cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques

créés par CHARLES EHRESMANN en 1958
dirigés par Andrée CHARLES EHRESMANN
VOLUME LVI-2, 2e trimestre 2015

SOMMAIRE

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Vol. LVI-2 (2015)

STRUCTURES DE CATEGORIE DE MODELES A LA THOMASON SUR LA CATEGORIE DES 2-CATEGORIES STRICTES

par Dimitri ARA

Résumé. Dans son article *Théories homotopiques des 2-catégories*, Jonathan Chiche étudie les théories homotopiques sur $2\text{-}\mathcal{C}at$, la catégorie des petites 2-catégories strictes, données par des classes d'équivalences faibles qu'il appelle localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$. Ces localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$ sont une généralisation 2-catégorique de la notion de localisateur fondamental dégagée par Grothendieck dans *Pursuing stacks*. Dans ce texte, nous déduisons des résultats de Jonathan Chiche et de résultats que nous avons obtenus en collaboration avec Georges Maltsiniotis l'existence, pour essentiellement tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$, d'une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur $2\text{-}\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$. Nous démontrons que les structures de catégorie de modèles ainsi obtenues modélisent exactement les localisations de Bousfield à gauche combinatoires de la théorie de l'homotopie classique des ensembles simpliciaux.

Abstract. In his paper *Théories homotopiques des 2-catégories*, Jonathan Chiche studies homotopy theories on $2\text{-}\mathcal{C}at$, the category of small strict 2-categories, given by classes of weak equivalences which he calls basic localizers of $2\text{-}\mathcal{C}at$. These basic localizers of $2\text{-}\mathcal{C}at$ are a 2-categorical generalization of the notion of a basic localizer introduced by Grothendieck in *Pursuing stacks*. In this paper, we deduce from the results of Jonathan Chiche and results we have obtained with Georges Maltsiniotis that for essentially every basic localizer $\mathcal{W}$ of $2\text{-}\mathcal{C}at$, there exists a model category structure à la Thomason on $2\text{-}\mathcal{C}at$ whose weak equivalences are given by $\mathcal{W}$. We show that these model category structures model exactly combinatorial left Bousfield localization of the classical homotopy theory of simplicial sets.

Keywords. 2-categories, basic localizers, model categories, simplicial sets, Thomason model structures

Mathematics Subject Classification (2010). 18D05, 18G55, 55P15, 55U10, 55U35, 55U40

Introduction

Ce texte a été initialement écrit comme un appendice à l'article *Théories homotopiques des* 2*-catégories* [4] de Jonathan Chiche. Sur une suggestion du rapporteur, il a été promu en un article indépendant. Ainsi, même si notre texte se veut auto-contenu, nous encourageons le lecteur à lire *op. cit.*, et notamment son introduction, avant le présent article.

Rappelons le contexte dans lequel se place [4]. La topologie algébrique moderne tend à remplacer les espaces topologiques par les objets plus combinatoires que sont les ensembles simpliciaux. Dans *Pursuing stacks* [9], Grothendieck propose d'aller plus loin et de fonder la théorie de l'homotopie sur la notion de petite catégorie. Il s'agit en quelque sorte de remonter d'un cran supplémentaire dans la chaîne de foncteurs

$$\mathcal{C}at \xrightarrow{N} \widehat{\Delta} \xrightarrow{|\,|} \mathcal{T}op,$$

où N est le foncteur nerf des petites catégories vers les ensembles simpliciaux et $|\,|$ est le foncteur de réalisation topologique. Cela est licite en vertu d'un résultat de Quillen : si on note $\mathcal{W}^1_\infty$ la classe des foncteurs dont le nerf est une équivalence d'homotopie faible simpliciale, alors le foncteur nerf induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Ho}(\mathcal{C}at) \to \mathrm{Ho}(\widehat{\Delta})$$

entre la catégorie $\mathcal{C}at$ localisée en $\mathcal{W}^1_\infty$ et la catégorie homotopique usuelle des ensembles simpliciaux. Grothendieck étudie donc $\mathcal{C}at$ munie de la classe $\mathcal{W}^1_\infty$. Il se rend compte que les résultats qu'il obtient ne dépendent que de quelques propriétés de la classe $\mathcal{W}^1_\infty$. Il appelle *localisateur fondamental* toute classe de foncteurs qui vérifie ces propriétés et continue son étude de la théorie de l'homotopie de $\mathcal{C}at$ dans ce cadre axiomatique. Il conjecture que $\mathcal{W}^1_\infty$ est le plus petit localisateur fondamental. Cette conjecture est démontrée par Cisinski dans [6]. La théorie de l'homotopie de Grothendieck est exposée dans [13].

Dans [4] (et dans sa thèse [3]), Jonathan Chiche pose les premières bases d'une théorie de l'homotopie à la Grothendieck de 2-$\mathcal{C}at$, la catégorie des petites 2-catégories strictes. Notons $\mathcal{W}^2_\infty$ la classe des 2-foncteurs envoyés sur une équivalence d'homotopie faible simpliciale par n'importe quel foncteur nerf raisonnable, disons le nerf géométrique $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ pour fixer les idées. Jonathan Chiche montre dans [4] (le résultat apparaît en fait déjà sous une forme moins générale dans [5]) que le foncteur N_2 induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{Ho}(2\text{-}\mathcal{C}at) \to \mathrm{Ho}(\widehat{\Delta}),$$

où $\mathrm{Ho}(2\text{-}\mathcal{C}at)$ désigne la catégorie $2\text{-}\mathcal{C}at$ localisée en $\mathcal{W}^2_\infty$. Il définit par ailleurs une notion de localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$, analogue 2-catégorique de la notion de localisateur fondamental de Grothendieck. Il exhibe une bijection entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et de $2\text{-}\mathcal{C}at$ compatible à la localisation. Il utilise cette bijection et le résultat de minimalité de Cisinski pour montrer que $\mathcal{W}^2_\infty$ est le localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$ minimal.

Dans une direction complémentaire à l'approche de Grothendieck, Thomason a démontré dans [16] l'existence d'une structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}^1_\infty$. Il résulte du théorème de Quillen cité plus haut que cette catégorie de modèles est équivalente, au sens de Quillen, avec la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux.

La synthèse de ces travaux de Grothendieck et de Thomason a été effectué par Cisinski dans son livre [7]. Celui-ci démontre que pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}at$ satisfaisant à une hypothèse ensembliste anodine, il existe une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur $\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$. Il démontre de plus que les structures de catégorie de modèles ainsi obtenues sur $\mathcal{C}at$ modélisent exactement les localisations de Bousfield à gauche combinatoires de la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux.

La généralisation 2-catégorique du théorème de Thomason a été obtenue par l'auteur de ce texte et Georges Maltsiniotis dans [2]. Plus précisément, nous y démontrons l'existence d'une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur $2\text{-}\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}^2_\infty$. De plus, nous déduisons d'un résultat de Jonathan Chiche déjà cité que cette structure est équivalente, au sens de Quillen, avec la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux. Il est à noter que le texte antérieur [17] traite également la question d'une généralisation 2-catégorique du théorème de Thomason mais qu'il contient de sérieuses erreurs (voir l'introduction de [2] pour plus de détails).

Le but du présent texte est de démontrer l'analogue 2-catégorique du théorème de Cisinski sur les structures à la Thomason, généralisant ainsi les résultats de [2] sur la structure à la Thomason 2-catégorique à un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ essentiellement quelconque. Plus précisément, nous montrons l'existence, pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de 2-$\mathcal{C}at$ satisfaisant à une hypothèse ensembliste anodine, d'une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur 2-$\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$. On obtient ainsi une famille de structures de catégorie de modèles à la Thomason sur 2-$\mathcal{C}at$ modélisant exactement les localisations de Bousfield à gauche combinatoires de la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux. Nous donnons par ailleurs des conditions sur un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ pour que la structure à la Thomason associée, qui est toujours propre à gauche, soit propre à droite.

Les ingrédients utilisés dans cet article sont de trois types. En plus des résultats de [2], et en particulier l'existence d'une structure de catégorie de modèles à la Thomason 2-catégorique pour $\mathcal{W}^2_\infty$, les résultats présentés ici dépendent de manière cruciale de la minimalité du localisateur fondamental $\mathcal{W}^2_\infty$ de 2-$\mathcal{C}at$, obtenue dans [4] (théorème 6.37). Cette minimalité résulte du résultat analogue pour les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, démontré par Cisinski dans [6], et d'une bijection entre les localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$ et les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ (théorème 6.33 de [4]), bijection qui joue également un rôle important dans ce texte. Enfin, nos preuves dépendent de manière essentielle de plusieurs résultats obtenus par Cisinski dans son livre [7], et en particulier de la bijection entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et les « Δ-localisateurs test » (théorème 4.2.15 de *op. cit.*).

Notations et terminologie. Nous nous écarterons peu des notations et du vocabulaire de [4]. On notera $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories et 2-$\mathcal{C}at$ la catégorie des petites 2-catégories strictes et des 2-foncteurs stricts. On supprimera systématiquement l'adjectif « strict », les bicatégories ne jouant aucun rôle dans ce texte, et les 2-foncteurs lax ou oplax ne jouant qu'un rôle caché. La catégorie des préfaisceaux sur une petite catégorie A sera notée $\widehat{A}$. On notera Δ la catégorie des simplexes et en particulier $\widehat{\Delta}$ la catégorie des ensembles simpliciaux. On notera N le foncteur nerf $\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ et $i_\Delta : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at$ le foncteur associant à un ensemble simplicial sa catégorie des éléments. La catégorie des foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{D}$ sera notée $\underline{\mathsf{Hom}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. On notera Δ_1 la catégorie correspondant à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$. On s'écartera légèrement des notations de [4] en notant $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf géométrique qui y est noté $N_{\mathrm{l,n}}$. Enfin, si I est une classe de flèches d'une catégorie $\mathcal{C}$, on notera $l(I)$ (resp. $r(I)$) la classe des flèches de $\mathcal{C}$ ayant la propriété de relèvement à gauche (resp. à droite) par rapport à I.

1. Rappels sur les localisateurs fondamentaux

Dans cette section, on rappelle brièvement la définition des localisateurs fondamentaux, introduits par Grothendieck dans [9], et de leur généralisation 2-catégorique, introduite par Chiche dans [4]. Nous renvoyons le lecteur à ce dernier texte ou à la thèse [3] de Chiche pour plus de détails et références sur les localisateurs fondamentaux.

Définition 1.1. Soit $\mathcal{W}$ une classe de flèches d'une catégorie $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{W}$ est *faiblement saturée* si elle satisfait aux conditions suivantes :

- (FS1) les identités des objets de $\mathcal{C}$ sont dans $\mathcal{W}$;
- (FS2) la classe $\mathcal{W}$ satisfait à la propriété du 2 sur 3 ;
- (FS3) toute flèche i de $\mathcal{C}$ admettant une rétraction r telle que ri soit dans $\mathcal{W}$ est elle-même dans $\mathcal{W}$.

Remarque 1.2. La condition de faible saturation est une forme faible de la notion de catégorie homotopique au sens de Dwyer, Hirschhorn, Kan et Smith [8]. Plus précisément, si $(\mathcal{C}, \mathcal{W})$ est une catégorie homotopique au sens de *op. cit.*, alors la classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\mathcal{C}$ est faiblement saturée.

1.3. Si $u : A \to B$ est un foncteur et b est un objet de B, on notera A/b la catégorie « comma », parfois notée $u \downarrow b$, dont les objets sont les couples $(a, f : u(a) \to b)$, où a est un objet de A et f une flèche de B, et dont les flèches sont les morphismes de A faisant commuter les triangles évidents.

On vérifie immédiatement que si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de $\mathcal{C}at$, alors pour tout objet c de C, le foncteur u induit un foncteur $u/c : A/c \to B/c$ donné sur les objets par

$$(a, f) \mapsto (u(a), f).$$

Définition 1.4 (Grothendieck)**.** Un *localisateur fondamental de* $\mathcal{C}at$ est une classe $\mathcal{W}$ de foncteurs satisfaisant aux conditions suivantes :

(LF1) la classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\mathcal{C}at$ est faiblement saturée ;

(LF2) pour toute petite catégorie A admettant un objet final, l'unique foncteur $A \to e$, où e est la catégorie finale, est dans $\mathcal{W}$;

(LF3) pour tout triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}at$, si pour tout objet c de C le foncteur u/c appartient à $\mathcal{W}$, alors le foncteur u appartient à $\mathcal{W}$.

Exemples 1.5. L'exemple paradigmatique de localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ est la classe des foncteurs dont le nerf est une équivalence d'homotopie faible simpliciale.

Plus généralement, si $\mathcal{W}$ est la classe des équivalences faibles d'une localisation de Bousfield à gauche de la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux, alors la classe des foncteurs dont le nerf est dans $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$. (Et par le théorème 2.5, dû à Cisinski, on obtient ainsi tous les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, à des restrictions ensemblistes près.)

Passons maintenant à la généralisation 2-catégorique de la notion de localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$.

1.6. Si $u : A \to B$ est un 2-foncteur et b est un objet de B, on notera A/b la catégorie « comma » 2-catégorique définie de la manière suivante :

— les objets sont les couples $(a, f : u(a) \to b)$, où a est un objet de A et f une 1-flèche de B ;
— si (a, f) et (a', f') sont deux objets, les 1-flèches de source (a, f) et de but (a', f') sont les couples $(g : a \to a', \alpha : f'u(g) \to f)$, où g est une 1-flèche de A et α une 2-flèche de B ;
— si (g, α) et (g', α') sont deux 1-flèches de source (a, f) et de but (a', f'), les 2-flèches de (g, α) vers (g', α') sont les 2-flèches $\beta : g \to g'$ de A telles que

$$\alpha' \circ (f' * u(\beta)) = \alpha,$$

les compositions et identités étant définies de la manière évidente. Cette catégorie est notée $A/\!\!/^{u}_{\mathrm{c}} b$ dans [4], l'indice c, pour « colax », indiquant l'orientation des 2-flèches de B apparaissant dans la définition des 1-flèches. On renvoie à la section 3 de *op. cit.* pour plus de détails. On vérifie, comme dans le cas catégorique, que si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

est un triangle commutatif de 2-$\mathcal{C}at$ et c est un objet de C, alors le 2-foncteur u induit un 2-foncteur $u/c : A/c \to B/c$.

On dira, suivant [4], qu'un objet z d'une 2-catégorie A *admet un objet final* si pour tout objet a de A, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_A(a, z)$ des flèches de a vers z admet un objet final.

Définition 1.7 (Chiche)**.** Un *localisateur fondamental de* 2-$\mathcal{C}at$ est une classe $\mathcal{W}$ de 2-foncteurs satisfaisant aux conditions suivantes :

(LF$_2$1) la classe $\mathcal{W}$ de flèches de 2-$\mathcal{C}at$ est faiblement saturée ;

(LF$_2$2) pour toute petite 2-catégorie admettant un objet admettant un objet final, l'unique foncteur $A \to e$, où e est la 2-catégorie finale, est dans $\mathcal{W}$;

(LF$_2$3) pour tout triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

dans 2-$\mathcal{C}at$, si pour tout objet c de C le 2-foncteur u/c appartient à $\mathcal{W}$, alors le 2-foncteur u appartient à $\mathcal{W}$.

1.8. Pour donner des exemples de localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$, nous aurons besoin d'un foncteur nerf 2-catégorique. Dans ce texte, nous privilégierons le nerf géométrique $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$. Rappelons brièvement sa définition. Si C est une 2-catégorie, les n-simplexes de $N_2(C)$ sont donnés par les 2-foncteurs $\widetilde{\Delta_n} \to C$, où $\widetilde{\Delta_n}$ est la 2-catégorie définie de la manière suivante :

- — ses objets sont les entiers 0, 1, ..., n ;
- — si i et j sont deux objets, la catégorie des flèches de i vers j est donnée par l'ensemble des sous-ensembles de $\{i, \dots, j\}$ contenant i et j, ordonné par l'ordre opposé à l'inclusion,

les compositions et identités étant définies de la manière évidente.

Exemples 1.9. Les exemples 1.5 de localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ se généralisent en des exemples de localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$ en remplaçant le nerf usuel par le nerf géométrique. De fait, en vertu du théorème 2.6, dû à Chiche, les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ sont en bijection canonique avec les localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$.

Définition 1.10. Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ ou de 2-$\mathcal{C}at$, on appellera *$\mathcal{W}$-équivalences* ses éléments.

2. Localisateurs et accessibilité

Le but de ce texte est d'associer à tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de 2-$\mathcal{C}at$ « accessible au sens de Cisinski » une structure de catégorie de modèles sur 2-$\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$. Commençons par définir cette notion d'accessibilité.

Définition 2.1. Si S est une classe de foncteurs (resp. de 2-foncteurs), on appellera *localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ (resp. de 2-$\mathcal{C}at$) engendré par S* l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ (resp. de 2-$\mathcal{C}at$) contenant S. (On vérifie immédiatement qu'on obtient bien ainsi un localisateur fondamental.) On dira qu'un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ (resp. de 2-$\mathcal{C}at$) est *accessible au sens de Cisinski* s'il est engendré par un *ensemble*.

Pour démontrer l'existence de la structure de catégorie de modèles annoncée, nous utiliserons la notion intermédiaire de A-localisateur (dans le cas $A = \Delta$).

Définition 2.2 (Cisinski)**.** Soit A une petite catégorie. Notons Mono la classe des monomorphismes de la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A. Un *A-localisateur* est une classe $\mathcal{W}$ de flèches de $\widehat{A}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(LC1) la classe $\mathcal{W}$ satisfait à la propriété du deux sur trois ;
(LC2) on a l'inclusion $r(\mathsf{Mono}) \subset \mathcal{W}$;
(LC3) la classe $\mathsf{Mono} \cap \mathcal{W}$ est stable par image directe et composition transfinie.

Si $\mathcal{W}$ est un A-localisateur, on appellera *$\mathcal{W}$-équivalences* les éléments de $\mathcal{W}$.

Définition 2.3. Si S est une classe de flèches de $\widehat{A}$, on appellera *A-localisateur engendré par S* l'intersection de tous les localisateurs contenant S. (On vérifie immédiatement qu'on obtient bien ainsi un A-localisateur.) On dira qu'un A-localisateur est *accessible au sens de Cisinski* s'il est engendré par un *ensemble*.

Théorème 2.4 (Cisinski)**.** *Soient A une petite catégorie et $\mathcal{W}$ un A-localisateur. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *il existe une structure de catégorie de modèles combinatoire sur $\widehat{A}$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$ et dont les cofibrations sont les monomorphismes ;*
b) *le localisateur $\mathcal{W}$ est accessible au sens de Cisinski.*

Démonstration. C'est une partie du théorème 1.4.3 de [7]. □

Si $\mathcal{W}$ est un A-localisateur, on appellera la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{A}$ donnée par le théorème précédent la *structure de catégorie de modèles sur $\widehat{A}$ associée à $\mathcal{W}$*.

On rappelle qu'on note $i_\Delta : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at$ le foncteur qui associe à tout ensemble simplicial sa catégorie des éléments et $N : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf.

Théorème 2.5 (Cisinski)**.** *Le couple de foncteurs*

$$i_\Delta : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at, \qquad N : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$$

induit une bijection

$$\mathcal{W} \mapsto N^{-1}(\mathcal{W}), \qquad \mathcal{W} \mapsto i_\Delta^{-1}(\mathcal{W})$$

entre la classe des Δ-localisateurs contenant les équivalences d'homotopie faibles simpliciales et la classe des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$. De plus, cette bijection préserve l'accessibilité au sens de Cisinski.

Démonstration. En vertu du théorème 4.2.15 de [7], l'application $\mathcal{W} \mapsto i_\Delta^{-1}(\mathcal{W})$ définit une bijection préservant l'accessibilité au sens de Cisinski entre la classe des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ dits modelables par Δ et la classe des Δ-localisateurs dits test (voir pour ces deux notions la définition 4.2.21 de *op. cit.*). Il résulte de la proposition 1.5.13 de [13] que tout localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ est modelable par Δ, et du corollaire 2.1.21 et de la proposition 3.4.25 de [7] que les Δ-localisateurs test sont exactement les Δ-localisateurs contenant les équivalences d'homotopie faibles simpliciales. Enfin, le fait que le foncteur N induit un inverse de cette bijection est conséquence de la remarque 4.2.16 de [7] et de l'exemple 1.7.18 de [13]. $\square$

On rappelle qu'on note $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf géométrique (voir le paragraphe 1.8).

Théorème 2.6 (Chiche)**.** *Le couple de foncteurs*

$$\iota : \mathcal{C}at \to 2\text{-}\mathcal{C}at, \qquad i_\Delta N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$$

où ι désigne l'inclusion canonique, induit une bijection

$$\mathcal{W} \mapsto N_2^{-1} i_\Delta^{-1}(\mathcal{W}), \qquad \mathcal{W} \mapsto \iota^{-1}(\mathcal{W}) = \mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$$

entre la classe des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et la classe des localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$. De plus, cette bijection préserve l'accessibilité au sens de Cisinski.

Démonstration. Voir le théorème 6.33 et les propositions 6.47 et 6.48 de [4]. (Rappelons que le foncteur qu'on note dans ce texte N_2 est noté $N_{\mathrm{l,n}}$ dans *op. cit.*) $\square$

Corollaire 2.7. *Le couple de foncteurs*

$$\iota\, i_\Delta : \widehat{\Delta} \to 2\text{-}\mathcal{C}at, \qquad N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$$

induit une bijection

$$\mathcal{W} \mapsto N_2^{-1}(\mathcal{W}), \qquad \mathcal{W} \mapsto i_\Delta^{-1}\iota^{-1}(\mathcal{W})$$

entre la classe des Δ-localisateurs contenant les équivalences d'homotopie faibles simpliciales et la classe des localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$. De plus, cette bijection préserve l'accessibilité au sens de Cisinski.

Démonstration. Cela résulte immédiatement des deux théorèmes précédents une fois qu'on a remarqué que le premier d'entre eux entraîne l'égalité

$$N_2^{-1}i_\Delta^{-1}N^{-1}(\mathcal{W}) = N_2^{-1}(\mathcal{W})$$

pour tout Δ-localisateur $\mathcal{W}$ contenant les équivalences d'homotopie faibles simpliciales. □

2.8. Les deux théorèmes et le corollaire précédents fournissent une « trijection », qu'on appellera *trijection de Chiche-Cisinski*, entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, les localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$ et les Δ-localisateurs contenant les équivalences d'homotopie faibles simpliciales. De plus, cette trijection préserve l'accessibilité au sens de Cisinski.

Bien que ce ne soit pas strictement nécessaire pour obtenir les résultats principaux de ce texte, nous allons consacrer la fin de cette section à comparer la notion d'accessibilité au sens de Cisinski à une notion plus classique d'accessibilité.

Définition 2.9. Une classe d'objets d'une catégorie accessible $\mathcal{C}$ est dite *accessible* si le foncteur d'inclusion de la sous-catégorie pleine correspondante dans $\mathcal{C}$ est accessible, c'est-à-dire s'il existe un cardinal régulier κ pour lequel ces deux catégories sont κ-accessibles et le foncteur d'inclusion commute aux limites inductives κ-filtrantes. Une classe de flèches d'une catégorie accessible $\mathcal{C}$ est dite *accessible* si elle est accessible considérée comme classe d'objets de la catégorie des flèches $\underline{\mathsf{Hom}}(\Delta_1, \mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$.

Théorème 2.10 (Smith)**.** *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie localement présentable, $\mathcal{W}$ une classe de flèches de $\mathcal{C}$ et I un* ensemble *de flèches de $\mathcal{C}$. On note* Cof *la classe $lr(I)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *il existe une structure de catégorie de modèles combinatoire sur $\mathcal{C}$ dont les équivalences faibles sont les éléments de $\mathcal{W}$ et dont les cofibrations sont les éléments de* Cof *;*
b) *les conditions suivantes sont satisfaites :*
   (S1) *la classe $\mathcal{W}$ satisfait à la propriété du deux sur trois ;*
   (S2) *on a l'inclusion $r(I) \subset \mathcal{W}$;*
   (S3) *la classe* $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$ *est stable par image directe et composition transfinie ;*
   (S4) *la classe de flèches $\mathcal{W}$ est accessible.*

Démonstration. Voir par exemple le corollaire A.2.6.6 et la proposition A.2.6.8 de [12] (en tenant compte du fait qu'une classe de flèches accessible est stable par rétractes). Pour l'implication *b)* $\Rightarrow$ *a)*, voir également [15]. □

Corollaire 2.11. *Un A-localisateur est accessible au sens de Cisinski si et seulement s'il est accessible en tant que classe de flèches de $\widehat{A}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{W}$ un A-localisateur. Fixons I un modèle cellulaire de $\widehat{A}$ au sens de Cisinski, c'est-à-dire un ensemble I tel que $lr(I)$ soit la classe des monomorphismes de $\widehat{A}$. Un tel ensemble existe toujours en vertu par exemple de la proposition 1.2.27 de [7]. Il résulte alors du théorème de Smith appliqué à $\mathcal{W}$ et I et du théorème 2.4 de Cisinski appliqué à $\mathcal{W}$ que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
a) la classe de flèches $\mathcal{W}$ est accessible ;
b) il existe une structure de catégorie de modèles sur $\widehat{A}$ dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences et dont les cofibrations sont les monomorphismes ;
c) le localisateur $\mathcal{W}$ est accessible au sens de Cisinski,

ce qui achève la démonstration. □

Proposition 2.12. *La trijection de Chiche-Cisinski préserve l'accessibilité au sens des classes de flèches (définition 2.9).*

Démonstration. Les catégories $\widehat{\Delta}$, $\mathcal{C}at$ et 2-$\mathcal{C}at$ étant accessibles, tout adjoint à gauche ou à droite entre ces catégories est accessible (voir la proposition 2.23 de [1]). On en déduit que les foncteurs N, i_Δ, ι et N_2 sont accessibles. Le résultat est alors conséquence du fait que l'image réciproque d'une classe de flèches accessible par un foncteur accessible est accessible (voir la remarque 2.50 de *op. cit.*). □

Corollaire 2.13. *Un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ (resp. de 2-$\mathcal{C}at$) est accessible au sens de Cisinski si et seulement s'il est accessible en tant que classe de flèches de $\mathcal{C}at$ (resp. de 2-$\mathcal{C}at$).*

□

Démonstration. La trijection de Chiche-Cisinski préservant l'accessibilité au sens de Cisinski et l'accessibilité en tant que classe de flèches, le résultat est conséquence immédiate du fait que ces deux notions coïncident pour les Δ-localisateurs (corollaire 2.11).

2.14. Les deux notions d'accessibilité coïncidant, nous parlerons maintenant simplement de A-localisateurs (resp. de localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, resp. de localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$) *accessibles*.

Remarque 2.15. Il résulte de la proposition 1.4.28 de [7] (resp. de la proposition 2.4.12 de [13], resp. de notre future proposition 4.5) que tout A-localisateur (resp. tout localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$, resp. tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$) est stable par limite inductive suffisamment filtrante. En vertu du théorème 6.17 de [1], l'axiome de grands cardinaux appelé « principe de Vopěnka » implique donc que tout A-localisateur (resp. tout localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$, resp. tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$) est accessible.

3. La structure à la Thomason « classique » sur 2-$\mathcal{C}at$

3.1. On notera $\mathcal{W}_\infty$ la classe des 2-foncteurs (stricts) qui sont envoyés sur des équivalences d'homotopie faibles simpliciales par le foncteur nerf $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$. (Cette classe est notée $\mathcal{W}^2_\infty$ dans l'introduction du présent article et dans [4].) On appellera $\mathcal{W}_\infty$-*équivalences* ses éléments, conformément à la terminologie introduite dans la définition 1.10.

3.2. On appellera *structure de catégorie de modèles de Kan-Quillen* la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$, introduite par Quillen dans [14], dont les équivalences faibles sont les équivalences d'homotopie faibles et dont les cofibrations sont les monomorphismes. On rappelle que cette structure de catégorie de modèles est combinatoire et propre (voir par exemple le théorème 2.1.42 de [7]), et qu'un ensemble de générateurs pour les cofibrations est donné par

$$I = \{i_n : \partial\Delta_n \hookrightarrow \Delta_n \mid n \geq 0\},$$

où $\partial\Delta_n$ désigne le bord du n-simplexe Δ_n dans $\widehat{\Delta}$ et $i_n : \partial\Delta_n \hookrightarrow \Delta_n$ l'inclusion canonique.

3.3. On rappelle (voir [11]) qu'on a une adjonction

$$Sd : \widehat{\Delta} \rightleftarrows \widehat{\Delta} : Ex,$$

où Sd est le foncteur de subdivision barycentrique et Ex est le foncteur de Kan, et des transformations naturelles

$$\alpha : Sd \to 1_{\widehat{\Delta}}, \quad \beta : 1_{\widehat{\Delta}} \to Ex,$$

transposées l'une de l'autre, qui sont des équivalences d'homotopie faibles argument par argument.

3.4. Enfin, on rappelle que le foncteur $N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ admet un adjoint à gauche, qu'on notera $c_2 : \widehat{\Delta} \to 2\text{-}\mathcal{C}at$ (voir par exemple le paragraphe 5.10 de [2]).

Définition 3.5. Une *cofibration de Thomason de* $2\text{-}\mathcal{C}at$ est un 2-foncteur élément de la classe $lr(c_2 Sd^2(I))$.

Théorème 3.6 (Ara-Maltsiniotis)**.** *La catégorie* $2\text{-}\mathcal{C}at$ *admet une structure de catégorie de modèles combinatoire propre dont les équivalences faibles sont les* $\mathcal{W}_\infty$*-équivalences et dont les cofibrations sont les cofibrations de Thomason.*

Démonstration. C'est une partie du théorème 6.27 de [2]. □

On appellera *structure de catégorie de modèles à la Thomason sur* $2\text{-}\mathcal{C}at$ la structure donnée par le théorème précédent.

Théorème 3.7 (Ara-Chiche-Maltsiniotis)**.** *Le couple de foncteurs adjoints*

$$c_2 Sd^2 : \widehat{\Delta} \rightleftarrows 2\text{-}\mathcal{C}at : Ex^2 N_2$$

est une équivalence de Quillen, où $2\text{-}\mathcal{C}at$ *est munie de la structure de catégorie de modèles à la Thomason et* $\widehat{\Delta}$ *de la structure de catégorie de modèles de Kan-Quillen.*

Démonstration. C'est le corollaire 6.32 de [2]. □

Remarque 3.8. Le résultat précédent est partiellement attribué à Chiche car il dépend de manière essentielle du théorème 7.9 de [5].

Corollaire 3.9. *On a les inclusions*

$$c_2 Sd^2(\mathsf{W}_\infty) \subset \mathcal{W}_\infty \quad \textit{et} \quad Ex^2 N_2(\mathcal{W}_\infty) \subset \mathsf{W}_\infty,$$

où W_∞ *désigne la classe des équivalences d'homotopie faibles simpliciales. De plus, les morphismes d'adjonction*

$$c_2 Sd^2 Ex^2 N_2 \to 1_{2\text{-}\mathcal{C}at} \quad \textit{et} \quad 1_{\widehat{\Delta}} \to Ex^2 N_2 c_2 Sd^2$$

sont respectivement une $\mathcal{W}_\infty$*-équivalence naturelle et une équivalence d'homotopie faible simpliciale naturelle.*

Démonstration. Puisque tous les objets de la structure de Kan-Quillen sont cofibrants, le foncteur de Quillen à gauche $c_2 Sd^2$ respecte les équivalences faibles (pour les structures de catégorie de modèles du théorème précédent). Le foncteur N_2 respectant les équivalences faibles par définition, il en est de même du foncteur $Ex^2 N_2$ en vertu de l'existence de l'équivalence faible naturelle $\beta : 1_{\widehat{\Delta}} \to Ex$ du paragraphe 3.3. Puisque $(c_2 Sd^2, Ex^2 N_2)$ est une équivalence de Quillen donnée par des foncteurs qui respectent les équivalences faibles, l'unité et la coünité de cette adjonction sont des équivalences faibles naturelles, ce qu'il fallait démontrer. □

4. Structures à la Thomason et localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$

4.1. Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, on notera $\mathcal{W}_\Delta$ le Δ-localisateur associé dans la trijection de Chiche-Cisinski (voir le paragraphe 2.8). Ce Δ-localisateur est caractérisé par le fait qu'il contient les équivalences d'homotopie faibles simpliciales et par l'égalité

$$\mathcal{W} = N_2^{-1}(\mathcal{W}_\Delta).$$

Il résulte de l'existence de l'équivalence faible naturelle $\beta : 1_{\widehat{\Delta}} \to Ex$ du paragraphe 3.3 qu'on a également

$$\mathcal{W} = N_2^{-1}(Ex^2)^{-1}(\mathcal{W}_\Delta).$$

Par ailleurs, le théorème 6.37 de [4] donne l'inclusion $\mathcal{W}_\infty \subset \mathcal{W}$ qui jouera un rôle important dans ce qui suit.

Nous utiliserons dans cette section le lemme de transfert classique suivant :

Lemme 4.2. *Soient $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles à engendrement cofibrant (au sens de la définition 11.1.1 de [10]) engendrée par I et J, $\mathcal{N}$ une catégorie complète et cocomplète, et*

$$F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : G$$

un couple de foncteurs adjoints. Notons $\mathcal{W}$ et Fib *les classes des équivalences faibles et des fibrations de $\mathcal{M}$ respectivement. On suppose les conditions suivantes satisfaites :*

a) *$F(I)$ et $F(J)$ permettent l'argument du petit objet (au sens de la définition 10.5.15 de [10]) ;*

b) *on a l'inclusion $G(lr(F(J))) \subset \mathcal{W}$.*

Alors $F(I)$ et $F(J)$ engendrent une structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{M}$ dont les classes des équivalences faibles et des fibrations sont données par $G^{-1}(\mathcal{W})$ et $G^{-1}(\mathsf{Fib})$ respectivement. En particulier, pour cette structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{N}$, l'adjonction (F, G) est une adjonction de Quillen.

Démonstration. Voir par exemple le théorème 11.3.2 de [10], la description des fibrations résultant des égalités

$$r(lr(F(J)) = r(F(J)) = G^{-1}(r(J)) = G^{-1}(\mathsf{Fib}). \qquad \square$$

On vérifie facilement qu'un foncteur de Quillen à gauche qui respecte les équivalences faibles respecte également les carrés homotopiquement cocartésiens et que, si un tel foncteur est de plus une équivalence de Quillen à gauche, alors il reflète les carrés homotopiquement cocartésiens. Nous aurons besoin de l'énoncé analogue pour les *équivalences* de Quillen à *droite*, énoncé sans doute bien connu mais pour lequel nous n'avons pas réussi à trouver de référence dans la littérature.

Lemme 4.3. *Soit F une équivalence de Quillen à droite entre deux catégories de modèles. On suppose que F préserve les équivalences faibles. Alors F préserve et reflète les carrés homotopiquement cocartésiens.*

Démonstration. Notons $\square$ la catégorie $\Delta_1 \times \Delta_1$ (de sorte que si $\mathcal{C}$ est une catégorie, $\underline{\mathsf{Hom}}(\square, \mathcal{C})$ est la catégorie des carrés commutatifs dans $\mathcal{C}$), $\ulcorner$ la sous-catégorie pleine de $\square$ contenant tous les objets de $\square$ excepté $(1,1)$, et $i : \ulcorner \to \square$ le foncteur d'inclusion canonique. On rappelle que si $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles, un carré commutatif de $\mathcal{M}$ vu comme un objet X de $\underline{\mathsf{Hom}}(\square, \mathcal{M})$ est homotopiquement cocartésien si et seulement si, pour tout objet Y de $\underline{\mathsf{Hom}}(\square, \mathcal{M})$, l'application canonique

$$\mathsf{Hom}_{\underline{\mathsf{Hom}}(\square,\mathcal{M})}(X, Y) \to \mathsf{Hom}_{\underline{\mathsf{Hom}}(\ulcorner,\mathcal{M})}(i^*X, i^*Y)$$

induit une bijection

$$\mathsf{Hom}_{\mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\square,\mathcal{M}))}(X, Y) \to \mathsf{Hom}_{\mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\ulcorner,\mathcal{M}))}(i^*X, i^*Y),$$

où Ho désigne le passage à la catégorie homotopique pour les équivalences faibles argument par argument.

Soit maintenant $F : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ une équivalence de Quillen à droite préservant les équivalences faibles. Puisque le foncteur F préserve les équivalences faibles, il induit un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\square, \mathcal{M})) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "F_*"'] & \mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\ulcorner, \mathcal{M})) \arrow[d, "F_*"] \\
\mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\square, \mathcal{N})) \arrow[r, "i^*"'] & \mathrm{Ho}(\underline{\mathsf{Hom}}(\ulcorner, \mathcal{N}))
\end{tikzcd} .$$

Puisque les catégories $\ulcorner$ et $\square$ sont des catégories de Reedy, il résulte du fait que F est une équivalence de Quillen et de la théorie des structures de catégorie de modèles de Reedy (voir par exemple la proposition 15.4.1 de [10]) que les foncteurs verticaux du carré commutatif ci-dessus sont des équivalences de catégories. Le résultat suit immédiatement. $\square$

Revenons à nos localisateurs.

Lemme 4.4. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$. On a les inclusions*

$$c_2Sd^2(\mathcal{W}_\Delta) \subset \mathcal{W} \quad \textit{et} \quad Ex^2N_2(\mathcal{W}) \subset \mathcal{W}_\Delta.$$

Démonstration. La seconde inclusion résulte du paragraphe 4.1. Montrons la première. Puisque $\mathcal{W}_\Delta$ contient les équivalences d'homotopie faibles simpliciales, le corollaire 3.9 entraîne que f est une $\mathcal{W}_\Delta$-équivalence si et seulement si $Ex^2N_2c_2Sd^2(f)$ en est une, c'est-à-dire si et seulement si $c_2Sd^2(f)$ est une $\mathcal{W}$-équivalence, ce qui achève la démonstration. $\square$

Proposition 4.5. *Tout localisateur fondamental de* $2\text{-}\mathcal{C}at$ *est stable par limite inductive filtrante.*

Démonstration. La proposition résulte de l'énoncé analogue pour les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ (voir la proposition 2.4.12 de [13]), de la correspondance donnée par le théorème 2.6 entre les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et ceux de $2\text{-}\mathcal{C}at$, et du fait que les foncteurs N_2 et i_Δ commutent aux limites inductives filtrantes (le premier en vertu par exemple de la proposition 5.13 de [2] et le second car il admet un adjoint à droite). $\square$

Théorème 4.6. *Soit* $\mathcal{W}$ *un localisateur fondamental de* $2\text{-}\mathcal{C}at$ *accessible. La catégorie* $2\text{-}\mathcal{C}at$ *admet une structure de catégorie de modèles combinatoire propre à gauche dont les équivalences faibles sont les* $\mathcal{W}$*-équivalences, dont les cofibrations sont les cofibrations de Thomason de* $2\text{-}\mathcal{C}at$ *et dont les fibrations sont les* 2*-foncteurs* u *tels que* $Ex^2N_2(u)$ *est une fibration de la structure de catégorie de modèles sur* $\widehat{\Delta}$ *associée au* Δ*-localisateur* $\mathcal{W}_\Delta$.

Démonstration. Nous allons appliquer le lemme 4.2 à l'adjonction

$$c_2Sd^2 : \widehat{\Delta} \rightleftarrows 2\text{-}\mathcal{C}at : Ex^2N_2,$$

où $\widehat{\Delta}$ est munie de la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$. Soit J un ensemble engendrant les cofibrations triviales de cette structure. Puisque la catégorie $2\text{-}\mathcal{C}at$ est localement présentable, il suffit de vérifier qu'on a l'inclusion

$$N_2Ex^2(lr(c_2Sd^2(J))) \subset \mathcal{W}_\Delta,$$

ou encore, en vertu du paragraphe 4.1, qu'on a l'inclusion

$$lr(c_2Sd^2(J)) \subset \mathcal{W}.$$

Le lemme 4.4 entraîne que la classe $c_2Sd^2(J)$ est incluse dans $\mathcal{W}$ et le théorème 3.7 que cette même classe est incluse dans la classe Cof des cofibrations de Thomason de 2-$\mathcal{C}at$. Pour conclure, en vertu de l'argument du petit objet, il suffit donc de montrer que $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$ est stable par rétractes, composition transfinie et image directe. La stabilité par rétractes est immédiate et celle par composition transfinie résulte de la proposition 4.5. Montrons la stabilité par image directe.

Considérons un carré cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & C \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ B & \xrightarrow[v]{} & D \end{array}$$

de 2-$\mathcal{C}at$ où i est une cofibration de Thomason de 2-$\mathcal{C}at$. Par propreté à gauche de la structure à la Thomason sur 2-$\mathcal{C}at$ (voir le théorème 3.6), ce carré est homotopiquement cocartésien pour cette même structure. En vertu du théorème 3.7 et de son corollaire 3.9, le foncteur $Ex^2 N_2$ est une équivalence de Quillen à droite respectant les équivalences faibles (pour les structures de catégorie de modèles du théorème invoqué). La proposition 4.3 entraîne donc que le carré

$$\begin{array}{ccc} Ex^2N_2(A) & \xrightarrow{Ex^2N_2(u)} & Ex^2N_2(C) \\ {\scriptstyle Ex^2N_2(i)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ex^2N_2(i')} \\ Ex^2N_2(B) & \xrightarrow[Ex^2N_2(v)]{} & Ex^2N_2(D) \end{array}$$

est homotopiquement cocartésien pour la structure de Kan-Quillen. (On pourrait se débarrasser des Ex^2 en utilisant l'équivalence faible naturelle β du paragraphe 3.3.) Il résulte du fait que $\mathcal{W}_\Delta$ contient les équivalences d'homotopie faibles (et que les deux structures de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ en jeu ont mêmes cofibrations) que ce carré est également homotopiquement cocartésien pour la structure de catégorie de modèles associée à $\mathcal{W}_\Delta$.

Si maintenant i est de plus une $\mathcal{W}$-équivalence, alors $Ex^2N_2(i)$ est une $\mathcal{W}_\Delta$-équivalence et il en est donc de même de $Ex^2N_2(i')$, ce qui prouve que i' est une $\mathcal{W}$-équivalence et achève de vérifier la stabilité de $\mathsf{Cof} \cap \mathcal{W}$ par image directe.

La propreté à gauche s'obtient en remplaçant i par u et i' par v dans l'argument du paragraphe précédent. $\square$

Remarque 4.7. Il résulte de la preuve du théorème précédent que la structure de catégorie de modèles obtenue est à engendrement cofibrant engendrée par $c_2Sd^2(I)$ et $c_2Sd^2(J)$, où I est l'ensemble du paragraphe 3.2 et J est un ensemble engendrant les cofibrations triviales de la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$.

On appellera la structure de catégorie de modèles sur $2\text{-}\mathcal{C}at$ donnée par le théorème précédent la *structure de catégorie de modèles à la Thomason associée à* $\mathcal{W}$.

Théorème 4.8. *Soit* $\mathcal{W}$ *un localisateur fondamental de* $2\text{-}\mathcal{C}at$ *accessible. Le couple de foncteurs adjoints*

$$c_2Sd^2 : \widehat{\Delta} \rightleftarrows 2\text{-}\mathcal{C}at : Ex^2N_2$$

est une équivalence de Quillen, où $2\text{-}\mathcal{C}at$ *est munie de la structure de catégorie de modèles à la Thomason associée à* $\mathcal{W}$ *et* $\widehat{\Delta}$ *de la structure de catégorie de modèles associée au* Δ*-localisateur* $\mathcal{W}_\Delta$.

Démonstration. Le foncteur c_2Sd^2 préserve les cofibrations par définition et les équivalences faibles par le lemme 4.4. Le couple de foncteurs adjoints (c_2Sd^2, Ex^2N_2) est donc une adjonction de Quillen (cela résulte également de la preuve du théorème 4.6). Puisque le foncteur Ex^2N_2 préserve également les équivalences faibles, pour montrer que cette adjonction de Quillen est une équivalence de Quillen, il suffit de vérifier que l'unité et la coünité de l'adjonction sont des équivalences faibles naturelles. Cela résulte immédiatement du corollaire 3.9 et de la minimalité de $\mathcal{W}_\infty$. □

Le degré de généralité naturel des arguments prouvant les théorèmes 4.6 et 4.8 est donné dans lemme que nous allons maintenant énoncer. L'ordre bourbachique aurait voulu qu'on commence par démontrer ce lemme et qu'on en déduise ces deux résultats (modulo la trijection de Chiche-Cisinski) en l'appliquant à l'équivalence de Quillen du théorème 3.7 et à la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$. Nous y avons renoncé pour des raisons d'exposition.

Lemme 4.9. *Soient*

$$F : \mathcal{M} \rightleftarrows \mathcal{N} : G$$

une équivalence de Quillen et $\mathcal{M}'$ une catégorie de modèles à engendrement cofibrant engendrée par I' et J' avec même catégorie sous-jacente que $\mathcal{M}$, mêmes cofibrations et $\mathcal{W}_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{W}_{\mathcal{M}'}$, où $\mathcal{W}_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{W}_{M'}$ désignent les classes des équivalences faibles de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ respectivement. On suppose les conditions suivantes satisfaites :

a) *on a $G(\mathcal{W}_{\mathcal{N}}) \subset \mathcal{W}_{\mathcal{M}}$, où $\mathcal{W}_{\mathcal{N}}$ désigne la classe des équivalences faibles de $\mathcal{N}$;*
b) *les sources et buts des flèches de J' sont cofibrants dans $\mathcal{M}$;*
c) *la catégorie de modèles $\mathcal{N}$ est propre à gauche ;*
d) *la classe $G^{-1}(\mathcal{W}_{\mathcal{M}'})$ est stable par limite inductive filtrante.*

Alors $F(I')$ et $F(J')$ engendrent une structure de catégorie de modèles propre à gauche $\mathcal{N}'$ sur la catégorie sous-jacente à $\mathcal{N}$ dont les classes des équivalences faibles et des fibrations sont données par $G^{-1}(\mathcal{W}_{\mathcal{M}'})$ et $G^{-1}(\mathsf{Fib}_{\mathcal{M}'})$ respectivement, où $\mathsf{Fib}_{\mathcal{M}'}$ désigne la classe des fibrations de $\mathcal{M}'$. De plus, l'adjonction (F, G) induit une équivalence de Quillen

$$F : \mathcal{M}' \rightleftarrows \mathcal{N}' : G.$$

Démonstration. La preuve est une adaptation immédiate des preuves des théorèmes 4.6 et 4.8. □

5. Équivalences de Quillen avec $\mathcal{C}at$

5.1. Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$, on notera $\mathcal{W}_\Delta$ le Δ-localisateur associé dans la bijection donnée par le théorème 2.5. Ce Δ-localisateur est caractérisé par le fait qu'il contient les équivalences d'homotopie faibles simpliciales et par l'égalité

$$\mathcal{W} = N^{-1}(\mathcal{W}_\Delta).$$

Comme dans le cas 2-catégorique, on a également

$$\mathcal{W} = N^{-1}(Ex^2)^{-1}(\mathcal{W}_\Delta).$$

Notons que si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, la trijection de Chiche-Cisinski donne l'égalité $(\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at)_\Delta = \mathcal{W}_\Delta$.

Définition 5.2. Une *cofibration de Thomason de $\mathcal{C}at$* est un élément de la classe $lr(c\,Sd^2(I))$, où $c : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at$ désigne l'adjoint à gauche du foncteur nerf N.

Théorème 5.3 (Cisinski)**.** *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ accessible. La catégorie $\mathcal{C}at$ admet une structure de catégorie de modèles combinatoire propre à gauche dont les équivalences faibles sont les $\mathcal{W}$-équivalences, dont les cofibrations sont les cofibrations de Thomason de $\mathcal{C}at$ et dont les fibrations sont les foncteurs u tels que $Ex^2N(u)$ est une fibration de la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$.*

Démonstration. Cela résulte de la preuve du théorème 5.2.15 de [7], la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}at$ en jeu y étant obtenue en appliquant le lemme de transfert à l'adjonction $c\,Sd^2 : \widehat{\Delta} \rightleftarrows \mathcal{C}at : Ex^2N$, où $\widehat{\Delta}$ est munie de la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$. □

Remarque 5.4. Il résulte également de la preuve du théorème 5.2.15 de [7] que l'adjonction $c\,Sd^2 : \widehat{\Delta} \rightleftarrows \mathcal{C}at : Ex^2N$ est une équivalence de Quillen, où $\widehat{\Delta}$ est munie de la structure de catégorie de modèles associée à $\mathcal{W}_\Delta$.

Remarque 5.5. Le théorème 5.3 et la remarque 5.4 résultent également du lemme 4.9 appliqué à l'équivalence de Quillen définie par Thomason dans [16] et à la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$ (en utilisant la bijection de Cisinski du théorème 2.5).

On appellera la structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}at$ donnée par le théorème précédent la *structure de catégorie de modèles à la Thomason associée à $\mathcal{W}$*.

Théorème 5.6. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ accessible. Alors l'adjonction*

$$\tau : 2\text{-}\mathcal{C}at \rightleftarrows \mathcal{C}at : \iota,$$

où τ désigne l'adjoint à gauche du foncteur ι, est une équivalence de Quillen, où 2-$\mathcal{C}at$ (resp. $\mathcal{C}at$) est munie de la structure de catégorie de modèles à la Thomason associée à $\mathcal{W}$ (resp. à $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$).

Démonstration. Les équivalences faibles et les fibrations de ces deux structures sont précisément les morphismes s'envoyant, *via* les foncteurs Ex^2N_2 et Ex^2N respectivement, sur des équivalences faibles et des fibrations de la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$ (voir les théorèmes 4.6 et 5.3 pour les fibrations). Il résulte ainsi immédiatement de l'isomorphisme $N_2\iota \simeq N$ que le foncteur ι préserve les équivalences faibles et les fibrations, et donc que le couple (τ, ι) forme une adjonction de Quillen.

Puisque le foncteur ι préserve les équivalences faibles, pour conclure, il suffit de voir que ι induit une équivalence sur les catégories homotopiques. Cela résulte du théorème 6.33 de [4]. $\square$

Remarque 5.7. On pourrait également déduire le théorème précédent d'une version « fonctorielle » du lemme 4.9 qu'on appliquerait au triangle d'équivalences de Quillen

$$\begin{tikzcd} & \Delta \arrow[dl, "cSd^2"'] \arrow[dr, "c_2Sd^2"] & \\ 2\text{-}\mathcal{C}at \arrow[rr, "\tau"'] & & \mathcal{C}at \end{tikzcd} ,$$

où Δ (resp. $\mathcal{C}at$, resp. 2-$\mathcal{C}at$) est munie de la structure de catégorie de modèles de Kan-Quillen (resp. de Thomason [16], resp. du théorème 3.6), et à la structure de catégorie de modèles associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$.

6. Propreté à droite

Définition 6.1. Soit C une classe de petites catégories (resp. de petites 2-catégories). On appellera *localisateur fondamental de* $\mathcal{C}at$ (resp. *de* 2-$\mathcal{C}at$) *engendré par* C le localisateur fondamental engendré par la classe de flèches $\{C \to e \mid C \in \mathsf{C}\}$, où e désigne la catégorie finale.

Théorème 6.2 (Cisinski)**.** *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ accessible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *la structure de catégorie de modèles à la Thomason sur $\mathcal{C}at$ associée à $\mathcal{W}$ est propre ;*
b) *la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée à $\mathcal{W}_\Delta$ est propre ;*
c) *$\mathcal{W}$ est engendré par un* ensemble *de catégories.*

Démonstration. Dans [7], Cisinski définit une notion de localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ propre (définition 4.3.21). Il résulte du théorème 4.3.24 de *op. cit.* et de la proposition 1.5.13 de [13] qu'un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $\mathcal{C}at$ est propre si et seulement s'il satisfait à la condition *b)* ci-dessus.

Les équivalences avec les deux autres conditions résultent alors des théorèmes 5.2.15 et 6.1.11 de [7]. □

Lemme 6.3. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\mathcal{W}$ est engendré par une classe (resp. un ensemble) de petites 2-catégories ;*
b) *$\mathcal{W}$ est engendré par une classe (resp. un ensemble) de petites catégories ;*
c) *le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ de $\mathcal{C}at$ est engendré par une classe (resp. un ensemble) de petites catégories.*

Démonstration. Si $\mathcal{W}$ est engendré par une classe C de petites 2-catégories, alors, en vertu de la proposition 6.47 de [4], le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ de $\mathcal{C}at$ est engendré par la classe de foncteurs

$$\{i_\Delta N_2(C) \to i_\Delta N_2(e) \mid C \in \mathsf{C}\}.$$

Puisque $i_\Delta N_2(e) \simeq \Delta$ admet un objet final, par définition des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, le foncteur $i_\Delta N_2(e) \to e$ est dans $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$. Par deux sur trois, le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ est donc engendré par la classe de petites catégories

$$\{i_\Delta N_2(C) \mid C \in \mathsf{C}\}.$$

Par ailleurs, il résulte de la proposition 6.48 de [4] que si le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ est engendré par une classe de petites catégories, le localisateur fondamental $\mathcal{W}$ est également engendré par cette classe de petites catégories, ce qui achève la démonstration. □

Théorème 6.4. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ accessible. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *la structure de catégorie de modèles à la Thomason sur 2-$\mathcal{C}at$ associée à $\mathcal{W}$ est propre ;*
b) *la structure de catégorie de modèles à la Thomason sur $\mathcal{C}at$ associée au localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathcal{C}at$ de $\mathcal{C}at$ est propre ;*
c) *la structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ associée au Δ-localisateur $\mathcal{W}_\Delta$ est propre ;*
d) *$\mathcal{W}$ est engendré par un* ensemble *de petites 2-catégories ;*

e) $\mathcal{W}$ *est engendré par un* ensemble *de petites catégories.*

Démonstration. L'équivalence entre les quatre dernières conditions résulte du théorème 6.2 et du lemme précédent. Les implications *c)* $\Rightarrow$ *a)* $\Rightarrow$ *b)* résultent du fait que les foncteurs

$$\mathcal{C}at \xrightarrow{\ \iota\ } 2\text{-}\mathcal{C}at \xrightarrow{Ex^2 N_2} \widehat{\Delta}$$

sont des foncteurs de Quillen à droite (voir les théorèmes 5.6 et 4.8) qui préservent et reflètent les équivalences faibles. $\square$

Références

[1] J. ADÁMEK & J. ROSICKÝ – *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189, Cambridge University Press, 1994.

[2] D. ARA & G. MALTSINIOTIS – « Vers une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des n-catégories strictes », *Adv. Math.* **259** (2014), p. 557–654.

[3] J. CHICHE – « La théorie de l'homotopie des 2-catégories », Thèse, Université Paris 7, 2014, sous la direction de G. Maltsiniotis.

[4] — , « Théories homotopiques des 2-catégories », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* dans ce numéro (2015).

[5] — , « Un théorème A de Quillen pour les 2-foncteurs lax », *Theory Appl. Categ.* **30** (2015).

[6] D.-C. CISINSKI – « Le localisateur fondamental minimal », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **45** (2004), no. 2, p. 109–140.

[7] — , « Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie », *Astérisque* (2006), no. 308, p. xxiv+390.

[8] W. G. DWYER, P. S. HIRSCHHORN, D. M. KAN & J. H. SMITH – *Homotopy limit functors on model categories and homotopical categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 113, American Mathematical Society, 2004.

[9] A. GROTHENDIECK – « Pursuing stacks », Manuscript, 1983, édité par G. Maltsiniotis et B. Toën, à paraître dans *Documents Mathématiques*.

[10] P. S. HIRSCHHORN – *Model categories and their localizations*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 99, American Mathematical Society, 2003.

[11] D. M. KAN – « On c. s. s. complexes », *Amer. J. Math.* **79** (1957), p. 449–476.

[12] J. LURIE – *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, 2009.

[13] G. MALTSINIOTIS – « La théorie de l'homotopie de Grothendieck », *Astérisque* (2005), no. 301, p. vi+140.

[14] D. G. QUILLEN – *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 43, Springer-Verlag, 1967.

[15] J. ROSICKÝ – « On combinatorial model categories », *Appl. Categ. Structures* **17** (2009), no. 3, p. 303–316.

[16] R. W. THOMASON – « Cat as a closed model category », *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.* **21** (1980), no. 3, p. 305–324.

[17] K. WORYTKIEWICZ, K. HESS, P. E. PARENT & A. TONKS – « A model structure à la Thomason on 2-Cat », *J. Pure Appl. Algebra* **208** (2007), no. 1, p. 205–236.

Dimitri Ara
Radboud Universiteit Nijmegen
Institute for Mathematics, Astrophysics and Particle Physics
Heyendaalseweg 135
6525 AJ Nijmegen
The Netherlands
d.ara@math.ru.nl
http://www.math.ru.nl/~dara/

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES
Vol. LVI-2 (2015)

LOCALIFICATION PROCEDURE FOR AFFINE SYSTEMS

by Sergey A. SOLOVYOV

Résumé. Motivé par le concept d'ensemble affine d'Y. Diers, cet article étudie la notion de système affine, qui généralise les systèmes topologiques de S. Vickers. La catégorie des ensembles affines est isomorphe à une sous-catégorie pleine coréflexive de la catégorie des systèmes affines. Nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que la catégorie duale de la variété d'algèbres, sous-jacent les ensembles affines, soit isomorphe à une sous-catégorie réflexive de la catégorie des systèmes affines. Par conséquent, nous arrivons à une reformulation de l'équivalence sobriété-spatialité pour les ensembles affines, selon le modèle de l'équivalence entre les catégories des espaces topologiques sobres et les "locales" spatiaux.
Abstract. Motivated by the concept of affine set of Y. Diers, this paper studies the notion of affine system, extending topological systems of S. Vickers. The category of affine sets is isomorphic to a full coreflective subcategory of the category of affine systems. We show the necessary and sufficient condition for the dual category of the variety of algebras, underlying affine sets, to be isomorphic to a full reflective subcategory of the category of affine systems. As a consequence, we arrive at a restatement of the sobriety-spatiality equivalence for affine sets, patterned after the equivalence between the categories of sober topological spaces and spatial locales.
Keywords. Adjoint situation, affine set, (co)reflective subcategory, sober topological space, spatial locale, state property system, T_0 topological space, topological system, variety.
Mathematics Subject Classification (2010). 18A25, 18B15, 18B30, 18B99, 18C10.

1. Introduction

In [20], S. Vickers introduced the notion of topological system as a common framework for both topological spaces and the underlying algebraic structures of their topologies – locales. In particular, the category of locales (resp. topological spaces) is isomorphic to a full (resp. co)reflective subcategory of the category of topological systems, which provides the so-called system localification (resp. spatialization) procedure.

In [9], Y. Diers has come out with the concept of algebraic or affine set, which included topological spaces as a particular example. Based in the already available results of [19], this paper presents the notion of affine system, which extends topological systems of S. Vickers, and also state property systems of D. Aerts [2], and shows that the category of affine sets is isomorphic to a full coreflective subcategory of the category of affine systems, thereby providing an affine analogue of the spatialization procedure for topological systems. The important difference of the setting of this manuscript from the setting of Y. Diers [9, 10, 11] is the buildup of both affine sets and systems over an arbitrary category instead of the category of sets.

The main contribution of this paper is the necessary and sufficient condition for the dual category of the variety of algebras, whose objects underly the structure of affine sets, to be isomorphic to a full reflective subcategory of the category of affine systems, thereby providing an affine analogue of the localification procedure for topological systems. As a consequence, one arrives at a restatement of the sobriety-spatiality equivalence for affine sets, which is patterned after the equivalence between the categories of sober topological spaces and spatial locales [14]. Moreover, the existence of the localification procedure for affine systems induces their category to be essentially algebraic. We also show a sufficient condition for the category of separated affine sets to make a reflective subcategory of the category of affine sets, extending the result that the category of T_0 topological spaces makes a reflective subcategory of the category of topological spaces.

All the category-theoretic notions of this paper (e.g., the concept of topological category) come from [1, 8].

2. Spatialization procedure for affine systems

This section introduces the notion of affine system and its respective spatialization procedure, motivated by the above-mentioned spatialization procedure for topological systems of S. Vickers.

2.1 Algebraic preliminaries

In this subsection, we briefly recall the algebraic notions, which will be used throughout the paper.

Definition 2.1. *Let $\Omega = (n_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ be a family of cardinal numbers, which is indexed by a (possibly, proper or empty) class Λ. An* Ω-algebra *is a pair $(A, (\omega_\lambda^A)_{\lambda \in \Lambda})$, which comprises a set A and a family of maps $A^{n_\lambda} \xrightarrow{\omega_\lambda^A} A$ (n_λ*-ary primitive operations *on A). An* Ω-homomorphism $(A, (\omega_\lambda^A)_{\lambda \in \Lambda}) \xrightarrow{\varphi} (B, (\omega_\lambda^B)_{\lambda \in \Lambda})$ *is a map $A \xrightarrow{\varphi} B$, which makes the diagram*

$$\begin{tikzcd} A^{n_\lambda} \arrow[r, "\varphi^{n_\lambda}"] \arrow[d, "\omega_\lambda^A"'] & B^{n_\lambda} \arrow[d, "\omega_\lambda^B"] \\ A \arrow[r, "\varphi"'] & B \end{tikzcd}$$

commute for every $\lambda \in \Lambda$. $\mathbf{Alg}(\Omega)$ *is the construct of Ω-algebras and Ω-homomorphisms.*

Definition 2.2. *Let $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{E}$) be the class of Ω-homomorphisms with injective (resp. surjective) underlying maps. A* variety of Ω-algebras *is a full subcategory of* $\mathbf{Alg}(\Omega)$*, which is closed under the formation of products, $\mathcal{M}$-subobjects (subalgebras), and $\mathcal{E}$-quotients (homomorphic images). The objects (resp. morphisms) of a variety are called* algebras *(resp.* homomorphisms*).*

We provide some examples of varieties, which are relevant to this paper.

Example 2.3.

1. $\mathbf{CSLat}(\bigvee)$ is the variety of $\bigvee$-*semilattices*, i.e., partially ordered sets, which have arbitrary suprema, and $\mathbf{CSLat}(\bigwedge)$ is the variety of $\bigwedge$-*semilattices*, i.e., partially ordered sets, which have arbitrary infima.

2. **Frm** is the variety of *frames*, i.e., $\bigvee$-semilattices A, with singled out finite meets, and which additionally satisfy the distributivity condition $a \wedge (\bigvee S) = \bigvee_{s \in S}(a \wedge s)$ for every $a \in A$ and every $S \subseteq A$ [14].

3. **CBAlg** is the variety of *complete Boolean algebras*, i.e., complete lattices A such that $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ for every a, b, $c \in A$, equipped with a unary operation $A \xrightarrow{(-)^*} A$ such that $a \vee a^* = \top_A$ and $a \wedge a^* = \bot_A$ for every $a \in A$, where $\top_A$ (resp. $\bot_A$) is the largest (resp. smallest) element of A.

4. **CSL** is the variety of *closure semilattices*, i.e., $\bigwedge$-semilattices, with the singled out bottom element.

2.2 Affine spaces

In this subsection, we provide an extension of the notion of affine set of Y. Diers [9, 10, 11].

Definition 2.4. *Given a functor* $\mathbf{X} \xrightarrow{T} \mathbf{B}^{op}$*, where* $\mathbf{B}$ *is a variety of algebras,* $\mathbf{Af\,Spc}(T)$ *is the concrete category over* $\mathbf{X}$*, whose objects (*T-affine spaces *or* T-spaces*) are pairs* (X, τ)*, where* X *is an* $\mathbf{X}$*-object and* τ *is a* $\mathbf{B}$*-subalgebra of* TX*; and whose morphisms (*T-affine morphisms *or* T-morphisms*)* $(X_1, \tau_1) \xrightarrow{f} (X_2, \tau_2)$ *are* $\mathbf{X}$*-morphisms* $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ *with the property that* $(Tf)^{op}(\alpha) \in \tau_1$ *for every* $\alpha \in \tau_2$*.*

The following easy result will give rise to our main examples of T-spaces and T-morphisms.

Proposition 2.5. *Given a variety* $\mathbf{B}$*, every subcategory* $\mathbf{S}$ *of* $\mathbf{B}^{op}$ *induces a functor* $\mathbf{Set} \times \mathbf{S} \xrightarrow{\mathcal{P}_{\mathbf{S}}} \mathbf{B}^{op}$*,* $\mathcal{P}_{\mathbf{S}}((X_1, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X_2, B_2)) = B_1^{X_1} \xrightarrow{\mathcal{P}_{\mathbf{S}}(f,\varphi)} B_2^{X_2}$*, where* $(\mathcal{P}_{\mathbf{S}}(f, \varphi))^{op}(\alpha) = \varphi^{op} \circ \alpha \circ f$*.*

The case $\mathbf{S} = \{B \xrightarrow{1_B} B\}$ provides a functor $\mathbf{Set} \xrightarrow{\mathcal{P}_B} \mathbf{B}^{op}$, $\mathcal{P}_B(X_1 \xrightarrow{f} X_2) = B^{X_1} \xrightarrow{\mathcal{P}_B f} B^{X_2}$, where $(\mathcal{P}_B f)^{op}(\alpha) = \alpha \circ f$. In particular, if $\mathbf{B} = \mathbf{CBAlg}$, and $\mathbf{S} = \{2 \xrightarrow{1_2} 2\}$, then one obtains the well-known contravariant powerset functor $\mathbf{Set} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{CBAlg}^{op}$, which is given on a map $X_1 \xrightarrow{f} X_2$ by $\mathcal{P}X_2 \xrightarrow{(\mathcal{P}f)^{op}} \mathcal{P}X_1$ with $(\mathcal{P}f)^{op}(S) = \{x \in X_1 \mid f(x) \in S\}$.

The following examples of the categories of the form $\mathbf{Af\,Spc}(T)$ will be relevant to this paper.

Example 2.6.

1. If $\mathbf{B} = \mathbf{Frm}$, then $\mathbf{Af\,Spc}(\mathcal{P}_2)$ is the category **Top** of topological spaces.
2. If $\mathbf{B} = \mathbf{CSL}$, then $\mathbf{Af\,Spc}(\mathcal{P}_2)$ is the category **Cls** of closure spaces [4].
3. $\mathbf{Af\,Spc}(\mathcal{P}_B)$ is the category $\mathbf{Af\,Set}(B)$ of affine sets of Y. Diers.
4. If $\mathbf{B} = \mathbf{Frm}$, then $\mathbf{Af\,Spc}(\mathcal{P}_\mathbf{S})$ is the category **S-Top** of variable-basis lattice-valued topological spaces of S. E. Rodabaugh [17].

Later on in this manuscript, we will use the following convenient property of the categories $\mathbf{Af\,Spc}(T)$.

Theorem 2.7. *Given a functor $\mathbf{X} \xrightarrow{T} \mathbf{B}^{op}$, the concrete category $(\mathbf{Af\,Spc}(T), |-|)$ is topological over $\mathbf{X}$.*

Proof. Given a $|-|$-structured source $\mathcal{S} = (X \xrightarrow{f_i} |(X_i, \tau_i)|)_{i \in I}$, the initial structure on X w.r.t. $\mathcal{S}$ is given by the subalgebra of TX, which is generated by the union $\bigcup_{i \in I} (Tf_i)^{op}(\tau_i)$. Given a $|-|$-structured sink $\mathcal{S} = (|(X_i, \tau_i)| \xrightarrow{f_i} X)_{i \in I}$, the final structure on X w.r.t. $\mathcal{S}$ is the intersection $\bigcap_{i \in I}((Tf_i)^{op})^{-1}(\tau_i)$. $\square$

As a consequence, one obtains the well-known result that all the categories of Example 2.6 are topological.

2.3 Affine systems

Following the ideas of [19], this subsection introduces the concept of affine system as an analogue of topological systems of S. Vickers [20].

Definition 2.8. *Given a functor $\mathbf{X} \xrightarrow{T} \mathbf{B}^{op}$, $\mathbf{Af\,Sys}(T)$ is the comma category $(T \downarrow 1_{\mathbf{B}^{op}})$, concrete over the product category $\mathbf{X} \times \mathbf{B}^{op}$, whose objects ($T$-*affine systems *or* T-systems*) are triples (X, κ, B), which are made by $\mathbf{B}^{op}$-morphisms $TX \xrightarrow{\kappa} B$; and whose morphisms ($T$-*affine morphisms *or* T-morphisms*) $(X_1, \kappa_1, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X_2, \kappa_2, B_2)$ are $\mathbf{X} \times \mathbf{B}^{op}$-morphisms*

$(X_1, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X_2, B_2)$, *which make the diagram*

$$\begin{tikzcd} TX_1 \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\kappa_1"'] & TX_2 \arrow[d, "\kappa_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\varphi"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

commute.

Example 2.9.

1. If $\mathbf{B} = \mathbf{Frm}$, then $\mathbf{Af\,Sys}(\mathcal{P}_2)$ is the category **TopSys** of topological systems of S. Vickers.
2. If $\mathbf{B} = \mathbf{Set}$, then $\mathbf{Af\,Sys}(\mathcal{P}_B)$ is the category $\mathbf{Chu}_B$ of Chu spaces over a set B of P.-H. Chu [6].

To provide another example of the categories of the form $\mathbf{Af\,Sys}(T)$, we need one additional notion.

Definition 2.10. *A T-system (X, κ, B) is called* separated *provided that $TX \xrightarrow{\kappa} B$ is an epimorphism in $\mathbf{B}^{op}$. $\mathbf{Af\,Sys}_s(T)$ is the full subcategory of $\mathbf{Af\,Sys}(T)$ of separated T-systems.*

We recall from, e.g., [5, pp. 393 – 394] that monomorphisms in every variety **B** are necessarily injective (given a monomorphism $B \xrightarrow{\varphi} B'$, the set $K = \{(b_1, b_2) \in B \times B \mid \varphi(b_1) = \varphi(b_2)\}$ is a subalgebra of $B \times B$ such that the respective projections $B \times B \overset{\pi_1}{\underset{\pi_2}{\rightrightarrows}} B$ satisfy $\varphi \circ \pi_1 = \varphi \circ \pi_2$, and therefore, $\pi_1 = \pi_2$).

Example 2.11. If $\mathbf{B} = \mathbf{CSL}$, then $\mathbf{Af\,Sys}_s(\mathcal{P}_2)$ is the category **SP** of state property systems of D. Aerts [4].

The nature of the category $\mathbf{Af\,Sys}(T)$ is quite different from the nature of the category $\mathbf{Af\,Spc}(T)$.

Theorem 2.12 ([1]). *A concrete category $(\mathbf{C}, |-|)$ over $\mathbf{Z}$ is essentially algebraic iff the following conditions are satisfied:*

1. $|-|$ *creates isomorphisms;*

2. $|-|$ *has a left adjoint;*

3. **C** *is (Epi, Mono-Source)-factorizable.*

The next result is a modification (in the formulation and, especially, in the proof) of [18, Theorem 44].

Theorem 2.13. *Suppose* **X** *is (Epi, Mono-Source)-factorizable, and* $\mathbf{X} \xrightarrow{T} \mathbf{B}^{op}$ *preserves epimorphisms. Then the concrete category* $(\mathbf{Af\,Sys}(T), |-|)$ *is essentially algebraic over the ground category* $\mathbf{X} \times \mathbf{B}^{op}$.

Proof.

Ad (1). Given an $\mathbf{X}\times\mathbf{B}^{op}$-isomorphism $(X_1, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} |(X_2, \kappa_2, B_2)|$, the unique structure on (X_1, B_1), making (f, φ) an isomorphism in $\mathbf{Af\,Sys}(T)$, can be defined by $\kappa_1 = \varphi^{-1} \circ \kappa_2 \circ Tf$.

Ad (2). Given some $\mathbf{X} \times \mathbf{B}^{op}$-object (X, B), the $\mathbf{X} \times \mathbf{B}^{op}$-morphism $(X, B) \xrightarrow{\eta=(1_X,\mu_B)} |(X, \mu_{TX}, TX + B)|$, where $TX \xrightarrow{\mu_{TX}} TX + B \xleftarrow{\mu_B} B$ is the coproduct of TX and B in $\mathbf{B}^{op}$, is the required $|-|$-universal arrow.

Ad (3). Let $\mathcal{S} = ((X, \kappa, B) \xrightarrow{(f_i,\varphi_i)} (X_i, \kappa_i, B_i))_{i\in I}$ be a source in $\mathbf{Af\,Sys}(T)$. By the assumption, there exists an (Epi, Mono-Source)-factorization $X \xrightarrow{f_i} X_i = X \xrightarrow{e} Y \xrightarrow{m_i} X_i$. Since **B** is a variety, it is strongly complete, and therefore, by [1, Corollary 15.17], **B** is an (ExtrEpi-Sink, Mono)-category. Then $\mathbf{B}^{op}$ is an (Epi, ExtrMono-Source)-category, and thus, there exists an (Epi, ExtrMono-Source)-factorization $B \xrightarrow{\varphi_i} B_i = B \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{\psi_i} B_i$, and a unique $\mathbf{B}^{op}$-morphism $TY \xrightarrow{\iota} C$ such that the next diagram commutes

$$\begin{tikzcd}
TX \arrow[rr, "Tf_i"] \arrow[dr, "Te"'] \arrow[ddd, bend right, "\kappa"'] & & TX_i \arrow[ddd, bend left, "\kappa_i"] \\
& TY \arrow[ur, "Tm_i"'] \arrow[d, dotted, "\iota"] & \\
& C \arrow[dr, "\psi_i"] & \\
B \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "\varphi_i"'] & & B_i.
\end{tikzcd}$$

Thus, $(X,\kappa,B) \xrightarrow{(f_i,\varphi_i)} (X_i,\kappa_i,B_i) = (X,\kappa,B) \xrightarrow{(e,\psi)} (Y,\iota,C) \xrightarrow{(m_i,\psi_i)} (X_i,\kappa_i,B_i)$ is an (Epi, Mono-Source)-factorization of $\mathcal{S}$. $\square$

One gets that the categories of Example 2.9 are essentially algebraic. We also recall from [1] that essentially algebraic categories have convenient properties, e.g., their respective underlying functors detect colimits, and preserve and create limits. Additionally, it is easy to see that items (1), (3) of the proof of Theorem 2.13 hold in case of the category $\mathbf{Af\,Sys}_s(T)$ as well, but not item (2), for which one can show the following.

Proposition 2.14. *The forgetful functor* $\mathbf{Af\,Sys}_s(T) \xrightarrow{|-|} \mathbf{X} \times \mathbf{B}^{op}$ *does not have in general a left adjoint.*

Proof. An easy counterexample provides the case of the functor $\mathbf{Set} \xrightarrow{\mathcal{P}_2} \mathbf{Set}^{op}$. More precisely, if the underlying functor $\mathbf{Af\,Sys}_s(\mathcal{P}_2) \xrightarrow{|-|} \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}^{op}$ has a left adjoint, then there exists a $|-|$-universal arrow $(\varnothing,2) \xrightarrow{(f,\varphi)} |(X,\kappa,B)|$. In particular, one has the following commutative triangle

$$\begin{tikzcd}
(\varnothing,2) \arrow[r, "(f,\varphi)"] \arrow[dr, "(!,\psi)"'] & |(X,\kappa,B)| \arrow[d, dotted, "(\hat{!},\hat{\psi})"] \\
& |(\varnothing,!,1)|,
\end{tikzcd}$$

in which ! denotes the unique map, and ψ^{op} is any of the possible two maps. Since $X \xrightarrow{\hat{!}} \varnothing$ is a map, $X = \varnothing$, and thus, since κ^{op} is a monomorphism, $B \cong 1$, i.e., one can assume that $\hat{\psi}^{op}$ is the identity map. Commutativity of the above triangle gives then $\varphi = \psi$, i.e., $\mathbf{Set}(1,2) = \{\varphi^{op}\}$, which is a contradiction. $\square$

We recall now the concept of algebraic category of [1, Definition 23.19].

Definition 2.15. *An essentially algebraic concrete category* $(\mathbf{C}, |-|)$ *over* $\mathbf{Z}$ *is called* algebraic *provided that* $|-|$ *preserves extremal epimorphisms.*

The next result is a modification (both in the formulation and in the proof) of [18, Corollary 48].

Theorem 2.16. *Suppose that* $\mathbf{X}$ *is (Epi, Mono-Source)-factorizable,* $\mathbf{X} \xrightarrow{T} \mathbf{B}^{op}$ *preserves epimorphisms, and, moreover, the following three equivalent conditions hold:*

1. $\mathbf{B}$ *has the (Epi, Mono)-diagonalization property;*
2. $ExtrEpi(\mathbf{B}) = Epi(\mathbf{B})$*;*
3. *epimorphisms in* $\mathbf{B}$ *are surjective.*

Then the concrete category $(\mathbf{Af\,Sys}(T), |-|)$ *is algebraic over the ground category* $\mathbf{X} \times \mathbf{B}^{op}$.

Proof. Equivalence of items (1), (2), (3) of the theorem is a consequence of the facts that, first, $\mathbf{B}$ is an (ExtrEpi-Sink, Mono)-category (cf. the proof of Theorem 2.13), and, second, monomorphisms in $\mathbf{B}$ are necessarily injective. Given now an extremal epimorphism $(X_1, \kappa_1, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X_2, \kappa_2, B_2)$ in $\mathbf{Af\,Sys}(T)$, we show that f and φ are extremal epimorphisms in their respective categories.

The assumptions of the theorem provide the (Epi, Mono)-factorization $(X_1, \kappa_1, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X_2, \kappa_2, B_2) = (X_1, \kappa_1, B_1) \xrightarrow{(e,\psi)} (X, \kappa, B) \xrightarrow{(m,\xi)} (X_2, \kappa_2, B_2)$ constructed in the proof of Theorem 2.13. Then (m, ξ) is an isomorphism, and therefore, (f, φ) is "essentially" the morphism (e, ψ), which is an epimorphism in $\mathbf{X} \times \mathbf{B}^{op}$.

To show that f is extremal in $\mathbf{X}$, let $X_1 \xrightarrow{f} X_2 = X_1 \xrightarrow{g} X \xrightarrow{m} X_2$ be a (–, Mono)-factorization. The commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
TX_1 \arrow[rr, "Tf"] \arrow[dr, "Tg"'] \arrow[ddd, bend right, "\kappa_1"'] & & TX_2 \arrow[ddd, bend left, "\kappa_2"] \\
& TX \arrow[ur, "Tm"'] \arrow[d, dotted, "\kappa := \kappa_2 \circ Tm"] & \\
& B_2 \arrow[dr, "1_{B_2}"] & \\
B_1 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & B_2
\end{tikzcd}$$

gives the (–, Mono)-factorization $(X_1, \kappa_1, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X_2, \kappa_2, B_2) = (X_1, \kappa_1, B_1) \xrightarrow{(g,\varphi)} (X, \kappa, B_2) \xrightarrow{(m,1_{B_2})} (X_2, \kappa_2, B_2)$ in **Af Sys**(T). It follows that $(m, 1_{A_2})$ is an isomorphism, and therefore, m must be as well.

To show that φ is extremal in $\mathbf{B}^{op}$, let $B_1 \xrightarrow{\varphi} B_2 = B_1 \xrightarrow{\xi} B \xrightarrow{\psi} B_2$ be a (–, Mono)-factorization. By assumption (1), there exists a $\mathbf{B}^{op}$-morphism $TX_2 \xrightarrow{\kappa} B$, which makes the following diagram commute

$$\begin{tikzcd}
TX_1 \arrow[rr, "Tf"] \arrow[dr, "Tf"'] \arrow[ddd, bend right, "\kappa_1"'] & & TX_2 \arrow[ddd, bend left, "\kappa_2"] \\
& TX_2 \arrow[ur, "T1_{X_2}"'] \arrow[d, dotted, "\kappa"] & \\
& B \arrow[dr, "\psi"] & \\
B_1 \arrow[ur, "\xi"] \arrow[rr, "\varphi"'] & & B_2
\end{tikzcd}$$

and therefore providing the (–, Mono)-factorization $(X_1, \kappa_1, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X_2, \kappa_2, B_2) = (X_1, \kappa_1, B_1) \xrightarrow{(f,\xi)} (X_2, A, \kappa) \xrightarrow{(1_{X_2},\psi)} (X_2, \kappa_2, B_2)$ in **Af Sys**(T). Then $(1_{X_2}, \psi)$ is an isomorphism, and thus, ψ is as well. □

We notice that while **Frm** does have non-surjective epimorphisms [15, Proposition 2.4.1], **CSL** does not [18, Lemma 49].

2.4 Affine spatialization procedure

Following the results of [19], this subsection shows an affine analogue of the topological system spatialization procedure of S. Vickers.

Theorem 2.17. *$\mathbf{Af\,Spc}(T) \overset{E}{\hookrightarrow} \mathbf{Af\,Sys}(T)$, $E((X_1, \tau_1) \xrightarrow{f} (X_2, \tau_2)) = (X_1, e^{op}_{\tau_1}, \tau_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X_2, e^{op}_{\tau_2}, \tau_2)$ is a full embedding, where e_{τ_i} is the inclusion $\tau_i \hookrightarrow TX_i$, and φ^{op} is the restriction $\tau_2 \xrightarrow{(Tf)^{op}|^{\tau_1}_{\tau_2}} \tau_1$. E has a right-adjoint-left-inverse $\mathbf{Af\,Sys}(T) \xrightarrow{Spat} \mathbf{Af\,Spc}(T)$, $Spat((X_1, \kappa_1, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)}$*

$(X_2, \kappa_2, B_2)) = (X_1, \kappa_1^{op}(B_1)) \xrightarrow{f} (X_2, \kappa_2^{op}(B_2))$. $\mathbf{Af\,Spc}(T)$ *is isomorphic to a full (regular mono)-coreflective subcategory of* $\mathbf{Af\,Sys}(T)$.

Proof. To show that $Spat$ is a right adjoint to E, it is enough to verify that every system (X, κ, B) has an E-co-universal arrow, i.e., a T-morphism $ESpat(X, \kappa, B) \xrightarrow{\varepsilon} (X, \kappa, B)$ with the property that for every T-morphism $E(X', \tau') \xrightarrow{(f,\varphi)} (X, \kappa, B)$, there exists a unique T-morphism $(X', \tau') \xrightarrow{g} Spat(X, \kappa, B)$ with $\varepsilon \circ Eg = (f, \varphi)$.

Take a T-morphism $(ESpat(X, \kappa, B) = (X, e^{op}_{\kappa^{op}(B)}, \kappa^{op}(B))) \xrightarrow{\varepsilon=(1_X,\kappa)} (X, \kappa, B)$. Given a T-morphism $E(X', \tau') \xrightarrow{(f,\varphi)} (X, \kappa, B)$, it follows that $(Tf)^{op} \circ \kappa^{op} = e_{\tau'} \circ \varphi^{op}$, which yields the desired T-morphism $(X', \tau') \xrightarrow{f} (Spat(X, \kappa, B) = (X, \kappa^{op}(B)))$, whose uniqueness is clear.

For the last claim, it is enough to show that given a T-system (X, κ, B), the map $B \xrightarrow{\kappa^{op}} \kappa^{op}(B)$ is a regular epimorphism in **B**. Let $C = \{(b_1, b_2) \in B \times B \mid \kappa^{op}(b_1) = \kappa^{op}(b_2)\}$ (the *kernel* of κ^{op}), and let $C \xrightarrow{\pi_i} B$ be given by $\pi_i(b_1, b_2) = b_i$ for $i \in \{1, 2\}$. $(\kappa^{op}, \kappa^{op}(B))$ is a coequalizer of (π_1, π_2). $\square$

The analogue of Theorem 2.17 for the category $\mathbf{Af\,Sys}_s(T)$ is even better.

Theorem 2.18. *E and $Spat$ restrict to* $\mathbf{Af\,Spc}(T) \xhookrightarrow{\overline{E}} \mathbf{Af\,Sys}_s(T)$ *and* $\mathbf{Af\,Sys}_s(T) \xrightarrow{\overline{Spat}} \mathbf{Af\,Spc}(T)$*, respectively, providing an equivalence between the categories* $\mathbf{Af\,Spc}(T)$ *and* $\mathbf{Af\,Sys}_s(T)$ *with* $\overline{Spat}\,\overline{E} = 1_{\mathbf{Af\,Spc}(T)}$.

Proof. By Theorem 2.17, $\overline{Spat}$ is a right-adjoint-left-inverse to $\overline{E}$. To prove the theorem, it is enough to show that for every separated T-system (X, κ, B), the E-co-universal arrow $ESpat(X, \kappa, B) \xrightarrow{\varepsilon=(1_X,\kappa)} (X, \kappa, B)$ from the proof of Theorem 2.17 is an isomorphism. The claim follows from the definition of ε, since $B \xrightarrow{\kappa^{op}} \kappa^{op}(B)$ is always surjective, and it is injective by the property of separated T-systems. $\square$

Corollary 2.19. *The category* $\mathbf{Af\,Spc}(T)$ *is the amnestic modification of the category* $\mathbf{Af\,Sys}_s(T)$.

Proof. Follows from Theorem 2.18 and the definition of the amnestic modification of [1, Remark 5.34]. $\square$

The following well-known results are consequences of Theorems 2.17 and 2.18, respectively.

Remark 2.20.

1. **Top** is isomorphic to a full (regular mono)-coreflective subcategory of the category **TopSys**, which provides the system spatialization procedure of S. Vickers.

2. The categories **Cls** and **SP** are equivalent [3, 4].

Moreover, from Corollary 2.19, one gets [4, Theorem 4], which states that the category **Cls** is the amnestic modification of the category **SP**.

Remark 2.21. In [4, Proposition 8], D. Aerts *et al.* showed a construction of limits in the category **SP**. Theorem 2.18 allows for an easy generalization of this result to the category $\mathbf{Af\,Sys}_s(T)$ (employing the standard technique of limits in topological categories). Let $\mathbf{I}$ be a small category such that $\mathbf{X}$ is $\mathbf{I}$-complete. Let $\mathbf{I} \xrightarrow{D} \mathbf{Af\,Sys}_s(T)$ be a functor, and let $Di = (X_i, \kappa_i, B_i)$ for every $i \in Ob(\mathbf{I})$. If $\mathcal{L} = (L \xrightarrow{l_i} X_i)_{i \in Ob(\mathbf{I})}$ is a limit of $| - |\overline{Spat}D$ in $\mathbf{X}$, then $\hat{\mathcal{L}} = ((L, \tau) \xrightarrow{l_i} (X_i, \tau_i))_{i \in Ob(\mathbf{I})}$ is a limit of $\overline{Spat}D$ in $\mathbf{Af\,Spc}(T)$, where $\tau_i = \kappa_i^{op}(B_i)$, and τ is the subalgebra of TL generated by the union $\bigcup_{i \in I} (Tl_i)^{op}(\tau_i)$. The limit of D in $\mathbf{Af\,Sys}_s(T)$ is given then by $\check{\mathcal{L}} = ((L, e_\tau^{op}, \tau) \xrightarrow{(l_i, \varphi_i)} (X_i, \kappa_i, B_i))_{i \in Ob(\mathbf{I})}$ in which $\varphi_i^{op}(b) = (\kappa_i \circ Tl_i)^{op}(b)$.

3. Localification procedure for affine systems

This section provides a localification procedure for affine systems, motivated by the above-mentioned localification procedure for topological systems of S. Vickers.

Proposition 3.1. $\mathbf{Af\,Sys}(T) \xrightarrow{Loc} \mathbf{B}^{op}$, *$Loc((X_1, \kappa_1, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X_2, \kappa_2, B_2)) = B_1 \xrightarrow{\varphi} B_2$ is a functor.*

Unlike the affine spatialization procedure, in which the functor in the opposite direction always exists, localification procedure is more demanding.

Theorem 3.2. *Given a functor* $\mathbf{X} \xrightarrow{T} \mathbf{B}^{op}$, *the following are equivalent.*

1. *There exists an adjoint situation* $(\eta, \varepsilon) : T \dashv Pt : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{X}$.

2. *There exists a full embedding* $\mathbf{B}^{op} \xhookrightarrow{E} \mathbf{Af\,Sys}(T)$ *such that* Loc *is a left-adjoint-left-inverse to* E. $\mathbf{B}^{op}$ *is then isomorphic to a full reflective subcategory of* $\mathbf{Af\,Sys}(T)$.

Proof.

Ad (1) $\Rightarrow$ (2). Define a functor $\mathbf{B}^{op} \xrightarrow{E} \mathbf{Af\,Sys}(T)$ by $E(B_1 \xrightarrow{\varphi} B_2) = (PtB_1, \varepsilon_{B_1}, B_1) \xrightarrow{(Pt\varphi,\varphi)} (PtB_2, \varepsilon_{B_2}, B_2)$. Correctness of E on morphisms follows from commutativity of the diagram

$$\begin{tikzcd} TPtB_1 \arrow[r, "TPt\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon_{B_1}"'] & TPtB_2 \arrow[d, "\varepsilon_{B_2}"] \\ B_1 \arrow[r, "\varphi"'] & B_2. \end{tikzcd}$$

Moreover, E is clearly an embedding. To verify that E is full, we notice that given a T-morphism $(PtB_1, \varepsilon_{B_1}, B_1) \xrightarrow{(f,\varphi)} (PtB_2, \varepsilon_{B_2}, B_2)$, commutativity of the diagram

$$\begin{tikzcd} TPtB_1 \arrow[r, "\varepsilon_{B_1}"] \arrow[d, shift right, "TPt\varphi"'] \arrow[d, shift left, "T\varphi"] & B_2 \arrow[d, "\varphi"] \\ TPtB_2 \arrow[r, "\varepsilon_{B_2}"'] & B_2 \end{tikzcd}$$

implies that $\varepsilon_{B_2} \circ TPt\varphi = \varepsilon_{B_2} \circ Tf$, and thus, $Pt\varphi = f$. Given a T-system (X, κ, B), straightforward calculations show that $(X, \kappa, B) \xrightarrow{(f:=Pt\kappa\circ\eta_X, 1_B)} ((PtB, \varepsilon_B, B) = ELoc(X, \kappa, B))$ is an E-universal arrow for (X, κ, B). It is also easy to see that $LocE = 1_{\mathbf{B}^{op}}$.

Ad (2) $\Rightarrow$ (1). Given an adjunction $Loc \dashv E : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Af\,Sys}(T)$, $\mathbf{X} \xrightarrow{T} \mathbf{B}^{op}$ is the composition of the left adjoint functors $\mathbf{X} \to \mathbf{Af\,Spc}(T)$ (the *indiscrete functor* of, e.g., [1, Proposition 21.12 (2)], which exists by Theorem 2.7), $\mathbf{Af\,Spc}(T) \xhookrightarrow{E} \mathbf{Af\,Sys}(T)$ (the embedding of Theorem 2.17), and $\mathbf{Af\,Sys}(T) \xrightarrow{Loc} \mathbf{B}^{op}$. $\square$

The following well-known remark provides an example of the functor Pt of Theorem 3.2 (1).

Remark 3.3. Every functor **Set** $\xrightarrow{\mathcal{P}_B}$ $\mathbf{B}^{op}$ has a right adjoint $\mathbf{B}^{op} \xrightarrow{Pt_B}$ **Set**, $Pt_B(B_1 \xrightarrow{\varphi} B_2) = \mathbf{B}(B_1, B) \xrightarrow{Pt_B\varphi} \mathbf{B}(B_2, B)$, where $(Pt_B\varphi)(p) = p \circ \varphi^{op}$. Given a **B**-algebra A, the map $A \xrightarrow{\varepsilon^{op}} (\mathcal{P}_B Pt_B A = B^{\mathbf{B}(A,B)})$, defined by $(\varepsilon^{op}(a))(p) = p(a)$, provides a $\mathcal{P}_B$-co-universal arrow for A.

As a consequence of Theorem 3.2 and Remark 3.3, one gets the following well-known results.

Remark 3.4.

1. **Loc** (the dual of **Frm**) is isomorphic to a full reflective subcategory of **TopSys**, which gives the system localification procedure of S. Vickers.
2. $\mathbf{B}^{op}$ is isomorphic to a full reflective subcategory of **Af Sys**$(\mathcal{P}_B)$.

The case of the category **TopSys** shows that in Theorem 3.2 (2), the category $\mathbf{B}^{op}$, however being a reflective subcategory of **Af Sys**(T), can be neither epi- nor mono-reflective.

In [17], S. E. Rodabaugh considered functors of the form **Set**$\times$**S** $\xrightarrow{\mathcal{P}_\mathbf{S}}$ **Loc** and their respective categories of affine spaces, using, however, a different terminology (recall Example 2.6 (4)). The next result shows that Remark 3.3 (in general) can not be extended from the subcategory $\{B \xrightarrow{1_B} B\}$ to the whole $\mathbf{B}^{op}$.

Proposition 3.5. *Consider a functor* **Set** $\times$ $\mathbf{B}^{op} \xrightarrow{T:=\mathcal{P}_{\mathbf{B}^{op}}} \mathbf{B}^{op}$*, and suppose that there exists a* **B***-algebra B, whose underlying set is finite with at least two elements, e.g., has the cardinality n, $n \geqslant 2$. Then T has no right adjoint.*

Proof. If T has a right adjoint, then T preserves coproducts. Given a singleton set 1, $T((1, B) \coprod (1, B)) = T((1 \biguplus 1, B \times B)) = (B \times B)^{(1 \uplus 1)}$ and $T(1, B) \times T(1, B) = B^1 \times B^1$. Since $T((1, B) \coprod (1, B)) \cong T(1, B) \times T(1, B)$, $n^4 = Card((B \times B)^{(1 \uplus 1)}) = Card(B^1 \times B^1) = n^2$, which is a contradiction. $\square$

For instance, Proposition 3.5 implies that the functor $\mathbf{Set}\times\mathbf{Loc} \xrightarrow{\mathcal{P}_{\mathbf{Loc}}} \mathbf{Loc}$ has no right adjoint, i.e., Theorem 3.2 (2) is not applicable to the category **Loc**-**Top** of Example 2.6 (4).

To conclude the section, we provide a result, which is a direct consequence of Theorems 2.13, 3.2.

Proposition 3.6. *Suppose that the category* $\mathbf{X}$ *is (Epi, Mono-Source)-factorizable. If there exists a full embedding* $\mathbf{B}^{op} \overset{E}{\hookrightarrow} \mathbf{Af\,Sys}(T)$ *such that Loc is a left-adjoint-left-inverse to E, then the concrete category* $(\mathbf{Af\,Sys}(T), |-|)$ *is essentially algebraic over the ground category* $\mathbf{X} \times \mathbf{B}^{op}$.

In one word, the existence of a "proper" localification procedure for the category $\mathbf{Af\,Sys}(T)$ implies that $\mathbf{Af\,Sys}(T)$ is essentially algebraic.

4. Affine sobriety-spatiality equivalence

With the above-mentioned affine spatialization and localification procedures in hand, in this section, we provide an affine analogue of the well-known equivalence between the categories of sober topological spaces and spatial locales [14], which has already been considered by Y. Diers in the case of the category $\mathbf{Af\,Set}(A)$.

4.1 Affine sobriety and spatiality

Suppose $\mathbf{X} \xrightarrow{T} \mathbf{B}^{op}$ is a functor, which has a right adjoint. One has then the two adjoint situations $\mathbf{Af\,Spc}(T) \underset{Spat}{\overset{E_S}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathbf{Af\,Sys}(T) \underset{E_L}{\overset{Loc}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathbf{B}^{op}$, which provide the adjoint situation $\mathbf{Af\,Spc}(T) \underset{PT:=SpatE_L}{\overset{O:=LocE_S}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathbf{B}^{op}$, or, more precisely, $(\hat{\eta}, \hat{\varepsilon}) : O \dashv PT : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Af\,Spc}(T)$, in which $(OPTB = O(PtB, \varepsilon_B^{op}(B)) = \varepsilon_B^{op}(B)) \xrightarrow{\hat{\varepsilon}_B} B$ with $\hat{\varepsilon}_B^{op}(b) = \varepsilon_B^{op}(b)$, for every $\mathbf{B}$-algebra B, and $(X,\tau) \xrightarrow{\hat{\eta}_{(X,\tau)}} (PTO(X,\tau) = PT\tau = (Pt\tau, \varepsilon_\tau^{op}(\tau)))$ with $X \xrightarrow{\hat{\eta}_{(X,\tau)}} Pt\tau = X \xrightarrow{\eta_X} PtTX \to Pte_\tau^{op}Pt\tau$ for the embedding $\tau \overset{e_\tau}{\hookrightarrow} TX$, for every T-space (X,τ).

Definition 4.1. **Sob** *is the full subcategory of* $\mathbf{Af\,Spc}(T)$*, which contains* T*-spaces* (X,τ) *with the property that* $(X,\tau) \xrightarrow{\hat{\eta}_{(X,\tau)}} PTO(X,\tau)$ *is an isomorphism (called* sober T-spaces*).*

Definition 4.2. **Spat** *is the full subcategory of* $\mathbf{B}^{op}$ *defined by those objects* B *for which* $OPTB \xrightarrow{\hat{\varepsilon}_B} B$ *is an isomorphism (called* spatial algebras*).*

The standard technique of getting an equivalence from an adjunction (see [12, 16]) gives the following.

Proposition 4.3. *The adjunction* $\mathbf{Af\,Spc}(T) \underset{PT}{\overset{O}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathbf{B}^{op}$ *restricts to an equivalence* $\mathbf{Sob} \underset{\overline{PT}}{\overset{\overline{O}}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathbf{Spat}$.

As a consequence of Proposition 4.3, one obtains the following well-known results.

Remark 4.4.

1. There exists the adjoint situation $O \dashv PT : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}$ and its respective equivalence between the categories **Spat** of spatial locales and **Sob** of sober topological spaces.

2. There exists the adjoint situation $O \dashv PT : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Af\,Set}(B)$ and its respective equivalence $\mathbf{Spat} \sim \mathbf{Sob}$ ("affine algebraic duality" of Y. Diers [10]).

4.2 Separated affine spaces

This subsection provides an affine analogue of the well-known result that the category of T_0 topological spaces [13] is a reflective subcategory of the category of topological spaces, which has already been extended to the category of affine sets of Y. Diers.

Definition 4.5. *A* T*-space* (X,τ) *is said to be* separated *provided that* $(X,\tau) \xrightarrow{\hat{\eta}_{(X,\tau)}} PTO(X,\tau)$ *is a monomorphism.* $\mathbf{Af\,Spc}_s(T)$ *is the full subcategory of* $\mathbf{Af\,Spc}(T)$ *of separated* T*-spaces.*

To continue, we need a simple result, which follows from the more general technique of, e.g., [12, 16].

Proposition 4.6. *Given a T-space (X,τ), the T-space $PTO(X,\tau)$ is sober, and therefore, separated.*

Theorem 4.7. *Let $\mathbf{X} \xrightarrow{T} \mathbf{B}^{op}$ be a functor. If $\mathbf{X}$ has a proper $(\mathcal{E}$, Mono)-factorization system (in the sense of [8]), where Mono is the class of $\mathbf{X}$-monomorphisms, then $\mathbf{Af\,Spc}_s(T)$ is an epireflective subcategory of $\mathbf{Af\,Spc}(T)$.*

Proof. Since the category $\mathbf{Af\,Spc}(T)$ is topological (recall Theorem 2.7), the proper $(\mathcal{E}$, Mono)-factorization system on $\mathbf{X}$ lifts to a proper $(\mathcal{E}_{fin}$, Mono)-factorization system on $\mathbf{Af\,Spc}(T)$, where $\mathcal{E}_{fin}$ consists of all final $\mathcal{E}$-morphisms [1, Proposition 21.14 (2)]. Given a T-space (X,τ), consider an $(\mathcal{E}_{fin}$, Mono)-factorization $(X,\tau) \xrightarrow{\hat{\eta}_{(X,\tau)}} PTO(X,\tau) = (X,\tau) \xrightarrow{e} (\overline{X},\overline{\tau}) \xrightarrow{m} PTO(X,\tau)$. The T-space $(\overline{X},\overline{\tau})$ is then separated, since it is a subobject of the separated T-space $PTO(X,\tau)$ (recall Proposition 4.6).

To show that $(X,\tau) \xrightarrow{e} (\overline{X},\overline{\tau})$ is an $\mathbf{Af\,Spc}_s(T)$-reflection arrow for (X,τ), take a T-morphism $(X,\tau) \xrightarrow{f} (X',\tau')$ with codomain in $\mathbf{Af\,Spc}_s(T)$. One has then the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend right, "\hat{\eta}_{(X,\tau)}"'] & (\overline{X},\overline{\tau}) \arrow[r, "m"] & PTO(X,\tau) \arrow[d, "PTOf"] \\
(X',\tau') \arrow[rr, "\hat{\eta}_{(X',\tau')}"'] & & PTO(X',\tau'),
\end{tikzcd}$$

where $\hat{\eta}_{(X',\tau')}$ is a monomorphism. Since the category $\mathbf{Af\,Spc}(T)$ has a proper $(\mathcal{E}_{fin}$, Mono)-factorization system, there is a T-morphism $(\overline{X},\overline{\tau}) \xrightarrow{d} (X',\tau')$, making the following diagram commute

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & (\overline{X},\overline{\tau}) \arrow[d, "PTOf\circ m"] \arrow[dl, dotted, "d"'] \\
(X',\tau') \arrow[r, "\hat{\eta}_{(X',\tau')}"'] & PTO(X',\tau').
\end{tikzcd}$$

$\square$

Corollary 4.8. *Let* $\mathbf{X} \xrightarrow{T} \mathbf{B}^{op}$ *be a functor. If* $\mathbf{X}$ *has a proper* ($\mathcal{E}$, *Mono*)*-factorization system, then* $\mathbf{Af\,Spc}_s(T)$ *is isomorphic to a reflective subcategory of the category* $\mathbf{Af\,Sys}_s(T)$.

Proof. Follows from Theorems 2.18, 4.7. □

The following provides a well-known example of separated T-spaces.

Example 4.9. If $\mathbf{B} = \mathbf{Frm}$, then $\mathbf{Af\,Spc}_s(\mathcal{P}_2)$ is the category $\mathbf{Top}_0$ of T_0 topological spaces.

As a consequence of Theorem 4.7, one gets the following.

Remark 4.10. Since the category **Set** has a proper (Epi, Mono)-factorization system, Theorem 4.7 is applicable to every functor $\mathbf{Set} \xrightarrow{\mathcal{P}_B} \mathbf{B}^{op}$. In particular, one gets the following well-known results.

1. $\mathbf{Top}_0$ is a reflective subcategory of **Top**.
2. The category $\mathbf{Cls}_0$ of T_0 closure spaces [3] is a reflective subcategory of **Cls**.
3. $\mathbf{Af\,Set}_s(B)$ is a reflective subcategory of $\mathbf{Af\,Set}(B)$.

Moreover, Corollary 4.8 implies now that the category of state-determined state property systems is a reflective subcategory of the category **SP** [3].

4.3 Spatial and localic affine systems

Having the embeddings of **Top** and **Loc** into **TopSys** in hand, S. Vickers restated the sobriety-spatiality equivalence in terms of topological systems. This subsection shows an affine analogue of this technique.

Let us have adjoint situations $\begin{tikzcd} \mathbf{B}^{op} \arrow[r, hook, shift right, "E_L"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Af\,Sys}(T) \arrow[l, shift right, "Loc"'] \arrow[r, shift right, "Spat"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Af\,Spc}(T) \arrow[l, hook', shift right, "E_S"'] \end{tikzcd}$.

Definition 4.11. *A* T*-system* (X, κ, B) *is called* spatial *(resp.* localic*) provided that there exists a* T*-space* (X, τ) *(resp. a* $\mathbf{B}$*-algebra* B*) such that* (X, κ, B) *is isomorphic to* $E_S(X, \tau)$ *(resp.* $E_L B$*).*

The following two results are straightforward.

Proposition 4.12. *Given a T-system (X, κ, B), the following are equivalent:*

1. (X, κ, B) *is localic;*
2. *the T-morphism $(X, \kappa, B) \xrightarrow{(Pt\kappa \circ \eta_X, 1_B)} (E_L Loc(X, \kappa, B) = (PtB, \varepsilon_B, B))$ is an isomorphism;*
3. *the* **X**-*morphism $X \xrightarrow{\eta_X} PtTX \xrightarrow{Pt\kappa} PtB$ is an isomorphism.*

Proposition 4.13. *Given a T-system (X, κ, B), the following are equivalent:*

1. (X, κ, B) *is spatial;*
2. *the T-morphism $(E_S Spat(X, \kappa, B) = (X, e^{op}_{\kappa^{op}(B)}, B)) \xrightarrow{(1_X, \kappa)} (X, \kappa, B)$ is an isomorphism;*
3. *the* **B**-*homomorphism $B \xrightarrow{\kappa^{op}} \kappa^{op}(B)$ is an isomorphism;*
4. *the* **B**-*homomorphism $B \xrightarrow{\kappa^{op}} TX$ is injective.*

Given a T-space (X, τ), $E_L Loc E_S(X, \tau) = E_L Loc(X, e^{op}_\tau, \tau) = E_L \tau = (Pt\tau, \varepsilon_\tau, \tau)$ is a localic T-system.

Proposition 4.14. *The T-system $(Pt\tau, \varepsilon_\tau, \tau)$ is spatial.*

Proof. Commutativity of the diagram

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "T\eta_X"] \arrow[dr, "1_{TX}"'] & TPtTX \arrow[r, "TPte^{op}_\tau"] \arrow[d, "\varepsilon_{TX}"] & TPt\tau \arrow[d, "\varepsilon_\tau"] \\ & TX \arrow[r, "e^{op}_\tau"'] & \tau \end{tikzcd}$$

gives $(T(Pte^{op}_\tau \circ \eta_X))^{op} \circ \varepsilon^{op}_\tau = e_\tau$, yielding injectivity of ε^{op}_τ. The result now follows from Proposition 4.13. □

Given a **B**-algebra B, $E_S Spat E_L B = E_S Spat(PtB, \varepsilon_B, B) = E_S(PtB, \varepsilon^{op}_B(B)) = (PtB, e^{op}_{\varepsilon^{op}_B(B)}, \varepsilon^{op}_B(B))$ is a spatial T-system.

Proposition 4.15. *The T-system $(PtB, e^{op}_{\varepsilon^{op}_B(B)}, \varepsilon^{op}_B(B))$ is localic.*

Proof. Take the factorization $B \xrightarrow{\varepsilon_B^{op}} TPtB = B \xrightarrow{\overline{\varepsilon_B^{op}}} \varepsilon_B^{op}(B) \overset{e_{\varepsilon_B^{op}(B)}}{\hookrightarrow} TPtB$. Since $\overline{\varepsilon_B^{op}}$ is an epimorphism in **B**, $\overline{\varepsilon_B^{op}}^{op}$ is a monomorphism in $\mathbf{B}^{op}$. Thus, on the one hand, $Pt\overline{\varepsilon_B^{op}}^{op} \circ Pte^{op}_{\varepsilon_B^{op}(B)} \circ \eta_{PtB} = Pt\varepsilon_B \circ \eta_{PtB} = 1_{PtB}$, and, on the other hand, $Pt\overline{\varepsilon_B^{op}}^{op} \circ Pte^{op}_{\varepsilon_B^{op}(B)} \circ \eta_{PtB} \circ Pt\overline{\varepsilon_B^{op}}^{op} = Pt\overline{\varepsilon_B^{op}}^{op} = Pt\overline{\varepsilon_B^{op}}^{op} \circ 1_{Pt\varepsilon_B^{op}(B)}$ implies $Pte^{op}_{\varepsilon_B^{op}(B)} \circ \eta_{PtB} \circ Pt\overline{\varepsilon_B^{op}}^{op} = 1_{Pt\varepsilon_B^{op}(B)}$, since Pt preserves monomorphisms (as a right adjoint). The desired result now follows from Proposition 4.12. $\square$

Definition 4.16. SpaLoc *is the full subcategory of* **Af Sys**(T) *of* T*-systems, which are spatial and localic.*

Theorem 4.17. $\mathbf{Spat} \underset{\overline{E_L}}{\overset{\overline{Loc}}{\rightleftarrows}} \mathbf{SpaLoc} \underset{\overline{Spat}}{\overset{\overline{E_S}}{\rightleftarrows}} \mathbf{Sob}$ *are equivalences.*

Proof. Consider the case of the categories **Spat** and **SpaLoc** (the other case is similar). By Proposition 4.14, the restriction $\mathbf{Spat} \overset{\overline{E_L}}{\hookrightarrow} \mathbf{SpaLoc}$ is a full embedding. Moreover, given a T-system (X, κ, B) in **SpaLoc**, $E_S(X', \tau') \cong (X, \kappa, B) \cong E_L B'$ for some T-space (X', τ') and some algebra B'. It follows then that $\tau' \cong B'$, and therefore, B' is in **Spat**. Thus, the restriction of $\overline{E_L}$ is dense, and therefore, it is an equivalence. $\square$

Theorem 4.17 is an internalization of the sobriety-spatiality equivalence into the category of affine systems.

5. Conclusion

Motivated by the fact that the category **TopSys** of topological systems of S. Vickers [20] includes the category **Loc** of locales (resp. **Top** of topological spaces) as a full (resp. co)reflective subcategory, this paper showed that the category **Af Sys**(T) of affine systems (motivated by affine sets of Y. Diers [9, 10, 11]) includes the category $\mathbf{B}^{op}$ of the underlying algebras of affine structures (resp. **Af Spc**(T) of affine spaces) as a full (resp. co)reflective subcategory. While the embedding of **Af Spc**(T) into **Af Sys**(T) is always possible, the embedding of $\mathbf{B}^{op}$ requires the existence of a right adjoint for the respective functor T. The obtained two embeddings allowed us to restate the equivalence between the categories of sober topological spaces and spatial locales [14] in the language of algebras and affine spaces, and, moreover, to internalize this equivalence into the category of affine systems.

Since the classical sobriety-spatiality equivalence provides a convenient framework for, e.g., the Stone representation theorems for Boolean algebras and distributive lattices [14], its affine generalization could provide a convenient setting for studying natural dualities in the sense of [7], which will be the topic of forthcoming papers.

Acknowledgements

This research was supported by the ESF Project No. CZ.1.07/2.3.00/20.0051 "Algebraic methods in Quantum Logic" of the Masaryk University in Brno, Czech Republic.

The author is much grateful to the anonymous referee of this paper for his numerous comments and remarks, and especially for his suggested easier formulation and proof of Theorem 4.7.

References

[1] J. Adámek, H. Herrlich, and G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*, Dover Publications (Mineola, New York), 2009.

[2] D. Aerts, *Foundations of quantum physics: a general realistic and operational approach*, Int. J. Theor. Phys. **38** (1999), no. 1, 289–358.

[3] D. Aerts, E. Colebunders, A. van der Voorde, and B. van Steirteghem, *State property systems and closure spaces: a study of categorical equivalence*, Int. J. Theor. Phys. **38** (1999), no. 1, 359–385.

[4] D. Aerts, E. Colebunders, A. van der Voorde, and B. van Steirteghem, *On the amnestic modification of the category of state property systems*, Appl. Categ. Struct. **10** (2002), no. 5, 469–480.

[5] B. Banaschewski and E. Nelson, *Tensor products and bimorphisms*, Canad. Math. Bull. **19** (1976), no. 4, 385–402.

[6] M. Barr, **-Autonomous Categories. With an appendix by Po-Hsiang Chu*, Springer-Verlag, 1979.

[7] D. M. Clark and B. A. Davey, *Natural Dualities for the Working Algebraist*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 57, Cambridge University Press, 1998.

[8] M. M. Clementino, E. Giuli, and W. Tholen, *A Functional Approach to General Topology*, Categorical Foundations, Encyclopedia Math. Appl., vol. 97, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 103–163.

[9] Y. Diers, *Categories of algebraic sets*, Appl. Categ. Struct. **4** (1996), no. 2-3, 329–341.

[10] Y. Diers, *Affine algebraic sets relative to an algebraic theory*, J. Geom. **65** (1999), no. 1-2, 54–76.

[11] Y. Diers, *Topological geometrical categories*, J. Pure Appl. Algebra **168** (2002), no. 2-3, 177–187.

[12] G. D. Dimov and W. Tholen, *A characterization of representable dualities*, Categorical Topology and its Relations to Analysis, Algebra and Combinatorics. Proc. Conf. Prague 1988 (J. Adamék and S. Mac Lane, eds.), World Scientific, 1989, pp. 336–357.

[13] R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, 1989.

[14] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982.

[15] D. Kruml and J. Paseka, *Algebraic and Categorical Aspects of Quantales*, Handbook of Algebra (M. Hazewinkel, ed.), vol. 5, Elsevier, 2008, pp. 323–362.

[16] H.-E. Porst and W. Tholen, *Concrete Dualities*, Category Theory at Work (H. Herrlich and H.-E. Porst, eds.), Research and Expositions in Mathematics, vol. 18, Heldermann Verlag, 1990, pp. 111–136.

[17] S. E. Rodabaugh, *Categorical Foundations of Variable-Basis Fuzzy Topology*, Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory (U. Höhle and S. E. Rodabaugh, eds.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999, pp. 273–388.

[18] S. Solovyov, *Categorical foundations of variety-based topology and topological systems*, Fuzzy Sets Syst. **192** (2012), 176–200.

[19] S. Solovyov, *Categorically-algebraic topology versus universal topology*, Fuzzy Sets Syst. **227** (2013), 25–45.

[20] S. Vickers, *Topology via Logic*, Cambridge University Press, 1989.

Sergey A. Solovyov
Institute of Mathematics
Faculty of Mechanical Engineering
Brno University of Technology
Technicka 2896/2
616 69 Brno (Czech Republic)
solovjovs@fme.vutbr.cz

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES
Vol. LVI-2 (2015)

ABSTRACT ANNIHILATION GRAPHS

by Elham MEHDI-NEZHAD

Résumé Nous proposons un nouveau contexte, beaucoup plus général, pour l'étude des graphes diviseurs de zéro/ annulateurs d'idéaux, où les sommets des graphes ne sont pas des éléments/idéaux dún anneau commutatif, mais éléments dún ensemble ordonné abstrait (qui imite le treillis des idéaux), muni d'une loi binaire (qui imite le produit d'idéaux). On considère aussi le niveau intermédiaire des congruences des structures algébriques qui admettent une "bonne" théorie des commutateurs.

Abstract. We propose a new, widely generalized context for the study of the zero-divisor/annihilating-ideal graphs, where the vertices of graphs are not elements/ideals of a commutative ring, but elements of an abstract ordered set (imitating the lattice of ideals), equipped with a binary operation (imitating products of ideals). The intermediate level of congruences of any algebraic structure admitting a 'good' theory of commutators is also considered.

introduction

Given a commutative ring R, one can form a graph whose vertices are (some) elements of R and edges are pairs (x, y) with $xy = 0$ in R. Or, one can replace elements with ideals of R and do the same, that is, define edges as pairs (A, B) with $AB = \{0\}$. The study of these so-called zero-divisor graphs and annihilating-ideal graphs were initiated by I. Beck [4] and M. Behboodi and Z. Rakeei [5] respectively, and then continued by various authors (see Section 2 for precise definitions and some references).

Key words and phrases. annihilation graph, annihilating-ideal graph, zero-divisor graph, diameter of a graph, girth of a graph, poset, lattice, commutator, congruence.

[1]Partially supported by Research Associateship at the Department of Mathematics and Applied Mathematics of the University of Cape Town.

2010 *Mathematics Subject Classification*: 05C25, 06F99, 18B10, 13A15.

Since the product of two ideals of a commutative ring is nothing but their commutator in the sense of universal algebra (see Section 3 for details), it is natural to:

• replace ideals of a commutative ring with congruences of any algebraic structure that admits a good notion of commutator; "good" might have different meanings (see e.g. R. Freese and R. McKenzie [7] for different notions of a commutator), and the properties we actually need to hold are listed in Section 3;

• replace the property $AB = \{0\}$ above with the property $[\alpha, \beta] = 0$, where α and β are congruences on a given algebraic structure, $[\alpha, \beta]$ their commutator, and 0 now denotes the equality relation (since it is the smallest congruence) on that given algebraic structure.

Although this replacement is itself a wide generalization, it immediately suggests a further wide generalization, where congruences on a given algebra are replaced with elements of an abstract lattice, or even just an ordered set, equipped with a binary operation. The condition that operation should be required to satisfy should then imitate the properties of commutators (as in our Section 3).

This two-step generalization in the study of *annihilation graphs* (we say "annihilation" instead of "annihilating-") is the author's PhD Thesis' theme, under supervision of Professor G. Janelidze, who suggested it. The results, to be considered as the first results of this project, are given in Section 5 of the present paper. Our proofs closely follow the ring case, suggesting that the purpose of the paper is first of all to provide a strong motivation for the whole project. The most surprising fact here is that the binary operation involved is not required to be associative, unlike the ring multiplication; this is important since the commutator operation is almost never associative, except the commutative ring case.

The paper is organized as follows: in Section 1 we recall standard definitions of graph theory that will be used below; Sections 2 and 3 are devoted to annihilating-ideal graphs and commutators respectively: we recall what we need and give some references; in Section 4 we introduce our new context of commutator posets, commutator lattices, and their annihilation graphs; as already mentioned, the main results are formulated and proved in Section 5 - in fact it is two results put together in Theorem 5.1.

Note also that, as suggested by the context considered in [1], we consider a 'relative version' of annihilation, where $ab = 0$ is replaced with $ab \leq c$ with a fixed c.

1. **Graphs**

By a graph we will mean a pair $G = (G_0, G_1)$, in which G_0 is a set and G_1 a binary irreflexive symmetric relation on G_0; the elements of G_0 and of G_1 will be called vertices and edges of G, respectively.

For a natural number n, a *path of length* n in a graph G is an $(n+1)$-tuple $(x_0, ..., x_n)$ of distinct vertices of G, such that (x_{i-1}, x_i) is an edge of G, for each $i \in \{1, ..., n\}$.

A path $(x_0, ..., x_n)$ is also called a *path from* x_0 *to* x_n.

The *distance* $d(x, y)$ between vertices x and y of a graph G is defined as follows:

- $d(x, y) = 0$, if $x = y$;
- $d(x, y) = n$, if n is the smallest non-zero natural number for which there exists a path of length n from x to y.
- $d(x, y) = \infty$, if $x \neq y$ and there is no path from x to y.

Accordingly, the distance between x and y is said to be *finite* if either $x = y$ or there exists a path from x to y, and *infinite* otherwise.

A graph G is said to be *connected*, if, for every two distinct vertices x and y of G, there exists a path from x to y, or, equivalently, the distance $d(x, y)$ is finite. Note that, according to this definition, the empty graph is connected in contradiction with the categorical (and topological) notion of connectedness.

The *diameter* $\mathrm{diam}(G)$ of a graph G is defined as the largest distance between its vertices.

For a natural $n \geq 3$, a *cycle of length* n in a graph G is an $(n+1)$-tuple $(x_0, ..., x_n)$ of vertices of G that are distinct except $x_0 = x_n$, and such that (x_{i-1}, x_i) is an edge of G, for each $i \in \{1, ..., n\}$.

The *girth* $\mathrm{gr}(G)$ of a graph G is defined as follows:

• if G has a cycle, then $\mathrm{gr}(G)$ is the smallest number n such that G has a cycle of length n.
• if G has no cycle, then $\mathrm{gr}(G) = \infty$.

It is well known and easy to show that if G has a cycle, then

$$\mathrm{gr}(G) \leq 2\ \mathrm{diam}(G) + 1; \tag{1.1}$$

however, in the contexts we shall consider, better inequalities are obtained (see Theorems 2.1 and 5.1; Theorem 2.1 is a generalization, from [1], of a result in [5]).

2. **The annihilating-ideal graph of a commutative ring with respect to an ideal**

The annihilating-ideal graph $AG(R)$ of a commutative ring R (with 1), introduced by M. Behboodi and Z. Rakeei [5], is defined as follows:

• the vertices of $AG(R)$ are all non-zero ideals of R with non-zero annihilators;

• a pair (A, B) of distinct vertices of $AG(R)$ is an edge of $AG(R)$ if and only if $AB = \{0\}$.

This definition is a natural *ideal versus elements* version of the construction earlier introduced by D. F. Anderson and P. S. Livingston [2], which itself is a modified version of the construction first studied by I. Beck [4]. On the other hand, one can fix an ideal I in R and consider the graph $AG_I(R)$, called *the annihilating-ideal graph of R with respect to the ideal I* in [1], in which:

• the vertices of $AG_I(R)$ are all ideals A of R not contained in I and having an ideal A' not containing in I with AA' containing in I;

• a pair (A, B) of distinct vertices of $AG_I(R)$ is an edge of $AG_I(R)$ if and only if $AB \subseteq I$.

According to this definition, $AG(R) = AG_{\{0\}}(R)$.

Let us recall:

Theorem 2.1. (Theorem 3.3 in [1])

(a) *The graph $AG_I(R)$ is connected and diam$(AG_I(R)) \leq 3$.*
(b) *If $AG_I(R)$ contains a cycle, then gr$(AG_I(R)) \leq 4$.*

Similar inequalities were known before for the graph considered in [2]: see Theorem 2.3 in [2], Theorem 2.3 in [6], assertion (1.4) in [14], and Theorem

2.2 in [3] for various versions. They were also known for $I = \{0\}$, that is, for the graph $AG(R)$ (see Theorem 2.1 in [5]).

3. Commutators

The familiar group-theoretic notion of a commutator has been generalized to various contexts of universal algebra and category theory. The universal-algebraic references to commutators usually begin with J. D. H. Smith [16], and then mention various further generalizations of Smith's definition (see e.g. [7] and references therein, although there are many more recent ones). The categorical notions of commutators of subobjects and of internal equivalence relations first appear in S. A. Huq's papers (see [8]), and in M. C. Pedicchio's papers (see [15]), respectively.

As formulated in [9] (based on the approach of [12]), the commutator $[\alpha, \beta]$ of two congruences α and β on an algebra A in a Mal'tsev (=congruence permutable) variety $\mathbf{C}$ with a Mal'tsev term p can be defined as the smallest congruence γ on A such that the map

$$\{(x, y, z) \in A^3 | (x, y) \in \alpha \,\&\, (y, z) \in \beta\} \to A/\gamma \tag{3.1}$$

sending (x, y, z) to the γ-class of $p(x, y, z)$, is a homomorphism of algebras (that is, a morphism in $\mathbf{C}$).

As also mentioned in [9], this commutator has the following properties:

$$[\alpha, \beta] \leq \alpha \wedge \beta \tag{3.2}$$
$$[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha], \tag{3.3}$$
$$[\alpha, \beta \vee \gamma] = [\alpha, \beta] \vee [\alpha, \gamma] \tag{3.4}$$

where $\wedge$ and $\vee$ are the meet and the join in the lattice of congruences on a given algebra A. It is well known that these properties also hold in various more general contexts, in particular for commutators in a congruence modular varieties (see e.g. [7]) and in an exact Mal'tsev category with coequalizers (see [15]).

When the ground variety **C** is semi-abelian in the sense of G. Janelidze, L. Marki, and W. Tholen [10] (and in some more general contexts, earlier studied by A. Ursini; see e.g. in [11] and references on Ursini's papers there), for each algebra A in C, there is a lattice isomorphism

$$\mathrm{Con}(A) \approx \mathrm{NSub}(A) \tag{3.5}$$

between the lattice Con(A) of congruences on A and the lattice NSub(A) of normal subalgebras of A, under which congruences correspond to their '0-classes'. This immediately allows us to define commutators in semi-abelian varieties using (3.1) as above, even though the so defined commutator will not necessarily coincide with the Huq commutator (see [13] for the clarification of their relationship). Accordingly, for normal subalgebras H and K of A and the corresponding congruences α and β on A, we shall write $[H,K]_{Smith}$ for the normal subalgebra of A corresponding to $[\alpha,\beta]$.
Note also that, the so-defined $[H,K]_{Smith}$ is at the same time a special case of the commutator introduced by A. Ursini in [17], as shown in that paper.

Let us recall the simplest examples:

Example 3.1.

(a) if **C** is the variety of groups, then normal subalgebras of A in **C** are the same as normal subgroups of A, and, for two normal subgroups H and K of A, $[H,K]_{Smith}$ is the ordinary commutator of H and K. That is,

$[H,K]_{Smith}$ = the subgroup of A generated by all $hkh^{-1}k^{-1}$ with $h \in H$ and $k \in K$.

(b) if **C** is the variety of commutative rings (here and below rings are not required to have an identity element), then normal subalgebras of A in $\mathbf{C}$ are the same as ideals of A, and, for two ideals H and K of A,

$$[H, K]_{Smith} = HK,$$

the product of H and K.

(c) if $\mathbf{C}$ is the variety of rings (not necessarily commutative), then normal subalgebras of A in $\mathbf{C}$ are the same as ideals of A, and, for two ideals H and K of A,

$$[H, K]_{Smith} = HK + KH,$$

the product of H and K.

4. **Commutator lattices and their graphs**

As suggested by commutator theory, we introduce

Definition 4.1. (a) A commutator lattice is a (bounded) lattice L equipped with a binary operation $[-,-]$, also written as $[x, y] = xy$, and satisfying the conditions similar to (3.2)-(3.4), that is, satisfying

$$xy \leq x, \tag{4.1}$$
$$xy = yx \tag{4.2}$$
$$x(y \vee z) = (xy) \vee (xz) \tag{4.3}$$

for all x, y, z in L.

(b) More generally, a commutator poset is a poset (=ordered set) L equipped with a binary operation $[-,-]$, also written as $[x, y] = xy$, and satisfying (4.1), (4.2), and

$$x \leq y \Rightarrow xz \leq yz, \tag{4.4}$$

for all x, y, z in L.

Our obvious examples of interest of a commutator lattice are:

Example 4.2.

(a) For an algebra A in a Mal'tsev variety $\mathbf{C}$, the lattice $\mathrm{Con}(A)$ of congruences on A, equipped with the commutator operation defined as in the previous section, is a commutator lattice. The same is obviously true in all those contexts where commutators satisfy properties (3.2)-(3.4), including the context of congruence modular varieties considered in [7].

(b) For an algebra A in a semi-abelian variety $\mathbf{C}$, the lattice $\mathrm{NSub}(A)$ of normal subalgebras of A, equipped with the commutator operation $[-,-]_{Smith}$ defined as in the previous section, is a commutator lattice. In particular, this is the case for the varieties considered in Example 3.1 with the commutators described there.

Let us mention two other obvious examples:

Example 4.3. An arbitrary lattice L becomes a commutator lattice if we put either

(a) $xy = x \wedge y$ for all $x, y \in L$, provided L is distributive, or

(b) $xy = 0$ for all $x, y \in L$.

As suggested by commutator theory, we might call these two kinds of commutator lattices *arithmetical* and *abelian*, respectively.

The definition of annihilating-ideal graph $AG_I(R)$ of a ring R with respect to an ideal I immediately extends to the context of a commutator lattice as follows:

Definition 4.4. For an element c in a commutator poset L we define the annihilation graph of L with respect to c as the graph $AG_c(L)$, in which:

the vertices of $AG_c(L)$ are all elements x of L not less-or-equal than c and having an element y in L not less-or-equal than c with $xy \leq c$. A pair (x, y) of distinct vertices of $AG_c(L)$ is an edge of $AG_c(L)$ if and only if $xy \leq c$.

We shall also write $AG(L) = AG_0(L)$, and call this graph the annihilation graph of L.

In particular we have

$$AG_I(R) = AG_I(L) \text{ and } AG(R) = AG(L), \tag{4.5}$$

where $AG_I(R)$ and $AG(R)$ are as in Section 2, while L is the commutator lattice of ideals of R with the commutator operation as in Example 3.1(b).

5. **The ring-theoretic results extend to the context of commutator posets**

The purpose of this section is to extend Theorem 2.1 to the context of commutator posets, that is, to prove the following:

Theorem 5.1. *Let L be a commutator poset and c an element in L. Then:*

(a) *The graph $AG_c(L)$ is connected and $diam(AG_c(L)) \leq 3$.*
(b) *If $AG_c(L)$ contains a cycle, then $gr(AG_c(L)) \leq 4$.*

Proof. (a): We have to show that, for every two distinct vertices a and b of the graph $AG_c(L)$ with $ab \nleq c$, either there exists a vertex x of $AG_c(L)$ with ($a \neq x \neq b$ and)

$$ax, xb \leq c, \tag{5.1}$$

or there exist distinct vertices x and y of $AG_c(L)$ with ($a \neq x \neq b$, $a \neq y \neq b$, and)

$$ax, xy, yb \leq c. \tag{5.2}$$

Our arguments will depend on the satisfaction of the inequalities $a^2 \leq c$ and $b^2 \leq c$, and therefore we have to consider four cases:

Case 1: $a^2 \leq c$ and $b^2 \leq c$. In this case $x = ab$ satisfies (5.1). Indeed, $ax = a(ab) \leq a^2 \leq c$, and similarly $xb \leq c$;

Case 2: $a^2 \leq c$ and $b^2 \nleq c$. Here we first choose t to be any vertex of $AG_c(L)$ with $tb \leq c$, which is possible by definition of $AG_c(L)$, and continue depending on the satisfaction of the inequality $at \leq c$. If $at \leq c$, then $x = t$ satisfies (5.1). Indeed, $ax = a(at) \leq a^2 \leq c$ while $xb = (at)b \leq tb \leq c$.

Case 3: $a^2 \nleq c$ and $b^2 \leq c$ - is trivially similar.

Case 4: $a^2 \nleq c$ and $b^2 \nleq c$. Now we first choose vertices u and v of $AG_c(L)$ with ($a \neq u \neq b$, $a \neq v \neq b$, and)

$$au, vb \leq c. \tag{5.3}$$

which is possible by definition of $AG_c(L)$. Next, if $u = v$, then $x = u = v$ satisfies (5.1). Therefore we can assume $u \neq v$. But $u \neq v$ together with $uv \leq c$ would imply that $x = u$ and $y = v$ satisfy (5.2). Therefore we can also assume $uv \nleq c$. However, under these assumptions $x = uv$ satisfies (5.1). Indeed, $ax = a(uv) \leq au \leq c$, and similarly $xb \leq c$.

(b): Suppose $AG_c(L)$ contains a cycle $(x_0, ..., x_n)$ of length n (hence, in particular, $x_0 = x_n$). Since we only need to show that there exists a cycle of length ≤ 4 in $AG_c(L)$, we can assume, without loss of generality, that $n \geq 5$, and that the cycle $(x_0, ..., x_n)$ has the minimal length. Using this minimality, we observe:

• $x_0x_3 \nleq c$. Indeed, if $x_0x_3 \leq c$, then the sequence obtained from $(x_0, ..., x_n)$ by removing x_1 and x_2 would a cycle in $AG_c(L)$;

• $x_0x_3 \neq x_1$. Indeed, $x_0x_3 = x_1$ would imply $x_1 \leq x_0$ and then $x_1x_{n-1} \leq x_0x_{n-1} = x_nx_{n-1} \leq c$, making the sequence obtained from $(x_0, ..., x_n)$ by removing x_0 a cycle in $AG_c(L)$;

• $x_0x_3 \neq x_2$, which can be proved similarly to $x_0x_3 \neq x_1$;

Now, under our assumptions, we can prove that $AG_c(L)$ has a cycle of length 3: specifically, so is (x_1, x_0x_3, x_2, x_1). Indeed:

since $x_0x_3 \leq c$ and $x_0x_3 \leq x_0$, x_0x_3 is a vertex of $AG_c(L)$; we already know that x_1, x_0x_3, and x_2 are all distinct from each other;

• $x_1(x_0x_3) \leq x_1x_0 \leq c$;

• $(x_0x_3)x_2 \leq x_3x_2 \leq c$;

• $x_2x_1 \leq c$. □

Remark 5.2. There are simple counter-examples showing that $\mathrm{gr}(AG_c(L)) \leq 3$ is not always true, even if there are cycles of length ≥ 5. For instance, if R is an integral domain that is not a field, then, obviously, $\mathrm{gr}(AG(R \times R)) = 4$ (where $AG(...)$ is as in [5]; see Section 2). In this well-known case all cycles in $AG(R \times R)$ have even number of elements, and, for every n-tuple $(A_1, \cdots, A_n)$ of distinct ideals in R, the sequence

$(A_0 \times \{0\}, \{0\} \times A_0, A_1 \times \{0\}, \{0\} \times A_1, \cdots, A_{n-1} \times \{0\}, \{0\} \times A_{n-1}, A_n \times \{0\}, \{0\} \times A_n)$,

where $n \geq 2$ and $A_0 = A_n$, is a cycle of length $2n$ in $AG(R \times R)$.

References

[1] F. Aliniaeifard, M. Behboodi, E. Mehdi-Nezhad, and A. M. Rahimi, The Annihilating-Ideal Graph of a Commutative Ring with Respect to an Ideal, Communications in Algebra 42, (2014), 2269-2284.

[2] D. F. Anderson and P. S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, Journal of Algebra 217, 2, (1999), 434-447.

[3] M. Axtel, J. Coykendall, and J. Stickles, Zero-divisor graphs of polynomials and power series over commutative rings, Communications in Algebra 33, 6, (2005), 2043-2050.

[4] I. Beck, Coloring of commutative rings, Journal of Algebra 116, 1, (1988), 208-226.

[5] M. Behboodi and Z. Rakeei, The annihilating-ideal graph of commutative rings I, Journal of Algebra and Applications, 10, 4, (2011), 727-739.

[6] F. R. DeMeyer and K.Schneider, Automorphisms and zero-divisor graphs of commutative rings, International Journal of Commutative Rings 1, (2002), 93-105.

[7] R. Freese and R. McKenzie, Commutator theory for congruence modular varieties, London Mathematical Society Lecture Note Series 125, Cambridge University Press, (1987).

[8] S. A. Huq, Commutator, nilpotency and solvability in categories, Quarterly Journal of Mathematics 2, 19, (1968), 363-389.

[9] G. Janelidze and G. M. Kelly, Central extensions in Mal'tsev varieties, Theory and Applications of Categories 7, 10, (2000), 219-226.

[10] G. Janelidze, L. Marki, and W. Tholen, Semi-abelian categories, Journal of Pure and Applied Algebra 168, (2002), 367-386.

[11] G. Janelidze, L. Marki, and A. Ursini, Ideals and clots in universal algebra and in semi-abelian categories, Journal of Algebra 307, 1, (2007), 191-208.

[12] G. Janelidze and M. C. Pedicchio, Pseudogroupoids and commutators, Theory and Applications of Categories 8, 15, (2001), 408-456.

[13] N. Martins-Ferreira and T. Van der Linden, A note on the "Smith is Huq" condition, Applied Categorical Structures 20, 2, (2012), 175-187.

[14] S. B. Mulay, Cycles and symmetries of zero-divisors, Communications in Algebra 30, 7, (2002), 3533-3558.

[15] M. C. Pedicchio, A categorical approach to commutator theory, Journal of Algebra, 177, (1995), 647-657.

[16] J. D. H. Smith, Mal'cev varieties, Lecture Notes in Mathematics 554, Springer, (1976).

[17] A. Ursini, On subtractive varieties, V: congruence modularity and the commutators, Algebra Universalis 43, (2000), 51-78.

The Authors' Addresses

Elham Mehdi-Nezhad,
Department of Mathematics and Applied Mathematics,
University of Cape Town,
Rondebosch 7701, Cape Town,
South Africa.
E-mail address: `mhdelh001@myuct.ac.za`

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES
Vol. LVI-2 (20'')

THE COHERENT CATEGORY OF INVERSE SYSTEMS

by Luciano STRAMACCIA

Résumé. Pour toute catégorie de modèles **C** enrichie dans la catégorie des groupoïdes **Gpd**, on définit une nouvelle catégorie $\mathbb{P}$ro **C**, dont les objets sont les systèmes inverses dans **C**; elle est isomorphe à la catégorie d'homotopie de Steenrod Ho(Pro **C**), et à la catégorie de pro-homotopie cohérente définie par Lisica and Mardešić lorsque **C** est la catégorie des espaces topologiques.

Abstract. For every model category **C** enriched over the category **Gpd** of groupoids a new category $\mathbb{P}$ro **C** is defined, with objects the inverse systems in **C**, which is isomorphic to the Steenrod homotopy category Ho(Pro **C**) and to the coherent pro-homotopy category defined by Lisica and Mardešić when **C** is the category of topological spaces

Keywords. inverse system, groupoid enriched category, pseudo-natural transformation, model category, category of fractions.

Mathematics Subject Classification (2010). 55U35, 55P55, 18D20, 18E35

1. Introduction

Inverse systems have been widely used in Mathematics, especially in Topology. Grothendieck (see[11]) was the first to give a good categorical definition for the category Pro **C** of inverse systems in a given category **C**. The need for a homotopy theory of Pro **C** was recognized in [1], however, the homotopy category defined there was not satisfactory for a number of reasons. Many authors were then concerned with the task of defining a Quillen model structure on Pro **C**, assuming **C** had one, in order to obtain a well behaved homotopy category. The so called Steenrod homotopy category Ho(Pro **C**) was defined by Porter in [19] (see also [20]). In the last years further work on the subject has been done notably by Isaksen, see for instance [13], [14] and the very recent paper by Descotte and Dubuc [7].

There are at hand essentially two ways to look at $\mathsf{Ho}(\mathsf{Pro}\,\mathbf{C})$. The first one is due to Edwards-Hastings [8], who define it by localizing $\mathsf{Pro}\,\mathbf{C}$ at the class of level equivalences so that in this case the morphisms are quite ugly to handle. The second one is due to Cathey-Segal [6]: given inverse systems $\mathtt{X}, \mathtt{Y}$ in $\mathbf{C}$, they consider suitable fibrant replacements $\hat{\mathtt{X}}, \hat{\mathtt{Y}}$ for them obtaining that $\mathsf{Ho}(\mathsf{Pro}\,\mathbf{C})(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \cong [\hat{\mathtt{X}}, \hat{\mathtt{Y}}]$, where the right member denotes the set of homotopy classes with respect to the relation generated by extending to $\mathsf{Pro}\,\mathbf{C}$ a cylinder functor given on $\mathbf{C}$. In this case morphisms are easy to manage while the constructions of the fibrant replacements is not trivial at all, see, e.g., [8], 3.2.3 and [6], 4.2. Our aim in this paper is to construct a category with objects the inverse systems in $\mathbf{C}$ having the advantages of both the points of view above.

When speaking of the category $\mathbf{C}$ we really have in mind the category $\mathbf{Top}$ of topological spaces however the construction we give works for an arbitrary ge-category $\mathbf{C}$, that is a category enriched over groupoids, endowed with a suitable model structure. In a previous paper [22] this author has defined the ge-category $\mathbb{I}\mathsf{nv}\,\mathbf{C}$ with objects the inverse systems in $\mathbf{C}$, coherent maps between them and modifications of such coherent maps. The homotopy category of $\mathbb{I}\mathsf{nv}\,\mathbf{C}$, denoted by $\mathbb{P}\mathsf{ro}\,\mathbf{C}$, was used in order to redefine the strong shape category of compact metric spaces. The main result of this paper consists in showing that $\mathbb{P}\mathsf{ro}\,\mathbf{C}$ is isomorphic to the Steenrod homotopy category $\mathsf{Ho}(\mathsf{Pro}\mathbf{Top})$ as defined in [8] and then to the coherent pro-homotopy category $\mathsf{CH}(\mathbf{Top})$ as defined by Lisica and Mardešić, see [17].

2. Background

A groupoid is a small category whose morphisms are all invertible. $\mathbf{Gpd}$ denotes the category of groupoids and their functors.

$\mathbf{Gpd}$ is a complete and cocomplete category, in particular it is a symmetric, monoidal closed category, with tensor product the usual product of categories and unit object the groupoid having only one object and one morphism. $\mathbf{Gpd}$ is then suitable for enriching other categories: a category $\mathbf{C}$ is enriched over $\mathbf{Gpd}$ (hereafter called a *ge-category*) if every hom-set $Hom(X, Y)$ is the set of objects of a groupoid $\mathsf{Hom}(X, Y)$ and the composition is a functor

$$\mathsf{Hom}(X,Y) \times \mathsf{Hom}(Y,Z) \longrightarrow \mathsf{Hom}(X,Z),$$

for all $X, Y, Z \in \mathbf{C}$. A ge-category $\mathbf{C}$ has *objects* (0-cells), *maps* (1-cells) and *homotopies* (2-cells) between them, so that it is nothing but a 2-category whose 2-cells are all invertible. As for notations, we will write

$$\alpha : f \Rightarrow g : X \longrightarrow Y$$

to mean that α is a homotopy connecting the maps $f, g : X \longrightarrow Y$. A map $f : X \longrightarrow Y$ in $\mathbf{C}$ is called a *homotopy equivalence* if there exists another map $g : Y \longrightarrow X$ and homotopies $g \circ f \Rightarrow 1_X$, $f \circ g \Rightarrow 1_Y$. Homotopies in $\mathbf{C}$ can be composed in two ways : vertically $(\beta \cdot \alpha)$ and horizontally $(\gamma * \alpha)$. We denote, e.g., by f both the map and the identity homotopy $1_f : f \Rightarrow f$.

The relation to be homotopic for maps in $\mathbf{C}$ is a compositive equivalence relation on each $Hom(X,Y)$. The quotient category $\mathsf{h}(\mathbf{C})$ is called the *homotopy category* of the ge-category $\mathbf{C}$. It can also be obtained by formally inverting the class $\mathtt{W}$ of all the homotopy equivalences in $\mathbf{C}$: $\mathbf{C}[\mathtt{W}^{-1}] \cong \mathsf{h}(\mathbf{C})$, [22]. A 2-functor $\mathtt{F} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ of ge-categories lifts naturally to a functor $\mathsf{hF} : \mathsf{h}(\mathbf{B}) \longrightarrow \mathsf{h}(\mathbf{C})$ which acts on objects as $\mathtt{F}$ does.

Example 2.1.

(a) The category **Top** of topological spaces and continuous maps is a ge-category. Given two spaces X, Y, the continuous maps between them and the tracks (= relative homotopy classes of homotopies) [5] connecting such maps determine a groupoid.

(b) **Gpd** itself is a ge-category: the homotopies are the natural isomorphisms of functors. A functor of groupoids is a homotopy equivalence iff it is an equivalence of categories.

(c) Every ordinary category can be thought of as a ge-category having only identity homotopies.

3. The ge-category of diagrams.

Let $\mathbf{C}$ be a fixed ge-category and let $\mathcal{A}$ be a small, ordinary category, also considered as a ge-category. Let us denote by $[\mathcal{A}, \mathbf{C}]$ the ge-category of diagrams in $\mathbf{C}$ of type $\mathcal{A}$, that is (2-)functors $\mathtt{F} : \mathcal{A} \to \mathbf{C}$. The maps here are the (2-)natural transformations of diagrams, while a homotopy is a modification of natural transformations [15].

3.1. Recall that, for diagrams $\mathtt{F}, \mathtt{G} : \mathcal{A} \to \mathbf{C}$, a pseudo-natural transformation (called a *psd-transformation*, for short) $\tau : \mathtt{F} \to \mathtt{G}$ consists of

- maps $\tau_x : \mathtt{F}(x) \to \mathtt{G}(x)$ in $\mathbf{C}$, for all $x \in \mathcal{A}$, together with
- homotopies $\tau_u : \mathtt{G}(u)\tau_x \Rightarrow \tau_y\mathtt{F}(u)$ in $\mathbf{C}$, for all $u : x \to y$ in $\mathcal{A}$, in such a way that $\tau_{1_x} = 1_{\tau_x}$ and $\tau_{vu} = [\tau_v * \mathtt{F}(u)] \cdot [\mathtt{G}(g) * \tau_u]$, for composable maps $x \xrightarrow{u} y \xrightarrow{v} z$, as in

$$
\begin{tikzcd}
\mathtt{F}(x) \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, "\mathtt{F}(u)"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tau_u"] & G(x) \arrow[d, "\mathtt{G}(u)"] \\
\mathtt{F}(y) \arrow[r, "\tau_y"'] \arrow[d, "\mathtt{F}(v)"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tau_v"] & \mathtt{G}(y) \arrow[d, "\mathtt{G}(v)"] \\
\mathtt{F}(z) \arrow[r, "\tau_z"'] & \mathtt{G}(z)
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathtt{F}(x) \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, "\mathtt{F}(v \circ u)"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tau_{vu}"] & \mathtt{G}(x) \arrow[d, "\mathtt{G}(v \circ u)"] \\
\mathtt{F}(z) \arrow[r, "\tau_z"'] & \mathtt{G}(z)
\end{tikzcd}
$$

Moreover, for a homotopy $\alpha : u \Rightarrow u' : x \to y$, one has

$$\tau_u \cdot [\mathtt{G}(\alpha) * \tau_x] = [\tau_y * \mathtt{F}(\alpha)] \cdot \tau_{u'}$$

as in

$$
\begin{tikzcd}
\mathtt{F}(x) \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, "\mathtt{F}(u)"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tau_u"] & \mathtt{G}(x) \arrow[d, bend right, "\mathtt{G}(u)"'] \arrow[d, bend left, "\mathtt{G}(u')"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathtt{G}(\alpha)}{\Rightarrow}"] \\
\mathtt{F}(y) \arrow[r, "\tau_y"'] & \mathtt{G}(y)
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathtt{F}(x) \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, bend right, "\mathtt{F}(u)"'] \arrow[d, bend left, "F(u')"] \arrow[d, phantom, "\overset{F(\alpha)}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\tau_{u'}"] & \mathtt{G}(x) \arrow[d, "\mathtt{G}(u')"] \\
\mathtt{F}(y) \arrow[r, "\tau_y"'] & \mathtt{G}(y)
\end{tikzcd}
$$

3.2. Given psd-transformations $\sigma, \tau : \mathtt{F} \to \mathtt{G}$ a homotopy (modification) $\theta : \sigma \Rightarrow \tau$ consists of homotopies $\theta_x : \sigma_x \Rightarrow \tau_x$, for $x \in \mathcal{A}$, such that, given

$u : x \longrightarrow y$, then

$$\tau_u \cdot [\mathtt{G}(u) * \theta_x] = [\theta_y * \mathtt{F}(u)] \cdot \sigma_u,$$

as in

$$\begin{tikzcd}
\mathtt{F}(x) \arrow[r, shift left, "\sigma x"] \arrow[r, shift right, "\tau_x"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta_x"] \arrow[d, "\mathtt{F}(u)"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \tau_u"] & \mathtt{G}(x) \arrow[d, "\mathtt{G}(u)"] \\
\mathtt{F}(y) \arrow[r, "\tau_y"'] & \mathtt{G}(y)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathtt{F}(x) \arrow[r, "\sigma_x"] \arrow[d, "\mathtt{F}(u)"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \sigma_u"] & \mathtt{G}(x) \arrow[d, "\mathtt{G}(u)"] \\
\mathtt{F}(y) \arrow[r, shift left, "\sigma y"] \arrow[r, shift right, "\tau_y"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta_y"] & \mathtt{G}(y)
\end{tikzcd}$$

3.3. A natural transformation or psd-transformation $\tau : \mathtt{F} \longrightarrow \mathtt{G}$ of diagrams is called a *level equivalence* when, for each $x \in \mathcal{A}$, the map $\tau_x : \mathtt{F}(x) \longrightarrow \mathtt{G}(x)$ is a homotopy equivalence in $\mathbf{C}$.

3.4. Diagrams, psd-transformations and their homotopies define the ge-category $[\![\mathcal{A}, \mathbf{C}]\!]$. Since every natural transformation of diagrams is a psd-transformation, it follows that $[\mathcal{A}, \mathbf{C}]$ is a ge-subcategory of $[\![\mathcal{A}, \mathbf{C}]\!]$. The inclusion 2-functor $\mathrm{J} : [\mathcal{A}, \mathbf{C}] \longrightarrow [\![\mathcal{A}, \mathbf{C}]\!]$ has a left 2-adjoint ([4], [10]) usually denoted

$$(-)' : [\![\mathcal{A}, \mathbf{C}]\!] \longrightarrow [\mathcal{A}, \mathbf{C}], \quad \mathtt{F} \mapsto \mathtt{F}'.$$

$\mathtt{F}'$ is called the *flexible* or *cofibrant* replacement of the diagram $\mathtt{F}$. The unit p of the 2-adjunction is levelwise given by pseudo-natural transformations $p_{\mathtt{F}} : \mathtt{F} \longrightarrow \mathtt{F}'$, while the components of the counit q are natural transformations $q_{\mathtt{F}} : \mathtt{F}' \longrightarrow \mathtt{F}$. It follows from the general theory of 2-monads ([3], §4) that the pseudo-natural transformations $p_{\mathtt{F}}$ and the natural transformations $q_{\mathtt{F}}$ form an adjoint equivalence. In particular, one has $q_{\mathtt{F}} p_{\mathtt{F}} = 1_{\mathtt{F}}$ and there are homotopies $\theta_{\mathtt{F}} : p_{\mathtt{F}} q_{\mathtt{F}} \Rightarrow 1_{\mathtt{F}}$ providing the counit of the adjoint equivalence.

$$\begin{tikzcd}
\mathtt{F} \arrow[r, "p_{\mathtt{F}}"] \arrow[dr, "1_{\mathtt{F}}"'] & \mathtt{F}' \arrow[d, "q_{\mathtt{F}}"] \\
& \mathtt{F}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathtt{F} \arrow[d, "p_{\mathtt{F}}"'] & \mathtt{F}' \arrow[l, "q_{\mathtt{F}}"'] \arrow[dl, "1_{\mathtt{F}'}"] \arrow[dl, phantom, near start, "\Downarrow \theta_{\mathtt{F}}"'] \\
\mathtt{F}' &
\end{tikzcd}$$

3.5. In [10], 3.2.3, its shown that, for each diagram $\mathtt{F}$, $q_{\mathtt{F}} : \mathtt{F}' \longrightarrow \mathtt{F}$ is a levelwise trivial fibration in the projective model structure on $[\mathcal{A}, \mathbf{C}]$, for $\mathbf{C}$ a model category. In particular $q_{\mathtt{F}}$ is a level homotopy equivalence in $\mathbf{C}$.

3.6. A diagram $\mathtt{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ is flexible when $q_{\mathtt{F}} : \mathtt{F}' \longrightarrow \mathtt{F}$ is a surjective equivalence in $[\mathcal{A}, \mathbf{C}]$ (see [4], and [16], 5.13). It follows from ([4], Theorem 4.7), that every psd-transformation $\mathtt{F} \longrightarrow \mathtt{G}$, with $\mathtt{F}$ a flexible diagram, is homotopic to a unique natural transformation.
Given 2-categories $\mathbf{C}$ and $\mathbf{D}$, is not true in general that a pseudo-natural transformation $\tau : \mathtt{F} \longrightarrow \mathtt{G} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ is always homotopic to a 2-natural transformation. A nice counterexample for this fact can be found in [21].

In general, a level equivalence is not a homotopy equivalence in $[\mathcal{A}, \mathbf{C}]$ (see e.g. [8], 2.5). However the following is known.

Proposition 3.7. *Let $\mathcal{A}, \mathbf{C}$ be ge-categories. A level equivalence $\tau : \mathtt{F} \longrightarrow \mathtt{G} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ in $[\mathcal{A}, \mathbf{C}]$ becomes a homotopy equivalence in $[\![\mathcal{A}, \mathbf{C}]\!]$.*

Proof. Assume that each τ_x is a homotopy equivalence with homotopy inverse $\sigma_x : \mathtt{G}(x) \longrightarrow \mathtt{F}(x)$ and homotopies $\eta_x : \sigma_x \tau_x \Rightarrow 1_{F(x)}$. For $f : x \longrightarrow y$ in $\mathbf{C}$ define $\sigma_f : \mathtt{F}(f)\sigma_{F(x)} \Rightarrow \sigma_{F(y)}\mathtt{G}(f)$ so that the homotopy represented by the following diagram is the identity homotopy at $\mathtt{F}(f)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathtt{F}(x) \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[rr, bend left=40, "1_{\mathtt{F}(x)}"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\Downarrow \theta_x^{-1}"] \arrow[d, "\mathtt{F}(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \tau_f"] & \mathtt{G}(x) \arrow[r, "\sigma_x"] \arrow[d, "\mathtt{G}(f)"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \sigma_f"] & \mathtt{F}(x) \arrow[d, "\mathtt{F}(f)"] \\
\mathtt{F}(y) \arrow[r, "\tau_y"'] \arrow[rr, bend right=40, "1_{\mathtt{F}(y)}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow \theta_y"] & \mathtt{G}(y) \arrow[r, "\sigma_y"'] & \mathtt{F}(y)
\end{tikzcd}$$

that is : $1_{\mathtt{F}(f)} = [\theta_y * \mathtt{F}(f)] \cdot [\sigma_y * \tau_f] \cdot [\sigma_f * \tau_x] \cdot [\mathtt{F}(f) * \theta_x^{-1}]$. From which it follows $\sigma_f = [\sigma_y * \tau_f]^{-1} \cdot [\theta_y * \mathtt{F}(f)]^{-1} \cdot [\mathtt{F}(f) * \theta_x^{-1}]^{-1} * \sigma_y$. The converse is clear. $\square$

4. The ge-category of Inverse Systems.

4.1. An *inverse system* in a ge-category $\mathbf{C}$ is a diagram $\mathtt{X} : \Lambda^{op} \longrightarrow \mathbf{C}$, with $(\Lambda, \leq)$ a cofinite, strongly directed set. We often write explicitly $\mathtt{X} = (X_\lambda, x_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, where $\mathtt{X}(\lambda) = X_\lambda$ and $\mathtt{X}(\lambda \leq \lambda') = x_{\lambda\lambda'} : X_{\lambda'} \longrightarrow X_\lambda$, [8], [18].

If $f : M \to \Lambda$ is an increasing map of directed sets, then there is an inverse system $\mathtt{X}_f = \mathtt{X}f^{op} : M^{op} \to \mathbf{C}$, given by $\mathtt{X}_f = (X_{f(\mu)}, x_{f(\mu)f(\mu')}, M)$. Here $M = (M, \leq)$ and f is considered as a functor.

4.2. Let $\mathtt{X} = (X_\lambda, x_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ and $\mathtt{Y} = (Y_\mu, y_{\mu,\mu'}, M)$ be inverse systems in $\mathbf{C}$. A *map of systems* $\mathtt{f} = (f, f_\mu) : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ consists of

- an increasing map $f : M \to \Lambda$,
- a natural transformation $(f_\mu) : \mathtt{X}_f \to \mathtt{Y}$.

If $\mathtt{Z} = (Z_\nu, r_{\nu\nu'}, N)$ is another inverse system and $\mathtt{g} = (g, g_\nu) : \mathtt{Y} \to \mathtt{Z}$ is another map of systems, the composition $\mathtt{gf} : \mathtt{X} \to \mathtt{Z}$ is the map $(fg, g_\nu f_{g(\nu)})$, while the identity map on $\mathtt{X}$ is given by $(1_\Lambda, 1_{X_\lambda})$.

Let $\mathtt{f} = (f, f_\mu) : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ be a map of systems and let $F : M \to \Lambda$ be an increasing map such that $f \leq F$, that is $f(\mu) \leq F(\mu)$, for all $\mu \in M$. The *shift* of $\mathtt{f}$ by F is the map of systems $\overline{\mathtt{f}} = (F, \overline{f}_\mu) : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$, where $\overline{f}_\mu = f_\mu x_{F(\mu)f(\mu)}$.

4.3. Given two maps of systems $\mathtt{f}, \mathtt{f}' : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$, a homotopy $\chi : \mathtt{f} \Rightarrow \mathtt{f}'$ consists of an increasing map $F : \Lambda \to M,\ F \geq f, f'$, and of a usual modification of natural transformations $\chi : (\overline{f}_\mu) \rightsquigarrow (\overline{f'}_\mu)$.
Two maps of systems $\mathtt{f}, \mathtt{f}' : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ are said to be *congruent* if they admit a common shift. Congruences of maps of systems are trivial modifications, so we can form the ge-category $\mathsf{Inv}\ \mathbf{C}$ whose objects, maps and homotopies are inverse systems, maps of systems and their congruences, respectively. The resulting homotopy category of $\mathsf{Inv}\ \mathbf{C}$ is Grothendieck's category $\mathsf{Pro}\ \mathbf{C}$ of inverse systems in $\mathbf{C}$ [11].

$\mathsf{Inv}\ \mathbf{C}$ is actually a ge-category whose constituent bricks are the ge-categories of diagrams $[\Lambda^{op}, \mathbf{C}]$, for $(\Lambda, \leq)$ a cofinite, strongly directed set. Changing $[\Lambda^{op}, \mathbf{C}]$ to $[\![\Lambda^{op}, \mathbf{C}]\!]$ leads to :

4.4. A *coherent map* of inverse systems $\varphi = (f, f_\mu, f_{\mu\mu}) : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ consists of:

- an increasing map $f : M \to \Lambda$,
- a psd-transformation $(f_\mu, f_{\mu\mu'}) : \mathtt{X}_f \to \mathtt{Y}$.

Let $\psi = (g, g_\nu, g_{\nu\nu'}) : \mathtt{Y} \to \mathtt{Z} = (Z_\nu, z_{\nu\nu'}, N)$ be another coherent map. The composition $\psi\varphi$ is the coherent map given by $(fg, g_\nu f_{g(\nu)}, g_{\nu\nu'} * f_{g(\nu)g(\nu')})$. Such a composition is indeed associative and the identity coherent map $\mathtt{X} \to \mathtt{X}$ is given by $1_{\mathtt{X}} = (1_\Lambda; 1_{X_\lambda}, 1_{f_\lambda})$.

4.5. Let $\varphi = (f; f_\mu, f_{\mu\mu'}) : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ and let $F : M \to \Lambda$ be an increasing map such that $f \leq F$. The *coherent shift* of φ by F is the coherent map $\overline{\varphi} = (F; \overline{f}_\mu, \overline{f}_{\mu\mu'}) : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ which is given by $\overline{f}_\mu = f_\mu x_{f(\mu)F(\mu)}$ and $\overline{f}_{\mu\mu'} = f_{\mu\mu'} * x_{f(\mu')F(\mu')}$.
If $\varphi' = (f', f'_\mu, f'_{\mu\mu'})$ is another coherent map $\mathtt{X} \to \mathtt{Y}$, a *coherent homotopy* $\Phi : \varphi \Rrightarrow \varphi'$ consists of:

- an increasing map $F : M \to \Lambda$ such that $f, f' \leq F$,

- a homotopy of psd-transformations $\Phi : (\overline{f}_\mu, \overline{f}_{\mu\mu'}) \Rrightarrow (\overline{f}'_\mu, \overline{f}'_{\mu\mu'}) : \mathtt{X}_F \to \mathtt{Y}$, between their coherent shifts by F. It follows that Φ is family of homotopies of $\mathbf{C}$

$$\phi_\mu : f_\mu x_{f(\mu)F(\mu)} \Rrightarrow g_\mu x_{g(\mu)F(\mu)}, \ \mu \in M,$$

such that $(g_{\mu\mu'} * x_{F(\mu')g(\mu')}) \cdot (y_{\mu\mu'} * \phi_{\mu'}) = (\phi_\mu * x_{F(\mu)F(\mu')}) \cdot (f_{\mu\mu'} * x_{f(\mu')F(\mu')})$.

4.6. The data above define the ge-category $\mathbb{I}\mathsf{nv}\ \mathbf{C}$ with objects the inverse systems in $\mathbf{C}$, coherent maps and their coherent homotopies. We define the *coherent category of inverse systems* in $\mathbf{C}$ to be $\mathsf{h}(\mathbb{I}\mathsf{nv}\ \mathbf{C}) = \mathbb{P}\mathsf{ro}\ \mathbf{C}$.

If $\mathtt{X}$ and $\mathtt{Y}$ are indexed over the same set Λ, then a map of systems $(1_\Lambda, f_\lambda) : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ is natural transformation while a coherent map of systems $(1_\Lambda, f_\lambda, f_{\lambda\lambda'}) : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ is a psd-transformation, We call such maps *level (coherent) maps* of systems.

4.7. Recall from [18] that every map of systems $(f, f_\mu) : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$, with $f : M \to \Lambda$, is isomorphic, in the category of maps of $\mathsf{Inv}\ \mathbf{C}$, to a level map $(1_N, f_\nu) : \mathtt{X}' \to \mathtt{Y}'$ where

$$N = \{\nu = (\lambda, \mu) \in \Lambda \times M \mid f(\mu) \leq \lambda\}$$

is directed by the relation

$$\nu = (\lambda, \mu) \leq (\lambda', \mu') = \nu' \Leftrightarrow \lambda \leq \lambda' \text{ and } \mu \leq \mu',$$

with $f_\nu = f_\mu x_{f(\mu)\lambda}$. This is the so called *Mardešić's trick*, which admits a coherent version as follows.
Starting from a coherent map of systems $(f, f_\mu, f_{\mu\mu'}) : \mathtt{X} \longrightarrow \mathtt{Y}$ one obtains a level coherent map of systems

$$(1_N, f_\nu, f_{\nu\nu'}) : \mathtt{X}' \longrightarrow \mathtt{Y}'$$

where $f_\nu = f_\mu \circ x_{f(\mu)\lambda}$ and $f_{\nu\nu'}$ is the homotopy represented by

$$\begin{tikzcd}
X_{\nu'} = X_{\lambda'} \arrow[r, "x_{f(\mu')\lambda'}"] \arrow[d, "x_{\lambda\lambda'}"'] & X_{f(\mu')} \arrow[r, "f_{\mu'}"] \arrow[d, "x_{f(\mu)f(\mu')}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow f_{\mu\mu'}"] & Y_{\mu'} = Y_{\nu'} \arrow[d, "y_{\mu\mu'}"] \\
X_\nu = X_\lambda \arrow[r, "x_{f(\mu)\lambda}"'] & X_{f(\mu)} \arrow[r, "f_\mu"'] & Y_\mu = Y_\nu
\end{tikzcd} .$$

Then there is a commutative square in $\mathbb{I}$nv $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd}
\mathtt{X} \arrow[r, "(f, f_\mu, f_{\mu\mu'})"] \arrow[d, "(i, i_\nu)"'] & \mathtt{Y} \arrow[d, "(j, j_\nu)"] \\
\mathtt{X}' \arrow[r, "(1_N, f_\nu, f_{\nu\nu'})"'] & \mathtt{Y}'
\end{tikzcd}$$

where (i, i_ν) and (j, j_ν) are isomorphisms of systems given by $i : N \longrightarrow \Lambda$, $i(\nu) = \lambda$ and $i_\nu = 1_{X_\lambda}$, $j : N \longrightarrow M$, $j(\nu) = \mu$ and $j_\nu = 1_{Y_\mu}$.

4.8. Edwards-Hastings [8] consider a nicely behaved model category $\mathbf{C}$ satisfying a certain condition "N" which provides, among other things, the existence of a functorial cylinder. They define a model structure in Pro $\mathbf{C}$ where the weak equivalences and the cofibrations are defined to be retracts in the category of maps of Pro $\mathbf{C}$ of level equivalences and of level Hurewicz cofibrations from some $[\Lambda^{op}, \mathbf{C}]$, respectively. The Steenrod homotopy category of inverse systems Ho(Pro $\mathbf{C}$) is obtained by localizing Pro $\mathbf{C}$ at the class of level homotopy equivalences (see also [20]). An equivalent description of Ho(Pro $\mathbf{C}$) is given in [6], let us recall it briefly. First extend the cylinder functor given on $\mathbf{C}$ to Pro $\mathbf{C}$: for $\mathtt{X} = (X_\lambda, x_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, let $\mathtt{X} \times I = (X_\lambda \times I, x_{\lambda\lambda'} \times 1, \Lambda)$. Two maps of systems $\mathtt{f} = (f, f_\mu)$, $\mathtt{g} = (g, g_\mu) : \mathtt{X} \longrightarrow \mathtt{Y}$ are declared *naive homotopic* if there exists a map of systems $\mathtt{F} = (F, F_\mu) : \mathtt{X} \times I \longrightarrow \mathtt{Y}$, where $F : M \longrightarrow \Lambda$ is an increasing map such that $F \geq f, g$ and, for each $\mu \in M$, $F_\mu : X_{F(\mu)} \times I \longrightarrow Y_\mu$ is a homotopy in $\mathbf{C}$ connecting $f_\mu \circ x_{f(\mu)F(\mu)}$ and $g_\mu \circ x_{g(\mu)F(\mu)}$. The resulting quotient category is denoted $\pi(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C})$ and is called the *naive homotopy category*. We write $[\mathtt{X}, \mathtt{Y}]$ for the set of naive homotopy classes of maps $\mathtt{X} \longrightarrow \mathtt{Y}$. If $\pi(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C})_f$ denotes the full subcategory of all fibrant objects in the previous model structure, then there is a reflective functor

$$\mathtt{F} : \pi(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C}) \longrightarrow \pi(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C})_f, \quad \mathtt{X} \mapsto \hat{\mathtt{X}},$$

with unit of adjunction $i_{\mathtt{X}} : \mathtt{X} \longrightarrow \hat{\mathtt{X}}$ a level trivial cofibration. The main result is that there is a natural bijection

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C})(\mathtt{X}, \mathtt{Y}) \cong [\hat{\mathtt{X}}, \hat{\mathtt{Y}}],$$

which exhibits $\mathsf{Ho}(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C})$ as the full image of the functor $\mathtt{F}$.
We note that two coherent maps of systems that are coherently homotopic are also naive homotopic.

$\mathsf{Inv}\ \mathbf{C}$ is a ge-subcategory of $\mathbb{I}\mathrm{nv}\ \mathbf{C}$ and the inclusion 2-functor $\mathsf{Inv}\ \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{I}\mathrm{nv}\ \mathbf{C}$ lifts to the homotopy categories as $\mathtt{I} : \mathsf{Pro}\ \mathbf{C} \longrightarrow \mathbb{P}\mathrm{ro}\ \mathbf{C}$. Since level homotopy equivalences in $\mathsf{Pro}\ \mathbf{C}$ become homotopy equivalences in $\mathbb{P}\mathrm{ro}\ \mathbf{C}$, then the inclusion 2-functor $\mathtt{I}$ takes level homotopy equivalences to isomorphisms. It follows [2] that there exists a unique functor $\mathtt{U} : \mathsf{Ho}(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbb{P}\mathrm{ro}\ \mathbf{C}$ making the following diagram

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Pro}\ \mathbf{C} \arrow[r, "\mathrm{P}_\Sigma"] \arrow[dr, "\mathtt{I}"'] & \mathsf{Ho}(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C}) \arrow[d, "\mathtt{U}"] \\ & \mathbb{P}\mathrm{ro}\ \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

commutative, where P_Σ is the localization functor.

Theorem 4.9. *The functor* $\mathtt{U} : \mathsf{Ho}(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C}) \longrightarrow \mathbb{P}\mathrm{ro}\ \mathbf{C}$ *is an isomorphism of categories.*

Proof. Let us note first that all functors involved in the above diagram are identical on objects. Let now $\varphi : \mathtt{X} \longrightarrow \mathtt{Y}$ be a coherent map of systems.

By (4.7) we can assume that φ is actually a psd-transformation between systems indexed over the same directed set. By (3.6) there is a unique natural transformation $\varphi' : \mathtt{X}' \to \mathtt{Y}$ which is homotopic in $\mathbb{P}\mathrm{ro}\ \mathbf{C}$ to the composition

$$\mathtt{X}' \xrightarrow{q_{\mathtt{X}}} \mathtt{X} \xrightarrow{\varphi} \mathtt{Y}$$

Recall (3.5) that $q_{\mathtt{X}}$ is a level homotopy equivalence, then in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C})$ consider the morphism

$$[\mathtt{X} \xleftarrow{q_{\mathtt{X}}} \mathtt{X}' \xrightarrow{\varphi'} \mathtt{Y}]\ .$$

It follows that (see [2], A.4)

$$\mathtt{U}(\varphi'(q_{\mathtt{X}})^{-1}) = \mathtt{U}(\varphi')\mathtt{U}(q_{\mathtt{X}})^{-1} = I(\varphi')I(q_{\mathtt{X}})^{-1} = \varphi' p_{\mathtt{X}} : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$$

and it is clear that $\varphi' p_{\mathtt{X}}$ is homotopic to φ in $\mathbb{I}\mathrm{nv}\ \mathbf{C}$, so that they give the same morphism in $\mathbb{P}\mathrm{ro}\ \mathbf{C}$, hence the functor $\mathtt{U}$ is full. Let now $\phi, \psi : \mathtt{X} \to \mathtt{Y}$ be two morphisms in $\mathsf{Ho}(\mathsf{Pro}\ \mathbf{C})$. We may assume without loss of generality (4.8) that they correspond to homotopy classes $\phi = [\mathtt{f}]$, $\psi = [\mathtt{g}]$ of maps of systems $\mathtt{f}, \mathtt{g} : \hat{\mathtt{X}} \to \hat{\mathtt{Y}}$. Then, assuming that $\mathtt{U}(\phi) = \mathtt{U}(\psi)$ amounts to assume that $\mathtt{f}$ and $\mathtt{g}$ are coherently homotopic maps of systems. This means that there is an increasing map $F : M \to \Lambda$ and a family of homotopies

$$F_\mu : f_\mu x_{f(\mu)F(\mu)} \Rightarrow g_\mu x_{g(\mu)F(\mu)}$$

in the ge-category $\mathbf{C}$, such that $F_\mu x_{F(\mu)F(\mu')} = y_{\mu\mu'} F_{\mu'}$, for $\mu \leq \mu'$. It follows that $\mathtt{F} = (F, F_\mu) : \hat{\mathtt{X}} \times I \to \hat{\mathtt{Y}}$ is a naive homotopy connecting $\mathtt{f}$ and $\mathtt{g}$, thus $\mathtt{U}$ is also a faithful functor. □

Let us note that $\mathbb{P}\mathrm{ro}\ \mathbf{Top}$ is also isomorphic to the coherent pro-homotopy category of Lisića and Mardešić $CH(\mathsf{Pro}\mathbf{Top})$, see [17], Theorem 4.3.8.

References

[1] M. Artin, B. Mazur, *Etale homotopy*, Lectures Notes in Math. 100, Springer Verlag, 1969.

[2] F.W. Bauer, J. Dugundji, *Categorical homotopy and fibrations*, Trans. Amer. Math. Soc. 140 (1969), 239–256.

[3] G.J. Bird, G.M. Kelly, A.J. Power, R.H. Street, *Flexible limits for 2-categories*, J. Pure Appl. Algebra 61 (1989), 1–27.

[4] R. Blackwell, G.M. Kelly, A.J. Power, *Two-dimensional monad theory*, J. Pure Appl. Algebra 59 (1989), 1–41.

[5] R. Brown, *Topology*, Ellis Horwood, 1988.

[6] F.W. Cathey, J. Segal, *Strong shape theory and resolutions*, Topology Appl. 15 (1983), 119–130.

[7] M.E. Descotte, E.J. Dubuc, *A theory of 2-pro-objects*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. 55, No. 1 (2014), 2-36.

[8] D.A. Edwards, H.M. Hastings, *Čech and Steenrod homotopy theories*, Lectures Notes in Math. 542, Springer Verlag, 1976.

[9] P.H.H. Fantham, E.J. Moore, *Groupoid enriched categories and homotopy theory*, Can. J. Math. 3 (1983), 385–416.

[10] N. Gambino, *Closed categories, lax limits and homotopy limits*, Math. Proc. Cam. Phil. Soc., 145 (2008), 127–158.

[11] A. Grothendieck, J.L. Verdier, *Prefascieaux*, in Lectures Notes in Math. 269, Springer Verlag, 1972.

[12] P.J. Higgins, *Categories and groupoids*, Van Nostrand Reinhold Math. St. 32, 1971.

[13] D.C. Isaksen, *A model structure on the category of pro-simplicial sets*, Trans. Amer. Mat. Soc. 353 (2001), 2805–2841.

[14] D.C. Isaksen, *Strict model structure for pro-categories*, in Categorical decomposition techniques in Algebraic Topology (Isle of Skye, 2001), Progr. Math. 215, (2004) 179–198

[15] G.M. Kelly, R. Street, *Review of the elements of 2-categories*, Lectures Notes in Math. 420, Springer Verlag, (1974), 75–103

[16] S. Lack, *A Quillen model structure for 2-categories*, K-Theory, 26(2), (2002), 171-205

[17] S. Mardešić, *Strong shape and homology*, Springer Verlag, 2000.

[18] S. Mardešić, J. Segal, *Shape theory*, North Holland, 1982.

[19] T. Porter, *Stability results for topological spaces*, Math. Z. 140 (1974), 1–21

[20] T. Porter, *On the two definitions of* $ho(Pro(\mathbf{C}))$, Topology Appl. 28 (1988), 289–293

[21] M. Shulman, http://mathoverflow.net/a/34731

[22] L. Stramaccia, *2-Categorical aspects of strong shape*, Topology Appl. 153 (2006), 3007-3018.

Luciano Stramaccia
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Perugia
via Vanvitelli, 06123 Perugia (Italy)
stra@dmi.unipg.it