftarrow S \to G$, and a 2-morphism is an equivalence class of diagrams

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ H \arrow[r, phantom, "\simeq"] & & G \arrow[l, phantom, "\simeq"] \\ & S' \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

of functors and natural isomorphisms. Horizontal composition is computed by forming iso-comma squares. See details in Construction 5.2.

(2) The *bicategory of bisets*, denoted Biset. Here a 1-morphism $H \to G$ is a finite G, H-biset (a.k.a. distributor, profunctor, bimodule, module, relator), *i.e.* a finite-sets-valued functor $H^{\mathrm{op}} \times G \to \mathrm{set}$, and 2-morphisms are simply natural transformations of such functors. Horizontal composition is computed by taking tensor products (coends) of functors. See details in Construction 5.6.

This is our comparison result, whose proof can be found in Section 5:

1.1 Theorem (Comparison of spans and bisets)**.** *There is a pseudo-functor $\mathcal{R}\colon \mathsf{Span} \to \mathsf{Biset}$ we call* realization*, which is the identity on objects (i.e. finite groupoids) and 'realizes' a span $H \overset{b}{\leftarrow} S \overset{a}{\rightarrow} G$ from H to G as the coend*

$$\mathcal{R}(b,a) := G(a-,-) \otimes_S H(-,b-) := \int^{s\in S} \underbrace{G(as,-)}_{\mathcal{R}_!(a)} \times \underbrace{H(-,bs)}_{\mathcal{R}^*(b)} \,.$$

Moreover, every biset is (canonically) isomorphic to the realization of a span.

1.2 Remark. We are only interested in *finite* groupoids, but everything can be easily extended to arbitrary ones. The ingredients of Theorem 1.1 appear to be well-known to experts, such as the adjunctions $\mathcal{R}_!(u) \dashv \mathcal{R}^*(u)$ or the 'moreover' part, and indeed the component functors $\mathcal{R}_{H,G}$ between Hom categories have been studied before in much detail; see *e.g.* [Bén00]. A closely related statement appears, without proof, as Claim 13 in [Hof12]. In fact a study of bisets (bimodules) between enriched categories in terms of (co)spans is already carried out in [Str80], using the machinery of 'fibrations in bicategories'. Presumably, it should be possibly to unfold the layers of abstractions in *loc. cit.* in order to derive Theorem 1.1 from the theory therein. Our proof, by constrast, strives to remain as concrete as possible.

For our application to biset and Mackey functors, we don't need the full bicategorical strength of Theorem 1.1 but rather only its 1-categorical, linearized shadow. Fix a commutative ring $\Bbbk$ and consider the 1-truncated and $\Bbbk$-linearized versions

$$\mathrm{Sp}_{\Bbbk} := \Bbbk\tau_1(\mathsf{Span}) \quad \text{and} \quad \mathrm{Bis}_{\Bbbk} := \Bbbk\tau_1(\mathsf{Biset})$$

of Span and Biset, obtained by identifying isomorphic 1-morphisms and by freely extending the resulting Hom abelian monoids to $\Bbbk$-modules (Terminology 6.1-6.2). By construction, $\mathrm{Sp}_\Bbbk$ and $\mathrm{Bis}_\Bbbk$ are two $\Bbbk$-linear additive categories. This means their Hom sets are $\Bbbk$-modules (in fact free of finite type), their composition maps are $\Bbbk$-bilinear, and they admit arbitrary finite direct sums induced by the disjoint unions of groupoids.

The category of $\Bbbk$-linear representations (*i.e.* the $\Bbbk$-linear functor category)

$$\mathcal{M} := \mathrm{Rep}\,\mathrm{Sp}_\Bbbk := \mathrm{Fun}_\Bbbk(\mathrm{Sp}_\Bbbk, \Bbbk\text{-Mod})$$

is, by definition, the category of *global Mackey functors over* $\Bbbk$.

1.3 Remark. There are several versions of global Mackey functors; we refer to [Del19] for an overview. This one is defined for all finite groups and comes equipped with both inflation and deflation maps, besides induction, restriction and isomorphism maps. The present definition in terms of groupoids has appeared in [Gan13] and was reformulated in [Nak16b] in terms of a certain 2-category $\mathbb{S}$, which was later recognized in [Nak16a] to be biequivalent to the 2-category of groupoids.

Similarly, the representation category

$$\mathcal{F} := \mathrm{Rep}\,\mathrm{Bis}_\Bbbk := \mathrm{Fun}_\Bbbk(\mathrm{Bis}_\Bbbk, \Bbbk\text{-Mod})$$

is easily recognized to be Bouc's category of *biset functors* [Bou10] (see Remark 6.8). Biset functors too can be understood as a variant of global Mackey functors, similarly defined on all finite groups and equipped with induction, restriction, inflation, deflation and isomorphism maps. Indeed, they can be shown to be equivalent to Webb's *globally defined Mackey functors* [Web00, §8] for $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ the class of all finite groups. It is thus natural to compare the two notions, $\mathcal{M}$ and $\mathcal{F}$.

After decategorifying and linearizing, Theorem 1.1 yields a full $\Bbbk$-linear functor

$$F := \Bbbk\tau_1\mathcal{R} \colon \mathrm{Sp}_\Bbbk \longrightarrow \mathrm{Bis}_\Bbbk$$

which is the identity on objects. In such a situation, it follows easily that precomposition with F induces a fully faithful functor

$$F^* \colon \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{M}$$

identifying $\mathcal{F}$ with a full reflexive $\Bbbk$-linear subcategory of $\mathcal{M}$. This is precisely the embedding of Nakaoka's theorem we had mentioned at the beginning, and for which we have just given a transparent construction.

* * *

There is more to this story. Both global Mackey functors and biset functors form $\Bbbk$-*linear tensor categories*, by which we mean symmetric monoidal categories where the tensor functor $-\otimes-$ is $\Bbbk$-linear in both variables (similarly below, by *tensor functor* we will mean a strong symmetric monoidal $\Bbbk$-linear functor.) It is therefore natural to compare their tensor structures via the embedding F^*.

To this end, we first notice that both tensor products arise by Day convolution (Construction 3.8) from tensor structures on $\mathrm{Sp}_\Bbbk$ and $\mathrm{Bis}_\Bbbk$, both of which are induced by the cartesian product of groupoids. Moreover, $\mathrm{Sp}_\Bbbk$ and $\mathrm{Bis}_\Bbbk$ are easily seen to be *rigid*, in fact every object is its own tensor dual (Terminology 3.5). In such a situation we can make use of the following general abstract theorem:

1.4 Theorem. *Let $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ be any $\Bbbk$-linear tensor functor between two essentially small $\Bbbk$-linear tensor categories. Consider the diagram*

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Rep}\mathcal{C} \arrow[dl, shift right, "F_!"'] \arrow[dr, shift left, "\mathrm{Free}"] & \\
\operatorname{Rep}\mathcal{D} \arrow[ur, shift right, "F^*"'] \arrow[rr, "\sim", "E"'] & & A\text{-Mod} \arrow[ul, shift left, "U"]
\end{tikzcd}$$

consisting of the following standard categorical constructions:

- $\operatorname{Rep}\mathcal{C}$ *and* $\operatorname{Rep}\mathcal{D}$ *are the $\Bbbk$-linear categories of representations, as above, equipped with the respective Day convolution tensor products;*

- F^* *is the restriction functor along F and $F_!$ denotes its left adjoint, which is a tensor functor; it follows that F^* is lax monoidal;*

- A *denotes the commutative monoid $F^*(\mathbb{1})$ in $\operatorname{Rep}\mathcal{C}$, whose multiplication map is induced by the lax monoidal structure of F^* and the (unique) multiplication $\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\overset{\sim}{\to}\mathbb{1}$ of the tensor unit object $\mathbb{1} = \mathcal{D}(\mathbb{1}_\mathcal{D}, -)$ of $\operatorname{Rep}\mathcal{D}$;*

- A-Mod *denotes the category of left A-modules in* $\operatorname{Rep}\mathcal{C}$*, equipped with the tensor product $-\otimes_A-$ over A; we also have the forgetful functor U and its left adjoint* Free *sending a $\mathcal{C}$-representation M to the free module $A\otimes M$;*
- *and where, finally, E is the Eilenberg-Moore functor comparing the adjunction $F_! \dashv F^*$ with the adjunction* $\mathrm{Free} \dashv U$*,* i.e. *E is the unique functor such that $U\circ E = F^*$ and $E \circ F_! \simeq \mathrm{Free}$.*

Then:

(1) *If F is essentially surjective and the tensor categories $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ are rigid, E is an equivalence of $\Bbbk$-linear categories.*

(2) *If moreover F is full, E is an equivalence of tensor categories. Also, the functors F^* and U are fully faithful and they identify their (equivalent) source tensor categories with the full essential image $\mathrm{Im}(F^*) = \mathrm{Im}(U)$ as a* tensor ideal *in* $\operatorname{Rep}\mathcal{C}$ *(meaning: if $M \in \operatorname{Rep}\mathcal{C}$ and $N \in \mathrm{Im}(F^*)$ then $M\otimes N \in \mathrm{Im}(F^*)$).*

This theorem collects and improves a few more or less known categorical results. It may be understood as a 'tensor monadicity' criterion for quotient functors of $\Bbbk$-linear rigid tensor categories. The proof can be found in Section 3, together with quick recollections on all constructions involved. As illustration, let us point out an easy special case:

1.5 Example. If C is a commutative $\Bbbk$-algebra, it can be viewed as a rigid tensor $\Bbbk$-linear category $\mathcal{C}$ with a single object, whose endomorphism algebra is C. The multiplication of C also provides the tensor product of maps $a\otimes b := ab$, which defines a functor $\otimes\colon \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ by commutativity. If $f\colon C\to D$ is a surjective morphism of commutative $\Bbbk$-algebras, it can be viewed as a functor $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ satisfying all the hypotheses of the theorem. In this case, A is just the ring D seen as a monoid object in the tensor category of C-modules. The theorem now simply says that the tensor category of A-modules $(M, \rho\colon A\otimes_C M\to M)$, in the abstract Eilenberg-Moore sense, inside the tensor category of C-modules, identifies with the tensor ideal subcategory of D-modules, in the usual sense.

* * *

Now, in order to recover the results of [Nak16b] and [Nak16a] we simply specialize Theorem 1.4 by taking $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ to be the $\Bbbk$-linear tensor functor $\mathrm{Sp}_\Bbbk \to \mathrm{Bis}_\Bbbk$ obtained from the realization pseudo-functor $\mathcal{R}$ of Theorem 1.1. We get:

1.6 Corollary (Biset functors vs global Mackey functors)**.** *There is a canonical equivalence of tensor categories between:*

(1) *The tensor category of biset functors $\mathcal{F}$ in the sense of Bouc [Bou10], that is, representations of the category of bisets equipped with Day convolution.*

(2) *The category of global Mackey functors $\mathcal{M}$ which are modules over the global Green functor $A = \mathrm{Bis}_\Bbbk(1, F-)$, obtained by restricting the Burnside biset functor along $F\colon \mathrm{Sp}_\Bbbk \to \mathrm{Bis}_\Bbbk$, equipped with the tensor product over A.*

Moreover, both categories identify canonically with the reflexive full tensor ideal of $\mathcal{M}$ of those global Mackey functors M satisfying the 'deflative relation'

$$\mathrm{def}^G_{G/N} \circ \mathrm{inf}^G_{G/N} = \mathrm{id}_{M(G/N)}$$

for every normal subgroup N of a group G.

Details on the corollary's proof will be given in Section 6.

We would like to stress the similarity between the above corollary and the much older, and better known, results relating the category $\mathrm{Mack}_\Bbbk(G)$ of Mackey functors for a fixed finite group G and the category $\mathrm{coMack}_\Bbbk(G)$ of *cohomological* Mackey functors for G. Indeed, this comparison can be obtained by the very same method, as follows. Recall that by Lindner [Lin76] we may define

$$\mathrm{Mack}_\Bbbk(G) = \mathrm{Rep}\,\mathrm{Sp}_\Bbbk(G)$$

where $\mathrm{Sp}_\Bbbk(G)$ is the $\Bbbk$-linear category of finite left G-sets and isomorphism classes of spans of G-maps. Recall also that by Yoshida's theorem [Yos83] we may define

$$\mathrm{coMack}_\Bbbk(G) = \mathrm{Rep}\,\mathrm{Perm}_\Bbbk(G)$$

where $\mathrm{Perm}_\Bbbk(G)$ denotes the category of finitely generated permutation $\Bbbk G$-modules.

Implicit in Yoshida's arguments, and made explicit e.g. by Panchadcharam-Street [PS07], is the existence of a $\Bbbk$-linear functor

$$\mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G) \longrightarrow \mathrm{Perm}_{\Bbbk}(G)$$

sending a left G-set X to the permutation module $\Bbbk[X]$ and sending a span $X \overset{\alpha}{\leftarrow} S \overset{\beta}{\rightarrow} Y$ of G-maps to $x \mapsto \sum_{s \in \alpha^{-1}(x)} \beta(s)$. This is easily seen to be a tensor functor F satisfying all the hypotheses of Theorem 1.4. In this case the theorem yields:

1.7 Corollary (Cohomological vs ordinary Mackey functors)**.** *For every finite group G, there is an equivalence of tensor categories between:*

(1) *The category* $\mathrm{Rep}\,\mathrm{Perm}_{\Bbbk}(G)$ *of representations of permutation modules.*

(2) *The category of modules over the fixed-points Green functor* $\mathrm{FP}_{\Bbbk}$ *(also known as* $\mathrm{H}^0(-;\Bbbk)$*) inside the tensor category* $\mathrm{Mack}_{\Bbbk}(G)$ *of Mackey functors for G, equipped with the tensor product over* $\mathrm{FP}_{\Bbbk}$.

Moreover, both categories identify canonically with the reflexive full tensor ideal of those ordinary Mackey functors M for G which satisfy the 'cohomological relation'

$$\mathrm{ind}_L^H \circ \mathrm{res}_L^H = [H : L] \cdot \mathrm{id}_{M(H)}$$

for all subgroups $L \leq H \leq G$.

Details on this corollary's proof will be given in Section 4.

1.8 Remark. Essentially the same way of comparing the various descriptions of cohomological Mackey functors was already explained in [PS07, §10]. Our present exposition also makes explicit the identification of the associated tensor structures.

1.9 Remark. This article is based on the second author's PhD thesis. Notations and conventions have been adapted in order to agree with those of the monograph [BD20] and the survey article [Del19], where groupoids and spans are similarly used in order to compare various kinds of Mackey (1- and 2-)functors.

Acknowledgements. We are grateful to Paul Balmer and an anonymous referee for useful comments on the manuscript and to Steve Lack for pointing out to us the relevance of [Str80].

2. Preliminaries on coends and linear coends

In this article we make extensive use of coends and their calculation rules, both in the basic set-theoretic setting and in the linear setting over a commutative ring. Coends vastly generalize the familiar tensor products of modules over rings to more general (possibly enriched) functors. Heuristically, they are the universal procedure for identifying a left and a right action of the same functorial variable.

2.1 Recollection (Coends; [ML98, IX.6]). Consider a functor $H\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ into sets for some (essentially small) category $\mathcal{C}$. The *coend of* H is a set denoted

$$\int^{c\in C} H(c,c) \quad \text{or just} \quad \int^{c} H$$

which comes equipped with canonical maps $H(x,x) \to \int^c H$ (for all $x \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$) forming a dinatural transformation and satisfying a suitable universal property among all such. For our purposes, it will suffice to know that it can be computed by the following coequalizer in Set:

$$\int^{c\in\mathcal{C}} H(c,c) = \mathrm{coeq}\left(\coprod_{(\alpha\colon c'\to c)\in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}} H(c,c') \overset{H(\mathrm{id},\alpha)}{\underset{H(\alpha,\mathrm{id})}{\rightrightarrows}} \coprod_{c\in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}} H(c,c) \right)$$

Thus an element of the coend is the equivalence class $[x]_c$ of some $x \in H(c,c)$ for some object $c \in \mathcal{C}$, for the equivalence relation generated by setting $[x]_c = [x']_{c'}$ whenever there is some morphism $\alpha \in \mathcal{C}(c',c)$ and some $y \in H(c,c')$ such that $H(\alpha,\mathrm{id})(y) = x$ and $H(\mathrm{id},\alpha)(y) = x'$. (Note that if $\mathcal{C}$ is a groupoid the latter condition directly yields an equivalence relation, without the need to generate one.)

The canonical maps are the evident ones coming with the equalizer.

We will need the following well-known (and easily verified) formulas:

2.2 Lemma (Fubini; [ML98, IX.8]). *The coend of a functor* $H\colon (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)^{\mathrm{op}} \times (\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \to \mathrm{Set}$ *can be computed one variable at a time, in either order:*

$$\int^{(c_1,c_2)\in\mathcal{C}_1\times\mathcal{C}_2} H \simeq \int^{c_1\in\mathcal{C}_1}\int^{c_2\in\mathcal{C}_2} H \simeq \int^{c_2\in\mathcal{C}_2}\int^{c_1\in\mathcal{C}_1} H\,.$$

The isomorphisms are the identity on representatives $x \in H(c_1, c_2, c_1, c_2)$. □

2.3 Lemma (co-Yoneda). *For every functor $M\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ and every object $x \in \mathcal{C}$, there is an isomorphism*

$$\int^{c\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(c, x) \times M(c) \simeq M(x)$$

natural in x, given by evaluation $[\alpha, m]_c \mapsto M(\alpha)(m)$ and with inverse given by $m \mapsto [\mathrm{id}_x, m]_x$. □

* * *

In Section 5, the above set-theoretical coends will be used to horizontally compose bisets. However, most of the time we will work linearly over some base commutative ring $\Bbbk$, and in particular we will need to use the $\Bbbk$-enriched version of coends. This requires replacing the 'base' Cartesian category of sets with the tensor category of $\Bbbk$-modules.

Fix the commutative ring $\Bbbk$.

2.4 Notation. We denote by $\Bbbk\text{-}\mathrm{Mod}$ the category of all $\Bbbk$-modules and $\Bbbk$-linear maps. It is a complete and cocomplete abelian category. It is also a tensor category, *i.e.* a symmetric monoidal category, by the usual tensor product $- \otimes_{\Bbbk} -$ over $\Bbbk$.

2.5 Terminology. A $\Bbbk$-*linear category* $\mathcal{C}$ is a category enriched on $\Bbbk$-modules: its Hom sets $\mathcal{C}(x, y)$ are equipped with the structure of a $\Bbbk$-module and the composition maps $\mathcal{C}(y, z) \times \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{C}(x, z)$ are $\Bbbk$-bilinear. If $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ are $\Bbbk$-linear categories, a $\Bbbk$-*linear functor* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ is a functor F from $\mathcal{C}$ to $\mathcal{D}$ such that its component maps $F = F_{x,y}\colon \mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{D}(x, y)$ are all $\Bbbk$-linear.

2.6 Recollection ($\Bbbk$-linear coends). By replacing Set with $\Bbbk\text{-}\mathrm{Mod}$ and requiring everything to be $\Bbbk$-linear in Recollection 2.1, we get the notion of a $\Bbbk$-*linear* or $\Bbbk$-*enriched* coend. Thus, concretely, for a $\Bbbk$-linear category $\mathcal{C}$ and a $\Bbbk$-bilinear functor $H\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \Bbbk\text{-}\mathrm{Mod}$ (or equivalently a $\Bbbk$-linear functor $H\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes_{\Bbbk} \mathcal{C} \to \Bbbk\text{-}\mathrm{Mod}$ for the appropriate notion of tensor product of $\Bbbk$-categories), the $\Bbbk$-linear coend of H, again denoted $\int^c H$ or $\int^{c\in\mathcal{C}} H(c, c)$, is the $\Bbbk$-module computed by the same coend diagram as in Recollection 2.1

but now taken in $\Bbbk\text{-}\mathrm{Mod}$. Hence a general element of $\int^c H$ is now a *finite* $\Bbbk$*-linear combination* of classes $[x]_v$ (for $v \in \mathrm{Obj}\,\mathcal{C}$ and $x \in H(c,c)$).

We will occasionally refer to such simple elements $[x]_v \in \int^c H$ as *generators*. If $H = F \otimes_{\Bbbk} G$ is an object-wise tensor product of two (or more) functors, as will often be the case, we will write $[x,y]_v$ rather than the cumbersome $[x \otimes y]_v$.

2.7 Remark. The Fubini Lemma 2.2 and the co-Yoneda Lemma 2.3 also hold for $\Bbbk$-linear coends, as $\Bbbk$-linear isomorphisms, with the same proofs. As the latter formula uses the tensor structure of the base category, it must be adapted and now takes the form of an isomorphism

$$\int^{c\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(c,-) \otimes_{\Bbbk} M(c) \simeq M \tag{2.8}$$

of $\Bbbk$-linear functors $\mathcal{C} \longrightarrow \Bbbk\text{-}\mathrm{Mod}$. (This is the special case $F = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ of a $\Bbbk$-linear left Kan extension as in Construction 3.2 below.)

3. Tensor-monadicity for functor categories

This section is dedicated to the proof of Theorem 1.4, and to recalling all the relevant categorical constructions.

Fix throughout a commutative ring $\Bbbk$. We will compute with $\Bbbk$-linear coends, as in Recollection 2.6.

3.1 Notation. Let $\mathcal{C}$ be a small $\Bbbk$-linear category (one with only a set of objects), or more generally, an essentially small one (one equivalent to a small (sub-)category). Then we may consider its *category of representations*, namely the category

$$\mathrm{Rep}\,\mathcal{C} := \mathrm{Fun}_{\Bbbk}(\mathcal{C}, \Bbbk\text{-}\mathrm{Mod})$$

of all $\Bbbk$-linear functors into $\Bbbk$-modules and natural transformations between them. Note that $\mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$ is again a $\Bbbk$-linear category and is abelian, complete and cocomplete; its $\Bbbk$-action, limits and colimits are taken in $\Bbbk\text{-}\mathrm{Mod}$, object-wise on $\mathcal{C}$.

3.2 Construction (Kan extensions). Let $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ be a $\Bbbk$-linear functor between two essentially small $\Bbbk$-linear categories. There is a *restriction* functor

$F^*\colon \operatorname{Rep}\mathcal{D} \to \operatorname{Rep}\mathcal{C}$ sending a $\Bbbk$-linear functor $M\colon \mathcal{D} \to \Bbbk\text{-Mod}$ to $M \circ F$. Evidently, F^* is $\Bbbk$-linear and exact. Since $\Bbbk\text{-Mod}$ is complete and cocomplete, F^* admits both a left and a right adjoint:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Rep}\mathcal{C} \arrow[d, bend right, "F_! := \operatorname{Lan}_F"'] \arrow[d, bend left, "\operatorname{Ran}_F =: F_*"] \\ \operatorname{Rep}\mathcal{D} \arrow[u, "F^*"] \end{tikzcd}$$

This is guaranteed by the theory of Kan extensions ([ML98, X]), which moreover provides explicit formulas for them. Recall *e.g.* that the left Kan extension $F_!$ can be computed at each $M \in \operatorname{Rep}\mathcal{C}$ by the following ($\Bbbk$-linear) coend:

$$F_!(M) = \int^{x\in\mathcal{D}} \mathcal{D}(Fx, -) \otimes_{\Bbbk} M(x) \quad : \quad \mathcal{D} \longrightarrow \Bbbk\text{-Mod}$$

(see [ML98, X.7] as well as [Kel05, (4.25)] for the enriched version).

3.3 Construction (The Eilenberg-Moore adjunction). Recall (*e.g.* [ML98, VI]) that every adjunction $L\colon \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : R$ gives rise to a *monad* $\mathbb{A}$ on the category $\mathcal{A}$, that is a monoid $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, \mu, \eta)$ in the endofunctor category $\operatorname{End}(\mathcal{A})$. More precisely, as a functor we have $\mathbb{A} = R \circ L$; its multiplication is the natural transformation $\mu = R\varepsilon L\colon \mathbb{A} \circ \mathbb{A} = RLRL \Longrightarrow RL = \mathbb{A}$, where $\varepsilon\colon LR \Rightarrow \operatorname{Id}_{\mathcal{B}}$ is the counit of the adjunction; and its unit map is the unit of the adjunction, $\eta\colon \operatorname{Id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL = \mathbb{A}$.

As with any such monad, we may define its *Eilenberg-Moore category* $\mathbb{A}\text{-Mod}_{\mathcal{A}}$, whose objects are *left modules* (a.k.a. algebras) in $\mathcal{A}$ over the monad. More precisely, an object of $\mathbb{A}\text{-Mod}_{\mathcal{A}}$ is a pair (M, ρ) where $M \in \operatorname{Obj}\mathcal{A}$ and $\rho\colon \mathbb{A}M \to M$ is a map $\rho\colon RL(M) \to M$ in $\mathcal{A}$ satisfying the usual associativity and unit axioms of a left action, expressed by commutative diagrams in $\mathcal{A}$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}\mathbb{A}M \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "\mathbb{A}\rho"'] & \mathbb{A}M \arrow[d, "\rho"] \\ \mathbb{A}M \arrow[r, "\rho"] & M \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[dr, equal] & \mathbb{A}M \arrow[d, "\rho"] \\ & M \end{tikzcd}$$

A morphism $(M, \rho) \to (M', \rho')$ in $\mathbb{A}\text{-Mod}_{\mathcal{A}}$ is a morphism $\varphi\colon M \to M'$

preserving the actions:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}M \arrow[r, "\mathbb{A}\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathbb{A}M' \arrow[d, "\rho'"] \\ M \arrow[r, "\varphi"] & M' \end{tikzcd}$$

There is an evident forgetful functor $U_{\mathbb{A}} \colon \mathbb{A}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ which simply forgets the actions ρ, as well as a left adjoint $F_{\mathbb{A}}$ sending any object $M \in \mathcal{A}$ to the *free module* $(\mathbb{A}M, \mu_M \colon \mathbb{A}\mathbb{A}M \to \mathbb{A}M)$ and a morphism φ to $\mathbb{A}\varphi$. The adjunction $(F_{\mathbb{A}}, U_{\mathbb{A}})$ induces on $\mathcal{A}$ the same monad $\mathbb{A} = RL = U_{\mathbb{A}}F_{\mathbb{A}}$. This is in fact the *final* adjunction realizing $\mathbb{A}$, in that there is a unique comparison functor $E = E_{\mathbb{A}} \colon \mathcal{B} \to \mathbb{A}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dl, shift right, "L"'] \arrow[dr, shift left, "F_{\mathbb{A}}"] & \\ \mathcal{B} \arrow[ur, shift right, "R"'] \arrow[rr, "E_{\mathbb{A}}"'] & & \mathbb{A}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}} \arrow[ul, shift left, "U_{\mathbb{A}}"] \end{tikzcd}$$

such that $U_{\mathbb{A}} \circ E_{\mathbb{A}} = R$ and $F_{\mathbb{A}} = E_{\mathbb{A}} \circ L$. Concretely, E sends an object $N \in \mathcal{B}$ to $E(N) = (RN, R\varepsilon_N \colon \mathbb{A}RN = RLRN \to RN)$ and a map $\varphi \colon N \to N'$ to $R\varphi$.

Note that if L and R are $\Bbbk$-linear functors between $\Bbbk$-linear categories, then $\mathbb{A}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$ is also a $\Bbbk$-linear category and the forgetful, free module and comparison functors are all $\Bbbk$-linear.

3.4 Proposition. *Let $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ be a $\Bbbk$-liner functor between two essentially small $\Bbbk$-linear categories. Suppose that F is essentially surjective. Then the adjunction $F_! \colon \operatorname{Rep}\mathcal{C} \rightleftarrows \operatorname{Rep}\mathcal{D} : F^*$ of Construction 3.2 is monadic, that is the comparison $E \colon \operatorname{Rep}\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} (F^*F_!)\text{-}\mathrm{Mod}_{\operatorname{Rep}\mathcal{C}}$ is a ($\Bbbk$-linear) equivalence.*

Proof. This is a consequence of the Beck monadicity theorem [ML98, VI.7]. In fact, F^* is an exact functor between two abelian categories and admits a left adjoint. In this situation, the hypotheses of Beck monadicity reduce easily to F^* being faithful (see *e.g.* [CCZ15, Thm. 2.1]), and the latter follows from the essential surjectivity of F. Indeed, if $\varphi \colon N \Rightarrow N'$ is a natural transformation such that $F^*\varphi = 0$, then we have $\varphi_{Fc} = 0 \colon NFc \to N'Fc$ for every $c \in \mathcal{C}$ and therefore also $\varphi_d = 0 \colon Nd \to N'd$ for all $d \in \mathcal{D}$, by way of some isomorphism $Fc \simeq d$ and the naturality of φ. $\square$

3.5 Terminology. By *tensor category* we always mean a symmetric monoidal category ([ML98, XI]). We will write $\otimes$ and $\mathbb{1}$ (possibly with some decoration) for the tensor functor and the tensor unit object. A $\Bbbk$-*linear tensor category* is a category which is simultaneously a tensor category and a $\Bbbk$-linear category and whose tensor functor $-\otimes-$ is $\Bbbk$-linear in both variables. A tensor category $\mathcal{C}$ is *rigid* if every object X admits a *tensor dual* $X^\vee$, meaning that there is a ($\Bbbk$-linear) isomorphism $\mathcal{C}(X\otimes Y, Z) \simeq \mathcal{C}(Y, X^\vee \otimes Z)$ natural in $Y, Z \in \mathcal{C}$; in other words, the endofunctors $X\otimes -$ and $X^\vee \otimes -$ on $\mathcal{C}$ are adjoint. If $\mathcal{C}$ is rigid, then $X \mapsto X^\vee$ extends canonically to an equivalence $\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ of $\Bbbk$-linear tensor categories.

3.6 Construction (The tensor category $A\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$). Let $A = (A, m, u)$ be a monoid in a tensor category $\mathcal{A}$; thus we have a multiplication $m\colon A\otimes A \to A$ and unit $u\colon \mathbb{1} \to A$ in $\mathcal{C}$ making the usual associativity and unit diagrams commute. Then $\mathbb{A} := A \otimes (-)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ is a monad on $\mathcal{C}$ with multiplication $\mu \otimes -$ and unit $\eta \otimes -$, and we may form the Eilenberg-Moore module category $A\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}} := \mathbb{A}\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$ and the adjunction $F_A \dashv U_A$ of Construction 3.3. If A is *commutative* (meaning of course that $m = m\sigma$ where $\sigma\colon A\otimes A \simeq A \otimes A$ is the symmetry isomorphism of $\mathcal{C}$) and $\mathcal{A}$ admits sufficiently many coequalizers, then $A\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$ inherits the structure of a tensor category. Its tensor unit is the left A-module A, its tensor functor $-\otimes_A -$ is defined for all $(M,\rho), (M',\rho') \in A\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$ by the coequalizer

$$M\otimes A\otimes M' \underset{\rho\sigma\otimes \mathrm{id}}{\overset{\mathrm{id}\otimes\rho}{\rightrightarrows}} M\otimes M' \longrightarrow M\otimes_A M' \tag{3.7}$$

equipped with the evident induced left A-action. The unit, associativity and symmetry isomorphisms for $A\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$ are induced by those of $\mathcal{A}$.

Note that if the tensor category $\mathcal{A}$ is $\Bbbk$-linear then evidently so is $A\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}}$.

3.8 Construction (The Day convolution product; [Day70]). Let $\mathcal{C}$ be an essentially small $\Bbbk$-linear tensor category. The representation category $\mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$ inherits from $\mathcal{C}$ a $\Bbbk$-linear tensor structure, called *Day convolution*, which can be characterized as the unique (closed $\Bbbk$-linear) tensor structure $-\otimes_{\mathcal{C}}-$ on $\mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$ which preserves colimits in both variables and which makes the Yoneda embedding $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$ a tensor functor. The Day convolution of $M, N \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$ is computed by the ($\Bbbk$-linear) coend

$$M \otimes_{\mathcal{C}} N = \int^{u,v\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(u\otimes v, -) \otimes_{\Bbbk} M(u) \otimes_{\Bbbk} N(v)\,.$$

The unit object in $\operatorname{Rep}\mathcal{C}$ is the functor $\mathbb{1} := \mathcal{C}(\mathbb{1}, -)$ corepresented by the unit object of $\mathcal{C}$. The left unitor, right unitor, associator and symmetry of the Day convolution product are obtained by combining, in the evident way, those of $\mathcal{C}$ with some canonical identifications of coends (see *e.g.* [Hug19, Prop. 1.2.16] for details).

3.9 Lemma. *If the tensor category $\mathcal{C}$ is rigid, the Day convolution product of $\operatorname{Rep}\mathcal{C}$ can be computed by either one of the two coends*

$$\begin{aligned} M \otimes_{\mathcal{C}} N &\simeq \int^{v\in\mathcal{C}} M(v^\vee \otimes -) \otimes_{\Bbbk} N(v) \\ &\simeq \int^{u\in\mathcal{C}} M(u) \otimes_{\Bbbk} N(u^\vee \otimes -) \end{aligned}$$

where $x^\vee$ denotes the tensor-dual of an object $x \in \mathcal{C}$.

Proof. At each $c \in \mathcal{C}$, we define the first isomorphism to be the following composite:

$$\begin{aligned} (M\otimes_{\mathcal{C}} N)(c) &= \int^{u,v\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(u\otimes v, c) \otimes_{\Bbbk} M(u) \otimes_{\Bbbk} N(v) && (3.8) \\ &\simeq \int^{u,v\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(u, v^\vee \otimes c) \otimes_{\Bbbk} M(u) \otimes_{\Bbbk} N(v) && \mathcal{C}\text{ rigid} \\ &\simeq \int^{v\in\mathcal{C}}\int^{u\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(u, v^\vee \otimes c) \otimes_{\Bbbk} M(u) \otimes_{\Bbbk} N(v) && \text{Fubini 2.2} \\ &\simeq \int^{v\in\mathcal{C}}\Big(\int^{u\in\mathcal{C}} \mathcal{C}(u, v^\vee \otimes c) \otimes_{\Bbbk} M(u)\Big) \otimes_{\Bbbk} N(v) && \\ &\simeq \int^{v\in\mathcal{C}} M(v^\vee \otimes c) \otimes_{\Bbbk} N(v) && \text{co-Yoneda 2.8} \end{aligned}$$

The second-to-last isomorphism uses that $\otimes_{\Bbbk}$ preserves colimits of $\Bbbk$-modules in both variables. The second formula is proved similarly and will not be needed.

If we trace a generator $[f\colon u\otimes v \to c, m, n]_{u,v} \in (M\otimes_{\mathcal{C}} N)(c)$ all the way, we see that it corresponds to $[M(\tilde f)(m), n]_v$ where $\tilde f$ is the map

$$u \simeq u\otimes \mathbb{1} \longrightarrow u\otimes v\otimes v^\vee \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}} c\otimes v^\vee \simeq v^\vee \otimes c$$

which also uses the symmetry of $\mathcal{C}$. $\square$

3.10 Construction (Lax right adjoints and projection map). Let us again consider a general adjunction $L\colon \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} : R$ with unit η and counit ε. Suppose that $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are tensor categories and that the left adjoint L is a tensor functor. The right adjoint R inherits from L the structure of a *lax* tensor functor, that is, an ('external') multiplication $\lambda_{Y,Y'}$

$$\begin{tikzcd} R(Y) \otimes R(Y') \arrow[r, dashed, "\lambda_{Y,Y'}"] \arrow[d, "\eta"'] & R(Y \otimes Y') \\ RL(R(Y) \otimes R(Y')) \arrow[r, "\sim"] & R(LR(Y) \otimes LR(Y')) \arrow[u, "R(\varepsilon\otimes\varepsilon)"'] \end{tikzcd}$$

(for all $Y, Y' \in \mathcal{B}$) and a unit

$$\iota\colon\ \mathbb{1}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\eta} RL(\mathbb{1}_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\sim} R(\mathbb{1}_{\mathcal{B}})$$

satisfying the same coherence constraints as for a tensor functor (*i.e.* the 'strong' case, when λ and ι are invertible).

As all lax tensor functors, R preserves monoids: If $Y = (Y, m, u)$ is a monoid in $\mathcal{B}$, then $R(Y)$ inherits a monoid structure with multiplication and unit

$$RY \otimes RY \xrightarrow{\lambda_{Y,Y}} R(Y \otimes Y) \xrightarrow{Rm} RY \qquad \text{and} \qquad \mathbb{1} \xrightarrow{\iota} R\mathbb{1} \xrightarrow{Ru} RY\ .$$

By applying this to the unique monoid structure $(\mathbb{1}, m\colon \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \overset{\sim}{\to} \mathbb{1}, \mathrm{id}_{\mathbb{1}})$ on the tensor unit of $\mathcal{B}$, we obtain a distinguished commutative monoid $A := R(\mathbb{1})$ in $\mathcal{A}$.

The lax structure on R also produces the *projection map*

$$\pi_{Y,X}\colon\ R(Y) \otimes X \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\eta} R(Y) \otimes RL(X) \xrightarrow{\lambda_{Y,LX}} R(Y \otimes L(X)) \tag{3.11}$$

(for all $X \in \mathcal{A}$ and $Y \in \mathcal{B}$) which in many contexts, but not always, is an isomorphism called *projection formula*.

3.12 Lemma ([BDS15, Lem. 2.8]). *In the situation of Construction 3.10, the map*

$$\pi\colon\ A \otimes X \xrightarrow{\pi_{\mathbb{1},X}} R(L\mathbb{1} \otimes LX) \simeq R(\mathbb{1} \otimes LX) \simeq RL(X) \qquad (\textit{for } X \in \mathcal{A})$$

is always a morphism of monads on $\mathcal{A}$, between the monad obtained from the monoid $A = R(\mathbb{1}_{\mathcal{B}})$ and the monad $\mathbb{A} = RL$ obtained from the adjunction $L \dashv R$. □

3.13 Example. Consider a $\Bbbk$-linear functor $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ and the induced adjunction $F_! \dashv F^*$ as in Construction 3.2. Suppose now that $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ are $\Bbbk$-linear tensor categories and that F is a tensor functor. It is a well-known general fact that the left adjoint $F_!\colon \operatorname{Rep}\mathcal{C} \to \operatorname{Rep}\mathcal{D}$ is naturally a tensor functor with respect to the Day convolution products (see *e.g.* [Hug19, Prop. 1.3.5]). Everything in Construction 3.10 can be applied to $L := F_! \dashv F^* =: R$. In particular F^* is a lax tensor functor. For future reference, its structure maps are given at each $c \in \mathcal{C}$ by

$$\iota_c\colon (\mathbb{1}_{\operatorname{Rep}\mathcal{C}})(c) = \mathcal{C}(\mathbb{1}, c) \xrightarrow{F} \mathcal{D}(F\mathbb{1}, Fc) \simeq \mathcal{D}(\mathbb{1}, Fc) = (F^*\mathbb{1}_{\operatorname{Rep}\mathcal{D}})(c)$$

and (in the rigid case, the only one we will need) by $[n, n']_u \mapsto [n, n']_{v=Fu}$

$$\begin{aligned}\lambda_{N,N',c}\colon \big(F^*N \otimes_{\mathcal{C}} F^*N'\big)(c) &\overset{(3.9)}{=} \int^{u\in\mathcal{C}} N(Fu^\vee \otimes Fc)) \otimes_\Bbbk N'F(u) \\ &\longrightarrow \int^{v\in\mathcal{D}} N(v^\vee \otimes Fc) \otimes_\Bbbk N'(v) \\ &\overset{(3.9)}{=} F^*(N \otimes_{\mathcal{D}} N')(c)\end{aligned} \tag{3.14}$$

for all $N, N' \in \operatorname{Rep}\mathcal{D}$ (see [Hug19, Cor. 1.3.6]).

3.15 Proposition (Projection formula)**.** *Let $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ be a $\Bbbk$-linear tensor functor between essentially small rigid $\Bbbk$-linear tensor categories $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$. Consider the induced adjunction $L = F_!\colon \operatorname{Rep}\mathcal{C} \rightleftarrows \operatorname{Rep}\mathcal{D} : F^* = R$ with its tensor structure as in Example 3.13. Then the projection formula holds, that is the canonical map*

$$\pi_{N,M}\colon F^*(N) \otimes_{\mathcal{C}} M \xrightarrow{\sim} F^*\big(N \otimes_{\mathcal{D}} F_!(M)\big)$$

of (3.11) *is an isomorphism for all $M \in \operatorname{Rep}\mathcal{C}$ and $N \in \operatorname{Rep}\mathcal{D}$.*

Proof. For every object $c \in \mathcal{C}$, we compute as follows (explanations below):

$$\begin{aligned}
(F^*N \otimes_{\mathcal{C}} M)(c) &= \int^{v\in\mathcal{C}} N(F(v^\vee \otimes c)) \otimes M(v) \\
&\simeq \int^{v\in\mathcal{C}} N(Fv^\vee \otimes Fc) \otimes M(v) \\
&\simeq \int^{v\in\mathcal{C}} \Big(\int^{d\in\mathcal{D}} \mathcal{D}(d^\vee, Fv^\vee) \otimes N(d^\vee \otimes Fc)\Big) \otimes M(v) \\
&\simeq \int^{v\in\mathcal{C}} \Big(\int^{d\in\mathcal{D}} \mathcal{D}(Fv, d) \otimes N(d^\vee \otimes Fc)\Big) \otimes M(v) \\
&\simeq \int^{d\in\mathcal{D}} N(d^\vee \otimes Fc) \otimes \Big(\int^{v\in\mathcal{C}} \mathcal{D}(Fv, d) \otimes M(v)\Big) \\
&= F^*\big(N \otimes_{\mathcal{D}} F_!M\big)(c)
\end{aligned}$$

This successively uses: Lemma 3.9 for the Day convolution over $\mathcal{C}$; the tensor structure of F; the co-Yoneda isomorphism (2.8) (applied to the functor $N((-)^\vee \otimes Fc)\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \simeq \mathcal{D} \to \Bbbk\text{-Mod}$ to compute the value $N(Fv^\vee \otimes Fc)$, exploiting the fact that $d \mapsto d^\vee$ is a self-inverse equivalence $\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \simeq \mathcal{D}$); again the equivalence $(-)^\vee\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \simeq \mathcal{D}$; the Fubini Lemma 2.2 to exchange the two coends; and finally, the definition of $F_!$ and Lemma 3.9 for the Day convolution over $\mathcal{D}$.

If we trace the fate of a generator $[n, m]_v \in (F^*N \otimes M)(c)$ all the way, for any $n \in N(F(v^\vee \otimes c))$, $m \in M(v)$ and $v \in \mathcal{C}$, we see that it maps to $[\tilde{n}, [\mathrm{id}_{Fv}, m]_v]_{d=Fv}$, where $\tilde{n} \in N(Fv^\vee \otimes Fv)$ is the element matching n under $Fv^\vee \otimes Fc \simeq F(v^\vee \otimes c)$. This is easily seen to agree with the value of $[n, m]_v$ under the canonical map $\pi_{N,M}$, again computed by a direct inspection of the definitions. Thus $\pi_{N,M}$ is invertible. □

3.16 Corollary. *If the tensor categories $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ are rigid, the canonical morphism between monads on $\operatorname{Rep}\mathcal{C}$*

$$\pi\colon A \otimes (-) := F^*(\mathbb{1}_{\operatorname{Rep}\mathcal{D}}) \otimes_{\mathcal{C}} (-) \xrightarrow{\ \sim\ } F^*F_! =: \mathbb{A}$$

is an isomorphism. In particular, it induces by precomposition an isomorphism

$$\pi^*\colon \mathbb{A}\text{-Mod}_{\operatorname{Rep}\mathcal{C}} \xrightarrow{\ \sim\ } A\text{-Mod}_{\operatorname{Rep}\mathcal{C}}$$

of their module categories, identifying the two Eilenberg-Moore adjunctions.

Proof. Immediate from Lemma 3.12 and Proposition 3.15. Concretely, the isomorphism π^* sends an $\mathbb{A}$-module (M,ρ) to the A-module $(M,\rho\pi)$. □

3.17 Remark. The special case of the projection formula used in Corollary 3.16 is actually easy to see directly, since the relevant map π

$$
\begin{aligned}
A \otimes_{\mathcal{C}} M = \int^{c\in\mathcal{C}} & \mathcal{D}(\mathbb{1}, F(c^\vee \otimes -)) \otimes M(c) \\
& \xrightarrow{\sim} \int^{c\in\mathcal{C}} \mathcal{D}(Fc, F-) \otimes M(c) = F^* F_! M
\end{aligned}
$$

is just induced by $\mathcal{D}(\mathbb{1}, F(c^\vee \otimes -)) \simeq \mathcal{D}(\mathbb{1}, Fc^\vee \otimes F-) \simeq \mathcal{D}(Fc, F-)$, the isomorphisms given by the tensor structure of F and the tensor duality of $\mathcal{D}$.

3.18 Lemma. *If $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ is essentially surjective and full, then F^* is a fully faithful embedding $\mathrm{Rep}\,\mathcal{D} \hookrightarrow \mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$. An $M\colon \mathcal{C} \to \mathbb{k}\text{-Mod}$ belongs to the (essential) image of F^* if and only if it factors (up to isomorphism) through F, uniquely if so.*

Proof. This is well-known, see *e.g.* [Hug19, Prop. 1.3.2] for a detailed proof. □

Proof of Theorem 1.4. We finally have at our disposal all the ingredients of the theorem and its proof. Let $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ be a $\mathbb{k}$-linear tensor functor between essentially small $\mathbb{k}$-linear rigid tensor categories, and consider all the constructions as listed in the theorem and recalled above. (Since F is essentially surjective, if $\mathcal{C}$ is rigid then $\mathcal{D}$ is also automatically rigid, see *e.g.* [Hug19, Prop. 1.1.10] for a full proof.)

Consider the composite functor

$$
E_A\colon\ \mathrm{Rep}\,\mathcal{D} \xrightarrow{E_{\mathbb{A}}} \mathbb{A}\text{-Mod}_{\mathrm{Rep}\,\mathcal{C}} \xrightarrow[\sim]{\pi^*} A\text{-Mod}_{\mathrm{Rep}\,\mathcal{C}} \tag{3.19}
$$

of the Eilenberg-Moore comparison functor $E_{\mathbb{A}}$ and the identification π^* of the categories of A-modules with that of $\mathbb{A}$-modules, as in Corollary 3.16 (this uses rigidity). It sends $N \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{D}$ to $F^*N \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$ equipped with the A-action

$$
\rho := F^*(\varepsilon) \circ \pi\colon\ A \otimes_{\mathcal{C}} F^*N \simeq F^*F_!F^*N \longrightarrow F^*N.
$$

If F is essentially surjective, $E_{\mathbb{A}}$ is an equivalence by Proposition 3.4 and therefore so is E_A; this proves part (1) of the theorem. If moreover F is full, the functors F^* and U are fully faithful by Lemma 3.18; this proves a third of (2).

Under all these hypotheses, the remaining claims of part (2) on the tensor structures follow from Proposition 3.20 below. This ends the proof of the theorem. □

3.20 Proposition. *If $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ is full and essentially surjective and $\mathcal{C}$ and $\mathcal{D}$ are rigid, then the equivalence E_A of (3.19) is a (strong) tensor functor, and the embeddings F^* and U identify these tensor categories with the full tensor ideal subcategory $\mathrm{Im}(F^*) = \mathrm{Im}(U)$ of $\mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$.*

Proof. For $N, N' \in \mathcal{D}$, let $E_A(N) = (F^*N, \rho)$ and $E_A(N') = (F^*N', \rho')$ denote the two images in A-Mod. Recall, from Construction 3.6 and Example 3.13, the coequalizer defining $- \otimes_A -$ and the lax multiplication $\lambda_{N,N'}$ of F^*:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] F^*N \otimes_{\mathcal{C}} A \otimes_{\mathcal{C}} F^*N' \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}\otimes\rho'"] \arrow[r, shift right, "\rho\sigma\otimes\mathrm{id}"'] & F^*N \otimes_{\mathcal{C}} F^*N' \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "\lambda_{N,N'}"'] & F^*N \otimes_A F^*N' \arrow[dl, dashed, "\lambda_{N,N'}\omega^{-1} =: \varphi_{N,N'}"] \\ & F^*(N \otimes_{\mathcal{D}} N') & \end{tikzcd}$$

We claim that, under the hypotheses, $\lambda_{N,N'}$ is invertible and so is the canonical projection ω to the coequalizer. In particular, we obtain the dotted isomorphisms $\varphi_{N,N'}$. Indeed, writing as in (3.14) (thanks to rigidity), $\lambda_{N,N'}$ sends $[n, n']_u$ to $[n, n']_{Fu}$, and the inverse map sends $[n, n']_v$ to $[n, n']_u$, for any choice of $u \in \mathcal{C}$ with $Fu \simeq v$. To see why the latter works, assume for simplicity that F is surjective on objects (*i.e.* replace $\mathcal{D}$ with the equivalent strict image of F). Now choose $u_v \in F^{-1}(v)$ for each $v \in \mathcal{D}$. The resulting map $(n, n')_v \mapsto (n, n')_{u_v}$, call it θ, is well-defined on the classes $[n, n']_v$; indeed, every map $\psi \in \mathcal{D}(v, \overline{v})$ testifying of an 'elementary' relation $(n, n')_v \sim (\overline{n}, \overline{n}')_{\overline{v}}$ lifts to some $\varphi \in \mathcal{C}(u_v, u_{\overline{v}})$ by the fullness of F, showing $[n, n']_{u_v} = [\overline{n}, \overline{n}']_{u_{\overline{v}}}$, and we may lift any zig-zag of such maps by the surjectivity of F on objects. Clearly $\lambda_{N,N'} \circ \theta = \mathrm{id}$. Moreover for every $u \in \mathcal{C}$ we have $F(u) = F(u_{Fu})$, hence by the fullness of F we may lift id_{Fu} to some map $u \to u_{Fu}$ in $\mathcal{C}$, which implies that $\theta \circ \lambda_{N,N'} = \mathrm{id}$ as well. Thus $\lambda_{N,N'}$ is invertible (and θ does not depend on the choices).

As for ω, it is a general fact, neither requiring rigidity nor the hypotheses on F, that λ factors through it (see [Hug19, Lemma 1.4.2]); as λ is invertible and ω is always an epimorphism, we conclude that ω is also invertible. Alternatively, the latter can also be checked directly in the rigid case.

Note that this does *not* mean that F^* is a strong tensor functor, because the unit map $F\colon \mathcal{C}(\mathbb{1},-) \to \mathcal{D}(F\mathbb{1},F-) \simeq \mathcal{D}(\mathbb{1},F-)$ is still not necessarily invertible. Still, the identity map $F^*(\mathbb{1}_{\mathrm{Rep}\,\mathcal{D}}) \to U \circ E_A(\mathbb{1}_{\mathrm{Rep}\,\mathcal{D}})$ *is* invertible, and is also the unique A-linear morphism $A = F^*(\mathbb{1}_{\mathrm{Rep}\,\mathcal{D}}) \to E_A(\mathbb{1}_{\mathrm{Rep}\,\mathcal{D}})$ extending along the unit map $\mathbb{1}_{\mathrm{Rep}\,\mathcal{C}} \to A$ of the monoid A, as one checks immediately. Moreover, the morphisms $\varphi_{N,N'}$ are automatically A-equivariant, since the fullness and essential surjectivity of F imply that every $M \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$ can have at most a unique A-module structure ([Hug19, Cor. 1.3.11]).

Altogether, we see that the maps $\varphi_{N,N'}$ and the identity $A \to E_A(\mathbb{1})$ belong to $A\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathrm{Rep}\,\mathcal{C}}$ and equip E_A with a strong tensor structure; the commutativity of the coherence diagrams follows from that for the lax structure of F^*.

Finally, let us verify that $\mathrm{Im}(F^*) = \{M \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{C} \mid \exists N \text{ s.t. } M \simeq F^*N\}$ is a tensor ideal. Notice that for all $M \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Im}(F^*) &\iff \text{the unit } \eta\colon M \to F^*F_!M \text{ is invertible} \\ &\iff \text{the unit } M \simeq \mathbb{1} \otimes M \to A \otimes M \text{ is invertible,} \end{aligned}$$

the first equivalence because F^* is the inclusion of a full reflexive subcategory, the second because the equivalence E_A matches the two adjunctions. We deduce for all $M \in \mathrm{Im}(F^*)$ and $N \in \mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$ that $M \otimes N \simeq (A \otimes M) \otimes N \simeq A \otimes (M \otimes N)$, so that $M \otimes N \in \mathrm{Im}(U) = \mathrm{Im}(F^*)$. Thus $\mathrm{Im}(F^*)$ is a tensor ideal in $\mathrm{Rep}\,\mathcal{C}$. □

3.21 Remark. A slightly weaker version of Theorem 1.4 is proved in [Hug19, §1.4] by way of more explicit calculations. We do not know if the ridigity hypothesis is necessary for E_A to be an equivalence, nor if the fullness hypothesis is necessary for E_A to be a *strong* tensor functor (it is always a lax one), as we have not looked for explicit counterexamples. On the other hand, we don't see any reason for the conclusions to hold otherwise, because the projection formula of Proposition 3.15, in particular, may fail.

4. Application: cohomological vs ordinary Mackey functors

In this section we derive Corollary 1.7 from the above abstract results. Although this corollary is essentially well-known (see especially [PS07, §10]), the present proof offers some insight because it immediately clarifies the relation between ordinary and cohomological Mackey functors as tensor categories. Besides, it provides an easier and probably more familiar analogue of our main application, Corollary 1.6.

Throughout this section, we fix a finite group G and a commutative ring $\Bbbk$.

4.1 Recollection (The span category of G-sets). Let $G\text{-set}$ denote the category of finite left G-sets. Then there is a category $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G)$ whose objects are the same as those of $G\text{-set}$, and where a morphism $X \to Y$ is by definition an element of the Grothendieck group $\Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(G\text{-set}/X \times Y)$ (with addition induced by coproducts) of the slice category $G\text{-set}/X \times Y$. In particular, every morphism can be written as a finite $\Bbbk$-linear combination of isomorphism classes $[\alpha, \beta]$ of spans $X \overset{\alpha}{\leftarrow} S \overset{\beta}{\rightarrow} Y$ in $G\text{-set}$, where two spans $X \overset{\alpha}{\leftarrow} S \overset{\beta}{\rightarrow} Y$ and $X \overset{\alpha'}{\leftarrow} S' \overset{\beta'}{\rightarrow} Y$ are *isomorphic* if there exists an isomorphism $\varphi\colon S \overset{\sim}{\rightarrow} S'$ making the following diagram of G-sets commute:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & S \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[dd, "\varphi"', "\simeq"] & \\ X & & Y \\ & S' \arrow[ul, "\alpha'"] \arrow[ur, "\beta'"'] & \end{tikzcd}$$

A $\Bbbk$-bilinear composition in $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G)$ is induced by taking pull-backs in $G\text{-set}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & S \times_Y T \arrow[dl, "\tilde\gamma"] \arrow[dr, "\tilde\beta"'] \arrow[dll, bend right, "\alpha\tilde\gamma"'] \arrow[drr, bend left, "\delta\tilde\beta"] & & \\ & S \arrow[dl, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & & T \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[dr, "\delta"'] & \\ X \arrow[rr, dotted] & & Y \arrow[rr, dotted] & & Z \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

It follows that $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G)$ is an essentially small $\Bbbk$-linear category, where the sum of two spans is induced by taking coproducts at the middle object S. Moreover, $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G)$ is a $\Bbbk$-linear rigid tensor category, with tensor product $\otimes$ induced by the categorical product $X \times Y$ of $G\text{-set}$ and with tensor unit

$\mathbb{1} = G/G$ the one-point G-set. Every G-set is actually its own tensor dual, by virtue of the natural equivalence $G\text{-set}/X \times Y \simeq G\text{-set}/Y \times X$ of slice categories. See details *e.g.* in [Bou97].

4.3 Recollection (The category of permutation modules). We write $\mathrm{Perm}_{\Bbbk}(G)$ for the category of finitely generated *permutation* $\Bbbk G$*-modules*, that is, the full subcategory of those (left) $\Bbbk G$-modules which admit a finite G-invariant $\Bbbk$-basis. Clearly this is an essentially small $\Bbbk$-linear category. It is moreover a $\Bbbk$-linear tensor category, because it inherits the usual tensor product of $\Bbbk G$-modules (*i.e.* the tensor product $\otimes = \otimes_{\Bbbk}$ over $\Bbbk$ endowed with diagonal G-action). Indeed, the trivial module $\mathbb{1} = \Bbbk$ is a permutation $\Bbbk G$-module, and if the $\Bbbk G$-modules M and N admit G-invariant bases $X \subset M$ and $Y \subset N$, respectively, then $\{x \otimes y \mid (x, y) \in X \times Y\}$ is a G-invariant basis of $M \otimes N$. As tensor category, $\mathrm{Perm}_{\Bbbk}(G)$ is rigid: if M has invariant basis X, its tensor-dual module $M^{\vee} = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(M, \Bbbk)$ has an invariant basis given by the usual $\Bbbk$-linear dual basis $X^{\vee} := \{x^{\vee} \colon y \mapsto \delta_{x,y} \mid x \in X\}$.

4.4 Definition (Mackey functors for G). The representation category

$$\mathrm{Mack}_{\Bbbk}(G) := \mathrm{Rep}\,\mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G)$$

(*cf.* Notation 3.1) is by definition the category of ($\Bbbk$-*linear*) *Mackey functors for* G. Similarly, the category of *cohomological* Mackey functors for G is

$$\mathrm{coMack}_{\Bbbk}(G) := \mathrm{Rep}\,\mathrm{Perm}_{\Bbbk}(G)\,.$$

Both are complete and co-complete abelian $\Bbbk$-linear tensor categories, with tensor structure provided by Day convolution (Construction 3.8) extended from the rigid tensor structures on their respective source categories $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G)$ and $\mathrm{Perm}_{\Bbbk}(G)$, as described in Recollection 4.1 and Recollection 4.3.

4.5 Remark. Usually, the tensor product in $\mathrm{Mack}_{\Bbbk}(G)$ is denoted by $M \mathbin{\square} N$ and called *box product*; and $\mathrm{coMack}_{\Bbbk}(G)$ is defined as a full subcategory of $\mathrm{Mack}_{\Bbbk}(G)$ and only later identified (by Yoshida's theorem) with the above functor category.

4.6 Lemma (Yoshida's functor)**.** *There is a well-defined* $\Bbbk$*-linear tensor functor*

$$\mathrm{Yo} \colon \mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G) \longrightarrow \mathrm{Perm}_{\Bbbk}(G)$$

sending a left G-set X to the permutation $\Bbbk G$-module $\Bbbk[X]$ and sending a span $X \overset{\alpha}{\leftarrow} S \overset{\beta}{\rightarrow} Y$ of G-maps to the $\Bbbk G$-linear map $\Bbbk[X] \to \Bbbk[Y]$, $x \mapsto \sum_{s\in\alpha^{-1}(x)} \beta(s)$. Moreover, Yo *is essentially surjective and full.*

Proof. One can verify that Yo is well-defined by straightforward computations, but here is a more conceptual way to see it. First note that there is a functor $\mathrm{Yo}_\star\colon G\text{-set} \to \Bbbk\text{-Mod}$ which sends X to $\Bbbk[X]$ and simply extends a G-map $\Bbbk$-linearly. There is also a functor $\mathrm{Yo}^\star\colon (G\text{-set})^{\mathrm{op}} \to \Bbbk\text{-Mod}$ with the same object-map but sending a G-map $\alpha\colon Y \to X$ to the $\Bbbk$-linear map $\Bbbk[X] \to \Bbbk[Y]$ such that $x \mapsto \sum_{y\in\alpha^{-1}(x)} y$ for $x \in X$. Since $\Bbbk[X \sqcup Y] \simeq \Bbbk[X] \oplus \Bbbk[Y]$, and since the identity

$$\mathrm{Yo}^\star(\gamma)\,\mathrm{Yo}_\star(\beta) = \mathrm{Yo}_\star(\tilde\beta)\,\mathrm{Yo}^\star(\tilde\gamma)$$

can be readily verified for an arbitrary pull-back square of G-sets (with notations as in (4.2)), it follows by the universal property of the span category ([Lin76]; see also [BD20, App. A.5]) that there is a functor $\tilde{\mathrm{Yo}}\colon \mathrm{Sp}(G) \to \mathrm{Perm}_\Bbbk(G)$ defined as $\tilde{\mathrm{Yo}}(X) = \Bbbk[X]$ on G-sets and $\tilde{\mathrm{Yo}}([\alpha,\beta]) = \mathrm{Yo}_\star(\beta) \circ \mathrm{Yo}^\star(\alpha)$ on spans of G-maps. (Here $\mathrm{Sp}(G)$ is the 'plain' span category, constructed as $\mathrm{Sp}_\Bbbk(G)$ but with Hom sets simply given by the sets of isomorphism classes $\mathrm{Sp}(G)(X,Y) = (G\text{-set}/X \times Y)/_{\simeq}$ of objects.) Our functor Yo is then the evident $\Bbbk$-linear extension of $\tilde{\mathrm{Yo}}$.

A permutation $\Bbbk G$-module M is precisely one for which there exists an isomorphism $M \simeq \Bbbk[X]$ for some G-set X, hence Yo is essentially surjective. It is a little harder to see that Yo is full, but it suffices to verify it for two standard orbits $X = G/H$ and $Y = G/K$, in which case it boils down to the $\Bbbk$-linear isomorphism

$$\begin{aligned} \Bbbk[H\backslash G/K] &\overset{\sim}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}_{\Bbbk G}(\Bbbk[G/H], \Bbbk[G/K]) \\ HxK &\longmapsto \Big(gH \mapsto \sum_{[u]\in H/(H\cap {}^xK)} guxK\Big) \end{aligned}$$

as in [Yos83, Lemma 3.1]; see [Hug19, Prop. 2.1.10] for the remaining details. □

Proof of Corollary 1.7. As we have seen in Recollections 4.1 and 4.3, both $\mathcal{C} := \mathrm{Sp}_\Bbbk(G)$ and $\mathcal{D} := \mathrm{Perm}_\Bbbk(G)$ are essentially small rigid $\Bbbk$-linear tensor categories. Moreover, Yoshida's functor $F := \mathrm{Yo}$ of Lemma 4.6 is a full and essentially surjective $\Bbbk$-linear tensor functor between them. Hence $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ satisfies all the hypotheses of Theorem 1.4, from which we obtain most of the claims of the corollary.

It remains only to clarify two points:

(1) The monoid $A = F^*(\mathbb{1})$ of $\mathrm{Rep}\,\mathcal{C} = \mathrm{Mack}_{\Bbbk}(G)$ from the theorem is the *fixed-point Mackey functor* $\mathrm{FP}_{\Bbbk}$.

(2) A Mackey functor M is cohomological if and only if it satisfies the cohomological relations $\mathrm{ind}_L^H \circ \mathrm{res}_L^H = [H : L]\,\mathrm{id}_{M(H)}$ for all subgroups $L \leq H \leq G$.

Here for familiarity we have switched to the classical notations $M(H) := M(G/H)$, $\mathrm{ind}_L^H := M([G/L = G/L \to G/H])$ and $\mathrm{res}_L^H := M([G/H \leftarrow G/L = G/L])$, where $G/L \to G/H$ is the quotient G-map for two nested subgroups $L \leq H \leq G$.

For (1) recall that, classically, $\mathrm{FP}_{\Bbbk}$ is the Mackey functor which assigns to every orbit G/H the trivial $\Bbbk G$-module $\Bbbk$, whose restriction and conjugation maps are all identities, and whose induction maps $\mathrm{ind}_L^H\colon \Bbbk \to \Bbbk$ are given by multiplication by the index $[H : L]$. It is a matter of straightforward comparison to identify it with $A = \mathrm{Perm}_{\Bbbk}(G)(\Bbbk, \mathrm{Yo}(-))$ (if necessary, see details in [Hug19, Lemma 2.2.15]).

For (2), the easiest way to see this is as in [TW95, Prop. 16.3] where, by very easy explicit calculations, it is shown that a Mackey module over the Green functor $\mathrm{FP}_{\Bbbk}$ is the same thing as a Mackey functor satisfying also the cohomological relations. $\square$

4.7 Remark. Note that (2) amounts to saying that the kernel (on maps) of Yoshida's functor Yo is generated as a $\Bbbk$-linear categorical ideal of $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G)$ by the span-versions of the cohomological relations, namely (after computing the trivial pull-back) by

$$[G/H \leftarrow G/L \to G/H] - [H : L]\mathrm{id}_{G/H} \quad \text{for all } L \leq H \leq G.$$

It is immediate to see that Yo kills these relations. To see that they actually generate the kernel of Yo, it suffices to inspect the standard presentation of $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G)$ in terms of restriction, conjugation and induction maps; the necessary calculations are essentially a re-writing of the ones in [TW95, Prop. 16.3] we mentioned above.

5. The realization pseudo-functor

This section is dedicated to proving Theorem 1.1.

We retain the same standard notations and conventions for bicategories, 2-categories, pseudo-functors and allied notions as in [BD20, App. A] or [Del19, §2]. We nonetheless provide here a few recollections for the reader's convenience. We denote by gpd the 2-category (= strict bicategory) of finite groupoids, functors between them and (necessarily invertible) natural transformations.

5.1 Terminology. Given two functors $S \xrightarrow{a} G \xleftarrow{b} T$ between finite groupoids and with common target (a 'cospan'), we can build its *iso-comma* groupoid a/b, whose objects are triples (s,t,γ) with $s \in \operatorname{Obj} S$, $t \in \operatorname{Obj} T$ and $\gamma \in G(a(s),b(t))$. A morphism $(s,t,\gamma) \to (s',t',\gamma')$ is a pair (φ,ψ) with $\varphi \in S(s,s')$ and $\psi \in T(t,t')$ and such that $\gamma' a(\varphi) = b(\psi)\gamma$. It is part of the *iso-comma square*

$$\begin{tikzcd} & (a/b) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ S \arrow[dr, "a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\gamma}{\underset{\sim}{\Rightarrow}}"] & & T \arrow[dl, "b"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

which also comprises two evident forgetful functors p,q and a tautological natural isomorphism $\gamma\colon ap \Rightarrow bq$ whose component at the object (s,t,γ) is the map γ. The iso-comma square is the universal (in a strict 2-categorical sense) such invertible 2-cell sitting over the given cospan.

5.2 Construction (The bicategory Span). There exists a bicategory Span consisting of the following data. Its objects are all the finite groupoids. A 1-cell $H \to G$ is a 'span' in gpd, that is a diagram

$$H \xleftarrow{\;b\;} S \xrightarrow{\;a\;} G$$

of functors between finite groupoids. A 2-cell from the span $H \xleftarrow{b} S \xrightarrow{a} G$ to the span $H \xleftarrow{b'} S' \xrightarrow{a'} G$ is the isomorphism class of a diagram in gpd of the following form:

$$\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "a"] \arrow[dd, "f"] & \\
H \arrow[r, phantom, "\beta \Searrow"] & \arrow[r, phantom, "\Nearrow \alpha"] & G \\
& S' \arrow[ul, "b'"] \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

(The orientation of the two 2-cells is merely a matter of convention.) Here, two such diagrams are *isomorphic* if there exists a natural isomorphism between their 1-cell components f which identifies their 2-cells components α and β. The horizontal composition of spans is defined by constructing an iso-comma square in the middle:

$$\begin{tikzcd}
& & (c/b) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\gamma}{\Rightarrow}"] \arrow[dll, bend right, "dp"'] \arrow[drr, bend left, "aq"] & & \\
& T \arrow[dl, "d"'] \arrow[dr, "c"] & & S \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "a"] & \\
K \arrow[rr, dotted] & & H \arrow[rr, dotted] & & G
\end{tikzcd}$$

The horizontal composition of 2-cells, as well as the coherent associativity and unitality isomorphisms, are all induced by the universal property of iso-comma squares in a straightforward way. The identity span of G is $\mathrm{Id}_G = (G = G = G)$. See [BD20, § 5.1] for more details.

In the following, $(-)^{\mathrm{co}}$ and $(-)^{\mathrm{op}}$ denote, respectively, the operation of formally reversing the direction of the 2-cells or of the 1-cells in a bicategory.

5.3 Construction (Canonical embeddings). There are two canonical pseudo-functors $(-)_!\colon \mathsf{gpd}^{\mathrm{co}} \hookrightarrow \mathsf{Span}$ and $(-)^*\colon \mathsf{gpd}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathsf{Span}$, embedding gpd inside of Span in a way which is contravariant on 2-cells and on 1-cells, respectively:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, bend left, "a"] \arrow[r, bend right, "a'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & G
\end{tikzcd}
\quad \longmapsto \quad
\alpha_! = \left[\begin{tikzcd}
& S \arrow[dr, "a"] \arrow[dd, equal] & \\
S \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] \arrow[r, phantom, "\mathrm{id} \Searrow"] & \arrow[r, phantom, "\Nearrow \alpha"] & G \\
& S \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}\right]$$

$$
\begin{tikzcd}
H & S \arrow[l, bend right, "b"'] \arrow[l, bend left, "b'"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow\beta"]
\end{tikzcd}
\quad\longmapsto\quad
\beta^* = \left[
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& S \arrow[dl, "b"'] \arrow[dd, equal] \arrow[dr, equal] & \\
H \arrow[r, phantom, "\beta\Searrow"] & \arrow[r, phantom, "\Nearrow \mathrm{id}"] & G \\
& S \arrow[ul, "b'"] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}
\right]
$$

(the above diagrams to be understood in gpd). Thus the embeddings map functors $a\colon S \to G$ and $b\colon S \to H$ to spans $a_! = (S = S \xrightarrow{a} G)$ and $b^* = (H \xleftarrow{b} S = S)$, respectively, and natural isomorphisms $\alpha\colon a' \Rightarrow a$ and $\beta\colon b \Rightarrow b'$ to the depicted 2-cells. Note that these pseudo-functors are not strict. Every 1-cell of Span is (isomorphic to) a composite $a_! \circ b^*$, and similarly, every 2-cell $[f, \beta, \alpha]$ is a combination of $\alpha_!$ and β^*. See [BD20, Cons. 5.1.18, Rem. 5.1.19, Prop. 5.1.32] for details.

The key tool for defining the realization pseudo-functor $\mathcal{R}$ is the universal property of its source, the span bicategory:

5.4 Theorem (Universal property of Span)**.** *Suppose we are given a bicategory $\mathcal{B}$, two pseudo-functors*

$$
\mathcal{F}_!\colon \mathsf{gpd}^{\mathrm{co}} \to \mathcal{B} \qquad \textit{and} \qquad \mathcal{F}^*\colon \mathsf{gpd}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}
$$

and, for every functor $u\colon H \to G$ between finite groupoids, an (internal) adjunction $\mathcal{F}_!(u) \dashv \mathcal{F}^*(u)$ in $\mathcal{B}$, with specified unit and counit. Assume the following holds:

(a) *On objects, $\mathcal{F}_!$ and $\mathcal{F}^*$ coincide: $\mathcal{F}_!(G) = \mathcal{F}^*(G)$ for all G.*

(b) *The adjunctions satisfy base-change, a.k.a. the Beck-Chevalley condition, for all iso-comma squares (Terminology 5.1). In other words, for every iso-comma square in* gpd *as on the left*

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (a/b) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
S \arrow[dr, "a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\gamma}{\underset{\sim}{\Rightarrow}}"] & & T \arrow[dl, "b"] \\
& G &
\end{tikzcd}
\quad\rightsquigarrow\quad
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& & & \mathcal{F}T \arrow[dd, equal, bend left] \\
& & \mathcal{F}(a/b) \arrow[ur, "\mathcal{F}_!q"] \arrow[r, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Rightarrow}"] & \\
& \mathcal{F}S \arrow[ur, "\mathcal{F}^*p"] \arrow[dd, equal, bend right] \arrow[rr, phantom, "\overset{\mathcal{F}^*\gamma}{\Rightarrow}"] & & \mathcal{F}T \arrow[ul, "\mathcal{F}^*q"'] \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] & & \mathcal{F}G \arrow[ul, "\mathcal{F}^*a"'] \arrow[ur, "\mathcal{F}^*b"'] & \\
& \mathcal{F}S \arrow[ur, "\mathcal{F}_!a"'] & &
\end{tikzcd}
\tag{5.5}
$$

the mate constructed on the right is an isomorphism $\mathcal{F}_!(q)\mathcal{F}^*(p) \overset{\sim}{\Rightarrow} \mathcal{F}^*(b)\mathcal{F}_!(a)$.

(c) *For each 2-cell* $\alpha\colon u \Rightarrow v$ *in* gpd*, the 2-cells* $\mathcal{F}_!(\alpha)$ *and* $\mathcal{F}^*(\alpha)$ *of* $\mathcal{B}$ *are each other's mate under the adjunctions* $\mathcal{F}_!(u) \dashv \mathcal{F}^*(u)$ *and* $\mathcal{F}_!(v) \dashv \mathcal{F}^*(v)$ *(after a necessary inversion). Similarly, the coherent structure isomorphisms of* $\mathcal{F}_!$ *and* $\mathcal{F}^*$ *are each other's mates (in the only way which makes sense).*

Then the above data defines a pseudo-functor $\mathcal{F}\colon \mathsf{Span} \to \mathcal{B}$ *by the composite*

$$\mathcal{F}\big(H \overset{b}{\leftarrow} S \overset{a}{\to} G\big) := \mathcal{F}_!(a) \circ \mathcal{F}^*(b)$$

for 1-cells and by the pasting

$$\mathcal{F}\left(\left[\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "a"] \arrow[dd, "f"] & \\ H \arrow[r, phantom, "\beta \Searrow"] & & G \arrow[l, phantom, "\Nearrow \alpha"] \\ & S' \arrow[ul, "b'"] \arrow[ur, "a'"'] & \end{tikzcd}\right]\right) := \begin{tikzcd} \mathcal{F}H \arrow[rr, bend left, "\mathcal{F}^*b"] \arrow[dr, "\mathcal{F}^*b'"'] & \Downarrow \mathcal{F}^*\beta & \mathcal{F}S \arrow[rr, bend left, "\mathcal{F}_!a"] \arrow[dr, "\mathcal{F}_!f"] & \Downarrow \mathcal{F}_!\alpha & \mathcal{F}G \\ & \mathcal{F}S' \arrow[ur, "\mathcal{F}^*f"] \arrow[rr, equal, bend right] & \Downarrow \varepsilon & \mathcal{F}S' \arrow[ur, "\mathcal{F}_!a'"'] & \end{tikzcd}$$

for 2-cells. This $\mathcal{F}$ *is, up to isomorphism, the unique pseudo-functor* $\mathsf{Span} \to \mathcal{B}$ *such that* $\mathcal{F}_! \simeq \mathcal{F} \circ (-)_!$ *and* $\mathcal{F}^* \simeq \mathcal{F} \circ (-)^*$.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{gpd}^{\mathrm{co}} \arrow[d, "(-)_!"'] \arrow[dr, bend left, "\mathcal{F}_!"] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\simeq"] & \\ \mathsf{Span} \arrow[r, dashed, "\mathcal{F}"] & \mathcal{B} \\ \mathsf{gpd}^{\mathrm{op}} \arrow[u, "(-)^*"] \arrow[ur, bend right, "\mathcal{F}^*"'] \arrow[u, phantom, shift right=4, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

Proof. This is a special case, and a slight rephrasing which emphasizes the symmetry of the present situation, of the more general [BD20, Theorem 5.2.1]. Indeed, by hypotheses (a) and (b) we can apply *loc. cit.* with $\mathbb{G} = \mathbb{J} = \mathsf{gpd}$ to the pseudo-functor $\mathcal{F}^*$. (To be precise, *loc. cit.* assumes that the target bicategory is strict, so we should first replace $\mathcal{B}$ with a biequivalent 2-category $\mathcal{C}$; this has the effect that we can only obtain an isomorphism

$\mathcal{F}^* \simeq \mathcal{F} \circ (-)^*$ rather than an equality; *cf.* [BD20, Theorem 5.3.7]). We thus obtain an extension $\mathcal{F}\colon \mathsf{Span} \to \mathcal{B}$, constructed as in the theorem with the only (possible) difference that, in the pasting defining the image of the 2-cell $[f, \beta, \alpha]$, the 2-cell $\mathcal{F}_!(\alpha)$ must be replaced by the mate

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}_!(a) \arrow[r, Rightarrow, "\eta"] & \mathcal{F}_!(a)\mathcal{F}^*(a'f)\mathcal{F}_!(a'f) \arrow[d, Rightarrow, "\mathcal{F}^*\alpha"] & \\ & \mathcal{F}_!(a)\mathcal{F}^*(a)\mathcal{F}_!(a'f) \arrow[r, Rightarrow, "\varepsilon"] & \mathcal{F}_!(a'f) \simeq \mathcal{F}_!(a')\mathcal{F}_!(f) \end{tikzcd}$$

of $\mathcal{F}^*(\alpha)$. This $\mathcal{F}$ is such that $\mathcal{F}^* \simeq \mathcal{F} \circ (-)^*$ and is unique up to an isomorphism of pseudo-functors for this property. By its construction, it is uniquely determined (on the nose) by the pseudo-functor $\mathcal{F}^*$, the isomorphism $\mathcal{F}^* \simeq \mathcal{F} \circ (-)^*$, and by taking mates with respect to the given adjunctions $\mathcal{F}_!(u) \dashv \mathcal{F}^*(u)$ for all u.

It remains to see that we also have $\mathcal{F}_! \simeq \mathcal{F} \circ (-)_!$, and that the difference in the definition of 2-cells is only apparent. These however are straightforward consequences of the construction of $\mathcal{F}$ together with hypothesis (c). □

We next recall our bicategory $\mathcal{B}$ of interest and proceed to introduce the structure needed to apply the universal property of Span.

5.6 Construction (The bicategory Biset). There exists a bicategory Biset consisting of the following data. Its objects are all finite groupoids. A 1-cell $U\colon H \to G$ (a 'finite left-G and right-H biset', or 'G, H-biset' for short) is a functor

$$U\colon H^{\mathrm{op}} \times G \longrightarrow \mathrm{set}$$

taking values in the category of finite sets. A 2-cell $\varphi\colon U \Rightarrow V$ is a natural transformation $U \Rightarrow V$. The horizontal composition of two composable bisets $V\colon K \to H$ and $U\colon H \to G$ is given by the set-theoretical coend (see Section 2)

$$U \circ V = U \otimes_H V := \int^{h \in H} U(h, -) \times V(-, h)\colon \quad K^{\mathrm{op}} \times G \longrightarrow G\,.$$

The identity 1-cell of a groupoid G is its Hom functor $\mathrm{Id}_G = G(-,-)\colon G^{\mathrm{op}} \times G \to \mathrm{set}$. The horizontal composition of 2-cells is induced on the quotient sets in the evident way. The coherent associativity and unitality constraints are the standard (evident) identifications of coends. See *e.g.* [Bor94, §7.8] for details.

5.7 Notation. Let $u\colon H \to G$ be any functor of finite groupoids. We will write

$$\mathcal{R}_!(u) := G(u-,-)\colon H^{\mathrm{op}} \times G \to \mathrm{set}$$
$$\mathcal{R}^*(u) := G(-,u-)\colon G^{\mathrm{op}} \times H \to \mathrm{set}$$

for the bisets $H \to G$ and $G \to H$ obtained by composing u with the Hom functor of G in the two possible ways.

5.8 Lemma. *The assignments $u \mapsto \mathcal{R}_!(u)$ and $u \mapsto \mathcal{R}^*(u)$ of Notation 5.7 extend canonically to two pseudo-functors*

$$\mathcal{R}_!\colon \mathsf{gpd}^{\mathrm{co}} \to \mathsf{Biset} \quad \textit{and} \quad \mathcal{R}^*\colon \mathsf{gpd}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Biset}$$

both of which act as the identity on objects (finite groupoids).

Proof. Let us specify this structure for $\mathcal{R}^*$. By definition, $\mathcal{R}^*$ sends a groupoid G to itself and (contravariantly) a functor $u\colon H \to G$ to the biset $\mathcal{R}^*(u) = G(-,u-)\colon G \to H$. For a natural transformation $\alpha\colon u \Rightarrow v$, we naturally define the (covariant!) image $\mathcal{R}^*(\alpha)\colon \mathcal{R}^*(u) \Rightarrow \mathcal{R}^*(v)$ to be the natural isomorphism $G(-,u-) \Rightarrow G(-,v-)$ induced by α, by sending an element ξ to $\alpha \circ \xi$. The assignment $\alpha \mapsto \mathcal{R}^*(\alpha)$ defines a functor for each pair (H,G), as required. The structure isomorphisms of the pseudo-functor are given by the identity map $\mathrm{un}_{\mathcal{R}^*}\colon \mathrm{Id}_{\mathcal{R}^*(G)} = G(-,-) = \mathcal{R}^*(\mathrm{Id}_G)$ for each G as unitor, and by the isomorphism $\mathrm{fun}_{\mathcal{R}^*}$

$$\mathcal{R}^*(v) \circ \mathcal{R}^*(u) = \int^{h\in H} H(h,v-) \times G(-,uh) \xrightarrow{\sim} G(-,uv-) = \mathcal{R}^*(u \circ v)$$

induced by composition, $[\zeta,\xi]_h \mapsto u(\zeta)\circ\xi$, for any two composable functors $K \xrightarrow{v} H \xrightarrow{u} G$; this map is clearly well-defined with inverse given by $\xi \mapsto [\mathrm{id},\xi]$. The verification of the coherence axioms is straightforward and left to the reader.

Similarly for $\mathcal{R}_!$, a 2-cell $\alpha\colon u \Rightarrow v$ is sent (contravariantly) to the natural map $G(v-,-) \Rightarrow H(u-,-)$ given by *pre*composition with α, that is $\xi \mapsto \xi \circ \alpha$, and the structural isomorphism $\mathrm{fun}_{\mathcal{R}_!}$

$$\mathcal{R}_!(u) \circ \mathcal{R}_!(v) = \int^{h\in H} G(uh,-) \times H(v-,h) \xrightarrow{\sim} G(uv-,-) = \mathcal{R}_!(u \circ v)$$

is again simply given by composition: $[\xi,\zeta]_h \mapsto \xi \circ u(\zeta)$. $\square$

5.9 Lemma. *For every $u\colon H \to G$, there is an adjunction $\mathcal{R}_!(u) \dashv \mathcal{R}^*(u)$ in the bicategory* Biset, *with the natural transformations*

$$\begin{aligned} \eta_u\colon \mathrm{Id}_H &\Longrightarrow \mathcal{R}^*(u) \circ \mathcal{R}_!(u) & \qquad \varepsilon_u\colon \mathcal{R}_!(u) \circ \mathcal{R}^*(u) &\Longrightarrow \mathrm{Id}_G \\ \zeta &\longmapsto [\mathrm{id}, u(\zeta)] & [\xi',\xi] &\longmapsto \xi'\xi \end{aligned}$$

providing the unit and counit, respectively.

Proof. It is straightforward to verify that these are well-defined maps satisfying the zig-zag equations of an adjunction. For the latter, at each object $(g,h) \in G^{\mathrm{op}} \times H$ we may follow an element $\xi \in \mathcal{R}^*(u)(g,h) = G(g,uh)$ through the composite

$$\begin{array}{cccc}
\mathcal{R}^*(u) & G(g,uh) & \ni & \xi \\
\Downarrow \simeq & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Id}_H\ \mathcal{R}^*(u) & H(h,h) \times G(g,uh) & & [\mathrm{id},\xi] \\
{\scriptstyle \eta\circ\mathrm{id}}\Downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{R}^*(u)\ \mathcal{R}_!(u)\ \mathcal{R}^*(u) & G(uh,uh) \times G(uh,uh) \times G(g,uh) & & [\mathrm{id}, u(\mathrm{id}), \xi] \\
{\scriptstyle \mathrm{id}\circ\varepsilon}\Downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{R}^*(u)\ \mathrm{Id}_G & G(uh,uh) \times G(g,uh) & & [\mathrm{id}, u(\mathrm{id}) \circ \xi] \\
\Downarrow \simeq & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{R}^*(u) & G(g,uh) & & \mathrm{id} \circ u(\mathrm{id}) \circ \xi = \xi
\end{array}$$

which is thus shown to be the identity map, as required. In the above display, the middle column shows to which sets belong the representatives of the coend elements displayed on the right-hand column, before quotienting. The left and right unitors in Biset are induced by composition of maps, like ε, with inverse given by insertion of an identity map.

The verification of the other zig-zag equation is similar. $\square$

5.10 Lemma. *For the adjunctions $\mathcal{R}_!(u) \dashv \mathcal{R}^*(u)$ of Lemma 5.9, the mate of every iso-comma square γ as in (5.5) is an invertible 2-cell in* Biset.

Proof. This is another direct computation, although rather more involved. Unfolding the construction of the mate $\mathcal{R}^*(\gamma)_!\colon \mathcal{R}_!(q)\circ\mathcal{R}^*(p) \Rightarrow \mathcal{R}^*(b)\circ\mathcal{R}_!(a)$, we obtain the following composite natural transformation on the left-hand side (where, as before, we omit the associativity constraints of Biset):

$$
\begin{array}{rcc}
\mathcal{R}_!(q)\,\mathcal{R}^*(p) & T(y,t)\times S(s,x) & [\tau,\sigma] \\
\Big\Downarrow \simeq & \downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}_!(q)\,\mathcal{R}^*(p)\,\mathrm{Id}_S & T(y,t)\times S(s,x)\times S(s,s) & [\tau,\sigma,\mathrm{id}] \\
{\scriptstyle \mathrm{id}\circ\mathrm{id}\circ\eta}\Big\Downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}_!(q)\,\mathcal{R}^*(p)\,\mathcal{R}^*(a)\,\mathcal{R}_!(a) & T(y,t)\times S(s,x)\times G(as,as)\times G(as,as) & [\tau,\sigma,\mathrm{id},\mathrm{id}] \\
{\scriptstyle \mathrm{id}\circ\mathrm{fun}_{\mathcal{R}^*}\circ\mathrm{id}}\Big\Downarrow \simeq & \downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}_!(q)\,\mathcal{R}^*(ap)\,\mathcal{R}_!(a) & T(y,t)\times G(as,ax)\times G(as,as) & [\tau,a(\sigma),\mathrm{id}] \\
{\scriptstyle \mathrm{id}\circ\gamma\circ\mathrm{id}}\Big\Downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}_!(q)\,\mathcal{R}^*(bq)\,\mathcal{R}_!(a) & T(y,t)\times G(as,bx)\times G(as,as) & [\tau,\gamma a(\sigma),\mathrm{id}] \\
{\scriptstyle \mathrm{id}\circ\mathrm{fun}^{-1}_{\mathcal{R}^*}\circ\mathrm{id}}\Big\Downarrow \simeq & \downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}_!(q)\,\mathcal{R}^*(q)\,\mathcal{R}^*(b)\,\mathcal{R}_!(a) & T(y,t)\times T(y,y)\times G(as,by)\times G(as,as) & [\tau,\mathrm{id},\gamma a(\sigma),\mathrm{id}] \\
{\scriptstyle \varepsilon\circ\mathrm{id}\circ\mathrm{id}}\Big\Downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\mathrm{Id}_T\,\mathcal{R}^*(b)\,\mathcal{R}_!(a) & T(y,t)\times G(as,by)\times G(as,as) & [\tau,\gamma a(\sigma),\mathrm{id}] \\
\Big\Downarrow \simeq & \downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}^*(b)\,\mathcal{R}_!(a) & G(as,bt)\times G(as,as) & [b(\tau)\gamma a(\sigma),\mathrm{id}]
\end{array}
$$

At each object $(s,t)\in S^{\mathrm{op}}\times T$, we can follow the trajectory of an arbitrary element $[\tau,\sigma]_i \in (\mathcal{R}_!(q)\circ\mathcal{R}^*(p))(s,t)$, as indicated on the right-hand side. Here $(\tau,\sigma)\in T(qi,t)\times S(s,pi)$ for some object $i=(x,y,\gamma\colon a(x)\to b(y))\in(a/b)$, so that $p(i)=x$ and $q(i)=y$. The structural isomorphism $\mathrm{fun}_{\mathcal{R}^*}$ and its inverse are as in the proof of Lemma 5.8 (again, given by composition and insertion of an identity).

It remains to see that the resulting map above

$$
\begin{aligned}
\int^{i\in(a/b)} T(qi,t)\times S(s,pi) &\longrightarrow \int^{g\in G} G(g,bt)\times G(as,g) \\
[\tau,\sigma]_i &\longmapsto [\,b(\tau)\gamma a(\sigma)\,,\,\mathrm{id}\,]_{as}
\end{aligned}
$$

is a bijection.

It is injective, because if $[\tau', \sigma']_{i'}$ (for some $i' = (x', y', \gamma')$) is such that we have $[b(\tau')\gamma' a(\sigma'), \mathrm{id}] = [b(\tau)\gamma a(\sigma), \mathrm{id}]$ in the target coend, then (using that G is a groupoid) there exists a $\varphi\colon as \to as'$ in G such that $b(\tau')\gamma' a(\sigma') \circ \varphi = b(\tau)\gamma a(\sigma)$ and $\varphi \circ \mathrm{id}_{as} = \mathrm{id}_{as}$, and therefore

$$b(\tau')\gamma' a(\sigma') = b(\tau)\gamma a(\sigma)\,.$$

The latter condition states precisely that the pair $(\tau'^{-1}\tau, \sigma'\sigma^{-1}) \in T(y, y') \times S(x, x')$ defines a map $i \to i'$ in a/b, showing that $[\tau, \sigma]_i = [\tau', \sigma']_{i'}$ in the source coend.

To see the map is surjective, let $(\zeta, \xi) \in G(g, bt) \times G(as, g)$ represent an arbitrary element of the target coend. Then $i := (s, t, \zeta\xi\colon as \to bt)$ is an object of a/b and $[\mathrm{id}, \mathrm{id}]_i$ is an element of the source coend whose image is $[\zeta\xi, \mathrm{id}]_{as} = [\zeta, \xi]_g$. □

5.11 Lemma. *Consider the pseudo-functors $\mathcal{R}_!$ and $\mathcal{R}^*$ of Lemma 5.8. Their 2-cell images, as well as their structural isomorphisms, are mates under the adjunctions of Lemma 5.9 (after inverting).*

Proof. Once again, a direct inspection of all definitions yields the result. Explicitly, for every 2-cell $\alpha\colon u \Rightarrow v\colon H \to G$ in gpd we must verify that the left-hand side composite natural transformation $\mathcal{R}^*(u) \Rightarrow \mathcal{R}^*(v)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}^*(u) \arrow[d, Rightarrow, "\simeq"'] & G(g, uh) \arrow[d] & \xi \arrow[d, mapsto] \\
\mathrm{Id}_H\ \mathcal{R}^*(u) \arrow[d, Rightarrow, "\eta \circ \mathrm{id}"'] & H(h, h) \times G(g, uh) \arrow[d] & {[\mathrm{id}, \xi]} \arrow[d, mapsto] \\
\mathcal{R}^*(v)\ \mathcal{R}_!(v)\ \mathcal{R}^*(u) \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{id} \circ \mathcal{R}_!(\alpha) \circ \mathrm{id}"'] & G(vh, vh) \times G(vh, vh) \times G(g, uh) \arrow[d, "- \circ \alpha_h"'] & {[\mathrm{id}, \mathrm{id}, \xi]} \arrow[d, mapsto] \\
\mathcal{R}^*(v)\ \mathcal{R}_!(u)\ \mathcal{R}^*(u) \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{id} \circ \varepsilon"'] & G(vh, vh) \times G(uh, vh) \times G(g, uh) \arrow[d] & {[\mathrm{id}, \alpha_h, \xi]} \arrow[d, mapsto] \\
\mathcal{R}^*(v)\ \mathrm{Id}_G \arrow[d, Rightarrow, "\simeq"'] & G(vh, vh) \times G(g, vh) \arrow[d] & {[\mathrm{id}, \alpha_h\xi]} \arrow[d, mapsto] \\
\mathcal{R}^*(v) & G(g, vh) & \alpha_h\xi
\end{tikzcd}$$

is equal to $\mathcal{R}^*(\alpha)$. For every object $(g,h) \in G^{\mathrm{op}} \times H$, we can follow the fate of (a representative of) an element $\xi \in G(g, uh)$ as on the right-hand side, and the resulting map $\xi \mapsto \alpha_h \xi$ is indeed the component of $\mathcal{F}^*(\alpha)$ at (g,h), as defined.

Moreover, for any composable $K \xrightarrow{v} H \xrightarrow{u} G$ we must verify that the following composite $\mathcal{R}^*(uv) \Rightarrow \mathcal{R}^*(v) \circ \mathcal{R}^*(u)$ is the inverse $\mathrm{fun}_{\mathcal{R}^*}^{-1}$ of the structure isomorphism of the pseudo-functor $\mathcal{R}^*$:

$$
\begin{array}{cc}
\mathcal{R}^*(uv) & \xi \\
\simeq \Downarrow & \downarrow \\
\mathrm{Id}_K\ \mathcal{R}^*(uv) & [\mathrm{id}, \xi] \\
\eta \circ \mathrm{id} \Downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}^*(v)\ \mathcal{R}_!(v)\ \mathcal{R}^*(uv) & [\mathrm{id}, \mathrm{id}, \xi] \\
\simeq \Downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}^*(v)\ \mathrm{Id}_H\ \mathcal{R}_!(v)\ \mathcal{R}^*(uv) & [\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id}, \xi] \\
\mathrm{id} \circ \eta \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{id} \Downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}^*(v)\ \mathcal{R}^*(u)\ \mathcal{R}_!(u)\ \mathcal{R}_!(v)\ \mathcal{R}^*(uv) & [\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id}, \xi] \\
\mathrm{id} \circ \mathrm{id} \circ \mathrm{fun}_{\mathcal{R}_!} \circ \mathrm{id} \Downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}^*(v)\ \mathcal{R}^*(u)\ \mathcal{R}_!(uv)\ \mathcal{R}^*(uv) & [\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id} \circ \mathrm{id}, \xi] \\
\mathrm{id} \circ \varepsilon \Downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}^*(v)\ \mathcal{R}^*(u)\ \mathrm{Id}_G & [\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id} \circ \xi] \\
\simeq \Downarrow & \downarrow \\
\mathcal{R}^*(v)\ \mathcal{R}^*(u) & [\mathrm{id} \circ \mathrm{id}, \xi]
\end{array}
$$

At any $(g,k) \in G^{\mathrm{op}} \times K$, this amounts to inserting a number of identity maps and composing twice, as indicated in the right-hand colunn, and the resulting map $\xi \mapsto [\mathrm{id}, \xi]$ is indeed the inverse of $\mathrm{fun}_{\mathcal{R}_!}$, as we have seen.

A similar verification, amounting to the counit $\varepsilon \colon \mathcal{R}_!(\mathrm{Id}_G) \circ \mathcal{R}^*(\mathrm{Id}_G) \Rightarrow \mathrm{Id}_G$ and the left unitor in Biset agreeing, shows that the unitors of $\mathcal{R}_!$ and $\mathcal{R}^*$ are mates. $\square$

Proof of Theorem 1.1. Apply Theorem 5.4 to the bicategory of bisets, $\mathcal{B} :=$ Biset, the pseudo-functors $\mathcal{F}_! := \mathcal{R}_!$ and $\mathcal{F}^* := \mathcal{R}^*$ of Lemma 5.8, and the adjunctions of Lemma 5.9. The hypotheses (a), (b) and (c) of the theorem are satisfied by definition, by Lemma 5.10, and by Lemma 5.11 respectively.

It remains to prove the 'moreover' part. Let $U\colon H^{\mathrm{op}} \times G \to \mathrm{set}$ be any biset. Then we can construct a span $\mathcal{S}(U) = (H \overset{q}{\leftarrow} S(U) \overset{p}{\to} G)$ and an isomorphism $\mathcal{RS}(U) \simeq U$ of bisets, as follows (*cf. e.g.* [Bén00, § 6.4]). The groupoid $S(U)$ has object-set $\mathrm{Obj}\, S(U) = \coprod_{(h,g)\in H^{\mathrm{op}}\times G} U(h,g)$, and a morphism from $x \in U(h,g)$ to $x' \in U(h',g')$ is a pair $(\beta,\alpha) \in H(h,h') \times G(g,g')$ such that $U(\mathrm{id},\alpha)(x) = U(\beta,\mathrm{id})(x')$, with composition induced from H and G. The functors $q\colon S(U) \to H$ and $p\colon S(U) \to G$ map an object $x \in U(h,g) \subseteq \mathrm{Obj}\, S(U)$ to its 'source' h and 'target' g, respectively, and a morphism (β,α) to β and α. The component at $(h,g) \in H^{\mathrm{op}} \times G$ of the natural isomorphism $\mathcal{RS}(U) \overset{\sim}{\Rightarrow} U$ is the evaluation map

$$\big(\mathcal{R}_!(p) \otimes_{S(U)} \mathcal{R}^*(q)\big)(h,g) = \int^{x\in S(U)} G(px,g) \times H(h,qx) \overset{\sim}{\longrightarrow} U(h,g)$$

sending $[\alpha,\beta]_x \mapsto U(\beta,\alpha)(x)$, which is easily seen to be bijective and natural. $\square$

6. Application: biset functors vs global Mackey functors

In this section we derive Corollary 1.6 from our previous results. There is not much left for us to do, in fact, besides recalling a few more details and putting everything together. As before, fix a commutative ring $\Bbbk$ of coefficients.

6.1 Terminology. Let $\mathcal{B}$ be any bicategory. Its *1-truncation* or *classifying category* $\tau_1\mathcal{B}$ is the (ordinary) category with the same objects as $\mathcal{B}$ and with morphisms the isomorphism classes of 1-morphisms of $\mathcal{B}$. Any pseudo-functor $\mathcal{F}\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ induces a functor $\tau_1\mathcal{F}\colon \tau_1\mathcal{B} \to \tau_1\mathcal{B}'$ in the evident way, by sending a class $[f]$ to $[\mathcal{F}f]$.

6.2 Terminology. A category is *semi-additive* if it is enriched over commutative monoids (*i.e.* every Hom set is equipped with an associative unital sum operation for which composition is bilinear) and if it admits arbitrary finite direct sums (a.k.a. biproducts) $X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ of its objects, including a zero object (empty direct sum) 0. If $\mathcal{C}$ is any semi-additive category, we may construct a $\Bbbk$-linear additive category $\Bbbk\mathcal{C}$, its $\Bbbk$-*linearization*, with the same objects and with Hom $\Bbbk$-modules given by first group-completing the monoid and then extending scalars: $\Bbbk\mathcal{C}(X,Y) := \Bbbk \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\mathcal{C}(X,Y))$. There is an evident functor $\mathcal{C} \to \Bbbk\mathcal{C}$ which is initial among functors to $\Bbbk$-linear additive categories. See *e.g.* [BD20, App. A.6].

6.3 Example. Similarly to Span, one may consider $\mathcal{B} = \mathsf{Span}(G\text{-set})$, the bicategory of finite G-sets, spans of maps in G-set, composed by taking pullbacks, and morphisms of spans. Its 1-truncation $\tau_1\mathsf{Span}(G\text{-set})$ is a well-known semi-additive category, which already appeared as "$\mathrm{Sp}(G)$" in the proof of Lemma 4.6; the $\Bbbk$-linearization of the latter is the category $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}(G)$ of Recollection 4.1. Next, we apply the same constructions to spans and bisets of groupoids.

6.4 Lemma. *Consider the bicategories* Span *and* Biset *of Constructions 5.2 and 5.6. The disjoint sums of groupoids induce on their 1-truncations* $\tau_1\mathsf{Span}$ *and* $\tau_1\mathsf{Biset}$ *the structure of semi-additive categories (Terminology 6.2).*

Proof. The sum of any two (parallel) spans $H \overset{b}{\leftarrow} S \overset{a}{\to} G$ and $H \overset{b'}{\leftarrow} S' \overset{a'}{\to} G$ is given by the span $H \xleftarrow{(b,b')} S \sqcup S' \xrightarrow{(a,a')} G$, and the zero span by $H \leftarrow \emptyset \to G$. For bisets, the sum of $U, V \colon H^{\mathrm{op}} \times G \to \mathrm{set}$ is the object-wise coproduct $U \sqcup V$, and the zero biset is the constant functor $\emptyset \colon H^{\mathrm{op}} \times G \to \mathrm{set}$. The zero object is given in both cases by the empty groupoid, $0 = \emptyset$. The direct sum of two groupoids G_1, G_2 is given in Span and Biset, respectively (and with notations as in Section 5) by

$$G_1 \underset{(i_1)^*}{\overset{(i_1)_!}{\rightleftarrows}} G_1 \sqcup G_2 \underset{(i_2)^*}{\overset{(i_2)_!}{\leftrightarrows}} G_2 \qquad \text{and} \qquad G_1 \underset{\mathcal{R}^*(i_1)}{\overset{\mathcal{R}_!(i_1)}{\rightleftarrows}} G_1 \sqcup G_2 \underset{\mathcal{R}^*(i_2)}{\overset{\mathcal{R}_!(i_2)}{\leftrightarrows}} G_2 \tag{6.5}$$

i.e. by the canonical covariant and contravariant images of the two inclusions $i_1 \colon G_1 \to G_1 \sqcup G_2 \leftarrow G_2 : i_2$ in gpd. All verifications are straightforward.

(In fact, even before 1-truncating, (6.5) are direct sums in the bicategorical sense; and the sum of 1-morphisms is actually a categorical direct sum, so that the Hom categories are themselves semi-additive; *cf.* [BD20, App. A.7] and [Del19, Prop. 3.15].) See [Hug19, § 4.3] for more details. □

6.6 Notation. As in the introduction, we write

$$\mathrm{Sp}_{\Bbbk} := \Bbbk\tau_1(\mathsf{Span}) \quad \text{and} \quad \mathrm{Bis}_{\Bbbk} := \Bbbk\tau_1(\mathsf{Biset})$$

for the $\Bbbk$-linearization (Terminology 6.2) of the 1-truncation (Terminology 6.1) of the bicategories of spans and bisets. The former makes sense by Lemma 6.4.

Then
$$\mathcal{M} := \operatorname{Rep}\mathrm{Sp}_{\Bbbk} \quad \text{and} \quad \mathcal{F} := \operatorname{Rep}\mathrm{Bis}_{\Bbbk}$$
are, respectively, the category of *global Mackey functors* and of *biset functors*.

6.7 Lemma. *Both* $\mathrm{Sp}_{\Bbbk}$ *and* $\mathrm{Bis}_{\Bbbk}$ *are rigid* $\Bbbk$*-linear tensor categories, with tensor products of objects and maps induced by the Cartesian product of groupoids. In particular, we may equip* $\mathcal{M}$ *and* $\mathcal{F}$ *with the associated Day convolutions.*

Proof. The tensor product of two spans $H \overset{b}{\leftarrow} S \overset{a}{\rightarrow} G$ and $H' \overset{b'}{\leftarrow} S' \overset{a'}{\rightarrow} G'$ is
$$H \times H' \xleftarrow{b\times b'} S \times S' \xrightarrow{a\times a'} G \times G'$$
and the tensor product of two bisets $U\colon H^{\mathrm{op}} \times G \to \mathsf{set}$ and $U'\colon H'^{\mathrm{op}} \times G' \to \mathsf{set}$ is
$$(H \times H')^{\mathrm{op}} \times (G \times G') \simeq (H^{\mathrm{op}} \times G) \times (H'^{\mathrm{op}} \times G') \xrightarrow{U\times U'} \mathsf{set}\ .$$
In both cases the unit object is the trivial group 1. The rest is similarly straightforward. Again, consult [Hug19, § 4.3] for details if necessary.[1] □

6.8 Remark. The usual definition of the category of biset functors does not mention groupoids, only groups; *cf.* [Bou10]. More precisely, *loc. cit.* defines $\mathcal{F} := \operatorname{Rep}\mathrm{Bis}_{\Bbbk}(\mathsf{grp})$, where $\mathrm{Bis}_{\Bbbk}(\mathsf{grp}) \subset \mathrm{Bis}_{\Bbbk}$ is the full subcategory whose objects are groups. However, the latter inclusion functor is easily seen to be the *additive hull* of $\mathrm{Bis}_{\Bbbk}(\mathsf{grp})$ and therefore it induces an equivalence $\operatorname{Rep}\mathrm{Bis}_{\Bbbk} \overset{\sim}{\to} \operatorname{Rep}\mathrm{Bis}_{\Bbbk}(\mathsf{grp})$ of functor categories, whence the agreement of the two definitions of biset functors (*cf.* [Del19, Rem. 6.5]). The Day convolution of biset functors and of global Mackey functors are studied, respectively, in [Bou10, Ch. 8] and [Nak16a].

6.9 Lemma. *The pseudo-functor* $\mathcal{R}\colon \mathsf{Span} \to \mathsf{Biset}$ *of Theorem 1.1 induces an essentially surjective, full* $\Bbbk$*-linear tensor functor* $\Bbbk\tau_1\mathcal{R}\colon \mathrm{Sp}_{\Bbbk} \to \mathrm{Bis}_{\Bbbk}$.

[1] And again, both rigid tensor structures should be mere shadows of rigid tensor structures on the *bicategories* Span and Biset, in a suitable sense, but we have not pursued this.

Proof. It is immediate from (6.5) that the induced functor $\tau_1\mathcal{R}\colon \tau_1\mathsf{Span} \to \tau_1\mathsf{Biset}$ is additive, *i.e.* preserves direct sums of objects and therefore also the addition of maps (*cf.* [BD20, Rem. A.6.7] if necessary). In particular, it extends uniquely to a $\Bbbk$-linear functor $\Bbbk\tau_1\mathcal{R}$ between the $\Bbbk$-linearizations. This is obviously surjective on objects, and it is full by the 'moreover' part of Theorem 1.1.

It remains to see that $\Bbbk\tau_1\mathcal{R}$ is symmetric monoidal. Indeed it is strictly so through the identity maps $\mathbb{1} = 1 = \mathcal{R}(\mathbb{1})$ and $\mathcal{R}(G)\otimes\mathcal{R}(G') = G\times G' = \mathcal{R}(G\otimes G')$, because there are easily-guessed isomorphisms of bisets (*cf.* [Hug19, Lem. 4.3.11])

$$\mathcal{R}(a_!b^*)\otimes\mathcal{R}(a'_!b'^*) \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{R}(a_!b^*\otimes a'_!b'^*)$$

showing that the functors $\otimes\circ(\Bbbk\tau_1\mathcal{R}\times\Bbbk\tau_1\mathcal{R})$ and $\Bbbk\tau_1\mathcal{R}\circ\otimes$ are equal. $\square$

Proof of Corollary 1.6. By Lemmas 6.7 and 6.9, the categories $\mathcal{C} := \mathrm{Sp}_\Bbbk$ and $\mathcal{D} := \mathrm{Bis}_\Bbbk$ and the functor $F := \Bbbk\tau_1\mathcal{R}\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ satisfy all the hypotheses of Theorem 1.4. This proves most of the claims of the corollary.

It remains to show that a global Mackey functor is (isomorphic to the restriction of) a biset functor if and only if it satisfies the deflative relation, $\mathrm{def}^G_{G/N}\circ\mathrm{inf}^G_{G/N} = \mathrm{id}_{M(G/N)}$, whenever N is a normal subgroup of a group G. Here, for the sake of familiarity, we have used the classical notations $\mathrm{def}^G_{G/N} = M([G = G \to G/N])$ and $\mathrm{inf}^G_{G/N} = M([G/N \leftarrow G = G])$ for the *deflation* and *inflation* maps of a functor $M\in\mathcal{M}$, where $G\to G/N$ is the quotient map.

Equivalently, we must show that the kernel of the realization functor $F = \Bbbk\tau_1\mathcal{R}$ is generated, as a $\Bbbk$-linear categorical ideal of $\mathrm{Sp}_\Bbbk$, by the corresponding differences of spans, *i.e.* (after computing the obvious iso-comma square up to equivalence) by

$$[G/N \leftarrow G \to G/N] - [G/N = G/N = G/N] \quad \text{for all } N \trianglelefteq G\,.$$

While it is easy to see that these elements belong to the kernel (just compute $\mathcal{R}([G/N\leftarrow G\to G/N]) \simeq G/N(-,-)$), it is *a priori* not obvious to show that they generate it. This can be achieved by comparing two explicit presentations of $\mathrm{Sp}_\Bbbk$ and $\mathrm{Bis}_\Bbbk$, as done in the proof of [Del19, Thm. 6.9], to which we refer. Alternatively, one may consult the – possibly less transparent but ultimately equivalent – calculations in [Gan13, App. A] or [Nak16b, § 6]. $\square$

6.10 Remark. Not every global Mackey functor satisfies the deflative relations, for instance the tensor unit $\mathbb{1} = \mathrm{Sp}_{\Bbbk}(1, -)$ does not; see [Nak16b, § 5.4]. As deflative Mackey functors form a tensor ideal, if the unit *were* deflative so would everyone.

References

[BD20] Paul Balmer and Ivo Dell'Ambrogio. *Mackey 2-functors and Mackey 2-motives*. EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2020.

[BDS15] Paul Balmer, Ivo Dell'Ambrogio, and Beren Sanders. Restriction to finite-index subgroups as étale extensions in topology, KK-theory and geometry. *Algebr. Geom. Topol.*, 15(5):3025–3047, 2015.

[Bén00] Jean Bénabou. Distributors at work. Notes from a course held by prof. Bénabou at TU Darmstadt, taken by T. Streicher, 24 pages, 2000.

[Bor94] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1*, volume 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1994. Basic category theory.

[Bou97] Serge Bouc. *Green functors and G-sets*, volume 1671 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Bou10] Serge Bouc. *Biset functors for finite groups*, volume 1990 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[CCZ15] Jianmin Chen, Xiao-Wu Chen, and Zhenqiang Zhou. Monadicity theorem and weighted projective lines of tubular type. *Int. Math. Res. Not.*, 2015(24):13324–13359, 2015.

[Day70] Brian Day. On closed categories of functors. In *Reports of the Midwest Category Seminar, IV*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 137, pages 1–38. Springer, Berlin, 1970.

[Del19] Ivo Dell'Ambrogio. Axiomatic representation theory of finite groups by way of groupoids. Preprint: arXiv:1910.03369, 44 pages, 2019.

[Gan13] Nora Ganter. Global Mackey functors with operations and n-special lambda rings. Preprint 2013. https://arxiv.org/abs/1301.4616v1

[Hof12] Alexander E Hoffnung. The Hecke bicategory. *Axioms*, 1:No. 3, 291–323, 2012. https://doi.org/10.3390/axioms1030291.

[Hug19] James Huglo. PhD thesis, Université de Lille 1. 2019. Available at https://math.univ-lille1.fr/~dellambr/TheseVersionFinaleHUGLO.pdf

[Kel05] G. M. Kelly. Basic concepts of enriched category theory. *Repr. Theory Appl. Categ.*, (10):vi+137, 2005. Reprint of the 1982 original [Cambridge Univ. Press].

[Lin76] Harald Lindner. A remark on Mackey-functors. *Manuscripta Math.*, 18(3):273–278, 1976.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[Nak16a] Hiroyuki Nakaoka. Biset functors as module Mackey functors and its relation to derivators. *Comm. Algebra*, 44(12):5105–5148, 2016.

[Nak16b] Hiroyuki Nakaoka. A Mackey-functor theoretic interpretation of biset functors. *Adv. Math.*, 289:603–684, 2016.

[PS07] Elango Panchadcharam and Ross Street. Mackey functors on compact closed categories. *J. Homotopy Relat. Struct.*, 2(2):261–293, 2007.

[Str80] Ross Street. Fibrations in bicategories. *Cahiers Topologie Géom. Différentielle*, 21(2):111–160, 1980.

[TW95] Jacques Thévenaz and Peter Webb. The structure of Mackey functors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(6):1865–1961, 1995.

[Web00] Peter Webb. A guide to Mackey functors. In *Handbook of algebra, Vol. 2*, pages 805–836. North-Holland, Amsterdam, 2000.

[Yos83] Tomoyuki Yoshida. On G-functors. II. Hecke operators and G-functors. *J. Math. Soc. Japan*, 35(1):179–190, 1983.

Univ. Lille, CNRS
UMR 8524 - Laboratoire Paul Painlevé
F-59000 Lille
France
ivo.dell-ambrogio@univ-lille.fr
james.huglo@univ-lille.fr

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET
GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
CATEGORIQUES

VOLUME LXII-1 (2021)

CHRISTIAN LAIR (1945-2020) BIBLIOGRAPHIE

Andrée EHRESMANN et René GUITART

Résumé. Christian Lair fut un membre actif de l'École Ehresmann en théorie des catégories. Son travail mathématique fut une véritable "défense et illustration" de la théorie des esquisses d'Ehresmann. Nous indiquons quelques notions qu'il a introduites, et quelques uns de ses principaux résultats, au regard d'une bibliographie que nous espérons la plus complète possible. C'est une invitation à lire Lair.

Abstract. Christian Lair was an active member of the Ehresmann's school in the theory of categories. His mathematical work was a true "defence and illustration" of Ehresmann's theory of sketches. We indicate some of the notions he introduced, and some of his main results, in the light of a bibliography which we hope will be as complete as possible. It is an invitation to read Lair.

Keywords. esquisse, type, produits tensoriels, diagramme localement libre, catégories esquissables, modelables, accessibles, qualifiables, trames, patchwork, Diagrammes, spécifications.

Mathematics Subject Classification (2010). 18CXX, 18C30, 18C35.

1. Études et thèses

Christian Lair est né le 31 juillet 1945 à Wissignicourt (Aisne). Après des études secondaires au lycée Paul Langevin de Suresnes, il est rentré en classes de Math.Sup. et Math.Spé. au Lycée Saint-Louis de 1963 à

FIGURE 1: Christian Lair, à Jussieu, dans la salle des profs du DAEU, en 2007

1965. Il a été étudiant à la faculté des sciences à Jussieu (université de Paris) en 1965, où, dès 1969 il est devenu l'un des assistants de Charles Ehresmann.
En 1970 il a soutenu à Paris une thèse de 3ème cycle intitulée *Construction d'esquisses. Transformations naturelles généralisées* [1].
Il a obtenu le doctorat d'État es-sciences mathmatiques en 1977, le 30 juin, à l'Université de Picardie (aujourd'hui Université de Picardie Jules Verne), avec une thèse intitulée *L'esquissabilité des structures algébriques*, constituée d'une série d'articles, ici en références de [5] à [18], formant un texte de 460 pages. Le jury de cette thèse était composé de : Andrée Ehresmann, Charles Ehresmann, Jean Bénabou, Luc Boasson, Jacques Dixmier, Gregory Max Kelly.
Il a fait toute sa carrière, d'enseignant et de chercheur, à l'université Paris 7 Denis Diderot, où, comme conférencier ou comme organisateur, il a participé à la tenue de nombreux séminaires. Il a pris sa retraite en 2010. Il est décédé le 25 septembre 2020 à Nanterre.

2. Relations et influences

Christian Lair a tenu dans la communauté catégoricienne en France un rôle important, comme le montre immédiatement les relations et influences que l'on peut relever à travers sa bibliographie donnée ici de [1] à [66]. Il a environ 63 publications ou pré-publications, dont 23 articles en collaborations avec les mathématiciens suivants : François Foltz [11], [12], [18], [23], René Guitart [24], [25], [27], [28], Max Kelly [23], Laurent Coppey [32], [33], [39], [43], Claude Henry [60], [63], Dominique Duval [48], [40], [50]-[53], [46]-[48], [56]-[58], [61], Jean-Claude Reynaud [57], [61], Catherine Oriat [57], Hélène Kirchner [58], Jean-Guillaume Dumas [61].

Son influence s'est développée à travers les directions de travaux qu'il a entreprises. Il a été directeur de 5 thèses, celles de Claude Henry (Sur quelques problèmes de plongement en algèbre, 1983), François Mouen (Sur la caractérisation sémantique des catégories de structures, 1984), André Silga (Sur les produits tensoriels extérieurs de structures algébriques, 1986), Monique Mathieu (Extensions de théories de Lawvere,1991), Florence Cury (La suffisante complétude connexe, 1997, thèse soutenue à titre posthume). On peut trouver ces thèses sur le site NUMDAM dans la revue *Diagrammes*, dont Christian Lair était l'un des co-fondateurs et co-directeurs.

Christian Lair a aussi collaboré à 4 autres thèses :

Il a travaillé à propos de sa thèse de 3ème cycle avec Florence Cury (Graphes multiplicatifs enrichis, 1976). Il a en 1987 dirigé le mémoire de DEA de Pierre Ageron et Christian Even, puis a assuré la direction effective de la thèse d'Ageron (Structure des logiques et logique des structures. Logiques, catégorie, esquisses,1991), dont le directeur officiel était Jean-Yves Girard. Après la soutenance, Lair et Ageron ont poursuivi pendant plusieurs années une collaboration qui a résulté en une série d'articles rédigés et signés soit par l'un, soit par l'autre, dont plusieurs dans la revue *Diagrammes*.

Plus récemment, il a aussi collaboré pour leurs thèses, et certainement orienté celles-ci, avec Jean-Pierre Laffineur (Esquisses et difféologies, 2018) et avec Alain Molinier (Théories du premier ordre vs esquisses d'Ehresmann, 2019).

Quand on regarde l'ensemble des travaux ci-dessus évoqués, on constate qu'ils portent tous, comme déjà les travaux de Christian au moment de ses thèses en 1970 et en 1977, sur la théorie des esquisses, son développement, ses applications.

Nous allons en évoquer la nature maintenant, mais aussi nous renvoyons aux conférences que Christian a enregistrées [65] [66]. On y appréciera la clarté de l'exposition. On devra aussi se reporter en complément immédiat aux thèses dont il s'est occupé — indiquées ci-dessus.

3. La problématique des esquisses

Au départ il y a la notion d'*esquisse* introduite par Ehresmann, à savoir un $\sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie (ou un graphe multiplicatif) munie de la donnée d'une petite famille $\mathcal{P}$ de petits cônes projectifs p, et d'une petite famille $\mathcal{I}$ de petits cônes inductifs i. On appelle réalisation ou modèle de σ un foncteur $M : \mathcal{C} \to \mathcal{K}$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}$, Mp soit un cône limite projective, et, pour tout $i \in \mathcal{I}$, Mi soit un cône limite inductive. Les morphismes entre modèles M et N sont les transformations naturelles $t : M \Rightarrow N$. On désigne par Mod$(\sigma) = \mathcal{M}$ la catégorie de ces modèles quand $\mathcal{K} = \mathrm{Ens}$, catégorie qui est dite *esquissée* par σ. Si de plus on dispose d'une réalisation d'une esquisse σ vers une esquisse σ', soit un foncteur $R : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ envoyant les éléments de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}'$, et ceux de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}'$, le foncteur

$$\mathrm{Mod}(R) : \mathrm{Mod}(\sigma') \to \mathrm{Mod}(\sigma) : M' \to M' \circ R$$

est dit *esquissé* par R.

Alors pour un "amateur d'esquisses" plusieurs problématiques interagissent, suivant deux directions.

La problématique fondamentale ou "méthode" est de chercher systématiquement à rapporter les propriétés syntaxiques de σ ou de R, aux propriétés sémantiques de $\mathrm{Mod}(\sigma)$ ou de $\mathrm{Mod}(R)$, er réciproquement.

Pour ce faire il faudra déployer la théorie des esquisses pour elle-même, avec pour clé la question des existences de limites et de colimites, et des propriétés de commutations de ces limites entre elles ; et, partant, des théorèmes de complétions ou d'existence de structures libres.

Nous déclinerons ces deux directions en quelques problèmes, et sans tenir compte ici des travaux sur ces questions d'autres chercheurs, nous pointons dans la bibliographie de Christian Lair quelques articles y répondant.

1. Bien entendu, si une catégorie $\mathcal{M}$ est esquissable, elle peut l'être de plusieurs façons, et nous avons un problème à la Morita : étant données deux esquisses σ et σ', trouver des conditions syntaxiques suffisantes pour que $\mathrm{Mod}(\sigma) \simeq \mathrm{Mod}(\sigma')$. En particulier, étant donnée σ esquissant $\mathcal{M}$, trouver σ' esquissant aussi $\mathcal{M}$, mais meilleure, par exemple minimale, ou comportant des symétries dans $\mathcal{M}$: [7], [13], [14], [15].
2. Esquisser des "constructeurs syntaxiques" permettant par extension d'obtenir des constructeurs dans $\mathcal{M}$, par exemple des produits tensoriels : [11], [12], [18], où les produits tensoriels sont "esquissés", et encore : [23].
3. Modifier une esquisse pour assouplir ou démultiplier les spécifications des objets, qui sont alors changées, ce qui donne lieu à une nouvelle

catégorie de modèles : [6], [16]. Également, notamment dans l'étude des structures non-algébriques, modifier les notions de morphismes sans pour autant changer les objets, autrement dit il faut pouvoir esquisser indépendamment les objets et les esquisses : [25].

4. Pour un foncteur esquissé $U = \mathrm{Mod}(R) : \mathrm{Mod}(\sigma') \to \mathrm{Mod}(\sigma)$ déterminer si ce foncteur admet un adjoint L, un co-adjoint R : [19], s'il est triplable (monadique) : [20], [33].
5. Étant donné un foncteur esquissé U ayant un adjoint L, et M un objet de $\mathrm{Mod}(\sigma)$, déterminer des conditions syntaxiques pour que le morphisme universel $\eta_M : M \to UL(M)$ soit un monomorphisme (problème dit de plongement) : [21], [22].
6. Construire un substitut à l'adjoint qu'un foncteur esquissé n'a pas en général (construction dite des diagrammes localement libres ou DLL) : [24], [27].
7. Préciser, par rapport aux descriptions logiques usuelles par formules du 1er ordre, quels types de théories sont esquissables : [28].
8. Caractériser complètement d'un point de vue sémantique les catégories esquissables (notion de catégorie modelable ou accessible) : [36].
9. Généraliser les esquisses : [38], [41], [42].
10. Pour les différentes catégories esquissables, c'est-à-dire accessibles d'après [36], préciser la correspondance entre propriétés de l'esquisse et propriétés de la catégorie des modèles : [44] à [47].
11. Donner des principes de combinaisons de catégories esquissables : [60], [63].
12. Expliquer l'utilité des esquisses pour la spécification de données en théorie de la programmation : [48], [50] à [53], [56] à [58], [61].

Références

[1] Constructions d'esquisses. Transformations naturelles généralisées (Thèse de 3ème cycle), *Esquisses Math.* 2, Paris, 1970.

[2] Foncteurs structurés compatiblement engendrant et à adjoints compatibles, C.R.A.S., 271, Paris (juil. 1970), 122-125.

[3] Transformations H^*-naturelles et H^*-quintettes, C.R.A.S., 271, Paris (juil.1970), 213-216.

[4] Commutations des limites généralisées, C.R.A.S., 271, Paris (août 1970), 301-304.

[5] Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une catégorie soit fortement ou très fortement spécifiable, C.R.A.S., 273, Paris (oct. 1971), 596-598.

[6] Structures n-uples de Hurewicz, C.R.A.S., 273, Paris (oct. 1971), 700-703.

[7] Idées et maquettes de structures algébriques, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, XII-1 (1971), 29-55.

[8] Foncteurs d'omissions de structures algébriques, C.R.A.S., 273, Paris (sept. 1971), 487-490.

[9] Foncteurs d'omissions de structures algébriques, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, XII-2 (1971), 147-186.

[10] Morphismes et structures algébriques, *Categories and commutative algebra*, *CIME Summer Schools* 58, Varenna, Italy, 1971.

[11] (avec F. Foltz) Fermeture standard des catégories algébriques, C.R.A.S., 276, Paris (fev. 1973), 515-518.

[12] (avec F. Foltz) Fermeture standard des catégories algébriques, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, XIII-3 (1972), 275-307.

[13] Structures algébriques duales, involutives et commutatives, C.R.A.S., 276, Paris (juin 1973), 1647-1650.

[14] Dualité pour les structures algébriques esquissées, in *Colloque sur l'algèbre des catégories. Amiens - 1973*, in *Cahiers Top. Géo. Diff.*, 14-2 (1973), 153-223, 192-193.

[15] Dualité pour les structures algébriques esquissées, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, XV-4 (1973), 353-376.

[16] Algorithmes de n-arisation pour les structures algébriques esquissées, C.R.A.S., 278, Paris (juin 1974), 279-283.

[17] Étude générale de la Catégorie des Esquisses, *Esquisses Math.* 23, Paris, 1975.

[18] (avec F. Foltz) Fermeture standard des catégories algébriques II, *Cahiers Top. Géo. Diff.*, XVIII-1 (1977), 3-60.

[19] Conditions syntaxiques d'existence de co-adjoinrs aux foncteurs algébriques, *Diagrammes*, tome 1 (1979), 18 p.

[20] Condition syntaxique de triplabilité d'un foncteur algébrique esquissé *Diagrammes*, tome 1 (1979), 16 p.

[21] Conditions syntaxiques de plongement. I. Prolongements de foncteurs et extensions de Kan, *Diagrammes*, tome 2 (1979), 12 p.

[22] Conditions syntaxiques de plongement. II. Prolongements de faisceaux et faisceaux associés, *Diagrammes*, tome 3 (1980), 29 p.

[23] (avec F. Foltz et G. M. Kelly) Algebraic categories with few monoïdal biclosed structures or none, *Journal of Pure and Applied Algebra* 17 (1980) n° 2, 171-177.

[24] (avec R. Guitart) Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, *Diagrammes*, tome 4 (1980), 17 p.

[25] (avec R. Guitart) Critères de rigidification des morphismes souples entre structures internes, *Diagrammes*, tome 5 (1981), 17 p.

[26] Catégories modelables et catégories esquissables, *Diagrammes*, tome 6 (1981), 20 p.

[27] (avec R. Guitart) Existence de diagrammes localement libres, *Diagrammes*, tome 6 (1981), 13 p.

[28] (avec R. Guitart) Limites et co-limites pour représenter les formules, *Diagrammes*, tome 7 (1982), 24 p.

[29] Diagrammes localement libres : extensions de corps et théorie de Galois, *Diagrammes*, tome 10 (1983), 17 p.

[30] Sesqui-monades et monades locales, *Diagrammes*, tome 9 (1983), 32 p.

[31] Diagrammes localement libres : extensions de corps et théorie de Galois, *Diagrammes*, tome 10 (1983), 17 p.

[32] (avec L. Coppey) Leçons de théorie des esquisses [partie I : Leçons 1-2-3], *Diagrammes*, tome 12 (1984), 51 p.

[33] (avec L. Coppey) Algébricité, monadicité, esquissabilité et non-algébricité, *Diagrammes*, tome 13 (1985), 1-112.

[34] À propos de "Toposes, Triples and Theories" de Messieurs M. Barr et C.Wells, *Diagrammes*, tome 15 (1986), 20 p.

[35] *Théories, triples et topos*, Cours de DEA, 1986-1987, fasc.I : Généralités, fasc. 2 : Catégories axiomatisantes. Université Paris 7.

[36] Catégories qualifiables et catégories esquissables, *Diagrammes*, tome 17 (1987), 1-153.

[37] Diagrammes structurés de modèles, *Diagrammes*, tome 18 (1987), 30 p.

[38] Trames et sémantiques catégoriques des systèmes de trames, *Diagrammes*, tome 18 (1987), 47 p.

[39] (avec L. Coppey) Leçons de théorie des esquisses [partie II : Leçons 4-5-6], *Diagrammes*, tome 19 (1988), 68 p.

[40] Lax-colimites structurées, *Diagrammes*, tome 20 (1988), 90 p.

[41] Éléments de théorie des patchworks (I), *Diagrammes*, tome 29 (1993), 1-29.

[42] Des graphes aux patchworks via les esquisses et les trames, *Catégories, algèbres, esquisses et néo-esquisses. Actes des journées de Caen*, 27-30 sept. 1994, 5-10.

[43] (avec L. Coppey) À la mémoire de Florence Cury (1952-95), *Cahiers Top. Géo. Diff. Cat.*, 36-4 (1995), 371-381.

[44] Sur les genres d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides), *Diagrammes*, tome 35 (1996), 53-90.

[45] Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les produits de deux, *Diagrammes*, tome 35 (1996), 25-52.

[46] Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant un objet terminal, *Diagrammes*, tome 35 (1996), 2-23.

[47] Sur le profil d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les noyaux, *Diagrammes*, tome 38 (1997), 19-78.

[48] (avec D. Duval) Toward Soft Typing in Computer Algebra. Rapport de recherches 1998-07, Laco, Univ. Limoges, 53 p.

[49] Systèmes tensoriels et systèmes enrichis, *Diagrammes*, tome 43-44 (2000), 3-48.

[50] (avec D. Duval) Mosaics for Specifications with Implicit State. Rapport de recherches 2000-02, Laco, Univ. Limoges, 17 p.

[51] (avec D. Duval) Esquisses et spécifications. Guide de l'utilisateur. Rapport de recherches 2000-03, Laco, Univ. Limoges, 61 p. Rapport de recherches 2000-04, Laco, Univ. Limoges, 60 p.

[52] (avec D. Duval) Esquisses et spécifications. Manuel de référence. Rapport de recherches 1999-01, Laco, Univ. Limoges, 68 p. 2000-05, 60 p., 2000-06, 66p., 2000-07, 66 p.

[53] (avec D. Duval) Esquisses et specifications. Manuel de référence. Quatrième partie Laboratoire IMAG-LMC (2001), 69 p.

[54] Éléments de théorie des esquisses. Section 1 : graphes à composition, *Diagrammes*, tome 45-46 (2001), 3-33.

[55] Éléments de théorie des esquisses. Section 2 : systèmes tensoriels et systèmes enrichis de graphes à composition, *Diagrammes*, tome 47-48 (2002), 3-34.

[56] (avec D. Duval) Diagrammatic Specifications, Rapport de recherche, IMAG-LMC, n° 1043 (2002).

[57] (avec D. Duval, C.Oriat, J.-C. Reynaud) A zooming process for specifications with an application to exceptions, Rapport de recherche, IMAG-LMC, n° RR-1055-I (2003).

[58] (avec D. Duval, H. Kirchner) Subtypes and subsorts in overloaded specifications, Rapport de recherche, IMAG-LMC, n° RR-1058-I (2003).

[59] Éléments de théorie des esquisses. Section 3 : esquisses, *Diagrammes*, tome 49-50 (2003), 3-58.

[60] (avec C. Henry) Sur certaines sous-catégories non pleines des catégories de modèles. *Diagrammes*, tome 59-60 (2008), 26+36+33 pages.

[61] (avec D. Duval, J.-C. Reynaud, J.-G. Dumas) Logiques diagrammatiques et effets de bord, Groupe de travail équipe PPS, Univ. Paris 7 (2008).

[62] Éclatement de modèles d'esquisses et applications, *Diagrammes*, tome S 67-68 (2012), 239-248.

[63] (avec C. Henry) Sur l'esquissabilité des lax-limites et de certaines lax-colimites de catégories esquissables, *Diagrammes*, tome 71+72 (2014), pp. 1-50.

[64] Sur l'esquissabilité des lax-limites, etc. (suite), à paraître dans *Diagrammes*.

[65] [*vidéo en ligne*] Diagrammes localement libres, Séminaire CLE, parties des exposés des 19-12-2012 et 9-01-2013.
https ://sites.google.com/site/logiquecategorique/Contenus/c-lair

[66] [*vidéo en ligne*] La théorie des Esquisses de Charles Ehresmann et l'étude diagrammatique des structures mathématiques. Séminaire Math-Philo 2019 (ENS Ulm). https ://www.youtube.com/watch ?v=zfN4Enr1bLw

A. Ehresmann : LAMFA, Univ. Picardie Jules Verne, 80039 Amiens, France
ehres@u-picardie.fr.
R. Guitart : Univ. Paris Diderot, 75013 Paris, France.
rene.guitart@orange.fr

Backsets and Open Access

All the papers published in the "*Cahiers*" since their creation are freely downloadable on the site of NUMDAM for

Volumes I to VII and Volumes VIII to LII

and, from Volume L up to now on the 2 sites of the "*Cahiers*"

https://ehres.pagesperso-orange.fr/Cahiers/Ctgdc.htm

http://cahierstgdc.com/

Are also freely downloadable the *Supplements* published in 1980-83

Charles Ehresmann: Œuvres Complètes et Commentées

These Supplements (edited by Andrée Ehresmann) consist of 7 books collecting all the articles published by the mathematician Charles Ehresmann (1905-1979), who created the Cahiers in 1958. The articles are followed by long comments (in English) to update and complement them.

Part I: 1-2. *Topologie et Géométrie Différentielle*
Part II: 1. *Structures locales*
2. *Catégories ordonnées; Applications en Topologie*
Part III: 1. *Catégories structurées et Quotients*
2. *Catégories internes ett Fibrations*
Part IV: 1. *Esquisses et Complétions.*
2. *Esquisses et structures monoïdales fermées*

Mme Ehresmann, Faculté des Sciences, LAMFA.
33 rue Saint-Leu, F-80039 Amiens. France.
ehres@u-picardie.fr

Commission paritaire n° 58964
ISSN 1245-530X (IMPRIME)
1SSN 2681-2363 (EN LIGNE)

.