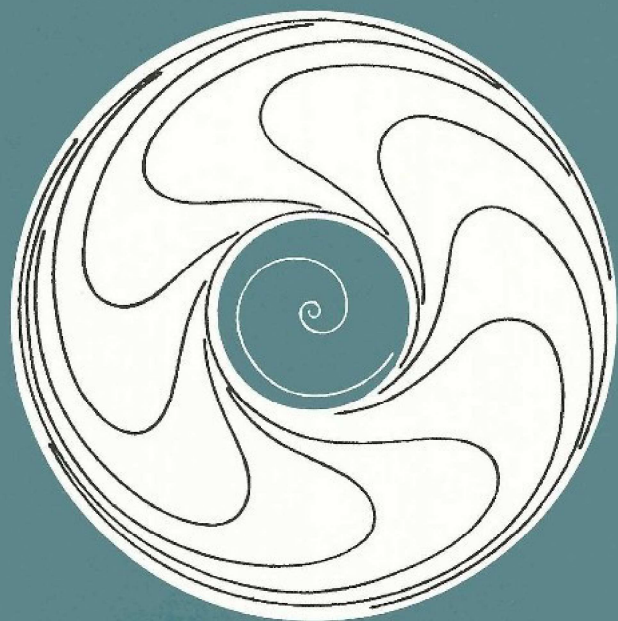


# cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques

créés par CHARLES EHRESMANN en 1958  
dirigés par Andrée CHARLES EHRESMANN

VOLUME LXI-1, 1er Trimestre 2020



AMIENS

## ***Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques***

**Directeur de la publication:** Andrée C. EHRESMANN,  
Faculté des Sciences, Mathématiques LAMFA  
33 rue Saint-Leu, F-80039 Amiens.

### **Comité de Rédaction (Editorial Board)**

*Rédacteurs en Chef (Chief Editors) :*

**Ehresmann Andrée**, ehres@u-picardie.fr  
**Gran Marino**, marino.gran@uclouvain.be  
**Guitart René**, rene.guitart@orange.fr

*Rédacteurs (Editors)*

**Adamek Jiri**, adamek@iti.cs.tu-bs.de  
**Berger Clemens**,  
clemens.berger@unice.fr  
**Bunge Marta**, marta.bunge@mcgill.ca  
**Clementino Maria Manuel**,  
mmc@mat.uc.pt  
**Janelidze Zurab**, zurab@sun.ac.za  
**Johnstone Peter**,  
P.T.Johnstone@dpmms.cam.ac.uk

**Kock Anders**, kock@imf.au.dk  
**Lack Steve**, steve.lack@mq.edu.au  
**Mantovani Sandra**,  
sandra.mantovani@unimi.it  
**Porter Tim**, t.porter.maths@gmail.com  
**Pradines Jean**, pradines@wanadoo.fr  
**Pronk Dorette**,  
pronk@mathstat.dal.ca  
**Street Ross**, ross.street@mq.edu.au

Les "*Cahiers*" comportent un Volume par an, divisé en 4 fascicules trimestriels. Ils publient des articles originaux de Mathématiques, de préférence sur la Théorie des Catégories et ses applications, e.g. en Topologie, Géométrie Différentielle, Géométrie ou Topologie Algébrique, Algèbre homologique... Les manuscrits soumis pour publication doivent être envoyés à l'un des Rédacteurs comme fichiers .pdf.

Depuis 2018, les "*Cahiers*" publient une **Edition Numérique en Libre Accès**, sans charge pour l'auteur : le fichier pdf d'un fascicule trimestriel est, dès parution, librement téléchargeable sur :

The "*Cahiers*" are a quarterly Journal with one Volume a year (divided in 4 issues). They publish original papers in Mathematics, the center of interest being the Theory of categories and its applications, e.g. in topology, differential geometry, algebraic geometry or topology, homological algebra... Manuscripts submitted for publication should be sent to one of the Editors as pdf files.

From 2018 on, the "*Cahiers*" have also a **Full Open Access Edition** (without Author Publication Charge): the pdf file of each quarterly issue is immediately freely downloadable on:

<http://ehres.pagesperso-orange.fr/Cahiers/Ctgdc.htm>  
and, split in separate articles, on: <http://cahierstgdc.com/>

# **cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques**

**créés par CHARLES EHRESMANN en 1958  
dirigés par Andrée CHARLES EHRESMANN  
VOLUME LXI-1, 1<sup>er</sup> trimestre 2020**

## **SOMMAIRE**

<b>D. DEWOLF &amp; D. PRONK, A double categorical view on representations of Etendues</b>	<b>3</b>
<b>JACQUES PENON, Pureté de la monade de Batanin, I</b>	<b>57</b>





# A DOUBLE CATEGORICAL VIEW ON REPRESENTATIONS OF ETENDUES

*Darien DEWOLF and Dorette PRONK*

**Résumé.** Cet article décrit chaque groupoïde ordonné comme une certaine catégorie double. Lawson et Steinberg ont démontré une correspondance entre les groupoïdes ordonnés et les catégories dont tout morphisme est monic, et notre description nous permettra d'étendre cette correspondance en une 2-biéquivalence. Nous utilisons cette 2-biéquivalence pour identifier les foncteurs dont le foncteur engendré entre les catégories correspondantes de faisceaux est un morphisme géométrique, et nous démontrons un lemme de comparaison pour les sites d'Ehresmann.

**Abstract.** In this paper we introduce a description of ordered groupoids as a particular type of double categories. This enables us to turn Lawson's correspondence between ordered groupoids and left-cancellative categories into a biequivalence. We use this to identify which ordered functors are maps of sites in the sense that they give rise to geometric morphisms between the induced sheaf categories, and establish a comparison lemma for maps between Ehresmann sites.

**Keywords.** Ordered groupoid, Etendue, Ehresmann site, Sheaf on an Ehresmann site, Double category, Morphism of Ehresmann sites, Grothendieck site with monic maps, Comparison Lemma.

**Mathematics Subject Classification (2010).** 18F10, 18F20, 20L05, 20M50.

## 1. Introduction

As introduced in SGA4 [1], a topological étendue  $\mathcal{E}$  is a topos which is locally a topological space: there is some object  $S \in \mathcal{E}$  together with a unique epimorphism  $S \twoheadrightarrow 1$  such that  $\mathcal{E}/S$  is equivalent to the topos of sheaves on a topological space. By common convention (see, e.g., [11]), we consider the more general localic étendues, hereafter simply called étendues, in which locales are used in lieu of topological spaces.

Rosenthal [23] showed that the category of sheaves on a left-cancellative site is an étendue and, conversely, Kock and Moerdijk [13] showed that any étendue is equivalent to the topos of sheaves on a left-cancellative site. This presentation of general étendues has motivated the subsequent work eventually leading to this paper.

Left-cancellative categories arise naturally in the study of cohomology generalized from the context of groups to the context of inverse semigroups: the cohomology of an inverse semigroup [14] is the same as the cohomology of a certain left-cancellative category [18, 19]. In particular, the relationship between these cohomologies relies on a correspondence between certain actions of an inverse semigroup and the actions on its associated left-cancellative category. The study of inverse semigroups can also be done via ordered groupoids as per the celebrated Ehresmann-Schein-Nambooripad Theorem [5, 21, 22, 24]: the category of inverse semigroups (and semigroup homomorphisms) is equivalent to the category of inductive groupoids (and inductive functors). The Ehresmann-Schein-Nambooripad Theorem has been nicely presented with its applications to inverse semigroup theory in Lawson's book [15]. It has since been extended to various natural contexts [3, 4, 8, 9, 25]. Motivated by ordered groupoids being special types of inductive groupoids and by the role of inverse semigroups acting on presheaves in inverse semigroup theory [20], Lawson and Steinberg [17] engaged in this study of generalized group cohomology using inverse semigroups in the more general context of ordered groupoids.

Lawson and Steinberg were successful in their investigation in that they gave a first link between the topos-theoretic view coming from sheaves on left-cancellative sites (coming again from the relationship between cohomologies) and the ordered-groupoid-theoretic view coming from the appropriate sheaves on what they call Ehresmann sites; Ehresmann sites are or-

dered groupoids equipped with what they call an Ehresmann topology, families of order ideals reminiscent of Grothendieck topologies. They give a notion of sheaves on Ehresmann sites and prove:

1. Each site with monic maps can be constructed from some Ehresmann site.
2. Each étendue is equivalent to the category of sheaves on some Ehresmann site.

To accomplish this, Lawson and Steinberg define a pair of functors

$$\mathbf{L}: \mathbf{oGpd} \rightarrow \mathbf{lcCat}$$

and

$$\mathbf{G}: \mathbf{lcCat} \rightarrow \mathbf{oGpd}$$

between the category of ordered groupoids (with ordered functors) and the category of left-cancellative categories (with functors). They then show that there is a natural transformation  $\eta: \mathbf{Id} \Rightarrow \mathbf{LG}$  with the property that for each left-cancellative category  $\mathcal{C}$ , the component  $\eta_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{LG}(\mathcal{C})$  is an equivalence of categories. Building off of this equivalence, Lawson and Steinberg establish a one-to-one correspondence between covering sieves on a left-cancellative site  $(\mathcal{C}, J)$  and the covering sieves on the corresponding left-cancellative site  $(\mathbf{LG}(\mathcal{C}), J_{T_J})$  such that the category of sheaves on  $(\mathcal{C}, J)$  is equivalent to the category of sheaves on  $(\mathbf{LG}(\mathcal{C}), J_{T_J})$ .

The purpose of Sections 2 – 5 of this paper is primarily to strengthen Lawson and Steinberg’s result by answering the natural question “Is there a corresponding natural transformation  $\kappa: \mathbf{GL} \Rightarrow \mathbf{Id}$  whose components are equivalences?” Lawson and Steinberg provide a notion of such a natural transformation. They show that when  $\mathcal{G}$  has maximal objects in the sense that each object is less than or equal to a maximal object, the arrow  $\kappa_{\mathcal{G}}$  is a retract. In order to study these transformations in more detail and obtain a 2-adjunction and biequivalence between suitable categories of ordered groupoids and left cancellative categories, we will view ordered groupoids as a special kind of category objects in an ambient category. Strictly speaking, this ambient category can be taken to be  $\mathbf{Pos}$ , the category of posets. However, as  $\mathbf{Pos}$  is a subcategory of  $\mathbf{Cat}$ , the category of categories, this means that we may also view them as a special kind of double categories. Double

categories, as first introduced by Ehresmann [6], have emerged as a convenient and powerful way to organize and study the interaction between two different types of morphism on the same objects. Our thinking of ordered groupoids as double categories allows us to tap into the double-categorical toolbox; in particular, thinking of ordered groupoids as double categories allows us to observe that for an arbitrary ordered groupoid  $\mathcal{G}$  the component  $\kappa_{\mathcal{G}}$  of the natural transformation  $\kappa: \mathbf{GL} \Rightarrow \text{Id}$  given by Lawson and Steinberg can be viewed as a weak equivalence, analogous to those defined in [2] (although neither the category  $\mathbf{Pos}$  nor the category  $\mathbf{Cat}$  is regular), and this class of weak equivalences is part of a Quillen model structure on the category of double categories [7].

Pushing this further, we would like to say that we can establish an equivalence of categories  $\mathbf{lcCat} \simeq \mathbf{oGpd}$ . However, since the components of the natural transformations  $\eta$  and  $\kappa$  are only (weak) equivalences, rather than isomorphisms, we will need to consider  $\mathbf{oGpd}$  and  $\mathbf{lcCat}$  as 2-categories to do this. We denote these 2-categories by  $\mathbf{oGpd}$  and  $\mathbf{lcCat}$ . The 2-structure of  $\mathbf{lcCat}$  is inherited from  $\mathbf{Cat}$ : the 2-cells are natural transformations. To describe  $\mathbf{oGpd}$  as a 2-category requires more work in choosing the correct notion of 2-cells. We will call our choice of 2-cells  $\Lambda$ -transformations, and they form a combination of the traditional horizontal and vertical transformations between double functors. The existence of  $\Lambda$ -transformations depends on the fibration (restriction) property of ordered groupoids giving the hom double category  $\mathbf{DbICat}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  itself the structure of an ordered groupoid. This way we obtain a 2-adjunction,

**Theorem 5.1.** *The 2-functors  $\mathbf{L}$  and  $\mathbf{G}$  define a 2-adjunction,*

$$\mathbf{oGpd} \simeq \mathbf{lcCat}.$$

To obtain a biequivalence the components of  $\eta$  and  $\kappa$  need to have weak inverses. In general this is not the case for  $\kappa$ . However, as noted in [17], the ordered groupoids in the image of the functor  $\mathbf{G}$  have the property that for each object  $X$  there is a maximal object  $\hat{X}$  such that  $X \leq \hat{X}$ . Restricting the 2-adjunction above to ordered groupoids with this property yields the desired biequivalence,



**Corollary 5.2.** *The 2-functors  $\mathbf{L}$  and  $\mathbf{G}$  define a 2-adjoint biequivalence,*

$$\mathbf{oGpd}_{\max} \simeq \mathbf{lcCat}.$$

Section 6 of this paper contains applications to the study of sheaves on Ehresmann sites and further extends the work of Lawson and Steinberg [17] in two significant ways:

1. Lawson and Steinberg show that there is an isomorphism of categories

$$\mathbf{PreSh}(\mathcal{G}) \cong \mathbf{PreSh}(\mathbf{L}(\mathcal{G})).$$

They also show that this isomorphism restricts properly to sheaves with the chosen topologies.

Furthermore, since any equivalence of categories induces an equivalence between the corresponding presheaf categories, we have

$$\mathbf{PreSh}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathbf{LG}(\mathcal{C})),$$

and by combining these equivalences we obtain,

$$\mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(\mathcal{C})) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathcal{C}) \text{ and } \mathbf{PreSh}(\mathcal{G}) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathbf{GL}(\mathcal{G})).$$

We show that the equivalence  $\mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(\mathcal{C})) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathcal{C})$  also restricts properly to sheaves with the chosen topologies. Finally, while Lawson and Steinberg were able to establish an equivalence between categories of sheaves on the left-cancellative Grothendieck site side, our double-categorical perspective allows us to complete the picture and establish an equivalence between the categories of sheaves on the Ehresmann site side.

**Proposition 6.5.**

- (a) *(Lawson and Steinberg) The category of sheaves on an Ehresmann site  $(\mathcal{G}, T)$  is equivalent to the category of sheaves on  $(\mathbf{L}(\mathcal{G}), J_T)$ .*
- (b) *The category of sheaves on a left-cancellative site  $(\mathcal{C}, J)$  is equivalent to the category of sheaves on  $(\mathbf{G}(\mathcal{C}), T_J)$ .*

2. We give an appropriate notion of morphism between Ehresmann sites which allows us to take the equivalences between categories of sheaves at the object level to an equivalence between the larger 2-categories of Grothendieck sites and of Ehresmann sites.

This is motivated by Karazeris' [12] result that functors between Grothendieck sites give rise to geometric morphisms precisely when they are covering preserving and covering flat, and we prove the corresponding result for double functors between ordered groupoids:

**Theorem 6.15.** *A double functor  $M: (\mathcal{G}, T) \rightarrow (\mathcal{G}', T')$  gives rise to a geometric morphism  $\mathrm{Sh}(\mathcal{G}', T') \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{G}, T)$  if and only if it is covering preserving and covering flat.*

It is such functors that we call morphisms of Ehresmann sites which give a 2-category of Ehresmann sites that features in the following biequivalence.

**Theorem 6.16.** *The functors  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{L}$  induce a 2-adjoint biequivalence*

$$\mathbf{lcGsite} \simeq \mathbf{Esite}_{max}.$$

The Comparison Lemma in [13] gives sufficient conditions on a morphism of sites so that it induces an equivalence between the corresponding categories of sheaves. As a final application, this paper adapts Kock and Moerdijk's conditions to the context of ordered groupoids, we are able to express and prove an analogous result for a morphism of Ehresmann sites:

**Theorem 6.22** (Comparison Lemma for Ehresmann Sites). *Let  $M: (\mathcal{G}, T) \rightarrow (\mathcal{G}', T')$  be a morphism of Ehresmann sites. If  $M$  is locally full, locally faithful, and locally surjective, then the functor  $M^*: \mathrm{Sh}(\mathcal{G}', T') \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{G}, T)$  is full and faithful. If further  $M$  is co-continuous, then  $M^*$  is an equivalence.*

This now allows one to use Ehresmann sites as a representation for étendues in a way that is completely analogous to the use of left-cancellative Grothendieck sites.

## 2. Ordered Groupoids as Double Categories

In order to describe the correspondence between ordered groupoids and left-cancellative categories in more detail, we first introduce a new way of representing ordered groupoids in terms of double categories.

**Definition 2.1.** *An ordered groupoid is a category  $\mathcal{G}$  in which all arrows are invertible and such that*

1. *There is a partial order relation on the arrows which extends to the objects via the identity arrows;*
2. *The order is preserved by taking inverses and composition: if  $a \leq b$  then  $a^{-1} \leq b^{-1}$  and if  $a \leq b$  and  $c \leq d$  then  $ac \leq bd$  provided these composites are defined;*
3. *When  $f: A \rightarrow B$  and  $A' \leq A$  there is a unique arrow  $f': A' \rightarrow B'$  such that  $f' \leq f$ . We also write  $f|_{A'}$  for  $f'$  and call it the restriction of  $f$  to  $A'$ .*

Note that the first and second conditions in this definition imply that if  $f \leq g$  and  $f: A \rightarrow B$  and  $g: C \rightarrow D$  then  $A \leq C$  and  $B \leq D$ . Hence, we can also view this as an internal groupoid

$$\mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{m} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{i} \mathcal{G}_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{t} \\ \xleftarrow{u} \\ \xrightarrow{s} \end{array} \mathcal{G}_0$$

in the category of partially ordered sets with an additional property corresponding to the last requirement given above: the domain arrow  $\mathcal{G}_1 \xrightarrow{s} \mathcal{G}_0$  is a fibration as functor between posetal categories. It follows from the groupoid symmetry that the target arrow  $t$  is an opfibration. So we observe that ordered groupoids have both domain and range restriction.

Another way to view this last diagram is as a double category  $\mathcal{G}$  where the vertical arrows give the poset structure and the horizontal arrows give the groupoid structure. Double cells have the following form

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{g'} & Y' \end{array} \quad (1)$$

And this encodes that  $X \leq X'$ ,  $Y \leq Y'$  and  $g \leq g'$ . Note that in this notation, the fact that  $s: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$  is a fibration corresponds to the statement that for each diagram

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow & & \\ X' & \xrightarrow{g'} & Y' \end{array}$$

there is a unique diagram (1).

The morphisms between ordered groupoids are usually taken to be ordered functors: functors that preserve the order relation. These correspond precisely to double functors between the double categories just described. We write **oGpd** for the category of ordered groupoids, considered as double categories with double functors as arrows.

### 3. Lawson's Correspondence Revisited

In [16] Lawson introduced a correspondence between ordered groupoids and left-cancellative categories; i.e., categories in which all arrows are monomorphisms. We write **lcCat** for the category of left-cancellative categories with functors as morphisms.

Lawson introduced functors **oGpd**  $\rightarrow$  **lcCat** and **lcCat**  $\rightarrow$  **oGpd**. We begin by rewriting these functors in our terminology.

#### 3.1 The Functors L and G

The functor **L**: **oGpd**  $\rightarrow$  **lcCat** is defined as follows. For an ordered groupoid  $\mathcal{G}$ , the left-cancellative category **L**( $\mathcal{G}$ ) has as objects those of  $\mathcal{G}$ . An arrow  $A \rightarrow B$  in **L**( $\mathcal{G}$ ) is a formal composite of a horizontal arrow in  $\mathcal{G}$  with a vertical arrow in  $\mathcal{G}$ :

$$A \xrightarrow{h} B' \dashrightarrow B$$

where  $h$  is a horizontal arrow in  $\mathcal{G}$  and  $B' \twoheadrightarrow B$  is a vertical arrow in  $\mathcal{G}$ . Composition uses the restriction operation in  $\mathcal{G}$ ,

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{h} & B' & \xrightarrow{k|_{B'}} & C'' \\ & & \downarrow & \leq & \downarrow \\ & & B & \xrightarrow{k} & C' \\ & & & & \downarrow \\ & & & & C \end{array}$$

so the composition is given by  $A \xrightarrow{k|_{B'}h} C'' \twoheadrightarrow C$ . (Note that this is unitary and associative by the uniqueness of the restrictions.)

Conversely, the functor  $\mathbf{G}: \mathbf{lcCat} \rightarrow \mathbf{oGpd}$  is defined as follows. For a left-cancellative category  $\mathcal{C}$ , the ordered groupoid  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$  has subobjects in  $\mathcal{C}$  as objects; i.e., they are equivalence classes of arrows  $m: A \rightarrow B$  and  $[m: A \rightarrow B] = [m': A' \rightarrow B]$  if there is an isomorphism  $k: A \xrightarrow{\sim} A'$  in  $\mathcal{C}$  such that

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow[k]{\sim} & A' \\ & \searrow m & \swarrow m' \\ & & B \end{array}$$

commutes. The horizontal arrows in  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$  are equivalence classes of spans,

$$[m, n]: [m] \rightarrow [n]$$

The equivalence relation is defined so that  $[m, n] = [m', n']$  if and only if there is an isomorphism  $h$  making the following diagram commute:

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & m & \swarrow & & \searrow n \\ B & & & \downarrow h & & C \\ & m' & \swarrow & & \searrow n' \\ & & A' & & \end{array}$$

Composition of  $[k, m]$  and  $[m', n]$  is defined when  $[m] = [m']$ ; i.e., when there is an isomorphism  $h$  such that  $m'h = m$ , giving rise to a diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & h & & \\ & k & \swarrow & \sim & \searrow n \\ & & m & & m' \end{array}$$

in  $\mathcal{C}$ . The composition is then  $[k] \xrightarrow{[k,nh]} [nh] = [n]$ .

The vertical arrows are given by the order relation on subobjects: there is a unique vertical arrow

$$[n] \dashrightarrow [n']$$

if there is an arrow  $h$  in  $\mathcal{C}$  such that  $n = n'h$ ; i.e.,  $[n] \leq [n']$  as subobjects.

The order relation on arrows is defined by Lawson as:  $[m, n] \leq [m', n']$  if there is an arrow  $h$  in  $\mathcal{C}$  such that the diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & m & \swarrow & & \searrow n \\
 B & & & & C \\
 & m' & \swarrow & & \searrow n' \\
 & & A' & & 
 \end{array}
 \tag{2}$$

commutes. (Note that this  $h$  is unique if it exists.) This implies then that  $[m] \leq [m']$  and  $[n] \leq [n']$ . So double cells in  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 [m] & \xrightarrow{[m,n]} & [m] \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 [m'] & \xrightarrow{[m',n']} & [n']
 \end{array}$$

correspond to diagrams of the form (2) in  $\mathcal{C}$ . Since there is at most one double cell for any frame of horizontal and vertical arrows, the horizontal and vertical composition of double cells is determined by the composition of the horizontal and vertical arrows.

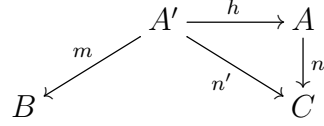
### 3.2 The Composition LG

We now describe the results of composing the functors  $\mathbf{L}$  and  $\mathbf{G}$  in our terminology. For a left-cancellative category  $\mathcal{C}$ , the category  $\mathbf{LG}(\mathcal{C})$  has as objects subobjects in  $\mathcal{C}$ :  $[m: A \rightarrow B]$ .

The arrows in  $\mathbf{LG}(\mathcal{C})$  are constructed as

$$[m] \xrightarrow{[m,n']} [n'] \dashrightarrow [n]$$

and this corresponds to a diagram

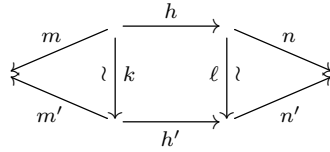


in  $\mathcal{C}$ .

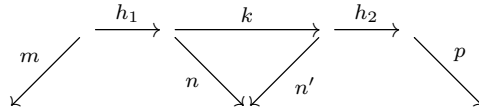
So an arrow  $[h]: [m: A' \rightarrow B] \rightarrow [n: A \rightarrow C]$  is represented by an arrow  $h: A' \rightarrow A$ . Furthermore,

$$\left( [m] \xrightarrow{[h]} [n] \right) \equiv \left( [m'] \xrightarrow{[h']} [n'] \right)$$

if and only if there are isomorphisms  $k$  and  $\ell$  that make the following diagram commute,



Composition of  $[m] \xrightarrow{[h_1]} [n]$  and  $[n'] \xrightarrow{[h_2]} [p]$  is defined when there is an arrow  $k$  as in the diagram



and the composition is

$$[h_2 k h_1]: [m] \rightarrow [p].$$

The categories  $\mathcal{C}$  and  $\mathbf{LG}(\mathcal{C})$  are not isomorphic, but as observed by Lawson [16, Theorem 2.3.1], there is a functor

$$\eta_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{LG}(\mathcal{C})$$

giving an equivalence of categories. (It is defined on objects by  $A \mapsto [1_A]$ , and on arrows by  $(h: A \rightarrow B) \mapsto ([h]: [1_A] \rightarrow [1_B])$  and note that

$$[m: A \rightarrow B] \cong [1_A: A \rightarrow A]$$

and  $\eta_{\mathcal{C}}$  defines an isomorphism

$$\mathcal{C}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathbf{LG}(\mathcal{C})([1_A], [1_B]).$$

Note that the  $\eta_{\mathcal{C}}$  define a natural transformation

$$\eta: 1_{\mathbf{1cCat}} \Rightarrow \mathbf{LG}.$$

### 3.3 The Composition GL

For the other composition,  $\mathbf{GL}: \mathbf{oGpd} \rightarrow \mathbf{oGpd}$ , let  $\mathcal{G}$  be an ordered groupoid. Then the objects of  $\mathbf{GL}(\mathcal{G})$  are subobjects in  $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ , hence equivalence classes,

$$[A \xrightarrow{h} B' \twoheadrightarrow B],$$

where  $h$  is a horizontal arrow in  $\mathcal{G}$  (and therefore invertible). Furthermore,

$$[A \xrightarrow{h} B' \twoheadrightarrow B] = [A' \xrightarrow{h'} B' \twoheadrightarrow B]$$

if and only if there is an isomorphism  $k: A \xrightarrow{\sim} A'$  such that  $h'k = h$ . Note that in this case each equivalence class has a canonical representative,  $(B' \twoheadrightarrow B)$ . We will denote this object by

$$(B', B).$$

Horizontal arrows in  $\mathbf{GL}(\mathcal{G})$  become then equivalence classes of spans of horizontal arrows in  $\mathcal{G}$ ,

$$\left[ B' \xleftarrow{h} A \xrightarrow{k} C' \right] : (B', B) \rightarrow (C', C)$$

Since  $h$  and  $k$  are invertible, this span is equivalent to

$$B' \xleftarrow{1_B} B' \xrightarrow{kh^{-1}} C'.$$

So a horizontal arrow  $(B', B) \rightarrow (C', C)$  is given by a horizontal arrow  $h: B' \rightarrow C'$  in  $\mathcal{G}$ . The vertical arrows and the double cells in  $\mathbf{GL}(\mathcal{G})$  are obtained as follows: there is a (unique) vertical arrow  $(B', B) \twoheadrightarrow (D', D)$



if and only if  $B = D$  and there is a vertical arrow  $B' \dashrightarrow D'$  in  $\mathcal{G}$ . Similarly, double cells in  $\mathbf{GL}(\mathcal{G})$  are of the form,

$$\begin{array}{ccc} (B', D) & \xrightarrow{h} & (C', E) \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ (D', D) & \xrightarrow{k} & (E', E) \end{array}$$

where

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{h} & C' \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ D' & \xrightarrow{k} & E' \end{array}$$

is a double cell in  $\mathcal{G}$ .

Lawson introduced an ordered functor  $\kappa_{\mathcal{G}}: \mathbf{GL}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G}$  which corresponds to the following double functor with the same name:

- on objects,  $\kappa_{\mathcal{G}}(B', B) = B'$ ;
- on horizontal arrows,  $\kappa_{\mathcal{G}}((B', B) \xrightarrow{h} (C', C)) = (B' \xrightarrow{h} C')$ ;
- on vertical arrows,  $\kappa_{\mathcal{G}}((B', B) \dashrightarrow (D', B)) = (B' \dashrightarrow D')$ ;
- on double cells,  $\kappa_{\mathcal{G}}$  maps the cell

$$\begin{array}{ccc} (B', B) & \xrightarrow{h} & (C', C) \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ (D', D) & \xrightarrow{k} & (E', E) \end{array}$$

in  $\mathbf{GL}(\mathcal{G})$  to the cell

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{h} & C' \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ D' & \xrightarrow{k} & E' \end{array}$$

in  $\mathcal{G}$ .

Lawson showed that this is a deformation retract when the ordered groupoid  $\mathcal{G}$  has maximal elements. When considering the corresponding transformation with double functors as components, we can show that these components have properties analogous to those of weak equivalences between internal categories in a regular category, as introduced in [2] in terms of effective descent maps. In [7] it was shown that these weak equivalences are part of a Quillen model structure on the category of double categories, induced by the regular epimorphism topology on the category of categories.

**Definition 3.1.** *A functor between internal categories  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$  in some ambient category  $\mathcal{D}$  is a weak equivalence if it satisfies the following two conditions:*

1. *It is essentially surjective in the sense that the composition of the top arrows in*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_0 \times_{\mathbb{D}_0} \mathbb{D}_1 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{D}_1 & \xrightarrow{t} & \mathbb{D}_0 \\ \pi_1 \downarrow & & s \downarrow & & \\ \mathbb{C}_0 & \xrightarrow{F_0} & \mathbb{D}_0 & & \end{array}$$

*is of effective descent in  $\mathcal{D}$ ;*

2. *It is fully faithful in the sense that the following square is a pullback,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_1 & \xrightarrow{F_1} & \mathbb{D}_1 \\ (s,t) \downarrow & & \downarrow (s,t) \\ \mathbb{C}_0 \times \mathbb{C}_0 & \xrightarrow{F_0 \times F_0} & \mathbb{D}_0 \times \mathbb{D}_0 \end{array}$$

For  $\mathcal{D} = \mathbf{Cat}$ , the category of small categories, internal categories are double categories and it was shown in [10] that a functor  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  is of effective descent if and only if the following induced functions of sets are surjective:  $F_0: \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{Y}_0$ ,  $F_1: \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_1$  and  $F_1 \times F_1: \mathcal{X}_1 \times_{\mathcal{X}_0} \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_1 \times_{\mathcal{Y}_0} \mathcal{Y}_1$ .

**Proposition 3.2.** *The double functor  $\kappa_{\mathcal{G}}: \mathbf{GL}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{G}$  is a weak equivalence of double categories.*

*Proof.* We first check that  $\kappa_{\mathcal{G}}$  is essentially surjective on objects. So we need to check that the induced functor  $t\pi_2: \mathbf{GL}(\mathcal{G})_0 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_0$  is of effective descent.

- It is surjective on objects, because for any object  $B$  in  $\mathcal{G}$ ,  $\kappa_{\mathcal{G}}(B, B) = B$ .
- It is surjective on arrows, because the arrows in  $\mathcal{G}_0$  are the vertical arrows of  $\mathcal{G}$ , and for any vertical arrow  $B \dashrightarrow C$ ,

$$\kappa_{\mathcal{G}}((B, C) \dashrightarrow (C, C)) = (B \dashrightarrow C).$$

- Finally,  $\kappa_{\mathcal{G}} \times \kappa_{\mathcal{G}}: \mathbf{GL}(\mathcal{G})_1 \times_{\mathbf{GL}(\mathcal{G})_0} \mathbf{GL}(\mathcal{G})_1 \rightarrow \mathcal{G}_1 \times_{\mathcal{G}_0} \mathcal{G}_1$  is surjective, since for any composable pair of vertical arrows in  $\mathcal{G}$ ,  $B \dashrightarrow C \dashrightarrow D$ ,

$$(\kappa_{\mathcal{G}} \times \kappa_{\mathcal{G}})((B, D) \dashrightarrow (C, D) \dashrightarrow (D, D)) = (B \dashrightarrow C \dashrightarrow D).$$

We note that  $\kappa_{\mathcal{G}}$  is fully faithful because it is both order reflecting and order preserving.  $\square$

We would like to combine the results from this section in saying that the functors  $\mathbf{L}: \mathbf{oGpd} \rightarrow \mathbf{lcCat}$  and  $\mathbf{G}: \mathbf{lcCat} \rightarrow \mathbf{oGpd}$  define an equivalence of categories  $\mathbf{lcCat} \simeq \mathbf{oGpd}$ . However, since the components of the natural transformations  $\eta: 1_{\mathbf{lcCat}} \Rightarrow \mathbf{LG}$  are only equivalences of categories and the component of  $\kappa: \mathbf{GL} \Rightarrow 1_{\mathbf{oGpd}}$  are at best retracts, rather than isomorphisms, we will need to consider  $\mathbf{oGpd}$  and  $\mathbf{lcCat}$  as 2-categories to do this. We will denote these 2-categories by  $\mathbf{oGpd}$  and  $\mathbf{lcCat}$ . The 2-structure of  $\mathbf{lcCat}$  is inherited from  $\mathbf{Cat}$ : the 2-cells are natural transformation. To describe  $\mathbf{oGpd}$  as a 2-category we need to do more work as spelled out in the next section.

#### 4. $\mathbf{oGpd}$ as a 2-Category

We clearly want the arrows of the 2-category  $\mathbf{oGpd}$  to be double functors. When constructing a 2-category from a double category one chooses usually either the horizontal or the vertical transformations as the 2-cells of the resulting 2-category. The components of a horizontal transformation are horizontal arrows and double cells in the codomain double category, so for

ordered groupoids, all horizontal transformations are invertible. The components of a vertical transformation are vertical arrows and double cells, so there is a vertical transformation  $F \Rightarrow_v G: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  if and only if  $F \leq G$ .

However, because each ordered groupoid has a fibration as domain, we obtain a third option. To describe this third option, first recall that for any two double categories  $\mathbb{C}$  and  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbf{DbCat}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$  can be viewed as a double category with double functors as objects, horizontal transformations as horizontal arrows, vertical transformations as vertical arrows and modifications as double cells.

**Proposition 4.1.** *For ordered groupoids  $\mathcal{G}$  and  $\mathcal{H}$ , the double category*

$$\mathbf{DbCat}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$$

*is again an ordered groupoid.*

*Proof.* We saw above that the vertical transformations simply encode the order structure on the double functors and all horizontal transformations are invertible.

We now describe what the modifications are in this double category. For four double functors  $F, G, H, K: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  with  $F \leq H$  and  $G \leq K$  and horizontal transformations  $\alpha: F \xrightarrow{\sim} G$  and  $\beta: H \xrightarrow{\sim} K$ , a modification  $\Theta$ ,

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \downarrow & \Theta & \downarrow \\ H & \xrightarrow{\beta} & K \end{array}$$

is given by a family of double cells

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\alpha_X} & GX \\ \downarrow & \Theta_X & \downarrow \\ HX & \xrightarrow{\beta_X} & KX \end{array}$$

in  $\mathcal{H}$ , indexed by objects  $X$  in  $\mathcal{G}$ , and satisfying certain naturality conditions. However,  $\mathcal{H}$  has only double cells of the form

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\sim} & \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ & \xrightarrow{\sim} & \end{array}$$

Hence, each cell  $\Theta_X$  is the unique double cell encoding the fact that  $\alpha_X \leq \beta_X$ . So we may write

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha} & G \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ H & \xrightarrow{\beta} & K \end{array}$$

for  $\Theta$ .

It remains to show that the domain arrow

$$s: \mathbf{DbCat}(\mathcal{G}, \mathcal{H})_1 \longrightarrow \mathbf{DbCat}(\mathcal{G}, \mathcal{H})_0$$

is a fibration. So suppose that  $F \leq H$  and  $\beta: H \Rightarrow_h K$ . We construct  $\beta|_F$  as follows. For each object  $X$  in  $\mathcal{G}$ , we have

$$\begin{array}{ccc} FX & & \\ \downarrow & & \\ HX & \xrightarrow{\beta_X} & KX \end{array}$$

and we use the lifting property of  $\mathcal{H}$  to complete the square

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\beta_X|_{FX}} & GX \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ HX & \xrightarrow{\beta_X} & KX \end{array}$$

We want to define  $(\beta|_F)_X = \beta_X|_{FX}$ , but in order for this to be well-defined, we need to turn this assignment of  $G$  into a double functor. So consider a horizontal arrow  $h: X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{G}$ . We have by horizontal naturality that  $Kh \circ \beta_X = \beta_Y \circ Hh$ , and we have the following double cells,

$$\begin{array}{ccccc} FX & \xrightarrow{Fh} & FY & \xrightarrow{\beta_Y|_{FY}} & GY \\ \downarrow & \leq & \downarrow & \leq & \downarrow \\ HX & \xrightarrow{Hh} & HY & \xrightarrow{\beta_Y} & KY \end{array}$$

So we see that in

$$\begin{array}{ccccc}
 FX & \xrightarrow{\beta_X|_{FX}} & GX & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 HX & \xrightarrow{\beta_X} & KX & \xrightarrow{Kh} & KY
 \end{array}$$

the codomain of the lifting  $Kh|_{GX}$  has codomain  $FY$  (since  $(Kh|_{GX}) \circ (\beta_X|_{FX}) = (Kh \circ \beta_X)|_{FX} = (\beta_Y \circ Hh)|_{FX} = (\beta_Y|_{FY}) \circ Fh$ ). So we may define  $Gh = Kh|_{GX}$ . Thus defined,  $G$  preserves identities and composition, because the liftings are unique. We also see from the diagrams above that  $Gh \circ (\beta_X|_{FX}) = (\beta_Y|_{FY}) \circ Fh$ .

For the definition of  $G$  on vertical arrows, suppose that  $X \leq X'$ . Then we have the following composites of vertical arrows in  $\mathcal{H}$ :

$$FX \twoheadrightarrow HX \twoheadrightarrow HX' \quad \text{and} \quad FX \twoheadrightarrow FX' \twoheadrightarrow HX'$$

Hence the horizontal arrow  $HX' \xrightarrow{\beta_{X'}} KX'$  can be restricted to  $FX$  in two ways:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 FX & \xrightarrow{\beta_{X'}|_{FX}} & G'X \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 FX' & \xrightarrow{\beta_{X'}|_{FX'}} & GX' \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 GX' & \xrightarrow{\beta_{X'}} & KX'
 \end{array} & \text{and} & \begin{array}{ccc}
 FX & \xrightarrow{\beta_X|_{FX}} & GX \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 HX & \xrightarrow{\beta_X} & KX \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 HX' & \xrightarrow{\beta_{X'}} & KX'
 \end{array}
 \end{array}$$

Hence,  $G'X = GX$  and  $GX \twoheadrightarrow GX'$  as required.

Finally, to define  $G$  on double cells, let

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & Y \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 X' & \xrightarrow{h'} & Y'
 \end{array}$$

be a double cell in  $\mathcal{G}$ . We calculate the restriction  $Kh'|_{GX}$  in two different

ways. First we take the following factorization,

$$\begin{array}{ccc}
 GX & \xrightarrow{Gh} & GY \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 KX & \xrightarrow{Kh} & KY \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 KX' & \xrightarrow{Kh'} & KY'
 \end{array}$$

This shows that  $Kh'|_{FX} = Kh|_{FX} = Gh$ . Now consider

$$\begin{array}{ccc}
 GX & \xrightarrow{Gh'|_{GX}} & GY \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 GX' & \xrightarrow{Gh'} & GY' \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 KX' & \xrightarrow{Kh'} & KY'
 \end{array}$$

This shows that  $Gh = Kh'|_{GX} = Gh'|_{GX}$  and hence we have the double cell

$$\begin{array}{ccc}
 GX & \xrightarrow{Gh} & GY \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 GX' & \xrightarrow{Gh'} & GY'
 \end{array}$$

as required. □

In summary, we can apply our functor  $\mathbf{L}$  to the ordered groupoid  $\mathbf{DbCat}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$  to obtain a left-cancellative category  $\mathbf{L}(\mathbf{DbCat}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$ . This allows us to define the 2-category  $\mathbf{oGpd}$  with ordered groupoids as objects and

$$\mathbf{oGpd}(\mathcal{G}, \mathcal{H}) = \mathbf{L}(\mathbf{DbCat}(\mathcal{G}, \mathcal{H})).$$

This means that a 2-cell

$$(\alpha, \leq): F \Rightarrow G$$

is a formal composite

$$F \xrightarrow[\alpha]{\sim} G' \leq G,$$

where  $G': \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  is a double functor,  $\alpha$  is a horizontal transformation and  $\leq$  denotes a vertical transformation as described above. We call such a formal composite a  $\Lambda$ -transformation. Vertical composition of these  $\Lambda$ -transformations is given by composition in  $\mathbf{L}(\mathbf{DbCat}(\mathcal{G}, \mathcal{H}))$ , using the fibration property of the domain map.

To define horizontal composition note that since both horizontal and vertical transformations allow for left and right whiskering, whiskering automatically extends to  $\Lambda$ -transformations: Given ordered groupoids  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  and  $\mathcal{K}$  with double functors

$$\mathcal{G} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{H} \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \xrightarrow{K} \end{array} \mathcal{K}$$

and  $\Lambda$ -transformations  $(\alpha, \leq): F \Rightarrow G$  and  $(\beta, \leq): H \Rightarrow K$ , we have that

$$(\beta, \leq)F = (\beta F, \leq): HF \Rightarrow KF$$

and

$$H(\alpha, \leq) = (H\alpha, \leq): HF \Rightarrow HG.$$

We want to show that this gives rise to a well-defined notion of horizontal composition. In the proof we will need the following results about horizontal transformations between double functors of ordered groupoids.

**Lemma 4.2.** *Let  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  and  $\mathcal{K}$  be ordered groupoids with double functors*

$$\mathcal{G} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G'} \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{H} \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \xrightarrow{K'} \\ \xrightarrow{K} \end{array} \mathcal{K}$$

*with horizontal transformations  $\alpha: F \Rightarrow G'$  and  $\beta: H \Rightarrow K'$  and vertical transformations  $G' \leq G$  and  $K' \leq K$ . Then we have the following restrictions in  $\mathbf{DbCat}(\mathcal{G}, \mathcal{K})$ :*

1.  $(\beta G)|_{HG'} = \beta G'$ .
2.  $(K\alpha)|_{K'F} = K'\alpha$ .

*Proof.* Since the restrictions are unique, we need only to check that the assigned horizontal transformations fit. So let  $X$  be an object in  $\mathcal{G}$ .



For the first restriction, we need to check that the following is a well-defined double cell in  $\mathcal{K}$ ,

$$\begin{array}{ccc} HG'X & \xrightarrow{\beta_{G'X}} & K'G'X \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ HGX & \xrightarrow{\beta_{GX}} & K'GX \end{array}$$

This is a well-defined double cell by the vertical functoriality of  $\beta$  applied to the arrow  $G'X \rightarrow GX$ .

For the second restriction, we need to check that the following is a well-defined double cell in  $\mathcal{K}$ ,

$$\begin{array}{ccc} K'FX & \xrightarrow{K'\alpha_X} & K'G'X \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ KFX & \xrightarrow{K\alpha_X} & KG'X. \end{array}$$

This follows from the horizontal functoriality of the vertical transformation  $K' \leq K$ , applied to the arrow  $FX \xrightarrow{\alpha_X} G'X$ .  $\square$

**Proposition 4.3.** *Given ordered groupoids  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$ , and  $\mathcal{K}$  with double functors*

$$\mathcal{G} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xrightarrow{G} \end{array} \mathcal{H} \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \xrightarrow{K} \end{array} \mathcal{K}$$

and  $\Lambda$ -transformations  $(\alpha, \leq): F \Rightarrow G$  and  $(\beta, \leq): H \Rightarrow K$ . Then,

$$(K\alpha, \leq) \cdot (\beta F, \leq) = (\beta G, \leq) \cdot (H\alpha, \leq)$$

where  $\cdot$  denotes vertical composition.

*Proof.* Let  $X$  be an object of  $\mathcal{G}$ . Then the component of  $(K\alpha, \leq) \cdot (\beta, \leq)F$  at  $X$  is obtained by considering the following diagram in  $\mathcal{K}$ :

$$\begin{array}{ccccc} HFX & \xrightarrow{\beta_{FX}} & K'FX & \xrightarrow{K\alpha_X|_{K'FX}} & AX \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & KFX & \xrightarrow{K\alpha_X} & KG'X \\ & & & & \downarrow \\ & & & & KGX \end{array}$$

By Lemma 4.2,  $K\alpha_X|_{K'FX} = K'\alpha_X$  and hence,  $AX = K'G'X$ . We conclude that the component of  $K(\alpha, \leq) \cdot (\beta, \leq)F$  at  $X$  is  $(K'\alpha_X \circ \beta_{FX}, \leq)$ .

The component of  $(\beta, \leq)G \cdot H(\alpha, \leq)$  at  $X$  is calculated as follows:

$$\begin{array}{ccccc}
 HF X & \xrightarrow{H\alpha_X} & HG' X & \xrightarrow{\beta_{GX}|_{HG'X}} & BX \\
 & & \downarrow & \leq & \downarrow \\
 & & HG X & \xrightarrow{\beta_{GX}} & K'GX \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & KG X
 \end{array}$$

By Lemma 4.2,  $\beta_{GX}|_{HG'X} = \beta_{G'X}$  and hence,  $BX = K'G'X$ . So the component of  $(\beta, \leq)G \cdot H(\alpha, \leq)$  at  $X$  is  $(\beta_{G'X} \circ H\alpha_X, \leq)$ . Finally, note that  $K'\alpha_X \circ \beta_{FX} = \beta_{G'X} \circ H\alpha_X$  by ordinary middle-four for horizontal transformations. The result of the lemma now follows.  $\square$

**Proposition 4.4.** *Horizontal and vertical composition of  $\Lambda$ -transformations as defined above satisfy the middle-four interchange law.*

*Proof.* Consider the following double functors and  $\Lambda$ -cells between ordered groupoids:

$$\begin{array}{ccc}
 \xrightarrow{F} & & \xrightarrow{K} \\
 \Downarrow(\alpha, \leq) & & \Downarrow(\beta, \leq) \\
 \mathcal{G} \xrightarrow{G} \mathcal{H} & \xrightarrow{L} & \mathcal{K} \\
 \Downarrow(\gamma, \leq) & & \Downarrow(\delta, \leq) \\
 \xrightarrow{H} & & \xrightarrow{M}
 \end{array}$$

We first calculate a part of  $((\delta, \leq) \cdot (\beta, \leq)) \circ ((\gamma, \leq) \cdot (\alpha, \leq))$  and  $((\delta \circ \gamma) \cdot$

$(\beta \circ \alpha)$ ) respectively, using the results from Lemma 4.2:

$$\begin{array}{ccccccc}
 KFX & \xrightarrow{K\alpha_X} & KG'X & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & KGX & \xrightarrow{K\gamma_X} & KH'X & \xrightarrow{\beta_{H'X}} & L'H'X \\
 & & & & \downarrow & \leq & \downarrow \\
 & & & & KHX & \xrightarrow{\beta_{HX}} & L'HX \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & LHX & \xrightarrow{\delta_{HX}} & M'HX \\
 & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & & MHX
 \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccccc}
 KFX & \xrightarrow{K\alpha_X} & KG'X & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & KGX & \xrightarrow{\beta_{GX}} & L'GX & \xrightarrow{L'\gamma_X} & L'H'X \\
 & & & & \downarrow & \leq & \downarrow \\
 & & & & LGX & \xrightarrow{L\gamma_X} & LH'X \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & LHX & \xrightarrow{\delta_{HX}} & M'HX \\
 & & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & & MHX
 \end{array}$$

Note that  $\beta_{H'X} \circ K\gamma_X = L'\gamma_X \circ \beta_{GX}$  by interchange for horizontal transformations. Hence, taking the remaining liftings in both diagrams will result in the same composites.  $\square$

## 5. The Equivalence of 2-Categories

In this section we show that there is a 2-adjunction between the 2-category of ordered groupoids, double functors (ordered functors), and  $\Lambda$ -transformations

and the 2-category of left-cancellative categories, functors and natural transformations.

As was observed by Lawson and Steinberg, any ordered groupoid of the form  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$  where  $\mathcal{C}$  is a left-cancellative category has maximal objects in the sense that each object is less than or equal to a unique maximal object. We will show that when we restrict ourselves to ordered groupoids with this property we obtain a biequivalence of 2-categories.

In our earlier introduction of the functors  $\mathbf{L}$  and  $\mathbf{G}$  we only gave their description on objects. We will now include their description on arrows (double functors and functors respectively) and then extend them to 2-functors; i.e., give their description on  $\Lambda$ -transformations and natural transformations respectively.

For a double functor  $F: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ , the functor  $\mathbf{L}(F): \mathbf{L}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{L}(\mathcal{H})$  is on objects the same as  $F$  and on arrows the extension is obvious:  $\mathbf{L}(F)(h, \leq) = (F(h), \leq)$ , and this is well-defined, since  $F$  sends vertical arrows to vertical arrows, so it preserves the order relation. Now let  $(\alpha, \leq): F \Rightarrow G$  be a  $\Lambda$ -transformation. Then  $\mathbf{L}(\alpha, \leq): \mathbf{L}(F) \Rightarrow \mathbf{L}(G)$  is the natural transformation with components  $(\alpha_X, \leq)$ . In order to show that this is indeed natural, let  $A \xrightarrow{h} B' \leq B$  be an arrow in  $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ . Then we need to check that the following square commutes in  $\mathbf{L}(\mathcal{H})$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{F(h, \leq)} & FB \\
 \mathbf{L}(\alpha, \leq)_A \downarrow & & \downarrow \mathbf{L}(\alpha, \leq)_B \\
 GA & \xrightarrow{G(h, \leq)} & GB
 \end{array} \tag{3}$$

The composition  $\mathbf{L}(\alpha, \leq)_B \circ F(h, \leq)$  is calculated as follows (in  $\mathcal{H}$ ):

$$\begin{array}{ccccc}
 FA & \xrightarrow{Fh} & FB' & \xrightarrow{\alpha_{B'}} & G'B' \\
 & & \downarrow & \leq & \downarrow \\
 & & FB & \xrightarrow{\alpha_B} & G'B \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & GB
 \end{array}$$

So  $\mathbf{L}(\alpha, \leq)_B \circ F(h, \leq) = (\alpha_{B'} \circ Fh, \leq)$ .

The composition  $G(h, \leq) \circ \mathbf{L}(\alpha, \leq)$  is calculated as follows:

$$\begin{array}{ccccc}
 FA & \xrightarrow{\alpha_A} & G'A & \xrightarrow{G'h} & G'B' \\
 & & \downarrow & \leq & \downarrow \\
 & & GA & \xrightarrow{Gh} & GB' \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & GB
 \end{array}$$

So  $G(h, \leq) \circ \mathbf{L}(\alpha, \leq) = (G'h \circ \alpha_A, \leq)$ . Now  $\alpha_{B'} \circ Fh = G'h \circ \alpha_A$  by horizontal naturality of  $\alpha$ , so the naturality square (3) for  $\mathbf{L}(\alpha, \leq)$  commutes.

It is straightforward to check that  $\mathbf{L}$  preserves horizontal and vertical composition of 2-cells.

In the other direction, the functor  $\mathbf{G}$  sends a functor  $K: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  between left-cancellative categories to the double functor  $\mathbf{G}(K): \mathbf{G}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{G}(\mathcal{D})$  which is defined as follows. On objects,  $\mathbf{G}(K): [m: A \rightarrow B] \mapsto [Km: KA \rightarrow KB]$ . On horizontal arrows,  $\mathbf{G}(K)([m, n]) = [Km, Kn]$ . It is straightforward to check that this is well-defined on equivalence classes and preserves composition and identities. Furthermore, since  $K$  sends subobjects to subobjects,  $\mathbf{G}(K)$  sends vertical arrows to well-defined vertical arrows and double cells to double cells.

Now let  $\theta: K \Rightarrow K'$  be a natural transformation. Then the  $\Lambda$ -transformation  $\mathbf{G}(\theta)$  has components given by

$$\mathbf{G}(\theta)_{[m]} = \left( [Km] \xrightarrow{[Km, K'm \circ \theta_{\text{dom}(m)}]} [K'm \circ \theta_{\text{dom}(m)}] \leq [K'm] \right).$$

To check that this is well-defined we need to show three things. First that the assignment  $[m] \mapsto [K'm \circ \theta_{\text{dom}(m)}]$  on objects extends to a functor  $\mathbf{G}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{G}(\mathcal{D})$ ; call this functor  $T$ . Second that the arrows  $[Km, K'm \circ \theta_{\text{dom}(m)}]$  form the components of a horizontal transformation  $\mathbf{G}(K) \Rightarrow_h T$  and third that the  $[K'm \circ \theta_{\text{dom}(m)}] \leq [K'm]$  form the components of a vertical transformation  $T \Rightarrow_v \mathbf{G}(K')$ .

To extend the definition of  $T$  to horizontal arrows, note that for

$$[m, n]: [m] \rightarrow [n]$$

in  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$ , we have that  $\text{dom}(m) = \text{dom}(n)$ , so

$$[m, n] \mapsto [K'm \circ \theta_{\text{dom}(m)}, K'n \circ \theta_{\text{dom}(n)}]$$

is well-defined as far as shape is concerned. To check that it is well-defined on equivalence classes and that this assignment preserves the partial order, consider the following commutative diagram in  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A & & \\
 & m \swarrow & & \searrow n & \\
 B & & & & C \\
 & m' \swarrow & \ell \downarrow & \searrow n' & \\
 & & A' & & 
 \end{array} \tag{4}$$

This gives rise to the following commutative diagram in  $\mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & KA & & & \\
 & & \theta_A \swarrow & & \searrow \theta_A & & \\
 & & K'A & & K'A & & \\
 & K'm \swarrow & \downarrow K'\ell & & \downarrow K'\ell & \searrow K'n & \\
 K'B & & & & & & K'C \\
 & K'm' \swarrow & \downarrow K'\ell & & \downarrow K'\ell & \searrow K'n' & \\
 & & K'A' & & K'A' & & \\
 & & \theta_{A'} \swarrow & K\ell \downarrow & \searrow \theta_{A'} & & \\
 & & & KA' & & & 
 \end{array} \tag{5}$$

This shows that when  $[m, n] = [m', n']$  (i.e., when  $\ell$  is an isomorphism), then  $T[m, n] = T[m', n']$  (since  $K\ell$  is then an isomorphism as well). Furthermore, it shows that for any double cell

$$\begin{array}{ccc}
 [m] & \xrightarrow{[m,n]} & [n] \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 [m'] & \xrightarrow{[m',n']} & [n']
 \end{array}$$

in  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$  (corresponding to the existence of an arbitrary arrow  $\ell$  in (4)) there is a corresponding double cell in  $\mathbf{G}(\mathcal{D})$ ,

$$\begin{array}{ccc}
 T[m] & \xrightarrow{T[m,n]} & T[n] \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 T[m'] & \xrightarrow{T[m',n']} & T[n']
 \end{array}$$

(corresponding to  $K\ell$  in (5)). So  $T$  can be extended to a double functor  $\mathbf{G}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{G}(\mathcal{D})$ .

The proof that the  $t_{[m]} = [Km, K'm \circ \theta_{\text{dom}(m)}]$  form the components of a horizontal transformation  $t: \mathbf{G}(K) \Rightarrow_h T$  (i.e., that they satisfy horizontal naturality and vertical functoriality) is completely straightforward. The same is true for the proof that the  $T[m] \leq K'[m]$  form the components of a vertical transformation.

We finally need to check that  $\mathbf{G}$  thus defined preserves horizontal and vertical composition of 2-cells. For vertical composition, suppose we have natural transformations  $K \xrightarrow{\theta} K' \xrightarrow{\theta'} K''$ . Then the component of  $\mathbf{G}(\theta') \cdot \mathbf{G}(\theta)$  at  $[m]$  is calculated as follows,

$$\begin{array}{ccccc}
 [Km] & \xrightarrow{t_{[m]}} & [K'm \circ \theta_{\text{dom}(m)}] & \xrightarrow{[K'm\theta_{\text{dom}(m)}, K''m\theta'_{\text{dom}(m)}\theta_{\text{dom}(m)}]} & [K''m \circ \theta'_{\text{dom}(m)}\theta_{\text{dom}(m)}] \\
 & & \downarrow & \leq & \downarrow \\
 & & [K'm] & \xrightarrow{t'_{[m]}} & [K''m \circ \theta'_{\text{dom}(m)}] \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & [K''m]
 \end{array}$$

The composition of the top two horizontal arrows is

$$[Km, K''m\theta'_{\text{dom}(m)}\theta_{\text{dom}(m)}] = \mathbf{G}(\theta' \cdot \theta),$$

as required.

Since vertical composition is preserved, it is sufficient to check that whiskering is preserved in order to obtain preservation of horizontal composition. This is a straightforward calculation and left to the reader.

**Theorem 5.1.** *The 2-functors  $\mathbf{L}: \mathbf{oGpd} \rightarrow \mathbf{lcCat}$  and  $\mathbf{G}: \mathbf{lcCat} \rightarrow \mathbf{oGpd}$  define a 2-adjunction,*

$$\mathbf{lcCat} \begin{array}{c} \xrightarrow{\mathbf{G}} \\ \perp \\ \xleftarrow{\mathbf{L}} \end{array} \mathbf{oGpd}.$$

*Proof.* In order to prove this we will show that the functors  $\eta_{\mathcal{C}}$  from Section 3.2 form a strong natural transformation of 2-functors  $\eta: \text{Id}_{\mathbf{lcCat}} \Rightarrow \mathbf{LG}$  and the double functors  $\kappa_{\mathcal{G}}$  from Section 3.3 form a strong natural transformation

$\kappa: \mathbf{GL} \Rightarrow \text{Id}_{\mathbf{Gpd}}$  (i.e., all naturality squares commute on the nose). Furthermore we will show that the triangle identity diagrams for  $\eta$  and  $\kappa$  commute on the nose as well.

To consider the naturality for  $\eta$ , let  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  be a functor between left-cancellative categories. Then the naturality square for  $F$  is

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{C}}} & \mathbf{LG}(\mathcal{C}) \\ F \downarrow & & \downarrow \mathbf{LG}(F) \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{D}}} & \mathbf{LG}(\mathcal{D}). \end{array}$$

The composition  $\mathbf{LG}(F) \circ \eta_{\mathcal{C}}$  gives on objects,

$$A \mapsto [1_A] \mapsto [F1_A] = [1_{FA}]$$

and on arrows,

$$\left( A \xrightarrow{f} B \right) \mapsto \left( [1_A] \xrightarrow{[f]} [1_B] \right) \mapsto \left( [1_{FA}] \xrightarrow{[Ff]} [1_{FB}] \right).$$

The other composition,  $\eta_{\mathcal{D}} \circ F$ , gives on objects,

$$A \mapsto FA \mapsto [1_{FA}]$$

and on arrows,

$$\left( A \xrightarrow{f} B \right) \mapsto \left( FA \xrightarrow{Ff} FB \right) \mapsto \left( [1_{FA}] \xrightarrow{[Ff]} [1_{FB}] \right).$$

We conclude that the naturality square commutes on the nose.

To consider the naturality for  $\kappa$ , let  $\varphi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  be a double functor. Then the naturality square becomes

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{GL}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\kappa_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G} \\ \mathbf{GL}(\varphi) \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbf{GL}(\mathcal{H}) & \xrightarrow{\kappa_{\mathcal{H}}} & \mathcal{H} \end{array}$$

To show that this square commutes, we will check what each of the composites does with a double cell in  $\mathbf{GL}(\mathcal{G})$  and its domains and codomains.



A general double cell in  $\mathbf{GL}(\mathcal{G})$  is of the form

$$\begin{array}{ccc} (B', B) & \xrightarrow{h} & (C', C) \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ (D', B) & \xrightarrow{k} & (E', C) \end{array} \quad (6)$$

where

$$\begin{array}{ccc} B' & \xrightarrow{h} & C' \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ D' & \xrightarrow{k} & E' \end{array} \quad (7)$$

is a double cell in  $\mathcal{G}$ . The double functor  $\kappa_{\mathcal{G}}$  sends (6) to (7) and  $\varphi$  sends (7) to the double cell

$$\begin{array}{ccc} \varphi B' & \xrightarrow{\varphi h} & \varphi C' \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ \varphi D' & \xrightarrow{\varphi k} & \varphi E' \end{array} \quad (8)$$

in  $\mathcal{H}$ . For the other composition,  $\mathbf{GL}(\varphi)$  sends (6) to

$$\begin{array}{ccc} (\varphi B', \varphi B) & \xrightarrow{\varphi h} & (\varphi C', \varphi C) \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ (\varphi D', \varphi B) & \xrightarrow{\varphi k} & (\varphi E', \varphi C) \end{array} \quad (9)$$

and  $\kappa_{\mathcal{H}}$  sends (9) to (8) as required for commutativity.

We will now check the triangle identities,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \xrightarrow{\mathbf{G}\eta} & \mathbf{GLG} \\ & \searrow & \downarrow \kappa_{\mathbf{G}} \\ & & \mathbf{G} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{L} & \xrightarrow{\eta\mathbf{L}} & \mathbf{LGL} \\ & \searrow & \downarrow \mathbf{L}\kappa \\ & & \mathbf{L} \end{array}$$

For the first triangle, we check the components at a left-cancellative category  $\mathcal{C}$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathbf{G}\eta_{\mathcal{C}}} & \mathbf{GLG}(\mathcal{C}) \\ & \searrow & \downarrow \kappa_{\mathbf{G}\mathcal{C}} \\ & & \mathbf{G}(\mathcal{C}) \end{array}$$

So we calculate the composition of double functors,  $(\kappa_{\mathbf{GC}}) \circ (\mathbf{G}\eta_{\mathcal{C}})$ . A typical double cell in  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$  is of the form,

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{[n,m]} & [m] \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ [n'] & \xrightarrow{[n',m']} & [m'] \end{array}$$

corresponding to a commutative diagram in  $\mathcal{C}$  of the form,

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & n & \swarrow & m & \\ B & & & & C \\ & n' & \swarrow & m' & \\ & & A' & & \end{array}$$

Its image under  $\mathbf{G}\eta_{\mathcal{C}}$  is

$$\begin{array}{ccc} [[1_A] \xrightarrow{[n]} [1_B]] & \xrightarrow{[[n],[m]]} & [[1_A] \xrightarrow{[m]} [1_C]] \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ [[1_{A'}] \xrightarrow{[n']} [1_B]] & \xrightarrow{[[n'],[m']]} & [[1_{A'}] \xrightarrow{[m']} [1_C]] \end{array}$$

This is the same as

$$\begin{array}{ccc} ([n], [1_B]) & \xrightarrow{[1_A]} & ([m], [1_C]) \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ ([n'], [1_B]) & \xrightarrow{[1_{A'}]} & ([m'], [1_C]) \end{array}$$

Now  $\kappa_{\mathbf{GC}}$  maps this to

$$\begin{array}{ccc} [n] & \xrightarrow{[n,m]} & [m] \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ [n'] & \xrightarrow{[n',m']} & [m'] \end{array}$$

and we see that  $(\kappa_{\mathbf{GC}}) \circ (\mathbf{G}\eta_{\mathcal{C}}) = 1_{\mathcal{C}}$  as required.

To verify the other triangle identity, let  $\mathcal{G}$  be an ordered groupoid. Then an arrow of  $\mathbf{L}(\mathcal{G})$  is of the form  $A \xrightarrow{h} B \leq C$  (a formal composite of a horizontal and vertical arrow in  $\mathcal{G}$ ). Now  $\eta_{\mathbf{L}(\mathcal{G})}$  send this arrow to

$$[1_A] \xrightarrow{[h, \leq]} [1_C]$$

and this is equivalent to

$$[A \dashrightarrow A] \xrightarrow{[h]} [B \dashrightarrow C] \leq [C \dashrightarrow C]$$

where the latter is seen as the formal composite of a horizontal and vertical arrow in  $\mathbf{GL}(\mathcal{G})$ . Note that  $\mathbf{L}\kappa_{\mathcal{G}}$  sends this composite to the formal composite  $A \xrightarrow{h} B \leq C$ , as required.

This concludes the proof of Theorem 5.1.  $\square$

We write  $\mathbf{oGpd}_{\max}$  for the full sub-2-category of ordered groupoids with maximal objects. (Note that the morphisms in this category need not send maximal objects to maximal objects.) As was noticed by Lawson and Steinberg in Section 2.1 of [16], the functor  $\mathbf{G}$  sends each left-cancellative category to an object of  $\mathbf{oGpd}_{\max}$ . It is also easy to see that the restricted functor  $\mathbf{L}: \mathbf{oGpd}_{\max} \rightarrow \mathbf{lcCat}$  is still essentially surjective on objects. With this restriction we obtain an equivalence of 2-categories.

**Corollary 5.2.** *The 2-functors  $\mathbf{L}: \mathbf{oGpd}_{\max} \rightarrow \mathbf{lcCat}$  and  $\mathbf{G}: \mathbf{lcCat} \rightarrow \mathbf{oGpd}_{\max}$  define a 2-adjoint biequivalence,*

$$\mathbf{lcCat} \simeq \mathbf{oGpd}_{\max}.$$

*Proof.* The components of both  $\eta$  and  $\kappa$  are essential equivalences (of categories and ordered groupoids respectively). In order to get a biequivalence we need to show that these components have pseudo inverses. To obtain a pseudo inverse for  $\eta_C$ , we need to choose a representative  $(\bar{m}: \bar{A}_m \rightarrow B)$  for each subobject  $[m: A \rightarrow B]$ . Then each arrow  $[h]: [m: A \rightarrow B] \rightarrow [m': A' \rightarrow B']$  has precisely one representative  $\bar{h}_{m,m'}: \bar{A}_m \rightarrow \bar{A}'_{m'}$  such that  $[\bar{h}_{m,m'}]: [\bar{m}: \bar{A}_m \rightarrow B] \rightarrow [\bar{m}': \bar{A}'_{m'} \rightarrow B']$  is the same as  $[h]: [m: A \rightarrow B] \rightarrow [m': A' \rightarrow B']$ . So a pseudo inverse of  $\eta_C$  can be defined by sending an object  $[m: A \rightarrow B]$  to  $\bar{A}_m$  and an arrow  $[h]: [m] \rightarrow [m']$  to  $\bar{h}_{m,m'}: \bar{A}_m \rightarrow \bar{A}'_{m'}$ .

To define a pseudo inverse for  $\kappa_{\mathcal{G}}$ , write  $\hat{A}$  for the maximal object with  $A \leq \hat{A}$  in  $\mathcal{G}$ . Note that when  $A \leq A'$ , then  $\hat{A} = \hat{A}'$ . Then a pseudo inverse for  $\kappa_{\mathcal{G}}$  is given by the assignment

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{h} & C \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 D & \xrightarrow{k} & E
 \end{array}
 \quad \mapsto \quad
 \begin{array}{ccc}
 (B, \hat{B}) & \xrightarrow{h} & (C, \hat{C}) \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 (D, \hat{B}) & \xrightarrow{k} & (E, \hat{C})
 \end{array}$$

□

## 6. Applications

### 6.1 Presheaves on Ordered Groupoids

In terms of double categories, presheaves on ordered groupoids as defined in [17] can be described similarly to presheaves on ordinary categories. The role of the category **Set** is now taken by the double category **QSet** of quartets in the category of sets (as defined by Ehresmann): the objects of **QSet** are sets, the horizontal and vertical arrows are functions and the double cells are commutative squares in **Set**. Then a presheaf  $F$  on an ordered groupoid  $\mathcal{G}$  is a functor

$$F: \mathcal{G}^{\text{op,op}} \rightarrow \mathbf{QSet}, \tag{10}$$

which is contravariant in both the horizontal and vertical direction and sends double cells to commutative squares. Note that by the symmetry of the double category **QSet**, horizontal and vertical transformations between such presheaf functors amount to the same thing: a collection of functions

$$\alpha_A: FA \rightarrow F'A$$

which is natural in  $A$  both when considered with respect to horizontal arrows and with respect to vertical arrows. The category **PreSh**( $\mathcal{G}$ ) is then defined as the category of double functors as in (10) with these transformations as arrows.

Lawson and Steinberg [17] show that there is an isomorphism of categories

$$\mathbf{PreSh}(\mathcal{G}) \cong \mathbf{PreSh}(\mathbf{L}(\mathcal{G})). \tag{11}$$

Furthermore, since any equivalence of categories induces an equivalence between the corresponding presheaf categories, we have

$$\mathbf{PreSh}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathbf{LG}(\mathcal{C})),$$

and by combining these equivalences we obtain,

$$\mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(\mathcal{C})) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathcal{C}) \text{ and } \mathbf{PreSh}(\mathcal{G}) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathbf{GL}(\mathcal{G})). \quad (12)$$

We will now provide an explicit description of the functors that give the equivalence  $\mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(\mathcal{C})) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathcal{C})$ , which will be needed when proving Proposition 6.5.

**Proposition 6.1.** *The equivalence of categories  $\mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(\mathcal{C})) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathcal{C})$  is given by a pair of functors*

$$\mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(\mathcal{C})) \begin{array}{c} \xrightarrow{(\tilde{-})} \\ \xleftarrow{(\tilde{-})} \end{array} \mathbf{PreSh}(\mathcal{C})$$

*Proof.* Let  $\Phi$  be a presheaf on  $\mathcal{C}$ . To define the corresponding presheaf  $\tilde{\Phi}$  on  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$ , we need to make some choices. For each objects  $[m: A \rightarrow B]$  in  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$ , choose a representative  $[\bar{m}: \bar{A}_m \rightarrow B]$ . For each horizontal arrow  $[m: A \rightarrow B] \xrightarrow{[m,n]} [n: A \rightarrow C]$  there are unique arrows  $\mu_m: A \rightarrow \bar{A}_m$  and  $\mu_n: A \rightarrow \bar{A}_n$  and we write

$$[\bar{m}] \xrightarrow{\langle \mu_n \circ \mu_m^{-1} \rangle} [\bar{n}]$$

for the arrow  $[m, n]$ . For a vertical arrow  $[n_1] \xrightarrow{\bullet} [n_2]$ , there is a unique arrow  $v_{n_1, n_2}$  in  $\mathcal{C}$  such that  $\bar{n}_2 = \bar{n}_1 v_{n_1, n_2}$ , so we label the vertical arrow as

$$[\bar{n}_1] \xrightarrow{\{v_{n_1, n_2}\}} [\bar{n}_2]$$

The reader may check that if

$$\begin{array}{ccc} [n_1: X \rightarrow B] & \xrightarrow{[n_1, n_2]} & [n_2: X \rightarrow C] \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ [m_1: Y \rightarrow B] & \xrightarrow{[m_1, m_2]} & [m_2: Y \rightarrow C] \end{array}$$

is a double cell in  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$ , then the corresponding square

$$\begin{array}{ccc} [\bar{n}_1: \bar{X}_{n_1} \rightarrow B] & \xrightarrow{\langle \mu_{n_2} \mu_{n_1}^{-1} \rangle} & [\bar{n}_2: \bar{X}_{n_2} \rightarrow C] \\ \{v_{n_1, m_1}\} \downarrow & \leq & \downarrow \{v_{n_2, m_2}\} \\ [\bar{m}_1: \bar{Y}_{m_1} \rightarrow B] & \xrightarrow{\langle \mu_{m_2} \mu_{m_1}^{-1} \rangle} & [\bar{m}_1: \bar{Y}_{m_1} \rightarrow C] \end{array}$$

gives rise to a commutative square in  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{array}{ccc} \bar{X}_{n_1} & \xrightarrow{\mu_{n_2} \mu_{n_1}^{-1}} & \bar{X}_{n_2} \\ v_{n_1, m_1} \downarrow & & \downarrow v_{n_2, m_2} \\ \bar{Y}_{m_1} & \xrightarrow{\mu_{m_2} \mu_{m_1}^{-1}} & \bar{Y}_{m_1} \end{array}$$

The corresponding presheaf  $\tilde{\Phi}$  on  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$  is then defined by

- On objects:  $\tilde{\Phi}([m: A \rightarrow B]) = \Phi(\bar{A}_m)$ ;
- On a horizontal arrow  $[m: A \rightarrow B] \xrightarrow{[m, n]} [n: A \rightarrow C]$ , define  $\tilde{\Phi}([m, n]) = \Phi(\mu_m \mu_n^{-1}): \Phi(\bar{A}_n) \rightarrow \Phi(\bar{A}_m)$ .
- On a vertical arrow  $[m: A \rightarrow B] \xrightarrow{(m, m')} [m': A' \rightarrow B]$ , define  $\tilde{\Phi}((m, n)) = \Phi(v_{m, m'}): \Phi(\bar{A}'_{m'}) \rightarrow \Phi(\bar{A}_m)$ .

We leave it to the reader to verify that this gives a well-defined presheaf on  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$ .

In the opposite direction, let  $\Psi$  be a presheaf on  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$ . Then define the presheaf  $\check{\Psi}$  on  $\mathcal{C}$  by  $\check{\Psi}(X) = \Psi[1_X: X \rightarrow X]$ . For an arrow  $f: X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$ , we define  $\check{\Psi}(f)$  as the composite of the images under  $\Psi$  of the arrows in the diagram,

$$\begin{array}{ccc} [1_A] & \xrightarrow{[1, f]} & [f] \\ & & \downarrow v_f \\ & & [1_B] \end{array}$$

□

In particular, we see that a presheaf topos is an étendue if and only if it can be presented as presheaves on an ordered groupoid. The following argument shows that the isomorphisms and equivalences from Equations (11) and (12) are the components of natural transformations  $\mathbf{PreSh}(-) \Rightarrow \mathbf{PreSh}(\mathbf{L}(-))$  and  $\mathbf{PreSh}(-) \Rightarrow \mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(-))$ .

**Remark 6.2.** The following arguments show that when ordered groupoid morphisms and functors of left-cancellative categories correspond to each other under the biequivalence given in Corollary 5.2, they produce suitably isomorphic morphisms of presheaf categories.

1. By just spelling out the definitions, we see that for a morphism

$$M: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}',$$

the induced functor between presheaf toposes is the same as the one induced by its  $\mathbf{L}$ -image,  $\mathbf{L}(M): \mathbf{L}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{L}(\mathcal{G}')$ , in the sense that the following diagram commutes,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{PreSh}(\mathcal{G}') & \xrightarrow{M^*} & \mathbf{PreSh}(\mathcal{G}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbf{PreSh}(\mathbf{L}(\mathcal{G}')) & \xrightarrow{(\mathbf{L}(M))^*} & \mathbf{PreSh}(\mathbf{L}(\mathcal{G})) \end{array}$$

where the vertical isomorphisms are the ones from (11).

2. The biequivalence  $\mathbf{oGpd}_{\max} \simeq \mathbf{lcCat}$  induces the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{C}' \\ \simeq \downarrow & \cong & \downarrow \simeq \\ \mathbf{LG}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathbf{LG}(F)} & \mathbf{LG}(\mathcal{C}'). \end{array}$$

Combining this with the result in the first point of this remark, we

obtain the following,

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{PreSh}(\mathcal{C}') & \xrightarrow{F^*} & \mathbf{PreSh}(\mathcal{C}) \\
\cong \downarrow & \cong & \downarrow \cong \\
\mathbf{PreSh}(\mathbf{LG}(\mathcal{C}')) & \xrightarrow{(\mathbf{LG}(F))^*} & \mathbf{PreSh}(\mathbf{LG}(\mathcal{C})) \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
\mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(\mathcal{C}')) & \xrightarrow{(\mathbf{G}(F))^*} & \mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(\mathcal{C}))
\end{array}$$

This means that  $M^*$  has a particular property, such as being an equivalence of categories or being left exact, if and only if  $(\mathbf{L}(M))^*$  has it and similarly,  $F^*$  has a property if and only if  $(\mathbf{G}(F))^*$  has it.

## 6.2 Sheaves on Ehresmann Sites

In this section we review the concept of an Ehresmann topology and reformulate it in double categorical language. An Ehresmann topology as introduced by Lawson and Steinberg [17] consists of an assignment of special order ideals (so-called *covering ideals*) of the poset  $\downarrow A = \{A' \leq A\}$  for each object  $A$ , satisfying a number of conditions. Since  $\downarrow A$  is part of the vertical structure of the ordered groupoid as double category, we will call these order ideals *vertical sieves*.

In Lawson and Steinberg's presentation, the condition on a Grothendieck topology to be closed under pullback was matched by the condition that an Ehresmann topology be closed under a notion of ' $\star$ -conjugation'. In our set-up we will need the following notion.

**Notation 6.3.** For a vertical sieve  $\mathcal{B}$  on an object  $B$  and a diagram

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{f} & B' \\
& & \downarrow \\
& & B
\end{array}$$

in an ordered groupoid  $\mathcal{G}$ , we define  $f^*\mathcal{B}$  to be the following vertical sieve on  $A$ ,

$$f^*\mathcal{B} = \{A' \twoheadrightarrow A \mid \text{cod}(f|_{A'}) = B'' \text{ with } (B'' \twoheadrightarrow B) \in \mathcal{B}\}.$$



Note that  $\text{cod}(f|_{A'}) = B''$  if and only if there is a double cell

$$\begin{array}{ccc} A' & \longrightarrow & B'' \\ \downarrow & \leq & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B' \end{array}$$

**Definition 6.4.** An Ehresmann topology on an ordered groupoid  $\mathcal{G}$  is given by an assignment of a collection  $T(A)$  of vertical sieves to each object  $A$ , such that:

- (ET.1) The trivial sieve  $(\downarrow A) \in T(A)$ .
- (ET.2) If  $\mathcal{B} \in T(B)$  and  $f: A \rightarrow B'$  with  $B' \twoheadrightarrow B$ , then  $f^*\mathcal{B} \in T(A)$ .
- (ET.3) Let  $\mathcal{A} \in T(A)$  and let  $\mathcal{B}$  be any vertical sieve on  $A$ . If for each

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & A' \\ & & \downarrow \\ & & A \end{array}$$

with  $(A' \twoheadrightarrow A) \in \mathcal{A}$ ,  $f^*\mathcal{B} \in T(C)$ , then  $\mathcal{B} \in T(A)$ .

Lawson and Steinberg show that Grothendieck topologies on a left-cancellative category  $\mathcal{C}$  are in one-to-one correspondence with Ehresmann topologies on  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$  and conversely, that Ehresmann topologies on an ordered groupoid  $\mathcal{G}$  are in one-to-one correspondence with Grothendieck topologies on  $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ . We summarize the correspondence in our notation.

Given an Ehresmann topology  $T$  on an ordered groupoid  $\mathcal{G}$ , the corresponding Grothendieck topology  $J_T$  on  $\mathbf{L}(\mathcal{G})$  is given by

$$\{ B_i \xrightarrow{m_i} A'_i \twoheadrightarrow A \mid i \in I \} \in J_T(A)$$

if and only if

$$\{ A'_i \twoheadrightarrow A \mid i \in I \} \in T(A).$$

Note that, given a Grothendieck topology  $J$  on  $\mathbf{L}(\mathcal{G})$ , the corresponding Ehresmann topology  $T_J$  on  $\mathcal{G}$  can be recovered as follows:  $T_J(A)$  consists of those vertical sieves  $\mathcal{A}$  such that

$$\{A' \xrightarrow{1_{A'}} A' \multimap A \mid A' \multimap A \text{ in } \mathcal{A}\} \in J(A).$$

Given a Grothendieck topology  $J$  on a left-cancellative category  $\mathcal{C}$ , the corresponding Ehresmann topology  $T_J$  on  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$  is given by

$$T_J([m: A \rightarrow B]) = \{[mS]; S \in J(A)\},$$

where

$$[mS] = \{[mn] \multimap [m] \mid n \in S\}.$$

Furthermore, given an Ehresmann topology  $T$  on  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$ , the corresponding Grothendieck topology  $J_T$  is defined by:

$$\{m_i: A_i \rightarrow A \mid i \in I\} \in J_T(A)$$

if and only if

$$\{[m_i] \multimap [1_A] \mid i \in I\} \in T([1_A]).$$

**Proposition 6.5.** *1. (Lawson and Steinberg) The category of sheaves on an Ehresmann site  $(\mathcal{G}, T)$  is equivalent to the category of sheaves on  $(\mathbf{L}(\mathcal{G}), J_T)$ .*

*2. The category of sheaves on a left-cancellative site  $(\mathcal{C}, J)$  is equivalent to the category of sheaves on  $(\mathbf{G}(\mathcal{C}), T_J)$ .*

*Proof.* We want to show that the maps involved in the equivalences listed at the beginning of Section 6.1 send sheaves to sheaves. For part 1, this was established by Lawson and Steinberg in [17, Theorem 4.4].

To prove part 2, recall the functors given in the proof of Proposition 6.1 giving an equivalence of presheaf categories

$$\mathbf{PreSh}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(\mathcal{C})).$$

We need to show that if  $\Phi$  is a sheaf, so is  $\tilde{\Phi}$  and if  $\Psi$  is a sheaf, so is  $\check{\Psi}$ .

So assume that  $\Phi$  is a sheaf on the site  $(\mathcal{C}, J)$ . We want to show that  $\tilde{\Phi}$  is a sheaf on the Ehresmann site  $(\mathbf{G}(\mathcal{C}), T_J)$ . So let

$$\{[h_i: A_i \rightarrow B] \dashrightarrow [h: A \rightarrow B] \mid i \in I\} \in T_J([h])$$

and let  $\varphi_i \in \tilde{\Phi}([h_i])$  with  $i \in I$  be a matching family. Then for each index  $i$ ,  $\varphi_i \in \Phi(\bar{A}_{i,h_i})$  and there is an arrow  $k_i: \bar{A}_{i,h_i} \rightarrow \bar{A}_h$  that makes the following triangle commute,

$$\begin{array}{ccc} \bar{A}_{i,h_i} & \xrightarrow{k_i} & \bar{A}_h \\ & \searrow \bar{h}_i & \swarrow \bar{h} \\ & B & \end{array}$$

Then it follows that  $\{k_i \mid i \in I\} \in J(\bar{A}_h)$  and the  $\varphi_i$  form a matching family for  $\Phi$  for this cover. Since  $\Phi$  is a sheaf, there is a unique amalgamation  $\bar{\varphi} \in \Phi(\bar{A}_h) = \tilde{\Phi}([h])$ . This provides the required amalgamation of the original family. The fact that it is unique follows from the fact that any other amalgamation in  $\tilde{\Phi}([h])$  would correspond to an amalgamation of the  $\varphi_i$  as matching family in  $\Phi$  and we have uniqueness there. We conclude that  $\tilde{\Phi}$  is a sheaf.

Now let  $\Psi$  be a sheaf on the Ehresmann site  $(\mathbf{G}(\mathcal{C}), T_J)$ . We want to show that  $\check{\Psi}$  is a sheaf on the Grothendieck site  $(\mathcal{C}, J)$ . So let  $\{A_i \xrightarrow{f_i} A \mid i \in I\} \in J(A)$  and let  $\psi_i \in \check{\Psi}(A_i) = \Psi([1_{A_i}])$  for  $i \in I$  be a matching family. Then  $\{[f_i] \dashrightarrow [1_A]\} \in T_J([1_A])$  and for each index  $i \in I$  there is a horizontal arrow  $[f_i] \xrightarrow{[f_i, 1_{A_i}]} [1_{A_i}]$ . Then let  $\psi'_i = \Psi([f_i, 1_{A_i}])(\psi_i) \in \Psi([f_i])$ . These form a matching family for the cover  $\{[f_i] \dashrightarrow [1_A]\}$  and since  $\Psi$  is a sheaf, there is a unique amalgamation  $\bar{\psi} \in \Psi([1_A]) = \check{\Psi}(A)$ . This also an amalgamation for the original matching family  $\psi_i$ . Uniqueness follows from the fact that amalgamations for the  $\psi'_i$  in  $\Psi$  correspond precisely to amalgamations for the  $\psi_i$  in  $\check{\Psi}$ .

We conclude that the equivalence of presheaf categories  $\mathbf{PreSh}(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{PreSh}(\mathbf{G}(\mathcal{C}))$  restricts to an equivalence of sheaf categories  $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \simeq \mathbf{Sh}(\mathbf{G}(\mathcal{C}), T_J)$ .  $\square$

### 6.3 Functors Between Categories of Sites

Let  $(\mathcal{C}, J)$  and  $(\mathcal{C}', J')$  be two Grothendieck sites. A functor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  induces a geometric morphism  $\varphi_F: \text{Sh}(\mathcal{C}', J') \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}, J)$  (with  $(\varphi_F)^*$  given by composition with  $F$ ) if and only if  $F$  is both covering preserving and covering flat [11, 12]. We recall the definition of these concepts.

**Definition 6.6.** For Grothendieck sites  $(\mathcal{C}, J)$  and  $(\mathcal{C}', J')$  a functor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  is

1. covering preserving if for any covering sieve  $\mathcal{A} \in J(A)$ , its image is again a covering sieve; i.e.,  $F\mathcal{A} \in J'(FA)$ ;
2. covering flat if for each finite diagram  $D: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  and any cone  $T$  over  $F \circ D$  in  $\mathcal{C}'$  with vertex  $U$ , the sieve
 
$$\{h: V \rightarrow U \mid Th \text{ factors through the } F\text{-image of some cone over } D\}$$
 is a covering sieve in  $\mathcal{C}'$ .

Such a functor is called a morphism between Grothendieck sites.

**Remark 6.7.** If the sites have all finite limits we could require the functors between them to just preserve those limits. However, our functors  $\mathbf{L}$  and  $\mathbf{G}$  don't preserve this property (for instance, when  $\mathcal{C}$  is a site with all finite limits,  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$  does not necessarily have products in its vertical category), so in this case it makes more sense to work with covering-flat morphisms.

We want to use the results from Remark 6.2 and Proposition 6.5 to introduce the corresponding concepts for double functors between ordered groupoids to characterize the morphisms between Ehresmann sites that give rise to geometric morphisms between the induced sheaf toposes. These will then be called *morphisms of Ehresmann sites*.

We need the notion of a cone over a diagram in a double category. The relevant notion for ordered groupoids is as follows.

**Definition 6.8.** 1. A finite diagram in a double category  $\mathcal{G}$  consists of a finite ordered groupoid  $\mathbb{I}$  and a double functor  $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{G}$ . We write  $D_i = D(i)$  for any object  $i$  in  $\mathbb{I}$ , and  $D_i \xrightarrow{D\alpha} D_{i'}$  for the image of a horizontal arrow  $i \xrightarrow{\alpha} i'$  under  $D$  and  $D_i \xrightarrow{D(i,i')} \bullet \rightarrow D_{i'}$  for the image of a vertical arrow  $i \xrightarrow{\bullet} i'$  under  $D$ .

2. An hv-cone over a diagram  $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{G}$  consists of an object  $U$  and a family of arrows

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\xi_i} & E_i \\ & & \downarrow \\ & & D_i \end{array}$$

for each  $i \in I$  such that for each horizontal arrow  $i \xrightarrow{\alpha} i'$  in  $\mathbb{I}$ , the following triangle of horizontal arrows exists and commutes:

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \xi_i \swarrow & & \searrow \xi_{i'} \\ E_i & \xrightarrow{D_{\alpha|E_i}} & E_{i'} \end{array}$$

and for each vertical arrow  $i \rightarrow i'$ ,  $\xi_i = \xi_{i'}$ .

With this terminology in place we can define the notion of being covering flat for maps between Ehresmann sites as in the following definition.

**Definition 6.9.** A morphism of Ehresmann sites  $(\mathcal{G}, T) \rightarrow (\mathcal{G}', T')$  is a double functor  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  which satisfies the following two conditions:

- It is covering preserving: If  $\mathcal{A} \in T(A)$  then  $F\mathcal{A} \in T'(FA)$ .
- It is covering flat: For each finite diagram,  $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{G}$  and each hv-cone

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\xi_i} & E_i \quad \text{with } i \in I, \\ & & \downarrow \\ & & FD_i \end{array}$$

over  $FD$  in  $\mathcal{G}'$ , there is a covering sieve

$$\{U'_k \rightarrow U \mid k \in K\} \in T(U)$$

such that for each  $k \in K$  there is an hv-cone

$$\begin{array}{ccc} T_k & \xrightarrow{\theta_{ik}} & A_{ik} \quad \text{in } \mathcal{G} \\ & & \downarrow \\ & & D_i \end{array}$$

and a diagram

$$\begin{array}{ccc} U'_k & \xrightarrow{h_k} & T'_k \\ & & \downarrow \\ & & FT'_k \end{array}$$

such that

$$\begin{array}{ccc} U'_k \xrightarrow{\xi_i|_{U'_k}} E'_i & & U'_k \xrightarrow{h_k} T'_k \xrightarrow{F\theta_i|_{T'_k}} E'_i \\ \downarrow & \equiv & \downarrow \\ E_i & & FA_{ik} \\ \downarrow & & \downarrow \\ FD_i & & FD_i \end{array}$$

for all objects  $i$  in  $\mathbb{I}$ .

**Proposition 6.10.** *Given left-cancellative Grothendieck sites  $(\mathcal{C}, J)$  and  $(\mathcal{C}', J')$ , a functor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  is covering preserving if and only if its image  $\mathbf{G}(F)$  is covering preserving as a morphism of Ehresmann sites  $(\mathbf{G}(\mathcal{C}), T_J) \rightarrow (\mathbf{G}(\mathcal{C}'), T_{J'})$ .*

*Proof.* Suppose first that  $F$  is covering preserving and let  $\{ [m_i] \twoheadrightarrow [m] \}_{i \in I}$  be a vertical covering sieve of  $[m: A \rightarrow B]$  in  $\mathbf{G}(\mathcal{C})$ . This provides a covering sieve  $\{ f_i: A_i \rightarrow A \}_{i \in I}$  of  $A$  in  $\mathcal{C}$  such that, for all  $i \in I$ ,  $m_i = m f_i$ . Since  $F$  is a covering-preserving functor, the  $F(f_i)$  cover  $F(A)$  and  $F(m_i) = F(m f_i) = F(m)F(f_i)$  in  $\mathcal{C}'$  for all  $i \in I$ . Therefore, the data  $\{ [F(m_i)] \twoheadrightarrow [F(m)] \}_{i \in I}$  are a covering vertical sieve of  $[F(m)]$  in  $\mathbf{G}(\mathcal{C}')$ ;  $\mathbf{G}(F)$  is covering preserving.

Conversely, suppose that  $\mathbf{G}(F)$  is covering preserving and let  $\{ m_i: A_i \rightarrow A \}_{i \in I}$  be a covering sieve of  $A$  in  $\mathcal{C}$ . Then  $\{ [m_i] \twoheadrightarrow [1_A] \}_{i \in I}$  is a covering vertical sieve of  $[1_A]$  in  $\mathcal{C}$  and, since  $\mathbf{G}(F)$  is covering preserving,  $\{ [F(m_i)] \twoheadrightarrow [F(1_A)] \}_{i \in I}$  is a covering vertical sieve of  $[F(1_A)]$  in  $\mathbf{G}(\mathcal{C}')$ . Therefore, the  $F(m_i)$  are a covering sieve of  $F(A)$  in  $\mathcal{C}'$ ;  $F$  is covering preserving.  $\square$

**Proposition 6.11.** *Given left-cancellative Grothendieck sites  $(\mathcal{C}, J)$  and  $(\mathcal{C}', J')$ , if a functor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  is covering flat then its image  $\mathbf{G}(F)$  is covering flat as a morphism of Ehresmann sites,  $(\mathbf{G}(\mathcal{C}), T_J) \rightarrow (\mathbf{G}(\mathcal{C}'), T_{J'})$ .*

*Proof.* Let  $F: (\mathcal{C}, J) \rightarrow (\mathcal{C}', J')$  be covering flat. We want to show that  $\mathbf{G}(F): (\mathbf{G}(\mathcal{C}), T_J) \rightarrow (\mathbf{G}(\mathcal{C}'), T_{J'})$  is covering flat as a map of Ehresmann sites. So let  $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathbf{G}(\mathcal{C})$  be a finite diagram. Note that in this case each  $D_i$  has the form  $[D'_i \xrightarrow{d_i} D_i]$  where  $D'_i \xrightarrow{d_i} D_i$  is an arrow in  $\mathcal{C}$ . Now let

$$\begin{array}{ccc} [U' \xrightarrow{u} U] & \xrightarrow{\xi_i} & [E'_i \xrightarrow{e_i} E_i] \\ & & \downarrow \\ & & [FD'_i \xrightarrow{Fd_i} FD_i] \end{array}$$

be an hv-cone over the diagram  $\mathbf{G}(F) \circ D: \mathbb{I} \rightarrow \mathbf{G}(\mathcal{C}')$ . This means that  $E_i = FD_i$  and there is an arrow  $E'_i \xrightarrow{v_i} FD_i$  in  $\mathcal{C}'$  such that  $Fd_i \circ v_i = e_i$  and such that  $U' \xrightarrow{v_i \xi_i} FD_i$  is a cone in  $\mathcal{C}'$  over the diagram  $F\hat{D}: \mathbf{L}(\mathbb{I}) \rightarrow \mathcal{C}'$ , where  $\hat{D}$  is the adjunct of  $D$ . In particular, if  $D_i$  has the form  $[D'_i \xrightarrow{d_i} D_i]$  then  $\hat{D}_i = D'_i$ .

Since  $F$  is covering flat, there is a Grothendieck covering  $\{U'_k \xrightarrow{\varphi_k} U' \mid k \in K\} \in J(U')$  such that  $v_i \xi_i \varphi_k = F(\theta_{ik}) \psi_k$  where  $\psi_k: U'_k \rightarrow FT_k$  for some cone  $T_k \xrightarrow{\theta_{ik}} D'_i$  over  $\hat{D}$  in  $\mathcal{C}$ .

This gives rise to an Ehresmann covering

$$\{[U'_k \xrightarrow{u\varphi_k} U] \rightarrow [U' \xrightarrow{u} U] \mid k \in K\} \in T_{J'}$$

with the following diagrams in  $\mathbf{G}(\mathcal{C}')$ :

$$\begin{array}{ccc} [U'_k \xrightarrow{u\varphi_k} U] & \xrightarrow{[1_{U'_k}]} & [U'_k \xrightarrow{\psi_k} FT_k] & \xrightarrow{[1_{U'_k}]} & [U'_k \xrightarrow{F(d_i\theta_{ik})\psi_k} FD_i] \\ & & \downarrow & \leq & \downarrow \\ & & [FT_k \xrightarrow{1_{FT_k}} FT_k] & \xrightarrow{[1_{FT_k}]} & [FT_k \xrightarrow{F(d_i\theta_{ik})} FD_i] \\ & & & & \downarrow \\ & & & & [FD'_i \xrightarrow{Fd_i} FD_i] \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc}
 [U'_k \xrightarrow{u\varphi_k} U] & \xrightarrow{[1_{U'_k}]} & [U'_k \xrightarrow{e_i\xi_i\varphi_k} FD_i] \\
 \downarrow & \leq & \downarrow \\
 [U' \xrightarrow{u} U] & \xrightarrow{[\xi_i]} & [E'_i \xrightarrow{e_i} FD_i] \\
 & & \downarrow \\
 & & [FD'_i \xrightarrow{Fd_i} FD_i]
 \end{array}$$

Note that this means that  $[\xi_i]_{[U'_k \xrightarrow{u\varphi_k} U]} = [1_{U'_k}]$  as in this last diagram. Furthermore,  $e_i\xi_i\varphi_k = F(d_i)v_i\xi_i\varphi_k = F(d_i\theta_{ik})\psi_k$ , so we have that the horizontal arrows on the tops of these diagrams are equal as required.

We conclude that  $\mathbf{G}$  is covering flat. □

**Proposition 6.12.** *Given Ehresmann sites  $(\mathcal{G}, T)$  and  $(\mathcal{G}', T')$ , if the double functor  $M: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  is covering flat then its image  $\mathbf{L}(M)$  is covering flat as a morphism of Grothendieck sites  $(\mathbf{L}(\mathcal{G}), J_T) \rightarrow (\mathbf{L}(\mathcal{G}'), J_{T'})$ .*

*Proof.* Let  $M: (\mathcal{G}, T) \rightarrow (\mathcal{G}', T')$  be covering flat. Now let  $D: \mathcal{J} \rightarrow \mathbf{L}(\mathcal{G})$  be a diagram, where  $\mathcal{J}$  is a finite left-cancellative category. By the adjunction,  $\mathbf{G} \dashv \mathbf{L}$ , this induces a diagram  $\hat{D}: \mathbf{G}(\mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{G}$ . Now let  $U \xrightarrow{\xi_j} \mathbf{L}(M)(D_j)$  be a cone over  $\mathbf{L}(M) \circ D$  in  $\mathbf{L}(\mathcal{G}')$ . Note that each  $\xi_j$  has the form

$$U \xrightarrow{\hat{\xi}_j} E_j \leq \mathbf{L}(M)(D_j) = M(D_j).$$

So the  $\hat{\xi}_j$  give rise to an hv-cone over  $M \circ \hat{D}$  in  $\mathcal{G}'$  with components:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\hat{\xi}_j} & E_j \\
 & & \downarrow \\
 & & M(D_j)
 \end{array}$$

Since  $M$  is covering flat there is an Ehresmann covering  $\{U'_k \rightarrow U \mid k \in$



$K\} \in T'(U)$  such that for each  $k \in K$  there is an hv-cone

$$\begin{array}{c} T_k \xrightarrow{\tau_k} D'_{j,k} \\ \downarrow \\ D_j \end{array}$$

in  $\mathcal{G}$  with arrows  $U'_k \xrightarrow{\theta_k} T'_k \xrightarrow{\bullet} MT_k$  for each  $k \in K$ , such that

$$\begin{array}{ccc} U'_k \xrightarrow{\hat{\xi}_j|_{U'_k}} E'_{i,k} & & U'_k \xrightarrow{\theta_k} T'_k \xrightarrow{M\tau_k|_{T'_k}} D''_{j,k} \\ \downarrow & \equiv & \downarrow \\ E_j & & MD'_{j,k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M(D_j) & & M(D_j) \end{array}$$

It follows that the family  $\{U'_k \leq U \mid k \in K\}$  is a Grothendieck cover of  $U$  in  $\mathbf{L}(\mathcal{G}')$  and the  $T_k$  for  $k \in K$  give cones in  $\mathbf{L}(\mathcal{G})$  such that the cones  $((\hat{\xi})_j|_{U'_k}, \leq)$  factor through their images. We conclude that  $\mathbf{L}(M)$  is covering flat.  $\square$

**Proposition 6.13.** *For a double functor  $M: (\mathcal{G}, T) \rightarrow (\mathcal{G}', T')$  between Ehresmann sites with maximal elements, if the double functor*

$$\mathbf{GL}(M): (\mathbf{GL}(\mathcal{G}), T_{J_T}) \rightarrow (\mathbf{GL}(\mathcal{G}'), T_{J_{T'}})$$

*is covering flat, then  $M$  is covering flat.*

*Proof.* Let  $M: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  be a double functor such that  $\mathbf{GL}(M)$  is covering flat. Let  $D: \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{G}$  be a finite diagram, and

$$\begin{array}{c} U \xrightarrow{\xi_i} E_i \\ \downarrow \\ MD_i \end{array} \tag{13}$$

an hv-cone in  $\mathcal{G}'$ . For each object  $D_i$ , let  $\hat{D}_i$  be the maximal element in the vertical category with  $D_i \dashrightarrow \hat{D}_i$ . Then define the diagram  $\bar{D}: \mathbb{I} \rightarrow \mathbf{GL}(\mathcal{G})$  by  $\bar{D}(i) = (D_i, \hat{D}_i)$ ,  $\bar{D}(i \xrightarrow{\alpha} i') = ((D_i, \hat{D}_i) \xrightarrow{D_\alpha} (D_{i'}, \hat{D}_{i'}))$ , and  $\bar{D}(i \dashrightarrow i') = ((D_i, \hat{D}_i) \dashrightarrow (D_{i'}, \hat{D}_{i'}) = (D_{i'}, \hat{D}_{i'}))$ . It follows that  $\mathbf{GL}(M)(\bar{D}_i) = (MD_i, M\hat{D}_i)$ . The hv-cone (13) gives rise to an hv-cone

$$\begin{array}{ccc} (U, U) & \xrightarrow{\xi_i} & (E_i, M\hat{D}_i) \\ & & \downarrow \\ & & (MD_i, M\hat{D}_i) = M\bar{D}_i \end{array}$$

in  $\mathbf{GL}(\mathcal{G}')$ . Since  $\mathbf{GL}(M)$  is covering flat there is an Ehresmann covering  $\{(U'_\ell, U) \dashrightarrow (U, U) \mid \ell \in L\} \in T_{J_{T'}}(U, U)$  with for each  $\ell \in L$  an hv-cone

$$\begin{array}{ccc} (T_\ell, \hat{T}_\ell) & \xrightarrow{\tau_{\ell, i}} & (A_{\ell, i}, \hat{D}_i) \\ & & \downarrow \\ & & (D_i, \hat{D}_i) \end{array}$$

in  $\mathbf{GL}(\mathcal{G})$  with a horizontal arrow  $(U'_\ell, U) \xrightarrow{\theta_\ell} (T'_\ell, M\hat{T}_\ell)$  such that

$$\begin{array}{ccccc} (U'_\ell, U) & \xrightarrow{\theta_\ell} & (T'_\ell, M\hat{T}_\ell) & \xrightarrow{(M\tau_{\ell, i})|_{T'_\ell}} & (A'_{\ell, i}, M\hat{D}_i) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & (MA_{\ell, i}, M\hat{D}_i) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & (MD_i, M\hat{D}_i) \end{array}$$

is equal to

$$\begin{array}{ccc}
 (U'_\ell, U) & \xrightarrow{\xi_i|_{U'_\ell}} & (E'_{\ell,i}, M\hat{D}_i) \\
 & & \downarrow \\
 & & (E_i, M\hat{D}_i) \\
 & & \downarrow \\
 & & (MD_i, M\hat{D}_i)
 \end{array}$$

From this data we obtain an Ehresmann covering  $\{U'_\ell \twoheadrightarrow U \mid \ell \in L\} \in T(U)$  with for each  $\ell \in L$  an hv-cone,

$$\begin{array}{ccc}
 T_\ell & \xrightarrow{\tau_{\ell,i}} & A_{\ell,i} \\
 & & \downarrow \\
 & & D_i
 \end{array}$$

and a horizontal arrow  $U'_\ell \xrightarrow{\theta_\ell} T'_\ell$  such that

$$\begin{array}{ccc}
 U'_\ell \xrightarrow{\theta_\ell} T'_\ell \xrightarrow{(M\tau_{\ell,i})|_{T'_\ell}} A'_{\ell,i} & \cong & U'_\ell \xrightarrow{\xi_i|_{U'_\ell}} E'_i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 MA_{\ell,i} & & E_i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 MD_i & & MD_i
 \end{array}$$

as required. We conclude that  $M$  is covering flat. □

**Proposition 6.14.** *A functor  $F: (\mathcal{C}, J) \rightarrow (\mathcal{C}', J')$  is covering flat and covering preserving if and only if its image*

$$\mathbf{LG}(F): (\mathbf{LG}(\mathcal{C}), J_{T_J}) \rightarrow (\mathbf{LG}(\mathcal{C}'), J_{T_{J'}})$$

is.

*Proof.* This follows from the fact that the components of  $\eta$  induce isomorphisms between the sheaf categories as shown by Lawson and Steinberg. There is also a straightforward direct proof in terms of diagrams and cones.  $\square$

We derive from these propositions that the covering-flat covering-preserving double functors between Ehresmann sites are precisely the morphisms that give rise to geometric morphisms between the corresponding categories of sheaves.

**Theorem 6.15.** *A double functor  $M: (\mathcal{G}, T) \rightarrow (\mathcal{G}', T')$  gives rise to a geometric morphism  $\mathrm{Sh}(\mathcal{G}', T') \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{G}, T)$  if and only if it is covering preserving and covering flat.*

*Proof.* If  $M$  is covering flat and covering preserving, then  $\mathbf{L}(M)$  is covering flat and covering preserving by Propositions 6.10 and 6.12 and this implies that  $\mathbf{L}(M)^*$  is part of a geometric morphism and hence  $M^*$  is as well by Remark 6.2.

Conversely, if  $M^*$  is part of a geometric morphism, so is  $\mathbf{L}(M)^*$  by Remark 6.2. So  $\mathbf{L}(M)^*$  is covering flat and covering preserving, and hence  $M$  is covering preserving by Proposition 6.10 and  $\mathbf{GL}(M)$  is covering flat by Proposition 6.11. But then  $M$  is also covering flat by Proposition 6.13.  $\square$

We will now write  $\mathbf{lcGsite}$  for the 2-category of left-cancellative Grothendieck sites with covering-preserving covering-flat morphisms and  $\mathbf{Esite}$  for the 2-category of Ehresmann sites with covering-preserving covering-flat morphisms and  $\mathbf{Esite}_{\max}$  for the Ehresmann sites where each object is below a unique maximal object. Then we conclude from the previous propositions that

**Theorem 6.16.** *The functors  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{L}$  induce a 2-adjoint biequivalence*

$$\mathbf{lcGsite} \simeq \mathbf{Esite}_{\max}.$$

**Remark 6.17.** Theorem 6.15 can now be seen as saying that the biequivalence in Theorem 6.16 is a biequivalence of representations of étendues.

### 6.4 The Comparison Lemma

To further investigate how morphisms of Ehresmann sites correspond to morphisms between étendues, we want to consider which morphisms would induce an equivalence between the corresponding étendues.

For Grothendieck sites, the Comparison Lemma [13] provides a list of sufficient conditions on a morphism  $F : (\mathcal{C}, J) \rightarrow (\mathcal{C}', J')$  to guarantee that the induced geometric morphism  $\mathrm{Sh}(F) : \mathrm{Sh}(\mathcal{C}', J') \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$  between the sheaf categories is an equivalence. The comparison lemma checks the following four conditions for maps between sites.

**Definition 6.18.** *A morphism  $F : (\mathcal{C}, J) \rightarrow (\mathcal{C}', J')$  of Grothendieck sites is:*

- (GS.1) *locally full if for each arrow  $g : F(C) \rightarrow F(D)$  in  $\mathcal{C}'$ , there exists a cover  $(\xi_i : C_i \rightarrow C)_{i \in I}$  in  $\mathcal{C}$  with maps  $(f_i : C_i \rightarrow D)_{i \in I}$  such that  $g \circ F(\xi_i) = F(f_i)$  for all  $i \in I$ .*
- (GS.2) *locally faithful if for each pair of maps  $f, f' : C \rightarrow D$  in  $\mathcal{C}$  with  $F(f) = F(f')$ , there exists a cover  $(\xi_i)_{i \in I}$  of  $C$  with  $f \circ \xi_i = f' \circ \xi_i$  for all  $i \in I$ .*
- (GS.3) *locally surjective on objects if for each object  $C'$  of  $\mathcal{C}'$ , there exists a covering family of the form  $(F(C_i) \rightarrow C')_{i \in I}$  in  $\mathcal{C}'$ .*
- (GS.4) *co-continuous if for each cover  $(\xi_i : C'_i \rightarrow F(C))_{i \in I}$  in  $\mathcal{C}'$ , the set of arrows  $f : D \rightarrow C$  in  $\mathcal{C}$ , such that  $F(f)$  factors through some  $\xi_i$ , covers  $C$  in  $\mathcal{C}$ .*

Here is a slightly reformulated version of the Comparison Lemma (to take into account that we do not assume that our sites are closed under finite limits) as stated in [13].

**Theorem 6.19** (Comparison Lemma for Grothendieck Sites). *Let*

$$F : (\mathcal{C}, J) \rightarrow (\mathcal{C}', J')$$

*be a morphism of Grothendieck sites. If  $F$  satisfies conditions (GS.1)-(GS.3), then the functor*

$$F^* : \mathrm{Sh}(\mathcal{C}', J') \rightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, J)$$

*defined by composition with  $F$  is full and faithful. If  $F$  further satisfies (GS.4), then  $F^*$  is an equivalence.  $\square$*

**Remark 6.20.** The reader may wonder whether this lemma fully characterizes morphisms that induce equivalences between the induced sheaf-topoi. The closest result in this direction is that for essentially small sites for Grothendieck topoi there is the characterization of the category of topoi being a category of left fractions for the category of sites with site morphisms with respect to the morphisms that satisfy the comparison lemma. Unfortunately, this result cannot be restricted to left-cancellative sites and étendues: although it is possible to represent each geometric morphism by a cospan of morphisms of sites it is not always possible to take the middle site to be left cancellative even if the other two are.

Our goal in this section is to give corresponding properties for morphisms between Ehresmann sites and leverage Remark 6.2 to obtain a comparison lemma for Ehresmann sites.

**Definition 6.21.** A double functor  $M: (\mathcal{G}, T) \rightarrow (\mathcal{G}', T')$  of Ehresmann sites is:

- (ES.1) locally full if, for any diagram  $M(A) \xrightarrow{g} B' \dashrightarrow M(B)$  in  $\mathcal{G}'$ , there exists a covering vertical sieve  $\{A_i \dashrightarrow A\}_{i \in I} \in T(A)$  and a family of horizontal arrows  $\{f_i: A_i \rightarrow B_i\}_{i \in I}$  in  $\mathcal{G}$  such that  $g|_{M(A_i)} = M(f_i)$  for all  $i \in I$ .
- (ES.2) locally faithful if, for any two horizontal arrows  $f: A \rightarrow B_f$  and  $g: A \rightarrow B_g$  with  $B_f \dashrightarrow B$  and  $B_g \dashrightarrow B$  in  $\mathcal{G}$  and  $M(f) = M(g)$ , there exists a covering vertical sieve  $\{A_i \dashrightarrow A\}_{i \in I} \in T(A)$  with  $f|_{A_i} = g|_{A_i}$  for all  $i \in I$ .
- (ES.3) locally surjective on objects if, for each object  $A'$  of  $\mathcal{G}'$ , there is a set  $\{M(A_i) \xrightarrow{f_i} A'_i \dashrightarrow A'\}_{i \in I}$  of horizontal arrows in  $\mathcal{G}'$  such that  $\{A'_i \dashrightarrow A'\}_{i \in I} \in T'(A')$  is a covering vertical sieve of  $A'$  in  $\mathcal{G}'$ .
- (ES.4) co-continuous if, for all covering vertical sieves  $\{A'_i \dashrightarrow M(A)\}_{i \in I} \in T'(M(A))$  of  $M(A)$  in  $\mathcal{G}'$ , the set

$$\{A_j \dashrightarrow A: M(A_j) \dashrightarrow A'_i \text{ for some } i \in I\}_{j \in J}$$

is a covering vertical sieve of  $A$  in  $\mathcal{G}$ .

Given the criteria expressed in the language of Ehresmann sites, the desired Comparison Lemma for Ehresmann sites is given here.

**Theorem 6.22** (Comparison Lemma for Ehresmann Sites). *Let*

$$M : (\mathcal{G}, T) \rightarrow (\mathcal{G}', T')$$

*be a morphism of Ehresmann sites. If  $M$  satisfies (ES.1)–(ES.3), then the functor  $M^* : \text{Sh}(\mathcal{G}', T') \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{G}, T)$  is full and faithful. If further  $M$  satisfies (ES.4), then  $M^*$  is an equivalence.*

*Proof.* We note that once one writes down what it means for  $M$  to satisfy (ES.1)–(ES.3) and for  $\mathbf{L}(M)$  to satisfy (GS.1)–(GS.3), one obtains exactly the same diagrams, slightly differently interpreted, and we need to prove exactly the same results on both sides. So  $M$  satisfies each of the conditions (ES.1)–(ES.3) precisely when  $\mathbf{L}(M)$  satisfies the corresponding condition in (GS.1)–(GS.3).

For (ES.4) and (GS.4) the correspondence is straightforward once one realizes that any covering in  $J_{T'}(A)$  in  $\mathbf{L}(\mathcal{G}')$  is generated by a covering in  $T'(A)$  in  $\mathcal{G}'$  and a family of arrows factors through the generating set precisely when it factors through the whole covering. So  $M$  satisfies (ES.4) precisely when  $\mathbf{L}(M)$  satisfies (GS.4).

The result then follows from Theorem 6.19 and Remark 6.2.  $\square$

## Acknowledgments

We thank Robert Paré for several helpful conversations about the content of this paper, and Marta Bunge for a very detailed referee report, that caused us to clarify our terminology more carefully. The first author thanks NSERC for its support through the Discovery Grant program.

## References

- [1] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier. *Théorie de Topos et Cohomologie Etale des Schémas I, II, III*, volume 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1971.

- [2] Marta Bunge and Robert Pare. Stacks and equivalence of indexed categories. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 20(4):373–399, 1979.
- [3] Robin Cockett and Chris Heunen. Compact inverse categories. arXiv:1906.04248, June 2019.
- [4] Darien Dewolf and Dorette Pronk. The Ehresmann-Schein-Nambooripad Theorem for inverse categories. *Theory and Applications of Categories*, 33(27):813–831, August 2018.
- [5] Charles Ehresmann. Catégories inductives et pseudogroupes. *Annales de l'Institut Fourier*, 10:307–332, 1960.
- [6] Charles Ehresmann. Catégories structurées. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 80(4):349–426, 1963.
- [7] T. Everaert, R.W. Kieboom and T. Van der Linden. Model structures for homotopy of internal categories. *Theory and Applications of Categories*, 15(3): 66–94, 2005.
- [8] Victoria Gould and Christopher Hollings. Restriction semigroups and inductive constellations. *Communications in Algebra*, 38(1):261–287, 2009.
- [9] Christopher Hollings. Extending the Ehresmann-Schein-Nambooripad theorem. *Semigroup Forum*, 80(3):453–476, Jun 2010.
- [10] G. Janelidze, M. Sobral, W. Tholen, Beyond Barr exactness: effective descent morphisms. In M. Pedicchio and W. Tholen (Eds.), *Categorical Foundations: Special Topics in Order, Topology, Algebra, and Sheaf Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, pp. 359–406, Cambridge University Press, 2003
- [11] Peter T Johnstone. *Sketches of an Elephant: a Topos Theory Compendium, Volume 2*. Oxford logic guides. Oxford Univ. Press, New York, NY, 2002.
- [12] Panagis Karazeris. Notions of flatness relative to a Grothendieck topology. *Theory and Applications of Categories*, 12(5):225–236, 2004.



- [13] Anders Kock and Ieke Moerdijk. Presentations of étendues. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 32(2):145–164, 1991.
- [14] Hans Lausch. Cohomology of inverse semigroups. *Journal of Algebra*, 35(1):273 – 303, 1975.
- [15] Mark V Lawson. *Inverse Semigroups*. World Scientific, 1998.
- [16] Mark V. Lawson, Ordered groupoids and left cancellative categories, *Semigroup Forum* **68** (2004), pp. 458–476
- [17] Mark V. Lawson and Benjamin Steinberg. Ordered groupoids and étendues. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 45(2):82–108, 2004.
- [18] Jonathan Leech. Constructing inverse monoids from small categories. *Semigroup Forum*, 36(1):89–116, Dec 1987.
- [19] M Loganathan. Cohomology of inverse semigroups. *Journal of Algebra*, 70(2):375 – 393, 1981.
- [20] J. C. Meakin and A. Yamamura. Bass-Serre theory and inverse monoids. *Semigroups and Applications*, World Scientific, 1998, 125 – 140.
- [21] K. S. S. Nambooripad. Structure of regular semigroups, I fundamental regular semigroups. *Semigroup Forum*, 9(1):354–363, Dec 1974.
- [22] K. S. S. Nambooripad. Structure of regular semigroups, II the general case. *Semigroup Forum*, 9(1):364–371, Dec 1974.
- [23] Kimmo I. Rosenthal. Étendues and categories with monic maps. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 22(2):193 – 212, 1981.
- [24] B. M. Schein. On the theory of inverse semigroups and generalised groups. *American Mathematical Society Translations*, 2(113):89–122, 1979.

- [25] Shoufeng Wang. An Ehresmann-Schein-Nambooripad-type theorem for a class of  $p$ -restriction semigroups. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 42(2):535–568, Mar 2019.

Darien DeWolf  
Department of Mathematics and Statistics  
St. Francis Xavier University  
Antigonish, NS B2G 1N5  
CANADA  
ddewolf@stfx.ca

Dorette Pronk  
Department of Mathematics and Statistics  
Dalhousie University  
Halifax, NS B3H 4R2  
CANADA  
Dorette.Pronk@Dal.Ca



# PURETÉ DE LA MONADE DE BATANIN, I

*Jacques PENON*

**Résumé.** Nous montrons que la monade de Batanin  $\mathbb{B}$  a une propriété très forte appelée "pureté". Dans une prochaine publication nous verrons que cette propriété nous permet de donner un ensemble d'exemples de ses algèbres (appelées  $\omega$ -catégories faibles par M.Batanin). Avant de le montrer nous caractérisons  $\mathbb{B}$  avec un matériel syntaxique.

**Abstract.** We prove that the Batanin's monad  $\mathbb{B}$  has a very strong property called "purity". In a next publication we'll see that this property enables us to give a set of examples for its algebras (called weak  $\omega$ -categories by M.Batanin). Before proving it, we characterize  $\mathbb{B}$  with a syntactic equipment.

**Keywords.** Weak  $\omega$ -category. Globular set. Cartesian monad. Operad. Tree. Syntax.

**Mathematics Subject Classification (2010).** 18D05.

## Introduction aux deux parties

• Ce travail ayant une taille trop importante a été divisé en deux parties. Dans la partie I, après avoir introduit en toute généralité les concepts de monade concrète syntaxique puis de monade pure, on construit plusieurs familles de monades, toutes sur la catégorie des ensembles. Elles sont à la base de toutes les constructions ultérieures.

Dans la partie II, seront construites de nouvelles monades. Mais cette fois principalement sur  $\mathcal{Glob}$ , la catégorie des "ensembles globulaires". Finalement on aboutit à la monade de Batanin.

• Pour nous, la monade de Batanin (notée ici  $\mathbb{B}$ ) désigne la monade (sur la catégorie des ensembles globulaires) associée à l' $\omega$ -opérade de Batanin (voir [1]). Le but de ce travail est de montrer que cette monade possède une propriété très forte qui nous permettra, dans un article ultérieur (voir [10]), de donner une classe d'exemples de ses algèbres (appelées  $\omega$ -catégories faibles par Batanin). Cette propriété, dite de "pureté", présuppose celle de monade concrète syntaxique, autre concept plus général, que nous définirons préalablement (voir la première partie, section 1). Pour arriver à montrer la pureté de  $\mathbb{B}$  nous allons commencer par la caractériser, c'est-à-dire par la reconstruire, avec un outillage syntaxique (d'où le terme "monade concrète syntaxique") comme nous l'avons fait pour construire la monade des prolixes (voir [9]). Rappelons que la monade des prolixes (version non-réflexive, voir [3] et [6]) peut se construire à l'aide d'un langage dont les symboles sont, en plus de ceux de composition  $\star_n$ , d'un symbole  $\square$  représentant la propriété d'étirement (ou de contraction dans la conception de Batanin). Mais la monade  $\mathbb{P}$  n'est pas pure (voir la deuxième partie, section 3). Pour remédier à cette imperfection on construit la monade  $\mathbb{B}$  en ajoutant à ces précédents symboles un nouveau symbole  $\Delta$  qui permet de différencier des termes (ou arbres) qui auraient été confondus dans la monade  $\mathbb{P}$ . Cependant, ce nouveau symbole  $\Delta$  ne représente pas une nouvelle opération (c'est d'ailleurs la critique que nous avait faite C.Kachour à l'époque de sa découverte). Il nous a conduit au concept d'arbre feuillu où c'est le couple de symboles  $(\square, \Delta)$  qui produit une méta-opération universelle sur ces mêmes arbres (voir la première partie section 5). Finalement, on obtient la monade  $\mathbb{B}$  qui est syntaxique cartésienne et surtout pure. On montre enfin, en grande partie grâce à sa pureté, que cette monade  $\mathbb{B}$  n'est autre que la monade de Batanin; ce qui achève de montrer ce qu'on avait annoncé ici (voir la deuxième partie, section 5). On voit aussi, au passage, le lien très étroit qui existe entre la monade de Batanin et celle des prolixes.

# PARTIE I

## (QUELQUES MONADES ENSEMBLISTES DE BASE)

### Table des matières

#### 1 Monades pures

- 1.1 Monades concrètes syntaxiques
- 1.2 Monades concrètes cartésiennes
- 1.3 pureté d'une monade concrète cartésienne syntaxique

#### 2 Arbres sur un langage

- 2.1 Fonctions élémentaires sur les arbres
- 2.2 Branchement de deux arbres
- 2.3 La loi OP
- 2.4 Arbres feuillus
- 2.5 Langages relativement dimensionnels

#### 3 La monade des arbres

- 3.1 Variation des constantes
- 3.2 L'opération  $\text{op}$  et la notation  $a[-]$
- 3.3 Opérade sur  $\mathbb{M}o$
- 3.4 L'opérade des arbres
- 3.5 Complément sur la loi  $\text{op}$
- 3.6 La monade  $\mathbb{A}$

#### 4 Antériorité

- 4.1 Trois relations d'ordre sur les listes
  - 4.1.1 La relation  $\ll$
  - 4.1.2 La relation  $\leq$
  - 4.1.3 La relation  $\bar{\leq}$
- 4.2 Les surjections croissantes  $q_{(a,b)}$
- 4.3 Codification d'une branche d'arbre
- 4.4 Antécédents d'une liste
- 4.5 Propriétés spécifiques de l'antériorité

- 4.6 Caractérisation de l'antériorité
- 4.7 Lignes de taille d'un arbre

## 5 La monade des arbres feuillus

- 5.1 La monade  $\mathbb{A}^f$
- 5.2 Arbres irréductibles
- 5.3 L'opération  $\square$
- 5.4 Réduction des arbres irréductibles
- 5.5 Décomposition canonique d'un arbre feuillu
- 5.6 Pureté de la monade  $\mathbb{A}^f$
- 5.7 Opérade magmatique libre

### Introduction de la partie I

L'opérade de Batanin (voir [2]) est assez proche d'une opérade libre. Le concept de monade *pure* que l'on va définir maintenant est précisément fait pour exprimer de façon rigoureuse cette très puissante propriété. Elle nous servira, entre autre, dans un prochain article (voir [10]) à montrer que les multi-spans forment, dans leur ensemble, un exemple d' $\omega$ -catégorie faible au sens de Batanin (voir [2]).

## 1. Monades pures

### 1.1 Monades concrètes syntaxiques

**Définition 1.1.** : Appelons *monade concrète* la donnée :

- 1) d'une catégorie concrète  $(\mathbb{C}, U)$  (où  $\mathbb{C}$  est une catégorie quelconque et  $U : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}ns$  est un foncteur fidèle),
- 2) d'une monade  $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$  sur la catégorie  $\mathbb{C}$ .

**Définition 1.2.** : On appelle *monade concrète syntaxique* la donnée d'une monade concrète  $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$  et d'une transformation naturelle  $L : UM \rightarrow \tilde{\mathbb{N}}$  (où  $\tilde{\mathbb{N}}$  désigne le foncteur constant sur  $\mathbb{N}$ ) vérifiant les axiomes suivants:

(MS0)  $\mathbb{C}$  a un objet final 1.

(MS1)  $\forall C \in |\mathbb{C}|, \forall x \in U(C), L_C.U\eta_C(x) = 1.$

(MS'1)  $\forall C \in |\mathbb{C}|, \forall t \in UM(C), L_C(t) \leq 1 \implies \exists! x \in U(C), U\eta_C(x) = t.$

(MS2)  $\forall C \in |\mathbb{C}|, \forall T \in UM^2(C), L_{MC}(T) \leq L_C.U\mu_C(T).$

(MS'2)  $\forall C \in |\mathbb{C}|, \forall T \in UM^2(C), L_{MC}(T) = L_C.U\mu_C(T) \implies \exists t \in UM(C), T = UM\eta_C(t).$

(MS3) Pour tout  $C \in |\mathbb{C}|$ , l'application suivante est injective :

$$(UM!_{MC}, U\mu_C) : UM^2(C) \longrightarrow UM(1) \times UM(C).$$

**Remarques 1.3.** : Cela implique déjà les conséquences suivantes :

1)  $\forall t \in UM(C), L_C(t) \geq 1.$

2) L'application  $U\eta_C : U(C) \longrightarrow UM(C)$  est injective,

3) Dans (MS'2) l'élément  $t \in UM(C)$  tel que  $T = UM\eta_C(t)$  est unique et ne peut être que  $t = U\mu_C(T).$

**Exemples et contre-exemples 1.4.** : 1) Nous verrons dans la section 3 que tout langage  $(S, ar)$ , a priori sans constante, produit une monade

$\mathbb{A} = (A, \eta, \mu)$  sur  $\mathbb{E}ns$  qui, munie du foncteur  $U = Id_{\mathbb{E}ns}$  et de la transformation naturelle  $L : A \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$  "longueur d'un terme", devient une monade concrète syntaxique. Nous en verrons ensuite bien d'autres au cours des sections suivantes, comme les monades  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{B}$  (voir la deuxième partie les sections 3 et 4), sur  $\mathbb{G}lob$ , la catégorie des "ensembles globulaires" (voir la deuxième partie section 2), munies du foncteur d'oubli évident

$\mathbb{G}lob \rightarrow \mathbb{E}ns$  et d'une transformation naturelle  $L$  construite à partir de l'exemple précédent.

2) Les monades  $\mathbb{M}lo$  des monoïdes, sur  $\mathbb{E}ns$ , et  $\omega$  des  $\infty$ -catégories strictes, sur  $\mathbb{G}lob$ , ne peuvent produire des monades concrètes syntaxiques car leur morphisme  $(UM!_{M1}, U\mu_1) : UM^2(1) \longrightarrow UM(1) \times UM(1)$  n'est pas un monomorphisme.

**Proposition 1.5.** (stabilité des monades concrètes syntaxiques):

Soient  $\mathcal{M} = (\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$  et  $\mathcal{M}' = (\mathbb{C}', U', \mathbb{M}')$  deux monades concrètes et  $(F, m) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un morphisme entre monades concrètes, (i.e.

$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$  est un foncteur tel que  $U'F = U$ ,  $m : FM \rightarrow M'F$  est transformation naturelle tels que  $m.F\eta = \eta'F$  et  $m.F\mu = \mu'F.M'm.M$ ),  $L : UM \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$  et  $L' : U'M' \rightarrow \bar{\mathbb{N}}$  deux transformations naturelles telles

que :

- 1)  $\mathbb{C}$  a un objet final,
- 2)  $F$  est fidèle.
- 3)  $\forall C \in |\mathbb{C}|$ ,  $U'm_C$  et  $U'M'm_C$  sont injectifs,
- 4)  $L = L'F.U'm$ .

Alors, si  $\mathcal{M}'$  muni de  $L'$  est une monade syntaxique, il en est de même de  $\mathcal{M}$  muni de  $L$ .

Preuve : (MS1) est immédiat. Pour (MS'1) on utilise l'injectivité de  $U'm_C$ .

Pour (MS2) Soient  $C \in |\mathbb{C}|$  et  $T \in UM^2(C)$ , alors :  $L_{MC}(T) = L'_{M'FC}.U'M'm_C.U'm_{MC}(T) \leq L'_{FC}.U'\mu'_{FC}.U'M'm_C.U'm_{MC}(T) = L_C.U\mu_C(T)$ . Pour (MS'2) Si  $L_{MC}(T) = L_C.U\mu_C(T)$  alors  $L'_{M'FC}.U'M'm_C.U'm_{MC}(T) = L'_{FC}.U'\mu'_{FC}.U'M'm_C.U'm_C(T)$  il existe donc  $t \in U'M'F(C)$  tel que  $U'M'm_C.U'm_{MC}(T) = U'M'\eta'_{FC}(t)$ . Posons  $t' = U\mu_C(T)$  Alors  $U'm_C(t') = t$  et  $U'M'm_C.U'm_{MC}(T) = U'M'm_C.U'm_{MC}.U'FM\eta_C(t')$  et donc, comme  $U'm_{MC}$  et  $U'M'm_C$  sont injectifs, on obtient  $T = UM\eta_C(t')$ .

Pour (MS3), cela résulte de l'identité :

$$(U'M'!_{F1} \times Id_{U'M'FC}).(U'm_1 \times U'm_C).(UM!_{MC}, U\mu_C) = (U'M'!_{M'FC}, U'\mu'_{FC}).U'M'm_C.U'm_{MC}$$

## 1.2 Monades concrètes cartésiennes

**Définition 1.6.** : Une monade concrète  $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$  est dite *cartésienne* si :

- 1)  $\mathbb{C}$  est à limites projectives finies,
- 2)  $U$  commute aux produits fibrés,
- 3)  $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$  est cartésienne (i.e.  $M$  commute aux produits fibrés et  $\eta$  et  $\mu$  sont des transformations naturelles cartésiennes - voir [5]).

- Soit  $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$  une monade concrète cartésienne. On constate que

**Proposition 1.7.** :(voir 1.16) Le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & U\mu_1 & & U\mu_{M1} \\ & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\ UM(1) & \xrightarrow{UM\eta_1} & UM^2(1) & \xrightarrow{UM\mu_1} & UM^3(1) \\ & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\ & & UM! & & UM^2! \end{array}$$

est sous-jacent à une catégorie interne dans  $\mathbb{E}ns$  (c'est donc une catégorie).



**Notation 1.8.** : Cette catégorie ayant une importance centrale par la suite on la note  $UDec(\mathbb{M})$ .

**Remarque 1.9.** : Elle a les propriétés suivantes :

- Les composantes connexes de  $UDec(\mathbb{M})$  sont exactement de la forme  $(U!_{M1})^{-1}(\{u\})$  où  $u \in U(1)$ .
- Elles possèdent chacune un objet final qui est  $U\eta_1(u)$ .

**Proposition 1.10.** : Soit  $(\mathbb{C}, U, \mathbb{M})$  une monade concrète cartésienne et  $L : UM \rightarrow \mathbb{N}$  une transformation naturelle alors :

$(\mathbb{C}, U, \mathbb{M}, L)$  est une monade concrète syntaxique ssi on a les propriétés  $(MCCS1) \rightarrow (MCCS4)$  suivantes :

- $(MCCS1)$   $UDec(\mathbb{M})$  est un ensemble ordonné,
- $(MCCS2)$   $\lambda = L_1 : UM1 \rightarrow \mathbb{N}$  est une application croissante (où  $UM(1)$  est muni de l'ordre opposé à celui provenant de la catégorie  $UDec(\mathbb{M})$  et  $\mathbb{N}$  est muni de l'ordre naturel),
- $(MCCS3)$   $\lambda$  est conservateur (i.e.  $\forall t, t' \in UM(1)$ , si  $t \leq t'$  et  $\lambda(t) = \lambda(t')$  alors  $t = t'$ ),
- $(MCCS4)$   $\forall t \in UM(1)$ ,  $\lambda(t) \geq 1$  et, sur chaque composante connexe de  $UM(1)$ ,  $\lambda$  préserve le plus petit élément dans  $\mathbb{N}^*$ .

*Preuve* :  $(MCCS1)$  résulte de  $(MS3)$ ,  $(MCCS2)$  de  $(MS2)$ ,  $(MCCS3)$  de  $(MS'2)$ . Pour le début du  $(MCCS4)$ , voir la remarque 1.9. La suite résulte de  $(MS1)$ , modulo la même remarque.

Réciproquement, pour  $(MS1)$  on utilise la remarque 1.9. Pour  $(MS'1)$  on s'appuie sur le fait que  $\lambda$  est conservateur et que  $\eta$  est cartésienne. Pour  $(MS2)$  cela résulte de la croissance de  $\lambda$ . Enfin pour  $(MS3)$  on utilise la cartésianité de  $\mu$ .

**Exemples 1.11.** Les monades concrètes syntaxiques signalées précédemment (au 1.4) sont aussi cartésiennes.

**Remarque 1.12.** On donnera dans [10] un plus ample développement aux monades concrètes cartésiennes et aux catégories  $UDec(\mathbb{M})$  ainsi que des références aux auteurs traitant de ce sujet.

### 1.3 pureté d'une monade concrète cartésienne syntaxique

• Donnons nous maintenant  $\mathcal{M} = (\mathbb{C}, U, \mathbb{M}, L)$  une monade concrète cartésienne syntaxique (en abrégé MCCS).

**Définition 1.13.** : 1) La relation d'ordre sur  $UM(1)$  provenant de structure de catégorie sur  $UDec(\mathbb{M})$  est appelée la relation de *postériorité*. Son ordre opposé (corespondant à  $UDec(\mathbb{M})^{op}$ ) est appelé la relation d'*antériorité*. On le note  $\leq$  (ou encore pour simplifier  $\leq$ ). Ainsi, pour  $t, t' \in UM(1)$ , on écrit  $t \leq_{\mathbb{M}} t'$  s'il existe une flèche  $t' \rightarrow t$  dans  $UDec(\mathbb{M})$ .

2) Soit  $t \in UM(1)$ . On dit que  $t$  est *primitif* si,  $t_0$  étant le plus petit élément (pour  $\leq$ ) de sa composante connexe, alors  $t \neq t_0$  et, pour tout  $t' \in UM(1)$  tel que  $t_0 \leq t' \leq t$ , alors  $t' = t_0$  ou  $t' = t$ .

**Proposition 1.14.** : Soit  $t \in UM(1)$ . Alors  $t$  est primitif ssi  $L_1(t) > 1$  et  $\forall T \in UM^2(1), U\mu_1(T) = t \Rightarrow T = U\eta_{M_1}(t)$  ou  $T = UM\eta_1(t)$ .

*Preuve* : Sans difficulté.

**Définition 1.15.** : 1) une monade *pure* est une MCCS telle que :

$\forall t \in UM(1), \lambda(t) \geq 1 \Rightarrow \exists! \theta \in UM(1), \theta \leq t$  et  $\theta$  est primitif.

2)  $\mathcal{M}$  étant supposée pure, pour chaque objet  $C \in |\mathbb{C}|$  et  $t \in UM(C)$  tel que  $L_C(t) > 1$  alors :

- l'unique élément  $\theta \in UM(1)$  primitif tel que  $\theta \leq UM!_C(t)$  s'appelle la *composante primitive* de  $t$  et,

- L'unique  $T \in UM^2(C)$  tel que  $UM!_{MC}(T) = \theta$  et  $U\mu_C(T) = t$  est appelé la *décomposition primitive* de  $t$ .

**Remarque 1.16.** : 1) Nous verrons au 3.42 que la monade  $\mathbb{A}$  (munie de  $U = Id_{\mathbb{E}ns}$  et  $L$ ) est pure.

2) Par contre  $\mathbb{P}$  (muni de  $U$  et  $L$ ) n'est pas pure (voir la partie 2, section 3).

3) Enfin, et c'est le but de cet article, la monade  $\mathbb{B}$  (munie de  $U$  et  $L$ ) est pure (voir la partie 2, section 5).

## 2. Arbres sur un langage

**Introduction** : La notion d'arbre est l'outil de base sur lequel repose l'ensemble de ce travail. Avant d'aller plus loin, il nous faut explorer ce

concept pour mettre en place un ensemble de techniques que nous utiliserons en permanence tout du long des différentes sections. Remarquons qu'il est présent dans toutes les monades concrètes syntaxiques construites ici mais pas seulement. Il apparait aussi dans la construction de la monade  $\omega$  (voir la deuxième partie, section 2) qui n'est pas syntaxique (des précisions ont été données au 1.4).

## 2.1 Fonctions élémentaires sur les arbres

**Conventions 2.1.** : Comme on le fait en logique, considérons un langage constitué d'un ensemble  $S$  dit de "symboles fonctionnels" et d'une application  $ar : S \rightarrow \mathbb{N}$  qui, à chaque symbole associe son "arité". Si  $ar(s) = 0$ , on dit que  $s$  est une constante. On note  $\text{Cons}(S, ar)$  l'ensemble des constantes de  $(S, ar)$ .

Les termes de ce langage (ou plus exactement les termes clos, puisque nous n'utilisons pas de variable) sont appelés ici des *arbres* sur le langage  $(S, ar)$ . (Les termes ayant plutôt un caractère uni-dimensionnel contrairement aux arbres qui sont eux deux-dimensionnels, nous préférons donc la seconde terminologie). Notons  $\text{Arb}(S, ar)$  l'ensemble des arbres sur le langage  $(S, ar)$ . Un arbre constitué de la seule constante  $c$  est noté  $c(\emptyset)$ .

**Notations et définitions 2.2.** : - Soit  $a \in \text{Arb}(S, ar)$ , on note  $L(a)$  la longueur du terme correspondant. On sait que  $L(c(\emptyset)) = 1$  et que  $L(s(a_0, \dots, a_{n-1})) = 1 + \sum_{j \in [n]} L(a_j)$  (où ici  $s \in S$  est d'arité  $n \geq 1$  et où  $[n] = \{0, \dots, n-1\}$ ).

- On définit la *largeur*  $l(a)$  et la *hauteur*  $h(a)$  d'un arbre  $a \in \text{Arb}(S, ar)$  par induction sur  $L(a)$  en posant :

$$l(c(\emptyset)) = 1 \text{ et } l(s(a_0, \dots, a_{n-1})) = \sum_{j \in [n]} l(a_j) \text{ (où } n = ar(s) \geq 1).$$

$$h(c(\emptyset)) = 1 \text{ et } h(s(a_0, \dots, a_{n-1})) = 1 + \sup_{j \in [n]} h(a_j).$$

- On affine maintenant la hauteur d'un arbre en définissant la hauteur (ou longueur) d'une branche d'un arbre. Soient  $a \in \text{Arb}(S, ar)$  et  $j \in [l(a)]$ . On définit  $h_j(a) \in \mathbb{N}$ , par induction sur  $L(a)$ .

.. Si  $a = c(\emptyset)$  (ici  $l(a) = 1$  et donc  $j = 0$ ) alors on pose  $h_0(a) = 1$ .

.. Si  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ , où  $n \geq 1$ , commençons par noter, pour  $i \in [n]$ ,  $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$ , puis considérons l'unique  $j_0 \in [n]$  tel que

$$\hat{j}_0 \leq j < \widehat{j_0 + 1}. \text{ Alors on pose } h_j(a) = 1 + h_{j-\hat{j}_0}(a_{j_0}).$$

**Proposition 2.3.** :  $h(a) = \sup_{j \in [la]} h_j(a)$ .

*Preuve* : Par induction sur  $L(a)$ .

**Notations et définitions 2.4.** : On va maintenant avoir une approche plus descriptive d'un arbre. Soit  $a \in \text{Arb}(S, ar)$ . On définit  $\text{cons}(a)$ ,  $\text{sym}(a)$  et  $\text{sym}_j(a)$  (où  $j \in [la]$ ) par induction sur  $L(a)$ .

1)  $\text{cons}(a) \in \text{Mo}(S)$  est la liste des constantes apparaissant dans  $a$ . On la définit précisément par :

.. Si  $a = c(\emptyset)$ ,  $\text{cons}(a) = (c)$ ,

.. Si  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ ,  $\text{cons}(a) = \text{cons}(a_0) \dots \text{cons}(a_{n-1})$  (i.e. la concaténation des listes  $\text{cons}(a_0), \dots, \text{cons}(a_{n-1})$ ).

2)  $\text{sym}(a)$  est le symbole placé au pied de l'arbre  $a$ .

.. Si  $a = c(\emptyset)$ ,  $\text{sym}(a) = c$ .

.. Si  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ ,  $\text{sym}(a) = s$ .

3)  $\text{sym}_j(a) \in \text{Mo}(S)$  (où  $j \in [la]$ ) est la liste des symboles de la  $j^e$  branche de  $a$ . On la définit par :

.. Si  $a = c(\emptyset)$  (alors  $j = 0$ ),  $\text{sym}_0(a) = (c)$ .

.. Si  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ , on pose  $\text{sym}_j(a) = (s) \cdot \text{sym}_{j-\hat{j}_0}(a_{j_0})$  (où le "point" désigne la concaténation des deux listes et où l'entier  $\hat{j}_0$  a été défini au 2.2).

4) Dans la suite on aura encore besoin de la notation  $\text{sym}_j^-(a)$ . Lorsque  $\text{sym}_j(a) = (s_0, \dots, s_{n-1})$  on pose  $\text{sym}_j^-(a) = (s_0, \dots, s_{n-2})$  (lorsque  $a$  est réduit à une constante  $\text{sym}_j^-(a)$  est la liste vide).

**Proposition 2.5.** : Soit  $a \in \text{Arb}(S, ar)$ .

1)  $L \text{ cons}(a) = l(a)$  (où  $L$  désigne ici la longueur d'une liste).

2)  $\forall j \in [la]$ ,  $L \text{ sym}_j(a) = h_j(a)$ .

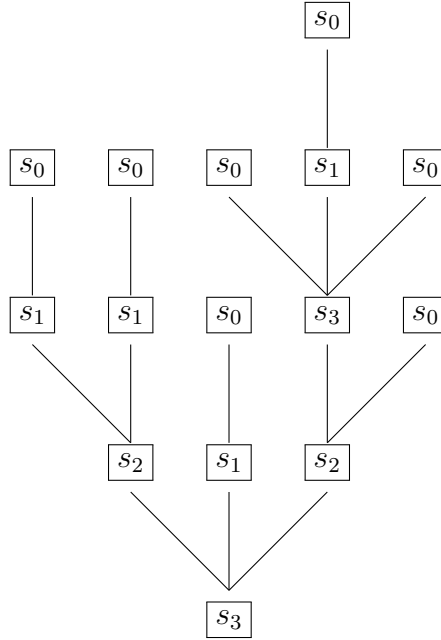
3) Pour tout  $j \in [la]$ , posons  $n = h_j(a)$  et écrivons  $\text{sym}_j(a) = (s_0, \dots, s_{n-1})$ , alors  $s_{n-1} \in \text{Cons}(S, ar)$ .

*Preuve* : Par induction sur  $L(a)$ .

**Exemple 2.6.** : • Afin de mieux visualiser les arbres sur un langage et les différentes fonctions définies sur ces arbres, donnons un exemple concret d'arbre (l'arbre  $a$  ci-dessous), et sa représentation graphique. Puis, nous passerons en revue, sur cet exemple, son image par les différentes fonctions spécifiques aux arbres.

• Fixons déjà un langage  $(S, ar)$ , où  $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$  et  $ar(s_i) = i$ . On

définit ensuite les arbres (intermédiaires)  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{A}rb(S, ar)$  par :  
 $a_0 = s_1(s_0(\emptyset))$ ,  $a_1 = s_2(a_0, a_0)$ ,  $a_2 = s_3(s_0(\emptyset), a_0, s_0(\emptyset))$ ,  
 $a_3 = s_2(a_2, s_0(\emptyset))$ . Puis enfin :  $a = s_3(a_1, a_0, a_3)$ .  
 L'arbre  $a$  est représenté par le dessin suivant :



*Fig : a*

Pour cet exemple, on vérifie que :

$$\begin{aligned}
 &L(a) = 15, \quad l(a) = 7, \quad h(a) = 5, \\
 &h_0(a) = h_1(a) = h_3(a) = h_5(a) = 4, \\
 &h_2(a) = h_6(a) = 3, \quad h_4(a) = 5 \\
 &\text{cons}(a) = (s_0, s_0, s_0, s_0, s_0, s_0, s_0), \\
 &\text{sym}(a) = s_3, \\
 &\text{sym}_0(a) = \text{sym}_1(a) = (s_3, s_2, s_1, s_0), \\
 &\text{sym}_2(a) = (s_3, s_1, s_0), \\
 &\text{sym}_3(a) = \text{sym}_5(a) = (s_3, s_2, s_3, s_0), \\
 &\text{sym}_4(a) = (s_3, s_2, s_3, s_1, s_0), \\
 &\text{sym}_6(a) = (s_3, s_2, s_0).
 \end{aligned}$$

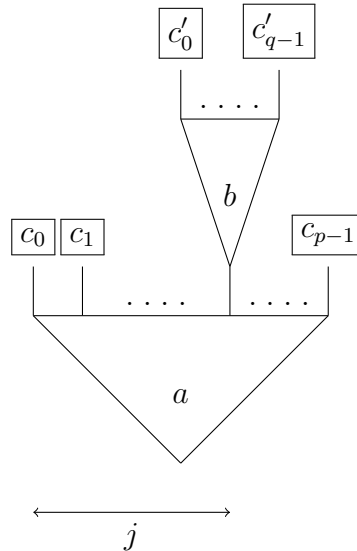
**2.2 Branchement de deux arbres**

**Notations et définitions 2.7.** : Soient  $a, b \in \mathbb{A}rb(S, ar)$  et  $j \in [la]$ . On définit, par induction sur  $L(a)$ , l'arbre  $Br(a, j, b)$  appelé le *branchement sur  $a$ , au niveau  $j$ , de  $b$* .

.. Si  $a = c(\emptyset)$ , alors  $j = 0$ . On pose  $Br(a, j, b) = b$ .

.. Si  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ , on pose  $Br(a, j, b) = s(a'_0, \dots, a'_{n-1})$  où, pour tout  $i \in [n]$ ,  $a'_i = a_i$  si  $i \neq j_0$  et  $a'_{j_0} = Br(a_{j_0}, j - \hat{j}_0, b)$  et où les entiers  $j_0$  et  $\hat{j}_0$  ont été définis au 2.2.

On peut donner, pour le branchement de ces deux arbres  $a$  et  $b$  au niveau  $j$ , la représentation graphique suivante :



où  $\text{cons}(a) = (c_0, c_1, \dots, c_{p-1})$  et  $\text{cons}(b) = (c'_0, c'_1, \dots, c'_{q-1})$ .

**Remarque 2.8.** : On voit qu'on a obtenu  $Br(a, j, b)$  en substituant dans  $a$  l'arbre  $b$  à la  $j^e$  constante de  $a$ . Cette  $j^e$  constante ayant disparue dans  $Br(a, j, b)$  elle a donc plutôt un statut de "variable". A la section 3 nous allons redresser cette incohérence apparente en introduisant la constante  $0$  qui joue plus spécifiquement ce rôle de "variable".

**Proposition 2.9.** : Fixons  $a, b \in \mathbb{A}rb(S, ar)$  et  $j \in [la]$  et posons pour simplifier  $\hat{a} = Br(a, j, b)$ . Alors :

1)  $L(\hat{a}) = L(a) + L(b) - 1$ .

- 2)  $l(\hat{a}) = l(a) + l(b) - 1$ .  
 3) Soit  $k \in [l\hat{a}]$ . Alors :  
 - Si  $k < j$ ,  $h_k(\hat{a}) = h_k(a)$ .  
 - Si  $j \leq k < j + l(b)$ ,  $h_k(\hat{a}) = h_j(a) + h_{k-j}(b) - 1$ .  
 - Si  $j + l(b) \leq k < l(\hat{a})$ ,  $h_k(\hat{a}) = h_{k+1-l(b)}(a)$ .  
 4)  $h(\hat{a}) = \sup(h(a), h_j(a) + h(b) - 1)$ .

Preuve : On le fait par induction sur  $L(a)$ . Pour le (3), lorsque  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$  on introduit les deux fonctions données pour  $i \in [n]$  par  $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$  et  $\check{i} = \sum_{x \in [i]} l(a'_x)$  (où  $a'_x$  apparait dans la définition de  $\hat{a}$ ). On considère ensuite les deux nombres  $\check{j}_0, k_1 \in [n]$  tels que  $\hat{j}_0 \leq j < \widehat{j_0 + 1}$  et  $\check{k}_1 \leq k < (k_1 + 1)^\vee$ . On remarque que :  
 - Si  $k < j$ , alors  $k_1 \leq \check{j}_0$ ,  
 - Si  $j \leq k < j + l(b)$ , alors  $k_1 = \check{j}_0$ ,  
 - Si  $j + l(b) \leq k < l(\hat{a})$ , alors  $k_1 > \check{j}_0$ .  
 On conclut ensuite facilement.

**Proposition 2.10.** : Sous les mêmes hypothèses que la proposition précédente

- 1) Écrivons  $(c_0, \dots, c_{n-1}) = \text{cons}(a)$ , puis posons  $A_j = (c_0, \dots, c_{j-1})$ ,  $A'_j = (c_{j+1}, \dots, c_{n-1})$  et  $B = \text{cons}(b)$ . Alors  $\text{cons}(\hat{a}) = A_j \cdot B \cdot A'_j$ .  
 2) Si  $L(a) > 1$  on a  $\text{sym}(\hat{a}) = \text{sym}(a)$ .  
 3) Soit  $k \in [l(\hat{a})]$ , alors :  
 - Si  $k < j$ ,  $\text{sym}_k(\hat{a}) = \text{sym}_k(a)$ .  
 - Si  $j \leq k < j + l(b)$ ,  $\text{sym}_k(\hat{a}) = \text{sym}_j^-(a) \cdot \text{sym}_{k-j}(b)$ .  
 - Si  $j + l(b) \leq k < l(\hat{a})$ ,  $\text{sym}_k(\hat{a}) = \text{sym}_{k+1-l(b)}(a)$ .

Preuve : Pour le (1), on le fait par induction sur  $L(a)$ . lorsque  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$  on introduit, comme à la proposition précédente, les notations  $\hat{i}, \check{i}$  (où encore  $i^\vee$ ),  $\check{j}_0$  et  $k_1$ , puis, après avoir noté  $(\hat{c}_0, \dots, \hat{c}_{m-1}) = \text{cons}(\hat{a})$ , on montre que, pour  $k \in [l(\hat{a})]$ ,  
 - Si  $k < \check{j}_0$ , alors  $k_1 < \check{j}_0$  et  $\hat{c}_k = c_k$ ,  
 - Si  $\check{j}_0 \leq k < (j_0 + 1)^\vee$ ,  $k_1 = \check{j}_0$ , et  
 .. Si  $\check{j}_0 \leq k < j$ ,  $\hat{c}_k = c_k$ ,  
 .. Si  $j \leq k < j + l(b) - 1$ ,  $\hat{c}_k = c'_{k-1}$  (où  $(c'_0, \dots, c'_{n'-1}) = B$ ),  
 .. Si  $j + l(b) - 1 \leq k < (j_0 + 1)^\vee$ ,  $\hat{c}_k = c_{k-n'+1}$ ,  
 - Si  $(j_0 + 1)^\vee \leq k < l(\hat{a})$ , alors  $\check{j}_0 < k_1$  et  $\hat{c}_k = c_{k-n'+1}$ ,  
 La partie (2) est immédiate. Pour le (3), on procède comme au (3) de la

proposition précédente.

• Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés "opéradiques" du branchement (nous donnerons un sens plus précis à cette affirmation au cours de la section 3).

**Proposition 2.11.** : Soient  $a, b, c \in \text{Arb}(S, ar)$  et  $j, k \in \mathbb{N}$ .

1) Si  $j \in [la], k \in [lb]$ , alors :

$$\text{Br}(a, j, \text{Br}(b, k, c)) = \text{Br}(\text{Br}(a, j, b), j + k, c).$$

2) Si  $k < j < l(a)$ , alors :

$$\text{Br}(\text{Br}(a, j, b), k, c) = \text{Br}(\text{Br}(a, k, c), j + l(c) - 1, b).$$

3) Si  $j \in [la]$ , écrivons  $\text{cons}(a) = (c_0, \dots, c_{n-1})$ . Alors :

$$\text{Br}(a, j, c_j(\emptyset)) = a.$$

*Preuve* : Par induction sur  $L(a)$ . Plus précisément, pour le (1), lorsque  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$  on introduit, comme à la proposition 2.9, les notations  $\hat{i}, \check{i}, j_0$ . On montre ensuite que  $\check{j}_0 \leq j + k < (j_0 + 1)^\vee$ . Le reste de la preuve se fait sans difficulté. Pour le (2), lorsque  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ , on écrit  $\text{Br}(a, j, b) = s(a'_0, \dots, a'_{n-1})$ ,  $\text{Br}(a, k, c) = s(a''_0, \dots, a''_{n-1})$  et, pour chaque  $i \in [n]$  on pose  $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$ ,  $\check{i} = \sum_{x \in [i]} l(a'_x)$ ,  $\tilde{i} = \sum_{x \in [i]} l(a''_x)$ , puis on considère  $j_0, k_0 \in [n]$  définis par  $\hat{j}_0 \leq j < \widehat{j_0 + 1}$ ,  $\hat{k}_0 \leq k < \widehat{k_0 + 1}$ . On a déjà  $k_0 \leq j_0$ . puis, pour  $i \in [n]$ , on a les implications :

$$\begin{aligned} i \leq j_0 &\Rightarrow \check{i} = \hat{i}, & i > j_0 &\Rightarrow \check{i} = \hat{i} + l(b) - 1 \\ i \leq k_0 &\Rightarrow \tilde{i} = \hat{i}, & i > k_0 &\Rightarrow \tilde{i} = \hat{i} + l(c) - 1 \end{aligned}$$

On montre ensuite que  $\check{j}_0 \leq j + l(c) - 1 < \widehat{j_0 + 1}$  en étudiant les deux cas  $k_0 = j_0$  et  $k_0 < j_0$ . On obtient alors à chaque fois l'identité voulue. La partie (3) est sans difficulté.



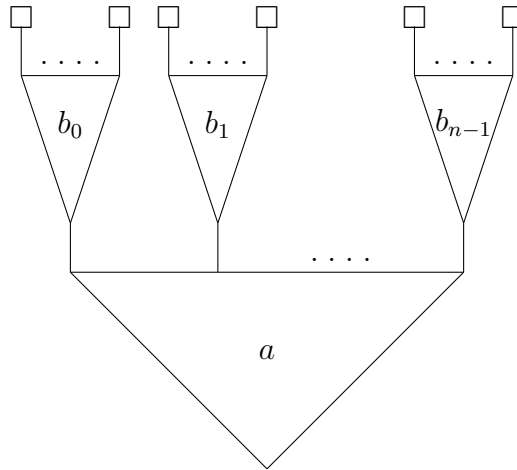
**2.3 La loi OP**

• Soient  $a \in \text{Arb}(S, ar)$ ,  $n = l(a)$  et  $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \text{Arb}(S, ar)^n$ . On construit un nouvel arbre noté  $\text{OP}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$ . Pour l'obtenir, on construit d'abord une liste d'arbres  $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$ , par induction sur  $j$ , en posant :

$$\hat{a}^0 = a \text{ et } \hat{a}^{j+1} = \text{Br}(\hat{a}^j, n - j - 1, b_{n-j-1}).$$

**Notation 2.12.** : On peut alors poser  $\text{OP}(a, (b_0, \dots, b_{n-1})) = \hat{a}^n$ .

$\text{OP}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$  peut se représenter de la façon suivante :



**Remarque 2.13.** : En fait, pour que cette construction ait un sens, on montre dans la même induction que  $l(\hat{a}^j) = n - j + \sum_{i=n-j}^{n-1} l(b_i)$ , ce qui entraîne que  $n - j - 1 < l(\hat{a}^j)$ .

• Fixons  $a, b_0, \dots, b_{n-1} \in \text{Arb}(S, ar)$  (où  $n = l(a)$ ) et posons  $\hat{a} = \text{OP}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$ .

**Proposition 2.14.** : 1)  $L(\hat{a}) = L(a) - l(a) + \sum_{j \in [n]} L(b_j)$ .

2)  $l(\hat{a}) = \sum_{j \in [n]} l(b_j)$ .

3)  $\text{cons}(\hat{a}) = \text{cons}(b_0) \dots \text{cons}(b_{n-1})$ .

4) Si  $L(a) > 1$  alors  $\text{sym}(\hat{a}) = \text{sym}(a)$ .

*Preuve* : Le (1) et le (2) se montrent sans difficulté. Pour le (3), on montre par induction sur  $j \in [n + 1]$  que  $\text{cons}(\hat{a}^j) = A_{n-j} \cdot B_{n-j} \dots B_{n-1}$

où, après avoir posé  $\text{cons}(a) = (c_o, \dots, c_{n-1})$ , on note  $A_j = (c_o, \dots, c_{j-1})$  et  $B_j = \text{cons}(b_j)$  (on utilise la proposition 2.10(1). Pour le (4) cela résulte encore de la proposition 2.10(2).

**Proposition 2.15.** : Soit  $j \in [l\hat{a}]$ . Après avoir noté  $\forall i \in [la]$ ,  $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(b_x)$  et  $j_0 \in [n]$  tel que  $\hat{j}_0 \leq j < \widehat{j_0 + 1}$ , on a :

- 1)  $h_j(\hat{a}) = h_{j_0}(a) + h_{j-j_0}(b_{j_0}) - 1$ .
- 2)  $\text{sym}_j(\hat{a}) = \text{sym}_{j_0}^-(a) \cdot \text{sym}_{j-j_0}^{\hat{a}}(b_{j_0})$ .

*Preuve* : Notons déjà  $(c_o, \dots, c_{n-1}) = \text{cons}(a)$ . On utilise ensuite la liste  $(b_x^j)_{x \in [n]}$  où  $b_x^j = c_x(\emptyset)$  si  $x < n - j$  et  $b_x^j = b_x$  si  $n - j \leq x < n$ . Puis, pour chaque  $i, j \in [n + 1]$ , on note  $\hat{i}^j = \sum_{x \in [i]} l(b_x^j)$ . On considère aussi, pour chaque  $k \in [l\hat{a}^j]$  l'entier  $k_j \in [n]$  tel que  $\hat{k}_j^j \leq k < \widehat{k_j + 1}^j$ . Pour le (1), tout revient alors à montrer par induction sur  $j \in [n + 1]$ , que :

$$\forall k \in [l\hat{a}^j], h_k(\hat{a}^j) = h_{k_j}(a) + h_{k-\hat{k}_j^j}(b_{k_j}^j) - 1.$$

Pour le (2) il faut montrer que :

$$\forall k \in [l\hat{a}^j], \text{sym}_k(\hat{a}^j) = \text{sym}_{k_j}^-(a) \cdot \text{sym}_{k-\hat{k}_j^j}^{\hat{a}^j}(b_{k_j}^j).$$

**Proposition 2.16.** : Soit  $a \in \mathbb{A}rb(S, ar)$ .

1) Si  $n = l(a)$  et  $(c_o, \dots, c_{n-1}) = \text{cons}(a)$ , alors :

$$\text{OP}(a, (c_o(\emptyset), \dots, c_{n-1}(\emptyset))) = a$$

2) Si  $c \in \text{Cons}(S, ar)$ , alors  $\text{OP}(c(\emptyset), (a)) = a$ .

*Preuve* : Pour le (1) cela résulte de la proposition 2.11 (3). Le (2) est immédiat.

**Proposition 2.17.** : Soient  $s \in S$  tel que  $ar(s) = n \neq 0$  et  $(c_o, \dots, c_{n-1})$  dans  $\text{Cons}(S, ar)^n$ . On pose  $\hat{s} = s(c_o(\emptyset), \dots, c_{n-1}(\emptyset))$ . Alors, pour tout  $(a_o, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{A}rb(S, ar)^n$ , on a  $\text{OP}(\hat{s}, (a_o, \dots, a_{n-1})) = s(a_o, \dots, a_{n-1})$ .

*Preuve* : On commence par montrer le lemme 2.18 suivant, puis on montre, par induction sur  $j \in [n + 1]$ , que  $\hat{a}^j = s(c_o(\emptyset), \dots, c_{n-j-1}(\emptyset), a_{n-j}, \dots, a_{n-1})$ .

**Lemme 2.18.** : Soient  $s, c \in S$  tels que  $ar(s) = n \neq 0$  et  $ar(c) = 0$ . Soient aussi  $(a_o, \dots, a_{n-1}) \in Arb(S, ar)^n$  et  $j \in [n]$ . On pose  $\bar{a} = s(a_o, \dots, a_{j-1}, c(\emptyset), a_{j+1}, \dots, a_{n-1})$ . Alors  $Br(\bar{a}, \hat{j}, a_j) = s(a_o, \dots, a_{n-1})$  (où  $\forall i \in [n]$ ,  $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$ ).

## 2.4 Arbres feuillus

Pour aider à la compréhension de cette partie nous vous renvoyons à la section 5 qui traite d'un cas particulier plus lisible.

**Définition 2.19.** : On appelle *langage chargé* la donnée d'un langage  $(S, ar)$  muni d'une nouvelle application  $ch : S \rightarrow \mathbb{Z}$  ( $ch(s)$  est la *charge* du symbole  $s$ ) tel que :  $\forall s \in S, ar(s) = 0 \Rightarrow ch(s) = 0$ .

**Notations 2.20.** : Soit maintenant  $\bar{s} \in Mo(S)$  (c'est-à-dire une liste d'éléments de  $S$ ). Ecrivons  $\bar{s} = (s_o, \dots, s_{n-1})$ . Pour chaque  $j \in [n]$ , on pose  $ch_j(\bar{s}) = \sum_{i \in [j+1]} ch(s_i) = \sum_{i=0}^j ch(s_i)$ . On pose aussi  $ch(\bar{s}) = \sum_{i \in [n]} ch(s_i) = ch_{n-1}(\bar{s})$ .

**Définition 2.21.** : Soient maintenant  $p \in \mathbb{Z}$  et  $\bar{s} \in Mo(S)$  (avec  $n = L(\bar{s})$ ). On dit que  $\bar{s}$  est *p-chargé* si :

- 1)  $\forall j \in [n], ch_j(\bar{s}) \geq p$ ,
- 2)  $ch(\bar{s}) = p$ .

**Définition 2.22.** : Soient enfin  $p \in \mathbb{Z}$  et  $a \in Arb(S, ar)$ . On dit que :

- 1)  $a$  est *p-chargé* si  $\forall j \in [la], sym_j(a)$  est *p-chargé*.
- 2)  $a$  est *feuillu* si  $a$  est 0-chargé.

**Remarques 2.23.** : 1)  $\forall a \in Arb(S, ar), \forall j \in [la], ch \text{ sym}_j^-(a) = ch \text{ sym}_j(a)$ .  
2)  $\forall c \in Cons(S, ar), c(\emptyset)$  est feuillu.

**Proposition 2.24.** : Soit  $a \in Arb(S, ar)$  de la forme  $a = s(a_o, \dots, a_{n-1})$ , où  $n = ar(s) \geq 1$ , on a :

- 1)  $ch_0 \text{ sym}_j(a) = ch(s)$ .
- 2)  $\forall k \in [h_j a], k \geq 1 \Rightarrow ch_k \text{ sym}_j(a) = ch(s) + ch_{k-1} \text{ sym}_{j-\hat{j}_0}(a_{j_0})$  (où l'entier  $\hat{j}_0$  a été défini au 2.2).

Preuve : Immédiat.

**Corollaire 2.25.** : Sous les mêmes hypothèses,

1) on suppose que  $\text{ch}(s) = p$  et, pour tout  $j \in [n]$ ,  $a_j$  est  $q$ -chargé, où  $q \leq 0$ . Alors  $a$  est  $(p + q)$ -chargé.

2) on suppose que  $\text{ch}(s) = 0$  et, pour tout  $j \in [n]$ ,  $a_j$  est feuillu. Alors  $a$  est feuillu.

**Proposition 2.26.** : Soient  $a, b \in \text{Arb}(S, ar)$  et  $j \in [la]$ . Posons

$\hat{a} = \text{Br}(a, j, b)$ . Soit encore  $k \in [l\hat{a}]$  et  $i \in [h_k \hat{a}]$ . Alors :

1) Si  $k < j$ ,  $\text{ch}_i \text{sym}_k(\hat{a}) = \text{ch}_i \text{sym}_k(a)$ ,

2) Si  $j \leq k < j + l(b)$ ,

- Si  $i < h_j(a) - 1$ ,  $\text{ch}_i \text{sym}_k(\hat{a}) = \text{ch}_i \text{sym}_k(a)$ ,

- Si  $h_j(a) - 1 \leq i < h_k(\hat{a})$ ,  $\text{ch}_i \text{sym}_k(\hat{a}) = \text{ch}_i \text{sym}_j(a) + \text{ch}_{i+1-\bar{j}} \text{sym}_{k-j}(b)$   
(où  $\bar{j} = h_j(a)$ ),

3) Si  $j + l(b) \leq k < l(\hat{a})$ ,  $\text{ch}_i \text{sym}_k(\hat{a}) = \text{ch}_i \text{sym}_{k+1-lb}(a)$ .

Preuve : On utilise la proposition 2.10.

**Proposition 2.27.** : Soient  $a, b \in \text{Arb}(S, ar)$ ,  $n = l(a)$  et  $j \in [n]$ . Soient aussi  $(p_i)_{i \in [n]}$  une liste d'entiers de  $\mathbb{Z}$  et  $q \leq 0$ . On suppose que  $b$  est  $q$ -chargé et que, pour tout  $i \in [n]$ ,  $\text{sym}_i(a)$  est  $p_i$ -chargé. Alors si  $\hat{a} = \text{Br}(a, j, b)$ , on a, pour tout  $k \in [l\hat{a}]$  :

- Si  $k < j$ ,  $\text{sym}_k(\hat{a})$  est  $p_k$ -chargé.

- Si  $j \leq k < j + l(b)$ ,  $\text{sym}_k(\hat{a})$  est  $(p_j + q)$ -chargé.

- Si  $j + l(b) \leq k$ ,  $\text{sym}_k(\hat{a})$  est  $p_{k+1-lb}$ -chargé.

Preuve : On utilise la proposition précédente.

**Proposition 2.28.** : Soient  $a, b_0, \dots, b_{n-1} \in \text{Arb}(S, ar)$ , où  $n = l(a)$ . Soient aussi  $p, q \in \mathbb{Z}$  tels que  $q \leq 0$ . On suppose que  $a$  est  $p$ -chargé et, pour tout  $j \in [n]$ ,  $b_j$  est  $q$ -chargé. Alors  $\text{OP}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$  est  $(p + q)$ -chargé.

Preuve : Soit la liste  $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$  définissant  $\text{OP}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$ . On montre, par induction sur  $j \in [n+1]$ , en utilisant la proposition précédente, que  $\hat{a}^j$  vérifie la propriété suivante : Pour tout  $k \in [l\hat{a}^j]$ ,

- Si  $k < n - j$ ,  $\text{sym}_k(\hat{a}^j)$  est  $p$ -chargé,

- Si  $n - j \leq k$ ,  $\text{sym}_k(\hat{a}^j)$  est  $(p + q)$ -chargé.

**Corollaire 2.29.** : Soient  $a, b_0, \dots, b_{n-1} \in \text{Arb}(S, ar)$ , où  $n = l(a)$ . On suppose que  $a$  et  $b_0, \dots, b_{n-1}$ , sont feuillus. Alors  $\text{OP}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$  est encore feuillu.

## 2.5 Langages relativement dimensionnels

Cette fois, pour aider à la compréhension de cette partie, nous vous renvoyons aux exemples de langages comme  $S_{\mathbb{P}}$  et  $S_{\mathbb{B}}$ , donnés dans la deuxième partie, puis à la définition de la dimension d'un arbre.

**Définition 2.30.** : On appelle *langage relativement dimensionnel* la donnée d'un langage  $(S, ar)$  muni d'une famille d'applications  $\delta = (\delta(s) : \mathbb{N}^{ar(s)} \rightarrow \mathbb{N})_{s \in S}$ .

**Remarque 2.31.** : Lorsque  $c \in \text{Cons}(S, ar)$ , comme  $\mathbb{N}^0 \simeq 1$ , on identifie  $\delta(c)$  à un entier que l'on note  $\dim(c)$ .

**Notations 2.32.** : 1) On construit une application  $\dim : \text{Arb}(S, ar) \rightarrow \mathbb{N}$  par induction sur la longueur des arbres. Soit  $a \in \text{Arb}(S, ar)$ .

- Si  $a = c(\emptyset)$ , on pose  $\dim(a) = \dim(c)$ .

- Si  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ , où  $n \geq 1$ , on pose  $\dim(a) = \delta(s)(\dim(a_0), \dots, \dim(a_{n-1}))$ .

2) On définit aussi une application  $\overline{\dim} : \text{Arb}(S, ar) \rightarrow \text{Mo}(\mathbb{N})$  où, pour tout  $a \in \text{Arb}(S, ar)$ , si  $\text{cons}(a) = (c_0, \dots, c_{n-1})$ , on pose  $\overline{\dim}(a) = (\dim(c_0), \dots, \dim(c_{n-1}))$ . On pose encore, pour  $j \in [n]$ ,  $\overline{\dim}_j(a) = \dim(c_j)$ .

**Proposition 2.33.** : Soit  $a \in \text{Arb}(S, ar)$ .

1) Si  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ , alors :

$$\overline{\dim}(a) = \overline{\dim}(a_0) \dots \overline{\dim}(a_{n-1}).$$

2) Soient aussi  $b_0, \dots, b_{n-1} \in \text{Arb}(S, ar)$ , où  $n = l(a)$ . Alors :

$$\overline{\dim} \text{OP}(a, (b_0, \dots, b_{n-1})) = \overline{\dim}(b_0) \dots \overline{\dim}(b_{n-1}).$$

*Preuve* : Le (1) est immédiat. Le (2) résulte de la proposition 2.14.

**Proposition 2.34.** : Soit  $a \in \text{Arb}(S, ar)$ . On pose  $n = l(a)$ .

1) Soient aussi  $b \in \text{Arb}(S, ar)$  et  $j \in [n]$ , alors, si  $\overline{\dim}_j(a) = \dim(b)$ , on a  $\dim \text{Br}(a, j, b) = \dim(a)$ .

2) Soient maintenant  $b_0, \dots, b_{n-1} \in \text{Arb}(S, ar)$ . On suppose que

$$\overline{\dim}(a) = (\dim(b_0), \dots, \dim(b_{n-1})).$$

$$\dim \text{OP}(a, (b_0, \dots, b_{n-1})) = \dim(a).$$

*Preuve* : Le (1) se montre par induction sur  $L(a)$ . Pour le (2), on considère la liste  $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$  définissant  $OP(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$ . On montre, par induction sur  $j \in [n+1]$ , que  $\dim(\hat{a}^j) = \dim(a)$ . Pour cela, on utilise la formule  $\text{cons}(\hat{a}^j) = A_{n-j}.B_{n-j} \dots B_{n-1}$  montrée dans la preuve de la proposition 2.14.

**Définition 2.35.** : On dit qu'un langage relativement dimensionnel  $(S, ar, \delta)$  est *croissant* si :

Pour tout  $s \in S$ , (on note  $n = ar(s)$ ), alors :

$$\forall (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^n, \forall j \in [n], x_j \leq \delta(s)(x_0, \dots, x_{n-1}).$$

**Proposition 2.36.** : Le langage  $(S, ar, \delta)$  étant supposé croissant alors :  
Pour tout  $a \in Arb(S, ar)$ , si  $(c_0, \dots, c_{n-1}) = \text{cons}(a)$ , on a  $\forall j \in [n]$ ,  
 $\dim(c_j) \leq \dim(a)$ .

*Preuve* : Par induction sur  $L(a)$ .

### 3. La monade des arbres

**Introduction** : Chaque langage produit naturellement une monade concrète syntaxique et cartésienne à partir de laquelle on fabrique toutes les monades concrètes syntaxiques présentées ici. Cette monade est obtenue grâce à une opérade sur  $\mathbb{M}o$  (la monade des monoïdes) qui est libre sur la collection (= le langage) de départ.

#### 3.1 Variation des constantes

**Conventions 3.1.** : Fixons, cette fois, un langage a priori sans constante  $(S, ar)$ . Alors, pour tout ensemble  $C$ , on pose  $S(C) = S \coprod C$ . Soient  $u_0 : S \rightarrow S(C)$  et  $u_1 : C \rightarrow S(C)$  les injections canoniques. On construit ensuite une application  $ar : S(C) \rightarrow \mathbb{N}$ , en posant  $\forall s \in S$ ,  
 $ar.u_0(s) = ar(s)$  et  $\forall c \in C$ ,  $ar.u_1(c) = 0$ . On note alors pour simplifier  $A(C) = Arb(S(C), ar)$ .

Soit maintenant  $f : C \rightarrow C'$  une application quelconque. On construit, par induction sur la longueur des arbres, une application

$A(f) : A(C) \rightarrow A(C')$ . Elle est définie, pour  $a \in A(C)$ , par :

- Si  $a = u_1(c)(\emptyset)$ ,  $A(f)(a) = u_1.f(c)(\emptyset)$ ,
- Si  $a = u_0(s)(a_0, \dots, a_{n-1})$ ,  $A(f)(a) = u_0(s)(A(f)(a_0), \dots, A(f)(a_{n-1}))$ .

**Remarques 3.2.** : 1) Dans la suite, on identifie  $S$  à  $u_0(S)$  et  $C$  à  $u_1(C)$  et donc implicitement on suppose que  $S \cap C = \emptyset$ .

2) Au lieu de  $A(f)$  on écrit plutôt  $\tilde{f}$ .

3) Lorsque  $a \in A(C)$  on écrit maintenant  $l_C(a) = \text{cons}(a)$ .

**Proposition 3.3.** : 1)  $A(C)$  est fonctoriel en  $C \in |\mathbb{E}ns|$ . On construit ainsi un endofoncteur  $A$  de  $\mathbb{E}ns$ .

2)  $l_C : A(C) \rightarrow Mo(C)$  est naturel en  $C$ . On note  $l : A \rightarrow Mo$  cette transformation naturelle .

Preuve : (2) Par induction sur la longueur des arbres.

**Proposition 3.4.** : Soient  $f : C \rightarrow C'$  une application et  $a \in A(C)$ .

Alors:

- 1)  $L\tilde{f}(a) = L(a)$ ,
- 2)  $l\tilde{f}(a) = l(a)$ ,
- 3)  $h\tilde{f}(a) = h(a)$ ,
- 4)  $\forall j \in [la]$ ,  $h_j\tilde{f}(a) = h_j(a)$ .

Preuve : Par induction sur  $L(a)$ .

**Proposition 3.5.** : Soient  $f : C \rightarrow C'$  une application,  $a \in A(C)$  et

$(c_0, \dots, c_{n-1}) = l_C(a)$ . Alors :

- 1) Si  $L(a) > 1$ ,  $\text{sym}\tilde{f}(a) = \text{sym}(a)$ ,
- 2)  $\forall j \in [n]$ ,  $\text{sym}_j\tilde{f}(a) = \text{sym}_j^-(a).(f(c_j))$ .

Preuve : Par induction sur  $L(a)$ .

**Proposition 3.6.** : Soient  $f : C \rightarrow C'$  une application,  $a \in A(C)$  et  $n = l(a)$ .

1) Soient aussi  $b \in A(C)$  et  $j \in [n]$ , alors :

$$\tilde{f}\text{Br}(a, j, b) = \text{Br}(\tilde{f}(a), j, \tilde{f}(b))$$

2) Soient aussi  $b_0, \dots, b_{n-1} \in A(C)$ , alors :

$$\tilde{f}\text{OP}(a, (b_0, \dots, b_{n-1})) = \text{OP}(\tilde{f}a, (\tilde{f}b_0, \dots, \tilde{f}b_{n-1}))$$

Preuve : Pour le (1) par induction sur  $L(a)$ . Pour le (2), notons  $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$  et  $(\tilde{\hat{a}}^j)_{j \in [n+1]}$  les deux listes définissant  $\text{OP}(a, (b_o, \dots, b_{n-1}))$  et  $\text{OP}(\tilde{f}a, (\tilde{f}b_o, \dots, \tilde{f}b_{n-1}))$ . On montre, par induction sur  $j \in [n+1]$ , en utilisant le (1), que  $\hat{a}^j = \tilde{f}(\tilde{\hat{a}}^j)$ .

**Proposition 3.7.** : Soit  $f : C' \rightarrow C$  une application injective, alors  $\tilde{f} : A(C) \rightarrow A(C')$  est injective.

Preuve : Si  $a_0, a_1 \in A(C)$  sont tels que  $\tilde{f}(a_0) = \tilde{f}(a_1)$  alors  $L(a_0) = L(a_1)$ . On fait alors la suite de la preuve par induction sur  $L(a_0) = L(a_1)$ .

**Notation 3.8.** : Soit  $C \in |\mathbb{E}ns|$ . Considérons l'application  $u_C : \text{Mo}(C) \rightarrow \mathcal{P}(C)$ ,  $(s_o, \dots, s_{n-1}) \mapsto \{s_o, \dots, s_{n-1}\}$ . On note alors  $l_{\{C\}}$  le composé  $u_C.l_C : A(C) \rightarrow \mathcal{P}(C)$ .

**Proposition 3.9.** : Soit  $f : C' \rightarrow C$  une application injective et  $a \in A(C)$ . Si  $l_{\{C\}}(a) \subset f(C')$ , il existe un unique  $a' \in A(C')$  tel que  $\tilde{f}(a') = a$ .

Preuve : L'unicité de  $a'$  résulte de la proposition précédente. On montre l'existence par induction sur  $L(a)$ .

### 3.2 L'opération $\text{op}$ et la notation $a[-]$

**Notations 3.10.** : Notons  $1 = \{0\}$ , un objet final de  $\mathbb{E}ns$ . De plus,  $C \in |\mathbb{E}ns|$  et  $a \in A(C)$  étant donnés, on note  $\underline{a} = !_C(a)$ . On a  $\underline{a} \in A(1)$ .

**Proposition 3.11.** : Soient  $a, a' \in A(C)$ . On suppose que  $\underline{a} = \underline{a'}$  et  $l_C(a) = l_C(a')$ . Alors  $a = a'$ .

Preuve : On remarque déjà que  $L(a) = L(a')$ . La suite de la preuve se fait par induction sur  $L(a) = L(a')$ .

- Soit maintenant  $C \in |\mathbb{E}ns|$ . Posons  $\overline{C} = C \coprod 1$  et considérons les injections canoniques  $u : C \rightarrow \overline{C}$  et  $v : 1 \rightarrow \overline{C}$ . Ces injections en induisent de nouvelles :  $\tilde{u} : A(C) \rightarrow A(\overline{C})$  et  $\tilde{v} : A(1) \rightarrow A(\overline{C})$ . Prenons ensuite  $a \in A(1)$  et  $(b_o, \dots, b_{n-1})$  dans  $A(C)^n$ , où  $n = l(a)$ , et considérons  $\bar{a} = \text{OP}(\tilde{v}a, (\tilde{u}b_o, \dots, \tilde{u}b_{n-1}))$ . Comme  $l_{\{C\}}(\bar{a})$  est dans  $u(C)$ , il existe un unique  $\hat{a} \in A(C)$  tel que  $\tilde{u}(\hat{a}) = \bar{a}$  (voir la proposition 3.9).



**Notation 3.12.** :  $\hat{a}$  est noté  $\text{op}(a, (b_o, \dots, b_{n-1}))$ . On a  $\text{op}(a, (b_o, \dots, b_{n-1})) \in A(C)$

**Proposition 3.13.** : Soient  $a \in A(1)$ ,  $n = l(a)$  et  $(b_o, \dots, b_{n-1}) \in A(C)^n$ . Alors :

- 1)  $l \text{op}(a, (b_o, \dots, b_{n-1})) = \sum_{x \in [n]} l(b_x)$ ,
- 2)  $L \text{op}(a, (b_o, \dots, b_{n-1})) = L(a) - l(a) + \sum_{x \in [n]} L(b_x)$ ,
- 3)  $l_C \text{op}(a, (b_o, \dots, b_{n-1})) = l_C(b_o) \dots l_C(b_{n-1})$ ,
- 4) Pour toute application  $f : C \rightarrow C'$  on a :  
 $\tilde{f} \text{op}(a, (b_o, \dots, b_{n-1})) = \text{op}(a, (\tilde{f}b_o, \dots, \tilde{f}b_{n-1}))$ ,
- 5)  $\underline{\text{op}}(a, (b_o, \dots, b_{n-1})) = \text{op}(a, (\underline{b}_o, \dots, \underline{b}_{n-1}))$ .

Preuve : Les (1), (2) et (3) résultent de la proposition 2.14. Pour le (4), on utilise la proposition 3.6. Le (5) est un cas particulier du (4).

**Proposition 3.14.** : Soient  $a, b_o, \dots, b_{n-1} \in A(C)$ , où  $n = l(a)$ . Alors :

$$\text{OP}(a, (b_o, \dots, b_{n-1})) = \text{op}(\underline{a}, (b_o, \dots, b_{n-1})).$$

Preuve :  $u : C \rightarrow \overline{C}$  étant l'injection canonique, posons  $\alpha = \tilde{u} \text{op}(\underline{a}, (b_o, \dots, b_{n-1}))$  et  $\beta = \tilde{u} \text{OP}(a, (b_o, \dots, b_{n-1}))$ , on montre que  $\underline{\alpha} = \underline{\beta}$  et  $l_{\overline{C}}(\alpha) = l_{\overline{C}}(\beta)$ .

**Proposition 3.15.** : Soient  $s \in S$  tel que  $ar(s) = n \neq 0$ . On pose  $\bar{s} = s(0(\emptyset), \dots, 0(\emptyset))$ . Alors, pour tout  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in A(C)^n$  on a  $\text{op}(\bar{s}, (a_0, \dots, a_{n-1})) = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ .

Preuve : Résulte de la proposition 2.17.

**Notation 3.16.** : Soient  $a \in A(1)$ ,  $n = l(a)$  et  $(c_o, \dots, c_{n-1}) \in C^n$ . On pose :

$$a[c_o, \dots, c_{n-1}] = \text{op}(a, (c_o(\emptyset), \dots, c_{n-1}(\emptyset))) \in A(C).$$

- Proposition 3.17.** : 1)  $a[c_o, \dots, c_{n-1}] = a$ .  
 2)  $l_C a[c_o, \dots, c_{n-1}] = (c_o, \dots, c_{n-1})$ .  
 3)  $\underline{a}[l_C(a)] = a$ .

Preuve : Sans difficulté.

**Proposition 3.18.** : La transformation naturelle  $l : A \rightarrow Mo$  est cartésienne.

*Preuve* : On le vérifie sur les flèches  $!_C : C \rightarrow 1$ . Soit  $(\bar{c}, a)$  dans  $Mo(C) \times A(1)$  tel que  $Mo(!_C)(\bar{c}) = l_1(a)$ . Alors, si on pose  $\bar{a} = a[\bar{c}]$ , on a  $l_C(\bar{a}) = \bar{c}$  et  $!_C(\bar{a}) = a$ . L'unicité de  $\bar{a}$  résulte de la proposition 3.11.

**Proposition 3.19.** : Soient  $f : C \rightarrow C'$  une application et  $a \in A(C)$ , avec  $n = l(a)$  et  $(c_0, \dots, c_{n-1}) \in C^n$ . Alors  $\tilde{f}(a[c_0, \dots, c_{n-1}]) = a[f(c_0), \dots, f(c_{n-1})]$ .

*Preuve* : Sans difficulté.

### 3.3 Opérate sur $Mo$

**Convention 3.20.** :  $Mo = (Mo, \eta, \mu)$  désigne la monade "monoïde libre" sur  $Ens$ . Cette monade est cartésienne. Rappelons (voir [8]) qu'une opérade sur  $Mo$  est un quadruplet  $(\Omega, \pi, e, m)$  où  $(\Omega, \pi)$  est une collection sur  $Mo$  (c.a.d.  $\Omega \in |Ens|$  et  $\pi : \Omega \rightarrow Mo(1)$  une application où  $Mo(1)$  est identifié à  $\mathbb{N}$ ),  $e \in \Omega$  et  $m : \Omega^{(2)} \rightarrow \Omega$  est une application (où  $\Omega^{(2)}$  est défini par  $\Omega^{(2)} = \{(s, (s_0, \dots, s_{n-1})) \in \Omega \times Mo(\Omega) / \pi(s) = n\}$ ) vérifiant les axiomes suivants :

(Pos)  $\pi(e) = 1$  et  $\forall (s, (s_0, \dots, s_{n-1})) \in \Omega^{(2)}$ ,

$\pi m(s, (s_0, \dots, s_{n-1})) = \sum_{j \in [n]} \pi(s_j)$ ,

(Ug)  $m(e, (s)) = s$ ,

(Ud)  $m(s, (e, \dots, e)) = s$ , où  $(e, \dots, e)$  est une liste de longueur  $\pi(s)$ ,

(Ass)  $\forall s \in \Omega, \forall (s_0, \dots, s_{n-1}) \in \Omega^n, \forall (\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{n-1}) \in Mo(\Omega)^n$  tels que  $n = \pi(s)$  et  $\forall j \in [n], \pi(s_j) = L(\bar{s}_j)$  alors :

$m(s, (m(s_0, \bar{s}_0), \dots, m(s_{n-1}, \bar{s}_{n-1}))) = m(m(s, (s_0, \dots, s_{n-1})), \bar{s}_0 \dots \bar{s}_{n-1})$ .

**Notations 3.21.** : 1) Dans la suite de la sous-section on note :

$s(s_0, \dots, s_{n-1}) = m(s, (s_0, \dots, s_{n-1}))$ .

2) Soit  $(a, j, b) \in \Omega \times \mathbb{N} \times \Omega$  tel que  $j \in [n]$  où  $n = \pi(a)$ . On pose  $B(a, j, b) = a(b_0, \dots, b_{n-1})$  où  $\forall i \in [n]$ , si  $i \neq j$ ,  $b_i = e$  et  $b_j = b$ .

**Proposition 3.22.** : La "loi"  $B$  vérifie les propriétés suivantes :

(Pos')  $\forall a, b \in \Omega, \forall j \in [\pi a], \pi B(a, j, b) = \pi(a) + \pi(b) - 1, \pi(e) = 1$ ,

(Ug')  $\forall a \in \Omega, B(e, 0, a) = a$ ,

(Ud')  $\forall a \in \Omega, \forall j \in [\pi a], B(a, j, e) = a$ ,

(A<sub>1</sub>) Pour tout  $a, b, c \in \Omega$ , pour tout  $j, k \in \mathbb{N}$ , tels que  $k < j < \pi(a)$ ,  
on a :  $B(B(a, j, b), k, c) = B(B(a, k, c), j + \pi(c) - 1, b)$ ,  
(A<sub>2</sub>)  $\forall a, b, c \in \Omega, \forall j \in [\pi a], \forall k \in [\pi b]$ ,  
 $B(a, j, B(b, k, c)) = B(B(a, j, b), j + k, c)$ .

Preuve : Les trois premières propriétés se montrent sans difficulté.

Pour (A<sub>1</sub>), on montre que  $B(B(a, j, b), k, c) = a(d_o, \dots, d_{n-1})$   
 $= B(B(a, k, c), j + \pi(c) - 1, b)$  où  $d_i = e$  si  $i \notin \{k, j\}$ ,  $d_k = c$ ,  $d_j = b$ .  
Pour chaque égalité, on utilise l'axiome (Ass). Pour (A<sub>2</sub>), on montre que  
 $B(a, j, B(b, k, c)) = a(b_o(\bar{B}_0), \dots, b_{n-1}(\bar{B}_{n-1})) = a(b_o, \dots, b_{n-1})(\bar{B}_0 \dots \bar{B}_{n-1})$   
 $= B(B(a, j, b), j + k, c)$  où, si  $i \neq j$ ,  $b_i = e$ ,  $\bar{B}_i = (e)$  et  $b_j = b$  et  
 $\bar{B}_j = (c_o, \dots, c_{m-1})$  avec  $c_i = e$  si  $i \neq k$  et  $c_k = c$ .

• On va maintenant procéder en sens inverse. Soit  $B : D(\Omega, \pi) \rightarrow \Omega$ ,  
(où  $D(\Omega, \pi) = \{(a, j, b) \in \Omega \times \mathbb{N} \times \Omega / j \in [\pi a]\}$ ), une application vérifiant  
les 5 axiomes (Pos'), (Ud'), (Ug'), (A<sub>1</sub>), (A<sub>2</sub>) signalés à la proposition 3.22.  
Nous allons montrer qu'il existe une unique structure d'opéade sur  $\Omega$  tel  
que  $B$  soit obtenu comme dans la notation 3.21.

**Notation 3.23.** : Donnons-nous  $a, b_o, \dots, b_{n-1} \in \Omega$  où  $n = \pi(a)$ . Pour  
définir  $a(b_o, \dots, b_{n-1})$  on construit d'abord une liste  $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$  par induction  
sur  $j \in [n+1]$  en posant  $\hat{a}^0 = a$  et  $\hat{a}^{j+1} = B(\hat{a}^j, n - j - 1, b_{n-j-1})$ .  
Finalement on pose  $a(b_o, \dots, b_{n-1}) = \hat{a}^n$ .

**Proposition 3.24.** : 1) (Pos')  $\Rightarrow$  (Pos),  
2) (Ug')  $\Rightarrow$  (Ug),  
3) (Ud') et (Pos')  $\Rightarrow$  (Ud).

Preuve : Immédiat.

• Il reste maintenant à montrer l'axiome (Ass). Nous allons l'obtenir  
en plusieurs étapes présentées dans la proposition suivante.

**Proposition 3.25.** : Soient  $a, c \in \Omega$ ,  $n = \pi(a)$ ,  $(b_o, \dots, b_{n-1}) \in \Omega^n$ .  
1) Soient aussi  $k \in [n]$  et  $j \in [\pi b_k]$ . On pose  $\hat{k} = \sum_{x \in [k]} \pi(b_x)$ . Alors:  
 $a(b_o, \dots, b_{k-1}, B(b_k, j, c), b_{k+1}, \dots, b_{n-1}) = B(a(b_o, \dots, b_{n-1}), j + \hat{k}, c)$ .  
2)  $\forall p \in [n]$ ,  $B(a(e, \dots, e, b_{p+1}, \dots, b_{n-1}), p, b_p) = a(e, \dots, e, b_p, \dots, b_{n-1})$ .

3) Pour tout  $q \leq p < n$ , on a :

$$a(e, \dots, e, b_p, \dots, b_{n-1})(e, \dots, e, b_q, \dots, b_{p-1}, e, \dots, e) = a(e, \dots, e, b_q, \dots, b_{n-1}).$$

4) Soient en plus  $j \in [n]$ ,  $m = \pi(b_j)$  et  $(c_o, \dots, c_{m-1}) \in \Omega^m$ . Alors on a :

$$a(b_o, \dots, b_{j-1}, b_j(c_o, \dots, c_{m-1}), b_{j+1}, \dots, b_{n-1}) = a(b_o, \dots, b_{n-1})(c'_o, \dots, c'_{\hat{n}-1})$$

où la liste  $(c'_i)_{i \in [\hat{n}]}$  est définie par :  $c'_i = e$  si  $m + \hat{k} \leq i < \hat{n}$ ,  $c'_i = c_{i-\hat{k}}$  si  $\hat{k} \leq i < m + \hat{k}$ ,  $c'_i = e$  si  $i < \hat{k}$ .

5) Soit encore  $(\bar{c}_o, \dots, \bar{c}_{n-1}) \in Mo(\Omega)^n$  tels que  $\forall j \in [n]$ ,  $\pi(b_j) = L(\bar{c}_j)$ . Alors :  $a(b_o(\bar{c}_o), \dots, b_{n-1}(\bar{c}_{n-1})) = a(b_o, \dots, b_{n-1})(\bar{c}_o, \dots, \bar{c}_{n-1})$ .

**Preuve :** (1) Pour tout  $i \in [n]$ , posons  $b'_i = b_i$  si  $i \neq k$  et  $b'_k = B(b_k, j, c)$ . On construit ensuite les listes  $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$  et  $(\bar{a}^j)_{j \in [n+1]}$ , en posant  $\hat{a}^0 = \bar{a}^0 = a$ ,  $\hat{a}^{i+1} = B(\hat{a}^i, n - i - 1, b_{n-i-1})$  et  $\bar{a}^{i+1} = B(\bar{a}^i, n - i - 1, b'_{n-i-1})$ . On montre ensuite, par induction sur  $i \in [n+1]$  que si  $i < n - k$ ,  $\bar{a}^i = \hat{a}^i$  et si  $n - k \leq i \leq n$  alors  $\bar{a}^i = B(\hat{a}^i, \bar{i}, c)$  où  $\bar{i} = j + n - i + \sum_{x=n-k}^{i-1} \pi(b_{n-1-x})$ .

(2) Après avoir considéré la liste  $(b_i^p)_{i \in [n]}$  où  $b_i^p = e$  si  $i < p$  et  $b_i^p = b_i$  si  $i \geq p$  on construit la liste  $(\hat{a}_p^j)_{j \in [n+1], p \in [n]}$  où  $\hat{a}_p^0 = a$  et  $\hat{a}_p^{j+1} = B(\hat{a}_p^j, n - j - 1, b_{n-j-1}^p)$ . On montre ensuite que  $\forall j$ ,  $n - p \leq j \leq n$ ,  $\hat{a}_p^j = \hat{a}_p^{n-p}$  et  $\forall j \leq n - p - 1$ ,  $\hat{a}_p^j = \hat{a}_{p+1}^j$ . Ainsi  $a(e, \dots, e, b_p, \dots, b_{n-1}) = \hat{a}_p^{n-1} = \hat{a}_p^{n-p} = B(\hat{a}_p^{n-p-1}, p, b_p) = B(\hat{a}_{p+1}^{n-p-1}, p, b_p) = B(\hat{a}_{p+1}^{n-1}, p, b_p) = B(a(e, \dots, e, b_{p+1}, \dots, b_{n-1}), p, b_p)$ .

(3) Par induction sur  $p - q$ , en utilisant la proposition précédente.

(4) On considère les listes  $(\hat{b}^i)_{i \in [m+1]}$  et  $(\hat{d}^i)_{i \in [\hat{n}+1]}$  où  $\hat{b}^0 = b_j$ ,  $\hat{d}^0 = a(b_o, \dots, b_{n-1})$ ,  $\hat{b}^{i+1} = B(\hat{b}^i, m - i - 1, c_{m-i-1})$ ,  $\hat{d}^{i+1} = B(\hat{d}^i, \hat{n} - i - 1, c'_{\hat{n}-i-1})$ . On montre, par induction sur  $i$ , que pour tout  $i \in [\hat{n}]$ ,

- Si  $i < \hat{n} - m - \hat{k} + 1$ ,  $\hat{d}^i = a(b_o, \dots, b_{n-1})$ ,
- Si  $\hat{n} - m - \hat{k} + 1 \leq i < \hat{n} - \hat{k}$ ,  $\hat{d}^i = a(b_o, \dots, b_{j-1}, \hat{b}^{m+i+\hat{k}-\hat{n}}, b_{j+1}, \dots, b_{n-1})$ ,
- Si  $\hat{n} - \hat{k} \leq i < \hat{n}$ ,  $\hat{d}^i = a(b_o, \dots, b_{j-1}, b_j(c_o, \dots, c_{m-1}), b_{j+1}, \dots, b_{n-1})$ ,

(5) Pour tout  $j \in [n]$ , écrivons  $\bar{e}_j = (e, \dots, e)$  tel que  $L(\bar{e}_j) = L(\bar{c})$ . On montre par induction sur  $j$ , que

$$a(b_o(\bar{c}_o), \dots, b_{j-1}(\bar{c}_{j-1}), b_j, \dots, b_{n-1})(\bar{e}_0, \dots, \bar{e}_{j-1}, \bar{e}_j, \dots, \bar{c}_{n-1}) = a(b_o(\bar{c}_o), \dots, b_{n-1}(\bar{c}_{n-1})),$$

en utilisant les parties (3) et (4).

• Une collection  $(\Omega, \pi)$  muni d'une fonction  $B : D(\Omega, \pi) \rightarrow \Omega$  vérifiant les axiomes  $(Pos')$ ,  $(Ug')$ ,  $(Ud')$ ,  $(A_1)$ ,  $(A_2)$  définit une structure d'opéade

$(\Omega, \pi, e, m)$  où  $m : \Omega^{(2)} \rightarrow \Omega$  est défini dans la notation 3.23. Notons la maintenant  $m_B$ . Inversement, notons  $B_m$  la fonction  $D(\Omega, \pi) \rightarrow \Omega$  définie à partir de  $m$  (voir : notation 3.21).

**Proposition 3.26.** : On a  $B_{m_B} = B$  et  $m_{B_m} = m$ .

*Preuve* : L'identité :  $B_{m_B} = B$  résulte de la proposition 3.25 (2). Pour l'autre identité, si on considère la liste  $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$  définissant  $m_{B_m}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$  on montre que  $\forall j \in [n+1]$ ,  $\hat{a}^j = a(e, \dots, e, b_{n-j}, \dots, b_{n-1})$ , par induction sur  $j$ .

- Ainsi donc, les deux applications  $B \mapsto m_B$  et  $m \mapsto B_m$  sont inverses l'une de l'autre.

### 3.4 L'opéade des arbres

**Proposition 3.27.** :  $\underline{\mathbb{A}} = (A(1), l, e, \text{op})$  a une structure d'opéade sur  $\mathbb{M}o$ , où  $e = 0(\emptyset)$ .

*Preuve* : On utilise la caractérisation des opéades sur  $\mathbb{M}o$  donnée dans la sous-section précédente, en prenant  $B = \text{Br}$ . Après avoir remarqué que sur  $A(1)$  on a  $\text{OP} = \text{op}$ , on constate que les axiomes suivants sont satisfaits: ( $Pos'$ ), voir la proposition 2.9 - ( $Ug'$ ), par définition de  $\text{Br}$  - ( $Ud'$ ), ( $A_1$ ) et ( $A_2$ ) voir proposition 2.11.

**Notations 3.28.** : Désignons par  $\mathbb{O}p$  la catégorie des opéades sur  $\mathbb{M}o$  et  $U : \mathbb{O}p \rightarrow \mathbb{C}oll = \mathbb{E}ns/\mathbb{N}$  le foncteur d'oubli évident.

Si maintenant  $(S, ar) \in |\mathbb{C}oll|$ , où  $ar^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ , on considère l'application  $\lambda : S \rightarrow A(1), s \mapsto s(0(\emptyset), \dots, 0(\emptyset))$ .  $\lambda$  est une flèche de  $\mathbb{C}oll$ .

**Proposition 3.29.** (voir [4] et [11]) : Le couple  $(\underline{\mathbb{A}}, \lambda)$  est un objet libre pour  $U$ .

*Preuve* : Soient  $(\Omega, \pi, e, m) \in |\mathbb{O}p|$  et  $f : (S, ar) \rightarrow (\Omega, \pi)$  une flèche de  $\mathbb{C}oll$ . On construit une application  $f : A(1) \rightarrow \Omega$  telle que

$\forall a \in A(1), \pi.f(a) = l(a)$ , par induction sur la longueur des arbres.

- Si  $L(a) = 1$ , on pose  $f(a) = e$ ,

- Si  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ , on pose  $f(a) = m(\underline{f}(s), (fa_0, \dots, fa_{n-1}))$ .

Le reste de la preuve se vérifie facilement.

### 3.5 Complément sur la loi $\text{op}$

**Proposition 3.30.** : Soit  $C \in |\mathbb{E}ns|$ .

- 1)  $\forall a \in A(C)$ ,  $\text{op}(0(\emptyset), (a)) = a$ .
- 2)  $\forall \alpha \in A(1)$ ,  $\forall (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in A(1)^n$ ,  $\forall (\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1}) \in \text{MoA}(C)^n$ ,  
 $n = l(\alpha)$ ,  $\forall j \in [n]$ ,  $l(\alpha_j) = L(\bar{a}_j) \implies$   
 $\text{op}(\alpha, (\text{op}(\alpha_0, \bar{a}_0), \dots, \text{op}(\alpha_{n-1}, \bar{a}_{n-1}))) = \text{op}(\text{op}(\alpha, (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})), \bar{a}_0 \dots \bar{a}_{n-1})$ .

*Preuve* : (1) On voit facilement que  $\text{op}(0(\emptyset), (a)) = a$  et  $l_C \text{op}(0(\emptyset), (a)) = l_C(a)$  et donc  $\text{op}(0(\emptyset), (a)) = a$ . (2) Résulte de l'associativité de l'opérateur  $\underline{\mathbb{A}}$ .

**Corollaire 3.31.** : Soient  $s \in S$  tel que  $n = ar(s) \neq 0$ ,  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$  dans  $A(1)^n$  et  $(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{n-1}) \in \text{MoA}(C)^n$  tels que  $\forall j \in [n]$ ,  $l(\alpha_j) = L(\bar{a}_j)$ , alors :

$$s(\text{op}(\alpha_0, \bar{a}_0), \dots, \text{op}(\alpha_{n-1}, \bar{a}_{n-1})) = \text{op}(s(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}), \bar{a}_0 \dots \bar{a}_{n-1}).$$

**Proposition 3.32.** : Soient  $\alpha \in A(1)$ ,  $n = l(\alpha)$  et  $\bar{a}, \bar{a}' \in A(C)^n$ . Alors on a l'implication :

$$\text{op}(\alpha, \bar{a}) = \text{op}(\alpha, \bar{a}') \implies \bar{a} = \bar{a}'.$$

*Preuve* : Par induction sur  $L(\alpha)$ .

### 3.6 La monade $\underline{\mathbb{A}}$

**Notations 3.33.** : Soit  $C \in |\mathbb{E}ns|$ .

- 1) On note  $\eta_C : C \rightarrow A(C)$  l'application  $c \mapsto c(\emptyset)$ .
- 2) Si  $A \in A^2(C) = A(A(C))$ , on pose  $\mu_C(A) = \text{op}(\underline{\mathbb{A}}, l_{AC}(A))$ .

**Remarques 3.34.** : 1) On voit facilement que  $\eta_C : C \rightarrow A(C)$  et  $\mu_C : A^2(C) \rightarrow A(C)$  sont naturels en  $C$ .

2) Soit maintenant  $\mathbb{A}' = (A', \eta', \mu')$  la monade associée à l'opérateur  $\underline{\mathbb{A}}$  sur  $\mathbb{M}o$ . On la décrit de façon suivante :

- Pour tout  $C \in |\mathbb{E}ns|$ , on a  $A'(C) = \{(a, \bar{c}) \in A(1) \times \text{Mo}(C) / l(a) = L(\bar{c})\}$ .
- Pour toute application  $f : C \rightarrow C'$ ,  $A'(f) : A'(C) \rightarrow A'(C')$ ,  $(a, \bar{c}) \mapsto (a, \text{Mof}(\bar{c}))$ .
- $\eta'_C : C \rightarrow A'(C)$ ,  $c \mapsto (0(\emptyset), (c))$ .

- Pour  $\mu'_C : A'^2(C) \rightarrow A'(C)$ , on a déjà

$A'^2(C) = \{(a, \bar{a}) \in A(1) \times MoA'(C) / l_1(a) = Mo(!_{A'C})(\bar{a})\}$ . Alors, si on note  $\pi_0 : A'(C) \rightarrow A(1)$ ,  $\pi_1 : A'(C) \rightarrow Mo(C)$  les deux projections canoniques, on a :

$$\forall (a, \bar{a}) \in A'^2(C), \mu'_C(a, \bar{a}) = (\text{op}(a, Mo(\pi_0)(\bar{a})), \mu_C.Mo(\pi_1)(\bar{a})).$$

**Proposition 3.35.** : On considère l'application  $\kappa_C : A(C) \rightarrow A'(C)$ ,  
 $a \mapsto (\underline{a}, l_C(a))$  Alors :

- 1)  $\kappa_C : A(C) \rightarrow A'(C)$  est naturel en  $C$ .
- 2)  $\eta'_C = \kappa_C.\eta_C$  et  $\mu'_C.\kappa_C^2 = \kappa_C.\mu_C$ .

*Preuve* : Le (1) est immédiat. Pour le (2), on vérifie que  $\forall A \in A^2(C)$ ,  
 $\kappa_C.\mu_C(A) = (u, v) = \mu'_C.\kappa_C^2(A)$  où  $u = \text{op}(\underline{A}, MoA'(!_C).l_{AC}(A))$  et  
 $v = \mu_C.Mo(l_C).l_{AC}(A)$ .

**Proposition 3.36.** :  $\mathbb{A} = (A, \eta, \mu)$  est une monade sur  $\mathbb{E}ns$  et  $\kappa : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$  est un morphisme de monade.

*Preuve* : Ce résultat, très simple à vérifier, peut être vu comme une conséquence du lemme général suivant, que nous utiliserons à plusieurs reprises :

**Lemme 3.37.** : Soient  $\mathbb{C}, \mathbb{C}'$  deux catégories,  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$  un foncteur,  
 $\mathbb{M}' = (M', \eta', \mu')$  une monade sur  $\mathbb{C}'$ ,  $M$  un endofoncteur de  $\mathbb{C}$ ,  
 $\eta : Id_{\mathbb{C}} \rightarrow M, \mu : M^2 \rightarrow M$  et  $m : FM \rightarrow M'F$  des transformations naturelles. Toutes ces données doivent satisfaire les conditions suivantes :

- 1)  $F$  est fidèle,
- 2) Pour tout  $C \in |\mathbb{C}|$ ,  $m_C : FM(C) \rightarrow M'F(C)$  est un monomorphisme,
- 3) On a les identités :  $\eta'F = m.F\eta$  et  $m.F\mu = \mu'F.M'm.mM$ ,  
alors  $\mathbb{M} = (M, \eta, \mu)$  est une monade sur  $\mathbb{C}$  et  $(F, m) : (\mathbb{C}, \mathbb{M}) \rightarrow (\mathbb{C}', \mathbb{M}')$  est un morphisme entre catégories munies de monades.

*Preuve* : (du lemme) On montre que

$$\forall C \in |\mathbb{C}|, m_C.F(\mu_C.\eta_{MC}) = m_C = m_C.F(\mu_C.M\eta_C) \text{ et } m_C.F(\mu_C.\mu_{MC}) = \mu'_{FC}.M'\mu'_{FC}.M'^2m_C.M'm_{MC}.m_{M^2C} = m_C.F(\mu_C.M\mu_C).$$

*Preuve* : (de la proposition) Ici  $\mathbb{C} = \mathbb{C}' = \mathbb{E}$ ,  $F = Id$ ,  $\mathbb{M}' = \mathbb{A}'$ ,  $m = \kappa$  et  $\mathbb{M} = \mathbb{A}$ .

**Proposition 3.38.** : 1) La transformation naturelle  $l : A \rightarrow Mo$  est un morphisme de monades  $\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{M}o$ .

2)  $\mathbb{A} = (A, \eta, \mu)$  est une monade cartésienne.

*Preuve* : (1) On considère la transformation naturelle  $\pi' : A' \rightarrow Mo$  définie par  $\pi'_C(a, \bar{c}) = \bar{c}$ . On vérifie facilement que  $\pi' : \mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{M}o$  est un morphisme de monade. Alors, comme  $l = \pi' \cdot \kappa$  c'est aussi un morphisme de monade.

(2)  $\mathbb{M}o$  étant une monade cartésienne et  $l : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{M}o$  étant un morphisme de monade qui est cartésien,  $\mathbb{A}$  est aussi une monade cartésienne.

**Proposition 3.39.** : Soit  $C \in |\mathbb{E}ns|$ , alors :

1)  $\forall a \in A(C), \mu_C(a(\emptyset)) = a$ ,

2) Pour tout  $s \in S$  et tout  $(A_0, \dots, A_{n-1}) \in A^2(C)^n$  tels que  $ar(s) = n \neq 0$ , on a :

$$\mu_C(s(A_0, \dots, A_{n-1})) = s(\mu_C A_0, \dots, \mu_C A_{n-1}),$$

3) Pour tout  $a \in A(1)$  et  $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in A(C)^n$  tels que  $n = l(a)$ , on a :

$$\mu_C(a[b_0, \dots, b_{n-1}]) = \text{op}(a, (b_0, \dots, b_{n-1})).$$

*Preuve* : Le (1) est immédiat. Le (2) résulte de la proposition 3.31. Le (3) se montre sans difficulté.

**Proposition 3.40.** :  $\mathbb{A}$  est une monade concrète syntaxique, où  $U = Id_{\mathbb{E}ns}$  et où  $\forall C \in |\mathbb{E}ns|, \forall a \in A(C), L_C(a) = L(a)$ .

*Preuve* : Pour  $(MS0)$ ,  $(MS1)$  et  $(MS'1)$  c'est immédiat.  $(MS2)$  et  $(MS'2)$  se vérifient par induction sur la longueur des arbres.  $(MS3)$  résulte de la proposition 3.32.

**Proposition 3.41.** : 1) Soient  $a, b \in A(1)$ ,  $n = l(a)$ . Alors :

$$a \underset{\mathbb{A}}{\leq} b \iff \exists!(b_0, \dots, b_{n-1}) \in A(1)^n, b = \text{op}(a, (b_0, \dots, b_{n-1})).$$

(pour la notation " $\underset{\mathbb{A}}{\leq}$ " voir 1.13).

2) Soit  $a \in A(1)$  tel que  $L(a) > 1$ . Alors  $a$  est primitif ssi  $\exists s \in S, ar(s) \geq 1$  et  $a = \bar{s}$  (où  $\bar{s} = s(0(\emptyset), \dots, 0(\emptyset))$ ).



Preuve : (1) On considère  $B = a[b_0, \dots, b_{n-1}] \in A^2(1)$  et on utilise la proposition précédente.

(2)( $\Leftarrow$ ) Par induction sur la longueur de  $a$ .

( $\Rightarrow$ ) Comme  $L(a) > 1$ ,  $a$  s'écrit  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ . On prend alors  $A = s(a_0(\emptyset), \dots, a_{n-1}(\emptyset))$ . On a  $A \in A^2(1)$  et  $\mu_1(A) = a$ . La fin de la preuve est sans difficulté.

**Proposition 3.42.** : La monade  $\mathbb{A}$  est pure.

Preuve : Résulte de la proposition précédente et de la proposition 3.15 .

## 4. Antériorité

**Introduction** : Dans la section suivante on donnera un théorème de décomposition canonique des arbres feuillus. Pour démontrer ce théorème l'outillage introduit aux sections 2 et 3 ne suffit pas. Nous consacrerons donc cette section à combler les lacunes des deux sections précédentes. Un des ingrédients essentiels de cette section est la codification d'une branche d'arbre.

### 4.1 Trois relations d'ordre sur les listes

#### 4.1.1 La relation $\ll$

**Notation 4.1.** : Soit  $S$  un ensemble fixé. Alors, pour tout  $\bar{s}, \bar{s}' \in Mo(S)$  on note  $\bar{s} \ll \bar{s}'$ , s'il existe  $\bar{s}'' \in Mo(S)$  tel que  $\bar{s}' = \bar{s}.\bar{s}''$ .

**Proposition 4.2.** : Soient  $\bar{s}, \bar{s}' \in Mo(S)$ , alors :

- 1)  $\bar{s} \ll \bar{s}' \Rightarrow L(\bar{s}) \leq L(\bar{s}')$ ,
- 2)  $\bar{s} \ll \bar{s}'$  et  $L(\bar{s}) = L(\bar{s}') \Rightarrow \bar{s} = \bar{s}'$ ,
- 3) Soit encore  $\bar{s}'' \in Mo(S)$  tel que  $\bar{s} \ll \bar{s}''$  et  $\bar{s}' \ll \bar{s}''$ , alors  $\bar{s} \ll \bar{s}'$  ou  $\bar{s}' \ll \bar{s}$ .

Preuve : Immédiat .

**Proposition 4.3.** :  $\ll$  est une relation d'ordre sur  $Mo(S)$ .

Preuve : Immédiat.

**Notation 4.4.** : Soient  $\bar{s} = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in Mo(S)$  et  $1 \leq m \leq n$ . On pose  $\text{sec}_m(\bar{s}) = (s_0, \dots, s_{m-1})$ .

**Proposition 4.5.** : Soient  $\bar{s}, \bar{s}' \in Mo(S)$ ,  $n = L(\bar{s})$ ,  $n' = L(\bar{s}')$ . Alors :  
 $\bar{s} \ll \bar{s}' \iff n \leq n'$  et  $\bar{s} = \text{sec}_n(\bar{s}')$ .

*Preuve* : Sans difficulté.

#### 4.1.2 La relation $\leq$

Soit  $E$  un ensemble. Commençons par faire opérer le monoïde  $Mo(E)$  sur  $E^{\mathbb{N}}$  par la loi de composition  $Mo(E) \times E^{\mathbb{N}} \rightarrow E^{\mathbb{N}} : (\bar{x}, \hat{y}) \mapsto \bar{x} \cdot \hat{y}$  où, pour  $\bar{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $\hat{y} = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ , alors  $\bar{x} \cdot \hat{y} = (y'_j)_{j \in \mathbb{N}}$  où :

- si  $j < n$ ,  $y'_j = x_j$  - si  $n \leq j$ ,  $y'_j = y_{j-n}$ .

Soit maintenant  $\tilde{Mo}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  définie, pour  $\hat{x} = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ , par :

(1)  $\exists j \in \mathbb{N}$ ,  $x_j = -1$ ,

(2)  $\forall j, j' \in \mathbb{N}$ ,  $j \leq j'$  et  $x_j < 0 \Rightarrow x_{j'} = -1$ .

Ensuite, soit  $\phi : Mo(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ,  $\bar{x} \mapsto \bar{x} \cdot \mu$  (où  $\mu$  est la suite constante sur -1).

**Proposition 4.6.** : 1)  $\phi$  est injective.

2)  $\phi(Mo(\mathbb{N})) = \tilde{Mo}(\mathbb{N})$ .

*Preuve* : Sans difficulté.

On considère enfin la relation d'ordre lexicographique, notée  $\leq$  sur  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ . C'est une relation d'ordre total sur  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ . On munit  $\tilde{Mo}(\mathbb{N})$  de l'ordre induit.

#### 4.1.3 La relation $\bar{\leq}$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On munit  $\mathbb{N}^n$  de l'ordre produit noté  $\bar{\leq}$ . Donc

$$(m_j)_{j \in [n]} \bar{\leq} (m'_j)_{j \in [n]} \iff \forall j \in [n], m_j \leq m'_j.$$

**Notation 4.7.** : Soit  $\bar{m} = (m_j)_{j \in [n]} \in \mathbb{N}^n$ . On pose  $\Sigma(\bar{m}) = \sum_{j \in [n]} m_j$ .

**Proposition 4.8.** : 1)  $\forall \bar{m}, \bar{m}' \in \mathbb{N}^n$ ,  $\bar{m} \bar{\leq} \bar{m}' \Rightarrow \Sigma(\bar{m}) \leq \Sigma(\bar{m}')$ .

2)  $\forall \bar{m}, \bar{m}' \in \mathbb{N}^n$ ,  $\bar{m} \bar{\leq} \bar{m}'$  et  $\Sigma(\bar{m}) = \Sigma(\bar{m}') \Rightarrow \bar{m} = \bar{m}'$ .

*Preuve* : Immédiat.

#### 4.2 Les surjections croissantes $q_{(a,b)}$

Soit  $\bar{n} = (n_j)_{j \in [m]} \in (\mathbb{N}^*)^m$ . On considère l'application  $s : [m] \rightarrow \mathbb{N}$  définie pour chaque  $j \in [m]$  par  $s(0) = 0$  et si  $j > 0$ ,  $s(j) = \sum_{x \in [j]} n_x$ .  $s$  est strictement croissante. On construit maintenant une nouvelle application  $q : [s(m)] \rightarrow \mathbb{N}$  en posant  $q(j) = \sup\{i \in [m] / s(i) \leq j\}$ . Alors  $Im(q) \subset [m]$  et  $\forall j \in [s(m)]$ ,  $s \cdot q(j) \leq j < s(q(j) + 1)$ .

**Proposition 4.9.** : 1)  $[m]$  et  $[s(m)]$  étant naturellement ordonnés, on les voit comme des catégories. Alors,  $q : [s(m)] \rightarrow [m]$  est l'adjoint à droite de  $s : [m] \rightarrow [s(m)]$ .

2)  $q : [s(m)] \rightarrow [m]$  est une application croissante telle que  $q \cdot s = Id_{[m]}$  (elle est donc surjective).

*Preuve* : Immédiat.

**Notations 4.10.** : On note  $s_{\bar{n}} = s$  et  $q_{\bar{n}} = q$ .

Soient maintenant  $a, b \in A(1)$  tels que  $a \leq b$  (pour la notation  $\leq$  voir 1.13). Posons  $n = l(a)$ . Alors  $\exists!(b_0, \dots, b_{n-1}) \in A(1)^n$ ,  $b = \text{op}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$  (voir proposition 3.41). Posons encore  $\forall j \in [n]$ ,  $\beta_j = l(b_j)$  et  $\bar{\beta} = (\beta_j)_{j \in [n]}$ .

**Notations 4.11.** : Dans la suite on note  $s_{(a,b)} = s_{\bar{\beta}}$  et  $q_{(a,b)} = q_{\bar{\beta}}$ .

Ainsi  $s_{(a,b)} : [la] \rightarrow [lb]$  et  $q_{(a,b)} : [lb] \rightarrow [la]$  sont des applications croissantes où  $s_{(a,b)}$  est l'adjoint à gauche de  $q_{(a,b)}$  et tels que  $q_{(a,b)} \cdot s_{(a,b)} = Id_{[la]}$ .

**Proposition 4.12.** : 1)  $\forall a \in A(1)$ ,  $s_{(a,a)} = Id$  et  $q_{(a,a)} = Id$ .

2)  $\forall a, b, c \in A(1)$ ,  $a \leq b \leq c \Rightarrow s_{(a,c)} = s_{(b,c)} \cdot s_{(a,b)}$  et  $q_{(a,c)} = q_{(a,b)} \cdot q_{(b,c)}$ .

*Preuve* : (1) Immédiat.

(2) Ecrivons  $b = \text{op}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$  et  $c = \text{op}(b, (c_0, \dots, c_{sn-1}))$ . Pour chaque  $i \in [n]$ , posons  $\bar{c}_i = (c_{si}, \dots, c_{s(i+1)-1})$ . Alors, grâce à la proposition 3.30, on a  $c = \text{op}(\text{op}(a, (b_0, \dots, b_{n-1})), \bar{c}_0 \dots \bar{c}_{n-1}) =$

$\text{op}(a, (\text{op}(b_0, \bar{c}_0), \dots, \text{op}(b_{n-1}, \bar{c}_{n-1})))$ . On pose  $s = s_{(a,b)}$  et  $s' = s_{(b,c)}$  et  $\sigma = s_{(a,c)}$ . Alors  $\forall i \in [la]$ ,  $\sigma(i) = \sum_{x \in [i]} l \text{op}(b_x, \bar{c}_x)$  et

$\forall x \in [i]$ ,  $l \text{op}(b_x, \bar{c}_x) = s' \cdot s(x+1) - s' \cdot s(x)$ . Ainsi  $\sigma = s' \cdot s$ . L'autre identité est obtenue par adjonction à droite.

**Remarque 4.13.** : Les applications  $s$  et  $q$  ne font que clarifier la construction des  $\hat{i}$  et  $j_0$  donnés dans 2.2.

### 4.3 Codification d'une branche d'arbre

**Notations et définitions 4.14.** : Soient  $a \in A(C)$ ,  $n = l(a)$  et  $j \in [n]$ . On construit  $\text{cod}_j^-(a) \in \text{Mo}(\mathbb{N})$  par induction sur  $L(a)$ .

- Si  $a = c(\emptyset)$ , où  $c \in C$  (alors  $n = 1$  et  $j = 0$ ). Dans ce cas on pose  $\text{cod}_0^-(a) = ()$  (la liste vide).

- Si  $a = s(a_0, \dots, a_{m-1})$ , où  $m = ar(s) \geq 1$ , commençons par noter, pour  $i \in [m]$ ,  $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$ , puis on considérons l'unique  $j_0 \in [n]$  tel que  $\hat{j}_0 \leq j < \hat{j}_0 + 1$  (Remarque : En fait  $\hat{i} = s_{\bar{\beta}}(i)$  et  $j_0 = q_{\bar{\beta}}(j)$  où  $\bar{\beta} = (l(a_0), \dots, l(a_{m-1}))$ ). On pose :

$$\text{cod}_j^-(a) = (j_0). \text{cod}_{j-j_0}^-(a_{j_0}).$$

On pose ensuite  $\text{cod}_j(a) = (0). \text{cod}_j^-(a)$ .

$\text{cod}_j(a)$  est appelée la *codification de la  $j^e$  branche de  $a$* .

**Exemple 4.15.** Dans l'exemple concret de la section 2 (voir 2.6), on vérifie que :  $\text{cod}_0(a) = (0, 0, 0, 0)$ ,  $\text{cod}_1(a) = (0, 0, 1, 0)$ ,  $\text{cod}_2(a) = (0, 1, 0)$ ,  $\text{cod}_3(a) = (0, 2, 0, 0)$ ,  $\text{cod}_4(a) = (0, 2, 0, 1, 0)$ ,  $\text{cod}_5(a) = (0, 2, 0, 2)$ ,  $\text{cod}_6(a) = (0, 2, 1)$ .

**Proposition 4.16.** :  $\forall a \in A(C), \forall j \in [la], L \text{cod}_j(a) = h_j(a)$ .

*Preuve* : Par induction sur  $L(a)$ .

**Proposition 4.17.** : Soient  $a, b \in A(1)$ ,  $j \in [la]$ ,  $\hat{a} = \text{Br}(a, j, b)$  et  $k \in [l\hat{a}]$ . Alors :

- si  $k < j$ ,  $\text{cod}_k(\hat{a}) = \text{cod}_k(a)$ ,
- si  $j \leq k < j + l(b)$ ,  $\text{cod}_k(\hat{a}) = \text{cod}_j(a). \text{cod}_{k-j}^-(b)$ ,
- si  $j + l(b) \leq k < l(\hat{a})$ ,  $\text{cod}_k(\hat{a}) = \text{cod}_{k+1-l(b)}(a)$ .

*Preuve* : On s'inspire de la preuve de la proposition 2.10 (3).

**Proposition 4.18.** : Soient  $a \in A(C)$  et  $j \in [la]$ . Posons aussi  $m = h_j(a)$ . On écrit  $\text{sym}_j(a) = (s_o^j, \dots, s_{m-1}^j)$  et  $\text{cod}_j(a) = (p_o^j, \dots, p_{m-1}^j)$ . Alors

$$\forall i \in [m-1], p_{i+1}^j \in [ar(s_i^j)].$$

*Preuve* : Par induction sur  $L(a)$ .

**Proposition 4.19.** : Soient  $a \in A(C)$  et  $i, j \in [la]$ . On a l'implication :

$$\text{cod}_i(a) \ll \text{cod}_j(a) \Rightarrow i = j.$$

Preuve : Par induction sur  $L(a)$ .

**Proposition 4.20.** : Soient  $a \in A(1)$ ,  $i, j \in [la]$  et  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $n \leq \inf\{h_i(a), h_j(a)\}$ . Alors on a l'implication :

$$\text{sec}_n \text{cod}_i(a) = \text{sec}_n \text{cod}_j(a) \Rightarrow \text{sec}_n \text{sym}_i(a) = \text{sec}_n \text{sym}_j(a).$$

Preuve : Par induction sur  $L(a)$ .

**Proposition 4.21.** : Soient  $a \in A(1)$ . Ecrivons, pour tout  $j \in [la]$  :  $\text{cod}_j(a) = (p_o^j, \dots, p_{m-1}^j)$ ,  $\text{sym}_j(a) = (s_o^j, \dots, s_{m-1}^j)$ , où  $m = h_j(a)$ . Alors  $\forall i \in [m-1], \forall u \in [ar(s_i^j)], \exists k \in [la], (p_o^j, \dots, p_i^j, u) \ll \text{cod}_k(a)$ .

Preuve : Par induction sur  $L(a)$ . Lorsque  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ , pour tout  $i \in [n]$  notons  $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$  et  $j_0 \in [n]$  tel que  $\hat{j}_0 \leq j < \widehat{j_0 + 1}$ .

Prenons maintenant  $i \in [m-1]$  et  $u \in [ar(s_i^j)]$ .

- Si  $i = 0$ , on pose  $k = \hat{u}$ . Alors  $(p_o^j, u) = (0, u) \ll \text{cod}_k(a)$ .

- Si  $i \geq 1$ , par hypothèse d'induction, il existe  $k' \in [la_{j_0}]$  tel que  $(0, p_2^j, \dots, p_i^j, u) \ll \text{cod}_{k'}(a_{j_0})$ . On pose alors  $k = \hat{j}_0 + k'$  et on vérifie que  $k \in [la]$  et que  $(p_o^j, \dots, p_i^j, u) \ll \text{cod}_k(a)$ .

#### 4.4 Antécédents d'une liste

**Notation 4.22.** : Soient  $a \in A(C)$  et  $j \in [la]$ . On considère la bijection  $\phi : Mo(\mathbb{N}) \rightarrow \tilde{Mo}(\mathbb{N})$  définie au 4.1.2, et on pose  $\text{Cod}_j^-(a) = \phi(\text{cod}_j^-(a))$  et  $\text{Cod}_j(a) = \phi(\text{cod}_j(a))$ .

**Remarque 4.23.** : 1) On a  $\text{Cod}_j(a) = (0).\text{Cod}_j^-(a)$ .

2) - Si  $a = c(\emptyset)$ , où  $c \in C$ , alors  $\text{Cod}_j^-(a) = \mu$  (voir la notation au 4.1.2).

- Si  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ , où  $n = ar(s) \geq 1$ , on a

$$\text{Cod}_j^-(a) = (j_0).\text{Cod}_{j-j_0}^-(a_{j_0}) \text{ (où } \hat{j}_0 \text{ est défini au 4.14) .}$$

**Proposition 4.24.** : Soit  $a \in A(C)$ . Alors :

$$\forall i, j \in [la], i < j \Rightarrow \text{Cod}_i(a) < \text{Cod}_j(a).$$

où " $<$ " est l'ordre strict lexicographique sur  $\tilde{Mo}(\mathbb{N})$ .

Preuve : Par induction sur  $L(a)$ .

**Notations et définitions 4.25.** : Soient  $a \in A(C)$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et  $\bar{n} = (n_0, \dots, n_{p-1}) \in \mathbb{N}^p$ . On pose :

$$\text{Ant}_p(\bar{n}) = \{j \in [la] / \text{sec}_p \text{Cod}_j(a) = \bar{n}\}.$$

Les éléments de  $\text{Ant}_p(\bar{n})$  sont appelés les *antécédents de la liste*  $\bar{n}$ .

**Proposition 4.26.** : 1)  $\text{Ant}_p(\bar{n})$  est un intervalle de  $[la]$ .  
2)  $\text{Ant}_p(\bar{n}) = \{j \in [la] / p \leq h_j(a), \text{sec}_p \text{cod}_j(a) = \bar{n}\}$ .

Preuve : (1) Résulte de la proposition précédente.

(2) Sans difficulté .

#### 4.5 Propriétés spécifiques de l'antériorité

**Proposition 4.27.** : Soient  $a, b \in A(1)$  tels que  $a \leq b$ . On note  $q = q_{(a,b)}$  (voir 4.11). Alors  $\forall k \in [lb]$ ,  $\text{sym}'_{qk}(a) \ll \text{sym}'_k(b)$  et  $\text{cod}_{qk}(a) \ll \text{cod}_k(b)$ .

Preuve : La première inégalité résulte de la proposition 2.15. Pour la seconde inégalité...

a) on commence par la montrer, pour  $b$  de la forme  $\text{Br}(a, j, c)$ , en utilisant la proposition 4.17.

b) Dans le cas général, on écrit  $b = \text{op}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$ , que l'on obtient avec la liste  $(\hat{a}^j)_{j \in [n+1]}$ . Alors  $a = \hat{a}^0 \leq \hat{a}^1 \leq \dots \leq \hat{a}^n = b$ . On obtient donc l'inégalité cherchée grâce au (a) et à la proposition 4.3.

**Proposition 4.28.** : Soient  $a, b \in A(C)$  et  $m \in \mathbb{N}$ . On suppose que :  
1)  $l(a) = l(b) = m$ , 2)  $\forall j \in [m]$ ,  $\text{sym}_j(a) = \text{sym}_j(b)$ , 3)  $\forall j \in [m]$ ,  $\text{cod}_j(a) = \text{cod}_j(b)$ . Alors  $a = b$ .

Preuve : Par induction sur  $L(a)$ . Lorsque  $L(a) > 1$ , on a aussi  $L(b) > 1$ . On écrit  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$  et  $b = s'(a'_0, \dots, a'_{n'-1})$ . Pour  $i \in [n]$  et  $i' \in [n']$ , écrivons  $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(a_x)$  et  $\hat{i}' = \sum_{x \in [i']} l(a'_x)$ . Soient  $j \in [m]$ ,  $i \in [n]$  et  $i' \in [n']$  tels que  $\hat{i} \leq j < \widehat{i+1}$  et  $\hat{i}' \leq j < (\hat{i}'+1)^\vee$ . On a  $(s).\text{sym}_{j-\hat{i}}(a_i) = (s').\text{sym}_{j-\hat{i}'}(a'_{i'})$ . Donc  $s = s'$ ,  $n = n'$ . De plus

$(i).cod_{j-\hat{i}}^-(a_i) = (i').cod_{j-\hat{i}'}^-(a_{i'})$ . Donc  $i = i'$ . On vérifie ensuite que  $l(a_0) = l(a'_0)$  (On l'obtient en montrant que  $l(a_0) > l(a'_0)$  puis  $l(a'_0) > l(a_0)$  sont impossibles, en utilisant un  $j$  approprié). Puis on considère  $u = \sup\{k \in [n] / l(a_k) = l(a'_k)\}$  et on montre de même que  $l(a_{u+1}) \neq l(a'_{u+1})$  est impossible. Donc  $u = n - 1$ . Ainsi  $\forall i \in [n]$ ,  $l(a_i) = l(a'_i) \Rightarrow \forall i \in [n]$ ,  $\hat{i} = \hat{i}'$ . On en déduit alors, par hypothèse d'induction, que  $a_i = a'_i$ . Ceci étant vrai pour tout  $i \in [n]$ , on obtient  $a = a'$ .

**Proposition 4.29.** : Soient  $a, b \in A(1)$  et  $f, f' : [lb] \rightarrow [la]$  deux applications telles que  $\forall j \in [lb]$ ,  $cod_{fj}(a) \ll cod_j(b)$  et  $cod_{f'j}(a) \ll cod_j(b)$ . Alors  $f = f'$ .

*Preuve* : Cela résulte de la proposition 4.2 et de la proposition 4.19.

#### 4.6 Caractérisation de l'antériorité

**Notation 4.30.** : Soient  $a, b \in A(1)$ . On écrit  $a \tilde{<} b$  s'il existe une surjection croissante  $f : [lb] \rightarrow [la]$ , telle que  $\forall j \in [lb]$ ,  $sym_{fj}^-(a) \ll sym_j^-(b)$  et  $cod_{fj}(a) \ll cod_j(b)$ .

**Remarque 4.31.** : 1) On a vu au 4.27 que  $a \leq b \Rightarrow a \tilde{<} b$ .

2) Dans la définition de  $\tilde{<}$  la surjection  $f$  est unique, grâce la proposition 4.29.

3) Si  $a \tilde{<} b$ , alors  $l(a) \leq l(b)$ .

**Proposition 4.32.** :  $\tilde{<}$  est une relation d'ordre sur  $A(1)$ .

*Preuve* : L'anti-symétrie résulte de la proposition 4.28. Le reste de la preuve se fait sans difficulté.

**Proposition 4.33.** : Soient  $a, b \in A(1)$  tels que  $a \tilde{<} b$ . Notons  $q : [lb] \rightarrow [la]$  la surjection croissante canonique. On suppose qu'il existe  $j \in [lb]$  tel que  $h_{qj}(a) < h_j(b)$ . Ecrivons  $sym_j^-(b) = (s_0^j, \dots, s_{m_j-1}^j)$ , où  $m_j = h_j(b)$  et posons  $a' = Br(a, q(j), \bar{s})$ , où rappelons le,  $\bar{s} = s(0(\emptyset), \dots, 0(\emptyset))$  avec  $s = s_{m-1}^j$  pour  $m = h_{qj}(a)$ . Alors  $a' \tilde{<} b$ .

Preuve : Notons déjà  $I = \text{Ant}_m \text{cod}_{qj}(a)$ . Alors  $j \in I$ . Posons  $j_0 = \inf(I)$  et  $j_1 = \sup(I)$ . Pour chaque  $u \in [ar(s)]$ , posons ensuite  $I_u = \text{Ant}_{m+1}(\text{cod}_{qj}(a).(u))$ . Alors, les ensembles  $I_u$  ainsi que  $I$  sont des intervalles de  $[lb]$ . On a  $\forall u \in [ar(s)]$ ,  $I_u \neq \emptyset$  et  $\bigcup_{u \in [ar(s)]} I_u = I$  et  $\forall u, u' \in [ar(s)]$ ,  $u \neq u' \Rightarrow I_u \cap I_{u'} = \emptyset$ . On considère ensuite l'application  $f : [lb] \rightarrow [la']$  définie pour  $i \in [lb]$  par :

- si  $i < j_0$ ,  $f(i) = q(i)$ ,
- si  $j_0 \leq i \leq j_1$ ,  $f(i) = q(j) + u$  (où  $u$  est l'unique élément de  $[ar(s)]$  tel que  $i \in I_u$ ),
- si  $j_1 < i < l(b)$ ,  $f(i) = q(i) + ar(s) - 1$ .

On montre que  $f$  est une surjection croissante, puis qu'elle vérifie :

$\forall i \in [lb]$ ,  $\text{sym}_{f_i}^-(a') \ll \text{sym}_i^-(b)$  et  $\text{cod}_{f_i}(a') \ll \text{cod}_i(b)$ . Ainsi  $a' \tilde{<} b$ .

**Notation 4.34.** : Soient  $a, b \in A(1)$  tels que  $a \tilde{<} b$  et  $f : [lb] \rightarrow [la]$  la surjection croissante canonique. Posons  $N(a) = \sum_{j \in [lb]} h_{fj}(a)$ .

**Proposition 4.35.** : 1)  $N(a) \leq N(b)$ .

2) Si  $N(a) = N(b)$  alors  $a = b$ .

Preuve : Pour le (2), on montre que  $\forall j \in [lb]$ ,  $h_j(b) = h_{fj}(a)$ , puis que  $\forall j \in [lb]$ ,  $\text{cod}_j(b) = \text{cod}_{fj}(a)$ , ce qui montre que  $f$  est injective, donc ici que  $f = Id$ . Comme on a aussi  $\forall j \in [lb]$ ,  $\text{sym}_j(b) = \text{sym}_j(a)$ . On obtient  $a = b$ .

**Théorème 4.36.** : Soient  $a, b \in A(1)$ . Alors on a l'équivalence suivante :

$$a \leq b \iff a \tilde{<} b.$$

Preuve : L'implication  $(\Leftarrow)$  se montre par induction décroissante sur  $N(a)$  (où  $b$  est fixé). Lorsque  $N(a) < N(b)$ , soit  $q$  la surjection canonique  $[lb] \rightarrow [la]$ . Alors, il existe  $j \in [lb]$  tel que  $h_j(b) > h_{qj}(a)$ . On note  $m_j = h_j(b)$ ,  $m = h_{qj}(a)$ ,  $(s_o^j, \dots, s_{m_j-1}^j) = \text{sym}_j(b)$  et  $s = s_{m-1}^j$  et on pose  $a' = \text{Br}(a, q(j), \bar{s})$ . On a vu, à la proposition 4.33, que  $a' \tilde{<} b$ . On montre ensuite que  $N(a') > N(a)$ . Par hypothèse d'induction on obtient  $a' \leq b$ . Or  $a \leq a'$ . Donc  $a \leq b$ .



#### 4.7 Lignes de taille d'un arbre

**Proposition 4.37.** : Soient  $a, b \in A(1)$  tels que  $a \leq b$ . Notons  $q = q_{(a,b)}$  et, pour chaque  $j \in [lb]$ ,  $m_j = h_{qj}(a)$ . On considère la relation d'équivalence suivante sur  $[lb]$  :

$$j \sim j' \iff m_j = m_{j'} \text{ et } \text{sec}_{m_j} \text{cod}_j(b) = \text{sec}_{m_{j'}} \text{cod}_{j'}(b).$$

Alors, si  $[lb]/\sim$  est muni de l'ordre quotient, on a un isomorphisme d'ensemble ordonné  $\text{can} : [lb]/\sim \longrightarrow [la]$  telle que  $\text{can}.Q = q$  (où  $Q : [lb] \longrightarrow [lb]/\sim$  est la surjection croissante canonique).

Preuve : En fait  $j \sim j' \iff q(j) = q(j')$ . Le reste de la preuve est sans difficulté.

**Notation 4.38.** : Fixons  $b \in A(1)$  et  $n = l(b)$ . Alors, pour chaque  $a \in A(1)$  tel que  $a \leq b$ , on pose  $H(a) = (h_{qj}(a))_{j \in [n]} \in \mathbb{N}^n$  (où  $q = q_{(a,b)}$ ).

**Proposition 4.39.** : Soient  $a, a', b \in A(1)$  :

- 1) Si  $a' \leq a \leq b$ , alors  $H(a') \leq H(a)$ .
- 2) Si  $a \leq b$ ,  $a' \leq b$  et  $H(a) = H(a')$ , alors  $a = a'$ .

Preuve : (1) Sans difficulté.

(2) En utilisant la proposition 4.37, on montre que  $l(a) = l(a')$  et que  $q_{(a,b)} = q_{(a',b)}$ . Puis on vérifie que  $\forall i \in [la]$ ,  $\text{sym}_i(a) = \text{sym}_i(a')$ ,  $\text{cod}_i(a) = \text{cod}_i(a')$ . On obtient donc  $a = a'$ .

**Proposition 4.40.** : Soient  $b \in A(1)$  et  $n = l(b)$ . Considérons une liste  $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in [n]} \in \mathbb{N}^n$  telle que  $\bar{1} \leq \bar{\lambda} \leq H(b)$  (où  $\bar{1}$  est la liste constante sur 1). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\forall j \in [n], \forall k \in \text{Ant}_{\lambda_j} \text{sec}_{\lambda_j} \text{cod}_j(b)$ ,  $\lambda_k = \lambda_j$ ,
- (ii)  $\forall j \in [n], \forall m \in [h_j(b)]$ ,  $\forall i \in \text{Ant}_m \text{sec}_m \text{cod}_j(b)$ ,  
 $1 \leq m < \lambda_j \Rightarrow m < \lambda_i$ .

Preuve : (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Si  $1 \leq m < \lambda_j$  et, pour  $i \in \text{Ant}_m \text{sec}_m \text{cod}_j(b)$ ,  $m \geq \lambda_i$ . Alors  $j \in \text{Ant}_{\lambda_i} \text{sec}_{\lambda_i} \text{cod}_i(b)$  et donc  $\lambda_j = \lambda_i$ ; ce qui est impossible.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : S'il existait  $j \in [n]$  et  $k \in \text{Ant}_{\lambda_j} \text{sec}_{\lambda_j} \text{cod}_j(b)$  tel que  $\lambda_k \neq \lambda_j$ , alors en fait on aurait  $\lambda_k < \lambda_j$  (on utilise (ii) avec  $m = \lambda_j - 1$ ). On applique à nouveau (ii) en prenant  $j' = k$ ,  $m' = \lambda_j$  et  $i' = j$  pour arriver à une contradiction.

**Définition 4.41.** : Soient  $b \in A(1)$  et  $n = l(b)$ . On appelle *ligne de taille de  $b$*  une liste  $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in [n]} \in \mathbb{N}^n$  telle que  $\bar{1} \leq \bar{\lambda} \leq H(b)$  et qui vérifie l'une des deux propriétés équivalentes de la proposition précédente.

Donnons maintenant deux classes d'exemples de lignes de taille à l'aide des propositions suivantes :

**Proposition 4.42.** : Soient  $a, b \in A(1)$  tels que  $a \leq b$ . Alors  $H(a)$  est une ligne de taille de  $b$ .

*Preuve* : Notons déjà  $\forall j \in [lb]$ ,  $\lambda_j = h_j(a)$ . Soient  $j \in [lb]$  et  $k \in \text{Ant}_{\lambda_j, \text{sec}_{\lambda_j}, \text{cod}_j}(b)$ . Alors les deux cas particuliers  $\lambda_j \leq \lambda_k$  et  $\lambda_k \leq \lambda_j$  aboutissent à la même conclusion :  $q(j) = q(k)$  et donc  $\lambda_j = \lambda_k$ .

**Proposition 4.43.** : Soit  $a \in A(1)$  tel que  $L(a) > 1$ . On pose  $\forall j \in [la]$ ,  $\lambda_j = h_j(a) - 1$  et  $\text{sym}_j(a) = (s_{\lambda_j}^j, \dots, s_{\lambda_j}^j)$ . On suppose que  $\forall j \in [la]$ ,  $\text{ar}(s_{\lambda_j-1}^j) = 1$ . Alors  $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in [la]}$  est une ligne de taille  $a$ .

*Preuve* : Soient  $j \in [la]$  et  $k \in \text{Ant}_{\lambda_j, \text{sec}_{\lambda_j}, \text{cod}_j}(a)$ . On voit déjà que  $\lambda_j \leq \lambda_k$  (car  $\lambda_j \leq h_k(a)$  et on ne peut avoir  $\lambda_j = h_k(a)$ ) et comme  $\text{sec}_{\lambda_j, \text{cod}_j}(a) = \text{sec}_{\lambda_j, \text{cod}_k}(a)$ , on remarque que  $s_{\lambda_j-1}^j = s_{\lambda_j-1}^k$ , ce qui entraîne que  $\text{cod}_j(a) \ll \text{cod}_k(a)$  et donc que  $\lambda_j = \lambda_k$ .

**Théorème 4.44.** : Soient  $b \in A(1)$ ,  $n = l(b)$  et  $\bar{\lambda}$  une ligne de taille  $b$ . Alors il existe un unique  $a \in A(1)$  tel que  $a \leq b$  et  $H(a) = \bar{\lambda}$ .

*Preuve* : L'unicité d'un tel  $a$  résultant de la proposition 4.39, il reste à montrer son existence. Notons  $\mathcal{A} = \{a \in A(1) / a \leq b, H(a) \leq \bar{\lambda}\}$ . On remarque que  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ . Soit maintenant  $a \in \mathcal{A}$  de longueur maximum. On suppose que  $H(a) \neq \bar{\lambda}$ . Il existe donc  $j \in [n]$  tel que  $h_{q_j}(a) < \lambda_j$  (où  $q = q_{(a,b)}$ ). On construit ensuite  $a' = \text{Br}(a, q(j), \bar{s})$  comme dans l'énoncé de la proposition 4.33. Alors  $a' \leq b$  par cette proposition et même  $a' \leq b$  par le théorème 4.36. On montre ensuite que  $H(a') \leq \bar{\lambda}$ . Pour cela, c'est-à-dire, pour montrer que  $\forall i \in [n]$ ,  $h_{f_i}(a') \leq \lambda_i$  (où  $f = q_{(a',b)}$ ), on reprend la preuve de la proposition 4.33 où l'on distingue les cas  $i < j_0$ ,  $j_0 \leq i \leq j_1$  (c'est-à-dire  $i \in I$ . C'est là qu'on utilise l'axiome (ii) de la définition d'une ligne de taille) et  $j_1 < i < l(b)$ . Ainsi  $a' \in \mathcal{A}$ . Or

on voit que  $L(a') > L(a)$ , ce qui contredit le fait que  $a$  est de longueur maximum. D'où la conclusion voulue.

## 5. La monade des arbres feuillus

**Introduction :** La monade de Batanin est différente de la monade  $\mathbb{P}$ . C'est le concept d'arbre feuillu qui est à la base de cette différence. Pour comprendre ce concept nous suggérons de se reporter au théorème 5.43 que nous montrerons dans cette sous-section. Il montre que l'opérade des arbres feuillus est libre, en tant qu'opérade sur  $\mathbb{M}o$  munie d'une "méta-opération" binaire (ce qu'on a appelé une opérade magmatique). Pour la construction de  $\mathbb{B}$  on remplacera cette "méta-opération" générale par une contraction.

### 5.1 La monade $\mathbb{A}^f$

**Conventions 5.1. :** On ne travaille plus maintenant en toute généralité avec les langages chargés (voir définition 2.19).

On se donne déjà un langage  $(S, ar)$  a priori sans constante. A ce langage on rajoute deux nouveaux symboles  $\Delta$  et  $\square$  où  $ar(\Delta) = 1$  et  $ar(\square) = 2$ . Posons  $S' = S \cup \{\Delta, \square\}$ . On définit ensuite  $ch : S' \rightarrow \mathbb{Z}$  en posant  $\forall s \in S, ch(s) = 0, ch(\Delta) = -1$  et  $ch(\square) = +1$ .

Comme aux conventions 3.1, pour chaque  $C \in |\mathbb{E}|$ , on pose  $S'(C) = S' \coprod C$  et on définit encore  $ar : S'(C) \rightarrow \mathbb{N}$ , mais aussi  $ch : S'(C) \rightarrow \mathbb{Z}$  en posant  $\forall s \in S', ch.u_0(s) = ch(s)$  et  $\forall c \in C, ch.u_1(c) = 0$ . On obtient ainsi le langage chargé  $(S'(C), ar, ch)$ . Notons encore  $A(C) = Arb(S'(C), ar)$  et pour toute application  $f : C \rightarrow C'$ ,  $\tilde{f} = A(f) : A(C) \rightarrow A(C')$ . On note maintenant  $A^f(C)$  l'ensemble des  $a \in A(C)$  qui sont feuillus pour  $(S'(C), ar, ch)$ . Comme en 3.2, on identifie  $S'$  à  $u_0(S')$ , et  $C$  à  $u_1(C)$ .

**Proposition 5.2. :** Soit  $a \in A(C)$ .

- 1) Soit aussi  $p \in \mathbb{Z}$ . Alors,  $a$  est  $p$ -chargé ssi  $\underline{a}$  est  $p$ -chargé.
- 2) En particulier,  $a$  est feuillu ssi  $\underline{a}$  est feuillu.
- 3) Soit encore  $f : C \rightarrow C'$  une application. Alors  $\tilde{f}(a)$  est feuillu ssi  $a$  est feuillu.

Preuve : Sans difficulté.

**Remarque 5.3.** : Grâce au (3) de la proposition précédente on construit un sous-foncteur  $A^f$  de  $A$ . De plus, la transformation naturelle d'inclusion  $\iota : A^f \rightarrow A$  est cartésienne.

**Proposition 5.4.** : Soient  $f : C \rightarrow C'$  une application injective et  $a \in A^f(C)$ . Si  $l_{\{C\}}(a) \subset f(C')$ , il existe un unique  $a' \in A^f(C')$  tel que  $\tilde{f}(a') = a$ .

Preuve : Immédiat.

**Proposition 5.5.** : Soient  $a \in A(1)$ ,  $n = l(a)$  et  $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in A(C)^n$ . On pose  $\hat{a} = \text{op}(a, (b_0, \dots, b_{n-1}))$ .

- 1) Si  $a, b_0, \dots, b_{n-1}$  sont feuillus alors  $\hat{a}$  est feuillu.
- 2) Inversement, si  $a$  et  $\hat{a}$  sont feuillus, alors  $b_0, \dots, b_{n-1}$  sont aussi feuillus.

Preuve : (1) Résulte de la proposition 2.29.

(2) Résulte de la proposition 2.15.

**Proposition 5.6.** : Soient  $s \in S$ , où  $n = ar(s) \geq 1$ , et  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in A(C)^n$ . On a l'équivalence suivante :

$$s(a_0, \dots, a_{n-1}) \in A^f(C) \iff \forall j \in [n], a_j \in A^f(C).$$

Preuve : Résulte de la proposition précédente.

**Proposition 5.7.** : Soit  $C \in |\mathbb{E}ns|$ . Alors :

- 1)  $\forall c \in C, \eta_C(c) \in A^f(C)$ ,
- 2)  $\forall A \in A^{f^2}(C), \mu_C \tilde{\nu}_C(A) \in A^f(C)$ .

Preuve : Le (2) résulte de la proposition 5.5.

**Notations 5.8.** : Pour tout  $C \in |\mathbb{E}ns|$ , notons  $\eta'_C : C \rightarrow A^f(C)$  et  $\mu'_C : A^{f^2}(C) \rightarrow A^f(C)$  les restrictions obtenues par la proposition précédente. Notons aussi  $l'_C : A^f(C) \rightarrow Mo(C)$  la restriction de  $l_C : A(C) \rightarrow Mo(C)$ .

- Proposition 5.9.** : 1)  $\eta'_C, \mu'_C$  et  $l'_C$  sont naturels en  $C$ .  
 2)  $\mathbb{A}^f = (A^f, \eta', \mu')$  est une sous-monade de  $\mathbb{A} = (A, \eta, \mu)$ .  
 3)  $l' : \mathbb{A}^f \rightarrow \mathbb{M}o$  est un morphisme de monade qui est cartésien.  
 4) La monade  $\mathbb{A}^f$  est cartésienne.  
 5)  $\mathbb{A}^f$  est concrète syntaxique, où ici  $U = Id_{\mathbb{E}ns}$  et  $L$  est la restriction de son homologue pour  $\mathbb{A}$ .

*Preuve* : Le (1) est immédiat. Le (2) résulte du lemme 3.37. Dans le (3),  $l'$  est le composé de  $\iota$  et  $l$  qui sont cartésiens. Dans le (4),  $\mathbb{A}$  et  $l'$  étant cartésiens,  $\mathbb{A}^f$  l'est aussi. Le (5) résulte de la proposition 1.14.

**Remarque 5.10.** : En fin de section nous montrerons que la monade  $\mathbb{A}^f$  est pure.

**Proposition 5.11.** : Soient  $a, b \in A^f(1)$ , alors :

$$a \underset{\mathbb{A}^f}{\leq} b \iff a \underset{\mathbb{A}}{\leq} b.$$

*Preuve* : Voir la proposition précédente et de la proposition 3.39 (3).

## 5.2 Arbres irréductibles

**Remarque 5.12.** : Soient  $a \in A^f(C)$  tel que  $L(a) > 1$  et  $j \in [la]$ . Ecrivons  $m = h_j(a)$ . Alors on a toujours  $m \geq 2$  et  $ch_{m-2} \text{sym}_j(a) = 0$ .

**Définition 5.13.** : Soit  $a \in A^f(C)$ . On dit que  $a$  est *irréductible* si  $L(a) > 1$  et  $\forall j \in [la], \forall i \in [h_j a], ch_i \text{sym}_j(a) = 0 \Rightarrow i \geq h_j(a) - 2$ .

**Remarque 5.14.** : Si  $L(a) > 1$ , alors  $a$  est irréductible ssi

$$\forall j \in [la], \forall i \in [h_j a], ch_i \text{sym}_j(a) = 0 \iff i \geq h_j(a) - 2.$$

**Proposition 5.15.** : Soit  $a \in A^f(C)$ , alors :

- 1)  $a$  est irréductible ssi  $\underline{a}$  est irréductible.
- 2) Pour toute application  $f : C \rightarrow C', \tilde{f}(a)$  est irréductible ssi  $a$  est irréductible.

*Preuve* : Sans difficulté.

**Proposition 5.16.** : Soit  $a \in A^f(1)$ . On suppose que  $\text{sym}(a) = s \in S$  (et donc  $\text{ch}(s) = 0$  et  $\text{ar}(s) > 0$ ). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

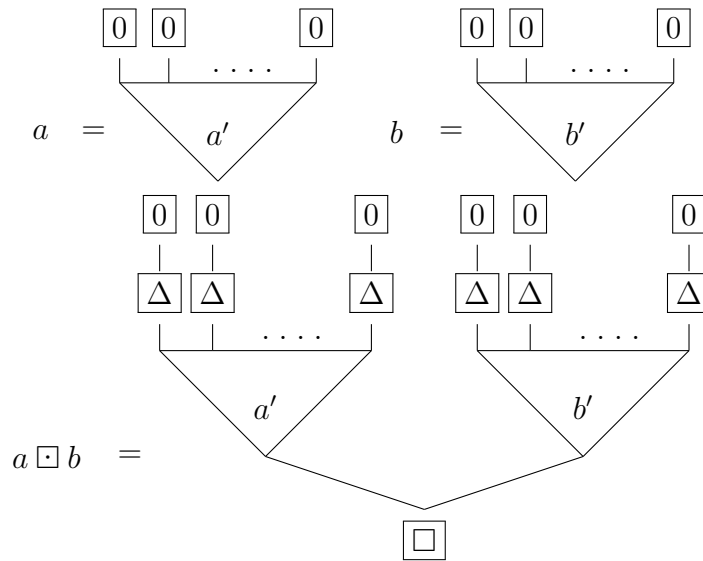
- (i)  $a$  est irréductible,
- (ii)  $a$  est primitif pour  $\mathbb{A}^f$  (voir la définition 1.13 ),
- (iii)  $a = \bar{s}$ , où  $\bar{s} = s(0(\emptyset), \dots, 0(\emptyset))$ .

*Preuve* : L'équivalence (i)  $\iff$  (iii) est sans difficulté. Pour (ii)  $\iff$  (iii), on s'inspire de la preuve de la proposition 3.41 (2).

**5.3 L'opération  $\square$**

**Notation 5.17.** : Soient  $a, b \in A^f(1)$ . Alors  $a \square b$  est 1-chargé (résulte du corollaire 2.25 ). Posons  $n = l(a \square b) = l(a) + l(b)$ . On note  $a \square b = \text{op}(a \square b, (d_0, \dots, d_{n-1}))$  où  $\forall j \in [n], d_j = \Delta(0(\emptyset))$ .

L'opération  $\square$  peut se représenter graphiquement de la façon suivante :



**Proposition 5.18.** : Soient  $a, b \in A^f(1)$ . Alors :

- 1)  $a \square b \in A^f(1)$ ,
- 2)  $l(a \square b) = l(a) + l(b)$ ,
- 3)  $L(a \square b) = L(a \square b) + l(a) + l(b)$ .

Preuve : Le (1) résulte de la proposition 2.28. Les (2) et (3) résultent de la proposition 2.14.

**Proposition 5.19.** : Soient  $a, b \in A^f(1)$ . Alors  $a \square b$  est irréductible.

Preuve : Résulte du lemme suivant :

**Lemme 5.20.** : Soient  $n = l(a \square b)$  et  $p = l(a)$ . Alors, pour tout  $j \in [n]$  :

- Si  $j < p$ ,  $\text{sym}_j(a \square b) = (\square).\text{sym}_j^-(a).(\Delta, 0)$ ,
- Si  $p \leq j < n$ ,  $\text{sym}_j(a \square b) = (\square).\text{sym}_{j-p}^-(b).(\Delta, 0)$ ,

Preuve : (du lemme) Résulte de la proposition 2.15.

**Proposition 5.21.** : Soient  $a \in A^f(1)$  un arbre irréductible où  $\text{sym}(a) = \square$  et  $j \in [la]$ . Ecrivons  $\text{sym}_j(a) = (s_0, \dots, s_{m-1})$ , où  $m = h_j(a)$ . Alors  $s_{m-1} = 0$  et  $s_{m-2} = \Delta$ .

Preuve : Comme  $a$  est irréductible,  $\sum_{i \in [m-2]} \text{ch}(s_j) > 0$ . Donc  $\text{ch}(s_{m-2}) = -\sum_{i \in [m-2]} \text{ch}(s_j) < 0 \Rightarrow s_{m-2} = \Delta$ .

#### 5.4 Réduction des arbres irréductibles

Soit  $a \in A^f(1)$ . On suppose que  $\text{sym}(a) = \square$  et que  $a$  est irréductible. On considère la liste  $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in [la]}$  où  $\lambda_j = h_j(a) - 1$ .

**Proposition 5.22.** :  $\bar{\lambda}$  est une ligne frontalière de  $a$  (voir définition 4.41).

Preuve : Pour chaque  $j \in [la]$ , écrivons  $\text{sym}_j(a) = (s_o^j, \dots, s_{\lambda_j}^j)$ . Alors  $s_{\lambda_j-1}^j = \Delta$  (voir la proposition 5.21) et donc  $\text{ar}(s_{\lambda_j-1}^j) = 1$ . Alors on a la conclusion voulue, grâce à la proposition 4.43.

On sait alors, par le théorème 4.44, qu'il existe un unique  $a' \in A(1)$  tel que  $a' \leq a$  et  $H(a') = \bar{\lambda}$ .

**Proposition 5.23.** : 1)  $l(a') = l(a)$ .  
2)  $a'$  est 1-chargé.

Preuve : (1) Ecrivons pour chaque  $j \in [la]$ ,  $\text{cod}_j(a) = (p_o^j, \dots, p_{\lambda_j}^j)$ ,  $\text{sym}_j(a) = (s_o^j, \dots, s_{\lambda_j}^j)$  et considérons la relation d'équivalence suivante sur  $[la]$  :  $j \sim j' \iff \lambda_j = \lambda_{j'}$  et  $\text{sec}_{\lambda_j} \text{cod}_j(a) = \text{sec}_{\lambda_{j'}} \text{cod}_{j'}(a)$ . Alors  $j \sim j' \iff (p_o^j, \dots, p_{\lambda_j-1}^j) = (p_o^{j'}, \dots, p_{\lambda_{j'}-1}^{j'})$ . Mais aussi  $p_{\lambda_j}^j = 0 = p_{\lambda_{j'}}^{j'}$  car  $p_{\lambda_j}^j \in [\text{ar}(s_{\lambda_j-1}^j)] = [\text{ar}(\Delta)] = [1]$ .  
 Donc  $j \sim j' \Rightarrow \text{cod}_j(a) = \text{cod}_{j'}(a) \Rightarrow j = j'$ . Alors  $[la'] \simeq [la]/\sim = [la] \Rightarrow l(a') = l(a)$ .  
 (2) Comme  $l(a) = l(a')$ , on a  $q_{(a',a)} = Id$  et alors  $\forall j \in [la]$ ,  $\text{sym}_j^-(a') \ll \text{sym}_j^-(a)$  ou encore  $\text{sym}_j^-(a') = \text{sec}_{\lambda_j-1} \text{sym}_j^-(a)$ . Donc  $\forall m \in [\lambda_j]$ ,  $\text{ch}_m \text{sym}_j(a') \geq 1$  (car  $a$  est feuillu et irréductible). Mais aussi, comme  $0 = \text{ch} \text{sym}_j(a) = \text{ch} \text{sym}_j(a') + \text{ch}(\Delta) = \text{ch} \text{sym}_j(a') - 1 \Rightarrow \text{ch} \text{sym}_j(a') = 1$ , ce qui montre que  $a'$  est 1-chargé.

Comme  $\text{sym}(a') = \text{sym}(a) = \square$ , on peut donc écrire  $a' = a'_1 \square a'_0$  où  $a'_1, a'_0 \in A(1)$ .

**Proposition 5.24.** : 1)  $\forall k \in [2]$ ,  $a'_k \in A^f(1)$ .  
 2)  $a = a'_1 \square a'_0$ .

Preuve : (1) Réulte de la proposition précédente.  
 (2) Soit  $\bar{a} = \text{op}(a', (\bar{\Delta}, \dots, \bar{\Delta}))$  où  $\bar{\Delta} = \Delta(0(\emptyset))$ . On montre que  $l(\bar{a}) = l(a)$  et  $\forall j \in [la]$ ,  $\text{sym}_j(\bar{a}) = \text{sym}_j(a)$ ,  $\text{cod}_j(\bar{a}) = \text{cod}_j(a)$ . Donc  $\bar{a} = a$ . D'où le résultat voulu.

**Théorème 5.25.** : Soit  $a \in A^f(1)$  tel que  $\text{sym}(a) = \square$  et  $a$  est irréductible. Alors  $a$  s'écrit de façon unique  $a = a_1 \square a_0$ , où  $a_1, a_0 \in A^f(1)$ .

Preuve : L'existence d'une telle décomposition a été montrée précédemment, quant à l'unicité elle résulte du lemme suivant :

**Lemme 5.26.** : Soient  $a_0, a_1 \in A^f(1)$  et  $a = a_1 \square a_0$ . Alors  $a' = a_1 \square a_0$ , où  $a'$  a été défini après la proposition 5.22.

Preuve : (du lemme) Posons  $b = a_1 \square a_0$ . On montre que  $H(b) = H(a')$ . Alors, comme  $b \leq a$  et  $a' \leq a$ , on a  $b = a'$ .



### 5.5 Décomposition canonique d'un arbre feuillu

Soit  $a \in A^f(1)$  tel que  $\text{sym}(a) = \square$ . Pour chaque  $j \in [la]$ , posons  $\lambda'_j = \inf\{m \in [h_j a] / \text{ch}_m \text{sym}_j(a) = 0\}$  et  $\lambda_j = \lambda'_j + 2$ . Posons enfin  $\bar{\lambda} = (\lambda_j)_{j \in [la]}$ .

**Proposition 5.27.** :  $\bar{\lambda}$  est une ligne de taille  $a$ . (Voir la définition au 4.41)

*Preuve* : Clairement  $\bar{1} \leq \bar{\lambda} \leq H(a)$ . Soient maintenant  $j \in [la]$ , et  $k \in \text{Ant}_{\lambda_j} \text{sec}_{\lambda_j} \text{cod}_j(a)$ . Alors  $\text{sec}_{\lambda'_j} \text{cod}_k(a) = \text{sec}_{\lambda'_j} \text{cod}_j(a)$  et donc  $\text{sec}_{\lambda'_j} \text{sym}_k(a) = \text{sec}_{\lambda'_j} \text{sym}_j(a)$  d'où  $\lambda'_k = \lambda'_j$ ; mais aussi  $\lambda_k = \lambda_j$

$\bar{\lambda}$  étant une ligne de taille de  $a$ , soit  $\alpha \in A(1)$  l'unique arbre tel que  $\alpha \leq a$  et  $H(\alpha) = \bar{\lambda}$  (voir le théorème 4.44).

**Proposition 5.28.** :  $\alpha$  est feuillu et irréductible.

*Preuve* : Soit  $q = q_{(\alpha, a)}$ . Alors  $\forall j \in [la]$ ,  $\text{sym}_{qj}^-(\alpha) = \text{sec}_{\lambda_j - 1} \text{sym}_j(a)$ . Donc  $\forall m \in [\lambda_j - 1]$ ,  $\text{ch}_m \text{sym}_{qj}(\alpha) = \text{ch}_m \text{sym}_j(a)$ . On en déduit la conclusion voulue.

Posons  $n = l(\alpha)$ . Comme  $\alpha \leq a$ , il existe  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in A(1)^n$  tel que  $a = \text{op}(\alpha, (a_0, \dots, a_{n-1}))$  et le  $n$ -uplet  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  est unique.

**Proposition 5.29.** :  $\forall j \in [n]$ ,  $a_j \in A^f(1)$ .

*Preuve* : Résulte de la proposition 5.5.

Montrons maintenant l'unicité de la décomposition  $a = \text{op}(\alpha, (a_0, \dots, a_{n-1}))$ .

**Notation 5.30.** : L'arbre  $\alpha$  construit ici, à partir de  $a \in A^f(1)$  tel que  $\text{sym}(a) = \square$ , est noté  $\alpha = \text{Irr}(a)$ .

**Proposition 5.31.** : Soient  $a, b \in A^f(1)$ , tels que  $a \leq b$  et  $\text{sym}(a) = \square$ . Alors  $\text{Irr}(a) = \text{Irr}(b)$ .

*Preuve* : Pour chaque  $j \in [la]$  et  $i \in [lb]$ , notons  $\lambda'_j$  et  $\mu'_i$  les entiers construits comme précédemment à partir de  $a$  et de  $b$ . Posons ensuite  $\lambda_j = \lambda'_j + 2$ ,

$\mu_i = \mu'_i + 2$ . Soit aussi  $q = q_{(a,b)}$ . On vérifie d'abord que  $\forall i \in [lb]$ ,  $\mu'_i = \lambda'_{qi}$ . Posons encore  $\alpha = Irr(a)$  et  $\beta = Irr(b)$ . On considère les relations d'équivalence  $\sim$  et  $\equiv$  sur  $[la]$  et  $[lb]$  définies par :  $j \sim j' \iff \lambda_j = \lambda_{j'}$  et  $\sec_{\lambda_j} \text{cod}_j(a) = \sec_{\lambda_{j'}} \text{cod}_{j'}(a)$  et  $i \equiv i' \iff \mu_i = \mu_{i'}$  et  $\sec_{\mu_i} \text{cod}_i(b) = \sec_{\mu_{i'}} \text{cod}_{i'}(b)$ . On montre que  $i \equiv i' \iff q(i) \sim q(i')$ . On en déduit l'existence d'une bijection croissante  $[lb]/\equiv \longrightarrow [la]/\sim$  qui entraîne que  $l(\beta) = l(\alpha)$  et  $q_{(\alpha,a)} \cdot q = q_{(\beta,b)}$ . On montre enfin que  $\forall i \in [la]$ ,  $\text{cod}_i(\alpha) = \text{cod}_i(\beta)$  et  $\text{sym}_i(\alpha) = \text{sym}_i(\beta)$ . D'où  $\alpha = \beta$ .

**Proposition 5.32.** : Soit  $a \in A^f(1)$  tel que  $\text{sym}(a) = \square$ . Alors on a l'équivalence suivante :

$a$  est irréductible ssi  $Irr(a) = a$ .

*Preuve* : Pour l'implication ( $\Rightarrow$ ) on montre que  $H(a)$  est la ligne de taille de  $a$  définie en début de sous-section. L'autre implication est immédiate.

**Théorème 5.33.** : Soit  $a \in A^f(C)$  tel que  $\text{sym}(a) = \square$ , alors il existe un unique  $\alpha \in A^f(1)$  irréductible vérifiant  $L(\alpha) > 1$  et un unique  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in A^f(C)^n$ , où  $n = l(\alpha)$ , tel que  $a = \text{op}(\alpha, (a_0, \dots, a_{n-1}))$ .

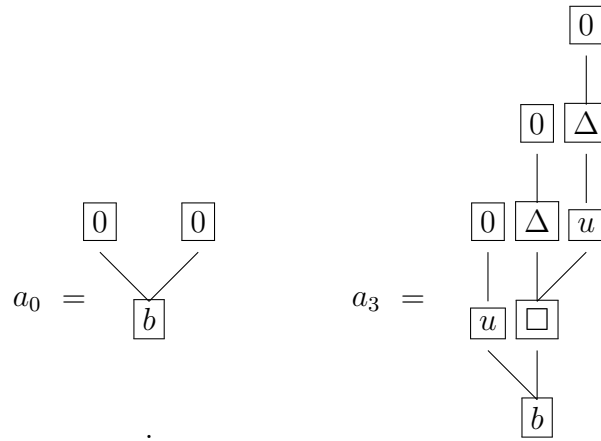
*Preuve* : 1) Lorsque  $C = 1$ , cela résulte immédiatement de ce qui précède.

2) Dans le cas général, en utilisant le (1), on commence par décomposer  $\underline{a} = \text{op}(\alpha, (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}))$ , où  $\alpha \in A^f(1)$  est irréductible et  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in A^f(1)^n$  avec  $n = l(\alpha)$ , puis, après avoir noté  $\forall i \in [n+1]$ ,  $\hat{i} = \sum_{x \in [i]} l(\alpha_x)$ ,  $(c_0, \dots, c_{\hat{n}-1}) = l_C(a)$  et  $\forall j \in [n]$ ,  $\bar{c}_j = (c_{\hat{j}}, \dots, c_{\widehat{j+1-1}})$ ,  $a_j = \alpha_j[\bar{c}_j]$  et enfin  $b = \text{op}(\alpha, (a_0, \dots, a_{n-1}))$  on montre que  $\underline{b} = \underline{a}$  et  $l_C(b) = l_C(a)$ . Ainsi  $a = b$ . Si maintenant on a une décomposition du même type  $a = \text{op}(\alpha', (a'_0, \dots, a'_{n-1}))$ , par l'unicité dans le cas  $C = 1$ , on obtient  $\alpha' = \alpha$ ,  $n' = n$  et  $\forall j \in [n]$ ,  $\underline{a}'_j = \underline{a}_j$ . On vérifie ensuite que  $\forall j \in [n]$ ,  $l_C(a'_j) = l_C(a_j)$ . D'où  $a'_j = a_j$ . On a ainsi l'unicité voulue.

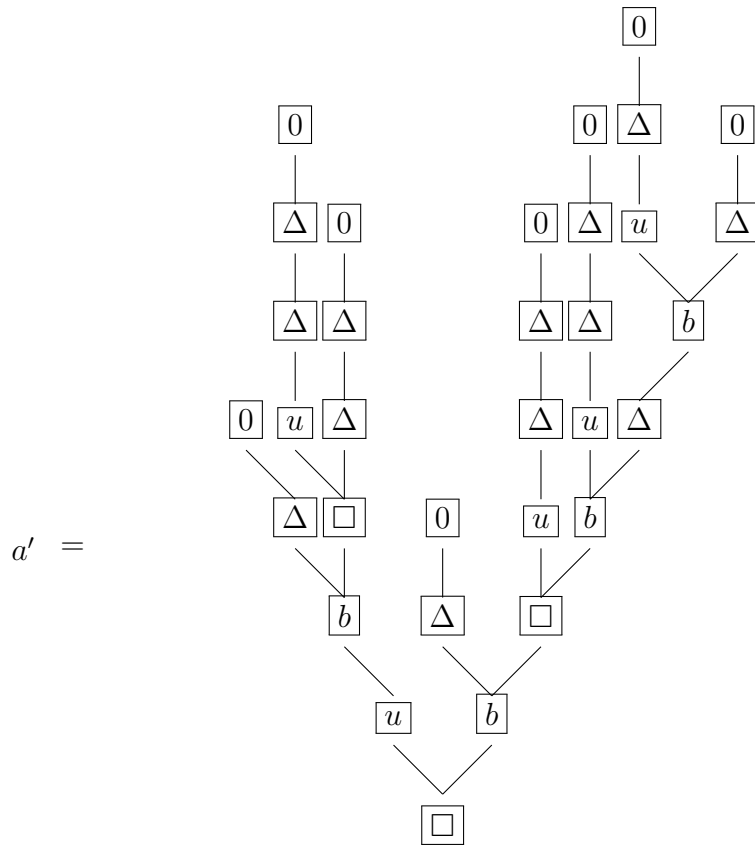
**Définition 5.34.** : Soit  $a \in A^f(C)$  tel que  $\text{sym}(a) = \square$ . L'unique décomposition  $a = \text{op}(\alpha, (a_0, \dots, a_{n-1}))$  donnée dans l'énoncé du théorème précédent s'appelle la *décomposition canonique* de  $a$ .

**Exemple 5.35.** - Afin de bien comprendre ce qu'est la décomposition canonique d'un arbre feuillu donnons en un exemple concret.

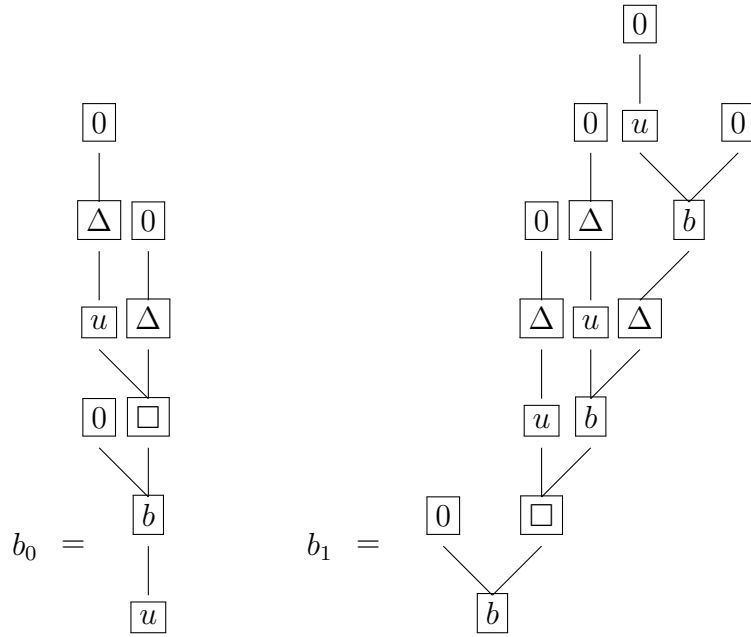




Quant à  $a'$  il est donné par le dessin suivant :



$a'$  est un arbre feuillu irréductible qui s'écrit  $a' = b_0 \square b_1$  où  $b_0$  et  $b_1$  sont donnés par :



**Proposition 5.36.** : Soit  $a \in A^f(C)$  tel que  $\text{sym}(a) = \square$ , de décomposition canonique  $a = \text{op}(\alpha, (a_0, \dots, a_{n-1}))$ . Alors, si  $a$  n'est pas irréductible, on a :

- 1)  $\exists j \in [n], L(a_j) > 1$ .
- 2)  $L(\alpha) < L(a)$  et  $\forall j \in [n], L(a_j) < L(a)$ .

*Preuve* : (1) Si  $\forall j \in [n], L(a_j) = 1$ , on montre que  $a = \alpha$ .  
 (2)  $L(a) - L(\alpha) = \sum_{j \in [n]} (L(a_j) - 1) \geq L(a_{j_0}) - 1 > 0$ , où  $L(a_{j_0}) > 1$  et  $\forall j \in [n], L(a_j) \leq \sum_{i \in [n]} L(a_i) < (L(\alpha) - l(\alpha)) + \sum_{j \in [n]} L(a_j) = L(a)$ , car  $L(\alpha) > 1 \Rightarrow L(\alpha) > l(\alpha)$ .

### 5.6 Pureté de la monade $\mathbb{A}^f$

**Proposition 5.37.** : Soit  $a \in A^f(C)$ . Alors, on a l'équivalence suivante :  
 $a$  est primitif ssi  $a$  est irréductible.

*Preuve* : 1) On commence par supposer que  $C = 1$  et  $\text{sym}(a) = \square$  :  
 ( $\Leftarrow$ ) Soit  $A \in (A^f)^2(1)$  tel que  $\mu'_1(A) = a$ . Posons  $\alpha = \underline{A} \in A^f(1)$  et

$(a_o, \dots, a_{n-1}) = l_{A1}(A)$ . On a  $A = \alpha[a_o, \dots, a_{n-1}]$  et donc  $a = \mu'_1(A) = \text{op}(\alpha, (a_o, \dots, a_{n-1}))$  alors  $\alpha \leq a$ . De plus :

- si  $\text{sym}(\alpha) = \square$ ,  $\text{Irr}(\alpha) = \text{Irr}(a) = a \Rightarrow a \leq \alpha$  et donc  $\alpha = a$ . On en déduit que  $A = A^f(\eta'_1)(a)$ .
- si  $\text{sym}(\alpha) \neq \square$ , alors  $L(\alpha) = 1 \Rightarrow A = \eta'_{A^f 1}(a)$ .

( $\Rightarrow$ ) Soit la décomposition canonique  $a = \text{op}(\alpha, (a_o, \dots, a_{n-1}))$ . Prenons  $A = \alpha[a_o, \dots, a_{n-1}]$ . Alors  $A \in (A^f)^2(1)$  et  $\mu'_1(A) = a$ . Comme  $a$  est primitif, on voit que  $A = A^f(\eta'_1)(a) \Rightarrow \alpha = \underline{A} = a$ . Donc  $a$  est irréductible.

2) Si on a encore  $C = 1$ , mais que  $\text{sym}(a) = s \in S$  ou  $L(a) = 1$  on a vu qu'il y a toujours l'équivalence voulue.

3) Dans le cas général, c'est immédiat car  $a$  et  $\underline{a}$  sont de même nature.

**Théorème 5.38.** : La monade  $\mathbb{A}^f$  est pure.

*Preuve* : Soit  $a \in A^f(C)$  tel que  $L(a) > 1$ .

- Si  $\text{sym}(a) = s \in S$ , alors  $\bar{s} \leq a$  où  $\bar{s} = s(0(\emptyset), \dots, 0(\emptyset))$  est primitif. Inversement, si  $\alpha \leq a$  où  $\alpha$  est primitif et  $L(\alpha) > 1$  alors  $\text{sym}(\alpha) = \text{sym}(a) = s \Rightarrow \alpha = \bar{s}$ .
- Si  $\text{sym}(a) = \square$ , cela résulte immédiatement de la proposition précédente et du théorème 5.33.

## 5.7 Opérate magmatique libre

**Définition 5.39.** : Une *opérate magmatique* est la donnée :

- d'une opérate sur  $\mathbb{M}o : (\Omega, \pi, e, m)$  et
- d'une application  $\otimes : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$  telle que  $\forall s, s' \in \Omega, \pi(s \otimes s') = \pi(s) + \pi(s')$ .

**Exemples 5.40.** : 1) Soient  $(\Omega, \pi, e, m)$  une opérate sur  $\mathbb{M}o$  et  $s \in \Omega$  tel que  $\pi(s) = 2$ . Alors, si on considère l'application

$(u, v) \mapsto u \otimes v = m(s, (u, v))$ , on obtient ainsi une opérate magmatique.

2) On suppose que  $\Omega = A^f(1)$ ,  $\pi$  est la restriction de  $l$ ,  $e = 0(\emptyset)$ ,  $m = \text{op}$  et enfin  $\otimes = \square$ . On obtient ainsi une opérate magmatique notée  $\underline{\mathbb{A}}^f$ .

**Définition 5.41.** :  $\Omega$  et  $\Omega'$  étant deux opéades magmatiques, un morphisme  $f : \Omega \rightarrow \Omega'$  est un morphisme d'opérate tel que

$\forall u, v \in \Omega, f(u \otimes v) = f(u) \otimes' f(v)$ .

**Notations 5.42.** : Les opérades magmatiques et leurs morphismes forment une catégorie notée  $\mathbb{O}pM$ . Notons aussi  $U : \mathbb{O}pM \rightarrow \mathbb{C}oll = \mathbb{E}ns/\mathbb{N}$  le foncteur d'oubli canonique.

• Soit maintenant  $(S, ar) \in |\mathbb{C}oll|$ , où  $ar^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ . On considère  $\lambda : S \rightarrow \Omega = A^f(1)$  définie par  $\lambda(s) = \bar{s} = s(0(\emptyset), \dots, 0(\emptyset)) \in A^f(1)$ .  
 $\lambda : (S, ar) \rightarrow (\Omega, \pi)$  est une flèche de  $\mathbb{C}oll$ .

**Théorème 5.43.** : Le couple  $(\underline{\mathbb{A}}^f, \lambda)$  est un objet libre pour  $U$ .

*Preuve* : Soient  $\Omega = (\Omega, \pi, e, m, \otimes) \in |\mathbb{O}pM|$  et  $\underline{f} : (S, ar) \rightarrow (\Omega, \pi)$  une flèche de  $\mathbb{C}oll$ . On construit, par induction sur la longueur des arbres, une application  $f : A^f(1) \rightarrow \Omega$  telle que  $\forall a \in A^f(1), \pi.f(a) = l(a)$ . Soit  $a \in A^f(\mathbb{I})$  :

- Si  $L(a) = 1$ , alors  $a = 0(\emptyset)$ , on pose  $f(a) = e$ .

- Si  $a = s(a_0, \dots, a_{n-1})$ , où  $s \in S$  et  $n = ar(s) \geq 1$ , on pose  $f(a) = m(\underline{f}s, (fa_0, \dots, fa_{n-1}))$ .

- Si  $\text{sym}(a) = \square$ , alors :

.. si  $a$  est irréductible, il s'écrit de façon unique  $a = a_1 \square a_0$ , où

$a_1, a_0 \in A^f(1)$ ; dans ce cas on pose  $f(a) = f(a_1) \otimes f(a_0)$ .

.. si  $a$  n'est pas irréductible, on a la décomposition canonique

$a = \text{op}(\alpha, (a_0, \dots, a_{n-1}))$  où  $L(\alpha) < L(a)$  et  $\forall j \in [n], L(a_j) < L(a)$ ; on peut donc poser  $f(a) = m(f\alpha, (fa_0, \dots, fa_{n-1}))$ .

On vérifie que  $f : \underline{\mathbb{A}}^f \rightarrow \Omega$  est l'unique morphisme de  $\mathbb{O}pM$  tel que  $Uf.\lambda = \underline{f}$ .

## Références

- [1] M.A.BATANIN, *On the definition of weak  $\omega$ -category*, Macquarie University Report, 96(207): 24, (1996).
- [2] M.A.BATANIN, *Monoidal globular categories as a natural environment for the theory of weak  $n$ -categories*, Advances in Mathematics 136 (1998), p. 39-103.
- [3] M.A.BATANIN, *On the Penon method of weakening of algebraic structures*, Journal of Pure and Applied Algebra (2002), volume 172, pages 1-23.

- [4] J.M.BOARDMAN AND R.M.VOGT, *Homotopy Invariant Algebraic Structures on Topological Spaces*, Lecture Notes in Mathematics (1973), volume 347.
- [5] A.CARBONI AND P.JOHNSTONE, *Connected limits, familial representability and Artin glueing*, Mathematical Structures in Computer Science (1995) pages 441-459.
- [6] E.CHENG AND M.MAKKAI, *A note on the Penon definition of  $n$ -category*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (2010), volume LI-3, pages 205-223.
- [7] C.KACHOUR *Aspects of Globular Higher Category Theory*, Thesis (2012), Macquarie University, Faculty of Science.
- [8] J.P.MAY *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag (1972), volume 271.
- [9] J.PENON, *Approche polygraphique des  $\infty$ -catégories non strictes*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique (1999), volume 1, pages 31-80.
- [10] J.PENON, *Une classe d'exemples d'  $\infty$ -catégories faibles au sens de Batanin*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégorique ( à paraître).
- [11] V.A.SMIRNOV, *Simplicial and Operad Methods in Algebraic Topology*, American Mathematical Society, Translations of Mathematical Monographs 198

Jacques PENON  
25, rue Chapsal,  
94340, Joinville-le-Pont  
France  
Email : `tryphon.penon@gmail.com`



## ***Backsets and Open Access***

Tous les articles publiés dans les "Cahiers" depuis leur création sont librement téléchargeables sur les sites

All the papers published in the "Cahiers" since their creation are freely downloadable online

Volumes I – VII : <http://www.numdam.org/actas/SE>

Volumes VIII – LII : [\\_http://www.numdam.org/journals/CTGDC](http://www.numdam.org/journals/CTGDC)

Volumes  $\geq$  L : <http://ehres.pagesperso-orange.fr/Cahiers/Ctgdc.htm>

et <http://cahierstgdc.com>

### ***Charles Ehresmann: Œuvres Complètes et Commentées***

Online : [http://ehres.pagesperso-orange.fr/C.E.WORKS\\_fichiers/C.E\\_Works.htm](http://ehres.pagesperso-orange.fr/C.E.WORKS_fichiers/C.E_Works.htm)

Part I: 1-2. *Topologie et Géométrie Différentielle*

Part II: 1. *Structures locales*

2. *Catégories ordonnées; Applications en Topologie*

Part III: 1. *Catégories structurées et Quotients*

2. *Catégories internes et Fibrations*

Part IV: 1. *Esquisses et Complétions.*

2. *Esquisses et structures monoïdales fermées*

De 1980 à 1983, les "Cahiers" ont publié des *Suppléments* formés de 7 volumes (édités et commentés par Andrée Ehresmann) réunissant tous les articles du mathématicien Charles Ehresmann (1905-1979) ; ces articles sont suivis de longs commentaires (en Anglais) indiquant leur genèse et les replaçant dans l'histoire. Ces volumes sont aussi librement téléchargeables.

From 1980 to 1983, the "Cahiers" have also published *Supplements* consisting of 7 volumes (edited and commented by Andrée Ehresmann) which collect all the articles published by the mathematician Charles Ehresmann (1905-1979); these articles are followed by long comments (in English) to update and complement them. The 7 volumes are freely downloadable.

Mme Ehresmann, [ehres@u-picardie.fr](mailto:ehres@u-picardie.fr)

Tous droits de traduction, reproduction et adaptation réservés pour tous pays.

Commission paritaire n° 58964.

ISSN 1245-530X (IMPRIME)

ISSN 2681-2363 (EN LIGNE)

