cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques

créés par CHARLES EHRESMANN en 1958
dirigés par Andrée CHARLES EHRESMANN
VOLUME LVI-1, 1er trimestre 2015

SOMMAIRE

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES *Vol. LVI-1 (2015)*

DUALITY FOR GENERIC ALGEBRAS

by Anders KOCK

Résumé. Les théorèmes de dualité affirment souvent que l'application canonique δ d'un objet dans son dual double (ou peut-être dual double convenablement "restreint") est un isomorphisme. Les deux dualisations utilisées dans la formation du dual double sont relatives à un objet basique R. Un exemple est la dualité de Gelfand. Dans la présente note, nous prouvons que l'algèbre générique R d'une théorie algébrique peut servir comme objet basique pour un tel théorème de dualité: le dual double (convenablement restreint) d'un objet représentable $y(C)$, dans le topos de préfaisceax $\mathcal{E}$ dans lequel R vit, est isomorphe, via δ, à $y(C)$ lui-même. La preuve utilise un "couplage complet", – une notion qui nous abstrayons de la preuve.
Parmi les corrolaires immédiats de ceci, on obtient que l'anneau générique R est un modèle pour la géométrie différentielle synthétique.
Abstract. Duality theorems often assert that the canonical map δ of an object into its double dual (possibly a "restricted" double dual) is an isomorphism. Both dualizations used in the formation of the double dual are with respect to some basic object R. An example is Gelfand duality. In this note, we prove that the generic algebra R for an algebraic theory serves as a basic object for such a duality theorem: the (suitably restricted) double dual of any representable object $y(C)$, in the presheaf topos $\mathcal{E}$ in which R lives, is isomorphic, via δ, to $y(C)$ itself. The proof goes via a "complete pairing" – a notion which we abstract from the proof.
Among the immediate corollaries of this is that the generic commutative ring R is a model for synthetic differential geometry.

Keywords. duality, generic algebra, classifying topos.
Mathematics Subject Classification (2010). 18B25, 18D35.

The main result presented here (Theorem 5) was presented at the 17th PSSL in 1980 in Sussex, and announced in [7] (1981). I apologize for the long delay in publishing a complete account. I would like to thank Marta Bunge for several constructive suggestions.

1. Preliminaries

We consider a Cartesian closed category $\mathcal{E}$. For Q and R objects in $\mathcal{E}$, we denote the exponential object R^Q by $Q \pitchfork R$. Any map $k : P \times Q \to R$ gives rise to maps $i : Q \to P \pitchfork R$ and $j : P \to Q \pitchfork R$, the exponential adjoints (or exponential transposes) of k; the one comes about from the other by using the symmetry $P \times Q \cong Q \times P$. The maps $i : Q \to P \pitchfork R$ and $j : P \to Q \pitchfork R$ are called *twisted exponential adjoints* of each other. They are related to each other by a map δ, in a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "j"'] & (P \pitchfork R) \pitchfork R \arrow[dl, "i \pitchfork R"] \\
Q \pitchfork R &
\end{tikzcd}$$

where δ itself is the twisted exponential adjoint of the identity map of $P \pitchfork R$. We refer to δ as a "Dirac" map - a natural "embedding" of an object P into its double dual w.r.to a fixed R. (It need not be a monic, but often is.) There is a similar diagram with $Q \to (Q \pitchfork R) \pitchfork R$. All this belongs to the elementary theory of Cartesian closed categories, or to "pure lambda calculus".

We now assume that $\mathcal{E}$ is a topos with a natural number object. For $\mathbb{T}$ a finitary algebraic theory, the category $\mathbb{T}\text{-Alg}(\mathcal{E})$ of $\mathbb{T}$-algebra objects in $\mathcal{E}$ is monadic over $\mathcal{E}$, by an $\mathcal{E}$-enriched monad (cf. [11], [2]), and therefore the theory of [1], [4], [5], [6] etc. is available. Thus, if R is a $\mathbb{T}$-algebra in $\mathcal{E}$, and $P \in \mathcal{E}$ is any object, $P \pitchfork R$ inherits a $\mathbb{T}$-structure from that of R (here R also denotes the underlying object in $\mathcal{E}$ of the $\mathbb{T}$-algebra R). And $\mathbb{T}\text{-Alg}(\mathcal{E})$ is enriched over $\mathcal{E}$: if Q and R are $\mathbb{T}$-algebras in $\mathcal{E}$, the $\mathcal{E}$-valued hom functor thus gives an object $Q \pitchfork_{\mathbb{T}} R$, which in turn is a subobject of $Q \pitchfork R$. Also, for a map $k : P \times Q \to R$, (with Q and R $\mathbb{T}$-algebras) it makes sense to ask whether k is a $\mathbb{T}$-homomorphism in the second variable: it can be expressed that the exponential transpose $j : P \to Q \pitchfork R$ factors across the inclusion $Q \pitchfork_T R \subseteq Q \pitchfork R$, or equivalently, that the exponential transpose $i : Q \to P \pitchfork R$ is a $\mathbb{T}$-homomorphism.

For any finitary algebraic theory $\mathbb{T}$, one has a certain topos $\mathcal{E}$ with a $\mathbb{T}$-algebra object R in it, which classifies $\mathbb{T}$-algebra objects in arbitrary toposes;

this $\mathbb{T}$-algebra $R \in \mathcal{E}$ is called the *generic* $\mathbb{T}$-algebra. The description of this "classifying topos"$\mathcal{E}$, and the $\mathbb{T}$-algebra R in it, is simple and well known: $\mathcal{E}$ is the presheaf topos $[FP\mathbb{T}, \text{Set}]$, where $FP\mathbb{T}$ is the category of finitely presented $\mathbb{T}$-algebras, and R is the "forgetful functor" $FP\mathbb{T} \to$ Set; see e.g. [13] Ch. VIII, or [3] Ch. D.3. For any $C \in FP\mathbb{T}$, we have two particular objects in $\mathcal{E}$, namely $y(C)$, where y is the Yoneda embedding, and $\gamma^*(C)$, where γ^* is left adjoint to the global sections functor $\gamma_* : \mathcal{E} \to$ Set. There is a canonical pairing

$$\gamma^*(C) \times y(C) \to R,$$

which we shall describe. The two exponential transposes of this map give rise to some duality isomorphisms.

2. Exponential objects in presheaf toposes

For the case where $\mathcal{E}$ is a presheaf topos $[\mathbb{A}, \text{Set}]$, we shall recall one of the processes of exponential transposition in elementary terms (the other one then comes by the symmetry). The Set-valued hom-functor of $\mathbb{A}$ we denote by square brackets like $[X, Y]$. First, we describe the exponential object $Q \pitchfork R$ itself, namely for $B \in \mathbb{A}$,

$$(Q \pitchfork R)(B) = \int_{g \in B/\mathbb{A}} \text{Hom}(Q(X), R(X)),$$

where X denotes the codomain of g, and where Hom denotes the hom functor for the category of sets. (We shall also use the notation $\int_{g:B\to X}$, for $\int_{g\in B/\mathbb{A}}$.) Thus, for an object $S \in [\mathbb{A}, \text{Set}]$ to qualify for the name $Q \pitchfork R$, the object S should for each $B \in \mathbb{A}$ be equipped with maps $\pi_g : S(B) \to \text{Hom}(Q(X), R(X))$ for each object $g \in B/\mathbb{A}$ (X denoting the codomain of g), subject to certain naturality conditions and a certain universal property. Then in terms of the maps π_g, the exponential transpose of a map $k : P \times Q \to R$ is given as the map $j = \hat{k} : P \to Q \pitchfork R$, with $(\hat{k})_B$ the unique map such that for each $g \in B/\mathbb{A}$, we have

$$\pi_g \circ (\hat{k})_B = \widehat{(k_X)} \circ P(g). \tag{1}$$

Here k_X is a map $P(X) \times Q(X) \to R(X)$ in the category of sets, so its exponential transpose $\widehat{(k_X)} : P(X) \to \text{Hom}(Q(X), R(X))$ makes immediately sense.

Two cases will be of particular interest, namely the case where Q is representable, and where Q is constant.

In the case where Q is representable, say $Q = y(C)$ for $C \in \mathbb{A}$, one has a well known explicit presentation of $Q \pitchfork R$, provided binary coproducts $\otimes$ exist in $\mathbb{A}$. Then $y(C) \pitchfork R$ may be taken to be $R \circ (- \otimes C) : \mathbb{A} \to \text{Set}$; let us be explicit about the maps π_g which qualify $R \circ (- \otimes C)$ as $y(C) \pitchfork R$. So let $B \in \mathbb{A}$, and let $g : B \to X$. Then

$$\pi_g : R(B \otimes C) \to \mathrm{Hom}([C, X], R(X)) = \Pi_{f \in [C,X]} R(X)$$

is described by describing its f-coordinate, for $f \in [C, X]$:

$$p_f \circ \pi_g := R(\{g, f\}) \tag{2}$$

where $\{g, f\} : B \otimes C \to X$ denotes that map out of the coproduct whose components are g and f, respectively, and where p_f denotes the projection to the f- factor of the product (or, seeing the latter as $\mathrm{Hom}([C, X], R(X))$, as evaluation at the element $f \in [C, X]$).

In the case where Q is constant $Q = \gamma^*(C)$ for some set C, i.e. $Q(X) = C$ for all $X \in \mathbb{A}$, we have the following simple presentation of $(\gamma^*(C) \pitchfork R)(B)$; namely

$$(\gamma^*(C) \pitchfork R)(B) = \mathrm{Hom}(C, R(B)), \tag{3}$$

which qualifies for this name by virtue of $\pi_g = \mathrm{Hom}(C, R(g))$, for $g : B \to X$. This can also be seen from the $\int$ formula for $(\gamma^*(C) \pitchfork R)(B)$; for

$$\int_{g:B\to X} \mathrm{Hom}(C, R(X)) \cong \mathrm{Hom}(C, \int_{g:B\to X} R(X)) \cong \mathrm{Hom}(C, R(B)),$$

using that $\int_{g:B\to X} R(X) \cong R(B)$ via π_{1_B}, by Yoneda's Lemma.

3. $\mathbb{T}$-algebras in a topos

Let $\mathcal{E}$ be a topos. The category $\mathbb{T}\text{-Alg}(\mathcal{E})$ of $\mathbb{T}$-algebras in $\mathcal{E}$ will be monadic over $\mathcal{E}$ ([11] and [2] Chapter V). This monad will in fact be $\mathcal{E}$-enriched; see (the proof of) Lemma 5.5 in [2]. We denote the $\mathcal{E}$ enriched hom functor of it by $\pitchfork_{\mathbb{T}}$. If X and Y are objects in $\mathcal{E}$ carrying $\mathbb{T}$-structures, we have $X \pitchfork_T$

$Y \subseteq X \pitchfork Y$. If $S \in \mathcal{E}$, and Y carries $\mathbb{T}$-structure, then $S \pitchfork Y$ inherits a $\mathbb{T}$-structure, in a canonical way. But for $\mathbb{T}$-algebras X and Y, the $\mathbb{T}$-structure, which $X \pitchfork Y$ inherits from Y, need not restrict to one on $X \pitchfork_{\mathbb{T}} Y$, unless $\mathbb{T}$ is a commutative theory (and e.g. the theory of commutative rings is not commutative).

If $R \in \mathbb{T}\text{-Alg}(\mathcal{E})$, we have the category $R/(\mathbb{T}\text{-Alg}(\mathcal{E}))$, which we call the category of R-algebras, denoted $R\text{-Alg}(\mathcal{E})$ or just $R\text{-Alg}$. It, too, is enriched in $\mathcal{E}$, with enriched hom functor denoted $\pitchfork_R$. (When $\mathbb{T}$ is the theory of commutative rings, and R is such a ring, the terminology "R-algebra" agrees with the standard use in commutative algebra; however, $\pitchfork_R$ may in this context also mean something different, namely the set (or object) of "R-linear maps", as relevant in the theory of Schwartz distributions, (typically with $R = \mathbb{R}$ or $= \mathbb{C}$); see also [8] and [10], which deal with such cases.)

When X and Y are R-algebras, we have $X \pitchfork_R Y \subseteq X \pitchfork_{\mathbb{T}} Y \subseteq X \pitchfork Y$.

We shall use $\otimes$ to denote finite coproducts in the category of $\mathbb{T}$-algebras, because one primary example is that of some category of commutative rings; and also, because the notation $+$ may incorrectly suggest that products $\times$ distribute over the coproduct $+$. There is an $\mathcal{E}$-enriched (monadic) adjointness between $\mathbb{T}$-algebras in $\mathcal{E}$, and R-algebras (in $\mathcal{E}$); the left adjoint is $R \otimes -$.

4. The pairing and its transposes

We now specialize to the case where $\mathbb{A}$ is some small category of $\mathbb{T}$-algebras, closed under finite coproducts (in the examples below, $\mathbb{A}$ is the category $FP\mathbb{T}$ of finitely presented $\mathbb{T}$-algebras, and the forgetful functor $R : FP\mathbb{T} \to \text{Set}$ lives in the topos $\mathcal{E} = [\mathbb{A}, \text{Set}]$ and is the generic $\mathbb{T}$-algebra). We consider $\mathcal{E} = [\mathbb{A}, \text{Set}]$ and we denote the Yoneda embedding $\mathbb{A}^{op} \to [\mathbb{A}, \text{Set}]$ by y.

Let γ_* be the global-sections functor of $\mathcal{E}$; it has a left adjoint $\gamma^* : \text{Set} \to [\mathbb{A}, \text{Set}] = \mathcal{E}$. It associates to a set S the functor $\mathbb{A} \to \text{Set}$ whose value is the functor with constant value S. Since γ^* preserves finite limits, it preserves algebraic structure, thus if $C \in \mathbb{A}$, C carries $\mathbb{T}$-structure, and therefore $\gamma^*(C)$ will carry structure of $\mathbb{T}$-algebra in $\mathcal{E}$. (We will also, as is costumary, use C as notation for underlying set of the $\mathbb{T}$- algebras; similarly $\gamma^*(C)$ denotes both a $\mathbb{T}$-algebra object in $\mathcal{E}$, and its underlying "unstructured" object.)

By R, we denote the "forgetful" functor $\mathbb{A} \to \text{Set}$. As an object in $\mathcal{E}$, it carries $\mathbb{T}$-algebra structure, and hence so does any object of the form $S \pitchfork R$.

Let $C \in \mathbb{A}$. We describe a map $k^C : \gamma^*(C) \times y(C) \to R$, and its two exponential transposes $i : y(C) \to \gamma^*(C) \pitchfork R$ and $j : \gamma^*(C) \to y(C) \pitchfork R$. These maps will be natural in C, (for k in the "extra"-sense of [12] IX 4). Since C will be fixed in the following, we shall omit the upper index C from notation. The map $k = k^C$ will be a $\mathbb{T}$-homomorphism in the first variable in the sense of [6]. Therefore, by loc.cit., i will factor through $\gamma^*(C) \pitchfork_{\mathbb{T}} R \subseteq \gamma^*(C) \pitchfork R$, and j will be a $\mathbb{T}$-homomorphism.

First, we describe k by describing $k_B : \gamma^*(C)(B) \times y(C)(B) \to R(B)$. Recall that $\gamma^*(C)(B) = C$ for all B, that $y(C)(B) = [C, B]$ (where square brackets denote the hom functor of $\mathbb{A}$), and recall that $R(B) = B$. Then the map $k_B : C \times [C, B] \to B$ is simply the evaluation map $(c, f) \mapsto f(c)$ for $c \in C$ and $f : C \to B$ in $\mathbb{A}$. It is a $\mathbb{T}$-homomorphism in the variable c because f is a $\mathbb{T}$-homomorphism. Thus, we have three maps

$$
\begin{aligned}
k :&\gamma^*(C) \times y(C) \to R \text{ , a } \mathbb{T}\text{-homomorphism in the first variable} && (4)\\
i :&y(C) \to \gamma^*(C) \pitchfork_{\mathbb{T}} R \subseteq \gamma^*(C) \pitchfork R && (5)\\
j :&\gamma^*(C) \to y(C) \pitchfork R \text{ , a } \mathbb{T}\text{-homomorphism} && (6)
\end{aligned}
$$

Using the explicit description of exponential transposition given above, and using (3), it is straightforward to see that $i_B : y(C)(B) \to (\gamma^*(C) \pitchfork R)(B)$ is given by the following recipe. We need to give a map $i_B : y(C)(B) \to \mathrm{Hom}(C, R(B))$; this is just the inclusion $[C, B] \subseteq \mathrm{Hom}(C, B)$, which is the B-component of the inclusion $\gamma^*(C) \pitchfork_{\mathbb{T}} R \subseteq \gamma^*(C) \pitchfork R$. This proves

Proposition 1. *The map $i : y(C) \to \gamma^*(C) \pitchfork_{\mathbb{T}} R$ is an isomorphism.*

The right hand side of this isomorphism deserves the name "Spec$_R C$", since it takes finite colimits to limits, and, for $C =$ the free $\mathbb{T}$-algebra in one generator, it gives R, cf. [9] I.12; the notion "Spec$_R C$" does not depend on the specifics of the topos $\mathcal{E}$.

Next, we study the $\mathbb{T}$-homomorphism $j : \gamma^*(C) \to y(C) \pitchfork R$. For $B \in \mathbb{A}$, we consider $j_B : \gamma^*(C)(B) \to (y(C) \pitchfork R)(B)$. Let us first note that the transpose of the set theoretic map $k_X : C \times [C, X] \to X$ is the "Dirac" map $\widehat{k_X} : C \to \mathrm{Hom}([C, X], X)$. Next, we utilize the "coproduct" description of $y(C) \pitchfork R = R(-\otimes C)$, being an exponential object $y(C) \pitchfork R$ by virtue of the maps π_g described in (2) above. In terms of this, we prove

Proposition 2. *The map $j : \gamma^*(C) \to y(C) \pitchfork R = R(- \otimes C)$ has for its B-component just the inclusion map $\mathrm{incl}_2 : C \to B \otimes C$ into the second component of the coproduct.*

Proof. Using the explicit characterization of exponential transposition given in (1), it suffices to see that incl_2 has the property that (for $g : B \to X$), $\pi_g \circ \mathrm{incl}_2 = \widehat{k_X}$ - note that the $P(g)$ occuring in (1) here is an identity map. We analyzed above that $\widehat{k_X}$ here is the relevant Dirac map δ, so the task is to prove that the upper triangle in the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\mathrm{incl}_2"] \arrow[dr, "\delta"] \arrow[ddr, "f"'] & & B \otimes C \arrow[dl, "\pi_g"'] \arrow[ddl, "{\{g,f\}}"] \\
& ([C,X],X) \arrow[d, "p_f"] & \\
& X &
\end{tikzcd}$$

and this follows if for all $f : C \to X$, it commutes after postcomposition by p_f, displayed as the vertical arrow in the diagram. Here we write $([C,X],X)$ instead of $\mathrm{Hom}([C,X],X)$, for typographical reasons. The right hand triangle commutes, by construction of π_g, and the left hand triangle commutes, by lambda calculus. Finally, the outer triangle commutes, by definition of $\{g,f\}$. Therefore, the upper triangle commutes, and this shows that incl_2 is indeed the claimed exponential transpose of k. This proves the Proposition.

We already know from more abstract reasons that j is a $\mathbb{T}$-homomorphism; this also appears explicitly from the above Proposition, since the coproduct inclusion $C \to B \otimes C$ is a $\mathbb{T}$-homomorphism. Now $B \otimes C$ is not only a $\mathbb{T}$-algebra, but it is a B-algebra by virtue of the coproduct inclusion $\mathrm{incl}_1 : B \to B \otimes C$. Any $\mathbb{T}$-algebra X extends uniquely to a B-algebra $B \otimes X$, the "free B-algebra in X". The canonical extension of the $\mathbb{T}$-algebra morphism $i_2 : C \to B \otimes C$ to a B-algebra morphism $B \otimes C \to B \otimes C$ is clearly the identity map. The R-algebra structure $R \to y(C) \pitchfork R$ of

$y(C) \pitchfork R = (- \otimes C)$ has for its B-component just incl_1. Since coproducts $\otimes$ of $\mathbb{T}$-algebras in a presheaf topos are calculated coordinatewise, the free R-algebra $R \otimes \gamma^*(C)$ on $\gamma^*(C)$ has for its B component $B \otimes C$. This proves

Theorem 3. *The extension of the* $\mathbb{T}$*-homomorphism* $j : \gamma^*(C) \to y(C) \pitchfork R$ *to an* R*-algebra morphism* $\overline{j} : R \otimes \gamma^*(C) \to y(C) \pitchfork R$ *is an isomorphism.*

Example 1. If $\mathbb{T}$ is the theory of commutative rings, and C is the ring of dual numbers $\mathbb{Z}[\epsilon]$, then in the commutative ring classifier topos $[FP\mathbb{T}, \mathrm{Set}]$, the isomorphism $\overline{j}$ in this Theorem gives in particular the isomorphism of the simplest KL axiom, saying that the map $R \times R \to R^D$ is an isomorphism of R-algebras (with algebra structure on $R \times R$ being “the ring of dual numbers $R[\epsilon]$). (Here $D = y(\mathbb{Z}[\epsilon])$). – Similarly $R[X]$ (= the free R-algebra in one generator) is isomorphic, via $\overline{j}$ for $\mathbb{Z}[X]$, to $R \pitchfork R$.

Example 2. If $\mathbb{T}$ is the initial algebraic theory (so $\mathbb{T}$-algebras are just sets), the category $FP\mathbb{T}$ is the category S_0 of finite sets, and the generic algebra R is called the generic *object*. The classifying topos $[S_0, \mathrm{Set}]$ is called the *object classifier*, cf. [2] Ch. IV (they write U rather than R). Coproducts $\otimes$ of “algebras” are here better denoted $+$; and the isomorphism $\overline{j}$ in this case is a map $R + 1 \to R \pitchfork R$. The “added” point in the domain of this $\overline{j}$ is mapped by $\overline{j}$ to the identity map of R.

If X is a $\mathbb{T}$-algebra in $\mathcal{E}$, and Z is an R-algebra, we have an isomorphism in $\mathcal{E}$ between $X \pitchfork_{\mathbb{T}} Z$ and $(R \otimes X) \pitchfork_R Z$, expressing the enrichment of the adjointness between $\mathbb{T}$-algebras in $\mathcal{E}$ and R-algebras (in $\mathcal{E}$). Using the notion of R-algebra and this isomorphism, we may reformulate Proposition 1. There is no harm in denoting the isomorphism $y(C) \to \gamma^*C \pitchfork_{\mathbb{T}} R$ of Proposition 1 and the isomorphism $y(C) \to (R \otimes \gamma^*C) \pitchfork_T R$, by the same symbol i; so Proposition 1 is reformulated:

Theorem 4. *The map* $i : y(C) \to (R \otimes \gamma^*(C)) \pitchfork_R R$ *is an isomorphism.*

5. Duality

The theme of double dualization occurs in many guises in many areas of mathematics. In a Cartesian closed category, the simplest is the full double dualization functor $(- \pitchfork R) \pitchfork R$ into an object R; there is a natural transformation, whose instantiation at X is a map $\delta_X : X \to (X \pitchfork R) \pitchfork R$, described in Section 1 (the notation "δ" is for "Dirac"). There are restricted variants of δ, in case R carries some algebraic structure, say, of $\mathbb{T}$-algebra. Then one has $X \to (X \pitchfork R) \pitchfork_{\mathbb{T}} R$ (as studied above); and in case that also X carries $\mathbb{T}$-structure, we have a $\mathbb{T}$-homomorphism $X \to (X \pitchfork_{\mathbb{T}} R) \pitchfork R$, obtained by postcomposing $\delta_X : X \to (X \pitchfork R) \pitchfork R$ with $s \pitchfork R$, where s denotes the inclusion of $X \pitchfork_{\mathbb{T}} R$ into $X \pitchfork R$. This composite will also be denoted δ_X. Similarly, if X is an R-algebra, we have an R-algebra homomorphism $\delta_X : X \to (X \pitchfork_R R) \pitchfork R$.

In the context of classifying toposes and generic algebras, as studied above, the dualization functors (are contravariant and) go from "geometric objects" (objects in $\mathcal{E}$) to "algebraic objects" ($\mathbb{T}$-algebras), and vice versa; the object R is, as a geometric object, the *line*, but it is canonically endowed with a $\mathbb{T}$-algebra structure, so it lives in both worlds. Similarly, $C \in \mathbb{A}$ is a $\mathbb{T}$-algebra, but it represents a geometric object $y(C)$. This is the reason for the title of the announcement [7].

Duality Theorems often have as conclusion that one or the other of the Dirac maps mentioned above is an isomorphism. Such duality results occur in our context as Corollaries of the results above. Combining the isomorphisms $y(C) \cong \gamma^*C \pitchfork_{\mathbb{T}} R$ ($\cong (R \otimes \gamma^*C) \pitchfork_R R$) (Theorem 4) with $R \otimes \gamma^*C \cong y(C) \pitchfork R$ (Theorem 3), we conclude $y(C) \cong (y(C) \pitchfork R) \pitchfork_R R$. However, the following main Theorem says something more precise, namely that the canonical "Dirac" map is an isomorphism.

Theorem 5. *For any $C \in \mathbb{A}$, we have that*

$$\delta_{y(C)} : y(C) \to (y(C) \pitchfork R) \pitchfork_R R$$

is an isomorphism in $\mathcal{E}$.

This one may see as a "Gelfand duality" result; it will follow from a duality result concerning the R-algebra $R \otimes \gamma^*(C)$:

Theorem 6. *For any $C \in \mathbb{A}$, we have that*

$$\delta_{R\otimes\gamma^*(C)} : R \otimes \gamma^*(C) \to ((R \otimes \gamma^*(C)) \pitchfork_R R) \pitchfork R$$

is an isomorphism of R-algebras in $\mathcal{E}$.

We begin by proving Theorem 6. We replace the pairing $k : \gamma^*(C) \times y(C) \to R$ (which is a $\mathbb{T}$-homomorphism in the first variable) by its extension to a pairing

$$\overline{k} : (R \otimes \gamma^*(C)) \times y(C) \to R, \tag{7}$$

(which is an R-algebra morphism in the first variable), and its two exponential transposes $\overline{i}$ and $\overline{j}$; here, $\overline{i}$ factors as

$$y(C) \xrightarrow{\ i\ } (R \otimes \gamma^* C) \pitchfork_R R \xrightarrow{\ s\ } (R \otimes \gamma^* C) \pitchfork R$$

where s denotes the inclusion of the $\pitchfork_R$ into $\pitchfork$; and $\overline{j}$ is the extension of the $\mathbb{T}$-homomorphism j to an R-homomorphism. By "pure lambda calculus", as stated in Section 1, we have commutativity of the upper left triangle in

$$\begin{tikzcd}
R \otimes \gamma^* C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\overline{j}"', "\cong"] & ((R \otimes \gamma^* C) \pitchfork R) \pitchfork R \arrow[dl, "\overline{i} \pitchfork R"'] \arrow[d, "s \pitchfork R"] \\
yC \pitchfork R & ((R \otimes \gamma^* C) \pitchfork_R R) \pitchfork R. \arrow[l, "\cong"', "i \pitchfork R"]
\end{tikzcd}$$

The composite $(s \pitchfork R) \circ \delta$ in this diagram is the Dirac map δ considered in the statement of the Theorem. From the commutativity of the diagram, and the fact that $\overline{j}$ and $i \pitchfork R$ are isomorphisms (Theorems 3 and 4), we deduce that the δ of the Theorem is an isomorphism, as claimed.

To prove Theorem 5, we apply the dualization functor $- \pitchfork_R R$ to the isomorphism of Theorem 6, and conclude that we get an isomorphism $\delta_X \pitchfork_R R$ (in $\mathcal{E}$) from the right to the left in

$$\begin{tikzcd}
(R \otimes \gamma^* C) \pitchfork_R R \arrow[r, shift right, "\delta_Y"'] & (((R \otimes \gamma^* C) \pitchfork_R R) \pitchfork) R) \pitchfork_R R \arrow[l, shift right, "\delta_X \pitchfork_R R"']
\end{tikzcd}$$

where $X := R \otimes \gamma^* C$ and $Y := (R \otimes \gamma^* C) \pitchfork_R R$. However, the map δ_Y here is a splitting of $\delta_X \pitchfork_R R$, by the triangle identity for the adjointness

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, shift left, "- \pitchfork R"] & (R\text{-Alg})^{op} \arrow[l, shift left, "- \pitchfork_R R"]
\end{tikzcd}$$

(or by "pure lambda-calculus"). But a splitting of an isomorphism is an isomorphism, so we conclude that δ_Y is an isomorphism. Now by Theorem 4, the Y here is isomorphic to $y(C)$, whence also $\delta_{y(C)}$ is an isomorphism, proving Theorem 5.

Note that since $\mathbb{A}$ is assumed to have finite coproducts, it follows that the representable objects $y(C)$ are atoms, in the sense that $y(C) \pitchfork - : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ have right adjoints. One might conjecture that the (Gelfand-type) duality Theorem 5 applies not only to the representables $y(C)$, but to any atom in $\mathcal{E}$. In this case, the Theorem for $\mathcal{E}, R$ can be formulated without reference to the specific construction of $\mathcal{E}$.

6. Complete pairings

The Theorems 3 and 4 together provide an example of a *complete pairing* in a sense to be described now. I don't (yet) know many examples, but the notion itself seems to have an aesthetic value.

Let T_1 and T_2 be $\mathcal{E}$-enriched (= strong) monads on a Cartesian closed category $\mathcal{E}$, and let $R \in \mathcal{E}$ be an object equipped with algebra structures for both the monads; these two structures should commute with each other, in the sense described in [5], Section 4. Let P be a T_1-algebra and Q a T_2-algebra, and let $k : P \times Q \to R$ be a map which is a T_1-homomorphism in the first variable, and a T_2-homomorphism in the second varaible. There results, by general theory, a T_1- homomorphism $j : P \to Q \pitchfork_{T_2} R$, and a T_2-homomorphism $i : Q \to P \pitchfork_{T_1} R$. Then k deserves the name *complete pairing* if both i and j are isomorphisms. A complete pairing gives rise to two Dirac maps, both of which are isomorphisms.

If T_1 is the monad whose algebras are R-algebras, as considered above, and if T_2 is the identity monad, then the $\overline{k}$ considered in (7) satisfies the conditions, by the Theorems 3 and 4, and these theorems imply the Theorems 5 and 6. Another example is with T_1 the theory of boolean algebras, T_2 the inital theory, $\mathcal{E}$ the category of sets, and $R = 2$. Then for any finite set C, one has a complete pairing, namely the evaluation map $(C \pitchfork R) \times C \to R$. This example one may see as the origin of Stone duality.

References

[1] M. Bunge, Relative functor categories and categories of algebras, J. Algebra 11 (1969), 64-101.

[2] P.T. Johnstone and G.C. Wraith, Algebraic theories in toposes, in *Indexed Categories and Their Applications* (P.T. Johnstone and R. Paré, eds.), Springer Lecture Notes in Math. 661 (1978), 141-242.

[3] P.T. Johnstone, *Sketches of an Elephant. A Topos Theory Compendium*, Oxford University Press, 2002.

[4] A. Kock, Monads on symmetric monoidal closed categories, Arch. Math. (Basel) 21 (1970), 1-10.

[5] A. Kock On double dualization monads, Math.Scand. 27 (1970), 151-165.

[6] A. Kock, Bilinearity and Cartesian closed monads, Math.Scand. 29 (1971), 161-174.

[7] A. Kock, A general algebra/geometry duality, and synthetic scheme theory, Prepublications Math., U. Paris Nord 23 (1981), 33-34.

[8] A. Kock, Some problems and results in synthetic functional analysis, in *Category Theoretic Methods in Geometry*, Proceedings Aarhus 1983 (A. Kock, ed.), Aarhus Various Publication Series 35 (1983) 168-191.

[9] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, LMS Lecture Notes Series 51, Cambridge University Press 1981; 2nd ed. LMS Lecture Notes Series 333, Cambridge University Press 2006.

[10] A. Kock, Commutative monads as a theory of distributions, Theory and Appl. of Categories 26 (2012), 97-131.

[11] B. Lesaffre, Structures algébriques dans les topos élémentaires, C.R. Acad. Sci. Paris 277 (1973), A663-666.

[12] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer 1971.

[13] S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Universitext, Springer 1992.

Diagrams were made with Paul Taylor's "Diagrams" package.

Anders Kock
Dept. of Mathematics, University of Aarhus
DK 8000 Aarhus, Denmark
kock@math.au.dk

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Vol. LVI-1 (2015)

THEORIES HOMOTOPIQUES DES 2-CATEGORIES

par Jonathan CHICHE

Résumé. Ce texte développe les premiers éléments d'une théorie de l'homotopie des 2-catégories analogue à la théorie de l'homotopie des catégories développée par Grothendieck dans *Pursuing Stacks*. On y définit la notion de *localisateur fondamental de* $2\text{-}\mathcal{C}at$, généralisation 2-catégorique de la notion de localisateur fondamental due à Grothendieck, et l'on montre que les théories homotopiques de $\mathcal{C}at$ et $2\text{-}\mathcal{C}at$ sont équivalentes en un sens remarquablement fort : il existe un isomorphisme compatible à l'opération de localisation entre les classes ordonnées par inclusion des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et de $2\text{-}\mathcal{C}at$. Cela permet notamment d'en déduire une caractérisation purement 2-catégorique de la notion d'équivalence faible homotopique dans $2\text{-}\mathcal{C}at$, sans faire appel aux espaces topologiques ou aux ensembles simpliciaux.

Abstract. This text develops a homotopy theory of 2-categories analogous to Grothendieck's homotopy theory of categories developed in *Pursuing Stacks*. We define the notion of *basic localizer of* $2\text{-}\mathcal{C}at$, 2-categorical generalization of Grothendieck's notion of basic localizer, and we show that the homotopy theories of $\mathcal{C}at$ and $2\text{-}\mathcal{C}at$ are equivalent in a remarkably strong sense: there is an isomorphism, compatible with localization, between the ordered classes of basic localizers of $\mathcal{C}at$ and $2\text{-}\mathcal{C}at$. It follows that weak homotopy equivalences in $2\text{-}\mathcal{C}at$ can be characterised in an internal way, without mentioning topological spaces or simplicial sets.

Keywords. Grothendieck's homotopy theory, basic localizers, 2-categories.

Mathematics Subject Classification (2010). 18D05, 18G55, 55U35.

1. Introduction

Ce travail s'inscrit dans une entreprise de généralisation de la théorie de l'homotopie « de Grothendieck » aux catégories supérieures.

Les objets de base de la théorie de l'homotopie sont, classiquement, les espaces topologiques ou les CW-complexes. Les ensembles simpliciaux permettent une approche plus combinatoire. L'équivalence des deux points de vue se précise au moyen de la théorie des catégories de modèles de Quillen : il existe une équivalence de Quillen entre la catégorie des espaces topologiques $\mathcal{T}op$ et celle des ensembles simpliciaux $\widehat{\Delta}$, ces deux catégories se trouvant munies des structures de catégories de modèles dégagées par Quillen dans [19].

Dans *Pursuing Stacks* [16], Grothendieck développe une théorie de l'homotopie fondée non pas sur la catégorie des espaces topologiques, non plus que sur celle des ensembles simpliciaux, mais sur la catégorie $\mathcal{C}at$ des petites catégories, « vue avec un œil de géomètre par l'ensemble d'intuitions, étonnamment riche, provenant des topos » [15]. Son travail l'amène à dégager la notion de *catégorie test*, petite catégorie dont le topos des préfaisceaux modélise canoniquement les types d'homotopie, notion dont la catégorie des simplexes Δ constitue le paradigme historique. S'apercevant qu'il n'a, pour étudier la théorie des catégories test, utilisé qu'un petit nombre de propriétés formelles des équivalences faibles homotopiques classiques de $\mathcal{C}at$ — définies comme étant les foncteurs dont le nerf est une équivalence faible simpliciale —, il définit la notion de *localisateur fondamental* comme étant une classe de morphismes de $\mathcal{C}at$ vérifiant ces propriétés, dont la plus importante est le Théorème A de Quillen. À tout localisateur fondamental sont associées diverses notions, non seulement celle de catégorie test et ses variantes, mais également, par exemple, celles de foncteur propre et de foncteur lisse, définies par des propriétés de changement de base analogues à celles des théorèmes de changement de base propre ou lisse en géométrie algébrique. La théorie de l'homotopie de Grothendieck généralise une part fondamentale de la théorie « classique » de l'homotopie simpliciale, dont elle propose une approche conceptuelle remarquablement fructueuse. Elle a été dégagée et développée par Grothendieck dans [16], présentée de façon plus « bourbachique » par Maltsiniotis dans [18] et développée plus avant par Cisinski, notamment dans sa thèse [8] puis dans [10]. C'est à Cisinski que l'on doit la démonstration de deux conjectures fondamentales de Grothendieck en ce domaine : la *minimalité* du localisateur fondamental « classique » de $\mathcal{C}at$, c'est-à-dire de la classe des morphismes de $\mathcal{C}at$ dont le nerf est une équivalence faible simpliciale, et l'existence, *pour essentiellement tout localisateur* *fondamental*[1], d'une structure de catégorie de modèles sur $\mathcal{C}at$ dont le localisateur fondamental considéré constitue précisément la classe des équivalences faibles, généralisant le résultat de Thomason [22]. Ces structures sont obtenues par « transfert » à partir de structures de catégories de modèles sur la catégorie des ensembles simpliciaux.

De nombreuses structures catégoriques supérieures et simpliciales sont désormais utilisées tant en théorie de l'homotopie proprement dite qu'en géométrie. Nous introduisons dans cet article la notion de *localisateur fondamental de* $2\text{-}\mathcal{C}at$, classe de 2-foncteurs vérifiant des propriétés formelles analogues à celles de l'axiomatique des localisateurs fondamentaux de Grothendieck, que nous appellerons désormais *localisateurs fondamentaux de* $\mathcal{C}at$. À tout localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$ devraient se trouver attachées, entre autres, des notions de 2-catégorie test, 2-foncteur propre et 2-foncteur lisse, qui n'ont pas encore été suffisamment étudiées pour que nous les présentions ici. Plus généralement, bien sûr, on peut espérer développer à terme une théorie de l'homotopie « à la Grothendieck » des n-catégories pour n quelconque. Signalons qu'en dépit des obstacles conceptuels, une avancée dans cette direction a été réalisée récemment par Ara et Maltsiniotis, qui dégagent dans [2] un petit nombre de conditions à vérifier pour établir l'existence d'une structure de catégorie de modèles « à la Thomason » sur la catégorie des n-catégories et n-foncteurs stricts. Ils démontrent ces conditions dans le cas $n = 2$, et donc l'existence d'une structure de catégorie de modèles sur $2\text{-}\mathcal{C}at$ dont les équivalences faibles sont les 2-foncteurs stricts dont le nerf est une équivalence faible simpliciale. Dans le cas $n = 1$, ils retrouvent le résultat de Thomason qu'avait généralisé Cisinski.

À partir de la forme absolue de la généralisation du Théorème A de Quillen aux 2-foncteurs stricts démontrée par Bullejos et Cegarra [3], on en obtient facilement une version relative, ce qui permet de dégager une notion de localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$, point de départ d'une théorie de l'homotopie des 2-catégories[2] généralisant les notions et résultats de Grothendieck et Cisinski. Nous consacrons la plus grande partie du présent article à l'étude des relations entre localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et de $2\text{-}\mathcal{C}at$. On explicite notamment un isomorphisme remarquable entre la classe ordonnée

1. La seule hypothèse, anodine, est de nature ensembliste.

2. Signalons une fois pour toutes que, par « 2-catégorie », nous entendons « 2-catégorie stricte ».

par inclusion des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et la classe ordonnée par inclusion des localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$, cet isomorphisme ayant de plus la propriété d'induire des équivalences de catégories entre les catégories localisées de $\mathcal{C}at$ et de $2\text{-}\mathcal{C}at$. Pour établir ce résultat, on définit également la notion de *localisateur fondamental de* $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ (la catégorie dont les objets sont les petites 2-catégories et dont les morphismes sont les 2-foncteurs lax), les propriétés homotopiques d'un adjoint à gauche de l'inclusion canonique $2\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ construit par Bénabou permettant de passer de $\mathcal{C}at$ à $2\text{-}\mathcal{C}at$ et réciproquement par l'intermédiaire de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$. Cela confirme l'importance des morphismes non stricts en théorie de l'homotopie des catégories supérieures, importance visible également dans [2] et que l'on peut déjà percevoir dans [3], [5] ou [23] (bien que la démonstration de l'énoncé principal de ce dernier article soit fausse).

Dans [9], Cisinski démontre notamment la conjecture de Grothendieck affirmant que l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, le *localisateur fondamental minimal de* $\mathcal{C}at$, n'est autre que la classe des foncteurs entre petites catégories dont le nerf est une équivalence faible simpliciale. Nos résultats permettent d'en déduire un analogue 2-dimensionnel : l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$, le *localisateur fondamental minimal de* $2\text{-}\mathcal{C}at$ n'est autre que la classe des 2-foncteurs stricts dont le nerf est une équivalence faible simpliciale. En particulier, de même que le résultat de Cisinski fournit une caractérisation purement catégorique des équivalences faibles de $\mathcal{C}at$, sans faire appel aux espaces topologiques ou aux ensembles simpliciaux, les nôtres fournissent une caractérisation purement 2-catégorique des 2-foncteurs dont le nerf est une équivalence faible simpliciale. Pour un aperçu de la profondeur de cette propriété de minimalité, on pourra se reporter à [11].

Le présent texte fait suite à l'article [7], dont les résultats permettent notamment d'affirmer que les 2-foncteurs stricts dont le nerf est une équivalence faible simpliciale forment un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$. Même si l'objectif principal de [7] consistait à démontrer la version 2-catégorique la plus générale possible du Théorème A de Quillen, et que la notion de localisateur fondamental n'y est mentionnée que dans l'introduction, nous conseillons au lecteur de parcourir [7], dont nous reprenons ici certains éléments. Indépendamment de cela, le présent texte adopte un point de vue qu'il sera probablement plus facile d'appréhender après avoir parcouru, sinon lu, non seulement [7], mais aussi [9] et [18], en attendant la publication de [16]. De plus, le présent article généralise les résultats de [7] au cas de localisateurs fondamentaux arbitraires de $2\text{-}\mathcal{C}at$.

Après cette introduction, nous rappelons dans la deuxième section des résultats de Quillen, Grothendieck et Cisinski, concernant tous la dimension 1.

Dans la troisième section, nous rappelons certaines des notions 2-catégoriques introduites dans [7]. On les complète par deux constructions duales d'intégration de 2-foncteurs et l'on en souligne une propriété homotopique. Nous concluons la section par un exposé de divers foncteurs nerfs, Carrasco, Cegarra et Garzón ayant montré dans [4] qu'ils sont tous homotopiquement équivalents.

Dans la quatrième section, nous étudions les premières propriétés des classes de 2-foncteurs stricts obtenues à partir d'un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ par image réciproque du foncteur « catégorie des éléments du nerf ». On montrera plus loin que tous les localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$ s'obtiennent ainsi.

La cinquième section pose la définition de la notion de localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$. C'est une classe de 2-foncteurs stricts vérifiant un petit nombre de propriétés dont la plus importante est une version 2-catégorique du Théorème A de Quillen. Nous dégageons les premières conséquences de la définition, notamment l'invariance par dualité, propriété fondamentale déjà non triviale dans le cas de $\mathcal{C}at$, dont l'on adapte la démonstration dans celui, plus subtil, de $2\text{-}\mathcal{C}at$.

Dans la sixième section, nous explicitons l'isomorphisme annoncé entre la classe ordonnée par inclusion des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et la classe ordonnée par inclusion des localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$. Il est compatible à l'opération de localisation. Nous en déduisons une caractérisation purement interne à $2\text{-}\mathcal{C}at$ de la classe des 2-foncteurs stricts dont le nerf est une équivalence faible simpliciale : c'est le plus petit localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$.

Nous utilisons les résultats obtenus pour en déduire, dans la septième section, un analogue 2-catégorique d'une caractérisation, due à Cisinski, des équivalences faibles classiques de $\mathcal{C}at$ à l'aide du Théorème B de Quillen.

Dans un article [1] faisant suite au présent texte, Dimitri Ara explique comment nos résultats permettent de déduire de ceux obtenus par lui-même et Maltsiniotis dans [2] et de la théorie développée par Cisinski dans [10] qu'à tout localisateur fondamental (satisfaisant une condition ensembliste anodine) $\mathcal{W}$ de 2-$\mathcal{C}at$ est associée une structure de catégorie de modèles de Quillen sur 2-$\mathcal{C}at$ dont la classe des équivalences faibles est exactement $\mathcal{W}$. Il montre que les structures de catégorie de modèles « à la Thomason » ainsi obtenues modélisent exactement les localisations de Bousfield à gauche combinatoires de la structure de catégorie de modèles classique sur les ensembles simpliciaux. Nous renvoyons à [1] pour plus de détails.

Notations. Nous notons $\mathcal{C}at$ la catégorie des petites catégories et CAT la catégorie des catégories (pas forcément petites). Pour toute petite catégorie A, $\widehat{A}$ désigne la catégorie des préfaisceaux d'ensembles sur A. On notera Δ la catégorie des simplexes, et donc $\widehat{\Delta}$ la catégorie des ensembles simpliciaux. On note $[m]$ la catégorie associée à l'ensemble ordonné naturellement $\{0, \dots, m\}$ pour un entier $m \geq 0$ et Δ_m l'image de cette catégorie, objet de Δ, par le plongement de Yoneda $\Delta \hookrightarrow \widehat{\Delta}$. On notera $N : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ le foncteur nerf « classique ». Pour toute petite catégorie A, $\mathsf{Ob}(A)$ (resp. $\mathsf{Fl}_1(A)$) désigne les objets (resp. les morphismes) de A. On notera e la catégorie ponctuelle, n'ayant qu'un seul objet et qu'un seul morphisme (l'identité de l'unique objet). On la confondra, dans les notations, avec la 2-catégorie ponctuelle, n'ayant qu'un seul objet, qu'une seule 1-cellule et qu'une seule 2-cellule.

2. Localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$

Définition 2.1. Une application continue $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est une *équivalence faible topologique*, ou plus simplement une *équivalence faible*, si elle induit une bijection au niveau des π_0 et des isomorphismes entre les groupes d'homotopie pour tout choix de point base. Plus précisément, f est une équivalence faible si

$$\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$

est une bijection et, pour tout point x de X et tout entier $n \geq 1$,

$$\pi_n(f, x) : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$$

est un isomorphisme de groupes.

Définition 2.2. Un morphisme d'ensembles simpliciaux est une *équivalence faible simpliciale*, ou plus simplement une *équivalence faible*, si son image par le foncteur de réalisation géométrique $|\bullet| : \widehat{\Delta} \to Top$ est une équivalence faible topologique. On notera W_{∞}^{Δ} la classe des équivalences faibles simpliciales.

Définition 2.3. Un foncteur entre petites catégories est une *équivalence faible catégorique*, ou plus simplement une *équivalence faible*, si son image par le foncteur nerf $N : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ est une équivalence faible simpliciale. On note W_{∞}^{1} la classe des équivalences faibles de $\mathcal{C}at$.

2.4. Pour tout préfaisceau d'ensembles X sur une petite catégorie A, on note A/X la *catégorie des éléments* de X. Ses objets sont les couples (a, x), avec a un objet de A et x un objet de $X(a)$. En vertu du lemme de Yoneda, l'on peut donc considérer x comme un morphisme $a \to X$ de préfaisceaux sur A. Les morphismes de (a, x) vers (a', x') sont les morphismes $f : a \to a'$ de A tels que $x'f = x$. Cela permet de définir un foncteur

$$\begin{aligned} i_A : \widehat{A} &\to \mathcal{C}at \\ X &\mapsto A/X \end{aligned}$$

pour toute petite catégorie A.

Le théorème 2.5 est attribué à Quillen par Illusie dans [17]. On pourra consulter [17, volume 2, chapitre 6, section 3], et plus précisément [17, volume 2, chapitre 6, section 3, corollaire 3.3.1].

Théorème 2.5 (Quillen)**.** *On a l'égalité*

$$W_{\infty}^{\Delta} = i_{\Delta}^{-1} W_{\infty}^{1}.$$

De plus, les foncteurs nerf $N : \mathcal{C}at \to \widehat{\Delta}$ et catégorie des éléments $i_{\Delta} : \widehat{\Delta} \to \mathcal{C}at$ induisent des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre

$$\overline{N} : {W_{\infty}^{1}}^{-1}\mathcal{C}at \to {W_{\infty}^{\Delta}}^{-1}\widehat{\Delta}$$

et

$$\overline{i_{\Delta}} : {W_{\infty}^{\Delta}}^{-1}\widehat{\Delta} \to {W_{\infty}^{1}}^{-1}\mathcal{C}at.$$

Définition 2.6. Soit C une petite catégorie. Une classe $S \subset \mathsf{Fl}_1(C)$ est dite *faiblement saturée* si elle vérifie les conditions suivantes.

FS1 Les identités des objets de C sont dans S.

FS2 Si deux des trois flèches d'un triangle commutatif sont dans S, alors la troisième l'est aussi.

FS3 Si $i : X \to Y$ et $r : Y \to X$ sont des morphismes de C vérifiant $ri = 1_X$ et si ir est dans S, alors il en est de même de r (et donc aussi de i en vertu de ce qui précède).

Remarque 2.7. On appellera souvent la condition FS2 propriété de « 2 sur 3 ».

Pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ et tout objet b de B, nous noterons A/b la catégorie dont les objets sont les couples $(a, p : u(a) \to b)$, avec a un objet de A et p un morphisme de B, et dont les morphismes de (a,p) vers (a',p') sont les morphismes $f : a \to a'$ de A tels que $p'u(f) = p$.

Pour tout diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & B \arrow[dl, "v"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}at$ et tout objet c de C, on notera u/c le foncteur défini par

$$\begin{aligned} A/c &\to B/c \\ (a,p) &\mapsto (u(a),p) \\ f &\mapsto u(f). \end{aligned}$$

Définition 2.8 (Grothendieck)**.** Un *localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$* est une classe W de morphismes de $\mathcal{C}at$ vérifiant les conditions suivantes.

LA La partie W de $\mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LB Si A est une petite catégorie admettant un objet final, alors le morphisme canonique $A \to e$ est dans W.

LC Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & B \arrow[dl, "v"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif dans $\mathcal{C}at$ et si, pour tout objet c de C, le foncteur u/c est dans W, alors u est dans W.

Exemple 2.9. La classe des équivalences faibles topologiques est faiblement saturée. Par fonctorialité, W^1_∞ est donc faiblement saturée. En vertu de [20, p. 84, corollaire 2], elle vérifie la condition LB. La condition LC n'est rien d'autre, dans ce cas, que la forme relative du Théorème A de Quillen [20, p. 93, Théorème A]. La classe W^1_∞ est donc un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$. C'en est même le paradigme justifiant historiquement l'introduction de cette notion. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [16] ou à l'introduction de [18].

2.10. La notion de localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ est stable par intersection. On définit le *localisateur fondamental minimal de $\mathcal{C}at$* comme l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$. Le théorème 2.11 a été conjecturé par Grothendieck. C'est [9, théorème 2.2.11].

Théorème 2.11 (Cisinski)**.** *Le localisateur fondamental minimal de $\mathcal{C}at$ est W^1_∞.*

2.12. Pour toute petite catégorie A, pour tout foncteur $u : A \to \mathcal{C}at$, on note $\int_A u$ la catégorie (opfibrée sur A) dont les objets sont les couples (a, x), avec a un objet de A et x un objet de $u(a)$, et dont les morphismes de (a, x) vers (a', x') sont les couples $(f : a \to a', r : F(f)(x) \to x')$, avec f un morphisme de A et r un morphisme de $F(a')$, les unités et compositions étant définies de façon évidente. On peut étendre de façon naturelle cette construction aux morphismes de foncteurs : pour tous foncteurs u et v de A dans $\mathcal{C}at$, pour tout morphisme de foncteurs $\sigma : u \Rightarrow v$, on construit un foncteur $\int_A \sigma : \int_A u \to \int_A v$. On notera que le foncteur $i_A : \widehat{A} \to \mathcal{C}at$ n'est rien d'autre qu'une forme duale de cette construction, en considérant la catégorie des ensembles comme une sous-catégorie de $\mathcal{C}at$.

2.13. Soient I et J deux petites catégories et $F(\bullet, \bullet) : I \times J \to \mathcal{C}at$ un foncteur. On peut considérer les foncteurs

$$\begin{aligned} J &\to \mathcal{C}at \\ j &\mapsto \int_I F(\bullet, j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I &\to \mathcal{C}at \\ i &\mapsto \int_J F(i, \bullet). \end{aligned}$$

Le lemme 2.14 est immédiat.

Lemme 2.14. *Soient I et J deux petites catégories et $F : I \times J \to Cat$ un foncteur. On a des isomorphismes canoniques*

$$\int_{I\times J} F(\bullet, \bullet) \simeq \int_I \left(i \mapsto \int_J F(i, \bullet) \right) \simeq \int_J \left(j \mapsto \int_I F(\bullet, j) \right).$$

Jusqu'à la fin de cette section, on suppose fixé un localisateur fondamental W de $\mathcal{C}at$. On appellera *W-équivalences faibles*, ou plus simplement *équivalences faibles*, les éléments de W.

Proposition 2.15. *Soient A une petite catégorie, u et v deux foncteurs de A vers $\mathcal{C}at$ et $\sigma : u \Rightarrow v$ un morphisme de foncteurs. Supposons que, pour tout objet a de A, $\sigma_a : u(a) \to v(a)$ soit une équivalence faible. Alors $\int_A \sigma : \int_A u \to \int_A v$ est une équivalence faible.*

Démonstration. C'est, par exemple, [18, proposition 2.3.1]. □

Définition 2.16. On dit qu'un morphisme de préfaisceaux sur une petite catégorie A est une *équivalence faible* (de préfaisceaux) si son image par le foncteur i_A est une équivalence faible (de $\mathcal{C}at$). On notera $W_{\widehat{A}}$ la classe des équivalences faibles de préfaisceaux sur A.

Lemme 2.17. *Soient A et B deux petites catégories et $f(\bullet, \bullet) : X(\bullet, \bullet) \to Y(\bullet, \bullet)$ un morphisme de $\widehat{A \times B}$. Supposons que, pour tout objet a de A, le morphisme $f(a, \bullet) : X(a, \bullet) \to Y(a, \bullet)$ soit dans $W_{\widehat{B}}$. Alors, $f(\bullet, \bullet)$ est dans $W_{\widehat{A\times B}}$.*

Démonstration. Supposons que, pour tout objet a de A, le morphisme $f(a, \bullet)$: $X(a, \bullet) \to Y(a, \bullet)$ soit dans $W_{\widehat{B}}$, c'est-à-dire que le foncteur $i_B(f(a, \bullet))$ soit dans W. Il s'agit de montrer que $f(\bullet, \bullet)$ est dans $W_{\widehat{A\times B}}$, c'est-à-dire que la flèche $i_{A\times B}(f(\bullet, \bullet))$ est dans W. Pour cela, il suffit d'invoquer le lemme 2.14 (ou plutôt l'énoncé dual) qui permet d'identifier $i_{A\times B}(f(\bullet, \bullet))$

à $i_A(i_B(f(a, \bullet)))$ et de constater que le dernier terme est bien dans W en vertu des hypothèses et de la proposition 2.15, l'assignation $a \mapsto i_B(f(a, \bullet))$ définissant un morphisme de foncteurs de $A \to \mathcal{C}at, a \mapsto i_B X(a, \bullet)$ vers $A \to \mathcal{C}at, a \mapsto i_B Y(a, \bullet)$. □

Définition 2.18. On dit qu'une petite catégorie A est W*-asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si le foncteur canonique $A \to e$ est une équivalence faible. Un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *W-asphérique*, ou plus simplement *asphérique* si, pour tout objet b de B, la catégorie A/b est asphérique.

Remarque 2.19. Un foncteur asphérique est donc une équivalence faible.

Tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ en induit un autre, que l'on notera u^*, défini par

$$\begin{aligned} u^* : \widehat{B} &\to \widehat{A} \\ X &\mapsto (a \mapsto X(u(a))). \end{aligned}$$

Proposition 2.20. *Soient A et B deux petites catégories asphériques et $u : A \to B$ un morphisme de $\mathcal{C}at$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Le foncteur u est asphérique.

(ii) Si φ est une équivalence faible de $\widehat{B}$, alors $u^*(\varphi)$ est une équivalence faible de $\widehat{A}$.

Démonstration. C'est une partie de l'énoncé de [18, proposition 1.2.9]. □

Remarque 2.21. À toute notion de localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ se rattachent non seulement celles d'équivalence faible de $\mathcal{C}at$ (élément du localisateur fondamental) et de petite catégorie asphérique (définition 2.18), mais également, pour toute petite catégorie A, d'équivalence faible dans la catégorie $\widehat{A}$ des préfaisceaux sur A (définition 2.16) ainsi que de préfaisceau asphérique sur A. Il reste à définir cette dernière notion : on dit qu'un préfaisceau X sur A est asphérique si la catégorie A/X est asphérique. Ainsi, A est asphérique si et seulement si le préfaisceau final sur A est asphérique. Voir notamment [18, 1.2.5 et 1.2.6] pour des détails. On peut alors compléter la proposition 2.20 par l'énoncé suivant : sous les mêmes données, u est asphérique si et seulement si, pour tout objet b de B, le préfaisceau $u^*(b)$ sur A est asphérique (c'est une autre partie de [18, proposition 1.2.9]).

Définition 2.22. On dit qu'une petite catégorie A est *totalement W-asphérique*, ou plus simplement *totalement asphérique*, si elle est asphérique et si le foncteur diagonal

$$\begin{aligned} \delta_A : A &\to A \times A \\ a &\mapsto (a, a) \end{aligned}$$

est asphérique.

Remarque 2.23. En conservant les mêmes notations, le foncteur δ_A est asphérique si et seulement si, pour tous objets a et a' de A, le produit de préfaisceaux représentables $a \times a'$ est un préfaisceau asphérique. De plus, si A est non vide et que le foncteur δ_A est asphérique, alors A est asphérique (voir la démonstration de [18, proposition 1.6.1]).

Proposition 2.24. *La catégorie des simplexes Δ est totalement asphérique.*

Démonstration. La W^1_∞-asphéricité de Δ est évidente en vertu de la remarque 2.23 (cela résulte de la stabilité des équivalences faibles simpliciales par produit). On peut donc conclure dans le cas d'un localisateur fondamental quelconque de $\mathcal{C}at$ en vertu de la minimalité de W^1_∞ (théorème 2.11). Pour un argument plus élémentaire, n'utilisant pas cette propriété de minimalité, nous renvoyons le lecteur à la démonstration de [18, proposition 1.6.13]. □

Proposition 2.25. *Soient A une petite catégorie totalement asphérique et f un morphisme de $\widehat{A \times A}$. Si, pour tout objet a de A, le morphisme $f(a, \bullet)$ est dans $W_{\widehat{A}}$, alors $\delta_A^*(f)$ est dans $W_{\widehat{A}}$.*

Démonstration. En vertu des hypothèses et du lemme 2.17, f est dans $W_{\widehat{A \times A}}$. Le foncteur diagonal $\delta_A : A \to A \times A$ étant asphérique par hypothèse, le résultat découle de la proposition 2.20. □

Proposition 2.26. *Pour toute petite catégorie A, le foncteur*

$$\begin{aligned} sup_A : \Delta/NA &\to A \\ ([m], x) &\mapsto x_m \end{aligned}$$

est asphérique (donc en particulier une équivalence faible).

Démonstration. C'est [9, proposition 2.2.3], attribuée à Grothendieck. On vérifie facilement que, pour tout objet a de A, la catégorie $(\Delta/NA)/a$ s'identifie canoniquement à $\Delta/N(A/a)$. Or, la catégorie A/a admet un objet final et, pour toute petite catégorie C admettant un objet final, la catégorie Δ/NC est contractile, comme on peut le montrer en en construisant un endomorphisme constant homotope à l'identité. □

Proposition 2.27. *On a l'égalité*

$$W = N^{-1}({i_\Delta}^{-1}(W))$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.26, par un argument de « 2 sur 3 ». □

3. Formalisme 2-catégorique

3.1. On suppose connues les notions de 2-catégorie, 2-foncteur strict, 2-foncteur lax et 2-foncteur colax[3]. Notre vocabulaire et nos notations (parfois idiosyncrasiques) seront similaires à ceux de [7]. Nous noterons $2\text{-}\mathcal{C}at$ la catégorie dont les objets sont les petites 2-catégories et dont les morphismes sont les 2-foncteurs stricts. Nous noterons $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ la catégorie dont les objets sont les petites 2-catégories et dont les morphismes sont les 2-foncteurs lax. Étant donné un 2-foncteur lax $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et f et f' deux 1-cellules de $\mathcal{A}$ telles que la composée $f'f$ fasse sens, nous noterons $u_{f',f}$ la 2-cellule structurale (« de composition ») $u(f')u(f) \Rightarrow u(f'f)$ et, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, nous noterons u_a la 2-cellule structurale (« d'unité ») $1_{u(a)} \Rightarrow u(1_a)$. Le 2-foncteur lax $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est dit *normalisé* si, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, la 2-cellule structurale d'unité u_a est une identité (en particulier, $u(1_a) = 1_{u(a)}$) et si, pour toute 1-cellule $f : a \to a'$ de $\mathcal{A}$, les 2-cellules structurales de composition $u_{1_{a'},f}$ et $u_{f,1_a}$ sont des identités. On notera par un exposant « op » (resp. « co », resp. « coop ») le « changement de sens des 1-cellules » (resp. des 2-cellules, resp. des 1-cellules et des 2-cellules). Pour tout couple d'objets x et y d'une 2-catégorie $\mathcal{A}$, on notera $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(x, y)$ la catégorie dont les objets sont les 1-cellules de $\mathcal{A}$ et dont les morphismes sont les 2-cellules de $\mathcal{A}$.

3. Parfois qualifié d'« oplax » dans la littérature.

Définition 3.2. Soient $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un 2-foncteur lax et b un objet de $\mathcal{B}$. La *2-catégorie comma lax de $\mathcal{A}$ au-dessus de b relativement à u* est la 2-catégorie $\mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{l}}b$ définie comme suit :

– Les objets de $\mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{l}}b$ sont les couples $(a, p : u(a) \to b)$, avec a un objet de $\mathcal{A}$ et p une 1-cellule de $\mathcal{B}$.

– Si $(a, p : u(a) \to b)$ et $(a', p' : u(a') \to b)$ sont deux objets de $\mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{l}}b$, les 1-cellules de (a, p) vers (a', p') dans $\mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{l}}b$ sont les couples $(f : a \to a', \alpha : p \Rightarrow p'u(f))$, avec f une 1-cellule de $\mathcal{A}$ et α une 2-cellule de $\mathcal{B}$. Le diagramme à conserver en tête est le suivant :

$$\begin{tikzcd} u(a) \arrow[rr, "u(f)"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] & u(a') \arrow[dl, "p'"] \\ & b & \end{tikzcd} .$$

– Si (f, α) et (f', α') sont deux 1-cellules de (a, p) vers (a', p') dans $\mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{l}}b$, les 2-cellules de (f, α) vers (f', α') dans $\mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{l}}b$ sont les 2-cellules $\beta : f \Rightarrow f'$ dans $\mathcal{A}$ telles que $(p' \circ u(\beta))\alpha = \alpha'$.

– Les diverses composées et identités sont « évidentes ».

Soient $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un 2-foncteur lax et b un objet de $\mathcal{B}$. La *2-catégorie opcomma lax de $\mathcal{A}$ au-dessous de b relativement à u* est la 2-catégorie $b\backslash\!\backslash^{u}_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$ définie par la formule

$$b\backslash\!\backslash^{u}_{\mathrm{l}}\mathcal{A} = \left((\mathcal{A}^{\mathrm{op}})/\!/^{u^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{l}}b\right)^{\mathrm{op}}.$$

Soient $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un 2-foncteur colax et b un objet de $\mathcal{B}$. La *2-catégorie comma colax de $\mathcal{A}$ au-dessus de b relativement à u* est la 2-catégorie $\mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{c}}b$ définie par la formule

$$\mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{c}}b = \left((\mathcal{A}^{\mathrm{co}})/\!/^{u^{\mathrm{co}}}_{\mathrm{l}}b\right)^{\mathrm{co}}.$$

Soient $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un 2-foncteur colax et b un objet de $\mathcal{B}$. La *2-catégorie opcomma colax de $\mathcal{A}$ au-dessous de b relativement à u* est la 2-catégorie $b\backslash\!\backslash^{u}_{\mathrm{c}}\mathcal{A}$ définie par la formule

$$b\backslash\!\backslash^{u}_{\mathrm{c}}\mathcal{A} = \left((\mathcal{A}^{\mathrm{op}})/\!/^{u^{\mathrm{op}}}_{\mathrm{c}}b\right)^{\mathrm{op}}.$$

Si a est un objet de la 2-catégorie $\mathcal{A}$, on notera $\mathcal{A}/\!/_{\mathrm{l}}a$ (resp. $a\backslash\!\backslash_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{A}/\!/_{\mathrm{c}}a$, resp. $a\backslash\!\backslash_{\mathrm{c}}\mathcal{A}$) la 2-catégorie $\mathcal{A}/\!/^{1_{\mathcal{A}}}_{\mathrm{l}}a$ (resp. $a\backslash\!\backslash^{1_{\mathcal{A}}}_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{A}/\!/^{1_{\mathcal{A}}}_{\mathrm{c}}a$, resp. $a\backslash\!\backslash^{1_{\mathcal{A}}}_{\mathrm{c}}\mathcal{A}$).

On rappelle maintenant la définition, introduite dans [7], de la notion d'objet final (resp. initial) d'un objet d'une 2-catégorie.

Définition 3.3. On dira qu'un objet z d'une 2-catégorie $\mathcal{A}$ *admet un objet final* si, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(a, z)$ admet un objet final. On dira qu'il *admet un objet initial* s'il admet un objet final dans $\mathcal{A}^{\mathrm{co}}$, autrement dit si, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(a, z)$ admet un objet initial.

Exemple 3.4. Un objet de la 2-catégorie $\mathcal{C}at$ admet un objet final (resp. initial) en ce sens si et seulement si c'est une catégorie admettant un objet final (resp. initial) au sens usuel ; c'est la raison de l'adoption de cette terminologie, suggérée par Jean Bénabou.

3.5. Pour des raisons de commodité, l'on dira qu'une 2-catégorie $\mathcal{A}$ *op-admet* (resp. *co-admet*, resp. *coop-admet*) une certaine propriété si $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ (resp. $\mathcal{A}^{\mathrm{co}}$, resp. $\mathcal{A}^{\mathrm{coop}}$) vérifie cette propriété.

Exemple 3.6. Pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ et tout objet a de $\mathcal{A}$, la 2-catégorie $\mathcal{A}/\!/_{\mathrm{c}}a$ admet un objet admettant un objet final. Plus précisément, l'objet $(a, 1_a)$ est tel que, pour tout objet $(a', p : a' \to a)$, le couple $(p, 1_p)$ définit un objet final de la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}/\!/_{\mathrm{c}}a}((a', p), (a, 1_a))$. Dualement, la 2-catégorie $\mathcal{A}/\!/_{\mathrm{l}}a$ admet un objet admettant un objet initial, la 2-catégorie $a\backslash\!\backslash_{\mathrm{c}}\mathcal{A}$ op-admet un objet admettant un objet final et la 2-catégorie $a\backslash\!\backslash_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$ op-admet un objet admettant un objet initial.

3.7. Nous avons rappelé dans [7] la construction explicite d'un adjoint à gauche de l'inclusion $2\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$, cas particulier d'une construction bicatégorique de Bénabou. On notera $\widetilde{\mathcal{A}}$ (resp. $\widetilde{u}$) l'image par ce foncteur d'une 2-catégorie $\mathcal{A}$ (resp. d'un 2-foncteur lax u). En notant η et ϵ respectivement l'unité et la coünité de cette adjonction, on a donc en particulier, pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$, un 2-foncteur lax

$$\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$$

et un 2-foncteur strict

$$\epsilon_{\mathcal{A}} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}.$$

On renvoie à [6, section 1.12] ou [7, section 5] pour une description de cette adjonction. Muni des formules, on vérifie sans difficulté le lemme 3.8. C'est [7, lemme 5.9].

Lemme 3.8. *Pour toute petite* 2*-catégorie* $\mathcal{A}$*, pour tout objet* a *de* $\mathcal{A}$*, la* 2*-catégorie* $\widetilde{\mathcal{A}}/\!/_{\mathrm{c}}^{\epsilon_{\mathcal{A}}} a$ *admet un objet admettant un objet final.*

3.9. Étant donné deux 2-foncteurs lax (ou deux 2-foncteurs colax) u et v de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$, une *transformation* σ de u vers v correspond à la donnée d'une 1-cellule $\sigma_a : u(a) \to v(a)$ dans $\mathcal{B}$ pour tout objet a de $\mathcal{A}$ et d'une 2-cellule $\sigma_f : \sigma_{a'} u(f) \Rightarrow v(f)\sigma_a$ dans $\mathcal{B}$ pour toute 1-cellule $f : a \to a'$ dans $\mathcal{A}$, ces données vérifiant les conditions de cohérence bien connues. On dira que la transformation σ est *relative aux objets* si $\sigma_a = 1_{u(a)} (= 1_{v(a)})$ pour tout objet a de $\mathcal{A}$. Avec les mêmes données, une *optransformation* de u vers v est une transformation de v^{op} vers u^{op}. De façon plus explicite, cela revient à se donner une 1-cellule $\sigma_a : u(a) \to v(a)$ dans $\mathcal{B}$ pour tout objet a de $\mathcal{A}$ et une 2-cellule $\sigma_f : v(f)\sigma_a \Rightarrow \sigma_{a'} u(f)$ dans $\mathcal{B}$ pour toute 1-cellule $f : a \to a'$ dans $\mathcal{A}$, ces données vérifiant les conditions de cohérence aussi bien connues que les précédentes. Si u et v sont stricts, nous appellerons *transformation stricte* de u vers v une transformation (ou, ce qui revient au même dans ce cas précis, une optransformation) σ de u vers v telle que la 2-cellule σ_f soit une identité pour toute 1-cellule f de $\mathcal{A}$. On notera $\underline{2\text{-}\mathcal{C}at}$ la 2-catégorie dont la catégorie sous-jacente est $2\text{-}\mathcal{C}at$ et dont les 2-cellules sont les transformations strictes (c'est en fait la 2-catégorie sous-jacente à une 3-catégorie dont les 3-cellules sont les modifications).

Définition 3.10. On dira qu'un 2-foncteur colax $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un *préadjoint à gauche colax* si, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, la 2-catégorie $\mathcal{A}/\!/_{\mathrm{c}}^{u} b$ admet un objet admettant un objet final.

On dira qu'un 2-foncteur lax $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un *préadjoint à gauche lax* si u^{co} est un préadjoint à gauche colax. Cette condition équivaut à la suivante : pour tout objet b de $\mathcal{B}$, la 2-catégorie $\mathcal{A}/\!/_{\mathrm{l}}^{u} b$ admet un objet admettant un objet initial.

On dira qu'un 2-foncteur colax $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un *préadjoint à droite colax* si u^{op} est un préadjoint à gauche colax. Cette condition équivaut à la suivante : pour tout objet b de $\mathcal{B}$, la 2-catégorie $b\backslash\!\backslash_{\mathrm{c}}^{u} \mathcal{A}$ op-admet un objet admettant un objet final.

On dira qu'un 2-foncteur lax $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un *préadjoint à droite lax* si u^{coop} est un préadjoint à gauche colax. Cette condition équivaut à la suivante : pour tout objet b de $\mathcal{B}$, la 2-catégorie $b\backslash\!\backslash_{\mathrm{l}}^{u} \mathcal{A}$ op-admet un objet admettant un objet initial.

Remarque 3.11. On renvoie à [6, section 1.6] pour une discussion relative aux apparitions de cette notion dans la littérature antérieure.

Exemple 3.12. Toute équivalence de 2-catégories est un préadjoint à gauche lax, un préadjoint à gauche colax, un préadjoint à droite lax et un préadjoint à droite colax. Pour un rappel de la définition ainsi qu'une démonstration, on pourra se reporter à [6, paragraphe 1.6.11 et proposition 1.6.12].

Remarque 3.13. À tout morphisme lax (resp. colax) $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ vérifiant l'une des conditions de la définition 3.10 est associé de façon canonique un morphisme colax (resp. lax) $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Pour une démonstration, nous renvoyons le lecteur à [6, 1.6.16].

Définition 3.14. Soient $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un 2-foncteur strict et b un objet de $\mathcal{B}$. On appelle *fibre de u au-dessus de b* la 2-catégorie, que l'on notera $u^{-1}(b)$, dont les objets sont les objets a de $\mathcal{A}$ tels que $u(a) = b$, dont les 1-cellules de a vers a' sont les 1-cellules f de a vers a' dans $\mathcal{A}$ telles que $u(f) = 1_b$ et dont les 2-cellules de f vers f' sont les 2-cellules α de f vers f' dans $\mathcal{A}$ telles que $u(\alpha) = 1_{1_b}$, les diverses compositions et unités provenant de celles de $\mathcal{A}$ de façon « évidente ».

Remarque 3.15. La 2-catégorie $(u^{\mathrm{op}})^{-1}(b)$ (resp. $(u^{\mathrm{co}})^{-1}(b)$, resp. $(u^{\mathrm{coop}})^{-1}(b)$) s'identifie canoniquement à $(u^{-1}(b))^{\mathrm{op}}$ (resp. $(u^{-1}(b))^{\mathrm{co}}$, resp. $(u^{-1}(b))^{\mathrm{coop}}$).

Définition 3.16. On dira qu'un morphisme $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de 2-$\mathcal{C}at$ est une *préfibration* si, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, le 2-foncteur strict canonique

$$\begin{aligned} J_b : u^{-1}(b) &\to b\backslash\!\!\backslash^{u}_{\mathrm{c}}\mathcal{A} \\ a &\mapsto (a, 1_b) \\ f &\mapsto (f, 1_{1_b}) \\ \alpha &\mapsto \alpha \end{aligned}$$

est un préadjoint à gauche lax.

On dira qu'un 2-foncteur strict $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une *préopfibration* si u^{op} est une préfibration, autrement dit si, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, le morphisme canonique $u^{-1}(b) \to \mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{c}}b$ est un préadjoint à droite lax.

On dira qu'un 2-foncteur strict $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une *précofibration* si u^{co} est une préfibration, autrement dit si, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, le morphisme canonique $u^{-1}(b) \to b\backslash\!\!\backslash^{u}_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$ est un préadjoint à gauche colax.

On dira qu'un 2-foncteur strict $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une *précoopfibration* si u^{coop} est une préfibration, autrement dit si, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, le morphisme canonique $u^{-1}(b) \to \mathcal{A}/\!/_1^u b$ est un préadjoint à droite colax.

3.17. On rappelle noter $\underline{2\text{-}\mathcal{C}at}$ la 2-catégorie dont la catégorie sous-jacente est $2\text{-}\mathcal{C}at$ et dont les 2-cellules sont les transformations strictes. On a déjà défini dans [7, section 3] (voir [6, section 1.10] pour davantage de détails), pour tout 2-foncteur strict $F : \mathcal{A} \to \underline{2\text{-}\mathcal{C}at}$, une 2-catégorie $\int_{\mathcal{A}} F$ comme suit.

Les objets de $\int_{\mathcal{A}} F$ sont les couples (a, x), avec a un objet de $\mathcal{A}$ et x un objet de la 2-catégorie $F(a)$.

Les 1-cellules de (a, x) vers (a', x') dans $\int_{\mathcal{A}} F$ sont les couples

$$(f : a \to a', r : F(f)(x) \to x')$$

dans lesquels f est une 1-cellule de a vers a' dans $\mathcal{A}$ et r une 1-cellule de $F(f)(x)$ vers x' dans $F(a')$.

Les 2-cellules de $(f : a \to a', r : F(f)(x) \to x')$ vers $(g : a \to a', s : F(g)(x) \to x')$ dans $\int_{\mathcal{A}} F$ sont les couples

$$(\gamma : f \Rightarrow g, \varphi : r \Rightarrow s(F(\gamma))_x)$$

dans lesquels γ est une 2-cellule de f vers g dans $\mathcal{A}$ et φ une 2-cellule de r vers $s(F(\gamma))_x$ dans $F(a')$.

Les diverses unités et compositions sont définies de façon « évidente ».

3.18. De façon duale, pour tout 2-foncteur strict $F : \mathcal{A}^{\text{op}} \to \underline{2\text{-}\mathcal{C}at}$, on définit une 2-catégorie $\int_{\mathcal{A}}^{op} F$ par la formule

$$\int_{\mathcal{A}}^{op} F = \left(\int_{\mathcal{A}^{\text{coop}}} (?^{coop} \circ F)^{\text{co}} \right)^{\text{coop}}.$$

En particulier, les objets sont les couples (a, x), avec a un objet de $\mathcal{A}$ et x un objet de $F(a)$. Les 1-cellules de (a, x) vers (a', x') sont les couples $(f : a \to a', r : x \to F(f)(x'))$, avec f une 1-cellule de $\mathcal{A}$ et r une 1-cellule de $F(a)$. Les 2-cellules de (f, r) vers (g, s) sont les couples $(\gamma : f \Rightarrow g, \varphi : (F(\gamma))_{x'} r \Rightarrow s)$, avec γ une 2-cellule de $\mathcal{A}$ et φ une 2-cellule de $F(a)$.

Remarque 3.19. En considérant la catégorie des ensembles comme une sous-catégorie de $\mathcal{C}at$, on peut considérer la restriction de $\int_{\mathcal{A}}^{op}$ à la catégorie $\widehat{A}$. Ce n'est rien d'autre que le foncteur i_A.

3.20. De façon duale, pour tout 2-foncteur strict $F : \mathcal{A}^{\mathrm{co}} \to \underline{2\text{-}\mathcal{C}at}$, on définit une 2-catégorie $\int_{\mathcal{A}}^{co} F$ par la formule

$$\int_{\mathcal{A}}^{co} F = \left(\int_{\mathcal{A}^{\mathrm{co}}} (?^{\mathrm{co}} \circ F)\right)^{\mathrm{co}}.$$

En particulier, les objets sont les couples (a, x), avec a un objet de $\mathcal{A}$ et x un objet de $F(a)$. Les 1-cellules de (a, x) vers (a', x') sont les couples $(f : a \to a', r : F(f)(x) \to x')$, f et r étant des 1-cellules de $\mathcal{A}$ et $F(a')$ respectivement. Les 2-cellules de (f, r) vers (g, s) sont les couples $(\gamma : f \Rightarrow g, \varphi : r(F(\gamma))_x \Rightarrow s)$, γ et φ étant des 2-cellules dans $\mathcal{A}$ et $F(a')$ respectivement.

3.21. Soient $F : \mathcal{A} \to \underline{2\text{-}\mathcal{C}at}$ un 2-foncteur strict et a un objet de $\mathcal{A}$. La projection canonique

$$\begin{aligned} P_F : \int_{\mathcal{A}} F &\to \mathcal{A} \\ (a, x) &\mapsto a \\ (f, r) &\mapsto f \\ (\gamma, \varphi) &\mapsto \gamma \end{aligned}$$

est un 2-foncteur strict. Des calculs ne présentant guère de difficulté (voir [6, proposition 1.10.7] ou [7, proposition 3.2]) permettent de vérifier que le 2-foncteur strict canonique $J_a : {P_F}^{-1}(a) \to \left(\int_{\mathcal{A}} F\right) /\!/_1^{P_F} a$ est un préadjoint à droite colax. Autrement dit, P_F est une précoopfibration. On vérifie que le 2-foncteur strict

$$\begin{aligned} K_a : \left(\int_{\mathcal{A}} F\right) /\!/_1^{P_F} a &\longrightarrow {P_F}^{-1}(a) \\ ((a', x'), p : a' \to a) &\longmapsto (a, F(p)(x')) \\ ((f : a' \to a'', r : F(f)(x') \to x''), \sigma : p \Rightarrow p'f) &\longmapsto (1_a, F(p')(r)(F(\sigma))_{x'}) \\ (\gamma, \varphi) &\longmapsto (1_{1_a}, F(p')(\varphi) \circ (F(\sigma))_{x'}) \end{aligned}$$

est une rétraction de J_a. De plus, des calculs supplémentaires et tout aussi passionnants montrent qu'il s'agit d'un préadjoint à gauche lax [4]. Des résultats analogues sont bien entendu valables pour les constructions duales introduites dans les paragraphes 3.18 et 3.20.

Définition 3.22. Soient $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie et $m \geq 0$ un entier.

(i) On note

$$FonLax([m], \mathcal{A})$$

l'ensemble des 2-foncteurs lax de $[m]$ vers $\mathcal{A}$ et $N_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$ l'ensemble simplicial

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{l}}\mathcal{A} : \Delta^{op} &\to \mathcal{E}ns \\ [m] &\mapsto FonLax([m], \mathcal{A}) \end{aligned}$$

dont les faces et dégénérescences sont définies de la façon « évidente ». Cela permet de définir un foncteur *nerf lax*

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{l}} : 2\text{-}\mathcal{C}at_{\mathit{lax}} &\to \widehat{\Delta} \\ \mathcal{A} &\mapsto N_{\mathrm{l}}\mathcal{A} \\ u &\mapsto N_{\mathrm{l}}(u). \end{aligned}$$

(ii) On note

$$FonLaxNor([m], \mathcal{A})$$

l'ensemble des 2-foncteurs lax normalisés de $[m]$ vers $\mathcal{A}$ et $N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$ l'ensemble simplicial

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} : \Delta^{op} &\to \mathcal{E}ns \\ [m] &\mapsto FonLaxNor([m], \mathcal{A}) \end{aligned}$$

dont les faces et dégénérescences sont définies de la façon « évidente ». Cela permet de définir un foncteur *nerf lax normalisé*

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{l,n}} : 2\text{-}\mathcal{C}at &\to \widehat{\Delta} \\ \mathcal{A} &\mapsto N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \\ u &\mapsto N_{\mathrm{l,n}}(u). \end{aligned}$$

4. Comme on l'a déjà signalé, l'existence d'un morphisme lax allant dans le sens opposé à celui de J_a résulte de propriétés générales des préadjoints. En revanche, le caractère strict de ce morphisme comme sa propriété d'être lui-même un préadjoint ne sont pas vérifiés en général.

(iii) On note
$$\underline{FonLaxNor}([m],\mathcal{A})$$
la catégorie dont les objets sont les 2-foncteurs lax normalisés de $[m]$ vers $\mathcal{A}$ et dont les morphismes sont les transformations relatives aux objets entre tels 2-foncteurs lax normalisés et $\underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$ l'objet simplicial de $\mathcal{C}at$
$$\begin{aligned}\underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} : \Delta^{op} &\to \mathcal{C}at\\ [m] &\mapsto \underline{FonLaxNor}([m],\mathcal{A})\end{aligned}$$
dont les faces et dégénérescences sont définies de la façon « évidente ». Cela permet de définir un foncteur *nerf lax normalisé catégorique*
$$\begin{aligned}\underline{N}_{\mathrm{l,n}} : 2\text{-}\mathcal{C}at &\to \underline{\mathsf{Hom}}_{CAT}(\Delta^{op},\mathcal{C}at)\\ \mathcal{A} &\mapsto \underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}\\ u &\mapsto \underline{N}_{\mathrm{l,n}}(u).\end{aligned}$$

(iv) On note
$$\underline{Fon}([m],\mathcal{A})$$
la catégorie dont les objets sont les 2-foncteurs stricts de $[m]$ vers $\mathcal{A}$ et dont les morphismes sont les transformations relatives aux objets entre tels morphismes de 2-$\mathcal{C}at$. Autrement dit, $\underline{Fon}([m],\mathcal{A})$ est la catégorie
$$\coprod_{(a_0,\dots,a_m)\in(\mathsf{Ob}(\mathcal{A}))^{m+1}} \underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(a_0,a_1)\times\cdots\times\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(a_{m-1},a_m).$$

On note $N_2\mathcal{A}$ l'objet simplicial de $\mathcal{C}at$
$$\begin{aligned}N_2\mathcal{A} : \Delta^{op} &\to \mathcal{C}at\\ [m] &\mapsto \underline{Fon}([m],\mathcal{A})\end{aligned}$$
dont les faces et dégénérescences sont définies de la façon « évidente ». Cela permet de définir un foncteur *nerf strict*
$$\begin{aligned}N_2 : 2\text{-}\mathcal{C}at &\to \underline{\mathsf{Hom}}_{CAT}(\Delta^{op},\mathcal{C}at)\\ \mathcal{A} &\mapsto N_2\mathcal{A}\\ u &\mapsto N_2(u).\end{aligned}$$

Remarque 3.23. Insistons sur le fait que nous avons considéré le domaine de définition du nerf lax N_{l} et du nerf lax normalisé $N_{\mathrm{l,n}}$ comme étant 2-$\mathcal{C}at_{lax}$ et 2-$\mathcal{C}at$ respectivement. En particulier, bien que le nerf lax normalisé soit fonctoriel sur les 2-foncteurs lax normalisés, nous ne le considérons pas, sauf mention contraire, comme un foncteur de domaine la catégorie dont les objets sont les petites 2-catégories et dont les morphismes sont les 2-foncteurs lax normalisés, ce qui serait possible. Ce nerf n'est toutefois pas fonctoriel sur les 2-foncteurs lax généraux, propriété du nerf N_{l} que nous utiliserons de façon cruciale. Le nerf $N_{\mathrm{l,n}}$ est cependant plus familier aux catégoriciens. On pourra par exemple se reporter à [21, section 10]. On peut le construire de la façon suivante : pour tout entier positif m, il existe une 2-catégorie dont les objets sont les entiers de 0 à m, dont les 1-cellules de i vers j sont les sous-ensembles de $\{i, \dots, j\}$ contenant i et j et dont les 2-cellules entre telles 1-cellules parallèles sont définies par l'opposée de la relation d'inclusion. Cela fournit un foncteur $\Delta \to$ 2-$\mathcal{C}at$ et donc, par un procédé classique de Kan, une adjonction entre $\widehat{\Delta}$ et 2-$\mathcal{C}at$, dont l'adjoint à droite n'est autre que le nerf $N_{\mathrm{l,n}}$.

3.24. Pour tout entier $m \geq 0$, toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ et tout 2-foncteur lax $x : [m] \to \mathcal{A}$, on notera x_i l'image de $0 \leq i \leq m$ par x, $x_{j,i}$ l'image du morphisme $i \to j$ de $[m]$ par x et $x_{k,j,i}$ la 2-cellule structurale $x_{j \to k, i \to j}$: $x_{k,j}x_{j,i} \Rightarrow x_{k,i}$ pour $0 \leq i \leq j \leq k \leq m$. Afin d'éviter toute confusion avec l'objet x_i, on notera $(x)_i$ la 2-cellule structurale d'unité de x associée à l'objet i de $[m]$. On a donc $(x)_i : 1_{x_i} \Rightarrow x_{i,i}$.

3.25. Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie. On définit un 2-foncteur lax

$$sup^{\mathrm{l}}_{\mathcal{A}} : \Delta/N_{\mathrm{l}}\mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

comme suit. Pour tout objet $([m], x)$ de $\Delta/N_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$,

$$sup^{\mathrm{l}}_{\mathcal{A}}([m], x) = x_m.$$

Pour tout morphisme simplicial $\varphi : [m] \to [n]$ définissant un morphisme de $([m], x)$ vers $([n], y)$ dans $\Delta/N_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$,

$$sup^{\mathrm{l}}_{\mathcal{A}}(\varphi : ([m], x) \to ([n], y)) = y_{n,\varphi(m)}.$$

Pour tout objet $([m], x)$ de $\Delta/N_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$,

$$sup^{\mathrm{l}}_{\mathcal{A}([m],x)} = (x)_m : 1_{x_m} \Rightarrow x(1_m).$$

Pour tout couple de morphismes composables $\varphi : ([m], x) \to ([n], y)$ et $\psi : ([n], y) \to ([p], z)$ de $\Delta/N_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$,

$$sup^{\mathrm{l}}_{\mathcal{A}\psi,\varphi} = z_{p,\psi(n),\psi(\varphi(m))}.$$

3.26. Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie. On définit un 2-foncteur lax normalisé

$$sup^{\mathrm{l,n}}_{\mathcal{A}} : \Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

par la condition de commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \int_{\Delta}^{op} N_{\mathrm{l}}\mathcal{A} \arrow[dr, "sup^{\mathrm{l}}_{\mathcal{A}}"'] & & \int_{\Delta}^{op} N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \arrow[ll, "i^{l}_{l,n}\mathcal{A}"'] \arrow[dl, "sup^{\mathrm{l,n}}_{\mathcal{A}}"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd},$$

dans lequel $i^{l}_{l,n}\mathcal{A}$ désigne l'inclusion canonique.

3.27. Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie. On définit un 2-foncteur lax normalisé

$$\underline{sup}^{\mathrm{l,n}}_{\mathcal{A}} : \int_{\Delta}^{op} \underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

comme suit.

Pour tout objet $([m], x)$ de $\int_{\Delta}^{op} \underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$,

$$\underline{sup}^{\mathrm{l,n}}_{\mathcal{A}}([m], x) = x_m.$$

Pour tout morphisme $(\varphi, \alpha) : ([m], x) \to ([n], y)$ de $\int_{\Delta}^{op} \underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$,

$$\underline{sup}^{\mathrm{l,n}}_{\mathcal{A}}(\varphi, \alpha) = y_{n,\varphi(m)}.$$

Pour tout objet $([m], x)$ de $\int_{\Delta}^{op} \underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$

$$\underline{sup}^{\mathrm{l,n}}_{\mathcal{A}\ ([m],x)} = (x)_m = 1_{1_{x_m}}.$$

Pour tout couple de morphismes composables $(\varphi, \alpha) : ([m], x) \to ([n], y)$ et $(\psi, \beta) : ([n], y) \to ([p], z)$ de $\int_{\Delta}^{op} \underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$,

$$\underline{sup}^{\mathrm{l,n}}_{\mathcal{A}\ (\psi,\beta),(\varphi,\alpha)} = z_{p,\psi(n),\psi(\varphi(m))}(z_{p,\psi(n)} \circ \beta_{n,\varphi(m)}).$$

3.28. Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie. On définit un 2-foncteur lax normalisé

$$\underline{sup}_{\mathcal{A}} : \int_{\Delta}^{op} N_2\mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

par la condition de commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\int_{\Delta}^{op} \underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \arrow[dr, "\underline{sup}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{l,n}}"'] & & \int_{\Delta}^{op} N_2\mathcal{A} \arrow[ll, "i_{hom}^{l,n}\mathcal{A}"'] \arrow[dl, "\underline{sup}_{\mathcal{A}}"] \\
& \mathcal{A} &
\end{tikzcd},$$

dans lequel $i_{hom}^{l,n}\mathcal{A}$ désigne l'inclusion canonique.

Lemme 3.29. *Pour toute petite* 2*-catégorie* $\mathcal{A}$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\int_{\Delta}^{op} N_{\mathrm{l}}\mathcal{A} \arrow[drr, bend right, "sup_{\mathcal{A}}^{\mathrm{l}}"'] & \int_{\Delta}^{op} N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \arrow[l, "i_{l,n}^{l}\mathcal{A}"'] \arrow[rr, "i_{l,n}^{l,n}\mathcal{A}"] \arrow[dr, "sup_{\mathcal{A}}^{\mathrm{l,n}}"] & & \int_{\Delta}^{op} \underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \arrow[dl, "\underline{sup}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{l,n}}"'] & \int_{\Delta}^{op} N_2\mathcal{A} \arrow[l, "i_{hom}^{l,n}\mathcal{A}"'] \arrow[dll, bend left, "\underline{sup}_{\mathcal{A}}"] \\
& & \mathcal{A} & &
\end{tikzcd}$$

est commutatif, les flèches horizontales désignant les inclusions canoniques.

Démonstration. En vertu des définitions, il suffit de vérifier l'égalité $sup_{\mathcal{A}}^{\mathrm{l,n}} = \underline{sup}_{\mathcal{A}}^{\mathrm{l,n}}\ i_{l,n}^{l,n}\mathcal{A}$, ce qui ne pose aucune difficulté. $\square$

4. De $\mathcal{C}at$ à 2-$\mathcal{C}at$

À toute classe S de morphismes de $\mathcal{C}at$, on peut associer une classe $N_{\mathrm{l,n}}^{-1}(i_{\Delta}^{-1}(S))$ de morphismes de 2-$\mathcal{C}at$. On étudie maintenant les premières propriétés des classes de 2-foncteurs stricts obtenues par un tel procédé à partir d'un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$, avant d'en entreprendre une étude plus axiomatique dans la section suivante.

Proposition 4.1 (Carrasco-Cegarra-Garzón)**.** *Pour toute petite* 2*-catégorie* $\mathcal{A}$ *et tout entier* $m \geq 0$*, les inclusions naturelles de catégories*

$$i^{l}_{l,n}\mathcal{A} : \int_{\Delta}^{op} N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \hookrightarrow \int_{\Delta}^{op} N_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$$

$$i^{l,n}_{\underline{l,n}}\mathcal{A} : \int_{\Delta}^{op} N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \hookrightarrow \int_{\Delta}^{op} \underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$$

et

$$i^{l,n}_{\underline{hom}}\mathcal{A} : \int_{\Delta}^{op} N_{2}\mathcal{A} \hookrightarrow \int_{\Delta}^{op} \underline{N}_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$$

sont dans W^{1}_{∞} *(et donc des équivalences faibles pour tout localisateur fondamental de* $\mathcal{C}at$*).*

Démonstration. C'est une reformulation d'une partie des résultats de [4]. □

Remarque 4.2. En particulier, pour tout morphisme $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de 2-$\mathcal{C}at$, il existe un diagramme commutatif dans $\mathcal{C}at$

$$\begin{tikzcd} \Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \arrow[r, "\Delta/N_{\mathrm{l,n}}(u)"] \arrow[d] & \Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{B} \arrow[d] \\ \Delta/N_{\mathrm{l}}\mathcal{A} \arrow[r, "\Delta/N_{\mathrm{l}}(u)"'] & \Delta/N_{\mathrm{l}}\mathcal{B} \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont des W^{1}_{∞}-équivalences faibles, donc des équivalences faibles pour tout localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$. En particulier, pour tout localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$, pour tout morphisme u de 2-$\mathcal{C}at$, le foncteur $\Delta/N_{\mathrm{l}}(u)$ est une équivalence faible si et seulement si le foncteur $\Delta/N_{\mathrm{l,n}}(u)$ en est une.

Soit W *un localisateur fondamental de* $\mathcal{C}at$ *fixé.*

Définition 4.3. On notera $\mathcal{W}$ la classe des morphismes de 2-$\mathcal{C}at$ dont l'image par le foncteur $\Delta/N_{\mathrm{l}}(\bullet)$ (ou, de façon équivalente en vertu de la remarque 4.2, l'image par le foncteur $\Delta/N_{\mathrm{l,n}}(\bullet)$) est une équivalence faible.

On appellera les éléments de $\mathcal{W}$ des *$\mathcal{W}$-équivalences faibles*, ou plus simplement des *équivalences faibles*.

Remarque 4.4. Par fonctorialité, la classe $\mathcal{W}$ est faiblement saturée.

Définition 4.5. On dira qu'une petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ est $\mathcal{W}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si le morphisme canonique $\mathcal{A} \to e$ est une équivalence faible.

Lemme 4.6. *Une petite* 2*-catégorie* $\mathcal{A}$ *est* $\mathcal{W}$*-asphérique si et seulement si la catégorie* $\Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$ *est* W*-asphérique.*

Démonstration. C'est immédiat, la catégorie Δ étant W-asphérique (elle admet un objet final) et la classe W vérifiant la propriété de 2 sur 3. $\square$

Remarque 4.7. Rappelons qu'un endofoncteur $u : A \to A$ est dit *constant* s'il existe un foncteur $a : e \to A$ tel que $u = ap_A$. Autrement dit, u se factorise par la catégorie ponctuelle. En vertu de la saturation faible des localisateurs fondamentaux, une petite catégorie admettant un endofoncteur constant qui est une équivalence faible est asphérique.

Lemme 4.8. *Une petite* 2*-catégorie admettant un objet admettant un objet final est asphérique.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie admettant un objet z tel que, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, la catégorie $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(a, z)$ admette un objet final. Pour montrer le résultat désiré, il suffit, en vertu du lemme 4.6, de vérifier que la catégorie $\Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$ est asphérique.

Pour tout objet a de $\mathcal{A}$, on notera $p_a : a \to z$ l'objet final de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(a, z)$ et, pour toute 1-cellule $f : a \to z$, on notera $\varphi_f : f \Rightarrow p_a$ l'unique 2-cellule de f vers p_a dans $\mathcal{A}$. Pour tout 2-foncteur lax normalisé $x : [m] \to \mathcal{A}$, on définit un 2-foncteur lax normalisé $D(x) : [m+1] \to \mathcal{A}$ comme suit. Pour tout objet i de $[m]$, $D(x)_i = x_i$; de plus, $D(x)_{m+1} = z$. Pour tout couple d'entiers $0 \leq i \leq j \leq m$, $D(x)_{j,i} = x_{j,i}$; de plus, $D(x)_{m+1,i} = p_{x_i}$ pour tout objet i de $[m]$. Pour tout triplet d'entiers $0 \leq i \leq j \leq k \leq m$, $D(x)_{k,j,i} = x_{k,j,i}$; de plus, $D(x)_{m+1,j,i} = \varphi_{p_{x_j} \circ D(x)_{j,i}}$ pour tout couple d'entiers $0 \leq i \leq j \leq m$. Pour tout morphisme simplicial $\varphi : [m] \to [n]$, on définit un morphisme simplicial $D(\varphi) : [m+1] \to [n+1]$ par $D(\varphi)(i) = \varphi(i)$ si $i \leq m$ et $D(\varphi)(m+1) = n+1$. Cela permet de définir un endofoncteur

$$\begin{aligned} D : \Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} &\to \Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \\ ([m], x : [m] \to \mathcal{A}) &\mapsto ([m+1], D(x) : [m+1] \to \mathcal{A}) \\ \varphi &\mapsto D(\varphi). \end{aligned}$$

Considérons en outre l'endofoncteur constant

$$\begin{aligned} Z : \Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} &\to \Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A} \\ ([m], x : [m] \to \mathcal{A}) &\mapsto ([0], z) \\ \varphi &\mapsto 1_{[0]}. \end{aligned}$$

Pour tout objet $([m], x)$ de $\Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$, posons

$$\begin{aligned} \iota_{([m],x)} : [m] &\to [m+1] \\ i &\mapsto i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \omega_{([m],x)} : [0] &\to [m+1] \\ 0 &\mapsto m+1. \end{aligned}$$

Cela définit des transformations naturelles $\iota : 1_{\Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}} \Rightarrow D$ et $\omega : Z \Rightarrow D$. Il en résulte que Z est une équivalence faible. Comme c'est un endofoncteur constant de $\Delta/N_{\mathrm{l,n}}\mathcal{A}$, cette catégorie est asphérique (voir la remarque 4.7). □

Théorème 4.9. *Soit*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

un triangle commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$*. Supposons que, pour tout objet* c *de* $\mathcal{C}$*, le* 2*-foncteur strict induit par ces données*

$$u//_{\mathrm{c}}c : \mathcal{A}//^{w}_{\mathrm{c}}c \to \mathcal{B}//^{v}_{\mathrm{c}}c$$

soit une équivalence faible. Alors, u *est une équivalence faible.*

Démonstration. En utilisant les propositions 2.25 et 2.24, le résultat se démontre de façon tout à fait analogue à [7, théorème 2.32]. □

Remarque 4.10. Il est bien entendu possible de remplacer le 2-foncteur strict $u//_{\mathrm{c}}c$ par $u//_{\mathrm{l}}c$, $c\backslash\backslash_{\mathrm{c}}u$ ou $c\backslash\backslash_{\mathrm{l}}u$ dans l'énoncé du théorème 4.9. On démontrera plus loin ces variantes, ainsi que des généralisations d'icelles, dans un cadre plus conceptuel.

5. Localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$

Définition 5.1. Un *localisateur fondamental de* $2\text{-}\mathcal{C}at$ est une classe $\mathcal{W}$ de morphismes de $2\text{-}\mathcal{C}at$ vérifiant les propriétés suivantes.

LF1 La classe $\mathcal{W}$ est faiblement saturée.

LF2 Si une petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ admet un objet admettant un objet final, alors le morphisme canonique $\mathcal{A} \to e$ est dans $\mathcal{W}$.

LF3 Si

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$ et si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict induit par ces données

$$u/\!/_{\mathrm{c}} c : \mathcal{A}/\!/_{\mathrm{c}}^{w} c \to \mathcal{B}/\!/_{\mathrm{c}}^{v} c$$

est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

Remarque 5.2. Si W est un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$, alors la classe $\mathcal{W} = N_{\mathrm{l,n}}^{-1}(i_{\Delta}^{-1}(W))$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$ en vertu de la remarque 4.4, du lemme 4.8 et du théorème 4.9. En particulier, $\mathcal{W}_{\infty}^{2} = N_{\mathrm{l,n}}^{-1}(i_{\Delta}^{-1}(W_{\infty}^{1})) = N_{\mathrm{l,n}}^{-1}(W_{\infty}^{\Delta})$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$.

Dans la suite, on commettra souvent l'abus de considérer $\mathcal{C}at$ comme une sous-catégorie (pleine) de $2\text{-}\mathcal{C}at$.

Remarque 5.3. Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$, alors $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$ est un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$.

L'objectif principal de cet article consiste à montrer que *tous* les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et *tous* les localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$ s'obtiennent les premiers à partir des seconds et les seconds à partir des premiers par les opérations figurant dans les énoncés des remarques 5.2 et 5.3 respectivement, que ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre et qu'elles induisent des équivalences de catégories entre les catégories homotopiques associées de $\mathcal{C}at$ et de $2\text{-}\mathcal{C}at$.

On suppose fixé un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ *de* $2\text{-}\mathcal{C}at$.

On appellera les éléments de $\mathcal{W}$ des $\mathcal{W}$*-équivalences* ou, plus simplement, si cela n'introduit aucune ambiguïté, des *équivalences faibles*.

Définition 5.4. On dira qu'une petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ est $\mathcal{W}$-*asphérique*, ou plus simplement *asphérique*, si le morphisme canonique $\mathcal{A} \to e$ est dans $\mathcal{W}$. On dira qu'un 2-foncteur strict $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est $\mathcal{W}$-*colax-asphérique*, ou plus simplement *colax-asphérique* si, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, la 2-catégorie $\mathcal{A}//_{\mathrm{c}}^{u}b$ est asphérique.

Exemple 5.5. Pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ et tout objet a de $\mathcal{A}$, la 2-catégorie $\mathcal{A}//_{\mathrm{c}}a$ est asphérique, en vertu de l'exemple 3.6 et de l'axiome LF2. La condition LF3 et un argument de « 2 sur 3 » permettent donc d'affirmer qu'un 2-foncteur strict colax-asphérique est une équivalence faible.

Remarque 5.6. La condition LF2 de la définition 5.1 est équivalente, modulo LF1 et LF3, à la suivante : pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ et tout objet a de $\mathcal{A}$, le morphisme canonique $\mathcal{A}//_{\mathrm{c}}a \to e$ est dans $\mathcal{W}$. L'énoncé analogue pour les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ est évident puisque, si une petite catégorie A admet un objet final z, les catégories A et A/z sont canoniquement isomorphes. Le cas de 2-$\mathcal{C}at$ est un peu plus subtil et nous le laissons en exercice (instructif, même si nous ne l'utiliserons pas).

Lemme 5.7. *Une W_{∞}^{1}-équivalence faible est une $\mathcal{W}$-équivalence faible. Une petite catégorie W_{∞}^{1}-asphérique est $\mathcal{W}$-asphérique.*

Démonstration. La seconde assertion est conséquence de la première, qui résulte du théorème 2.11 et de la remarque 5.3. □

Le lemme 5.8 est immédiat.

Lemme 5.8. *Soient $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie, z un objet de $\mathcal{A}$ et $q : e \to \mathcal{A}$ le morphisme de 2-$\mathcal{C}at$ défini par l'objet z. Alors, pour tout objet x de $\mathcal{A}$, $e//_{\mathrm{c}}^{q}x$ est la 2-catégorie associée à la catégorie $(\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(z,x))^{op}$.*

Lemme 5.9. *Une petite 2-catégorie op-admettant un objet admettant un objet initial est asphérique.*

Démonstration. Soient $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie op-admettant un objet admettant un objet initial et soit z un objet de $\mathcal{A}$ tel que, pour tout objet x de $\mathcal{A}$, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(z,x)$ admette un objet initial. Considérons les 2-foncteurs $p_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to e$ et $q_{\mathcal{A}} : e \to \mathcal{A}$, le second étant défini par $q_{\mathcal{A}}(*) = z$. En vertu du lemme 5.8, pour tout objet x de $\mathcal{A}$, la 2-catégorie $e//_{\mathrm{c}}^{q_{\mathcal{A}}}x$ admet un objet admettant un objet final (elle admet également un objet admettant un objet initial). On en déduit que $e/\!\!/_{\mathrm{c}}^{q_{\mathcal{A}}}x$ est asphérique pour tout objet x de $\mathcal{A}$. Par conséquent, $q_{\mathcal{A}}$ une équivalence faible. Comme $p_{\mathcal{A}}q_{\mathcal{A}} = 1_e$, il résulte de la saturation faible de $\mathcal{W}$ que $p_{\mathcal{A}}$ est une équivalence faible. Par définition, $\mathcal{A}$ est donc asphérique. $\square$

Lemme 5.10. *Une petite 2-catégorie op-admettant un objet admettant un objet final est asphérique.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie op-admettant un objet admettant un objet final et soit z un objet de $\mathcal{A}$ tel que, pour tout objet x de $\mathcal{A}$, la catégorie $\underline{\mathsf{Hom}}_{\mathcal{A}}(z, x)$ admette un objet final. Considérons les 2-foncteurs $p_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to e$ et $q_{\mathcal{A}} : e \to \mathcal{A}$, le second étant défini par $q_{\mathcal{A}}(*) = z$. En vertu du lemme 5.8, pour tout objet x de $\mathcal{A}$, la 2-catégorie $e/\!\!/_{\mathrm{c}}^{q_{\mathcal{A}}}x$ op-admet un objet admettant un objet initial (elle op-admet également un objet admettant un objet final). On en déduit que $e/\!\!/_{\mathrm{c}}^{q_{\mathcal{A}}}x$ est asphérique pour tout objet x de $\mathcal{A}$, en vertu du lemme 5.9. Par conséquent, $q_{\mathcal{A}}$ est une équivalence faible. La saturation faible de $\mathcal{W}$ permet d'en conclure que $\mathcal{A}$ est asphérique. $\square$

Corollaire 5.11. *Pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ et tout objet a de $\mathcal{A}$, les 2-catégories $a\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$ et $a\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{c}}\mathcal{A}$ sont asphériques.*

Démonstration. En vertu de l'exemple 3.6, cela résulte des lemmes 5.9 et 5.10. $\square$

Lemme 5.12. *Un préadjoint à gauche colax est une équivalence faible.*

Démonstration. En vertu des définitions, cela résulte des conditions LF2 et LF3. $\square$

Proposition 5.13. *Soient $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie et $F : \mathcal{A}^{co} \to \underline{2\text{-}\mathcal{C}at}$ un 2-foncteur strict tel que, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, la 2-catégorie $F(a)$ soit asphérique. Alors, la projection canonique*

$$P_F : \int_{\mathcal{A}}^{co} F \to \mathcal{A}$$

est colax-asphérique (donc en particulier une équivalence faible).

Démonstration. La fibre ${P_F}^{-1}(a)$ de P_F au-dessus de a s'identifiant à $F(a)$, elle est asphérique en vertu des hypothèses. On sait de plus (voir le paragraphe 3.21) qu'il existe un 2-foncteur strict

$$K_a : \left(\int_{\mathcal{A}}^{co} F\right) /\!\!/_{\mathrm{c}}^{P_F} a \to {P_F}^{-1}(a)$$

qui est un préadjoint à gauche colax, donc une équivalence faible en vertu du lemme 5.12. Par conséquent, la 2-catégorie $(\int_{\mathcal{A}}^{co} F) /\!\!/_{\mathrm{c}}^{P_F} a$ est asphérique, ce qui permet de conclure (voir l'exemple 5.5). □

5.14. Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie. On définit une 2-catégorie $S_1(\mathcal{A})$ comme suit :

$$\mathsf{Ob}(S_1(\mathcal{A})) = \mathsf{Fl}_1(\mathcal{A}).$$

Si $k : b \to a$ et $k' : b' \to a'$ sont deux 1-cellules de $\mathcal{A}$, une 1-cellule de k vers k' dans $S_1(\mathcal{A})$ est un triplet

$$(f : b' \to b, g : a \to a', \alpha : k' \Rightarrow gkf),$$

ce que représente le diagramme

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "k"] & a \arrow[d, "g"] \\ b' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "k'"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\alpha"] & a' \end{tikzcd} .$$

Si (f, g, α) et (f', g', α') sont deux 1-cellules parallèles de k vers k' dans $S_1(\mathcal{A})$, les 2-cellules de (f, g, α) vers (f', g', α') dans $S_1(\mathcal{A})$ sont les couples

$$(\varphi : f \Rightarrow f', \gamma : g \Rightarrow g')$$

tels que

$$(\gamma \circ k \circ \varphi)\alpha = \alpha'.$$

Les diverses compositions et identités de $S_1(\mathcal{A})$ se définissent de façon « évidente » à partir de celles de $\mathcal{A}$.

On vérifie l'existence d'isomorphismes canoniques

$$S_1(\mathcal{A}) \simeq \int_{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}^{co} (a \backslash\!\!\backslash_1 \mathcal{A}) \simeq \int_{\mathcal{A}}^{co} (\mathcal{A} /\!\!/_1 a)^{\mathrm{op}}.$$

Il existe un diagramme de projections canoniques

$$\mathcal{A}^{\text{op}} \xleftarrow{s_1^{\mathcal{A}}} S_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{t_1^{\mathcal{A}}} \mathcal{A}.$$

La fibre de la flèche de gauche au-dessus de $a \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ s'identifie à $a\backslash\!\backslash_1\mathcal{A}$, donc est asphérique en vertu du corollaire 5.11 ; la fibre de la flèche de droite au-dessus de $a \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ s'identifie à $(\mathcal{A}/\!/_1 a)^{\text{op}}$, donc est asphérique en vertu du lemme 5.9, puisqu'elle op-admet un objet admettant un objet initial. En particulier, en vertu de la proposition 5.13, ces deux flèches sont des équivalences faibles.

5.15. Pour tout morphisme $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$, on en définit un autre par

$$\begin{aligned} S_1(u) : S_1(\mathcal{A}) &\to S_1(\mathcal{B}) \\ k &\mapsto u(k) \\ (f, g, \alpha) &\mapsto (u(f), u(g), u(\alpha)) \\ (\varphi, \gamma) &\mapsto (u(\varphi), u(\gamma)). \end{aligned}$$

Cette définition rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}^{\text{op}} \arrow[d, "u^{\text{op}}"'] & S_1(\mathcal{A}) \arrow[l, "s_1^{\mathcal{A}}"'] \arrow[r, "t_1^{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "S_1(u)"] & \mathcal{A} \arrow[d, "u"] \\ \mathcal{B}^{\text{op}} & S_1(\mathcal{B}) \arrow[l, "s_1^{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "t_1^{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd} .$$

Comme les flèches horizontales de ce diagramme sont toutes des équivalences faibles, en vertu de ce qui précède, on déduit la proposition 5.16 de deux applications consécutives d'un argument de « 2 sur 3 ».

Proposition 5.16. *Un morphisme u de $2\text{-}\mathcal{C}at$ est une équivalence faible si et seulement si u^{op} est une équivalence faible.*

Corollaire 5.17. *Une petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ est asphérique si et seulement si $\mathcal{A}^{op}$ l'est.*

Corollaire 5.18. *Une petite 2-catégorie admettant un objet admettant un objet initial est asphérique.*

Proposition 5.19. *Soit*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$. *Supposons que, pour tout objet* c *de* $\mathcal{C}$, *le morphisme de* $2\text{-}\mathcal{C}at$ *induit*

$$c\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{c}} u : c\backslash\!\!\backslash^{w}_{\mathrm{c}}\mathcal{A} \to c\backslash\!\!\backslash^{v}_{\mathrm{c}}\mathcal{B}$$

soit une équivalence faible. Alors u *est une équivalence faible.*

Démonstration. En vertu des hypothèses et par définition, le 2-foncteur strict $(u^{\mathrm{op}}/\!\!/_{\mathrm{c}} c)^{\mathrm{op}}$ est une équivalence faible pour tout objet c de $\mathcal{C}$. Par conséquent, en vertu de la proposition 5.16, le 2-foncteur strict $u^{\mathrm{op}}/\!\!/_{\mathrm{c}} c$ est une équivalence faible pour tout objet c de $\mathcal{C}$. En vertu de la condition LF3, le 2-foncteur strict u^{op} est donc une équivalence faible. Une nouvelle invocation de la proposition 5.16 permet de conclure. □

Corollaire 5.20. *Soit* $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *un morphisme de* $2\text{-}\mathcal{C}at$. *Supposons que, pour tout objet* b *de* $\mathcal{B}$, *la* 2*-catégorie* $b\backslash\!\!\backslash^{u}_{\mathrm{c}}\mathcal{A}$ *soit asphérique. Alors* u *est une équivalence faible.*

5.21. Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie. On définit une 2-catégorie $S_2(\mathcal{A})$ comme suit :

$$\mathsf{Ob}(S_2(\mathcal{A})) = \mathsf{Fl}_1(\mathcal{A}).$$

Si $k : b \to a$ et $k' : b' \to a'$ sont deux 1-cellules de $\mathcal{A}$, une 1-cellule de k vers k' dans $S_2(\mathcal{A})$ est un triplet

$$(f : b \to b', g : a \to a', \alpha : k'f \Rightarrow gk),$$

ce que représente le diagramme

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\alpha"] & a \arrow[d, "g"] \\ b' \arrow[r, "k'"'] & a' \end{tikzcd} .$$

Si (f, g, α) et (f', g', α') sont deux 1-cellules parallèles de k vers k' dans $S_2(\mathcal{A})$, les 2-cellules de (f, g, α) vers (f', g', α') dans $S_2(\mathcal{A})$ sont les couples

$$(\varphi : f' \Rightarrow f, \gamma : g \Rightarrow g')$$

tels que

$$(\gamma \circ k)\alpha(k' \circ \varphi) = \alpha'.$$

Les diverses compositions et identités de $S_2(\mathcal{A})$ se définissent de façon « évidente » à partir de celles de $\mathcal{A}$.

On vérifie l'existence d'isomorphismes canoniques

$$S_2(\mathcal{A}) \simeq \left(\int_{\mathcal{A}^{\mathrm{coop}}}^{co} (a\backslash\!\backslash_{\mathrm{l}}\mathcal{A})^{\mathrm{op}}\right)^{\mathrm{op}} \simeq \int_{\mathcal{A}}^{co} (\mathcal{A}/\!/_{\mathrm{c}}a)^{\mathrm{co}}.$$

Il existe un diagramme de projections canoniques

$$\mathcal{A}^{\mathrm{co}} \xleftarrow{s_2^{\mathcal{A}}} S_2(\mathcal{A}) \xrightarrow{t_2^{\mathcal{A}}} \mathcal{A}.$$

La fibre de la flèche de droite au-dessus de $a \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ s'identifie à $(\mathcal{A}/\!/_{\mathrm{c}}a)^{\mathrm{co}}$, donc est asphérique (elle admet un objet admettant un objet initial). En vertu de la proposition 5.13, $t_2^{\mathcal{A}}$ est donc une équivalence faible. La fibre de la flèche de gauche au-dessus de $a \in \mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ s'identifie à $a\backslash\!\backslash_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$, donc est asphérique. En vertu de la proposition 5.13, la projection canonique

$$\int_{\mathcal{A}^{\mathrm{coop}}}^{co} (a\backslash\!\backslash_{\mathrm{l}}\mathcal{A})^{\mathrm{op}} \to \mathcal{A}^{\mathrm{coop}}$$

est une équivalence faible. Comme elle s'identifie à $\left(s_2^{\mathcal{A}}\right)^{\mathrm{op}}$, $s_2^{\mathcal{A}}$ est une équivalence faible en vertu du corollaire 5.16.

5.22. Pour tout morphisme $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de 2-$\mathcal{C}at$, on en définit un autre par

$$\begin{aligned} S_2(u) : S_2(\mathcal{A}) &\to S_2(\mathcal{B}) \\ k &\mapsto u(k) \\ (f, g, \alpha) &\mapsto (u(f), u(g), u(\alpha)) \\ (\varphi, \gamma) &\mapsto (u(\varphi), u(\gamma)). \end{aligned}$$

Cette définition rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}^{\mathrm{co}} \arrow[d, "u^{\mathrm{co}}"'] & S_2(\mathcal{A}) \arrow[l, "s_2^{\mathcal{A}}"'] \arrow[r, "t_2^{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "S_2(u)"] & \mathcal{A} \arrow[d, "u"] \\
\mathcal{B}^{\mathrm{co}} & S_2(\mathcal{B}) \arrow[l, "s_2^{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "t_2^{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{B}
\end{tikzcd} .$$

Comme les flèches horizontales de ce diagramme sont toutes des équivalences faibles, en vertu de ce qui précède, on en déduit la proposition 5.23 par deux applications consécutives d'un argument de « 2 sur 3 ».

Proposition 5.23. *Un morphisme u de 2-$\mathcal{C}at$ est une équivalence faible si et seulement si u^{co} en est une.*

Corollaire 5.24. *Une petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ est asphérique si et seulement si $\mathcal{A}^{co}$ est asphérique.*

Proposition 5.25. *Un morphisme u de 2-$\mathcal{C}at$ est une équivalence faible si et seulement si u^{coop} en est une.*

Démonstration. Cela résulte des propositions 5.16 et 5.23. □

Corollaire 5.26. *Une petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ est asphérique si et seulement si $\mathcal{A}^{coop}$ est asphérique.*

Proposition 5.27. *Soit*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\
& \mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans 2-$\mathcal{C}at$. Supposons que, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le morphisme

$$u/\!/_1 c : \mathcal{A}/\!/_1^w c \to \mathcal{B}/\!/_1^v c$$

soit une équivalence faible. Alors u est une équivalence faible.

Démonstration. En vertu des hypothèses et par définition, le 2-foncteur strict $(u^{\mathrm{co}}/\!/_{\mathrm{c}} c)^{\mathrm{co}}$ est une équivalence faible pour tout objet c de $\mathcal{C}$. Par conséquent, en vertu de la proposition 5.23, le 2-foncteur strict $u^{\mathrm{co}}/\!/_{\mathrm{c}} c$ est une équivalence faible pour tout objet c de $\mathcal{C}$. En vertu de la condition LF3, le 2-foncteur strict u^{co} est donc une équivalence faible. Une nouvelle invocation de la proposition 5.23 permet de conclure. □

Proposition 5.28. *Soit*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$*. Supposons que, pour tout objet* c *de* $\mathcal{C}$*, le morphisme*

$$c\backslash\!\backslash_1 u : c\backslash\!\backslash^w_1 \mathcal{A} \to c\backslash\!\backslash^v_1 \mathcal{B}$$

soit une équivalence faible. Alors u *est une équivalence faible.*

Démonstration. En vertu des hypothèses et par définition, le 2-foncteur strict $(u^{\mathrm{op}}/\!/_1 c)^{\mathrm{op}}$ est une équivalence faible pour tout objet c de $\mathcal{C}$. Par conséquent, en vertu de la proposition 5.16, le 2-foncteur strict $u^{\mathrm{op}}/\!/_1 c$ est une équivalence faible pour tout objet c de $\mathcal{C}$. En vertu de la proposition 5.27, le 2-foncteur strict u^{op} est donc une équivalence faible. Une nouvelle invocation de la proposition 5.16 permet de conclure. □

Proposition 5.29. *Un préadjoint à gauche lax (resp. un préadjoint à droite lax, resp. un préadjoint à droite colax) est une équivalence faible.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'exemple 3.6, du corollaire 5.18 et de la proposition 5.27 (resp. de l'exemple 3.6, du lemme 5.9 et de la proposition 5.28, resp. de l'exemple 3.6, du lemme 5.10 et de la proposition 5.19). □

Proposition 5.30. *Une préfibration (resp. une préopfibration, resp. une précofibration, resp. une précoopfibration) à fibres asphériques est une équivalence faible.*

Démonstration. Soit $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ une préfibration à fibres asphériques. Par définition, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, le 2-foncteur strict canonique $J_b : u^{-1}(b) \to b\backslash\!\backslash^u_{\mathrm{c}} \mathcal{A}$ est un préadjoint à gauche lax. En vertu de la proposition 5.29, c'est donc une équivalence faible. Par conséquent, $b\backslash\!\backslash^u_{\mathrm{c}} \mathcal{A}$ est asphérique pour tout objet b de $\mathcal{B}$. On conclut par une invocation de la proposition 5.19. Les trois autres assertions s'en déduisent en invoquant respectivement les propositions 5.16, 5.23 et 5.25 et leur corollaire respectif 5.17, 5.24 et 5.26. □

Remarque 5.31. La proposition 5.30 constitue la généralisation, à tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, de [7, lemme 2.43].

Définition 5.32. Étant donné un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

dans 2-$\mathcal{C}at$, on dira que u est *lax-asphérique au-dessus de* $\mathcal{C}$ (resp. *lax-opasphérique au-dessus de* $\mathcal{C}$, resp. *colax-asphérique au-dessus de* $\mathcal{C}$, resp. *colax-opasphérique au-dessus de* $\mathcal{C}$) si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict $u/\!/_{\mathrm{l}}c$ (resp. $c\backslash\!\backslash_{\mathrm{l}}u$, resp. $u/\!/_{\mathrm{c}}c$, resp. $c\backslash\!\backslash_{\mathrm{c}}u$) est une équivalence faible. Si $v = 1_{\mathcal{B}}$, on dira simplement[5] que u est *lax-asphérique* (resp. *lax-opasphérique*, resp. *colax-asphérique*, resp. *colax-opasphérique*).

Remarque 5.33. En vertu des résultats ci-dessus, sous les données de la définition 5.32, le 2-foncteur strict u est une équivalence faible pour peu qu'il soit lax-asphérique, lax-opasphérique, colax-asphérique ou colax-opasphérique au-dessus de $\mathcal{C}$. En faisant $v = 1_{\mathcal{B}}$, on obtient le cas particulier suivant : pour tout 2-foncteur strict $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, si, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, la 2-catégorie $\mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{l}}b$ (resp. $b\backslash\!\backslash^{u}_{\mathrm{l}}\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{A}/\!/^{u}_{\mathrm{c}}b$, resp. $b\backslash\!\backslash^{u}_{\mathrm{c}}\mathcal{A}$) est asphérique, alors u est une équivalence faible.

Proposition 5.34. *Soit*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans 2-$\mathcal{C}at$. *On suppose que, pour tout objet* c *de* $\mathcal{C}$, *le* 2*-foncteur strict induit entre les fibres* $u_c : w^{-1}(c) \to v^{-1}(c)$ *est une équivalence faible.*

(a) *Si* v *et* w *sont des préfibrations, alors* u *est colax-opasphérique au-dessus de* $\mathcal{C}$.

(b) *Si* v *et* w *sont des préopfibrations, alors* u *est colax-asphérique au-dessus de* $\mathcal{C}$.

5. En accord avec l'emploi du terme « colax-asphérique », déjà introduit.

(c) *Si v et w sont des précofibrations, alors u est lax-opasphérique au-dessus de $\mathcal{C}$.*

(d) *Si v et w sont des précoopfibrations, alors u est lax-asphérique au-dessus de $\mathcal{C}$.*

En particulier, dans n'importe lequel de ces quatre cas, u est une équivalence faible.

Démonstration. Plaçons-nous dans le premier cas, les trois autres s'en déduisant par dualité. Pour tout objet c de $\mathcal{C}$, on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} w^{-1}(c) \arrow[r, "u_c"] \arrow[d, "J_c"'] & v^{-1}(c) \arrow[d, "J_c"] \\ c\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{c}}^{w}\mathcal{A} \arrow[r, "c\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{c}}u"'] & c\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{c}}^{v}\mathcal{B} \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont des préadjoints à gauche lax, donc des équivalences faibles (proposition 5.29). Comme, par hypothèse, u_c est une équivalence faible, il en est de même de $c\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{c}}u$. □

On ne suppose plus fixé de localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$.

Théorème 5.35. *Soit $\mathcal{W}$ une partie de $\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$.

(ii) Les conditions suivantes sont vérifiées.

LF1′ La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LF2′ Si une petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ admet un objet admettant un objet initial, alors $\mathcal{A} \to e$ est dans $\mathcal{W}$.

LF3′ Si

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$ et si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict

$$u/\!\!/_1 c : \mathcal{A}/\!\!/_1^{w} c \to \mathcal{B}/\!\!/_1^{v} c$$

est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

(iii) Les conditions suivantes sont vérifiées.

LF1″ La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LF2″ Si une petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ op-admet un objet admettant un objet final, alors $\mathcal{A} \to e$ est dans $\mathcal{W}$.

LF3″ Si

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif dans 2-$\mathcal{C}at$ et si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict

$$c\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{c}} u : c\backslash\!\!\backslash\!\!\backslash^{w}_{\mathrm{c}}\mathcal{A} \to c\backslash\!\!\backslash\!\!\backslash^{v}_{\mathrm{c}}\mathcal{B}$$

est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

(iv) Les conditions suivantes sont vérifiées.

LF1‴ La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LF2‴ Si une petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ op-admet un objet admettant un objet initial, alors $\mathcal{A} \to e$ est dans $\mathcal{W}$.

LF3‴ Si

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif dans 2-$\mathcal{C}at$ et si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict

$$c\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{l}} u : c\backslash\!\!\backslash\!\!\backslash^{w}_{\mathrm{l}}\mathcal{A} \to c\backslash\!\!\backslash\!\!\backslash^{v}_{\mathrm{l}}\mathcal{B}$$

est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

(v) Les conditions suivantes sont vérifiées.

LFα La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LFβ Le morphisme canonique $[1] \to e$ est dans $\mathcal{W}$.

LFγ Si

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "q"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$, si p et q sont des précoopfibrations et si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict induit entre les fibres

$$p^{-1}(c) \to q^{-1}(c)$$

est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

(vi) Les conditions suivantes sont vérifiées.

LFα' La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LFβ' Le morphisme canonique $[1] \to e$ est dans $\mathcal{W}$.

LFγ' Si

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "q"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$, si p et q sont des précofibrations et si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict induit entre les fibres

$$p^{-1}(c) \to q^{-1}(c)$$

est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

(vii) Les conditions suivantes sont vérifiées.

LFα'' La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LFβ'' Le morphisme canonique $[1] \to e$ est dans $\mathcal{W}$.

LFγ'' Si

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "q"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$, si p et q sont des préopfibrations et si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict induit entre les fibres

$$p^{-1}(c) \to q^{-1}(c)$$

est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

(viii) Les conditions suivantes sont vérifiées.

LFα''' La partie $\mathcal{W}$ de $\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ est faiblement saturée.

LFβ''' Le morphisme canonique $[1] \to e$ est dans $\mathcal{W}$.

LFγ''' Si

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "q"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$, si p et q sont des préfibrations et si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict induit entre les fibres

$$p^{-1}(c) \to q^{-1}(c)$$

est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

Démonstration. L'implication $(i) \Rightarrow (v)$ résulte de la proposition 5.34.

Montrons l'implication $(v) \Rightarrow (iii)$.

Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie. Les flèches du triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} {[1] \times \mathcal{A}} \arrow[rr, "pr_2"] \arrow[dr, "pr_2"'] & & \mathcal{A} \arrow[dl, "1_{\mathcal{A}}"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

sont des précoopfibrations et, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, le 2-foncteur strict induit entre les fibres au-dessus de a s'identifie au morphisme canonique $[1] \to e$, qui est dans $\mathcal{W}$ par hypothèse. Ainsi, pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$, la projection canonique $[1] \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est dans $\mathcal{W}$.

Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie op-admettant un objet admettant un objet final. On construit facilement (voir la démonstration de [7, lemme 2.27]) un endomorphisme constant de $\mathcal{A}$ homotope à $1_{\mathcal{A}}$. La 2-catégorie $\mathcal{A}$ est donc contractile. En vertu de ce qui précède et de [18, lemme 1.4.8], le morphisme canonique $\mathcal{A} \to e$ est dans $\mathcal{W}$. La condition LF2$''$ est donc vérifiée.

Pour tout morphisme $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$, on peut considérer les 2-foncteurs stricts

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\text{op}} &\to \underline{2\text{-}\mathcal{C}at} \\ b &\mapsto b\backslash\!\!\backslash^{u}_{\text{c}}\mathcal{A} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\to \underline{2\text{-}\mathcal{C}at} \\ a &\mapsto (\mathcal{B}/\!\!/_{\text{c}}u(a))^{\text{op}}. \end{aligned}$$

Considérons la 2-catégorie $S(u)$ définie comme suit. Ses objets sont les triplets $(b, a, k : b \to u(a))$ avec b un objet de $\mathcal{B}$, a un objet de $\mathcal{A}$ et k une 1-cellule de $\mathcal{B}$. Les 1-cellules de (b, a, k) vers (b', a', k') sont les triplets $(f : b' \to b, g : a \to a', \alpha : u(g)kf \Rightarrow k')$, f étant une 1-cellule de $\mathcal{B}$, g une 1-cellule de $\mathcal{A}$ et α une 2-cellule de $\mathcal{B}$. Les 2-cellules de (f, g, α) vers (f', g', α') sont les couples $(\varphi : f \Rightarrow f', \gamma : g \Rightarrow g')$ avec φ une 2-cellule de $\mathcal{B}$ et γ une 2-cellule de $\mathcal{A}$ telles que $\alpha'(u(\gamma) \circ k \circ \varphi) = \alpha$. On vérifie l'existence d'isomorphismes canoniques

$$S(u) \simeq \int_{\mathcal{B}^{\mathrm{op}}} b \backslash\!\backslash_{\mathrm{c}}^{u} \mathcal{A} \simeq \int_{\mathcal{A}} (\mathcal{B} /\!/_{\mathrm{c}} u(a))^{\mathrm{op}}.$$

Les projections canoniques

$$\begin{aligned} s_u : S(u) &\to \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \\ (b, a, k) &\mapsto b \\ (f, g, \alpha) &\mapsto f \\ (\varphi, \gamma) &\mapsto \varphi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} t_u : S(u) &\to \mathcal{A} \\ (b, a, k) &\mapsto a \\ (f, g, \alpha) &\mapsto g \\ (\varphi, \gamma) &\mapsto \gamma \end{aligned}$$

sont donc des précoopfibrations. De plus, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, la 2-catégorie $(\mathcal{B} /\!/_{\mathrm{c}} u(a))^{\mathrm{op}}$ op-admet un objet admettant un objet final. En vertu de ce qui précède, le morphisme canonique $(\mathcal{B} /\!/_{\mathrm{c}} u(a))^{\mathrm{op}} \to e$ est donc dans $\mathcal{W}$. Or, c'est à ce morphisme que s'identifie le 2-foncteur strict induit entre les fibres au-dessus de a par le diagramme

$$\begin{tikzcd} S(u) \arrow[rr, "t_u"] \arrow[dr, "t_u"'] & & \mathcal{A} \arrow[dl, "1_{\mathcal{A}}"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}.$$

Comme t_u et $1_{\mathcal{A}}$ sont des précoopfibrations, t_u est dans $\mathcal{W}$.

Soit

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & \mathcal{B} \arrow[d, "w"] \\
\mathcal{A}' \arrow[r, "u'"'] & \mathcal{B}'
\end{tikzcd}$$

un carré commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$. On définit un 2-foncteur strict

$$\begin{aligned}
S(v, w) : S(u) &\to S(u') \\
(b, a, k) &\mapsto (w(b), v(a), w(k)) \\
(f, g, \alpha) &\mapsto (w(f), v(g), w(\alpha)) \\
(\varphi, \gamma) &\mapsto (w(\varphi), v(\gamma)).
\end{aligned}$$

Cela fournit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \arrow[d, "w^{\mathrm{op}}"'] & S(u) \arrow[l, "s_u"'] \arrow[r, "t_u"] \arrow[d, "S(v,w)"] & \mathcal{A} \arrow[d, "v"] \\
\mathcal{B}'^{\mathrm{op}} & S(u') \arrow[l, "s_{u'}"] \arrow[r, "t_{u'}"'] & \mathcal{A}'
\end{tikzcd}$$

dans lequel t_u et $t_{u'}$ sont dans $\mathcal{W}$.

Soit

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\
& \mathcal{C} &
\end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at$ tel que, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict $u/\!\!/_{\mathrm{c}}c : \mathcal{A}/\!\!/_{\mathrm{c}}^{w}c \to \mathcal{B}/\!\!/_{\mathrm{c}}^{v}c$ soit dans $\mathcal{W}$. En vertu de ce qui précède, cela fournit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[d, "1_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}"'] & S(w) \arrow[l, "s_w"'] \arrow[r, "t_w"] \arrow[d, "S(u,1_{\mathcal{C}})"] & \mathcal{A} \arrow[d, "u"] \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} & S(v) \arrow[l, "s_v"] \arrow[r, "t_v"'] & \mathcal{B}
\end{tikzcd} \qquad .$$

En particulier, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S(w) \arrow[rr, "S(u{,}1_{\mathcal{C}})"] \arrow[dr, "s_w"'] & & S(v) \arrow[dl, "s_v"] \\ & \mathcal{C}^{\mathrm{op}} & \end{tikzcd}$$

dans lequel s_w et s_v sont des précoopfibrations. Pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict induit par ce diagramme entre les fibres au-dessus de c s'identifie à $c\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{c}} u$, qui est dans $\mathcal{W}$ par hypothèse. Par conséquent, $S(u, 1_{\mathcal{C}})$ est dans $\mathcal{W}$ en vertu de la condition LFγ. Comme t_w et t_v sont dans $\mathcal{W}$, qui est faiblement saturée, u est dans $\mathcal{W}$, ce qui termine la démonstration de la condition LF3$''$, et donc de l'implication $(v) \Rightarrow (iii)$.

Montrons l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$. Notons $\mathcal{W}^{\mathrm{op}}$ la partie de $\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ définie par

$$\mathcal{W}^{\mathrm{op}} = \{u \in \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at) | u^{\mathrm{op}} \in \mathcal{W}\}.$$

Vérifions que la classe $\mathcal{W}^{\mathrm{op}}$ constitue un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$. La saturation faible de $\mathcal{W}^{\mathrm{op}}$ est immédiate. Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie admettant un objet admettant un objet final. Alors, $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ op-admet un objet admettant un objet final, donc le morphisme $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to e$ est dans $\mathcal{W}$, c'est-à-dire que le morphisme $\mathcal{A} \to e$ est dans $\mathcal{W}^{\mathrm{op}}$. Soit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans 2-$\mathcal{C}at$ tel que, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict $u/\!\!/_{\mathrm{c}} c$ soit dans $\mathcal{W}^{\mathrm{op}}$, c'est-à-dire tel que le 2-foncteur strict $(u/\!\!/_{\mathrm{c}} c)^{\mathrm{op}}$ soit dans $\mathcal{W}$, c'est-à-dire tel que le 2-foncteur strict $((u^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}/\!\!/_{\mathrm{c}} c)^{\mathrm{op}}$ soit dans $\mathcal{W}$. Pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur strict $c\backslash\!\!\backslash_{\mathrm{c}} u^{\mathrm{op}}$ est donc dans $\mathcal{W}$. La condition LF3$'$ implique que u^{op} est dans $\mathcal{W}$, c'est-à-dire que u est dans $\mathcal{W}^{\mathrm{op}}$, qui est donc bien un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$. On en déduit $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\mathrm{op}}$ en vertu de la proposition 5.16. L'implication considérée en résulte.

Les autres se démontrent de façon analogue ou se déduisent de ce qui précède par un argument de dualité. $\square$

6. Correspondances fondamentales

On suppose fixé un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de 2-$\mathcal{C}at$.

Proposition 6.1. *Pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$, le 2-foncteur strict $\epsilon_{\mathcal{A}} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ est une équivalence faible.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 3.8 et de la condition LF2. □

Remarque 6.2. La proposition 6.1 constitue la généralisation, à tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, de [7, proposition 5.10].

Lemme 6.3. *Soit $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un 2-foncteur strict. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) u est une équivalence faible.

(ii) $\widetilde{u}$ est une équivalence faible.

Démonstration. Cela résulte de l'égalité $\epsilon_{\mathcal{B}}\widetilde{u} = u\epsilon_{\mathcal{A}}$, de la proposition 6.1 et d'un argument de « 2 sur 3 ». □

Définition 6.4. On dira qu'un morphisme u de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$ est une *$\mathcal{W}$-équivalence faible lax* ou, plus simplement, une *équivalence faible lax*, voire, en l'absence d'ambiguïté, une *équivalence faible*, si $\widetilde{u}$ est dans $\mathcal{W}$. On notera $\mathcal{W}_{lax}$ la classe des $\mathcal{W}$-équivalences faibles lax.

Dans la suite, on commettra l'abus sans conséquence fâcheuse de considérer 2-$\mathcal{C}at$ comme une sous-catégorie (non pleine) de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$.

Remarque 6.5. En vertu du lemme 6.3, un 2-foncteur strict est une équivalence faible si et seulement si c'est une équivalence faible lax.

Remarque 6.6. Par fonctorialité, la classe des équivalences faibles lax est faiblement saturée.

Lemme 6.7. *Pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$, le 2-foncteur lax $\eta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ est une équivalence faible.*

Démonstration. Cela résulte de l'égalité $\epsilon_{\mathcal{A}}\eta_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$, du fait que $\epsilon_{\mathcal{A}}$ est une équivalence faible et de la saturation faible de la classe des équivalences faibles lax. □

Remarque 6.8. Le lemme 6.7 constitue la généralisation, à tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, de [7, proposition 5.11].

Théorème 6.9. *L'inclusion* $2\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ *induit une équivalence de catégories entre les catégories localisées* $\mathcal{W}^{-1}2\text{-}\mathcal{C}at$ *et* ${\mathcal{W}_{lax}}^{-1}2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$.

Démonstration. C'est une conséquence du fait que les composantes des transformations naturelles η et ϵ sont dans $\mathcal{W}_{lax}$ et $\mathcal{W}$ respectivement. □

Remarque 6.10. Le théorème 6.9 constitue la généralisation, à tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, de [7, théorème 5.15].

Théorème 6.11. *Soit*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif dans $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$. *Supposons que, pour tout objet* c *de* $\mathcal{C}$, *le* 2*-foncteur lax* $u/\!/_1 c : \mathcal{A}/\!/_1^w c \to \mathcal{B}/\!/_1^v c$ *soit une équivalence faible. Alors* u *est une équivalence faible.*

Démonstration. On esquisse la démonstration. Le lecteur pourra se reporter à [7, théorème 6.6] pour les détails d'une démonstration d'un énoncé plus fort dans le cas particulier des équivalences faibles définies par le nerf (voir la remarque 6.12). Supposant donné un diagramme commutatif de 2-foncteurs lax tel que celui de l'énoncé, on peut lui associer, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, un 2-foncteur strict $\widetilde{u}/\!/_1 c : \widetilde{\mathcal{A}}/\!/_1^{\overline{w}} c \to \widetilde{\mathcal{B}}/\!/_1^{\overline{v}} c$ induit par le diagramme commutatif de 2-foncteurs stricts

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{A}} \arrow[rr, "\widetilde{u}"] \arrow[dr, "\overline{w}"'] & & \widetilde{\mathcal{B}} \arrow[dl, "\overline{v}"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

dans lequel on a posé $\overline{v} = \epsilon_{\mathcal{C}}\widetilde{v}$ et $\overline{w} = \epsilon_{\mathcal{C}}\widetilde{w}$.

On peut alors vérifier la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{A}}/\!/_1^{\overline{w}} c \arrow[r, "\widetilde{u}/\!/_1 c"] & \widetilde{\mathcal{B}}/\!/_1^{\overline{v}} c \\ \mathcal{A}/\!/_1^{w} c \arrow[u, "\eta_{\mathcal{A}}/\!/_1 c"] \arrow[r, "u/\!/_1 c"'] & \mathcal{B}/\!/_1^{v} c \arrow[u, "\eta_{\mathcal{B}}/\!/_1 c"'] \end{tikzcd} .$$

Les 2-foncteurs lax $\eta_{\mathcal{A}}/\!\!/_1 c$ et $\eta_{\mathcal{B}}/\!\!/_1 c$ admettent comme rétraction les 2-foncteurs stricts $\epsilon_{\mathcal{A}}/\!\!/_1 c$ et $\epsilon_{\mathcal{B}}/\!\!/_1 c$ respectivement ; ces 2-foncteurs stricts sont des préadjoints à gauche colax, donc des équivalences faibles. Les 2-foncteurs lax $\eta_{\mathcal{A}}/\!\!/_1 c$ et $\eta_{\mathcal{B}}/\!\!/_1 c$ sont donc des équivalences faibles en vertu des remarques 6.5 et 6.6. Par conséquent, $u/\!\!/_1 c$ est une équivalence faible si et seulement si $\widetilde{u}/\!\!/_1 c$ en est une, en vertu de ces mêmes remarques. La proposition 5.27 permet de conclure. □

Remarque 6.12. Le résultat plus général [7, théorème 6.6], que nous avons déjà mentionné, reste valable pour un localisateur fondamental arbitraire de 2-$\mathcal{C}at$. Plus précisément, soit

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\sigma}"] & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

un diagramme dans lequel u, v et w sont des 2-foncteurs lax et σ est une optransformation. Supposons que, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur lax

$$u/\!\!/_1^{\sigma} c : \mathcal{A}/\!\!/_1^{w} c \to \mathcal{B}/\!\!/_1^{v} c$$

induit par ces données soit une équivalence faible. Alors u est une équivalence faible. La preuve est l'exact analogue de celle de [7, théorème 6.6]. On peut bien entendu énoncer trois versions duales de ce résultat.

On ne suppose plus fixé de localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$.

Définition 6.13. On dira qu'une classe $\mathcal{W}$ de 2-foncteurs lax est un *localisateur fondamental de* 2-$\mathcal{C}at_{lax}$ si les conditions suivantes sont vérifiées.

$\mathrm{LF1_{lax}}$ La classe $\mathcal{W}$ est faiblement saturée.

$\mathrm{LF2_{lax}}$ Si une petite 2-catégorie $\mathcal{A}$ admet un objet admettant un objet initial, alors le morphisme canonique $\mathcal{A} \to e$ est dans $\mathcal{W}$.

$\mathrm{LF3_{lax}}$ Si

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "w"'] & & \mathcal{B} \arrow[dl, "v"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

désigne un triangle commutatif dans 2-$\mathcal{C}at_{lax}$ et si, pour tout objet c de $\mathcal{C}$, le 2-foncteur lax $u/\!\!/_1 c : \mathcal{A}/\!\!/_1^{w} c \to \mathcal{B}/\!\!/_1^{v} c$ est dans $\mathcal{W}$, alors u est dans $\mathcal{W}$.

Remarque 6.14. Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$, alors $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$ et $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$ est un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$.

Proposition 6.15. *Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$, alors $\mathcal{W}_{lax}$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$.*

Démonstration. En vertu de la remarque 6.6, la classe $\mathcal{W}_{lax}$ vérifie la condition $\mathrm{LF1}_{\mathrm{lax}}$.

Montrons que $\mathcal{W}_{lax}$ vérifie $\mathrm{LF2}_{\mathrm{lax}}$. Soit $\mathcal{A}$ une petite 2-catégorie admettant un objet admettant un objet initial. Il s'agit de montrer que le morphisme canonique $\mathcal{A} \to e$ est dans $\mathcal{W}_{lax}$. Comme c'est un 2-foncteur strict, il est dans $\mathcal{W}$ si et seulement s'il est dans $\mathcal{W}_{lax}$ en vertu de la remarque 6.5. Comme il est dans $\mathcal{W}$ en vertu du corollaire 5.18, il est dans $\mathcal{W}_{lax}$.

La propriété $\mathrm{LF3}_{\mathrm{lax}}$ résulte du théorème 6.11. □

Lemme 6.16. *Si $\mathcal{W}$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$, alors, pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$, $\epsilon_{\mathcal{A}}$ et $\eta_{\mathcal{A}}$ sont dans $\mathcal{W}$.*

Démonstration. Comme la classe $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$, on a $\epsilon_{\mathcal{A}} \in \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ en vertu de la proposition 6.1, donc en particulier $\epsilon_{\mathcal{A}} \in \mathcal{W}$. On en déduit $\eta_{\mathcal{A}} \in \mathcal{W}$ en vertu de l'égalité $\epsilon_{\mathcal{A}}\eta_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$ et de la condition $\mathrm{LF1}_{\mathrm{lax}}$. □

Lemme 6.17. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$. Un morphisme $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ est dans $\mathcal{W}$ si et seulement si $\widetilde{u}$ l'est.*

Démonstration. Cela résulte de l'égalité $\eta_{\mathcal{B}}u = \widetilde{u}\eta_{\mathcal{A}}$, du lemme 6.16 et de la condition $\mathrm{LF1}_{\mathrm{lax}}$. □

Définition 6.18. Pour toute classe $\mathcal{W}$ de morphismes de $2\text{-}\mathcal{C}at$, on notera

$$\mathcal{W}_{lax} = \{u \in \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}) | \widetilde{u} \in \mathcal{W}\}.$$

Théorème 6.19. *Les applications*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)) &\to \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax})) \\ \mathcal{W} &\mapsto \mathcal{W}_{lax} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax})) &\to \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)) \\ \mathcal{W} &\mapsto \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)\end{aligned}$$

induisent des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre la classe des localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$ ordonnée par inclusion et la classe des localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ ordonnée par inclusion. De plus, pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$, les catégories localisées $\mathcal{W}^{-1}2\text{-}\mathcal{C}at$ et ${\mathcal{W}_{lax}}^{-1}2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ sont équivalentes et, pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$, les catégories localisées

$$\mathcal{W}^{-1}2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$$

et

$$(\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at))^{-1}2\text{-}\mathcal{C}at$$

sont équivalentes, ces équivalences de catégories localisées étant induites par l'inclusion $2\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$.

Démonstration. Ces applications respectent manifestement la relation d'inclusion. Il s'agit de vérifier que, pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$,

$$\mathcal{W}_{lax} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at) = \mathcal{W}$$

et que, pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$,

$$\mathcal{W} = (\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at))_{lax}.$$

Soit donc $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$. Un 2-foncteur strict est dans $\mathcal{W}_{lax} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ si et seulement s'il est dans $\mathcal{W}_{lax}$, donc si et seulement s'il est dans $\mathcal{W}$ (remarque 6.5), ce qui montre l'égalité $\mathcal{W}_{lax} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at) = \mathcal{W}$.

Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$. Un 2-foncteur lax u est dans $(\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at))_{lax}$ si et seulement si $\widetilde{u}$ est dans $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$, donc si et seulement si $\widetilde{u}$ est dans $\mathcal{W}$, donc si et seulement si u est dans $\mathcal{W}$ (lemme 6.17). Cela montre l'égalité $\mathcal{W} = (\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at))_{lax}$.

La dernière assertion de l'énoncé se déduit du théorème 6.9. □

Le lemme 6.20 se vérifie sans difficulté.

Lemme 6.20. *Pour tout morphisme $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \Delta/N_1\mathcal{A} \arrow[r, "sup^1_{\mathcal{A}}"] \arrow[d, "\Delta/N_1(u)"'] & \mathcal{A} \arrow[d, "u"] \\ \Delta/N_1\mathcal{B} \arrow[r, "sup^1_{\mathcal{B}}"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Proposition 6.21 (Del Hoyo)**.** *Pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$, pour tout objet a de $\mathcal{A}$, la catégorie $(\int_{\Delta}^{op} N_2\mathcal{A})/\!/_1^{\underline{sup}_{\mathcal{A}}} a$ est W^1_∞-asphérique.*

Démonstration. Voir la démonstration de [12, théorème 9.2.4] ou [14, théorème 7.3]. □

Proposition 6.22. *Pour tout localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$, pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$, le 2-foncteur lax normalisé*

$$\underline{sup}_{\mathcal{A}} : \int_{\Delta}^{op} N_2\mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

est lax-asphérique (donc en particulier une équivalence faible).

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 6.21 et du lemme 5.7. □

Proposition 6.23. *Pour tout localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$, pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$, le 2-foncteur lax $sup^1_{\mathcal{A}} : \Delta/N_1\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est une équivalence faible.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 3.29, de la proposition 4.1, de la remarque 6.6 et de la proposition 6.22. □

Théorème 6.24. *Pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$, l'inclusion $\mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ induit une équivalence de catégories localisées*

$$\mathcal{W}^{-1}2\text{-}\mathcal{C}at_{lax} \simeq (\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at))^{-1}\mathcal{C}at.$$

Démonstration. Cela résulte directement de la proposition 6.23, de la remarque 5.3 et de la proposition 2.26. □

Lemme 6.25. *Pour tout localisateur fondamental W de $\mathcal{C}at$, pour tout morphisme u de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$, $\Delta/N_{\mathrm{l}}(\widetilde{u})$ est dans W si et seulement si $\Delta/N_{\mathrm{l}}(u)$ l'est.*

Démonstration. Soient W un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ et $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$. Les 2-foncteurs stricts $\epsilon_{\mathcal{A}}$ et $\epsilon_{\mathcal{B}}$ sont des équivalences faibles pour tout localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ (proposition 6.1). Comme $N_{\mathrm{l,n}}^{-1}(i_{\Delta}^{-1}(W))$ est un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, $\Delta/N_{\mathrm{l,n}}(\epsilon_{\mathcal{A}})$ et $\Delta/N_{\mathrm{l,n}}(\epsilon_{\mathcal{B}})$ sont dans W. Il en est donc de même de $\Delta/N_{\mathrm{l}}(\epsilon_{\mathcal{A}})$ et $\Delta/N_{\mathrm{l}}(\epsilon_{\mathcal{B}})$ (remarque 4.2). La saturation faible de W permet d'en déduire que les sections $\Delta/N_{\mathrm{l}}(\eta_{\mathcal{A}})$ et $\Delta/N_{\mathrm{l}}(\eta_{\mathcal{B}})$ sont dans W. On conclut par un argument de 2 sur 3 après avoir appliqué le foncteur $i_{\Delta}N_{\mathrm{l}}$ au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{A}} \arrow[r, "\widetilde{u}"] & \widetilde{\mathcal{B}} \\ \mathcal{A} \arrow[u, "\eta_{\mathcal{A}}"] \arrow[r, "u"'] & \mathcal{B} \arrow[u, "\eta_{\mathcal{B}}"'] \end{tikzcd} .$$

□

Lemme 6.26. *Pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$, un morphisme u de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$ est une équivalence faible si et seulement si $\Delta/N_{\mathrm{l}}(u)$ en est une.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 6.20 et de la proposition 6.23. □

Lemme 6.27. *Pour tout localisateur fondamental W de $\mathcal{C}at$,*

$$N_{\mathrm{l}}{}^{-1}(i_{\Delta}^{-1}(W)) = (N_{\mathrm{l,n}}{}^{-1}(i_{\Delta}^{-1}(W)))_{lax}.$$

Démonstration. Cela résulte de la suite d'équivalences suivante, pour tout morphisme u de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$.

$$\begin{aligned} u \in N_{\mathrm{l}}{}^{-1}(i_{\Delta}^{-1}(W)) &\iff \Delta/N_{\mathrm{l}}(u) \in W \\ &\iff \Delta/N_{\mathrm{l}}(\widetilde{u}) \in W \quad \text{(lemme 6.25)} \\ &\iff \Delta/N_{\mathrm{l,n}}(\widetilde{u}) \in W \quad \text{(remarque 4.2)} \\ &\iff \widetilde{u} \in N_{\mathrm{l,n}}{}^{-1}(i_{\Delta}^{-1}(W)) \\ &\iff u \in (N_{\mathrm{l,n}}{}^{-1}(i_{\Delta}^{-1}(W)))_{lax} \end{aligned}$$

□

Lemme 6.28. *Pour tout localisateur fondamental W de $\mathcal{C}at$, la classe*

$$N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W))$$

est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$.

Démonstration. Cela résulte du lemme 6.27, de la remarque 5.2 et de la proposition 6.15. □

Lemme 6.29. *Pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de* $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$,

$$\mathcal{W} = N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at))).$$

Démonstration. Un 2-foncteur lax u est dans $\mathcal{W}$ si et seulement si le foncteur $\Delta/N_l(u)$ l'est (lemme 6.26), donc si et seulement si $\Delta/N_l(u)$ est dans $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$, donc si et seulement si u est dans $N_l^{-1} i_\Delta^{-1}(\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at))$. □

Lemme 6.30. *Pour tout localisateur fondamental W de $\mathcal{C}at$,*

$$N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W)) \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) = W.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.27 et du fait que la restriction du nerf lax N_l à $\mathcal{C}at$ coïncide avec le nerf N. En formule :

$$N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W)) \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) = N^{-1}(i_\Delta^{-1}(W)) \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) = W \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) = W.$$

□

Théorème 6.31. *Les applications*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)) &\to \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax})) \\ W &\mapsto N_l^{-1} i_\Delta^{-1} W \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax})) &\to \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)) \\ \mathcal{W} &\mapsto \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) \end{aligned}$$

induisent des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre la classe ordonnée par inclusion des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et la classe ordonnée par inclusion des localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$. *De plus,* *pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$, les catégories localisées $\mathcal{W}^{-1}2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ et $(\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at))^{-1}\mathcal{C}at$ sont équivalentes et, pour tout localisateur fondamental W de $\mathcal{C}at$, les catégories localisées $W^{-1}\mathcal{C}at$ et $({N_\text{l}}^{-1} i_\Delta^{-1} W)^{-1} 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ sont équivalentes, ces équivalences de catégories localisées étant induites par l'inclusion $\mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$.*

Démonstration. Ces applications respectant manifestement la relation d'inclusion, il résulte des lemmes 6.28, 6.29 et 6.30 qu'il s'agit bien d'isomorphismes. La dernière assertion de l'énoncé se déduit du théorème 6.24. □

Lemme 6.32. *Pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$,*

$$\mathcal{W}_{lax} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) = \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at).$$

Démonstration. En vertu du théorème 6.19, $\mathcal{W}_{lax} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at) = \mathcal{W}$. Ainsi,

$$\mathcal{W}_{lax} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) = (\mathcal{W}_{lax} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)) \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) = \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at). \quad \square$$

Théorème 6.33. *Les applications*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)) &\to \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)) \\ W &\mapsto {N_{\text{l,n}}}^{-1} i_\Delta^{-1} W \\ &\qquad (= {N_\text{l}}^{-1} i_\Delta^{-1} W \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)) &\to \mathcal{P}(\mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)) \\ \mathcal{W} &\mapsto \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) \end{aligned}$$

induisent des isomorphismes inverses l'un de l'autre entre la classe ordonnée par inclusion des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ et la classe ordonnée par inclusion des localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$. De plus, pour tout localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$, les catégories localisées $\mathcal{W}^{-1}2\text{-}\mathcal{C}at$ et $(\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at))^{-1}\mathcal{C}at$ sont équivalentes et, pour tout localisateur fondamental W de $\mathcal{C}at$, les catégories localisées $W^{-1}\mathcal{C}at$ et $({N_{\text{l,n}}}^{-1} i_\Delta^{-1} W)^{-1} 2\text{-}\mathcal{C}at$ sont équivalentes, ces équivalences de catégories localisées étant induites par l'inclusion $\mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at$.

Démonstration. C'est une conséquence des théorèmes 6.19 et 6.31, de la remarque 4.2 et du lemme 6.32. □

Remarque 6.34. Pour démontrer le théorème 6.33, nous utilisons donc de façon cruciale le théorème 6.31. Cela reflète l'importance des morphismes lax en théorie de l'homotopie : les homotopies que l'on rencontre proviennent généralement de morphismes non stricts (voir par exemple [7, définition 2.19]). L'introduction de la notion de localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ ne devrait donc pas sembler mystérieuse. Indépendamment de son utilité dans la démonstration du théorème 6.33, elle s'est en fait imposée à nous comme totalement naturelle dès que nous avons pris connaissance de l'existence d'un analogue pour les 2-foncteurs lax du Théorème A de Quillen [13]. Les isomorphismes que nous avons dégagés entre les classes des localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, de $2\text{-}\mathcal{C}at$ et de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ permettent de parler de *localisateur fondamental*, sans préciser de catégorie « de base ».

Remarque 6.35. Pour tout localisateur fondamental, on a vu que les inclusions $\mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at$, $2\text{-}\mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ et $\mathcal{C}at \hookrightarrow 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ induisaient une équivalence de catégories entre les catégories homotopiques associées. Des inverses respectifs sont donnés par les foncteurs induits à ce niveau par les foncteurs $i_\Delta N_{\mathrm{l,n}} : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$, $B : 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax} \to 2\text{-}\mathcal{C}at$ (le « foncteur de strictification de Bénabou ») et $i_\Delta N_{\mathrm{l}} : 2\text{-}\mathcal{C}at_{lax} \to \mathcal{C}at$.

La notion de localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ est stable par intersection. On définit le *localisateur fondamental minimal de* $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ comme l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$.

Théorème 6.36. *Le localisateur fondamental minimal de* $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ *est la classe*

$$\mathcal{W}^2_{\infty,lax} = N_{\mathrm{l}}^{-1} W^{\Delta}_{\infty}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 6.31 et du théorème 2.11. □

La notion de localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$ est stable par intersection. On définit le *localisateur fondamental minimal de* $2\text{-}\mathcal{C}at$ comme l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux de $2\text{-}\mathcal{C}at$.

Théorème 6.37. *Le localisateur fondamental minimal de* $2\text{-}\mathcal{C}at$ *est la classe*

$$\mathcal{W}^2_{\infty} = N_{\mathrm{l}}^{-1} W^{\Delta}_{\infty} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at) = N_{\mathrm{l,n}}^{-1} W^{\Delta}_{\infty}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 6.33 et du théorème 2.11. □

On termine cette section par quelques énoncés permettant notamment d'assurer que les isomorphismes entre localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$, 2-$\mathcal{C}at$ et 2-$\mathcal{C}at_{lax}$ figurant dans l'énoncé des théorèmes 6.19, 6.31 et 6.33 préservent la propriété d'être engendré par un *ensemble* de morphismes, détail d'importance lorsqu'il s'agit de montrer l'existence de structures de catégories de modèles sur $\mathcal{C}at$ et 2-$\mathcal{C}at$ dont la classe des équivalences faibles est donnée par un localisateur fondamental (*cf.* [1]).

Définition 6.38. On dira qu'un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ (resp. un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, resp. un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$) est *engendré* par une classe S de morphismes de $\mathcal{C}at$ (resp. de 2-$\mathcal{C}at$, resp. de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$) si c'est le plus petit localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ (resp. localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$, resp. localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$) contenant S ou, autrement dit, l'intersection de tous les localisateurs fondamentaux de $\mathcal{C}at$ (resp. localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at$, resp. localisateurs fondamentaux de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$) contenant S.

Proposition 6.39. *Si un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de 2-$\mathcal{C}at$ est engendré par une classe $S \subset \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$, alors le localisateur fondamental $\mathcal{W}_{lax}$ de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$ est également engendré par S.*

Démonstration. On a évidemment $S \subset \mathcal{W}_{lax}$. Soit $\mathcal{W}'$ un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$ contenant S. En vertu du théorème 6.19, l'inclusion $\mathcal{W}_{lax} \subset \mathcal{W}'$ équivaut à $\mathcal{W}_{lax} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at) \subset \mathcal{W}' \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$, c'est-à-dire, en vertu de ce même théorème, $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}' \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$. Cette inclusion résulte de l'hypothèse faite sur $\mathcal{W}$ et du fait que $\mathcal{W}' \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ est un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ contenant S. □

Définition 6.40. Pour toute classe $S \subset \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax})$, on pose

$$\widetilde{S} = \{\widetilde{u}, u \in S\}.$$

Lemme 6.41. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at_{lax}$. S'il est engendré par $S \subset \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax})$, alors il est engendré par $\widetilde{S}$.*

Démonstration. Pour tout $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dans S, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\mathcal{A}} \arrow[r, "\widetilde{u}"] & \widetilde{\mathcal{B}} \\ \mathcal{A} \arrow[u, "\eta_{\mathcal{A}}"] \arrow[r, "u"'] & \mathcal{B} \arrow[u, "\eta_{\mathcal{B}}"'] \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont dans $\mathcal{W}$. Comme u l'est aussi, c'est également le cas de $\widetilde{u}$, ce qui montre l'inclusion $\widetilde{S} \subset \mathcal{W}$. Soit maintenant $\mathcal{W}'$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ contenant $\widetilde{S}$. La considération du même diagramme, dont les flèches verticales sont dans $\mathcal{W}'$, permet d'affirmer $S \subset \mathcal{W}'$, donc $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$. □

Proposition 6.42. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$. S'il est engendré par $S \subset \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax})$, alors le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$ est engendré par $\widetilde{S}$.*

Démonstration. En vertu du lemme 6.41, $\mathcal{W}$ est engendré par $\widetilde{S}$. On a bien sûr $\widetilde{S} \subset \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$. Soit $\mathcal{W}'$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$ contenant $\widetilde{S}$. Comme $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}'_{lax}$, l'hypothèse implique $\widetilde{S} \subset \mathcal{W}'_{lax}$, donc $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'_{lax}$, c'est-à-dire $(\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at))_{lax} \subset \mathcal{W}'_{lax}$, donc $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at) \subset \mathcal{W}'$, ce qui permet de conclure. □

Remarque 6.43. On se gardera de croire que, si un localisateur fondamental $\mathcal{W}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ est engendré par une classe de 2-foncteurs lax S, alors le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$ est engendré par $S \cap \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$. Pour un contre-exemple, on peut considérer $S = \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}) \backslash \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$, c'est-à-dire la classe des morphismes de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ qui ne sont pas dans $2\text{-}\mathcal{C}at$.

Proposition 6.44. *Soit W un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$. S'il est engendré par $S \subset \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$, alors le localisateur fondamental $N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W))$ de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ est également engendré par S.*

Démonstration. On a bien sûr $S \subset N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W))$. Soit de plus $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ contenant S. L'inclusion $N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W)) \subset \mathcal{W}$ équivaut à $N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W)) \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) \subset \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$, c'est-à-dire à $W \subset \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$, ce qui résulte du fait que $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$ est un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ contenant S et de l'hypothèse faite sur W. □

Lemme 6.45. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$. S'il est engendré par $S \subset \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax})$, alors il est également engendré par $i_\Delta(N_l(S))$.*

Démonstration. Pour tout $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ dans S, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Delta/N_l\mathcal{A} \arrow[r, "\Delta/N_l(u)"] \arrow[d, "sup^l_{\mathcal{A}}"'] & \Delta/N_l\mathcal{B} \arrow[d, "sup^l_{\mathcal{B}}"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "u"'] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont dans $\mathcal{W}$. C'est donc également le cas de $\Delta/N_l(u)$, ce qui montre $i_\Delta(N_l(S)) \subset \mathcal{W}$. Étant donné un localisateur fondamental $\mathcal{W}'$ de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ contenant $i_\Delta(N_l(S))$, la considération du même diagramme permet de conclure $S \subset \mathcal{W}'$, donc $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$. □

Proposition 6.46. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$. S'il est engendré par $S \subset \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at_{lax})$, alors le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$ de $\mathcal{C}at$ est engendré par $i_\Delta(N_l(S))$.*

Démonstration. En vertu du lemme 6.45, $\mathcal{W}$ est engendré par $i_\Delta(N_l(S))$, donc en particulier $i_\Delta(N_l(S)) \subset \mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$. Soit W un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ contenant $i_\Delta(N_l(S))$. On a donc l'inclusion $S \subset N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W))$, donc $\mathcal{W} \subset N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W))$ puisque $N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W))$ est un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ et que $\mathcal{W}$ est le plus petit localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at_{lax}$ contenant S. En vertu du lemme 6.29, cela se récrit $N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at))) \subset N_l^{-1}(i_\Delta^{-1}(W))$, d'où, en vertu du théorème 6.31, $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at) \subset W$. □

Proposition 6.47. *Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$. S'il est engendré par $S \subset \mathsf{Fl}_1(2\text{-}\mathcal{C}at)$, alors le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$ de $\mathcal{C}at$ est engendré par $i_\Delta(N_{l,n}(S))$.*

Démonstration. C'est une conséquence des propositions 6.39 et 6.46 et de la remarque 4.2. □

Proposition 6.48. *Soit W un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$. S'il est engendré par $S \subset \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$, alors le localisateur fondamental $N_{l,n}^{-1}(i_\Delta^{-1}(W))$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$ est également engendré par S.*

Démonstration. C'est une conséquence des propositions 6.42 et 6.44 et du lemme 6.3. □

7. Critère local

Définition 7.1. Soit W un localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$. Un morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ est *W-localement constant*, ou plus simplement *localement constant*, si, pour tout morphisme $b \to b'$ de B, le morphisme $A/b \to A/b'$ de $\mathcal{C}at$ est une W-équivalence faible.

Théorème 7.2 (Cisinski)**.** *Le localisateur fondamental minimal W^1_∞ de $\mathcal{C}at$ est le seul localisateur fondamental de $\mathcal{C}at$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) Pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$, si u est une équivalence faible, alors $\pi_0(u) : \pi_0 A \to \pi_0 B$ est une bijection.

(ii) Pour tout morphisme $u : A \to B$ de $\mathcal{C}at$ localement constant, u est une équivalence faible si et seulement s'il est asphérique.

Démonstration. C'est le théorème 2.3.6. de [9]. □

Définition 7.3. Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de $2\text{-}\mathcal{C}at$. Un morphisme $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$ est *$\mathcal{W}$-lax-localement constant* ou, plus simplement, *lax-localement constant* si, pour tout morphisme $b \to b'$ de B, le morphisme $\mathcal{A}/\!/^u_1 b \to \mathcal{A}/\!/^u_1 b'$ de $2\text{-}\mathcal{C}at$ est une $\mathcal{W}$-équivalence faible.

7.4. On rappelle qu'il existe une structure de catégorie de modèles sur $\widehat{\Delta}$ dont les équivalences faibles sont les équivalences faibles simpliciales et dont les cofibrations sont les monomorphismes. Cela permet (même si ce n'est en principe pas indispensable) de donner sens à la notion de carré homotopiquement cartésien dans $\widehat{\Delta}$.

Théorème 7.5 (Cegarra)**.** *Soit $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un 2-foncteur strict lax-localement constant. Alors, pour tout objet b de $\mathcal{B}$, le carré canonique*

$$\begin{array}{ccc} N_{\mathrm{l,n}}(\mathcal{A}/\!/^u_1 b) & \longrightarrow & N_{\mathrm{l,n}}(\mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_{\mathrm{l,n}}(\mathcal{B}/\!/_1 b) & \longrightarrow & N_{\mathrm{l,n}}(\mathcal{B}) \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

Démonstration. C'est un énoncé dual de celui de [5, théorème 3.2]. □

Pour toute petite 2-catégorie $\mathcal{A}$, on note $\pi_0\mathcal{A}$ le quotient de l'ensemble $\mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ par la relation d'équivalence engendrée par la relation élémentaire « $a \sim a'$ s'il existe une 1-cellule de a vers a' dans $\mathcal{A}$ ». Cela permet de définir un foncteur $\pi_0 : 2\text{-}\mathcal{C}at \to \mathcal{E}ns$.

Théorème 7.6. *Le localisateur fondamental minimal $\mathcal{W}^2_\infty$ de 2-$\mathcal{C}at$ est le seul localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$ vérifiant les propriétés suivantes.*

(i) Pour tout morphisme $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de 2-$\mathcal{C}at$, si u est une équivalence faible, alors $\pi_0(u) : \pi_0\mathcal{A} \to \pi_0\mathcal{B}$ est une bijection.

(ii) Pour tout morphisme $u : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de 2-$\mathcal{C}at$ lax-localement constant, u est une équivalence faible si et seulement s'il est lax-asphérique.

Démonstration. Le localisateur fondamental $\mathcal{W}^2_\infty$ de 2-$\mathcal{C}at$ vérifie par définition la condition (i) de l'énoncé du théorème 7.6. On sait déjà qu'un morphisme lax-asphérique de 2-$\mathcal{C}at$ est une équivalence faible. Réciproquement, si un morphisme u de 2-$\mathcal{C}at$ est $\mathcal{W}^2_\infty$-lax-localement constant et que c'est une $\mathcal{W}^2_\infty$-équivalence faible, alors, en vertu du théorème 7.5, il est $\mathcal{W}^2_\infty$-lax-asphérique. Le localisateur fondamental $\mathcal{W}^2_\infty$ de 2-$\mathcal{C}at$ vérifie donc la condition (ii).

Soit $\mathcal{W}$ un localisateur fondamental de 2-$\mathcal{C}at$. S'il vérifie les conditions (i) et (ii) de l'énoncé du théorème 7.6, le localisateur fondamental $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$ de $\mathcal{C}at$ vérifie les conditions (i) et (ii) de l'énoncé du théorème 7.2. En vertu de ce même théorème 7.2, $\mathcal{W} \cap \mathsf{Fl}_1(\mathcal{C}at)$ n'est autre que W^1_∞. On en déduit $\mathcal{W} = \mathcal{W}^2_\infty$ en vertu du théorème 6.33. $\square$

Références

[1] Ara (Dimitri), « Structures de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des 2-catégories strictes », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, volume LVI, fascicule 2, 2015.

[2] Ara (Dimitri) & Maltsiniotis (Georges), « Vers une structure de catégorie de modèles à la Thomason sur la catégorie des n-catégories strictes », *Advances in Mathematics*, volume 259, p. 557–654, 2014.

[3] Bullejos (Manuel) & Cegarra (Antonio), « On the geometry of 2-categories and their classifying spaces », *K-Theory*, volume 29, p. 211–229, 2003.

[4] Carrasco (Pilar), Cegarra (Antonio) & Garzón (Antonio), « Nerves and classifying spaces for bicategories », *Algebraic and Geometric Topology*, volume 10, p. 219–274, 2010.

[5] Cegarra (Antonio), « Homotopy fibre sequences induced by 2-functors », *Journal of Pure and Applied Algebra*, volume 215, p. 310–334, 2011.

[6] Chiche (Jonathan), *La théorie de l'homotopie des* 2*-catégories*. Thèse, Université Paris 7, 2014.

[7] Chiche (Jonathan), « Un Théorème A de Quillen pour les 2-foncteurs lax », *Theory and Applications of Categories*, volume 30, p. 49–85, 2015.

[8] Cisinski (Denis-Charles), *Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie*. Thèse, Université Paris 7, 2002.

[9] Cisinski (Denis-Charles), « Le localisateur fondamental minimal », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, volume 45, numéro 2, p. 109–140, 2004.

[10] Cisinski (Denis-Charles), « Les préfaisceaux comme modèles des types d'homotopie », *Astérisque*, volume 308, Société mathématique de France, 2006.

[11] Cisinski (Denis-Charles), « Propriétés universelles et extensions de Kan dérivées », *Theory and Applications of Categories*, volume 20, numéro 17, p. 605–649, 2008.

[12] Del Hoyo (Matias L.), *Espacios clasificantes de categorías fibradas*. Thèse, Université de Buenos Aires, 2009.

[13] Del Hoyo (Matias), « The rectification of lax functors and Quillen's Theorem A », notes transmises à l'auteur par courrier électronique le 12 juillet 2011.

[14] Del Hoyo (Matias L.), « On the loop space of a 2-category », *Journal of Pure and Applied Algebra*, volume 216, p. 28–40, 2012.

[15] Grothendieck (Alexandre), lettre à Robert Thomason, 2 avril 1991.

[16] Grothendieck (Alexandre), *Pursuing Stacks*. Tapuscrit, 1983, à paraître à la SMF dans la collection *Documents mathématiques*.

[17] Illusie (Luc), *Complexe cotangent et déformations*. Collection « Lecture Notes in Mathematics », volumes 239 et 283, Springer-Verlag, 1971 et 1972.

[18] Maltsiniotis (Georges), « La théorie de l'homotopie de Grothendieck », *Astérisque*, volume 301, 2005.

[19] Quillen (Daniel), *Homotopical Algebra*. Collection « Lecture Notes in Mathematics », volume 43, Springer-Verlag, 1967.

[20] Quillen (Daniel), « Higher algebraic K-theory: I », dans *Algebraic K-Theory I: Higher K-Theories*, H. Bass éd. Collection « Lecture Notes in Mathematics », volume 341, p. 85–147, Springer, 1973.

[21] Street (Ross), « Categorical structures », dans *Handbook of algebra*, volume 1, p. 529–577, Elsevier, 1996.

[22] Thomason (Robert W.), « $\mathcal{C}at$ as a closed model category », *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, volume 21, p. 305–324, 1980.

[23] Worytkiewicz (Krzysztof), Hess (Kathryn), Parent (Paul-Eugène) & Tonks (Andrew), « A model structure à la Thomason on $2\text{-}\mathcal{C}at$ », *Journal of Pure and Applied Algebra*, volume 208, p. 205–236, 2007.

Jonathan Chiche
`jonathan.chiche@polytechnique.org`

PARCOURS D'UN TOPOLOGUE-CATEGORICIEN : Jean-Marc CORDIER (1946-2014)

par Andrée EHRESMANN

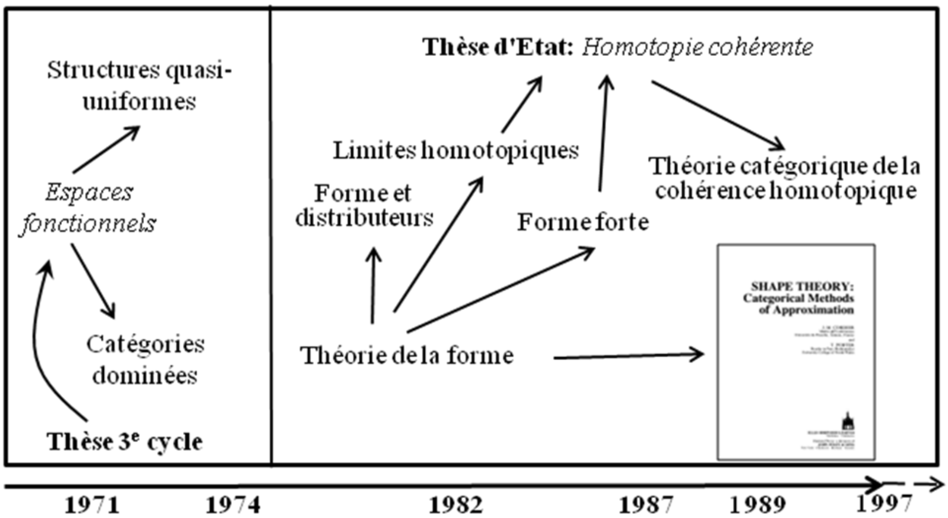
Résumé. Cette Note contient la Liste des Publications de J.-M. Cordier et une esquisse de ses travaux (dont certains avec Bourn ou Porter), en Topologie, Théorie de la forme et Homotopie cohérente.

Abstract. This Note contains the List of Publications of J.-M. Cordier and an outline of his works (some in collaboration with Bourn or Porter), from Topology, to Shape Theory and Coherent Homotopy.

Key Words. Topologie, Homotopie, Théorie de la forme. Catégorie
AMS Classification. 01A70, 18D20, 54E15, 54C56, 55P55, 55U10, 55P99.

Jean-Marc Cordier est né en 1946 à Amiens, où il a été étudiant, puis chercheur dans notre équipe "Théorie et Applications des Catégories" (Amiens-Paris).
Toute sa carrière s'est déroulée à l'Université de Picardie, où il a été nommé Assistant en 1971, puis Maître de Conférences, et enfin Professeur en 1989, jusqu'à sa mort en Mai 2014.
Une "Journée en l'honneur de J.-M. Cordier" a été organisée par le LAMFA à l'UPJV en Novembre 2014. Cette Note résume la conférence que j'ai faite à cette occasion (le diaporama est disponible sur mon site: http://ehres.pagesperso-orange.fr).

Comme le montre le 'Système Evolutif' de ses travaux (ci-après), ceux-ci se partagent en 2 périodes : (i) De 1969 à 1973, il travaille sur divers sujets liés aux catégories et à la topologie. (ii) Au cours d'un séjour à l'Université Fluminense de Niteroï (Brésil) en tant que coopérant (1974-75) il s'initie à la Topologie Algébrique qui sera à la base de tous ses travaux ultérieurs, dont un certain nombre seront faits en collaboration avec Dominique Bourn ou Timothy Porter.



1. Premiers travaux

Sa thèse de 3$^{\text{ème}}$ cycle (soutenue à l'Université Paris 7 en 1971) se divise en 2 parties, toutes les deux en liaison avec la notion d'espace fonctionnel.

(i) *Approche catégorique* : Dans [1, 2] il étudie diverses manières de 'dominer' (ou 'enrichir') une catégorie C par une catégorie K. En particulier pour K = C, il obtient les *catégories cartésiennes 'partiellement' fermées.*

(ii) *Application 'topologique'* : Dans [3], il étudie les espaces fonctionnels quasi-uniformes. La notion de structure quasi-uniforme sur un ensemble E est une 'localisation' de la notion de structure uniforme, relativement à une partition de E ; elle a été introduite par Ehresmann (Indig. Math. 28-1, 1966, 133-175) pour avoir l'analogue, pour une catégorie, de la structure uniforme d'un groupe. Jean-Marc montre en quel sens la catégorie des applications quasi-uniformes est cartésienne partiellement fermée.

2. Théorie de la forme

La *théorie de la forme* (Shape Theory) part d'une catégorie W munie d'un foncteur K vers une catégorie H ; l'idée est que les objets P de W sont "connus" et vont jouer le rôle de "modèles" ou "prototypes" pour étudier les objets X de H en construisant des "approximations" des X par des P, permettant d'étendre certaines propriétés des P au cas des X.

Dans le cadre topologique cette théorie a été introduite par Borsuk en 1968 (Fund. Math. 62, 223) : il prend pour H la catégorie d'homotopie des espaces métriques compacts et pour W sa sous-catégorie pleine des polyèdres finis, ce qui permet, en particulier, une extension de l'homologie simpliciale des polyèdres en l'homologie de Čech des espaces compacts.

Dans le cadre général, la *catégorie forme* de Holtsziynski (1971) associée au foncteur K: W → H est la catégorie S_K ayant pour objets ceux de H et où :

$$S_K(X, Y) \approx \{F: Y\downarrow K \to X\downarrow Y \mid B_Y = B_X\, F\},$$

où $X\downarrow K$ est la catégorie comma et B_X: $X\downarrow K \to K$ son foncteur 'base'. Dans l'article [5], Jean-Marc, en collaboration avec D. Bourn, traduit ces conditions en termes de distributeurs et de carrés exacts.

En 1989, Cordier et Porter publient le livre "Shape Theory" (qui développe leur article [4], et sera ré-édité en 2008), qui représente une belle synthèse sur la théorie de la forme. Parmi les résultats originaux, citons :

- Liens entre théorie de la forme, procatégories et extensions de Kan**.**
- Foncteurs entre catégories de forme [8].
- Etude de divers invariants : notions de stabilité et de 'movability'.
- Application à la reconnaissance d'images [15].

3. Homotopie cohérente

Divers problèmes créés par la théorie de la forme pour les espaces topologiques (comparaison entre complexes de Čech et de Vietoris) ont conduit à introduire une théorie de la *forme forte* (Edwards & Hastings, 1976), en remplaçant l'homotopie par une notion de *cohérence homotopique* (c.h.) que Cordier va préciser en [6] et étudier dans sa thèse (Université Paris 7, 1987).

Une de ses importantes contributions (pas assez reconnue dans les travaux récents) a été de transposer l'étude de la cohérence homotopique dans le cadre des catégories simpliciales (*i.e.,* enrichies dans la catégorie *Simp* des ensembles simpliciaux), en particulier par l'introduction du *nerf homotopiquement cohérent* d'une catégorie simpliciale. Dans [6] il montre qu'un diagramme h.c. de A vers une catégorie simpliciale T correspond à un foncteur simplicial du nerf de A dans le nerf h.c. de T.

Citons quelques résultats importants :

- Définition de la *limite homotopique* d'un foncteur simplicial et sa construction comme limite simpliciale indexée ([9], avec Bourn).
- Construction et applications d'un *foncteur d'homotopie cohérente* de la catégorie des recouvrements d'un espace topologique X vers *Simp.* ([14, 18], avec Porter.)
- Applications à l'homologie de Steenrod-Sitnikov [13].
- Dans son dernier article ([19], avec Porter), introduction à une *théorie catégorique de la cohérence homotopique,* développant des analogues h.c. de diverses notions catégoriques.

Liste des publications de J.M. Cordier

Livre (avec T. Porter)

Shape Theory: Categorical Methods of Approximation, Mathematics and its Applications, Ellis Horwood Ltd., March 1989, 207 pages.
Edition augmentée, Dover, 2008.

Thèses

Doctorat 3ème cycle : *Catégories auto-dominées: Transformations naturelles. Espaces fonctionnels quasi-uniformes,* Université Paris 7, 1971 (sous la direction de C. Ehresmann).
Doctorat d'Etat : *Sur la cohérence homotopique et les limites homotopiques***,** Université Paris 7, 1987 (sous la directon de M. Zisman).

Articles de recherche

1. Sur la notion de catégorie tensoriellement dominée, *C.R.A.S Paris* 270, 1970, 572
2. Catégories auto-dominées, *Esquisses Mathématiques* 15, 1972.
3. Espaces fonctionnels quasi-uniformes, *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XII-2, 1973, 113-136.
4. Une introduction à la théorie de la forme (avec Porter), *Esquisses Mathématiques* 30, 1978, 138 pages.

5. Distributeurs et théorie de la forme (avec Bourn), *Cahiers Top. et Géom. Diff*. XXI-2, 1980, 161-189.
6. Sur la notion de diagramme homotopiquement cohérent, Proc. 3éme Colloque sur les Catégories, Amiens (1980), *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXIII-1, 1982, 93 -112.
7. The algebraic homotopy limit functor, Preprint 84-12, Univ. Wales, 58 pages. (Traduction de "Le foncteur Holim algébrique", Prépub. Amiens, 1982.)
8. Functors between shape categories (avec Porter), *J. Pure Appl. Alg*. 27, 1983, 1-13.
9. A general formulation of homotopy limits (avec Bourn). *J. Pure Appl. Algebra* 29(2), 1983, 129-141.
10. Extension de Kan simplicialement cohérente, *Prépub. Amiens* 1986
11. Vogt's Theorem on Categories of Homotopy Coherent Diagrams (avec Porter), *Math. Proc. Camb. Phil. Soc*. 100, 1986, 65-90.
12. Sur les limites homotopiques de diagrammes homotopiquement cohérents, *Comp. Math,* 62, 1987, 367-388.
13. Homologie de Steenrod-Sitnikov et limite homotopique algèbrique, *Manuscripta Math.* 59, 1987, 35-52.
14. Maps between homotopy coherent diagrams (avec Porter), *Top. and its Applications* 28, 1988, 255-275.
15. Pattern Recognition and Categorical Shape Theory (avec Porter), *Pattern Recognition Letters* 7, 1988, 73-76.
16. Comparaison de deux catégories d'homotopie de morphismes cohérents, *Cahiers Top. et Géom. Diff. Cat.* XXX, 1989, 257-275.
17. Fibrant diagrams, rectifications and a construction of Loday (avec Porter), *J.Pure Appl. Algebra* 67, 1990, 111-124.
18. Categorical Aspects of Equivariant Homotopy (avec Porter), *Proc. ECCT, Applied Cat.Structures* 4, 1996, 195-212.
19. Homotopy Coherent Category Theory (avec Porter), *Trans. Amer. Math. Soc.* 349, 1997, 1-54.

Université de Picardie Jules Verne

LAMFA

ehres@u-picardie.fr