

cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques

**créés par CHARLES EHRESMANN en 1958
dirigés par Andrée CHARLES EHRESMANN
VOLUME LIV-2, 2^e trimestre 2013**

SOMMAIRE

1^{er} Volume dédié à René GUITART

FOREWORD	83
PUBLICATIONS de René GUITART	85
M. GRANDIS, Adjoints for symmetric cubical categories (on weak cubical categories, III)	91
S. DUGOWSON, Espaces connectifs : représentations, feuilletages, ordres et difféologies	137

FOREWORD

This special volume of *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* is dedicated to Professor René Guitart on the occasion of his 65th birthday.

An international conference was organized at the *Université Paris 7-Diderot* on November 11 and 12, 2012 to celebrate René's 65th birthday, where some of the speakers recalled many of his important scientific contributions in several areas of mathematics, logic, philosophy and epistemology. The great variety of subjects of current research presented at that conference reflects René's creativity and originality in his research activity.

René obtained his *Doctorat de 3^{ème} cycle* in 1970 at the *Université Paris 7*, with a dissertation entitled *Relations, fermetures, continuité*, prepared under the supervision of Charles Ehresmann. In 1979 he obtained the *Doctorat d'Etat ès Sciences Mathématiques* at the *Université de Picardie* in Amiens, with a thesis entitled *Relations et structures dans les catégories*, under the supervision of Charles and Andrée Ehresmann.

In his academic career René was initially Assistant at the *Université de Picardie* from 1968 to 1970, and then Assistant and *Maitre de Conférences* at the *Université Paris 7-Diderot* from 1970 to 2013, where he supervised several PhD students. He was also *Directeur de Programmes* at the *Collège International de Philosophie* from 1992 to 1998.

René has been playing an important role in the category theory community for more than forty years, being at the same time an active and highly original mathematician, and an efficient organizer of scientific events. In particular, he is one of the initiators and co-organizers of the *Séminaire Itinérant de Catégories*, an important research seminar on category theory in France since more than 20 years; we would also like to mention that, with Pierre Dampousse, he co-organized the international *European*

FOREWORD

Colloquium of Category Theory which took place at the University of Tours in July 1994, under the honorary presidency of Saunders Mac Lane.

We shall not even try to summarize in this foreword all his scientific contributions, which include many new ideas, notions (*e.g.* algebraic universes, lax-completions, exact squares, locally free diagrams, sketches as programs, figurative algebras, specular logic, borromean objects, general notion of a cohomology) and theorems, useful in category theory, algebra, geometry, topology and logic, together with their interpretation and analysis from a philosophical and psychoanalytical perspective. He also contributed to historical works. René's over 100 publications are listed below; we believe the reader will find there a remarkable scientific work which should inspire many further developments in these research fields in the years to come.

Guest Editors:

Jean Bénabou, Andrée Ehresmann, Marino Gran,
George Janelidze, and Robert Paré.

PUBLICATIONS DE RENE GUITART

Livres

1. *La courbure de la raison*, Les conférences du Perroquet n° 31, 1991, 3-41, Le Perroquet BP-75462 Paris, supplément au n° 87 : ISSN 0293-2431.
2. *La pulsation mathématique (rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire)*, L'Harmattan, Paris, 1999.
3. *Evidence et étrangeté (Mathématique, psychanalyse, Descartes et Freud)*, PUF, Paris, 2000. [Traduction en espagnol : Amorrortu, Buenos Aires-Madrid, 2003.]

Articles de mathématiques, philosophie, épistémologie, histoire

La plupart des articles suivants sont disponibles sur le site :

<http://rene.guitart.pagesperso-orange.fr>

Les numéros 2 à 44 sont réunis en deux volumes photocopiés à l'université Paris 7 en 1979 (vol.1 = n° 2 à 24, vol.2 = n° 25 à 44) constituant une thèse de Doctorat d'Etat soutenue à l'université de Picardie à Amiens le 8 juin 1979, intitulée "Logiques, relations et structures dans les catégories". Les n° 45 à 59 sont réunis dans un autre volume photocopié à l'université Paris 7 en 1988, intitulé "Satellites, esquisses et algorithmes".

1. Relations, fermetures, continuités, (thèse de 3^{ème} cycle, Université Paris 7, juin 1970), *Esquisses mathématiques*, vol. 1, 1970, 102 p.
2. Problèmes universels associés à quelques catégories d'applications, *CRAS*, Paris, t. 270, 1970, 1398-1401.
3. La catégorie des relations continues entre fermetures, *CRAS*, Paris, t. 270, 1970, 1572-1574.
4. Définitions de l'homotopie entre relations, *CRAS*, Paris, t. 271, 1970, 635-638.
5. Sur l'homotopie entre relations, *CRAS*, Paris, t. 272, 1971, 1175-1178.
6. Sur les fonctions associées à la notion de sous-structure, *CRAS*, Paris, t. 273, 1971, 558-561,
7. Foncteurs sous-objets et relations continues, *CTGD XIII-1*, 1972, 57-100.
8. Sur les idempotents dans les triples et la description des structures, *CRAS*, Paris, t. 275, 1972, 259-262.
9. Sur l'ébauche des structures, *Proc. 3^d Congress of Bulgarian Math.*, Summaries Part II, sept. 1972, 354.
10. Structures algébriques et extensions de Kan d'applications covariantes, *CRAS*, Paris, t. 277, 1973, 83-86.
11. Sur le foncteur diagramme, *CTGD XIV-2*, 1973, 181-182.

12. Les monades involutives en théorie élémentaire des ensembles, *CRAS*, Paris, t. 277, 1973, 935-937.
13. Categorias cantorianas, *Encontro Nacional de Logica matematica, Univ. Fed. Fluminense*, Niteroi (Brasil), 7-13 de fevereiro 1974, 14 p.
14. Remarques sur les machines et les structures, *CTGD X-2*, 1974, 113-144.
15. Equational translation of set theoretical notions, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagungsbericht Kategorien*, August 1974, 3p.
16. Construction de monades involutives, *CRAS Paris*, t. 279, 1974, 491-493.
17. Traduction équationnelle de notions ensemblistes, *CRAS Paris*, t. 279, 1974, 541-543.
18. Monades involutives complémentées, *CTGD XVI-1*, 1975, 17-101.
19. Involutive monads and topologies, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagungsbericht Kategorien*, Juli 1975, 2 p.
20. Un contexte adapté aux relations continues, *CTGD XVI-3*, 1975, 244-245.
21. Fibrations, diagrams and decompositions, abstract of a talk at the *Category Theory Meeting at the Isle of Thorns*, Sussex, England, july 1976, 3p.
22. Sur la décomposition des catégories, photocopié Univ. Paris 7, 1976, 3p.
23. Topogenesis and continuous relations, abstract of a talk at the *Northwest German Category Seminar at the University of Bremen*, december 1976, 4p.
24. Topologie dans les univers algébriques, *Mathematik Arbeitspapiere Nr 7, Universität Bremen*, 1976, 59-97.
25. Calcul des relations inverses, *CTGD XVIII-1*, 1977, 67-100.
26. *Structures dans les univers algébriques*, photocopié, Univ. Paris 7, 1977, 45 p.
27. *Changement de logique dans les univers algébriques*, photocopié, Univ. Paris 7, 1977, 10 p.
28. Extensions de Kan absolues, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagungsbericht Kategorien*, august 1977, 42-44.
29. Décompositions et lax-complétions, (avec L. Van den Bril), *CTGD XVIII-4*, 1977, 333-407.
30. *Des machines aux bimodules*, photocopié, Univ. Paris 7, 1978, 24 p.
31. Foncteurs-types, équations de structures, univers algébriques, *Séminaire de Catégories Guitart-Lair-Coppey-Foltz*, 1979, photocopié, Univ. Paris 7. , 8p.
32. *Résumé de Thèse*, juin 1979, Amiens, 2 p.
33. Théorie des bornes (chp. 1), *Diagrammes*, vol. 1, Paris, juillet 1979, 4 p.
34. a) Carrés exacts, b) Tenseurs et machines, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Tagungsbericht Kategorien* august 1979, 1 p.
35. Algebraic Universes, *lecture at the Summer School on Universal Algebra and Ordered Sets*, Jindrichuv Hradec (Czecho-Slovakia), 1979, 10 p.
36. Constructions de produits tensoriels et machines non-déterministes, *Fernuniversität Seminarberichte Nr 7* (1980), 25-30.

37. Théorie des bornes (chp. 2), *Diagrammes*, vol. 2, Paris, 1979, 2 p.
38. Tenseurs et machines, *CTGD XXI-1*, 1980, 5-62.
39. Pour un calcul logique géométrique, polycopié Univ. Paris 7, 1980, 6 p.
40. Sur les contributions de Charles Ehresmann à la théorie des catégories, *Gazette des mathématiciens*, SMF, n°13, février 1980, 37-43.
41. Extenseurs, *Diagrammes*, vol. 3, Paris, 1980, 2 p.
42. Relations et carrés exacts, *Ann. Sc. Math. Québec*. IV n°2, 1980, 103-125.
43. a) Exact squares and reality, b) Tensors, *Fachtagung über Allgemeine Algebra und Grensgebiete*, 27-10/1-11-1980, Almsfeld/Harz, DDR, 2 p.
44. Qu'est-ce que la logique dans une catégorie ? *CTGD XXIII- 2* 1982, 115-148.
45. Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes (avec C. Lair), *Diagrammes*, vol. 4, 1980, 106 p.
46. The theory of sketches (revisited), *19th PSSL*, Univ. Paris Nord et SMF, Paris, 23 et 24 mai 1981, 21-28.
47. Critère de rigidification des morphismes souples entre structures internes (avec C. Lair), *Diagrammes*, vol. 5, 1981, 17 p.
48. Existence de diagrammes localement libres, (avec C. Lair), *Diagrammes*, vol. 6, 1981, 13 p.
49. Carrés exacts et carrés déductifs, *Diagrammes*, vol. 6, 1981, 17 p.
50. Note sur la détermination des homologies par les carrés exacts (avec L. Van den Bril), *Diagrammes*, vol. 6, 1981, 7 p.
51. Limites et co-limites pour représenter les formules (avec C. Lair), *Diagrammes*, vol. 7, 1982, 24 p.
52. From where do figurative algebras come ? *Diagrammes*, vol. 7, 1982, 8 p.
53. Existence de diagrammes localement libres II (avec C. Lair), *Diagrammes*, vol. 7, 1982, 4p.
54. Getting started towards algebraic analysis, *Diagrammes*, vol. 7, 1982. 3 p.
55. Calcul des satellites et présentations des bimodules à l'aide des carrés exacts (avec L. Van den Bril), *CTGD XXIV-3*, 1983, 299-330.
56. Calcul des satellites et présentations des bimodules à l'aide des carrés exacts, 2^{ème} partie, (avec L. Van den Bril), *CTGD XXIV-4*, 1983, 333-369.
57. Introduction à l'Analyse Algébrique, *Math. Sci. Hum.*, n° 96, 1986, 49-63.
58. On the geometry of computations, *CTGDC XXVII-4*, 1986, 107-136.
59. Introduction à l'Analyse Algébrique, II : Algèbres figuratives et esquisses, *Math. Sci. Hum.*, n°97, 1987, 19-45.
60. On the geometry of computations, II, *CTGDC XXIX-4*, 1988, 297-326.
61. Un'altra matematica : la logica degli specchi, *La Ciffra*, vol. 1, "Sessualita e intelligenza", ottobre 1988, Spirali/Vel, Milano, 222-227.
62. L'unité de la théorie des modèles et de l'algèbre homologique, *CTGDC XXX-4*, 1989, 281-293.

63. Construction of a homology and a cohomology theory associated to a first order formula, *Diagrammes*, vol. 23, 1990, 7-13.
64. Esquisses, structures et algorithmes, *Journée mathématique et Informatique*, Université de Picardie, vol. 1, 1990, 9-21.
65. Fonctions d'Euler-Jordan et de Gauss et exponentielle dans les semi-anneaux de Burnside, *CTGDC XXXIII*, 1992, 253-260.
66. Logique inspéculaire, 2^{èmes} *Journées d'Etudes de l'ACF Lille*, Effets et méfaits du Discours de la Science, 13-14 juin 1992, 6 p.
67. Enveloppe Karoubienne de catégories de Kleisli (avec J. Riguet), *CTGDC XXXIII-4*, 1992, 261-266.
68. Espace et temporalité dans l'écriture de l'impossible, *Actas del Primer Congreso Internacional de Ontología, Pub. Univ. Autónoma de Barcelona*, 1994, 275.
69. Le diagramme localement libre comme une complétion inductive d'un système de choix (avec M. Gerner), *Journées Catégories, Algèbres, Esquisses, Néoesquisses*, Caen, 27-30 septembre 1994, 6 p.
70. Les représentations naturelles de PX dans PPX (avec P. Damphousse), *Journées Catégories, Algèbres, Esquisses, Néoesquisses*, Caen, 1994, 6 p.
71. Cohérence et Malentendu, Extase et Aberration : le Réel, *L'Annatife*, n°1 et 4, 1994.
72. L'idée de Logique Spéculaire, *Journées Catégories, Algèbres, Esquisses, Néoesquisses*, Caen, 27-30 septembre 1994, 6 p.
73. Logique spéculaire et sexuation, *Lettre Mensuelle, Ecole de la Cause Freudienne ACF*, juin 1995.
74. A Logica Especular, Escritura da Pulsacao Nao Dita, *Letra Freudiana*, Ano XV, N° 16, mars 1996, 121-131.
75. Sobre a Logica Especular, Entrevista de Celio Garcia com René Guitart, *Letra Freudiana*, Ano XV, N° 16, mars 1996, 133-143.
76. O objeto da Psichanalise, os matemas, os ojetos matematicos, I, *Curinga*, N° 7, 1996, 92-99.
77. La Logique Spéculaire, écriture de la pulsation non-dite, *Revue de l'ECF*, N° 35, 2/1997, 123-129.
78. La Logique Spéculaire et le lieu de décider, *Actes du Colloque d'Ivry "Psychoanalyse et Réforme de l'Entendement"*, 1995, Ed. Lysimaque, 1997, 183-200,
79. The Locally Free Relatively Filtered Diagram as an Inductive Completion of a system of Choice (avec M. Gerner), *Applied Categorical Structures* 5, 1997, 59-73.
80. La pulsation entre les conceptions optiques, algébriques, articulées et projectives, des ovales cartésiennes (avec E. Barbin), in *L'Océan indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*, IUFM de La Réunion, 1998, 359-394.

81. Liftings of Stone's monadicity to spaces and the duality between the calculi of inverse et direct images (avec P. Damphousse), *CTGDC XL-2*, 1999, 141-157.
82. Voir ce qu'on dit, dire ce qu'on voit, *Bulletin de l'APMEP*, n°431, 2000, 793-812.
83. De la pulsation nécessaire dans la conception du point, *Argument pour le Colloque Francois Baudry, ENS*, mars 2000, 1p.
84. Algèbre des fonctions elliptiques et géométrie des ovals cartésiennes (avec E. Barbin), *Revue d'histoire des mathématiques, SMF*, n°7, 2001, 161-205
85. Images et modalités, *Actes du SIC d'Amiens*, 2001, 2 p.
86. Non-trivial object-fixing endofunctors of full subcategories of finite sets (avec P. Damphousse et Farhan Ismail), *Annales Sc. Math. Québec* 25, n°2, 2001, 121-151.
87. L'assimilation et l'excès de l'acte sur le logique, in *Forme & mesure*. Cercle Polianov : pour Jacques Roubaud/mélanges. *Mesura* 49, juin 2001, 209-227.
88. Sur les places du sujet et de l'objet dans la pulsation mathématique, *Questions Éducatives, Revue du Centre de Recherche en Éducation de l'Université Jean Monnet de Saint-Étienne*, n°22-23, décembre 2002, 49-81.
89. Calcul d'assimilations, modalités et analyse d'images, in *Calculs et formes*, Ellipses, 2003, 175-89.
90. Théorie cohomologique du sens, SIC, *Actes du SIC d'Amiens 2003, LAMFA*, 2004, 39-47.
91. Note de lecture sur le livre de Monique Sassier, Ordres et désordres du sens (L'Harmattan, 2004, 236 p.), in *Langages et Sociétés*, 2005.
92. Charles Ehresmann, au carrefour des structures locales et algébriques, *CTGDC XLVI-3*, 2005, 172-175.
93. Moving logic, from Boole to Galois, *CTGDC XLVI-3*, 2005, 196-198.
94. Le sens d'un discours comme mouvement de confusion entre identité et identitaire, *Colloque Origine(s), Identité(s), Identification(s) AECF Lille*, 2005, 16p.
95. Que peut-on écrire et calculer de ce qui s'entend ? in *Penser la musique avec les mathématiques*, Ed. Ircam-Delatour, 2006, 17p.
96. An anabelian definition of abelian homology, *CTGDC*, XLVIII, 2007, 261-269.
97. Mathematical Pulsation at the root of invention, *Anais do Congresso Htem 4*, Rio de Janeiro, maio 2008.
98. Toute théorie est algébrique et topologique, *CTGDC XLIX-2*, 2008, 83-128.
99. Borromean Objects, as exemplified by the group G_{168} of Klein's Quartic, linked with Moving Logic, *International Category Theory Conference, Abstracts*, Calais 2008, 37.

100. Sur la pulsation du voir et du dire dans l'imaginaire du mathématicien au travail, in *Le baroque : Entre raison et imagination*, Ed. Anne Staquet, Coll. Croisements, Ed. de l'Université de Mons-Hainaut, 2009, 249-264.
101. Cohomological Emergence of Sense in Discourses (As Living Systems Following Ehresmann and Vanbremeersch), *Axiomathes*, 2009, 19, 245-270.
102. Les coordonnées curvilignes de Gabriel Lamé, représentations des situations physiques et nouveaux objets mathématiques, *Bulletin de la SABIX*, 44, 2009, 119-129.
103. Klein's group as a Borromean Objects, *CTGDC L-2*, 2009, 144-155.
104. Figures, lettres, preuves : dimensions et pulsation de l'écriture, in *La Figure et la Lettre* (Colloque du 23-24 mai 2008, Nancy), *PUN*, Nancy, 2011, 147-172.
105. Modélisation qualitative catégoricienne : modèles, signes et formes, in M. Andreatta, F. Nicolas, C. Alunni (Ed.), *A la lumière des mathématiques et à l'ombre de la philosophie*, Collection Musique/Sciences, Delatour France/Ircam-Centre Pompidou, 2012, 133-148.
106. A hexagonal Framework of the Field F_4 and the associated Borromean Logic, *Log. Univers.* Vol. 6, issue 1-2, 2012, 119-147.
107. Pierre Damphousse, mathématicien (1947-2012), *CTGDC LIII*, 2012, 233-239.
108. L'idée d'objet borroméen, à l'articulation entre les nœuds et la logique lacanienne, in *Pourquoi les mathématiques comptent pour la psychanalyse, Essaim 28* (Colloque Lacan et les mathématiques 2011, Rouen), Erès, 2012, 85-98.
109. Théorie cohomologique de la logique du sens vivant, in *Liber Amicorum* en l'honneur de Madame A. C. Ehresmann, *Diagrammes*, suppl. aux volumes. 67+68, 2012, 149-176.
110. Trijunctions and Triadic Galois Connections, *CTGDC LIV-1*, 2013, 13-28.
111. Mathematical Physics in the Style of Gabriel Lamé and the Treatise of Emile Mathieu (avec Evelyne Barbin), in E. Barbin and R. Pisano (Ed.) *The Dialectic Relation Between Physics and mathematics in the XIXth Century*, Springer, 2013, 97-120.

**ADJOINTS FOR SYMMETRIC CUBICAL CATEGORIES
(ON WEAK CUBICAL CATEGORIES, III)**

by Marco GRANDIS

Dédié à René Guitart, en amitié

Résumé. En étendant un article précédent (avec R. Paré) sur les adjonctions pour les catégories doubles, on traite maintenant les catégories cubiques symétriques (de dimension infinie). Ici aussi, une "adjonction cubique" générale est formée d'un foncteur cubique *colax* qui est adjoint à gauche d'un foncteur cubique *lax*. Cela ne peut pas être envisagé comme une adjonction interne à une bicatégorie, car en composant des morphismes lax et colax on détruit leurs structure. Toutefois, comme dans le cas des adjonctions doubles, les adjonctions cubiques vivent dans une *catégorie double* intéressante; celle-ci est formée des catégories *cubiques* symétriques, avec les foncteurs cubiques *lax* et *colax* en tant que flèches horizontales et verticales, liées par des cellules doubles convenables.

Abstract. Extending a previous article (with R. Paré) on adjoints for double categories, we deal now with weak symmetric cubical categories (of infinite dimension). Also here, a general 'cubical adjunction' has a *colax* cubical functor left adjoint to a *lax* one. This cannot be viewed as an adjunction in some bicategory, because composing lax and colax morphisms destroys all comparisons. However, as in the case of double adjunctions, cubical adjunctions live in an interesting *double* category; this now consists of weak symmetric *cubical* categories, with lax and colax cubical functors as horizontal and vertical arrows, linked by suitable double cells.

Mathematics Subject Classifications (2000): 18D05, 18A40, 55U10, 20B30.

Key words: weak cubical category, weak double category, adjoint functor, cubical set, symmetries.

Introduction

This is the third paper in a series on weak symmetric cubical categories. The first [G4] explores the role of symmetries. The second [G5] deals with cubical limits and

can be viewed as an infinite-dimensional extension of the study of double limits in [GP1]. We now investigate cubical adjunctions, extending the study of double adjoints in [GP2]. (See the acknowledgements at the end of this Introduction.)

Weak cubical categories were introduced in [G1-G3], as a basis for the study of cubical cospans in Algebraic Topology and higher cobordism. They have a cubical structure, with faces and degeneracies, weak compositions in countably many directions (indexed as $1, 2, \dots, n, \dots$) and a strict composition in *one* direction, called the *transversal* one (and indexed as 0).

As a leading example, one can think of the weak cubical category $\omega\text{Sp}(\mathbf{X})$ of cubical spans in a category with pullbacks \mathbf{X} . An *n-dimensional object* is a functor $x: \mathbf{v}^n \rightarrow \mathbf{X}$, where \mathbf{v} is the 'formal span' category

$$(1) \quad \begin{array}{c} \mathbf{v}, \\ -1 \leftarrow 0 \rightarrow 1 \\ \mathbf{v} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} (-1,-1) & \longleftarrow & (0,-1) & \longrightarrow & (1,-1) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (-1,0) & \longleftarrow & (0,0) & \longrightarrow & (1,0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (-1,1) & \longleftarrow & (0,1) & \longrightarrow & (1,1) \end{array} \quad \begin{array}{l} \bullet \xrightarrow{1} \\ \downarrow 2 \\ \mathbf{v}^2. \end{array}$$

(In these diagrams, identities and composites are understood.) A *transversal n-map* is a natural transformation $f: x \rightarrow x': \mathbf{v}^n \rightarrow \mathbf{X}$ of such functors; *notice that it is a diagram of dimension n+1*, as a functor defined on $2 \times \mathbf{v}^n$, and should be viewed as an *(n+1)-cell* of our structure.

The ordinary categories $\text{Sp}_n(\mathbf{X}) = \text{Cat}(\mathbf{v}^n, \mathbf{X})$ form a cubical object in \mathbf{Cat} , with obvious faces and degeneracies. Moreover, n-dimensional spans (and their maps) have *cubical composition laws* (or *concatenations*)

$$(2) \quad x +_i y \quad (f +_i g: x +_i y \rightarrow x' +_i y'),$$

in direction $i = 1, \dots, n$, that are computed with (a fixed choice of) pullbacks; these compositions are consistent with faces, *but only behave well up to invertible transversal maps*, the *comparisons* for associativity, unitarity and interchange.

As already stressed in [G1], $\omega\text{Sp}(\mathbf{X})$ is a weak *symmetric* cubical category, when equipped with the obvious action of the symmetric group S_n on the category $\text{Cat}(\mathbf{v}^n, \mathbf{X})$, by permuting variables in \mathbf{v}^n . These symmetries – *which only permute the weak directions* – reduce all faces, degeneracies and cubical compositions to the 1-indexed case (for instance), and allow us to simplify the coherence conditions.

Notice also that cubical 1-truncation keeps i -cubes and i -transversal maps (i.e. $(i+1)$ -cells) for $i \leq 1$; it yields the weak *double* category $\mathbb{S}p(\mathbf{X}) = \text{tr}_1(\omega\mathbb{S}p(\mathbf{X}))$ of morphisms and ordinary spans, studied in [GP1, DPR2], with *one* weak direction *and* the strict transversal one. Here, all symmetries 'disappear', since the symmetric groups S_0 and S_1 acting on 0- and 1-objects (and their transversal maps) are trivial. In other words, *a weak double category is trivially symmetric*, in the present sense.

Outline. In Section 1 we review the construction of $\omega\mathbb{S}p(\mathbf{X})$, in order to clarify the general structure of symmetric cubical categories; a formal definition of this structure can be found in [G1] and [G4]. We also sketch a natural cubical colax/lax adjunction between cubical spans and cospans. (Other examples will be studied in a sequel.)

In Section 2 we introduce the strict *double* category $\mathbb{W}sc$ of weak sc-categories, lax and colax sc-functors and suitable double cells. Comma sc-categories are also considered. Both topics extend notions of weak double categories developed in [GP2]. It is interesting to note that the double category $\mathbb{W}sc$ *seems not to be the truncation of any cubical category of interest*.

Section 3 reviews the notions of companions and adjoints in a *double* category, from [GP2]. The next two sections introduce and study cubical colax/lax adjunctions, as adjoint arrows *in* the double category $\mathbb{W}sc$.

Finally, Section 6 deals with the preservation of (co)limits by adjoints, for weak sc-categories.

Literature. Besides the articles mentioned above, weak double categories - also called *pseudo* double categories - are studied in various works, like [BM, BMM, Da, DP1, DP2, DPR1, DPR2, Fi, FGK, P2]; the strict case was introduced by C. Ehresmann (see [E1, E2, BE]). Relations between weak cubical and globular (infinite dimensional) categories are dealt with in [GP5].

Acknowledgements. This paper is a natural extension of a joint work with R. Paré [GP2] on double adjunctions, for the cubical framework introduced in [G1, G4]. The paper was originally planned and discussed as a joint work with Bob. Then, his interests took other directions and the joint work will hopefully appear at a later date. He would like, however, to join me in wishing René all the best.

This work is partially supported by a research contract of Università di Genova.

1. Basic examples

The formal definition of a weak symmetric cubical category, or weak sc-category, is long and involved (see [G1, G4]). Rather than rewriting it, we use here - as a leading example - the weak symmetric cubical category $\omega\mathbb{S}p(\mathbf{X})$ of higher cubical spans (on a category \mathbf{X} with pullbacks), that extends the weak double category $\mathbb{S}p(\mathbf{X})$ studied in [GP1]. This should be sufficient to give a clear idea of the general structure of a weak sc-category, and to show how it extends weak double categories to the infinite-dimensional case. The dual case of cospans is also mentioned.

Then we recall a colax/lax *double* adjunction $\mathbb{S}p\mathbf{X} \rightleftarrows \mathbb{C}osp\mathbf{X}$ studied in [GP2] and extend it to a colax/lax *cubical* adjunction $\omega\mathbb{S}p\mathbf{X} \rightleftarrows \omega\mathbb{C}osp\mathbf{X}$, preparing the way for the study of this notion.

Cubical structures have two faces ∂_i^α in each direction i , that are distinguished by a binary variable α ; the values of the latter are written as $0, 1$ or $-, +$, and can be read as *lower* and *upper*.

1.1. Cubical spans. Let \mathbf{X} be a category with a (full) choice of distinguished pullbacks: in other words, to every cospan (f, g) we assign *one distinguished pullback* (f', g') , in a symmetric way (assigning (g', f') to the cospan (g, f)).

The 'geometric model' of cubical spans of dimension n is the category \mathbf{V}^n , a cartesian power of the *formal span* \mathbf{V}

$$\begin{array}{rcccl}
 & & (-1,-1) & \longleftarrow & (0,-1) & \longrightarrow & (1,-1) & & & & \bullet & \longrightarrow & 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & 2 \\
 (1) \quad -1 & \longleftarrow & 0 & \longrightarrow & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & \mathbf{V}, & & & & & & & & & \\
 & & & & (-1, 1) & \longleftarrow & (0, 1) & \longrightarrow & (1, 1) & & & & & & \mathbf{V}^2.
 \end{array}$$

(In these diagrams, identities and composites are understood.) An *n-cube* of $\omega\mathbb{S}p(\mathbf{X})$ is a functor $x: \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{X}$; in particular, a 0-cube 'is' an object of \mathbf{X} , and will also be called an *object* of $\omega\mathbb{S}p(\mathbf{X})$.

A *transversal map* of n -cubes is a natural transformation $f: x \rightarrow y: \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{X}$; it is also called an *n-map*, but *should be viewed as an (n+1)-dimensional cell*, as it is represented by the associated functor $f: \mathbf{2} \times \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{X}$ (a diagram of dimension $n+1$).

These objects and maps form a category

$$(2) \quad \mathbb{S}p_n(\mathbf{X}) = \mathbf{Cat}(\mathbf{V}^n, \mathbf{X}).$$

Its composition law, written $g.f$ or gf , is called the *transversal composition* of $\omega\text{Sp}(\mathbf{X})$ in degree n and direction 0 . The domain and codomain of a transversal n -map $f: x \rightarrow y$ are written as $\partial_0^-(f) = x$ and $\partial_0^+(f) = y$. The identity of x is written as $\text{id}(x)$.

It is now easy to construct a symmetric cubical object in \mathbf{Cat} , based on the structure of the category \mathbf{V} as a *formal symmetric interval* (with respect to the cartesian product in \mathbf{Cat}); this structure consists of two *faces* (∂^α), a *degeneracy* (e) and a *transposition* (s):

$$(3) \quad \begin{aligned} \partial^\alpha: \mathbf{1} &\rightrightarrows \mathbf{V}, & e: \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{1}, & s: \mathbf{V}^2 &\rightarrow \mathbf{V}^2 & (\alpha = \pm), \\ \partial^\alpha(*) &= \alpha 1, & e(t) &= *, & s(t_1, t_2) &= (t_2, t_1). \end{aligned}$$

Faces, degeneracies and transpositions of n -cubes and n -maps are defined by (contravariant!) pre-composition with the corresponding maps between cartesian powers of \mathbf{V} (for $\alpha = \pm$ and $i = 1, \dots, n$)

$$(4) \quad \begin{aligned} \partial_i^\alpha &= \mathbf{V}^{i-1} \times \partial^\alpha \times \mathbf{V}^{n-i}: \mathbf{V}^{n-1} \rightarrow \mathbf{V}^n, & \partial_i^\alpha(t_1, \dots, t_{n-1}) &= (t_1, \dots, \alpha 1, \dots, t_{n-1}), \\ e_i &= \mathbf{V}^{i-1} \times e \times \mathbf{V}^{n-i}: \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{V}^{n-1}, & e_i(t_1, \dots, t_n) &= (t_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, t_n), \\ s_i &= \mathbf{V}^{i-1} \times s \times \mathbf{V}^{n-i}: \mathbf{V}^{n+1} \rightarrow \mathbf{V}^{n+1}, & s_i(t_1, \dots, t_{n+1}) &= (t_1, \dots, t_{i+1}, t_i, \dots, t_{n+1}), \end{aligned}$$

so that the $2n$ faces of an n -cube $x: \mathbf{V}^n \rightarrow \mathbf{X}$ are $\partial_i^\alpha(x) = x \cdot \partial_i^\alpha: \mathbf{V}^{n-1} \rightarrow \mathbf{X}$, and so on.

An n -cube has 2^n *vertices*, the objects $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}(x)$. Similarly, a transversal n -map f has 2^n *vertices*, the 0 -maps $\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}(f)$; f is said to be *special* if its vertices are identities. A 0 -object x determines a sequence of *totally degenerate* cubes $e^n(x)$ of any dimension:

$$(5) \quad e^n(x) = e_n \dots e_1(x) = e_1 \dots e_1(x).$$

The *i-concatenation* $x +_i y$, or *cubical composition in direction i*, of two n -cubes that are i -consecutive (i.e. $\partial_i^+(x) = \partial_i^-(y)$) is computed in the obvious way, by 3^{n-1} distinguished pullbacks whose 'vertices' are those of the common face (for $i = 1, \dots, n$). This operation is then extended to transversal n -maps, in the obvious way: $f +_i g$ is defined when $\partial_i^+(f) = \partial_i^-(g)$.

This operation can be given a formal definition, based on the *model of binary composition* (for ordinary spans), the category \mathbf{V}_2 displayed in the commutative diagram below, with one non-trivial pullback

$$(6) \quad \begin{array}{ccccc} & & -1 & & \\ & & \swarrow & & \\ & & a & \begin{array}{c} \nearrow b \\ \searrow c \\ \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} & \searrow 1 \\ & & & & \end{array} \quad \mathbf{V}_2.$$

Indeed, two consecutive spans x, y in \mathbf{X} define a functor $[x, y]: \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{X}$ (sending the previous pullback to a distinguished one, in \mathbf{X}). Then the concatenation $x +_1 y: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X}$ is obtained by pre-composing $[x, y]$ with the *concatenation map* $m: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_2$, a full embedding (displayed in the diagram above by the names of the objects of \mathbf{V}_2). Similarly two transversal 1-maps $f: x \rightarrow x'$, $g: y \rightarrow y'$ define a natural transformation $[f, g]: [x, y] \rightarrow [x', y']: \mathbf{V}_2 \rightarrow \mathbf{X}$ and then:

$$f +_1 g = [f, g].m: x +_1 y \rightarrow x' +_1 y': \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{X}.$$

Then, i -concatenation of n -cubes (and n -maps) is based on the cartesian product $\mathbf{V}^{i-1} \times \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}^{n-i}$, as shown below for the concatenation of 2-cubes in direction $i = 1$

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & (0,-1) & & & \\ & & & \uparrow & \searrow & & \\ & & & \bullet & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ (-1,-1) & \longleftarrow & (a,-1) & \longrightarrow & (b,-1) & \longleftarrow & (c,-1) & \longrightarrow & (1,-1) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (-1,0) & \longleftarrow & (a,0) & \longrightarrow & (b,0) & \longleftarrow & (c,0) & \longrightarrow & (1,0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (-1,1) & \longleftarrow & (a,1) & \longrightarrow & (b,1) & \longleftarrow & (c,1) & \longrightarrow & (1,1) \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \longrightarrow 1 \\ \downarrow 2 \\ \mathbf{V}_2 \times \mathbf{V}. \end{array}$$

Comparisons for unitarity, associativity and interchange can be defined taking advantage of this formal construction (as proved in [G1], Section 3). These comparisons are invertible, special transversal maps:

$$(8) \quad \begin{aligned} \lambda_1 x: e_1 \partial_1^- x +_1 x &\rightarrow x, & \rho_1 x: x +_1 e_1 \partial_1^+ x &\rightarrow x & (\text{unit 1-comparisons}), \\ \kappa_1(x, y, z): x +_1 (y +_1 z) &\rightarrow (x +_1 y) +_1 z & (\text{associativity 1-comparison}), \\ \chi_1(x, y, z, u): (x +_1 y) +_2 (z +_1 u) &\rightarrow (x +_2 z) +_1 (y +_2 u) & (\text{interchange 1-comparison}). \end{aligned}$$

Of course, we are assuming that all concatenations above are legitimate.

The comparisons $\lambda_i, \rho_i, \kappa_i, \chi_i$ in the other directions are provided by transpositions, a fact that simplifies the structure and the coherence axioms. (The comparison χ_i deals with the interchange of $+_i$ and $+_{i+1}$.)

One can easily obtain a *unitary* (or normal) weak sc-category, where the unit comparisons are transversal identities, by assuming that our choice of distinguished pullbacks satisfies the *unitarity constraint*:

(*) *the distinguished pullback of the cospan $(f, 1)$ is the span $(1, f)$ (and symmetrically).*

1.2. Cubical cospans. Cubical *cospans* are obtained by the dual procedure, for a category \mathbf{X} with distinguished pushouts:

$$(1) \quad \omega\mathbb{C}\text{osp}(\mathbf{X}) = \omega\mathbb{S}\text{p}(\mathbf{X}^{\text{op}}), \quad \mathbb{C}\text{osp}_n(\mathbf{X}) = \mathbf{Cat}(\mathbf{\Lambda}^n, \mathbf{X}).$$

Here the category $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{\text{op}}$ is the *formal cospan*: $-1 \rightarrow 0 \leftarrow 1$. This case is of interest in Algebraic Topology and higher cubical cobordism, see [G1-G4].

Again, $\omega\mathbb{C}\text{osp}(\mathbf{X})$ is a *unitary* weak sc-category if the choice of distinguished pushouts satisfies the *unitarity constraint*: the distinguished pushout of the span $(f, 1)$ is the cospan $(1, f)$ (and symmetrically).

From now on, we adopt the *unitarity constraint for pullbacks and pushouts*, for the sake of simplicity.

1.3. Truncation. Truncating a weak sc-category $\omega\mathbb{A}$ at the level of 1-cubes and 1-transversal maps (that are 2-dimensional!) we get a weak double category \mathbb{A} .

In particular, $\omega\mathbb{S}\text{p}(\mathbf{X})$ gives the weak double category $\mathbb{S}\text{p}(\mathbf{X})$ of sets, mappings and spans on \mathbf{X} , while $\omega\mathbb{C}\text{osp}(\mathbf{X})$ gives the weak double category $\mathbb{C}\text{osp}(\mathbf{X})$ of sets, mappings and cospans [GP1] (where the category \mathbf{X} has distinguished pullbacks or pushouts, respectively).

More specifically, given a weak sc-category $\omega\mathbb{A}$:

- the 0-cubes and the transversal 0-maps $f: A \rightarrow A'$ of $\omega\mathbb{A}$ give the objects and the *horizontal* arrows of the weak double category $\mathbb{A} = \text{tr}_1(\omega\mathbb{A})$;
- each 1-cube becomes a *vertical* arrow $u: A \rightarrow B$ (marked with a dot), where $A = \partial_1^-(u)$, $B = \partial_1^+(u)$;
- each transversal 1-map $a: u \rightarrow v$ becomes a *double cell* as below

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ u \downarrow & a & \downarrow v \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array} \quad \begin{array}{c} \bullet \longrightarrow 0 \\ \downarrow 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} u = \partial_0^-(a), \quad v = \partial_0^+(a), \\ f = \partial_1^-(a), \quad g = \partial_1^+(a), \end{array}$$

whose boundary is displayed as $a: (u \xrightarrow{f} v)$ or $a: u \rightarrow v$;

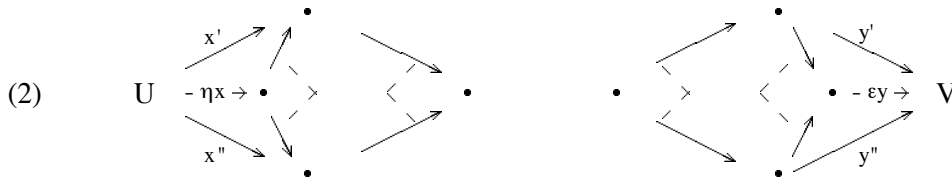
- the transversal composition (of 0-maps and 1-maps) becomes the *horizontal one*, while concatenation (of 1-cubes and 1-maps) becomes the *vertical composition*; the former is strictly categorical, while the latter is weakly categorical, up to the invertible special comparisons of $\omega\mathbb{A}$ (in degree 1).

1.4. A double adjunction. The weak double categories $\text{Sp}\mathbf{X}$ and $\text{Cosp}\mathbf{X}$ of spans and cospans on the category \mathbf{X} (with distinguished pullbacks and pushouts) are linked by an obvious colax/lax adjunction

$$(1) \quad F: \text{Sp}\mathbf{X} \rightleftarrows \text{Cosp}\mathbf{X} : R, \quad \eta: 1 \rightarrow RF, \quad \varepsilon: FR \rightarrow 1,$$

that we describe here *in an informal way*. (Writing $\eta: 1 \rightarrow RF$ and $\varepsilon: FR \rightarrow 1$ is an abuse of notation, since we cannot compose the comparisons of F and R . The precise definition of a colax/lax adjunction of weak double categories can be found in [GP2]; but the reader will find here its cubical extension, in Section 4, and can easily recover the truncated notion.)

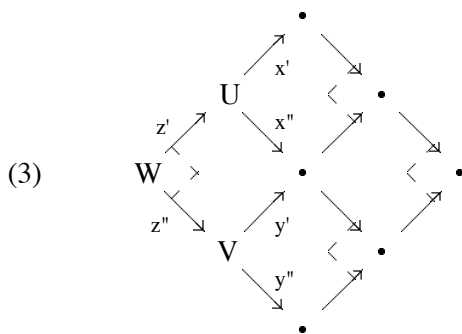
At the level 0 (of objects and arrows of \mathbf{X}), everything is an identity. At the level 1 (of 1-cubes and 1-maps), F operates by pushout and R by pullbacks; the special transversal 1-maps $\eta x: x \rightarrow RFx$ and $\varepsilon y: FRy \rightarrow y$ are obvious:



The triangle identities are plainly satisfied:

$$\varepsilon(Fx).F(\eta x) = \text{id}(Fx), \quad R(\varepsilon y).(\eta Ry) = \text{id}(Ry).$$

Finally it is easy to check that F is, in a natural way, a colax double functor (dually, R is lax). The comparison cell $\underline{E}(x, y): F(x +_1 y) \rightarrow Fx +_1 Fy$ for concatenation is given by the natural mapping from the pushout of $(x'z', y''z'')$ to the cospan $Fx +_1 Fy$ (at the right-hand of the diagram below)



Since we agreed to follow the unitarity constraint for the choice of pullbacks and pushouts in \mathbf{X} , the adjunction is *unitary*, in the sense that so are the weak double categories $\mathbb{S}p\mathbf{X}$, $\mathbb{C}osp\mathbf{X}$ and the colax/lax double functors F, R . It is also *special*, in the sense that the restricted adjunction at the level of 0-objects and 0-maps

$$(4) \quad F_0: \mathbf{X} \rightleftarrows \mathbf{X} : R_0 \quad \eta_0: 1 \rightarrow R_0 F_0, \quad \varepsilon_0: F_0 R_0 \rightarrow 1,$$

is composed of identity functors and identity transformations.

Notice also that the natural transformations $F\eta, \varepsilon F, \eta R, R\varepsilon$ are invertible (which means that the adjunction is *idempotent*).

1.5. The cubical adjunction. The unitary colax double functor $F: \mathbb{S}p\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}osp\mathbf{X}$ can be extended to a unitary colax sc-functor $F: \omega\mathbb{S}p\mathbf{X} \rightarrow \omega\mathbb{C}osp\mathbf{X}$.

Moving one degree up, for a 2-dimensional span x , $F_2(x)$ is constructed with the pushout of faces $F_1(\partial_i^\alpha x)$ and the colimit of the whole diagram x

$$(1) \quad \begin{aligned} \partial_i^\alpha(F_2(x)) &= F_1(\partial_i^\alpha x) && \text{for } \alpha = 0, 1 \text{ and } i = 1, 2, \\ F_2(x)(0, 0) &= \text{colim}(x). \end{aligned}$$

This colimit exists in \mathbf{X} , since it can be easily constructed as a pushout of pushouts; but its choice must agree with transposition and preserve units. (See [P2] for a general characterisation of the dual topic: limits 'generated' by pullbacks).

The 2-dimensional span x of the left diagram below becomes thus the right-hand 2-dimensional cospan $F_2(x)$

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} x(-1,-1) & \longleftarrow & x(0,-1) & \longrightarrow & x(1,-1) & & x(-1,-1) & \longrightarrow & F(\partial_2^- x)(0) & \longleftarrow & x(1,-1) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x(-1,0) & \longleftarrow & x(0,0) & \longrightarrow & x(1,0) & & F(\partial_1^- x)(0) & \longrightarrow & \text{colim}(x) & \longleftarrow & F(\partial_1^+ x)(0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ x(-1,1) & \longleftarrow & x(0,1) & \longrightarrow & x(1,1) & & x(-1,1) & \longrightarrow & F(\partial_2^+ x)(0) & \longleftarrow & x(1,1) \end{array}$$

The definition of F_2 on transversal 2-maps is obvious, as well as the comparison cells for 1-directed concatenation $\underline{F}(x, y): F(x +_1 y) \rightarrow Fx +_1 Fy$.

One proceeds in a similar way, defining F_n after F_{n-1}

$$(3) \quad \begin{aligned} \partial_i^\alpha(F_n(x)) &= F_{n-1}(\partial_i^\alpha x) && \text{for } \alpha = 0, 1 \text{ and } i = 1, \dots, n, \\ F_n(x)(\underline{0}) &= \text{colim}(x), && \text{for } \underline{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbf{v}^n. \end{aligned}$$

The unitary lax double functor $R: \mathbb{C}osp\mathbf{X} \rightarrow \mathbb{S}p\mathbf{X}$ is similarly extended, using distinguished limits instead of colimits, and gives a unitary lax sc-functor $R: \omega\mathbb{C}osp\mathbf{X} \rightarrow \omega\mathbb{S}p\mathbf{X}$.

One extends the unit $\eta: 1 \rightarrow RF$ by a similar inductive procedure:

$$(4) \quad \begin{aligned} \partial_i^\alpha(\eta(x)) &= \eta(\partial_i^\alpha x) && \text{for } \alpha = 0, 1 \text{ and } i = 1, \dots, n, \\ (\eta x)(\underline{Q}): x(\underline{Q}) &\rightarrow RF(\underline{Q}) = \lim(Fx), && \text{for } \underline{Q} = (0, \dots, 0) \in \mathbf{v}^n, \end{aligned}$$

where the map $(\eta x)(\underline{Q})$ is given by the universal property of the limit $\lim(Fx)$.

Analogously for the counit $\varepsilon: FR \rightarrow 1$. The triangular identities hold.

1.6. Transversal invariance. Extending a notion of double categories (introduced in [GP1], 2.4, under the name of *horizontal invariance*), we say that the weak sc-category \mathbb{A} is *transversally invariant* if, for every n-cube x and every pair of transversal (n-1)-isomorphisms $f^\alpha: \partial_1^\alpha x \rightarrow y^\alpha$ (where $\alpha = \pm$), there exists some transversal n-isomorphism $f: x \rightarrow y$ with $\partial_1^\alpha f = f^\alpha$ (and therefore $\partial_1^\alpha y = y^\alpha$)

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{f^-} & y^- & \bullet & \longrightarrow & 0 \\ x \downarrow & & \downarrow y & \downarrow & & 1 \\ \bullet & \xrightarrow{f^+} & y^+ & & & \end{array}$$

Of course, because of transpositions, the same property holds for every pair of i-directed faces ∂_i^α .

2. The double category of lax and colax symmetric cubical functors

In the 2-dimensional case, weak double categories, with lax and colax double functors and suitable double cells form a *strict* double category \mathbb{Dbl} , a crucial, interesting structure introduced in [GP2] to define colax/lax double adjunctions.

We now extend this construction forming the strict *double* category \mathbb{Wsc} of weak sc-categories, lax and colax sc-functors and suitable double cells, in order to define colax/lax adjunctions between weak sc-categories. Comma sc-categories are also considered, extending again the case of double categories dealt with in [GP2].

Notice that, as far as we can see, the double category \mathbb{Wsc} is *not the truncation of any cubical category of interest*. Therefore we write it according to the notation for double categories used since [GP1]: the horizontal and vertical compositions of cells are written as $(\alpha | \beta)$ and $(\frac{\alpha}{\gamma})$, or more simply as $\alpha | \beta$ and $\alpha \otimes \gamma$. Horizontal identities, of an object or a vertical arrow, are written as 1_A and $1_u: (u \begin{smallmatrix} A \\ B \end{smallmatrix} u)$; vertical identities, of an object or a horizontal arrow, as 1_A^\bullet and $1_f^\bullet: (A \begin{smallmatrix} f \\ f \end{smallmatrix} A)$.

2.1. Lax sc-functors. As defined in [G5], 1.5, a *lax symmetric cubical functor* $R: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$ between weak sc-categories, or *lax sc-functor*, strictly preserves faces, transpositions, transversal composition and transversal identities, but has special transversal maps, called *comparisons*, for the cubical operations, namely degeneracies (or units) and concatenation in direction 1 (those of the other cubical directions being generated by transpositions):

$$(1) \quad \underline{R}(x): e_1(Rx) \rightarrow R(e_1x) \quad (\text{for any cube } x \text{ in } \mathbb{X}),$$

$$\underline{R}(x, y): Rx +_1 Ry \rightarrow R(z) \quad (\text{for any concatenation } z = x +_1 y \text{ in } \mathbb{X}).$$

Recall that a transversal n -map is said to be *special* if its 2^n vertices are identities. Notice that in $\underline{R}(x)$, the cube x has an arbitrary degree $n \geq 0$, while in $\underline{R}(x, y)$ the cubes x, y must have degree ≥ 1 and be 1-consecutive: $\partial_1^+x = \partial_1^-y$.

These comparisons must satisfy the following axioms of coherence (writing $+_1$ as $+$ in most diagrams)

(i) (*naturality*) for a transversal n -map $f: x \rightarrow x'$ in \mathbb{X} and a concatenation $f +_1 g$ (with $g: y \rightarrow y'$), we have the following commutative diagrams of transversal maps

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} e_1(Rx) & \xrightarrow{e_1(Rf)} & e_1(Rx') \\ \downarrow \underline{R}(x) & & \underline{R}(x') \downarrow \\ R(e_1(x)) & \xrightarrow{R(e_1f)} & R(e_1(x')) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Rx + Ry & \xrightarrow{Rf + Rg} & Rx' + Ry' \\ \downarrow \underline{R}(x, y) & & \underline{R}(x', y') \downarrow \\ R(x + y) & \xrightarrow{R(f+g)} & R(x' + y') \end{array}$$

(ii) (*coherence laws for degeneracies*) for an n -cube x in \mathbb{X} , with 1-indexed faces $\partial_1^-x = a$, $\partial_1^+x = b$, the following diagrams of transversal maps commute

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} e_1(Ra) + Rx & \xrightarrow{\lambda_1(Rx)} & Rx \\ \downarrow \underline{R}(a) + \text{id} & & \underline{R}(\lambda_1x) \uparrow \\ R(e_1a) + Rx & \xrightarrow{\underline{R}(e_1a, x)} & R(e_1a + x) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Rx + e_1(Rb) & \xrightarrow{\rho_1(Rx)} & Rx \\ \downarrow \text{id} + \underline{R}(b) & & \underline{R}(\rho_1x) \uparrow \\ Rx + R(e_1b) & \xrightarrow{\underline{R}(x, e_1b)} & R(x + e_1b) \end{array}$$

(iii) (*coherence hexagon for associativity*) for 1-consecutive n -cubes x, y, z in \mathbb{X} , the following diagram of transversal maps is commutative (the index 1 is omitted in the labels of the arrows)

$$(4) \quad \begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}x + (\mathbb{R}y + \mathbb{R}z) & \xrightarrow{\kappa(\mathbb{R}x, \mathbb{R}y, \mathbb{R}z)} & (\mathbb{R}x + \mathbb{R}y) + \mathbb{R}z \\
 \text{id} + \underline{\mathbb{R}}(y, z) \downarrow & & \downarrow \underline{\mathbb{R}}(x, y) + \text{id} \\
 \mathbb{R}x + \mathbb{R}(y + z) & & \mathbb{R}(x + y) + \mathbb{R}z \\
 \underline{\mathbb{R}}(x, y + z) \downarrow & & \downarrow \underline{\mathbb{R}}(x + y, z) \\
 \mathbb{R}((x + (y + z))) & \xrightarrow{\mathbb{R}\kappa(x, y, z)} & \mathbb{R}(x + y) + z
 \end{array}$$

(iv) (*coherence hexagon for cubical interchange*) for n-cubes x, y, z, u in \mathbb{X} making the following concatenations legitimate, the following diagram of transversal maps is commutative (the indices 1, 2 are omitted in the labels of the arrows)

$$(5) \quad \begin{array}{ccc}
 (\mathbb{R}x +_1 \mathbb{R}y) +_2 (\mathbb{R}z +_1 \mathbb{R}u) & \xrightarrow{\chi(\mathbb{R}x, \mathbb{R}z, \mathbb{R}u, \mathbb{R}u)} & (\mathbb{R}x +_2 \mathbb{R}z) +_1 (\mathbb{R}y +_2 \mathbb{R}u) \\
 \underline{\mathbb{R}}(x, y) + \underline{\mathbb{R}}(z, u) \downarrow & & \downarrow \underline{\mathbb{R}}(x, z) + \underline{\mathbb{R}}(y, u) \\
 \mathbb{R}(x +_1 y) +_2 \mathbb{R}(z +_1 u) & & \mathbb{R}(x +_2 z) +_1 \mathbb{R}(y +_2 u) \\
 \underline{\mathbb{R}}(x + y, z + u) \downarrow & & \downarrow \underline{\mathbb{R}}(x + z, y + u) \\
 \mathbb{R}((x +_1 y) +_2 (z +_1 u)) & \xrightarrow{\mathbb{R}(\chi(x, y, z, u))} & \mathbb{R}((x +_2 z) +_1 (y +_2 u))
 \end{array}$$

A lax sc-functor \mathbb{R} is said to be *unitary* if its unit comparisons $\underline{\mathbb{R}}(x)$ are identities. If \mathbb{X} , \mathbb{A} and \mathbb{R} are unitary, the cells $\underline{\mathbb{R}}(e_1 \partial_1^+ x, x)$ and $\underline{\mathbb{R}}(x, e_1 \partial_1^+ x)$ are also identities (by axiom (ii)).

A *colax sc-functor* $F: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$ has comparisons in the opposite direction

$$(6) \quad \underline{F}(x): F(e_1 x) \rightarrow e_1(Fx), \quad \underline{F}(x, y): F(x +_1 y) \rightarrow Fx +_1 Fy.$$

A *pseudo sc-functor* is a lax (or colax) sc-functor whose comparisons are invertible.

2.2. Transformations of lax sc-functors. A *transversal transformation* of lax sc-functors $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$ assigns to every n-cube x of \mathbb{X} an n-map $hx: \mathbb{R}x \rightarrow \mathbb{S}x$ in \mathbb{A} .

This family must be natural on transversal maps, commute with faces and transpositions and satisfy the coherence conditions (iii) for degeneracies and concatenations:

- (i) for an n -map $f: x \rightarrow y$ in \mathbb{A} , $hy.Ff = Gf.hx$,
- (ii) $\partial_1^\alpha(hx) = h(\partial_1^\alpha x)$, $h(s_1x) = s_1(hx)$,
- (iii) for an n -cube x and a 1-consecutive n -cube y in \mathbb{X} , the following squares of n -maps commute (again, we write $+$ for $+_1$):

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} e_1(Rx) & \xrightarrow{e_1(hx)} & e_1(Sx) \\ R_1(x) \downarrow & & \downarrow S_1(x) \\ R(e_1x) & \xrightarrow{h(e_1x)} & S(e_1x) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Rx + Ry & \xrightarrow{hx+hy} & Sx + Sy \\ R_1(x, y) \downarrow & & \downarrow S_1(x, y) \\ R(x + y) & \xrightarrow{h(x+y)} & S(x + y) \end{array}$$

Weak sc -categories, lax sc -functors and their transversal transformations form a 2-category $LxWsc$.

Transversal transformations of colax sc -functors are defined in a similar way. $CxWsc$ will denote the 2-category of weak sc -categories, colax sc -functors and their transversal transformations.

2.3. The double category Wsc . Lax and colax sc -functors do not compose well, since we cannot compose their comparisons. On the other hand, they can be organised in a *strict* double category Wsc , crucial for our study, where orthogonal adjunctions (recalled below, in Section 3) will provide our general notion of cubical adjunction (Section 4) while companion pairs amount to pseudo sc -functors (Section 5).

The objects of Wsc are the *weak* sc -categories $\mathbb{X}, \mathbb{A}, \mathbb{B}, \dots$; its horizontal arrows are the *lax* sc -functors R, S, \dots ; its vertical arrows are the *colax* sc -functors F, G, \dots . A cell α

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{R} & \mathbb{A} \\ F \downarrow & \alpha & \downarrow G \\ \mathbb{B} & \xrightarrow{S} & \mathbb{C} \end{array}$$

is - very roughly speaking - a 'transformation' $\alpha: GR \rightarrow SF$.

But this is an abuse of notation, since the composites GR and SF are neither lax nor colax (just morphisms of symmetric 'face-cubical' sets, respecting the transversal structure): the coherence conditions of α require the *individual* knowledge of the four 'functors', including the comparison cells of each of them.

Precisely, the cell α consists of the following data:

(a) two lax sc-functors R, S , with comparisons as follows:

$$\begin{aligned} R: \mathbb{X} &\rightarrow \mathbb{A}, & \underline{R}(x): e_1(Rx) &\rightarrow R(e_1x), & \underline{R}(x, y): Rx +_1 Ry &\rightarrow R(x +_1 y), \\ S: \mathbb{B} &\rightarrow \mathbb{C}, & \underline{S}(x): e_1(Sx) &\rightarrow S(e_1x), & \underline{S}(x, y): Sx +_1 Sy &\rightarrow S(x +_1 y), \end{aligned}$$

(b) two colax sc-functors F, G , with comparisons as follows:

$$\begin{aligned} F: \mathbb{X} &\rightarrow \mathbb{B}, & \underline{F}(x): F(e_1x) &\rightarrow e_1(Fx), & \underline{F}(x, y): F(x +_1 y) &\rightarrow Fx +_1 Fy, \\ G: \mathbb{A} &\rightarrow \mathbb{C}, & \underline{G}(x): G(e_1x) &\rightarrow e_1(Gx), & \underline{G}(x, y): G(x +_1 y) &\rightarrow Gx +_1 Gy, \end{aligned}$$

(c) a family of transversal n -maps $\alpha_x: GR(x) \rightarrow SF(x)$ of \mathbb{C} (for every n -cube x in \mathbb{X}), consistent with faces and transpositions

$$(2) \quad \alpha(\partial_1^\alpha x) = \partial_1^\alpha(\alpha x), \quad \alpha(s_i x) = s_i(\alpha x).$$

These data have to satisfy the naturality condition (c1) and the coherence conditions (c2), (c3) (with respect to 1-degeneracies and 1-concatenation, respectively)

$$(c1) \quad SFf.\alpha_x = \alpha_y.GRf: GR(x) \rightarrow SF(y) \quad (\text{for } f: x \rightarrow y \text{ in } \mathbb{X}),$$

$$(c2) \quad \underline{SF}(x).\alpha_{e_1(x)}.GR(x) = \underline{SF}(x).e_1(\alpha_x).GR(x) \quad (\text{for } x \text{ in } \mathbb{X}),$$

$$\begin{array}{ccccc} Ge_1(Rx) & \xrightarrow{\underline{GR}(x)} & GR(e_1x) & \xrightarrow{\alpha_{e_1(x)}} & SF(e_1x) \\ \underline{GR}(x) \downarrow & & & & \downarrow \underline{SF}(x) \\ e_1GR(x) & \xrightarrow{e_1\alpha(x)} & e_1SF(x) & \xrightarrow{\underline{SF}(x)} & Se_1F(x) \end{array}$$

$$(c3) \quad \underline{SF}(x, y).\alpha_z.GR(x, y) = \underline{S}(Fx, Fy).(\alpha_x +_1 \alpha_y).GR(x, y) \quad (\text{for } z = x +_1 y \text{ in } \mathbb{X}),$$

$$\begin{array}{ccccc} G(Rx +_1 Ry) & \xrightarrow{\underline{GR}(x, y)} & GR(z) & \xrightarrow{\alpha_z} & SF(z) \\ \underline{G}(Rx, Ry) \downarrow & & & & \downarrow \underline{SF}(x, y) \\ GRx +_1 GRy & \xrightarrow{\alpha_x +_1 \alpha_y} & SFx +_1 SFy & \xrightarrow{\underline{S}(Fx, Fy)} & S(Fx +_1 Fy) \end{array}$$

The horizontal composition $(\alpha \mid \beta)$ and the vertical composition $\alpha \otimes \gamma = \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)$ of double cells are both defined *via the composition of transversal maps* (in a weak sc-category)

$$(3) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{X} & - R \rightarrow & \bullet & - R' \rightarrow & \bullet \\ F \downarrow & \alpha & \downarrow G & \beta & \downarrow H \\ \bullet & - S \rightarrow & \bullet & - S' \rightarrow & \bullet \\ F \downarrow & \gamma & \downarrow G' & \delta & \downarrow H' \\ \bullet & - T \rightarrow & \bullet & - T' \rightarrow & \bullet \end{array}$$

$$(4) \quad (\alpha \mid \beta)(x) = S'\alpha x.\beta R x: HR'R(x) \rightarrow S'GR(x) \rightarrow S'SF(x),$$

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)(x) = \gamma F x.G' \alpha x: G'GR(x) \rightarrow G'SF(x) \rightarrow TFF(x) \quad (\text{for } x \text{ in } \mathbb{X}).$$

We verify below, in Theorem 2.4, that these compositions are well-defined, and satisfy the axioms of a double category.

Within $\mathbb{W}sc$, we have the strict 2-category $Lx\mathbb{W}sc$ of *weak sc-categories, lax sc-functors and transversal transformations*: namely, $Lx\mathbb{W}sc$ is the restriction of $\mathbb{W}sc$ to trivial vertical arrows.

Similarly, the strict 2-category $Cx\mathbb{W}sc$ (resp. $Ps\mathbb{W}sc$) whose arrows are the colax (resp. pseudo) sc-functors, also lies in $\mathbb{W}sc$.

2.4. Theorem. $\mathbb{W}sc$, as defined above, is indeed a strict double category.

Proof. The argument is much the same as for $\mathbb{D}bl$, in [GP2].

First, to show that the double cells defined in 2.3.4 are indeed coherent, we verify the condition (c3) for $(\alpha \mid \beta)$, with respect to a concatenation $z = x +_1 y$ (written as $x + y$) in \mathbb{X} . Our property amounts to the commutativity of the outer diagram below, formed of transversal maps

$$(1) \quad \begin{array}{ccccc} & & HR'Rz & \xrightarrow{\beta Rz} & S'GRz & \xrightarrow{S'\alpha z} & S'SFz \\ & HR'R \nearrow & & & S'GR \nearrow & & \searrow S'SE \\ HR'(Rx+Ry) & \xrightarrow{\beta(Rx+Ry)} & S'G(Rx+Ry) & & S'GR \searrow & & S'S(Fx+Fy) \\ HR'R \nearrow & & S'GR \searrow & & S'(\alpha x + \alpha y) & & \nearrow S'SF \\ H(R'Rx + R'Ry) & & S'(GRx+GRy) & \xrightarrow{S'(\alpha x + \alpha y)} & S'(SFx+SFy) & & \\ HR'R \searrow & & S'GR \nearrow & & \nearrow S'SF & & \\ HR'R_x + HR'R_y & \xrightarrow{\beta R_x + \beta R_y} & S'GR_x + S'GR_y & \xrightarrow{S'\alpha_x + S'\alpha_y} & S'SF_x + S'SF_y & & \end{array}$$

Indeed, the two hexagons commute applying (c3) to α and β , respectively; the upper parallelogram commutes by naturality of β ; the lower one by consistency of S' with the cells $\alpha x, \alpha y$ (by 2.1(i)).

Now, both compositions of double cells have been defined, in 2.3.4, *via the composition of transversal maps* (in a weak sc-category), and therefore are strictly unitary and associative.

Finally, to verify the middle-four interchange law on the four double cells of diagram 2.3.3, we compute the compositions $(\alpha \mid \beta) \otimes (\gamma \mid \delta)$ and $(\alpha \otimes \gamma) \mid (\beta \otimes \delta)$ on an n-cube x , and we obtain the two transversal maps $H'HR'R_x \rightarrow T'TF'F_x$ of the upper or lower path of the following diagram

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} & H'\beta R_x & & H'S'\alpha_x & \\ H'HR'R_x & \longrightarrow & H'S'GR_x & \longrightarrow & H'S'SF_x \\ & \delta_{GR_x} \downarrow & & \downarrow \delta_{SF_x} & \\ & T'G'GR_x & \xrightarrow{T'G'\alpha_x} & T'G'SF_x & \xrightarrow{T'\gamma F_x} T'TF'F_x \end{array}$$

But these two paths coincide because the square commutes: it is a consequence of axiom (c1) for the double cell δ , namely the naturality of δ on the transversal map $\alpha_x: GR(x) \rightarrow SF(x)$. \square

2.5. Comma structures. Comma double categories (introduced in [GP2]) also have a natural extension to the cubical case. Given a *colax* sc-functor $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ and a *lax* sc-functor $R: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$ with the same codomain, we can construct the *comma* weak sc-category $F \downarrow R$, where the projections P and Q are strict sc-functors, and π is a cell of \mathbb{Wsc}

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} F \downarrow R & \xrightarrow{P} & \mathbb{A} \\ Q \downarrow & \pi & \downarrow F \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{R} & \mathbb{C} \end{array}$$

An n-cube of $F \downarrow R$ is a triple $(a, x; c: Fa \rightarrow Rx)$ where a is an n-cube of \mathbb{A} , x is an n-cube of \mathbb{X} and c is an n-map of \mathbb{C} . A transversal map $(h, f): (a, x; c) \rightarrow (a', x'; c')$ comes from a pair of transversal maps $h: a \rightarrow a'$ (in \mathbb{A} ,) and $f: x \rightarrow x'$ (in \mathbb{X}) that form in \mathbb{C} a commutative square of transversal maps

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} Fa & \xrightarrow{c} & Rx \\ Fh \downarrow & & \downarrow Rf \\ Fa' & \xrightarrow{c'} & Rx' \end{array} \quad Rf.c = c'.Fh.$$

Faces, transposition and transversal composition are obvious. In the 1-concatenation

$$(3) \quad (a, x; c: Fa \rightarrow Rx) +_1 (b, y; d: Fb \rightarrow Ry) \\ = (a +_1 b, x +_1 y; u: F(a +_1 b) \rightarrow R(x +_1 y)),$$

the transversal map u is the following composite, *defined using the fact that F is colax and R is lax*:

$$(4) \quad u = \underline{R}(x, y).(c +_1 d).\underline{F}(a, b): \\ F(a +_1 b) \rightarrow Fa +_1 Fb \rightarrow Rx +_1 Ry \rightarrow R(x +_1 y).$$

The invertible associativity transversal map for 1-directed concatenation of three 1-consecutive cubes

$$(a, x; c), \quad (a', x'; c'), \quad (a'', x''; c'')$$

is given by the pair $(\alpha(\mathbf{a}), \xi(\mathbf{x}))$ of associativity isocells for our two triples of 1-consecutive cubes, namely $\mathbf{a} = (a, a', a'')$ in \mathbb{A} and $\mathbf{x} = (x, x', x'')$ in \mathbb{X} (we write $+_1$ as $+$)

$$(5) \quad (\alpha(\mathbf{a}), \xi(\mathbf{x})): ((a, x; c) + (a', x'; c')) + (a'', x''; c'') \rightarrow (a, x; c) + ((a', x'; c') + (a'', x''; c'')).$$

In fact, let $a_1 = (a+a') + a''$, $a_2 = a + (a'+a'')$, and similarly x_1, x_2 . Let us consider the transversal maps $\Phi: Fa_1 \rightarrow Rx_1$ and $\Psi: Fa_2 \rightarrow Rx_2$ defined by the following transversal compositions:

$$\Phi = \underline{R}(x+x', x'').(\underline{R}(x, x') + e_1 Rx'').((c+c') + c'').(\underline{F}(a, a') + e_1 Fa'').\underline{F}(a+a', a''): \\ Fa_1 \rightarrow F(a+a') + Fa'' \rightarrow (Fa+Fa') + Fa'' \rightarrow (Rx+Rx') + Rx'' \rightarrow R(x+x') + Rx'' \rightarrow Rx_1, \\ \Psi = \underline{R}(x, x'+x'').(e_1 Rx + \underline{R}(x', x'')).(c + (c'+c'')).(e_1 Fa + \underline{F}(a', a'')).\underline{F}(a, a'+a''): \\ Fa_2 \rightarrow Fa + F(a'+a'') \rightarrow Fa + (Fa'+Fa'') \rightarrow Rx + (Rx'+Rx'') \rightarrow Rx + R(x'+Rx'') \rightarrow Rx_2.$$

Then the coherence of the transversal map (5) is expressed by the equality

$$\Psi.F\alpha(\mathbf{a}) = R\xi(\mathbf{x}).\Phi: Fa_1 \rightarrow Rx_2,$$

that follows from the coherence axioms on F, R and \mathbb{C} .

Finally, the strict sc-functors P and Q are the obvious projections, while the component of the transversal transformation π on the n -cube $(a, x; c)$ of $F\downarrow R$ is the transversal map:

$$(6) \quad \pi(a, x; c) = c: Fa \rightarrow Rx.$$

2.6. Theorem (Universal properties of comas). (a) For a pair of lax sc-functors S, T and a cell α as below (in $\mathbb{W}sc$) there is a unique lax sc-functor $L: \mathbb{Z} \rightarrow F\downarrow R$ such that $S = PL$, $T = QL$ and $\alpha = (\beta \mid \pi)$ where the cell β is defined by the identity $1: QL \rightarrow T$ (a horizontal transformation of lax sc-functors)

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{S} & \mathbb{A} \\ 1 \downarrow & \alpha & \downarrow F \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{T} \mathbb{X} \xrightarrow{R} & \mathbb{C} \end{array} = \begin{array}{ccccc} & & S & & \\ & & \xrightarrow{\quad} & & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{-L} & F\downarrow R & \xrightarrow{-P} & \mathbb{A} \\ 1 \downarrow & \beta & Q \downarrow & \pi & \downarrow F \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{T} & \mathbb{X} & \xrightarrow{R} & \mathbb{C} \end{array}$$

Moreover, L is pseudo if and only if both S and T are.

(b) A similar property holds for a pair of colax sc-functors G, H and a double cell $\alpha': (G \downarrow_R FH)$.

Proof. (a) L is defined as follows on an n -cube z and an n -map $f: z \rightarrow z'$ of \mathbb{Z}

$$(2) \quad L(z) = (Sz, Tz; \alpha z: FSz \rightarrow RTz), \quad L(f) = (Sf, Tf).$$

The comparison transversal maps \underline{L} for z and $z = x +_1 y$ in \mathbb{Z} , are constructed with the laxity transversal maps \underline{S} and \underline{T} (and are invertible if and only if the latter are)

$$(3) \quad \underline{L}z = (\underline{S}z, \underline{T}z): e_1(Lz) \rightarrow Le_1(z), \\ \underline{L}(x, y) = (\underline{S}(x, y), \underline{T}(x, y)): Lx +_1 Ly \rightarrow L(z).$$

Here, $Lx +_1 Ly$ is the n -cube defined as below (following 2.5.3-4)

$$(4) \quad Lx +_1 Ly = (Sx, Tx; \alpha x: FSx \rightarrow RTx) + (Sy, Ty; \alpha y: FSy \rightarrow RTy) \\ = (Sx +_1 Sy, Tx +_1 Ty; u), \\ u = \underline{R}(Tx, Ty) \cdot (\alpha x +_1 \alpha y) \cdot \underline{F}(Sx, Sy):$$

$$\underline{F}(Sx +_1 Sy) \rightarrow \underline{F}Sx +_1 \underline{F}Sy \rightarrow \underline{R}Tx +_1 \underline{R}Ty \rightarrow \underline{R}(Tx +_1 Ty).$$

The coherence condition 2.5.2 on the transversal map $\underline{L}(x, y) = (\underline{S}(x, y), \underline{T}(x, y))$ of $F\downarrow R$

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} \underline{F}(Sx +_1 Sy) & \xrightarrow{u} & \underline{R}(Tx +_1 Ty) \\ \underline{F}\underline{S}(x, y) \downarrow & & \downarrow \underline{R}\underline{T}(x, y) \\ \underline{F}S(z) & \xrightarrow{\alpha z} & \underline{R}T(z) \end{array} \quad \underline{R}\underline{T}(x, y) \cdot u = \alpha z \cdot \underline{F}\underline{S}(x, y),$$

follows from the coherence condition (c3) of α as a double cell in $\mathbb{W}sc$

$$(6) \quad \underline{RT}(x, y) \cdot (\alpha x +_1 \alpha y) \cdot \underline{E}(Sx, Sy) = \alpha z \cdot \underline{FS}(x, y),$$

$$\begin{array}{ccccc} F(Sx +_1 Sy) & \xrightarrow{\underline{FS}(x,y)} & FS(z) & \xrightarrow{\alpha z} & RT(z) \\ \underline{E}(Sx, Sy) \downarrow & & & & \downarrow 1 \\ FSx +_1 FSy & \xrightarrow{\alpha x +_1 \alpha y} & RTx +_1 RTy & \xrightarrow{\underline{RT}(x, y)} & RT(z) \end{array}$$

where $\underline{RT}(x, y) = \underline{RT}(x, y) \cdot \underline{R}(Tx, Ty)$.

The uniqueness of L is obvious. □

3. Companions and adjoints in double categories

This section, taken from [GP2], Section 1, studies the connections between horizontal and vertical morphisms in a double category: horizontal morphisms can have vertical *companions* and vertical *adjoints*. Such phenomena are interesting in themselves and typical of double categories.

\mathbb{A} is always a weak double category, that we assume to be *unitary* (in the sense that the identities are strict units), for the sake of simplicity.

3.1. Orthogonal companions. In the weak double category \mathbb{A} , the horizontal morphism $f: A \rightarrow B$ and the vertical morphism $u: A \leftrightarrow B$ are made (orthogonal) *companions* by assigning a pair (η, ε) of cells as below, called the *unit* and *counit*, that satisfy the identities $\eta \varepsilon = 1_f^\bullet$ and $\eta \otimes \varepsilon = 1_u$

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A & \xlongequal{\quad} & A \\ 1 \downarrow & \eta & \downarrow u \\ A & \xrightarrow{\quad f} & B \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f} & B \\ u \downarrow & \varepsilon & \downarrow 1 \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

Given f , this is equivalent (*by unitarity*) to saying that the pair (u, ε) satisfies the following universal property:

(a) for every cell $\varepsilon': (u' \xrightarrow{f} B)$ there is a unique cell $\lambda: (u' \xrightarrow{A} u)$ such that $\varepsilon' = \lambda \varepsilon$

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u' \downarrow & \varepsilon' & \downarrow 1 \\ A' & \xrightarrow{g} & B \end{array} = \begin{array}{ccccc} A & \equiv & A & \xrightarrow{f} & B \\ u' \downarrow & \lambda & \downarrow u & \varepsilon & \downarrow 1 \\ A' & \xrightarrow{g} & B & \equiv & B \end{array}$$

In fact, given (η, ε) , we can (and must) take $\lambda = \eta \otimes \varepsilon'$; on the other hand, given (a), we define $\eta: (A \xrightarrow{A} u)$ by the equation $\eta \varepsilon = 1_f^\bullet$ and deduce that $\eta \otimes \varepsilon = 1_u$ because $(\eta \otimes \varepsilon) \mid \varepsilon = (\eta \mid \varepsilon) \otimes \varepsilon = \varepsilon = (1_u \mid \varepsilon)$.

Similarly, also the pair (u, η) is characterised by a universal property

(b) for every cell $\eta': (A \xrightarrow{A} u')$ there is a unique cell $\mu: (u \xrightarrow{B} u')$ such that $\eta' = \eta \mid \mu$.

Therefore, if f has a vertical companion, this is determined up to a unique special isocell, *and will often be written as* f_* . Companions compose in the obvious (covariant) way: if $g: B \rightarrow C$ also has a companion, then $g_* f_*: A \rightarrow C$ is companion to $gf: A \rightarrow C$, with unit $(\frac{\eta \mid 1}{1^\bullet \mid \eta'}) : (A \xrightarrow{A} g_* f_*)$.

Companionship is preserved by *unitary* lax or colax double functors.

We say that \mathbb{A} has *vertical companions* if every horizontal arrow has a vertical companion. The weak double categories recalled in Section 1 have vertical companions, given by the obvious embedding of horizontal arrows into the vertical ones.

Companionship is simpler for horizontal *isomorphisms*. If f is one and has a companion u , then its unit and counit are also horizontally invertible and determine each other:

$$(3) \quad (\varepsilon \mid 1_g^\bullet \mid \eta) = \eta \otimes \varepsilon = 1_u \quad (g = f^{-1}),$$

as it appears rewriting $(\varepsilon \mid 1_g^\bullet \mid \eta)$ as follows, and then applying middle-four interchange

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & A & \equiv & A \\ 1 \downarrow & 1_f^\bullet & \downarrow 1 & 1_g^\bullet & \downarrow 1 & \eta & \downarrow u \\ A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & \varepsilon & \downarrow 1 & 1_g^\bullet & \downarrow 1 & 1_f^\bullet & \downarrow 1 \\ B & \equiv & B & \xrightarrow{g} & A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Conversely, the existence of a horizontally invertible cell $\eta: (A \xrightarrow{f} B) \xrightarrow{u} (A \xrightarrow{f} B)$ implies that f is horizontally invertible, with companion u and counit as above.

3.2. Orthogonal adjoints. Transforming companionship by vertical (or horizontal) duality, the arrows $f: A \rightarrow B$ and $v: B \rightarrow A$ are made *orthogonal adjoints* by a pair (α, β) of cells as below

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ 1 \downarrow & \alpha & \downarrow v \\ A & \xlongequal{\quad} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} B & \xlongequal{\quad} & B \\ v \downarrow & \beta & \downarrow 1 \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

with $\alpha\beta = 1_f^\bullet$ and $\beta\alpha = 1_v$. Then, f is the *horizontal adjoint* and v the *vertical* one. (In the general case, there is no reason of distinguishing 'left' and 'right', unit and counit; see the examples below).

Again, given f , these relations can be described by universal properties for (v, β) or (v, α)

- (a) for every cell $\beta': (v \xrightarrow{g} B)$ there is a unique cell $\lambda: (v \xrightarrow{g} A)$ such that $\beta' = \lambda\beta$,
- (b) for every cell $\alpha': (A \xrightarrow{f} v')$ there is a unique cell $\mu: (v \xrightarrow{g} v')$ such that $\alpha' = \alpha\mu$.

The vertical adjoint of f is determined up to a special isocell and will often be written as f^* ; vertical adjoints compose, contravariantly: $(gf)^*$ can be constructed as f^*g^* .

We say that \mathbb{A} *has vertical adjoints* if every horizontal arrow has a vertical adjoint. Plainly, this is the case for the weak double categories recalled in Section 1.

3.3. Proposition. *Let $f: A \rightarrow B$ have a vertical companion $u: A \rightarrow B$. Then $v: B \rightarrow A$ is vertical adjoint to f if and only if $u \dashv v$ in the bicategory $\mathbf{V}\mathbb{A}$ (of vertical arrows and special cells).*

Proof. Given four cells $\eta, \varepsilon, \alpha, \beta$ as above (in 3.1, 3.2), we have two special cells

$$\eta\otimes\alpha: 1^\bullet \rightarrow u\otimes v, \qquad \beta\otimes\varepsilon: u\otimes v \rightarrow 1^\bullet,$$

that are easily seen to satisfy the triangle identities in $\mathbf{V}\mathbb{A}$. The converse is similarly obvious. \square

4. Cubical adjunctions

A colax/lax cubical adjunction is now defined as an orthogonal adjunction in the strict double category $\mathbb{W}sc$.

4.1. Colax/lax adjunctions. An orthogonal adjunction (F, R) in $\mathbb{W}sc$ (3.2) gives a notion of *cubical adjunction* $(\eta, \varepsilon): F \dashv R$ between weak sc-categories, which occurs naturally in various situations, as already seen in Section 1.

The left adjoint $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$ is a *colax* sc-functor, the right adjoint $R: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$ is *lax*, and we have two $\mathbb{W}sc$ -cells η, ε

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{A} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{A} \\ F \downarrow & \eta & \parallel \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{\quad R} & \mathbb{A} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\quad R} & \mathbb{A} \\ \parallel & \varepsilon & \downarrow F \\ \mathbb{X} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{X} \end{array}$$

satisfying the triangle equalities $\eta \otimes \varepsilon = 1_F$ and $\varepsilon \eta = 1_{R^\bullet}$. (As in 2.3, the arrow of a colax sc-functor is marked with a dot *when displayed vertically*, in a diagram of $\mathbb{W}sc$.)

This general adjunction will be said to be of *colax/lax type*. We speak of a *pseudo/lax* (resp. a *colax/pseudo*) adjunction when the left (resp. right) adjoint is pseudo, and of a *pseudo* adjunction when both adjoints are pseudo (replacing *pseudo* with *strict* when appropriate).

From general properties (see 3.2), we already know that the left adjoint of a lax sc-functor R is determined up to isomorphism (a special invertible cell between vertical arrows in $\mathbb{W}sc$) and that left adjoints compose, contravariantly. Similarly for right adjoints.

As in 2.3, we may write the unit of the adjunction as $\eta: 1 \rightarrow RF$, by abuse of notation; *but one should recall that the coherence conditions of such a transformation work through the interplay of the comparison cells of F and R* . Similarly for the counit $\varepsilon: FR \rightarrow 1$. Therefore (as with double categories, in [GP2]), a *general colax/lax adjunction cannot be seen as an adjunction in some bicategory*; but we shall prove in the next section that this is possible in particular cases, a *pseudo/lax* or a *colax/pseudo* adjunction.

4.2. Description. To make the previous definition explicit, a *colax/lax adjunction* $(\eta, \varepsilon): F \dashv R$ between the weak sc-categories \mathbb{A}, \mathbb{X} consists of the following items.

(a) A *colax* sc-functor $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$, with comparison cells

$$\underline{F}(a): F(e_1 a), \rightarrow e_1(Fa), \quad \underline{F}(a, b): F(a +_1 b) \rightarrow Fa +_1 Fb.$$

(b) A *lax* sc-functor $R: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$, with comparison cells

$$\underline{R}(x): e_1(Rx) \rightarrow R(e_1 x), \quad \underline{R}(x, y): Rx +_1 Ry \rightarrow R(x +_1 y).$$

(c) An ordinary adjunction in every degree $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \eta_n: 1 \rightarrow R_n F_n: \mathbf{A}_n &\rightarrow \mathbf{A}_n, & \varepsilon_n: F_n R_n \rightarrow 1: \mathbf{B}_n &\rightarrow \mathbf{B}_n \\ \varepsilon_n F_n \cdot F_n \eta_n &= 1_{F_n}, & R_n \varepsilon_n \cdot \eta_n R_n &= 1_{R_n}. \end{aligned}$$

Explicitly this means that we are assigning:

- transversal maps $\eta a: a \rightarrow RFa$ in \mathbb{A} (for a in \mathbb{A}),
- transversal maps $\varepsilon x: FRx \rightarrow x$ in \mathbb{X} (for x in \mathbb{X}),

satisfying the naturality conditions (c1) and the triangle identities (c2), for $h: a \rightarrow b$ in \mathbb{A} and $f: x \rightarrow y$ in \mathbb{X}

$$(c1) \quad \eta b \cdot h = RFh \cdot \eta a, \quad \varepsilon y \cdot FRf = f \cdot \varepsilon x,$$

$$(c2) \quad \varepsilon Fa \cdot F\eta a = 1_{Fa}, \quad R\varepsilon x \cdot \eta Rx = 1_{Rx}.$$

(d) These families $\eta = (\eta_n)$ and $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ must respect faces and transpositions, and be coherent with the cubical operations (in terms of the comparison cells of F and R):

$$(1) \quad \eta(\partial_i^\alpha x) = \partial_i^\alpha(\eta x), \quad \eta(s_i x) = s_i(\eta x),$$

$$(2) \quad \varepsilon(\partial_i^\alpha x) = \partial_i^\alpha(\varepsilon x), \quad \varepsilon(s_i x) = s_i(\varepsilon x).$$

(d1') (coherence of η with identities) for a in \mathbb{A} :

$$(3) \quad R\underline{F}a \cdot \eta(e_1 a) = \underline{R}Fa \cdot e_1(\eta a) \quad (\eta(e_1 a) = e_1(\eta a), \text{ if } F \text{ and } R \text{ are unitary}),$$

(d1'') (coherence of ε with identities) for x in \mathbb{X} :

$$(4) \quad \varepsilon(e_1 x) \cdot \underline{F}Rx = e_1(\varepsilon x) \cdot \underline{R}Fx \quad (\varepsilon(e_1 x) = e_1(\varepsilon x), \text{ if } F \text{ and } R \text{ are unitary});$$

(d2') (coherence of η with concatenation) for $c = a +_1 b$ in \mathbb{A} :

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\eta c} & RFc \\ \eta a + \eta b \downarrow & & \downarrow \underline{R}F(a, b) \\ RFa + RFb & \xrightarrow[\underline{R}F(a, b)]{} & R(Fa + Fb) \end{array} \quad \begin{array}{l} RF(a, b) \cdot \eta c \\ = \underline{R}(Fa, Fb) \cdot (\eta a +_1 \eta b), \end{array}$$

(d2'') (coherence of ε with concatenation) for $z = x +_1 y$ in \mathbb{X} :

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} F(\mathbb{R}x + \mathbb{R}y) & \xrightarrow{\mathbb{F}\underline{\mathbb{R}}(x, y)} & \mathbb{F}\mathbb{R}z \\ \mathbb{E}(\mathbb{R}x, \mathbb{R}y) \downarrow & & \downarrow \varepsilon z \\ \mathbb{F}\mathbb{R}x + \mathbb{F}\mathbb{R}y & \xrightarrow{\varepsilon x + \varepsilon y} & z \end{array} \quad \begin{array}{l} \varepsilon z. \mathbb{F}\underline{\mathbb{R}}(x, y) \\ = (\varepsilon x +_1 \varepsilon y). \mathbb{E}(\mathbb{R}x, \mathbb{R}y). \end{array}$$

4.3. A remark. In this colax/lax adjunction, the comparison maps of \mathbb{R} , together with the unit η , determine the comparison maps of \mathbb{F} . In fact, the equation of (d1') says that the adjoint map of $\underline{\mathbb{F}}a$, that is $(\underline{\mathbb{F}}a)' = \mathbb{R}\underline{\mathbb{F}}a.\eta e_1 a$, must be equal to $\mathbb{R}\mathbb{F}a.e_1(\eta a)$. Similarly for $\underline{\mathbb{F}}(a, b)$, from (d2').

Dually, the comparison maps of \mathbb{F} and the counit ε determine the comparison maps of \mathbb{R} .

4.4. Theorem (Characterisation by transversal hom-sets). *An adjunction $(\eta, \varepsilon): \mathbb{F} \dashv \mathbb{R}$ can equivalently be given by a colax sc-functor $\mathbb{F}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$, a lax sc-functor $\mathbb{R}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$ and a sequence of functorial isomorphisms H_n*

$$(1) \quad H_n: \mathbf{X}_n(\mathbb{F}_n^-, \cdot) \rightarrow \mathbf{A}_n(-, \mathbb{R}_n): \mathbf{A}_n^{\text{op}} \times \mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{Set} \quad (n \geq 0),$$

$$H_n(a, x): \mathbf{X}_n(\mathbb{F}a, x) \rightarrow \mathbf{A}_n(a, \mathbb{R}x),$$

whose components $H_n(a, x)$ (that we often write as H) commute with faces and transpositions, and are coherent with the cubical operations (through the comparison cells of \mathbb{F} and \mathbb{R}), i.e. satisfy the following conditions:

$$(ad.1) \quad H_n(\partial_1^\alpha a, \partial_1^\alpha x) = \partial_1^\alpha(H_n(a, x)), \quad H_n(s_i a, s_i x) = s_i(H_n(a, x)),$$

$$(ad.2) \quad H(e_1(f), \underline{\mathbb{F}}(a)) = \underline{\mathbb{R}}(x).e_1(Hf) \quad (\text{for } f: \mathbb{F}a \rightarrow x \text{ in } \mathbb{X}),$$

$$\mathbb{F}e_1(a) \xrightarrow{\underline{\mathbb{F}}(a)} e_1(\mathbb{F}a) \xrightarrow{e_1(f)} e_1(x) \quad e_1(a) \xrightarrow{e_1(Hf)} e_1(\mathbb{R}x) \xrightarrow{\underline{\mathbb{R}}(x)} \mathbb{R}(x)$$

$$(ad.3) \quad H((f + g). \underline{\mathbb{F}}(a, b)) = \underline{\mathbb{R}}(x, y).(Hf + Hg) \quad (\text{for } f: \mathbb{F}a \rightarrow x, g: \mathbb{F}b \rightarrow y),$$

$$\mathbb{F}(a+b) \xrightarrow{\underline{\mathbb{F}}(a, b)} \mathbb{F}a + \mathbb{F}b \xrightarrow{f+g} x+y \quad a+b \xrightarrow{Hf+Hg} \mathbb{R}x + \mathbb{R}y \xrightarrow{\underline{\mathbb{R}}(x, y)} \mathbb{R}(x+y).$$

In this equivalence, $H_n(a, x)$ is defined by the unit η as

$$(2) \quad H_n(a, x)(f) = \mathbb{R}f.\eta a: a \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{F}a \rightarrow \mathbb{R}x \quad (\text{for } f: \mathbb{F}a \rightarrow x \text{ in } \mathbb{X}),$$

while the component $\eta_n: 1 \rightarrow \mathbb{R}_n \mathbb{F}_n: \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}_n$ of the unit is defined by H as

$$(3) \quad \eta_n(a) = H_n(a, \mathbb{F}a)(\text{id}\mathbb{F}a): a \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{F}(a) \quad (\text{for } a \text{ in } \mathbf{A}_n).$$

Proof. We have only to verify the equivalence of 4.2.1-6 with the conditions above.

To show, for instance, that 4.2.5 implies (ad.2), let $f: Fa \rightarrow x$ and $g: Fb \rightarrow y$ be 1-consecutive transversal maps in \mathbb{X} , and apply H as defined above, in (2):

$$\begin{aligned}
 (4) \quad H((f + g).F(a, b)) &= R(f + g).R\underline{F}(a, b).\eta(a + b) \\
 &= R(f + g).R(Fa, Fb).(\eta a + \eta b) && \text{(by 4.2.5)} \\
 &= \underline{R}(x, y).(Rf + Rg).(\eta a + \eta b) && \text{(by 2.1(i))} \\
 &= \underline{R}(x, y).(Hf + Hg) && \square
 \end{aligned}$$

4.5. Corollary (Characterisation by commas). *An adjunction amounts to an isomorphism of weak sc-categories $H: F\downarrow\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}\downarrow R$ over the product $\mathbb{A} \times \mathbb{X}$*

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} & H & \\ & \longrightarrow & \\ F\downarrow\mathbb{X} & & \mathbb{A}\downarrow R \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathbb{A} \times \mathbb{X} & \end{array}$$

Proof. It is a straightforward consequence of the previous theorem. \square

4.6. Theorem (Right adjoint by universal properties). *Given a colax sc-functor $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$, the existence and choice of a right adjoint lax sc-functor R amounts to a sequence of conditions and choices (rad.n):*

(rad.n) *for every n-cube x in \mathbb{X} there is a universal arrow $(Rx, \varepsilon_x: F(Rx) \rightarrow x)$ from the functor F_n to the object x (and we choose one),*

It is also assumed that these choices commute with faces and transpositions (which can be realised starting in degree zero and going up, one degree at a time).

Explicitly, the universal property means that, for each n-cube a in \mathbb{A} and transversal map $f: Fa \rightarrow x$ in \mathbb{X} there is a unique $h: a \rightarrow Rx$ such that $f = \varepsilon_x.Fh: Fa \rightarrow F(Rx) \rightarrow x$.

The comparison special transversal maps of R

$$(1) \quad \underline{R}(x): e_1(Rx) \rightarrow R(e_1x), \quad \underline{R}(x, y): Rx +_1 Ry \rightarrow R(x +_1 y),$$

are then provided by the universal property of ε , as the unique solution of the equations 4.2.4, 4.2.6, respectively; and R is pseudo if and only if all such cells are special isocells.

Proof. The conditions (rad.n) are plainly necessary.

Conversely, (rad.n) provides an ordinary adjunction $(\eta_n, \varepsilon_n): F_n \dashv R_n$ for the categories $\mathbb{A}_n, \mathbb{X}_n$, so that R, η and ε are correctly defined – as far as cubes,

transversal maps, faces, transpositions, transversal composition and transversal identities are concerned.

Now, we define the R-comparison maps \underline{R} as specified in the statement, so that the coherence properties of ε are satisfied (4.2.4, 4.2.6). One verifies easily, for such transversal maps, the axioms of naturality and coherence (2.1).

Finally, we have to prove that $\eta: 1 \rightarrow \underline{RF}$ satisfies the coherence property 4.2.5

$$(2) \quad \underline{RF}(a, b) \cdot \eta c = \underline{R}(Fa, Fb) \cdot (\eta a +_1 \eta b),$$

with respect to a concatenation $c = a +_1 b$ of n-cubes in \mathbb{A} (similarly one proves 4.2.3). By the universal property of ε , it will suffice to show that the composite $\varepsilon(Fa + Fa') \cdot F(-)$ takes the same value on both terms of (2). In fact, on the left-hand term we get $\underline{F}(a, b)$

$$(3) \quad \varepsilon(Fa + Fa') \cdot \underline{FRF}(a, b) \cdot F\eta c = \underline{F}(a, b) \cdot \varepsilon Fc \cdot F\eta c = \underline{F}(a, b);$$

but we get the same on the right-hand term of (2), using 4.2.6, the naturality of \underline{E} , the middle four interchange in \mathbb{X} and a triangle identity

$$(4) \quad \begin{aligned} \varepsilon(Fa + Fa') \cdot \underline{FR}(Fa, Fb) \cdot F(\eta a +_1 \eta b) &= (\varepsilon Fa + \varepsilon Fa') \cdot \underline{E}(RFa, RFb) \cdot F(\eta a +_1 \eta b) \\ &= (\varepsilon Fa + \varepsilon Fa') \cdot (F\eta a +_1 F\eta b) \cdot \underline{E}(a, b) = \underline{E}(a, b). \quad \square \end{aligned}$$

4.7. Theorem (Factorisation of adjunctions). *Let $F \dashv R$ be a colax/lax adjunction between \mathbb{A} and \mathbb{X} . Then, using the isomorphism of weak sc-categories $H: F\downarrow\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}\downarrow R$ (in Corollary 4.5), we can factor the adjunction as*

$$(1) \quad \mathbb{A} \begin{array}{c} \xleftarrow{F'} \\ \xrightarrow{P} \end{array} F\downarrow\mathbb{X} \begin{array}{c} \xleftarrow{H} \\ \xrightarrow{H^{-1}} \end{array} \mathbb{A}\downarrow R \begin{array}{c} \xleftarrow{Q} \\ \xrightarrow{R'} \end{array} \mathbb{X} \quad F = QHF', \quad R = PH^{-1}R'.$$

- a coreflective colax/strict adjunction $F' \dashv P$ (with unit $PF' = 1$),
- an isomorphism $H \dashv H^{-1}$,
- a reflective strict/lax adjunction $Q \dashv R'$ (with counit $QR' = 1$),

where the comma projections P and Q are strict sc-functors.

Proof. We define the lax sc-functor $R': \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}\downarrow R$ by the strong universal property of commas (2.6(a)), applied to $R: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$, $1: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ and $\alpha = 1_R^\bullet$ as in the diagram below

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{R} & \mathbb{A} \\ 1 \downarrow & \alpha & \downarrow 1 \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{T} \mathbb{X} \xrightarrow{R} & \mathbb{A} \end{array} = \begin{array}{ccccc} & & R & & \\ & & \xrightarrow{\quad} & & \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{-R'} \Rightarrow & 1 \Downarrow R & \xrightarrow{-P} \Rightarrow & \mathbb{A} \\ 1 \downarrow & \beta & Q \downarrow & \pi & \downarrow 1 \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{T} & \mathbb{X} & \xrightarrow{R} & \mathbb{A} \end{array}$$

$$R'(x) = (Rx, x; 1: Rx \rightarrow Rx),$$

$$\underline{R}'(f, g) = (\underline{R}(f, g), 1): (Rf + Rg, f + g; \underline{R}(f, g)) \rightarrow (R(f + g), f + g; 1).$$

Similarly, we define the colax sc-functor $F': \mathbb{A} \rightarrow F\downarrow\mathbb{X}$ by the dual result (2.6(b))

$$(3) \quad F'(a) = (a, Fa; 1: Fa \rightarrow Fa),$$

$$\underline{F}'(a, b) = (1, \underline{F}(a, b)): (a + b, F(a + b); 1) \rightarrow (a + b, Fa + Fb; \underline{F}(a, b)).$$

The coreflective adjunction $F' \dashv P$ is obvious

$$(4) \quad \eta'a = 1_a: a \rightarrow PF'a,$$

$$\varepsilon'(a, x; f: Fa \rightarrow x) = (1_a, f): (a, Fa; 1: Fa \rightarrow Fa) \rightarrow (a, x; f: Fa \rightarrow x),$$

as well as the reflective adjunction $Q \dashv R'$ and the factorisation above. \square

5. Cubical adjunctions and pseudo sc-functors

We consider now sc-adjunctions where the left or right adjoint is a pseudo sc-functor. Adjoint equivalences of weak sc-categories are introduced.

5.1. Comments. Let us recall, from 4.1, that a *pseudo/lax* sc-adjunction $F \dashv R$ is a colax/lax adjunction between weak sc-categories where the left adjoint F is pseudo.

Then, the comparison cells of F are horizontally invertible and the composites RF and FR are lax sc-functors; it follows (from definition 2.3) that the unit and counit are horizontal transformations of such functors. Therefore, a *pseudo/lax sc-adjunction* gives an adjunction in the 2-category $Lx\mathbf{Wsc}$ of weak sc-categories, lax sc-functors and transversal transformations (2.3); and we shall prove that these two facts are actually equivalent (Theorem 5.3).

Dually, a *colax/pseudo* sc-adjunction, where the right adjoint R is pseudo, will amount to an adjunction in the 2-category $Cx\mathbf{Wsc}$ of weak sc-categories, colax sc-functors and transversal transformations. Finally, a *pseudo* sc-adjunction, where

both F and R are pseudo, will be the same as an adjunction in the 2-category $\text{Ps}\mathbf{Wsc}$, whose arrows are the pseudo sc-functors.

5.2. Theorem (Companions in \mathbb{Wsc}). *A lax sc-functor R has an orthogonal companion F in \mathbb{Wsc} if and only if it is pseudo; then one can define $F = R_*$ as the colax sc-functor which coincides with R except for comparison maps transversally inverse to those of R .*

Proof. If R is pseudo, it is obvious that R_* , as defined above, is an orthogonal companion.

Conversely, suppose that $R: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$ (lax) has an orthogonal companion F (colax). There are thus two cells η, ε in \mathbb{Wsc}

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{X} \\ 1 \downarrow & \eta & \downarrow F \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{\quad R} & \mathbb{A} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\quad R} & \mathbb{A} \\ F \downarrow & \varepsilon & \downarrow 1 \\ \mathbb{A} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{A} \end{array}$$

which satisfy the identities $\eta\varepsilon = 1_{\mathbb{R}}$, $\eta\otimes\varepsilon = 1_F$.

This means two 'transformations' $\eta: F \rightarrow R$, $\varepsilon: R \rightarrow F$, as defined in 2.3; for every n -cube x in \mathbb{X} , we have two transversal maps ηx and εx in \mathbb{A}

$$(2) \quad \eta x: Fx \rightarrow Rx, \quad \varepsilon x: Rx \rightarrow Fx,$$

consistently with faces and transpositions. These maps are transversally inverse, because of the previous identities (cf. 2.3.4)

$$(3) \quad \eta x \cdot \varepsilon x = (\eta \mid \varepsilon)(x) = 1_{Rx}, \quad \varepsilon x \cdot \eta x = (\eta \otimes \varepsilon)(x) = 1_{Fx}.$$

Applying now the coherence condition (c3) (in 2.3), for the transformations η, ε and the concatenation $z = x +_1 y$ in \mathbb{X} , we find

$$(4) \quad \eta z = \underline{R}(x, y) \cdot (\eta x +_1 \eta y) \cdot \underline{F}(x, y): Fz \rightarrow Rz, \\ \varepsilon x +_1 \varepsilon y = \underline{F}(x, y) \cdot \varepsilon z \cdot \underline{R}(x, y): Rx +_1 Ry \rightarrow Fx +_1 Fy.$$

Since all the components of η and ε are transversally invertible, this proves that $\underline{R}(x, y)$ has a left inverse and a right inverse transversal map. Similarly for degeneracies.

Therefore R is pseudo (and F is transversally isomorphic to R_*). \square

5.3. Theorem. (a) (Pseudo/lax adjunctions) *Any adjunction $F \dashv R$ in the 2-category $\text{Lx}\mathbf{Wsc}$ has F pseudo and is a pseudo/lax sc-adjunction in the sense of 4.1 (or 5.1).*

(b) (Colax/pseudo adjunctions) *Any adjunction $F \dashv R$ in the 2-category $Cx\mathbb{W}sc$ has R pseudo and is a colax/pseudo sc-adjunction in the sense of 4.1 (or 5.1).*

More formally, (a) can be rewritten saying that, in the double category $\mathbb{W}sc$, if the horizontal arrow R has a 'horizontal left adjoint' F (within the horizontal 2-category $\mathbf{H}\mathbb{W}sc = Lx\mathbb{W}sc$), then it also has an orthogonal adjoint G (colax). (Then, applying 3.3, it would follow that F and G are companions, whence F is pseudo, by 5.2, and isomorphic to G .)

Proof. It suffices to prove (a); again, we only deal with the comparisons of a concatenation.

Let the lax structures of $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$ and $R: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$ be given by the following comparison maps, where $c = a +_1 b$ and $z = x +_1 y$

$$(1) \quad \lambda(a, b): Fa +_1 Fb \rightarrow F(a +_1 b), \quad \underline{R}(x, y): Rx +_1 Ry \rightarrow R(x +_1 y),$$

so that we have:

$$(2) \quad \eta c = R\lambda(a, b).\underline{R}(Fa, Fb).(\eta a +_1 \eta b):$$

$$c \rightarrow RFa +_1 RFb \rightarrow R(Fa +_1 Fb) \rightarrow RFc,$$

$$\varepsilon x +_1 \varepsilon y = \varepsilon z.F\underline{R}(x, y).\lambda(Rx, Ry):$$

$$FRx +_1 FRy \rightarrow F(Rx +_1 Ry) \rightarrow FR(x +_1 y) \rightarrow z.$$

We construct now a colax structure \underline{F} for F

$$(3) \quad \underline{F}(a, b) = \varepsilon(Fa +_1 Fb).F\underline{R}(Fa, Fb).F(\eta a +_1 \eta b):$$

$$Fc \rightarrow F(RFa +_1 RFb) \rightarrow FR(Fa +_1 Fb) \rightarrow Fa +_1 Fb,$$

and prove that $\underline{F}(a, b)$ and $\lambda(a, b)$ are transversally inverse:

$$(4) \quad \lambda(a, b).\underline{F}(a, b) = \lambda(a, b).\varepsilon(Fa +_1 Fb).F\underline{R}(Fa, Fb).F(\eta a +_1 \eta b)$$

$$= \varepsilon Fc.FR\lambda(a, b).F\underline{R}(Fa, Fb).F(\eta a +_1 \eta b) \quad (\text{by naturality of } \varepsilon, \text{ cf. 4.2}),$$

$$= \varepsilon F(c).F(\eta c) = 1_{Fc} \quad (\text{by (2) and a triangle identity});$$

$$(5) \quad \underline{F}(a, b).\lambda(a, b) = \varepsilon(Fa +_1 Fb).F\underline{R}(Fa, Fb).F(\eta a +_1 \eta b).\lambda(a, b)$$

$$= \varepsilon(Fa +_1 Fb).F\underline{R}(Fa, Fb).\lambda(RFa, RFb).(F\eta a +_1 F\eta b) \quad (\text{by naturality of } \lambda),$$

$$= (\varepsilon Fa +_1 \varepsilon Fb).(F\eta a +_1 F\eta b) \quad (\text{by (2)}),$$

$$= \varepsilon Fa.F\eta a +_1 \varepsilon Fb.F\eta b$$

$$(\text{by interchange of transversal composition and concatenation}),$$

$$= 1_{Fa} +_1 1_{Fb} = 1_{Fa +_1 Fb} \quad (\text{by a triangle identity and unitality of } \mathbb{X}). \quad \square$$

5.4. Equivalences of weak sc-categories. An *adjoint equivalence* between two weak sc-categories \mathbb{A} and \mathbb{X} will be a pseudo sc-adjunction $(\eta, \varepsilon): F \dashv R$ where the transversal transformations $\eta: 1_{\mathbb{A}} \rightarrow RF$ and $\varepsilon: FR \rightarrow 1_{\mathbb{X}}$ are invertible.

The following properties of an sc-functor $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$ will allow us to characterise this fact in the usual way, assuming the axiom of choice and under the mild restriction of *transversal invariance* (cf. 1.6):

- (a) We say that F is *faithful* if all the ordinary functors $F_n: \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$ (between the categories of n -cubes and their transversal maps) are: given two transversal maps $h, k: a \rightarrow b$ of \mathbb{A} between the same n -cubes, $F(h) = F(k)$ implies $h = k$.
- (b) Similarly, we say that F is *full* if all the ordinary functors $F_n: \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$ are: for every transversal map $f: F(a) \rightarrow F(b)$ in \mathbb{X} , there is a transversal map $h: a \rightarrow b$ in \mathbb{A} such that $F(h) = f$.
- (c) Finally, we say that F is *essentially surjective on cubes* if every F_n is essentially surjective on objects: for every n -cube x in \mathbb{X} , there is some n -cube a in \mathbb{A} and some invertible transversal map $f: F(a) \cong x$ in \mathbb{X} .

5.5. Theorem (Characterisations of equivalences). *Let $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$ be a pseudo sc-functor between two transversally invariant weak sc-categories (see 1.6). The following conditions are equivalent (under the axiom of choice):*

- (i) $F: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{X}$ is (i.e. belongs to) an adjoint equivalence of weak sc-categories;
- (ii) F is faithful, full and essentially surjective on cubes (cf. 5.4);
- (iii) every ordinary functor $F_n: \mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{X}_n$ (between the transversal categories of n -cubes) is an equivalence of categories.

Proof. By our previous definitions, in 5.4, conditions (ii) and (iii) are about the sequence of ordinary functors (F_n) and are well-known to be equivalent (assuming (AC)). Moreover, if F belongs to an adjoint equivalence $(\eta, \varepsilon): F \dashv R$, every F_n is obviously an equivalence of categories.

Conversely, let us assume that every F_n is an equivalence of ordinary categories and let us extend the pseudo sc-functor F to an adjoint equivalence, proceeding by induction on the degree $n \geq 0$.

First, F_0 is an equivalence of categories and we begin by constructing an adjoint quasi-inverse $R_0: \mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{A}_0$ in the usual way.

In other words, we choose for every 0-cube x some $R(x)$ and some isomorphism $\varepsilon_x: FR(x) \rightarrow x$; then a transversal map $g: x \rightarrow y$ in \mathbb{X} is sent to the unique \mathbb{A} -map $R(g): R(x) \rightarrow R(y)$ coherent with the previous choices (since F_0 is full and faithful). Finally the isomorphism $\eta_a: a \rightarrow RF(a)$ is determined by the triangle equations (for every 0-cube a of \mathbb{A}).

Assume now that the components of R , ε and η have been defined up to degree $n - 1 \geq 0$, and let us define them in degree n , taking care that the new choices be consistent with the previous ones.

First, for every n -cube $x: x^- \rightarrow_1 x^+$ in \mathbb{X} we want to choose some n -cube $R(x): R(x^-) \rightarrow_1 R(x^+)$ in \mathbb{A} and some n -isomorphism $\varepsilon x: FR(x) \cong x$ in \mathbb{X} . In fact, there exists (and we choose) some n -cube $a: a^- \rightarrow_1 a^+$ and some transversal isomorphism $i: F(a) \cong x$; but then $F(a^\alpha) \cong x^\alpha \cong FR(x^\alpha)$ and there are two transversal $(n-1)$ -isomorphisms $h^\alpha: R(x^\alpha) \cong a^\alpha$.

By transversal invariance in \mathbb{A} , we can choose a transversal n -isomorphism h as in the left square below, and we define $R(x) = \partial_1^- h$

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & h^- & & Fh^- & & \\ & & \longrightarrow & & \longrightarrow & & \\ Rx^- & \longrightarrow & a^- & & FRx^- & \longrightarrow & Fa^- & \longrightarrow & x^- & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Rx & \downarrow & h & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & h^+ & & Fh^+ & & & & & & & & \\ Rx^+ & \longrightarrow & a^+ & & FRx^+ & \longrightarrow & Fa^+ & \longrightarrow & x & & & & \end{array}$$

Then we define $\varepsilon x = i.Fh: FR(x) \cong x$, as in the right diagram above.

Now, since F_n is full and faithful, a transversal n -map $f: x \rightarrow y$ in \mathbb{X} is sent to the unique \mathbb{A} -map $R(f): R(x) \rightarrow R(y)$ satisfying the condition $\varepsilon y.F(Rf) = f.\varepsilon x$ (naturality of ε).

Again, the n -isomorphism $\eta a: a \rightarrow RF(a)$ is determined by the triangle equations, for every n -cube a of \mathbb{A} .

The comparison n -maps \underline{R} are uniquely determined by their coherence conditions (4.2), for an $(n-1)$ -cube x and a 1-concatenation of n -cubes $z = x +_1 y$ in \mathbb{X}

$$(2) \quad \varepsilon e_1 x.FRx = e_1(\varepsilon x).FRx, \quad \varepsilon z.FR(x, y) = (\varepsilon x +_1 \varepsilon y).F(Rx, Ry).$$

The construction of R , ε and η is now achieved.

One ends by proving that R is indeed a pseudo sc-functor, for a cube a and a 1-concatenation $c = a +_1 b$ in \mathbb{A}

$$(3) \quad RFa.\eta e_1 a = RFa.e_1(\eta a), \quad RF(a, b).\eta c = R(Fa, Fb).(\eta a +_1 \eta b),$$

and that ε, η are coherent with the comparison cells of F and R . \square

6. Limits and adjoints for weak sc-categories

We recall the definition of cones and limits from [G5], Section 3, and prove that right adjoints preserve the limits of lax sc-functors.

All weak sc-categories are assumed to be *pre-unitary*, in the sense that all the unitarity comparisons $e_1(x) +_1 e_1(x) \rightarrow e_1(x)$ are identities.

6.1. The shift. A crucial fact in the theory of weak *symmetric* cubical categories (inherited from *symmetric* cubical sets, see [G4]) is the presence of *one* strict double functor *of paths* (or *cocylinder*)

$$(1) \quad P: \mathbf{Wsc} \rightarrow \mathbf{Wsc},$$

$$P\mathbb{A} = ((\mathbb{A}_{n+1}), (\partial_{i+1}^\alpha), (e_{i+1}), (s_{i+1}), (+_{i+1}), \lambda_2, \rho_2, \kappa_2, \chi_2),$$

that shifts down all components, discarding the structure of index 1. (On the other hand, cubical structures *without symmetries* have a *left* and a *right* path functor [G4], which makes things complicated.) Plainly, P preserves cubical adjunctions.

The faces and degeneracies of index 1 are then used to build three transversal transformations, the *faces* and *degeneracy* of P

$$(2) \quad \partial^\alpha = \partial_1^\alpha: P\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}, \quad e = e_1: \mathbb{A} \rightarrow P\mathbb{A}.$$

Here, ∂^α and e are strict sc-functors: $\partial_1^\alpha \partial_1^\alpha = \partial_1^\alpha \partial_{i+1}^\alpha$, etc.

6.2. Cones. Let \mathbb{X} and \mathbb{A} be weak sc-categories, and let \mathbb{X} be small. Consider the *diagonal* functor (of ordinary categories)

$$(1) \quad D = D_{\mathbb{A}}: \text{tv}_0\mathbb{A} \rightarrow \text{Lx}\mathbf{Wsc}(\mathbb{X}, \mathbb{A}),$$

where $\text{tv}_0\mathbb{A}$ is the ordinary category of 0-cubes (objects) of \mathbb{A} and their transversal maps.

D takes each 0-object a to the constant sc-functor $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$, defined as follows on n -objects x and n -maps f of \mathbb{X}

$$(2) \quad Da: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}, \quad Da(x) = e^n(a), \quad Da(f) = \text{id}(e^n a) \quad (x, f \text{ in } \text{tv}_n\mathbb{X}).$$

It also takes every 0-map $t: a \rightarrow b$ in \mathbb{A} to the diagonal transversal transformation

$$(3) \quad Dt: Da \rightarrow Db: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}, \quad (Dt)(x) = e^n(t): e^n(a) \rightarrow e^n(b) \quad (x \text{ in } \text{tv}_n\mathbb{X}).$$

Note that $Da: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$ is strict because \mathbb{A} is assumed to be pre-unitary.

Let $T: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$ be a lax sc-functor (2.1), with comparison special cells

$$\underline{T}(x): e_1(Tx) \rightarrow T(e_1(x)), \quad \underline{T}(x, y): Tx +_1 Ty \rightarrow T(x +_1 y).$$

A (*transversal*) *sc-cone* for T is a pair $(a, h: Da \rightarrow T)$ consisting of an object a of \mathbb{A} . (the *vertex* of the cone) and a transversal transformation

$$h: Da \rightarrow T: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}.$$

In other words, (a, h) is an object of the ordinary comma category $(D \downarrow T)$, where T is viewed as an object of the category $Lx\mathbf{Wsc}(\mathbb{X}, \mathbb{A})$.

By definition (2.2), this amounts to assigning the following data:

- a transversal n -map $hx: e^n(a) \rightarrow Tx$ of \mathbb{A} , for every n -object x in \mathbb{X} ,

subject to the following axioms:

$$(scc.1) \quad Tf.hx = hy \quad (\text{for } f: x \rightarrow y \text{ in } \mathbb{X});$$

$$(scc.2) \quad h \text{ commutes with faces and transpositions and } h(e_1(x)) = \mathbb{I}(x).(e_1(h(x)));$$

$$(scc.3) \quad h(x +_1 y) = \mathbb{I}(x, y).(hx +_1 hy): e^n(a) \rightarrow T(x +_1 y) \quad (\partial_1^+ x = \partial_1^- y),$$

$$(4) \quad \begin{array}{ccc} e^{n+1}(a) & \xrightarrow{e_1(hx)} & e_1(Tx) & e^n(a) +_1 e^n(a) & \xrightarrow{hx +_1 hy} & Tx +_1 Ty \\ \downarrow 1 & & \mathbb{I}(x) \downarrow & \downarrow 1 & & \mathbb{I}(x, y) \downarrow \\ e^{n+1}(a) & \xrightarrow{h(e_1x)} & T(e_1(x)) & e^n(a) & \xrightarrow{h(x +_1 y)} & T(x +_1 y) \end{array}$$

6.3. Definition (Limits and cubical limits). A (*transversal*) *limit* $\lim(T) = (a, h)$ of the lax *sc*-functor $T \in Lx\mathbf{Wsc}(\mathbb{X}, \mathbb{A})$ is a universal cone $(a, h: Da \rightarrow T)$. In other words:

(tl.0) a is an object of \mathbb{A} and $h: Da \rightarrow T: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$, is a transversal transformation of lax *sc*-functors;

(tl.1) for every cone $(a', h': Da' \rightarrow T)$ there is precisely one 0-map $t: a' \rightarrow a$ in \mathbb{A} such that $h.Dt = h'$.

We say that \mathbb{A} has *limits of degree zero* on \mathbb{X} if all these limits exist. We say that \mathbb{A} has *limits of all degrees* on \mathbb{X} if all *sc*-categories $P^n\mathbb{A}$ satisfy this condition, for $n \geq 0$.

We say that \mathbb{A} has *symmetric cubical limits* on \mathbb{X} , or *lax functorial *sc*-limits* on \mathbb{X} , if:

(i) \mathbb{A} has limits of all degrees on \mathbb{X} ;

(ii) the limit-functors $\lim_n: Lx\mathbf{Wsc}(\mathbb{X}, P^n\mathbb{A}) \rightarrow tv_n\mathbb{A}$ commute with faces, degeneracies and transpositions.

Then the universal property gives a unitary lax sc-functor

$$(1) \quad \lim = (\lim_n)_{n \geq 0}: \mathbb{LxWsc}(\mathbb{X}, \mathbb{P}^* \mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{A}.$$

We say that \mathbb{A} has *pseudo functorial sc-limits on \mathbb{X}* if this lax sc-functor happens to be a pseudo sc-functor.

Without symmetries, things would become complicated. While the condition of having limits of degree zero can be directly extended to cubical categories, *the conditions (i), (ii) should (perhaps) be rewritten replacing each \mathbb{P}^n with the family of all path functors of degree n , namely $\mathbb{P}_i^n = \mathbb{P}^{n-i} \cdot \mathbb{S} \mathbb{P}^i \mathbb{S}$ for $i = 0, \dots, n$ (cf. [G4], 1.8), where \mathbb{S} is the transposer endofunctor of cubical structures (that reverses the order of faces). We will not deal with such a situation*

6.4. Theorem (Preservation of limits). *Let $(\eta, \varepsilon): \mathbb{F} \dashv \mathbb{R}$ be a colax/lax cubical adjunction, where both functors are unitary.*

Then $\mathbb{R}: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ preserves all (the existing) transversal limits of lax sc-functors $\mathbb{T}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{B}$.

Proof. Let $(b, k: D_{\mathbb{B}}(b) \rightarrow \mathbb{T})$ be a limit of \mathbb{T} in \mathbb{B} . We want to prove that the pair

(1) $(\mathbb{R}b, \mathbb{R}k: \mathbb{R}D_{\mathbb{B}}(b) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{T})$,
is a limit of $\mathbb{R}\mathbb{T}$ in \mathbb{A} . First, since \mathbb{R} is unitary, $\mathbb{R}D_{\mathbb{B}}(b) = D_{\mathbb{A}}(\mathbb{R}b)$, so that the pair (1) is indeed a cone of the lax sc-functors $\mathbb{R}\mathbb{T}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{A}$.

Moreover, given an n -cone $(a, h': D_{\mathbb{A}}(a) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{T})$ of $\mathbb{R}\mathbb{T}$, with transversal components $h'_x: e^n(a) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{T}x$, for every n -object x in \mathbb{X} , the adjunction gives a family $k'_x: \mathbb{F}e^n(a) \rightarrow \mathbb{T}x$, that is a cone $(\mathbb{F}a, k': D_{\mathbb{B}}(\mathbb{F}a) \rightarrow \mathbb{T})$ in \mathbb{B} . Therefore there is precisely one transversal map $g: \mathbb{F}a \rightarrow b$ in \mathbb{B} such that $k \cdot Dg = k'$. This means precisely one transversal map $f: a \rightarrow \mathbb{R}b$ in \mathbb{A} such that $\mathbb{R}k \cdot Df = h'$.

The proof can be rewritten using double cells of the double category \mathbb{Wsc} . Given h' , the pasting of the left diagram can be uniquely factorised as at the right

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\quad \mathbb{P} \quad} & \mathbb{1} & & \mathbb{1} \\ \downarrow \mathbb{1} & \swarrow h' & \downarrow a & & \downarrow a \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{\quad \mathbb{T} \quad} & \mathbb{B} & \xrightarrow{\quad \mathbb{R} \quad} & \mathbb{A} \\ \parallel & \swarrow & \parallel & \swarrow \varepsilon & \downarrow \mathbb{F} \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{\quad \mathbb{T} \quad} & \mathbb{B} & \xrightarrow{\quad \quad} & \mathbb{B} \end{array} = \begin{array}{ccccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\quad \mathbb{P} \quad} & \mathbb{1} & \xrightarrow{\quad \quad} & \mathbb{1} \\ \parallel & \swarrow k & \downarrow b & \swarrow g & \downarrow a \\ \mathbb{X} & \xrightarrow{\quad \mathbb{T} \quad} & \mathbb{B} & \xrightarrow{\quad \quad} & \mathbb{B} \end{array}$$

Now, the adjoint transversal n -map $f = \text{Rg}.\eta_a: a \rightarrow \text{RF}a \rightarrow \text{Re}^n(\mathbb{B})$ is the unique transversal map of \mathbb{A} such that $h = (\text{Rk} \mid f): aQ \rightarrow \text{RT}$ (as one sees pasting the \mathbb{W}^{sc} -cell $\eta: (\text{F}_R^1 \mid 1)$ at the right of both diagrams above). \square

6.5. Remark. Since the n -shift double functor $P^n: \mathbb{W}^{\text{sc}} \rightarrow \mathbb{W}^{\text{sc}}$ preserves cubical adjunctions, it follows that, if the weak sc-category \mathbb{B} has *symmetric cubical limits on \mathbb{X}* , these are preserved by the right adjoint $R: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{A}$ (letting $P^n R$ act on the cones of $P^n \mathbb{B}$, of course).

References

- [BE] A. Bastiani - C. Ehresmann, *Multiple functors I. Limits relative to double categories*, Cah. Topol. Géom. Différ. **15** (1974), 215-292.
- [BM] R. Brown - G. Mosa, *Double categories, 2-categories, thin structures and connections*, Theory Appl. Categ. **5** (1999), 163-175.
- [BMM] R. Bruni - J. Meseguer - U. Montanari, *Symmetric monoidal and Cartesian double categories as a semantic framework for tile logic*, Math. Structures Comput. Sci. **12** (2002), 53-90.
- [Da] R. Dawson, *A forbidden-suborder characterization of binarily-composable diagrams in double categories*, Theory Appl. Categ. **1** (1995), 146-155.
- [DP1] R. Dawson - R. Paré, *General associativity and general composition for double categories*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **34** (1993), 57-79.
- [DP2] R. Dawson - R. Paré, *What is a free double category like?*, J. Pure Appl. Algebra **168** (2002), 19-34.
- [DPR1] R. Dawson - R. Paré - D.A. Pronk, *Free extensions of double categories*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **45** (2004), 35-80.
- [DPR2] R. Dawson - R. Paré - D.A. Pronk, *The span construction*, Theory Appl. Categ. **24** (2010), 302-377.
- [E1] C. Ehresmann, *Catégories structurées*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **80** (1963), 349-5.
- [E2] C. Ehresmann, *Catégories et structures*, Dunod, Paris 1965.
- [Fi] T.M. Fiore, *Pseudo algebras and pseudo double categories*, J. Homotopy Relat. Struct. **2** (2007), 119-170.
- [FGK] T.M. Fiore - N. Gambino - J. Kock, *Monads in double categories*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 1174-1197.

- [G1] M. Grandis, *Higher cospans and weak cubical categories (Cospans in Algebraic Topology, I)*, Theory Appl. Categ. **18** (2007), No. 12, 321-347.
- [G2] M. Grandis, *Collared cospans, cohomotopy and TQFT (Cospans in Algebraic Topology, II)*, Theory Appl. Categ. **18** (2007), No. 19, 602-630.
- [G3] M. Grandis, *Cubical cospans and higher cobordisms (Cospans in Algebraic Topology, III)*, J. Homotopy Relat. Struct. **3** (2008), 273-308.
- [G4] M. Grandis, *The role of symmetries in cubical sets and cubical categories (On weak cubical categories, I)*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **50** (2009), 102-143.
- [G5] M. Grandis, *Limits in symmetric cubical categories (On weak cubical categories, II)*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **50** (2009), 242-272.
- [GP1] M. Grandis - R. Paré, *Limits in double categories*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **40** (1999), 162-220.
- [GP2] M. Grandis - R. Paré, *Adjoints for double categories*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **45** (2004), 193-240.
- [GP3] M. Grandis - R. Paré, *Kan extensions in double categories (On weak double categories, III)*, Theory Appl. Categ. **20** (2008), No. 8, 152-185.
- [GP4] M. Grandis - R. Paré, *Lax Kan extensions for double categories (On weak double categories, IV)*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **48** (2007), 163-199.
- [GP5] M. Grandis - R. Paré, *From cubical to globular higher categories*, in: Liber Amicorum en l'honneur de M.me A.C. Ehresmann, Diagrammes **67-68** suppl. (2012), 117-148.
- Available at: <http://www.dima.unige.it/~grandis/CGLb.pdf>
- [Lw] F.W. Lawvere, *Metric spaces, generalized logic and closed categories*, Rend. Sem. Mat. Fis. Univ. Milano **43** (1974), 135-166. Republished in: Reprints Theory Appl. Categ. **1** (2002), 1-37 <http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/1/tr1.pdf>
- [P1] R. Paré, *Simply connected limits*, Canad. J. Math. **42** (1990), 731-746.
- [P2] R. Paré, *Yoneda theory for double categories*, Theory Appl. Categ. **25** (2011), 436-489.

Dipartimento di Matematica
 Università di Genova
 via Dodecaneso 35
 16146 Genova, Italy
grandis@dima.unige.it

**ESPACES CONNECTIFS : REPRESENTATIONS,
FEUILLETAGES, ORDRES ET DIFFEOLOGIES**

par Stéphane DUGOWSON

Dédié à René GUITART, en toute amitié

Abstract. This article is a continuation of my former article “On Connectivity Spaces” [8]. After some brief historical references relating to the subject, separation spaces and then adjoint notions of connective representation and connective foliation are developed. The connectivity order previously defined only in the finite case is now generalised to all connectivity spaces, and so to connective foliations. Finally, we start the study of some functorial relations between connectivity and diffeological spaces, and we give a characterization of diffeologisable connectivity spaces.

Résumé. Poursuivant l'étude présentée dans notre article « On connectivity Spaces » [8], nous développons ici, après quelques rapides repères historiques, la notion d'espace de séparation et les notions adjointes de représentation et de feuilletage connectifs. Nous généralisons en outre la notion d'ordre connectif au cas infini, ainsi qu'aux feuilletages connectifs. Finalement, nous étudions certaines relations fonctorielles entre structures connectives et structures difféologiques, caractérisant en particulier les espaces connectifs difféologisables.

Keywords. Connectivity. Links. Borromean. Foliation. Connective representation. Connectivity order. Diffeology

Mathematics Subject Classification (2010). 54A05. 54B30. 57M25. 57R30. 58A99.

Les propriétés connectives du *nœud borroméen* — trois courbes globalement entrelacées mais libres deux à deux — président, dès sa naissance en 1892 avec l'article fondateur du mathématicien allemand Hermann Brunn [3], à l'histoire des espaces connectifs. Peu connu, le résultat de Hermann Brunn concernant la possibilité de représenter par entrelacs toute structure connective finie devra attendre les travaux du Suisse Hans Debrunner [4, 5] dans les années 1960, puis ceux, vingt ans plus

tard, du Japonais Taizo Kanenobu [12, 13] pour être rigoureusement établi, constituant ce que j'ai nommé le théorème de Brunn-Debrunner-Kanenobu¹. Il faut dire que la notion d'espace connectif elle-même n'aura clairement été dégagée en tant que telle qu'au début des années 1980, par le mathématicien allemand Reinhard Börger [1, 2] qui définit la catégorie des espaces connectifs² et en donne les premières propriétés, en particulier le fait qu'il s'agit d'une catégorie complète et co-complète, mais sans faire le lien avec les travaux antérieurs de Brunn et Debrunner. Il semble, c'est du moins notre hypothèse, que l'intérêt de Börger pour cette catégorie ait été freiné par le constat qu'elle n'est pas cartésienne fermée³. Par ailleurs, il se pourrait qu'en nommant « entrelacs brunniens » les entrelacs effectivement utilisés par Brunn dans sa construction, mais en oubliant de signaler cette construction elle-même, Rolfsen ait, dans son ouvrage publié en 1976 sur la théorie des nœuds [17], rendu à Brunn un hommage un peu paradoxal, en ce sens que le souvenir des briques aura pu contribuer à l'oubli de la bâtisse. En 1988, dans le cadre de travaux sur l'analyse des images et la morphologie mathématique, les Français Georges Matheron et Jean Serra [14, 15], ignorant les travaux antérieurs, posent une définition des espaces connectifs identique à celle de Börger, mais sans les morphismes. En 1998, Jean Serra élargit cette définition à celle de « connections »⁴ sur un treillis [18, 19], la définition classique correspondant au cas où le treillis considéré est celui des parties d'un ensemble. Nos propres travaux sur le sujet⁵ ont débuté en 2002, à l'occasion d'une réflexion sur la topologie du jeu de go. L'espace borroméen — constitué de trois points globalement connectés sans qu'ils le soient deux à deux, de sorte que sa structure connective est précisément celle du nœud borroméen, raison évidente de cette dénomination — y est l'un des tous premiers exemples que nous considérons, remarquable pour ne pouvoir être défini ni à partir d'une structure topologique sur l'ensemble des trois points, ni à partir de celle d'un graphe à trois som-

1. Voir [8].

2. Plus précisément, Börger considère ce que nous appelons les espaces connectifs intègres, dans lesquels chaque point est nécessairement connexe.

3. C'est par contre une catégorie monoïdale fermée, voir [8].

4. Notion qui, *a priori*, n'a rien à voir avec les notions de connexion en géométrie différentielle.

5. Voir en particulier [6, 7, 8, 10].

mets. Notons au passage que la notion de *connective spaces*, introduite en 2006 par Joseph Muscat et David Buhagiar[16] de façon également indépendante des contributions antérieures, plus proche des espaces topologiques et de ce fait plus restreinte que celle de Börger, est de notre point de vue trop restrictive car elle ne permet pas de rendre compte de la structure connective des entrelacs⁶.

Grâce aux espaces de séparation que nous introduisons dans la section 1, la représentation par entrelacs d'un espace connectif fini s'interprète comme un cas particulier de la notion de représentation d'un espace connectif dans un autre (section 2), généralisation que la considération des espaces connectifs infinis nous a conduit à développer afin de clarifier dans ce cas l'idée même de représentation. Or, les premiers exemples de représentation d'espaces connectifs infinis (fibration de Hopf, dynamiques de Lorenz, de Ghrist, etc.⁷) suggèrent fortement la nature dynamique de tels objets. L'idée de dynamique renvoyant, d'un point de vue topologique ou géométrique, à celle de feuilletage, cela nous a conduit à développer la notion de feuilletage connectif, objet de la section 3 du présent article. Les notions de feuilletages connectifs et de représentations connectives se révèlent alors, sous certaines conditions, adjointes l'une de l'autre. Une telle adjonction est traitée en section 4. L'étude des feuilletages connectifs annonçant d'autres travaux portant plus spécifiquement sur l'aspect connectif des systèmes dynamiques⁸, il est devenu nécessaire d'élargir la notion d'ordre connectif, introduite dans [8] dans le cas des espaces finis, aux espaces connectifs infinis. C'est ce que nous faisons dans la section 5, où nous définissons en particulier l'ordre connectif d'un feuilletage connectif.

Enfin, un peu à part, la section 6, qui aborde la question des relations fonctorielles entre espaces connectifs et espaces difféologiques, trouve néanmoins à s'articuler de plusieurs façons avec les thèmes précédents. En particulier, le fait que la théorie des espaces connectifs tende à s'orienter d'elle-même vers des notions dynamiques constitue une incitation à explorer les relations entre espaces connectifs et espaces difféo-

6. Voir plus loin la remarque 2.

7. Voir [10], dont [9] constitue une version antérieure disponible en ligne.

8. Voir [10] pour une première introduction aux dynamiques catégoriques connectives.

logiques, dans la mesure où, parce qu'elle généralise et unifie diverses constructions liées à la géométrie différentielle, la difféologie devrait jouer un rôle croissant dans l'étude de diverses classes de systèmes dynamiques. Il pourrait en particulier être intéressant d'explorer le thème des feuilletages en adoptant un double point de vue connectif et difféologique. Nous ne le ferons pas ici, nous contentant d'une question plus élémentaire, celle de préciser, en mettant à jour les foncteurs en jeu dans ces questions, les conditions sous lesquelles un espace connectif est « difféologisable », au sens où sa structure peut être associée à une structure difféologique sur le même ensemble de points, à l'exemple de la structure borroméenne, par laquelle nous avons vu qu'aura commencé l'exploration connective, et qui se rencontre aussi bien en difféologie.

Notations et rappels Conformément aux définitions et aux notations introduites dans notre article [8], rappelons ou précisons notamment les points suivants :

- si f est une application $A \rightarrow B$, nous notons f ou $f^{\mathcal{P}}$ l'application de $\mathcal{P}A$ dans $\mathcal{P}B$ définie pour toute partie U de A par $f^{\mathcal{P}}(U) = \{f(u), u \in U\}$,
- si ρ est une application $A \rightarrow \mathcal{P}B$, nous notons ${}^{\mu}\rho$ l'application de $\mathcal{P}A$ dans $\mathcal{P}B$ définie pour toute partie U de A par ${}^{\mu}\rho(U) = \bigcup_{u \in U} \rho(u)$,
- pour toute catégorie \mathbf{C} , nous désignons par $\overrightarrow{\mathbf{C}}$ la classe de ses flèches, et par $\dot{\mathbf{C}}$ ou \mathbf{C}_0 la classe de ses objets.
- un espace connectif X consiste en un couple noté $X = (|X|, \kappa(X))$, $|X|$ étant le support de l'espace, et $\kappa(X)$ sa structure,
- on note \mathbf{Cnc} la catégorie des espaces connectifs, et \mathbf{Cnct} celle des espaces connectifs intègres,
- l'ensemble des structures connectives définies sur un ensemble constitue un treillis complet pour l'inclusion,
- sur toute partie du support d'un espace connectif se trouve définie une structure connective dite *induite*, qui est la moins fine faisant de l'injection canonique un morphisme connectif,
- la structure connective engendrée par un ensemble de parties \mathcal{A} d'un ensemble donné est notée $[\mathcal{A}]_0$, tandis que la structure connective intègre engendrée par \mathcal{A} est notée $[\mathcal{A}]_1$ ou simplement $[\mathcal{A}]$,

- étant donné un espace connectif X , nous dirons en outre qu'un ensemble \mathcal{A} de parties de $|X|$ constitue un système de générateurs de X (ou de sa structure $\kappa(X)$) si $[\mathcal{A}]_0 = \kappa(X)$,
- $U_T : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Cnct}$ désigne le « foncteur d'oubli » de la catégorie des espaces topologiques dans la catégorie des espaces connectifs intègres.

1 Espaces de séparation

Les espaces de séparation sont une manière de présenter les espaces connectifs intègres. Ils nous permettront d'interpréter les représentations par entrelacs comme des représentations connectives particulières (voir l'exemple 3). Dans la suite, E désigne un ensemble quelconque.

Définition 1. *On appelle dispositif de séparation sur E tout ensemble \mathcal{S} de paires $\{S, T\}$ de parties non vides et disjointes de E . Les paires $\{S, T\}$ d'un tel dispositif sont appelés paires séparatrices.*

Définition 2. *Soit \mathcal{S} un dispositif de séparation sur E . On dit qu'une partie A de E est séparée par \mathcal{S} , et l'on note $(\mathcal{S} : A)$, s'il existe dans \mathcal{S} une paire séparatrice $\{S, T\}$ qui recouvre A et dont chaque membre rencontre A : $A \subset S \cup T$, $A \cap S \neq \emptyset$ et $A \cap T \neq \emptyset$.*

Remarque 1. Pour tout groupe G de permutations de E et tout dispositif de séparation \mathcal{S} sur E , on a alors $(G\mathcal{S} : A) \Leftrightarrow \exists \varphi \in G$ tel que $(\mathcal{S} : \varphi(A))$, où $G\mathcal{S}$ est le dispositif de séparation défini par $G\mathcal{S} = \{\{\varphi(S), \varphi(T)\}, \varphi \in G, (S, T) \in \mathcal{S}\}$.

Définition 3. *Soit \mathcal{S} un dispositif de séparation sur E . L'ensemble $\kappa(\mathcal{S}) = \{K \in \mathcal{P}(E), \neg(\mathcal{S} : K)\}$ constitue une structure connective intègre sur E . On note $E[\mathcal{S}]$ l'espace connectif défini sur E par le dispositif de séparation \mathcal{S} , de sorte que l'on a : $|E[\mathcal{S}]| = E$ et $\kappa(E[\mathcal{S}]) = \kappa(\mathcal{S})$.*

Théorème 1. *Tout espace connectif intègre peut être défini par un dispositif de séparation.*

Preuve. On forme un dispositif de séparation adéquat en prenant tous les couples de parties disjointes non vides (A, B) telles que toute compo-

sante connexe de $A \cup B$ soit contenue soit dans A , soit dans B .

□

Exemple 1 (Foncteur V_T). On définit un foncteur $V_T : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Cnct}$ en posant, pour tout $X = (|X|, \mathcal{T}_X) \in \mathbf{Top}_0$: $V_T(X) = |X|[\mathcal{S}_X]$, où $\mathcal{S}_X = \{\{S, T\} \in (\mathcal{T} \setminus \emptyset)^2, S \cap T = \emptyset\}$, et pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$, $V_T(f) = f$. En effet, une application continue transforme nécessairement une partie non séparable par ouverts disjoints de l'espace de départ en partie non séparable par ouverts disjoints de l'espace d'arrivée. Remarquons que toute partie connexe au sens topologique est nécessairement connexe au sens de cette nouvelle structure connective. Autrement dit, le foncteur U_T est connectivement plus fin que le foncteur V_T . Par exemple, pour $|X| = \{1, 2, 3\}$ admettant pour ouverts non triviaux $\{1, 2\}$ et $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ est non connexe dans $U_T(X)$ mais connexe dans $V_T(X)$. Par contre, dans un espace *métrique* X , la connexité d'une partie est équivalente à l'impossibilité de la séparer par des ouverts *disjoints* : $U_T(X) = V_T(X)$ (nous en donnons une preuve dans [10], page 18).

Une classe d'espaces de séparation importants est constituée des espaces affines réels : on munit l'espace affine réel E_n de dimension n d'une structure connective notée σ_n ou σ , et appelée la *structure connective usuelle de séparation* sur E_n , en prenant pour dispositif de séparation $G\mathcal{S}$ avec G le groupe des homéomorphismes de l'espace topologique $E_n \simeq \mathbf{R}^n$ et pour \mathcal{S} le singleton $\{\{S, T\}\}$, avec S et T les deux demi-espaces ouverts définis par un hyperplan quelconque.

Définition 4. *L'espace connectif (E_n, σ) est appelé l'espace usuel de séparation n -dimensionnel.*

Proposition 2. *La structure connective de l'espace usuel de séparation (E_n, σ) n'est pas celle d'un espace topologique.*

Preuve. On vérifie facilement que dans tout espace topologique, si A et B sont deux parties connexes non vides et que x est un point de l'espace tel que $x \notin A \cup B$ et que $A \cup \{x\}$ et $B \cup \{x\}$ soient non connexes, alors $A \cup B \cup \{x\}$ est encore non connexe. Or, dans (E_n, σ) , si l'on prend par exemple pour A une demi-sphère, pour B la demi-sphère

complémentaire et pour x le centre de la sphère $A \cup B$, la propriété précédente est contredite.

□

À noter que l'espace connectif (E_n, σ) est moins fin (il a plus de connexes) que l'espace connectif (E_n, τ) associé par U_T à l'espace topologique usuel E_n .

On définit de même la sphère (réelle) usuelle de séparation n -dimensionnelle (S^n, σ) en prenant pour dispositif de séparation $G\mathcal{S}$ avec G le groupe des homéomorphismes de l'espace topologique S^n et pour \mathcal{S} le singleton $\{\{S, T\}\}$, avec S et T les deux ouverts séparés par une sphère $(n - 1)$ -dimensionnelle plongée dans S^n .

Remarque 2. La propriété des espaces topologiques utilisée dans la preuve ci-dessus pour montrer que les espaces (E_n, σ) ne sont pas topologiques fait partie de celles incorporées par Muscat et Buhagiar dans leur définition des *connective spaces* [16]. Pour cette raison, les espaces de Muscat et Buhagiar ne permettent pas de rendre compte de la structure connective des entrelacs (voir ci-dessous l'exemple 3).

2 Représentations connectives

Le théorème de Brunn-Debrunner-Kanenobu (voir [8, 10]) concerne la représentation *par entrelacs* des espaces connectifs finis. Le point de vue que nous soutenons ici est que la représentation d'un espace connectif fini par entrelacs doit être comprise comme un cas particulier de la notion générale de représentation d'un espace connectif dans un autre, objet de la présente section.

L'idée des représentations connectives est d'associer à tout *point* de l'espace représenté une *partie* non vide de l'espace dans lequel a lieu la représentation. Pour cela, nous aurons besoin de faire appel au foncteur \mathcal{P}^* ainsi défini :

Définition 5. *On définit un endofoncteur \mathcal{P}^* de la catégorie **Cnc**, appelé puissance connective générale ou espace connectif des parties non vides, en associant à tout espace connectif X l'espace connectif, noté \mathcal{P}_X^* (ou $\mathcal{P}^*(X)$, ou \mathcal{P}^*X) défini par*

- son support $|\mathcal{P}_X^*| = \mathcal{P}_{|X|}^*$,
 - et sa structure connective $\kappa(\mathcal{P}_X^*) = \{\mathcal{A} \in \mathcal{P}\mathcal{P}_{|X|}^*, \bigcup \mathcal{A} \in \kappa(X)\}$,
- et en associant à tout morphisme connectif $f : X \rightarrow Y$, le morphisme connectif noté $f^{\mathcal{P}}$ ou simplement f , défini pour toute partie non vide A de $|X|$ par $f(A) = \{f(a), a \in A\}$.

Remarque 3. L'espace connectif \mathcal{P}^*X n'est pas intègre en général, même lorsque X l'est.

Remarque 4. On définit de même un endofoncteur \mathcal{K}^* de la catégorie **Cnct**, appelé *puissance connective intègre* ou *espace des parties connexes non vides*, en associant à tout espace connectif intègre X l'espace connectif \mathcal{K}_X^* de ses parties connexes non vides, de structure connective $\kappa(\mathcal{K}_X^*) = \{\mathcal{A} \in \mathcal{P}(|\mathcal{K}_X^*|), \bigcup \mathcal{A} \in \kappa(X)\}$, et à tout morphisme connectif $f : X \rightarrow Y$, le morphisme connectif encore noté $f^{\mathcal{P}}$ ou f , défini pour toute partie connexe non vide K de $|X|$ par $f(K) = \{f(a), a \in K\}$.

Définition 6 (Représentation connective). *On appelle représentation connective d'un espace connectif X dans un espace connectif Y tout morphisme connectif de X dans l'espace connectif $\mathcal{P}^*(Y)$. On écrira $\rho : X \rightsquigarrow Y$ pour exprimer que ρ est une représentation de X dans Y . Étant donnée ρ une telle représentation, Y sera appelé l'espace de ρ , et sera noté $Y = sp(\rho)$; X sera appelé l'objet de ρ , et sera noté $ob(\rho)$.*

Dans le cas où X est intègre, une représentation $\rho : X \rightsquigarrow Y$ s'identifie à un morphisme connectif de X dans l'espace intègre $\mathcal{K}^*(Y)$.

Définition 7. *On dit qu'une représentation $f : X \rightsquigarrow Y$ est intègre si son objet et son espace sont tous deux intègres.*

Soit maintenant ϵ la transformation naturelle $Id_{\mathbf{Cnc}} \rightarrow \mathcal{P}^*$ définie pour tout espace connectif X par $\forall x \in |X|, \epsilon_X(x) = \{x\}$, et μ la transformation naturelle $\mathcal{Q}^* = \mathcal{P}^* \circ \mathcal{P}^* \rightarrow \mathcal{P}^*$ définie par $\forall \mathcal{A} \in \mathcal{Q}_{|X|}^*, \mu_X(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{A}$. Le triplet $(\mathcal{P}^*, \epsilon, \mu)$ constitue alors une monade sur **Cnc**. La catégorie de Kleisli associée à cette monade a pour objets les espaces connectifs, et pour morphismes les représentations, la composée de deux représentations $\rho : X \rightsquigarrow Y$ et $\tau : Y \rightsquigarrow Z$ étant définie pour tout $x \in X$ par $\tau \odot \rho(x) = \mu_Z(\tau^{\mathcal{P}}(\rho(x))) \subset Z$.

Étant donnée une représentation $\rho : X \rightsquigarrow Y$, on notera ${}^\mu\rho$ l'application de \mathcal{P}^*X dans \mathcal{P}^*Y définie par ${}^\mu\rho = \mu_Y \circ \rho^{\mathcal{P}}$. Une représentation de X dans Y est donc une application ρ de X dans \mathcal{P}_Y^* telle que ${}^\mu\rho$ transforme toute partie connexe non vide de X en une partie connexe non vide de Y .

Pour toute partie non vide A de X , on a donc

$${}^\mu\rho(A) = \mu_Y(\rho^{\mathcal{P}}(A)) = \mu_Y(\{\rho(a), a \in A\}) = \bigcup_{a \in A} \rho(a) \subset Y$$

tandis que la composée de deux représentations s'écrit

$$\tau \odot \rho = {}^\mu\tau \circ \rho.$$

Remarque 5. En prenant $\epsilon : Id_{\mathbf{Cnct}} \rightarrow \mathcal{K}^*$ et $\mu : \mathcal{K}^*\mathcal{K}^* \rightarrow \mathcal{K}^*$ définis comme ci-dessus, le triplet $(\mathcal{K}^*, \epsilon, \mu)$ constitue de même une monade sur \mathbf{Cnct} , dont la catégorie de Kleisli associée a pour objets les espaces connectifs intègres, et pour morphismes les représentations intègres, avec la composition des représentations définie comme pour le cas général.

Définition 8 (Représentations claires et distinctes). *Soit $\rho : X \rightsquigarrow Y$ une représentation d'un espace X dans un espace Y . On dit que ρ est claire si $\forall A \in \mathcal{P}_{|X|}, A \notin \kappa(X) \Rightarrow {}^\mu\rho(A) \notin \kappa(Y)$. On dit que ρ est distincte si $\forall (x, y) \in X^2, x \neq y \Rightarrow \rho(x) \cap \rho(y) = \emptyset$.*

Exemple 2. Une représentation claire et distincte de l'espace borroméen \mathcal{B}_3 est obtenue en associant à chacun de ses points une des trois composantes d'un *noeud borroméen* plongé dans (E_3, σ_3) . Plus généralement, les entrelacs brunniens constituent, dans (E_3, σ_3) , des représentations claires et distinctes des espaces connectifs brunniens.

On vérifie facilement la première partie du théorème suivant (voir [10], théorème 10), et le théorème de Brunn-Debrunner-Kanenobu entraîne alors la seconde partie :

Théorème 3. *Tout espace connectif admet une représentation claire et distincte dans un espace intègre. En particulier, tout espace connectif fini admet une représentation par entrelacs, les points non connexes étant représentés par deux ou plusieurs composantes séparables de tels entrelacs.*

Définition 9 (Représentations de type \mathcal{S}). *Soit \mathcal{S} un dispositif de séparation sur un ensemble Y . On appelle représentation de type \mathcal{S} toute représentation claire et distincte d'un espace connectif X dans l'espace $Y[\mathcal{S}]$.*

Exemple 3. Toute représentation par entrelacs d'un espace connectif est une représentation de type \mathcal{S} , où \mathcal{S} est un dispositif de séparation engendrant l'espace de séparation usuel (E_3, σ_3) .

Définition 10. [Catégorie des représentations] *On définit une catégorie \mathbf{RC} , dite catégorie des représentations connectives en prenant pour objets les représentations connectives, et pour morphismes d'une représentation $\rho : A \rightsquigarrow B$ vers une représentation $\rho' : A' \rightsquigarrow B'$ les couples (α, β) où $\alpha : A \rightarrow A'$ et $\beta : B \rightarrow B'$ sont des morphismes connectifs tels que $\beta^{\mathcal{P}} \circ \rho \subset \rho' \circ \alpha$, au sens où, pour tout $a \in A$, $\beta^{\mathcal{P}}(\rho(a)) \subset \rho'(\alpha(a))$. La sous-catégorie pleine de \mathbf{RC} admettant pour objets les représentations claires et distinctes sera notée \mathbf{RCD} .*

Exemple 4 (points d'une représentation). La catégorie \mathbf{RC} admet comme objet final l'unique représentation $\mathbf{1}_{\mathbf{RC}} : \bullet \mapsto \{\bullet\}$ d'un singleton connecté dans lui-même. Un point d'une représentation $\rho : A \rightsquigarrow B$ est alors un morphisme $\mathbf{1}_{\mathbf{RC}} \rightarrow \rho$, c'est-à-dire la donnée d'un point connecté p de A et d'un point connecté q de $\rho(p) \subset B$. En particulier, si l'objet ou l'espace d'une représentation ne possède pas de point intègre, celle-ci n'a pas de point.

3 Feuilletages connectifs

Définition 11 (Feuilletage connectif). *Un feuilletage connectif est un triplet (E, κ_0, κ_1) constitué d'un ensemble E appelé le support du feuilletage, et d'un couple (κ_0, κ_1) de structures connectives sur E , la première, κ_0 , étant dite structure connective interne, et la seconde, κ_1 , structure connective externe. Lorsque que $\kappa_0 \subset \kappa_1$, le feuilletage est dit régulier.*

Lorsqu'une partie de E est connexe pour κ_0 (resp. κ_1), on dit aussi qu'elle est κ_0 -connexe, ou encore qu'elle est *connexe interne*, ou encore *intérieurement connexe* (resp. κ_1 -connexe, ou *connexe externe*, ou encore

extérieurement connexe). Étant donné un feuilletage connectif Z , on notera $|Z|$ son support, $\kappa_0(Z)$ sa structure connective interne et $\kappa_1(Z)$ sa structure connective externe, de sorte que $Z = (|Z|, \kappa_0(Z), \kappa_1(Z))$. Souvent, on notera Z_0 l'espace connectif intérieur $Z_0 = (|Z|, \kappa_0(Z))$, et Z_1 l'espace connectif extérieur $Z_1 = (|Z|, \kappa_1(Z))$.

Définition 12. *La catégorie des feuilletages connectifs **FC** a pour objets les feuilletages connectifs, et pour morphismes d'un feuilletage Z vers un feuilletage Z' les applications $|Z| \rightarrow |Z'|$ qui sont connectives de $Z_i = (|Z|, \kappa_i(Z))$ vers $Z'_i = (|Z'|, \kappa_i(Z'))$ pour chacun des deux indices $i \in \{0, 1\}$.*

Définition 13 (Feuilles). *Soit Z un feuilletage. On appelle domaine de Z , et on note $\text{dom}(Z)$, la partie présente de la structure interne $\kappa_0(Z)$. On appelle feuilles de Z les composantes connexes non vides de la structure interne $\kappa_0(Z)$. La structure interne d'une feuille F est la structure connective induite sur F par $\kappa_0(Z)$. La structure externe de F est la structure induite sur F par $\kappa_1(Z)$.*

Pour tout feuilletage Z , on note $\mathcal{F}(Z)$ l'ensemble des feuilles de Z . Si $\text{dom}(Z)$ est non vide, $\mathcal{F}(Z)$ en constitue une partition.

Remarque 6. Par définition, chaque feuille est intérieurement connexe. Par contre, si le feuilletage n'est pas régulier, une feuille peut ne pas être extérieurement connexe.

Définition 14. *On dira qu'un morphisme de feuilletages $\phi : Z \rightarrow Z'$ est strict si $\phi^{\mathcal{P}}$ transforme toute feuille de Z en une feuille de Z' . La catégorie ayant pour objets les feuilletages connectifs et pour morphismes les morphismes de feuilletages stricts sera notée **FS**.*

Exemple 5. Un espace topologique Y muni d'une relation d'équivalence ρ définit un feuilletage connectif, en prenant $(|Z|, \kappa_1(Z)) = U_T(Y)$ et $\kappa_0(Z) = \rho$, la structure connective associée à la relation d'équivalence ρ .

Exemple 6. À toute variété feuilletée on associe le feuilletage connectif régulier défini sur le même ensemble de points en prenant pour structure connective interne celle associée à la topologie la plus fine du feuilletage (celle de plus faible dimension), et pour structure connective externe celle associée à la topologie la moins fine du feuilletage.

Définition 15 (Espace induit des feuilles). Soit $Z = (|Z|, \kappa_0(Z), \kappa_1(Z))$ un feuilletage connectif. L'espace induit des feuilles de Z est l'espace connectif noté $\mathcal{F}^\downarrow(Z)$, ou plus simplement Z^\downarrow , de support $|Z^\downarrow|$ l'ensemble $\mathcal{F}(Z)$ des feuilles de Z , et de structure connective celle qui y est induite par l'espace connectif des parties non vides $\mathcal{P}^*(Z_1)$, où $Z_1 = (|Z|, \kappa_1(Z))$, de sorte qu'un ensemble \mathcal{A} de feuilles est $\kappa(Z^\downarrow)$ -connexe si et seulement si $\bigcup_{F \in \mathcal{A}} F \in \kappa_1(Z)$.

Remarque 7. Si une κ_0 -composante connexe n'est pas κ_1 -connexe, elle définit un point non connexe de l'espace Z^\downarrow . Ainsi, l'espace induit des feuilles d'un feuilletage Z est-il intègre si et seulement si toute composante connexe de la structure interne de Z est extérieurement connexe.

Remarque 8. Il existe une autre façon, qui pourrait d'ailleurs sembler plus naturelle, de munir l'espace des feuilles d'une structure connective. En effet, les feuilles d'un feuilletage étant les composantes connexes de sa structure interne, elles sont également les classes d'une certaine relation d'équivalence partielle, d'où il découle très naturellement la définition de l'espace *quotient* des feuilles. La structure quotient ainsi obtenue (appelée également structure *sortante*) est moins fine que celle de l'espace induit (également appelé espace *entrant*). Nous ne développerons pas ici la notion d'espace quotient des feuilles, renvoyant le lecteur intéressé aux sections § 1.8 et § 2.2.2. de [10].

4 Une adjonction entre représentations et feuilletages

4.1 Une famille de foncteurs $\mathbf{RC} \rightarrow \mathbf{FC}$

À toute représentation connective $\rho : ob(\rho) \rightsquigarrow sp(\rho)$ on souhaite associer fonctoriellement un feuilletage $\Phi(\rho)$. Si, pour la structure externe du feuilletage, la structure de l'espace $sp(\rho)$ de la représentation s'impose, il y a par contre plusieurs choix possibles, *a priori* légitimes, pour la structure interne. Pour préciser ces choix, nous aurons besoin de faire appel à ce que nous appellerons des structures connectives fonctorielles :

Définition 16. Une structure connective fonctorielle est une application γ définie sur la classe des espaces connectifs et qui à tout espace connectif B associe une structure connective $\gamma(B)$ sur $|B|$ qui soit fonctorielle au sens où il existe un endofoncteur Γ de **Cnc** défini sur les objets par $\Gamma(B) = (|B|, \gamma(B))$, et sur les flèches par $\Gamma(f) = f$. Nous dirons qu'une structure connective fonctorielle γ est plus fine qu'une autre, γ' , et l'on notera $\gamma \subset \gamma'$, si pour tout espace connectif B on a $\gamma(B) \subset \gamma'(B)$.

Par exemple, notons respectivement $\kappa_D(B)$ et $\kappa_G(B)$ la structure connective désintégrée⁹ et la structure connective grossière sur $|B|$. Alors κ_D et κ_G sont des structures connectives fonctorielles. De même, l'application κ qui à tout espace connectif B associe sa structure connective $\kappa(B)$ est une structure connective fonctorielle, et l'on a :

$$\kappa_D \subset \kappa \subset \kappa_G.$$

Soit maintenant (γ_0, γ_1) un couple de structures connectives fonctorielles tel que $\gamma_0 \subset \gamma_1$. À toute représentation connective $\rho : A \rightsquigarrow B$, on associe le feuilletage $Z = \Phi_{(\gamma_0, \gamma_1)}(\rho) = \Phi(\rho)$ de support $|Z| = |B|$, de structure externe $\kappa_1(Z) = \kappa(B)$ et de structure interne

$$\kappa_0(Z) = [\bigcup_{i \in \{0,1\}} \bigcup_{a \in A_i} (\gamma_i(B) \cap \mathcal{P}_{\rho(a)})]_0,$$

où A_0 désigne la partie absente de A et A_1 sa partie présente.

Proposition 4. Soit $(\alpha, \beta) : \rho \rightarrow \rho'$ un morphisme de représentations connectives. Alors l'application $\beta : |sp(\rho)| \rightarrow |sp(\rho')|$ est un morphisme de feuilletages $\beta : \Phi(\rho) \rightarrow \Phi(\rho')$.

Preuve. Posons $A = ob(\rho)$, $B = sp(\rho)$, $A' = ob(\rho')$ et $B' = sp(\rho')$. Si K est une partie extérieurement connexe du feuilletage $Z = \Phi(\rho)$, alors $\beta^P(K)$ est une partie extérieurement connexe de $Z' = \Phi(\rho')$ puisque les structures extérieures des feuilletages coïncident avec les structures des espaces de représentation que respecte β . Soit maintenant $K \in$

9. C'est-à-dire la structure discrète non intègre, pour laquelle seul le vide est connexe.

$\bigcup_{i \in \{0,1\}} \bigcup_{a \in A_i} (\gamma_i(B) \cap \mathcal{P}_{\rho(a)})$. Il faut et il suffit de montrer que $\beta^{\mathcal{P}}(K)$ est intérieurement connexe dans Z' . Si $K \in \gamma_0(B) \cap \mathcal{P}_{\rho(a)}$ avec $a \in A_0$, alors $\beta(K) \in \gamma_0(B')$ puisque γ_0 est fonctoriel. Et $K \subset \rho(a) \implies \beta^{\mathcal{P}}(K) \subset \beta^{\mathcal{P}}(\rho(a)) \subset \rho'(\alpha(a))$. Si $a' = \alpha(a) \in A'_0$, on a alors $\beta^{\mathcal{P}}(K) \in \gamma_0(B') \cap \mathcal{P}_{\rho(a')} \subset \kappa_0(Z')$, tandis que si $a' \in A'_1$, on a $\beta^{\mathcal{P}}(K) \in \gamma_1(B') \cap \mathcal{P}_{\rho(a')} \subset \kappa_0(Z')$, puisque $\gamma_0 \subset \gamma_1$. Si $K \in \gamma_1(B) \cap \mathcal{P}_{\rho(a)}$ avec $a \in A_1$, on a nécessairement $a' = \alpha(a) \in A'_1$, et comme précédemment le fait que $\beta^{\mathcal{P}}(\rho(a)) \subset \rho'(a')$ permet de conclure que $\beta^{\mathcal{P}}(K) \in \gamma_1(B') \cap \mathcal{P}_{\rho(a')} \subset \kappa_0(Z')$, puisque γ_1 est fonctoriel.

□

On en déduit que l'application $\Phi = \Phi_{(\gamma_0, \gamma_1)}$ qui à toute représentation ρ associe le feuilletage $\Phi(\rho)$ et à tout morphisme de représentations (α, β) associe β est un foncteur $\mathbf{RC} \rightarrow \mathbf{FC}$. Dans le cas où $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma$, on le notera simplement Φ_γ . Lorsque $\gamma = \kappa_G$ (resp. $\gamma = \kappa_D$), on notera simplement Φ_G (resp. Φ_D) le foncteur Φ_γ .

Proposition 5. *Pour toute représentation connective ρ , le feuilletage $\Phi_\kappa(\rho)$ est régulier.*

Preuve. La structure interne de $\Phi_\kappa(\rho)$ étant, par définition, engendrée par des parties extérieurement connexes, elle est nécessairement plus fine que la structure externe.

□

La proposition suivante découle immédiatement des définitions.

Proposition 6. *Soient (γ_0, γ_1) un couple de structures connectives fonctorielles, tel que $\gamma_0 \subset \gamma_1$, et soit $\Phi = \Phi_{(\gamma_0, \gamma_1)}$ le foncteur $\mathbf{RC} \rightarrow \mathbf{FC}$ associé. Si ρ est une représentation distincte alors, pour $Z = \Phi(\rho)$, on a*

$$\kappa_0(Z) = \bigcup_{i \in \{0,1\}} \bigcup_{a \in A_i} (\gamma_i(B) \cap \mathcal{P}_{\rho(a)}),$$

de sorte que si $\gamma_1 \supset \kappa$ et que a est un point connecté de $ob(\rho)$, alors $\rho(a)$ est une feuille de Z .

Corollaire 7. *Si ρ est une représentation distincte d'un objet intègre, les feuilles de $\Phi_\kappa(\rho)$ sont les parties de $sp(\rho)$ de la forme $\rho(a)$:*

$$\mathcal{F}(\Phi_\kappa(\rho)) = \{\rho(a), a \in ob(\rho)\}.$$

4.2 Le foncteur $\mathcal{R}^\downarrow : \mathbf{FC} \rightarrow \mathbf{RCD}$

On définit de la manière suivante un foncteur $\mathbf{FC} \rightarrow \mathbf{RCD}$, appelé *représentation induite* et noté \mathcal{R}^\downarrow .

Définition de \mathcal{R}^\downarrow sur les objets. À tout feuilletage Z , \mathcal{R}^\downarrow associe la représentation $\mathcal{R}^\downarrow(Z) : Z^\downarrow \rightsquigarrow Z_1$ de l'espace induit des feuilles Z^\downarrow , définie pour toute feuille $F \in \mathcal{F}(Z) = |Z^\downarrow|$ par

$$\mathcal{R}^\downarrow(Z)(F) = F \subset |Z_1|.$$

$\mathcal{R}^\downarrow(Z)$ est bien une représentation connective puisque, par définition, un ensemble de feuilles est connexe dans \mathcal{P}_{Z_1} si et seulement si son union est connexe dans Z_1 , et que cette dernière propriété caractérise la structure connective de l'espace induit Z^\downarrow . Il est en outre immédiat que la représentation $\mathcal{R}^\downarrow(Z)$ est claire (si un ensemble de feuilles est non connexe dans Z^\downarrow , alors leur union est également non connexe dans l'espace externe du feuilletage), et distincte (deux points différents, c'est-à-dire deux feuilles différentes, sont représentées par deux composantes connexes internes nécessairement disjointes).

Proposition 8. *Si le feuilletage \mathcal{Z} est régulier, l'objet de la représentation $\mathcal{R}^\downarrow \mathcal{Z}$ est intègre.*

Preuve. Toute feuille étant extérieurement connexe, elle constitue un singleton connexe de $ob(\mathcal{R}^\downarrow \mathcal{Z})$.

□

Définition de \mathcal{R}^\downarrow sur les flèches. \mathcal{R}^\downarrow est défini sur les flèches de \mathbf{FC} en associant à tout morphisme de feuilletages $\phi : Z \rightarrow Z'$ le morphisme de représentations (ϕ_0, ϕ_1) , où $\phi_0 : Z^\downarrow \rightarrow Z'^\downarrow$ est défini pour toute feuille $F \in \mathcal{F}(Z)$ par : $\phi_0(F)$ est celle des composantes connexes de l'espace interne $(|Z'|, \kappa_0(Z'))$ qui contient le $\kappa_0(Z')$ -connexe $\phi^{\mathcal{P}}(F)$, et où $\phi_1 : Z_1 \rightarrow Z'_1$ est le morphisme connectif qui en tant qu'application ensembliste coïncide avec ϕ .

Remarque 9 (Représentation quotient \mathcal{R}^\uparrow). À tout feuilletage on peut aussi associer fonctoriellement une représentation claire et distincte de son espace quotient de feuilles dans l'ensemble ambiant muni d'une structure connective adaptée. Le lecteur intéressé pourra se rapporter à la section §2.3.2. de [10].

4.3 L'adjonction $\mathcal{R}^\downarrow \dashv \Phi_\kappa$

Pour établir cette adjonction entre les foncteurs \mathcal{R}^\downarrow et Φ_κ lorsqu'ils sont restreints à certaines catégories de feuilletages et de représentations, nous faisons appel aux trois lemmes suivants (lemme 9 à lemme 11).

Lemme 9. *Soit Z un feuilletage régulier, ρ une représentation quelconque, et $(\alpha, \beta) : \mathcal{R}^\downarrow Z \rightarrow \rho$ un morphisme de représentations. Alors β est un morphisme de feuilletages $Z \rightarrow \Phi_\kappa(\rho)$.*

Preuve. Par définition d'un morphisme de représentations, β est un morphisme connectif $sp(\mathcal{R}^\downarrow Z) \rightarrow sp(\rho)$, autrement dit un morphisme connectif $Z_1 \rightarrow (\Phi_\kappa(\rho))_1$. D'autre part, en appliquant le foncteur Φ_κ au morphisme (α, β) (proposition 4), on en déduit que β est un morphisme de feuilletages $\Phi_\kappa(\mathcal{R}^\downarrow Z) \rightarrow \Phi_\kappa(\rho)$, donc en particulier un morphisme pour les structures internes $(\Phi_\kappa(\mathcal{R}^\downarrow Z))_0 \rightarrow (\Phi_\kappa(\rho))_0$. Mais Z étant régulier, $\kappa_0(Z) \subset \kappa_0(\Phi_\kappa(\mathcal{R}^\downarrow Z))$. En effet, tout connexe intérieur est trivialement inclus dans une composante connexe intérieur et, par la régularité de Z , est aussi un connexe extérieur, de sorte que, par définition de la structure $\kappa_0(\Phi_\kappa(\mathcal{R}^\downarrow Z))$, se trouve bien appartenir à celle-ci. Finalement, on a à la fois $\beta : Z_1 \rightarrow (\Phi_\kappa(\rho))_1$ et $\beta : Z_0 \rightarrow (\Phi_\kappa(\rho))_0$, autrement dit β est bien un morphisme $Z \rightarrow \Phi_\kappa(\rho)$.

□

Lemme 10. *Soient Z un feuilletage connectif, ρ une représentation connective distincte et $(\alpha, \beta) : \mathcal{R}^\downarrow(Z) \rightarrow \rho$ un morphisme de représentations. Alors la connaissance de β détermine celle de α . Autrement dit, si $(\alpha', \beta) : \mathcal{R}^\downarrow(Z) \rightarrow \rho$ est également un morphisme de représentations, on a nécessairement $\alpha = \alpha'$.*

Preuve. Par définition, α est un morphisme connectif de $ob(\mathcal{R}^\downarrow Z) = \mathcal{F}^\downarrow(Z) = Z^\downarrow$ dans $ob(\rho)$. Soit $F \in ob(\mathcal{R}^\downarrow(Z))$, autrement dit une composante connexe de $Z_0 = (|Z|, \kappa_0(Z))$. Par définition d'un morphisme de représentations, on a l'inclusion $\beta^{\mathcal{P}}(\mathcal{R}^\downarrow Z(F)) \subset \rho(\alpha(F))$. Or, $\mathcal{R}^\downarrow Z(F) = F \subset |Z|$, d'où $\beta^{\mathcal{P}}(F) \subset \rho(\alpha(F))$. La représentation ρ étant distincte, il n'y a au plus qu'un point a de $ob(\rho)$ pouvant vérifier $\beta^{\mathcal{P}}(F) \subset \rho(a)$, d'où l'unicité annoncée. □

Lemme 11. *Soit Z un feuilletage, ρ une représentation claire et distincte, d'objet $ob(\rho)$ intègre, et soit $\beta : Z \rightarrow \Phi_\kappa(\rho)$ un morphisme de feuilletages. Alors il existe un et un seul morphisme connectif $\alpha : \mathcal{F}^\downarrow Z \rightarrow ob(\rho)$ tel que (α, β) soit un morphisme de représentations $\mathcal{R}^\downarrow Z \rightarrow \rho$.*

Preuve. S'il existe, le morphisme α est unique d'après le lemme 10. Précisons l'application ensembliste $\alpha : \mathcal{F}Z \rightarrow |ob(\rho)|$ dont, nécessairement, il s'agit. Pour $F \in \mathcal{F}Z$, on a $\beta^{\mathcal{P}}(F) \in \kappa_0(\Phi_\kappa(\rho))$, puisque β préserve aussi les morphismes internes. Notons $\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ la composante $\kappa_0(\Phi_\kappa(\rho))$ -connexe contenant $\beta^{\mathcal{P}}(F)$. Alors $\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)} \in \mathcal{F}(\Phi_\kappa(\rho))$. D'après le corollaire 7, il existe alors un élément unique $a_F \in ob(\rho)$ tel que $\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)} = \rho(a_F)$. L'application α est donc définie par $\alpha(F) = a_F$. Autrement dit,

$$\alpha(F) = a \Leftrightarrow \beta^{\mathcal{P}}(F) \subset \rho(a) \Leftrightarrow \beta^{\mathcal{P}}(F) \subset \overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)} = \rho(a).$$

Il s'agit de prouver que l'application α ainsi définie est un morphisme connectif $\mathcal{F}^\downarrow Z \rightarrow ob(\rho)$, et que le couple (α, β) est bien un morphisme de représentations. Soit donc \mathcal{L} un ensemble $\kappa(Z^\downarrow)$ -connexe de feuilles. Par définition de Z^\downarrow , on a $\bigcup_{F \in \mathcal{L}} F \in \kappa_1(Z)$, donc l'ensemble $W = \bigcup_{F \in \mathcal{L}} \overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ vérifie $W \in \kappa_1(\Phi_\kappa(\rho))$. Posons

$$\mathcal{A} = \alpha^{\mathcal{P}}(\mathcal{L}) = \{a \in ob(\rho), \exists F \in \mathcal{L}, \rho(a) \supset \overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}\}.$$

On veut montrer que \mathcal{A} est une partie connexe de $ob(\rho)$. Or, ρ étant claire, il suffit pour cela de prouver que $\overline{\mu\rho(\mathcal{A})} = \bigcup_{F \in \mathcal{L}} \overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ est connexe dans $sp(\rho)$. Par définition, les $\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ sont $\kappa_0(\Phi_\kappa(\rho))$ -connexes.

Mais, le feuilletage $\Phi_\kappa(\rho)$ étant régulier (proposition 5), les $\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ sont également $\kappa_1(\Phi_\kappa(\rho))$ -connexes. Il en découle que

$$\bigcup_{F \in \mathcal{L}} \overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)} = \bigcup_{F \in \mathcal{L}} (\overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)} \cup W)$$

est l'union de $\kappa_1(\Phi_\kappa(\rho))$ -connexes d'intersection non vide.

Ainsi, $\bigcup_{F \in \mathcal{L}} \overline{\beta^{\mathcal{P}}(F)}$ est $\kappa_1(\Phi_\kappa(\rho))$ -connexe, autrement dit $\kappa_1(sp(\rho))$ -connexe, de sorte que \mathcal{A} est connexe dans $ob(\rho)$. Reste à vérifier que $\beta^{\mathcal{P}} \circ \mathcal{R}^\downarrow Z \subset \rho \circ \alpha$, mais c'est là une conséquence immédiate de la construction même de α .

□

Soit maintenant **FR** la sous-catégorie pleine de **FC** constituée des feuilletages connectifs réguliers, et soit **RIO** la sous-catégorie pleine de **RCD** constituée des représentations claires et distinctes dont l'objet est intègre. Reprenons les notations \mathcal{R}^\downarrow et Φ_κ employées précédemment, mais pour désigner cette fois les restrictions de ces foncteurs à **FR** et à **RIO**. D'après la proposition 8, on obtient bien de cette manière un foncteur $\mathcal{R}^\downarrow : \mathbf{FR} \rightarrow \mathbf{RIO}$. Et d'après la proposition 5, on obtient de même un foncteur $\Phi_\kappa : \mathbf{RIO} \rightarrow \mathbf{FR}$.

Soit Z un feuilletage régulier, et ρ une représentation claire et distincte d'un objet intègre. À tout morphisme de représentations $(\alpha, \beta) : \mathcal{R}^\downarrow Z \rightarrow \rho$, on associe, d'après le lemme 9, le morphisme de feuilletages $\beta : Z \rightarrow \Phi_\kappa(\rho)$. Réciproquement, à tout morphisme de feuilletages $\beta : Z \rightarrow \Phi_\kappa(\rho)$, on associe d'après le lemme 11, un unique morphisme de représentations $(\alpha, \beta) : \mathcal{R}^\downarrow Z \rightarrow \rho$. On a ainsi construit des applications réciproques, donc bijectives, entre $Hom_{\mathbf{RIO}}(\mathcal{R}^\downarrow Z, \rho)$ et $Hom_{\mathbf{FR}}(Z, \Phi_\kappa(\rho))$, et le lecteur pourra vérifier que ces bijections sont naturelles par rapport à Z et ρ . On peut ainsi énoncer :

Théorème 12. *Le foncteur $\mathcal{R}^\downarrow : \mathbf{FR} \rightarrow \mathbf{RIO}$ est adjoint à gauche du foncteur $\Phi_\kappa : \mathbf{RIO} \rightarrow \mathbf{FR}$:*

$$\mathcal{R}^\downarrow \dashv \Phi_\kappa$$

Remarque 10. Par composition, les divers foncteurs considérés plus haut entre catégories de feuilletages connectifs et catégories de représentations

connectives donnent lieu à d'autres foncteurs intéressants. Par exemple, notant $\rho_G^\downarrow = \mathcal{R}^\downarrow(\Phi_G(\rho))$ la représentation associée à une représentation ρ par l'endofoncteur $\mathcal{R}^\downarrow \circ \Phi_G$, on démontre¹⁰ la proposition suivante :

Proposition 13. *Si ρ est une représentation claire et distincte, alors le couple d'applications (α, β) défini par $\alpha(a) = \rho(a) \in \text{ob}(\rho_G^\downarrow)$ et $\beta = \text{Id}_{\text{sp}(\rho)}$ constitue un isomorphisme entre les représentations ρ et ρ_G^\downarrow .*

5 Ordre d'un espace connectif

On note Ord la classe des ordinaux, ω_0 ou \aleph_0 le plus petit ordinal infini, et \aleph_1 le plus petit ordinal non dénombrable, *i.e.* l'ensemble des ordinaux dénombrables. Pour tout ordinal α , nous notons en outre α^- l'ordinal défini par $\alpha^- = \beta$ si β est prédécesseur de α , et $\alpha^- = \alpha$ si α n'a pas de prédécesseur.

Définition 17. *Soit $\alpha \in Ord$ un ordinal. Un ensemble (partiellement) ordonné (R, \preceq) est dit supérieur ou égal à α , et l'on note $\alpha \leq R$, s'il existe une application strictement croissante de α dans (R, \preceq) .*

Bien entendu, la définition précédente est compatible avec la relation d'ordre entre ordinaux. Soit maintenant (R, \preceq) un ensemble ordonné. La classe des ordinaux α tels que $\alpha \leq R$ est bornée (en fonction du cardinal de R), c'est donc un ensemble, et c'est un ordinal puisque $\alpha \leq R \Rightarrow \beta \leq R$ pour tout $\beta \leq \alpha$.

Définition 18. *On appelle hauteur de l'ensemble partiellement ordonné (R, \preceq) , et on note $\Gamma(R)$, l'ordinal*

$$\Gamma(R) = \{\alpha \in Ord, \alpha \leq R\}$$

Exemple 7. \mathbf{R} désignant la droite réelle munie de l'ordre usuel, on a¹¹ $\Gamma(\mathbf{R}) = \aleph_1$.

10. Voir [10], proposition 18.

11. On trouvera une preuve de ce fait dans [10].

Rappelons qu'une partie connexe non vide $K \in \kappa_X$ d'un espace connectif $X = (|X|, \kappa_X)$ est dite *irréductible* si et seulement si elle n'appartient pas à la structure connective engendrée par les autres parties (voir [8], section 2.2). La définition du graphe générique d'un espace connectif, donnée dans le cas fini dans [8] (section 7.1), s'étend immédiatement à tout espace connectif :

Définition 19 (Graphe générique). *Soit $X = (|X|, \kappa_X)$ un espace connectif. On appelle graphe générique de X , et l'on note (G_X, \subset) , l'ensemble ordonné par l'inclusion des parties connexes irréductibles de X .*

Définition 20. *Soit X un espace connectif. On appelle ordre connectif de X l'ordinal $\Omega(X) = \Gamma(G_X)^{-} = \{\alpha \in \text{Ord}, \alpha + 2 \leq G_X\}$.*

Bien entendu, comme on le vérifie facilement, l'ordre connectif $\Omega(X)$ d'un espace connectif fini intègre X coïncide avec l'ordre connectif défini dans [8]. Plusieurs exemples d'ordres connectifs infinis sont donnés dans [10].

À tout entrelacs, qu'il comporte ou non un nombre fini de composantes, se trouve associé un espace connectif (voir l'exemple 3 dans [8] ou l'exemple 4 dans [10]). La notion d'ordre connectif conduit dès lors à la définition d'un nouvel invariant d'entrelacs :

Définition 21. *L'ordre connectif d'un entrelacs est l'ordre connectif de l'espace connectif associé à cet entrelacs.*

Exemple 8. L'ensemble des (classes d'équivalence d') entrelacs finis réguliers dans \mathbf{R}^3 étant dénombrable, on construit facilement un entrelacs dans \mathbf{R}^3 qui réalise l'union disjointe de tous les entrelacs finis réguliers. L'ordre connectif de l'entrelacs obtenu est ω_0 .

La définition suivante est appelée à jouer un rôle important dans l'étude des dynamiques catégoriques connectives, puisqu'elle permet de définir l'ordre connectif d'une telle dynamique (voir [10]) :

Définition 22 (Ordre d'un feuilletage connectif). *On appelle ordre, ou ordre connectif, d'un feuilletage connectif Z l'ordre connectif de son espace induit de feuilles Z^\downarrow .*

6 Relations avec les espaces difféologiques

On se propose dans cette section de préciser certaines relations fonctorielles entre espaces connectifs et espaces difféologiques, et en particulier de caractériser les espaces connectifs difféologisés. Nous commençons, après quelques rappels terminologiques, par préciser la notion de difféologisabilité d'un espace connectif en définissant un foncteur d'oubli U_{DC} de la catégorie des espaces difféologiques dans celle des espaces connectifs, puis nous donnons des conditions nécessaires de difféologisabilité d'un espace connectif avant de montrer, grâce à certains foncteurs de difféologisation, que ces conditions sont en fait suffisantes. Nous montrons ensuite que l'un de ces foncteurs est adjoint à droite du foncteur d'oubli, avant de conclure avec quelques remarques sur la notion d'application localement connective.

Pour tout ce qui concerne la difféologie, nous renvoyons à l'ouvrage [11] de Patrick Iglesias-Zemmour. Rappelons néanmoins ici quelques notions et notations :

- on note $Param(E)$ l'ensemble des paramétrisations d'un ensemble E ([11], art. 1.3) ;
- une difféologie sur E est une partie $\mathcal{D} \subset Param(E)$ vérifiant certains axiomes ; les éléments de \mathcal{D} s'appellent les plaques (*plots*), une plaque p de l'espace difféologique (E, \mathcal{D}) s'identifiant à une application lisse (*smooth map*) définie sur un ouvert U_p d'un espace de la forme \mathbf{R}^{n_p} et à valeur dans E ; en particulier, une plaque définie sur \mathbf{R} s'appelle un chemin (ou un chemin lisse), et l'ensemble des chemins dans (E, \mathcal{D}) est noté $Paths(E, \mathcal{D})$;
- pour tout ensemble \mathcal{L} de paramétrisations $p : \mathbf{R}^{n_p} \supset U_p \rightarrow E$, autrement dit d'applications p dans E , chacune étant définie sur un ouvert U_p d'un espace de la forme \mathbf{R}^{n_p} avec n_p un entier naturel, on note $\langle \mathcal{L} \rangle$ la difféologie engendrée par \mathcal{L} , c'est-à-dire la difféologie la plus fine sur E contenant \mathcal{L} ([11], art. 1.66) ;
- on dit d'un ensemble de paramétrisations \mathcal{L} de E qu'il couvre E si pour tout $a \in E$, il existe $p \in \mathcal{L}$ telle que $a \in p(U_p) = val(p)$;
- une application $\sigma : \mathbf{R} \rightarrow E$ est dite *stationnaire aux bords* s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\infty, \epsilon[$, $\sigma(t) = \sigma(0)$, et pour tout $t \in]1-\epsilon, +\infty[$, $\sigma(t) = \sigma(1)$; on note $stPaths(E, \mathcal{D})$ l'ensemble des

chemins $\sigma \in Paths(E, \mathcal{D})$ qui sont stationnaires aux bords (voir [11], art. 5.4).

- une partie A d'un espace difféologique (E, \mathcal{D}) est dite connectée si pour tout couple (a_0, a_1) de points de A , il existe un chemin $\sigma \in Paths(E, \mathcal{D})$ reliant a_0 à a_1 en restant dans A au sens où : $\sigma(0) = a_0$, $\sigma(1) = a_1$ et, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\sigma(t) \in A$ (voir [11], art. 5.9) ; par « smashisation » ([11], art. 5.5.), on peut remplacer $Paths(E, \mathcal{D})$ par $stPaths(E, \mathcal{D})$ dans la définition des parties connectées d'un espace difféologique.

Proposition 14. *L'ensemble $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ des parties connectées d'un espace difféologique (E, \mathcal{D}) constitue une structure connective intègre sur l'ensemble E .*

Preuve. Étant donnée $(K_i)_{i \in I}$ une famille de parties connectées de (E, \mathcal{D}) , telle que $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$, deux points quelconques a_1 et a_2 de $L = \bigcup_{i \in I} K_i$ peuvent toujours être reliés par un chemin $\sigma \in Paths(E, \mathcal{D})$: en effet, il existe un élément $a_0 \in \bigcap_{i \in I} K_i$ et, pour chaque $k \in \{1, 2\}$, un chemin $\sigma_k \in \mathcal{D}$ reliant a_k à a_0 en restant dans L . La *smashed concatenation*¹² de σ_1 et σ_2 produit alors le chemin lisse σ annoncé. En outre, il est clair que tout singleton est une partie connectée, puisque par définition d'une difféologie toutes les paramétrisations constantes, en particulier celles définies sur \mathbf{R} , appartiennent à \mathcal{D} .

□

La proposition précédente, puisque par ailleurs toute application lisse entre espaces difféologiques transforme les parties connectées du premier en parties connectées du second ([11], art. 5.9), permet de définir un foncteur d'oubli¹³ U_{DC} de la catégorie **Diff** des espaces difféologiques dans celle, **Cnct**, des espaces connectifs intègres, en posant :

- pour tout espace $(E, \mathcal{D}) \in \mathbf{Diff}_0 : U_{DC}(E, \mathcal{D}) = (E, \mathcal{K}_{\mathcal{D}})$,
- pour tout morphisme $f \in \overrightarrow{\mathbf{Diff}} : U_{DC}(f) = f$.

Dans la suite, nous étendons l'usage de l'expression U_{DC} , permettant que la structure connective $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ associée à la difféologie \mathcal{D} soit également

12. Voir [11], art. 5.5.

13. Au sens où il s'agit d'un foncteur fidèle entre catégories concrètes.

notée $U_{DC}(\mathcal{D})$. Ainsi, avec cette convention, on a, pour tout espace difféologique (E, \mathcal{D}) ,

$$U_{DC}(E, \mathcal{D}) = (E, U_{DC}(\mathcal{D})).$$

Définition 23. *Un espace connectif (E, \mathcal{K}) est dit difféologisable s'il existe une structure difféologique \mathcal{D} sur E telle que $U_{DC}(\mathcal{D}) = \mathcal{K}$. On notera **Cncd** la sous-catégorie pleine de **Cnct** ayant pour objets les espaces connectifs difféologisables.*

Lemme 15 (Engendrement des connexes d'un espace difféologique). *Pour tout espace difféologique (E, \mathcal{D}) , on a*

$$U_{DC}(\mathcal{D}) = [\{\sigma([0, 1]), \sigma \in stPaths(E, \mathcal{D})\}].$$

Preuve. Les chemins lisses étant des plaques, la connexité de l'intervalle réel $[0, 1]$ entraîne celle des $\sigma([0, 1])$, d'où $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$, ce qui implique $[\mathcal{G}] \subset \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$. Soit maintenant une partie connectée non vide quelconque $K \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ et $a_0 \in K$. Par définition de $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$, il existe, pour tout $a \in K$, un chemin σ_a tel que $\sigma_a(0) = a_0$, $\sigma_a(1) = a$ et $\sigma_a(\mathbf{R}) \subset K$, chemin que, par « smashisation » ([11], art. 5.5) on peut rendre stationnaire aux bords : $\sigma_a \in stPaths(E, \mathcal{D})$. On a alors $K = \bigcup_{a \in K} \sigma_a([0, 1])$, mais puisque $\bigcap_{a \in K} \sigma_a([0, 1]) \supset \{a_0\} \neq \emptyset$, cela prouve que

$$K \in [\{\sigma([0, 1]), \sigma \in stPaths(E, \mathcal{D})\}].$$

□

Lemme 16 (Chemins d'une difféologie engendrée). *Soit \mathcal{L} un ensemble couvrant de paramétrisations de E , et soit $\sigma : \mathbf{R} \rightarrow E$ une paramétrisation définie sur \mathbf{R} . On a $\sigma \in stPaths(E, \langle \mathcal{L} \rangle)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. σ est stationnaire au bord,
2. il existe un entier $n \geq 1$ et une suite finie $(]a_k, b_k[, p_k, q_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$, avec a_k et b_k des réels vérifiant

$$(a_1 < 0) \text{ et } (\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, a_k < a_{k+1} < b_k < b_{k+1}) \text{ et } (b_n > 1),$$

et telle que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on ait

- $(p_k : \mathbf{R}^{n_k} \supset U_k \rightarrow E) \in \mathcal{L}$,
 - $q_k \in C^\infty(]a_k, b_k[, U_k)$,
 - $\sigma_{]a_k, b_k[} = p_k \circ q_k$,
- où $n_k = n_{p_k}$ désigne la dimension de la paramétrisation p_k , $U_k = U_{p_k}$ est le domaine de p_k et $\sigma_{]a_k, b_k[}$ désigne la restriction de σ à $]a_k, b_k[$.

Preuve. D'après les axiomes qui définissent une difféologie, les conditions données sont clairement suffisantes pour avoir $\sigma \in \langle \mathcal{L} \rangle$, les $p_k \circ q_k$ étant lisses par composition, et σ étant lisse, puisque localement lisse, sur $[0, 1]$ et constante, donc lisse, sur $] - \infty, \epsilon[$ et sur $]1 - \epsilon, +\infty[$ pour un certain $\epsilon > 0$. Stationnaire aux bord, σ est donc bien dans $stPaths(E, \langle \mathcal{L} \rangle)$. Réciproquement, étant donné un chemin stationnaire aux bords $\sigma \in stPaths(E, \langle \mathcal{L} \rangle)$, la caractérisation des plaques d'une difféologie engendrée par une famille couvrante de paramétrisations donnée en [11] (art. 1.68) implique que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, il existe un voisinage ouvert $V_t \subset \mathbf{R}$ de t , une application de classe C^∞ $q_t : V_t \rightarrow \mathbf{R}$ et une paramétrisation $p_t : \mathbf{R} \rightarrow E$ appartenant à \mathcal{L} tels que $\sigma|_{V_t} = p_t \circ q_t$. Par restriction, on peut remplacer les ouverts V_t par des intervalles ouverts $J_t \ni t$. La famille $(J_t)_{t \in [0, 1]}$ est alors un recouvrement ouvert du compact $[0, 1]$, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini, qu'après ré-indexation nous notons $(J_m)_{m \in \{1, \dots, N\}}$. Par récurrence finie, on construit alors de la façon suivante la suite des intervalles $]a_k, b_k[= I_k$ annoncés : parmi les intervalles J_m qui contiennent 0, on prend celui dont la borne supérieure est maximale, cela nous donne I_1 , et l'on continue ainsi : ayant choisi les intervalles $I_1 =]a_1, b_1[, \dots, I_k =]a_k, b_k[$, si $b_k > 1$, on pose $n = k$ et l'on s'arrête, sinon on considère, parmi les intervalles J_m qui contiennent b_k , celui dont la borne supérieure est maximale, ce qui nous donne I_{k+1} . Cette construction se poursuit tant que $b_k \leq 1$, puisqu'il existe alors un intervalle J_m contenant b_k , mais elle s'achève nécessairement en un nombre fini n d'étapes, d'où l'existence de n tel que $b_n > 1$. On vérifie alors aisément que les réels a_k et b_k ainsi obtenus satisfont les inégalités indiquées, d'où le résultat.

□

Proposition 17. *Pour tout espace difféologique (E, \mathcal{D}) , la structure connective intègre $U_{DC}(\mathcal{D}) = \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ admet un système de générateurs¹⁴ $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}_{\mathcal{D}}$ tel que*

$$\forall G \in \mathcal{G}, \text{card}(G) \leq \mathfrak{c},$$

où \mathfrak{c} désigne la puissance du continu.

Preuve. Posons $\mathcal{G} = \{\sigma([0, 1]), \sigma \in \text{stPaths}(E, \mathcal{D})\}$. Le lemme 15 dit que \mathcal{G} est un système de générateurs de $\mathcal{K}_{\mathcal{D}}$, et puisque $\text{card}([0, 1]) = \mathfrak{c}$, tout élément $G \in \mathcal{G}$ vérifie la condition de cardinalité indiquée. □

Pour toute paramétrisation $(p : R^{n_p} \supset U_p \rightarrow E) \in \text{Param}(E)$, nous noterons $\mathcal{K}_{\mathcal{A}_p}$ la structure connective sur U_p constituée des parties de U_p connexes par arcs, \mathcal{T}_p la topologie sur U_p induite par la topologie usuelle de R^{n_p} , et $\mathcal{K}\mathcal{T}_p = U_T(\mathcal{T}_p)$ la structure connective sur U_p associée à \mathcal{T}_p par le foncteur d'oubli $U_T : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Cnct}$. On a donc, pour toute paramétrisation p , $\mathcal{K}_{\mathcal{A}_p} \subset \mathcal{K}\mathcal{T}_p$.

Proposition 18 (Trois procédés de difféologisation des espaces connectifs¹⁵). *Soit (E, \mathcal{K}) un espace connectif intègre. On note $\mathcal{L}\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble des paramétrisations de E qui transforment tout connexe par arcs en partie connexe de E , et $\mathcal{L}\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble des paramétrisations de E qui transforment tout connexe pour la topologie usuelle en partie connexe de E , autrement dit :*

$$\mathcal{L}\mathcal{A}_{\mathcal{K}} = \{p \in \text{Param}(E), p \in \mathbf{Cnct}((U_p, \mathcal{K}_{\mathcal{A}_p}), (E, \mathcal{K}))\}$$

et

$$\mathcal{L}\mathcal{T}_{\mathcal{K}} = \{p \in \text{Param}(E), p \in \mathbf{Cnct}((U_p, \mathcal{K}\mathcal{T}_p), (E, \mathcal{K}))\}.$$

Si \mathcal{K} admet un système \mathcal{G} de générateurs qui soient tous de cardinal inférieur ou égal à la puissance du continu, autrement dit s'il existe un ensemble $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{K} = [\mathcal{G}], \\ \text{et} \\ \forall G \in \mathcal{G}, \text{card}(G) \leq \mathfrak{c}, \end{array} \right.$$

14. Rappelons qu'un système de générateurs \mathcal{G} d'une structure connective \mathcal{K} est une partie $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ telle que la structure connective engendrée par \mathcal{G} vérifie $[\mathcal{G}]_0 = \mathcal{K}$.

15. Une partie de ce qui est avancé ici nous a été suggéré par Anatole Khelif.

alors

$$U_{DC}(\langle \mathcal{W}_G \rangle) = U_{DC}(\langle \mathcal{LT}_K \rangle) = U_{DC}(\langle \mathcal{LA}_K \rangle) = \mathcal{K},$$

où, \mathcal{G} désignant un système de générateurs ayant la propriété indiquée, on a posé

$$\mathcal{W}_G = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathcal{W}_G$$

avec, pour tout $G \in \mathcal{G}$,

$$\mathcal{W}_G = \{p : \mathbf{R} \rightarrow E, p(\mathbf{R}) = G \text{ et } \forall a \in G, \overline{p^{-1}(a)} = \mathbf{R}\}.$$

Preuve. De l'inclusion $\mathcal{KA}_p \subset \mathcal{KT}_p$, valable pour toute paramétrisation p de E , on déduit $\mathcal{LT}_K \subset \mathcal{LA}_K$. Supposant à partir de maintenant l'existence d'un système de générateurs de \mathcal{K} ayant les propriétés voulues, et désignant par \mathcal{G} un tel système, on a en outre $\mathcal{W}_G \subset \mathcal{M}_K$: en effet, pour toute paramétrisation $p \in \mathcal{W}_G$, il existe $G \in \mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ tel que pour tout connexe¹⁶ I non réduit à un point et inclus dans $U_p = \mathbf{R}$, on ait $p(I) = G$. Par conséquent, le foncteur U_{DC} étant trivialement croissant¹⁷, on a

$$U_{DC}(\langle \mathcal{W}_G \rangle) \subset U_{DC}(\langle \mathcal{LT}_K \rangle) \subset U_{DC}(\langle \mathcal{LA}_K \rangle).$$

Il nous suffit donc, pour établir la proposition 18 de montrer que, sous les hypothèses faites, on a nécessairement $\mathcal{K} \subset U_{DC}(\langle \mathcal{W}_G \rangle)$ et $U_{DC}(\langle \mathcal{LA}_K \rangle) \subset \mathcal{K}$. Commençons par établir l'inclusion

$$\mathcal{K} \subset U_{DC}(\langle \mathcal{W}_G \rangle).$$

Il suffit pour cela de vérifier que l'on a $\mathcal{G} \subset U_{DC}(\langle \mathcal{W}_G \rangle)$, puisqu'on aura alors $\mathcal{K} = [\mathcal{G}] \subset [U_{DC}(\langle \mathcal{W}_G \rangle)] = U_{DC}(\langle \mathcal{W}_G \rangle)$. Soit donc $G \in \mathcal{G}$, avec G non vide, de sorte que $0 < \text{card}(G) \leq \mathfrak{c}$. L'ensemble \mathbf{R}/\mathbf{Q} , obtenu en quotientant les groupes additifs correspondants, ayant la puissance du continu, on en déduit l'existence d'une surjection $\pi_G : \mathbf{R}/\mathbf{Q} \rightarrow G$. En composant avec la surjection canonique

16. Ou connexe par arcs, puisque dans \mathbf{R} les deux notions sont équivalentes.

17. Plus il y a de paramétrisations, plus il y a de connexes par arcs.

$s : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Q}$, on obtient d'abord une application $p_G = \pi_G \circ s : \mathbf{R} \rightarrow G$ puis, par extension du codomaine à E , une paramétrisation de E que nous noterons encore $p_G : \mathbf{R} \rightarrow E$. Or, $p_G \in \overline{\mathcal{W}_G}$, car la densité des ensembles $s^{-1}(c)$ pour tout $c \in \mathbf{R}/\mathbf{Q}$ implique $p_G^{-1}(g) = \mathbf{R}$ pour tout $g \in G$. *A fortiori* $p_G \in \langle \mathcal{W}_G \rangle : p_G$ est une plaque de l'espace difféologique $(E, \langle \mathcal{W}_G \rangle)$, et par conséquent ([11], art. 5.9) p_G transforme tout connexe par arcs¹⁸ en partie connectée de $(E, \langle \mathcal{W}_G \rangle)$. En particulier, $p_G(\mathbf{R}) = G$ est donc une partie connectée de $(E, \langle \mathcal{W}_G \rangle)$, autrement dit : $G \in U_{DC}(\langle \mathcal{W}_G \rangle)$. Et puisque ce résultat reste trivialement vérifié dans le cas où G est vide, on a bien $\mathcal{K} \subset U_{DC}(\langle \mathcal{W}_G \rangle)$.

Pour établir la deuxième inclusion dont nous avons besoin,

$$U_{DC}(\langle \mathcal{L}\mathcal{A}_\mathcal{K} \rangle) \subset \mathcal{K},$$

remarquons d'abord que, d'après le lemme 15 appliqué à $\mathcal{D} = \langle \mathcal{L}\mathcal{A}_\mathcal{K} \rangle$ on a

$$U_{DC}(\langle \mathcal{L}\mathcal{A}_\mathcal{K} \rangle) = [\{\sigma([0, 1]), \sigma \in stPaths(E, \langle \mathcal{L}\mathcal{A}_\mathcal{K} \rangle)\}]. \quad (1)$$

Or, pour tout $\sigma \in stPaths(E, \langle \mathcal{L}\mathcal{A}_\mathcal{K} \rangle)$, on peut écrire d'après le lemme 16 l'ensemble $\sigma([0, 1]) \subset E$ sous la forme

$$\sigma([0, 1]) = \bigcup_{1 \leq k \leq n} p_k(q_k(]a_k, b_k[)),$$

avec, pour tout k , q_k de classe C^∞ et $p_k \in \mathcal{L}\mathcal{A}_\mathcal{K}$. Par continuité de q_k , et par la définition de $\mathcal{L}\mathcal{A}_\mathcal{K}$ qui implique que p_k transforme les connexes par arcs en connexes de E , on a $\sigma(]a_k, b_k[) = p_k(q_k(]a_k, b_k[)) \in \mathcal{K}$. En outre, d'après les propriétés des intervalles $]a_k, b_k[$, on a pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\} :]a_k, b_k[\cap]a_{k+1}, b_{k+1}[\neq \emptyset$, d'où $\sigma(]a_k, b_k[) \cap \sigma(]a_{k+1}, b_{k+1}[) \neq \emptyset$. Ainsi, $\sigma([0, 1])$ peut-il s'écrire comme l'union d'une suite finie de connexes $\in \mathcal{K}$ telle que deux connexes successifs de cette suite soit non vide. On en déduit que $\sigma([0, 1]) \in \mathcal{K}$, d'où

$$\{\sigma([0, 1]), \sigma \in stPaths(E, \langle \mathcal{L}\mathcal{A}_\mathcal{K} \rangle)\} \subset \mathcal{K},$$

18. Les parties connectées des ouverts $U \subset \mathbf{R}^n$ munis de leur structure difféologique canonique sont les connexes par arcs.

de sorte que

$$[\{\sigma([0, 1]), \sigma \in stPaths(E, < \mathcal{L}\mathcal{A}_\mathcal{K} >)\}] \subset \mathcal{K}. \quad (2)$$

Des relations (1) et (2), on déduit $U_{DC}(< \mathcal{L}\mathcal{A}_\mathcal{K} >) \subset \mathcal{K}$, ce qui achève la démonstration.

□

Des propositions 17 et 18, on déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème 19. *Un espace connectif (E, \mathcal{K}) est difféologisable si et seulement s'il est intègre et qu'il admet un système $\mathcal{G} \subset \mathcal{K}$ de générateurs $G \in \mathcal{G}$ qui soient tous de cardinal $card(G) \leq \mathfrak{c}$. En particulier, tout espace connectif intègre (E, \mathcal{K}) de support E tel que $card(E) \leq \mathfrak{c}$ est difféologisable.*

Exemple 9. Tout espace discret intègre est difféologisable; tout espace connectif grossier est difféologisable. Les espaces connectifs usuels¹⁹ \mathbf{R}^n sont difféologisables, mais non pas par la difféologie usuelle sur \mathbf{R}^n puisque pour celle-ci les parties connectées sont uniquement les connexes par arcs de \mathbf{R}^n . Aucun espace brunnien dont le support est de cardinal strictement plus grand que \mathfrak{c} n'est difféologisable, un tel espace ne vérifiant pas les conditions nécessaires de la proposition 17.

Pour tout espace connectif difféologisable (E, \mathcal{K}) posons

$$\mathcal{G}_\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{K}, card(K) \leq \mathfrak{c}\} \text{ et } \mathcal{L}\mathcal{W}_\mathcal{K} = \mathcal{W}_{\mathcal{G}_\mathcal{K}},$$

où $\mathcal{W}_{\mathcal{G}_\mathcal{K}}$ désigne la famille de paramétrisations de E qui a été associée à un tel ensemble $\mathcal{G} = \mathcal{G}_\mathcal{K}$ dans la proposition 18. Autrement dit,

$$\mathcal{L}\mathcal{W}_\mathcal{K} = \{f : \mathbf{R} \rightarrow E, \exists K \in \mathcal{G}_\mathcal{K}, f(\mathbf{R}) = K \text{ et } \forall a \in K, \overline{f^{-1}(a)} = \mathbf{R}\}.$$

Posons de plus

$$LW((E, \mathcal{K})) = (E, < \mathcal{L}\mathcal{W}_\mathcal{K} >),$$

19. C'est-à-dire ceux qui sont associés à la topologie usuelle par le foncteur d'oubli U_T .

$$LT((E, \mathcal{K})) = (E, \langle \mathcal{L}\mathcal{T}_{\mathcal{K}} \rangle),$$

$$LA((E, \mathcal{K})) = (E, \langle \mathcal{L}\mathcal{A}_{\mathcal{K}} \rangle),$$

et, pour tout morphisme connectif $(f : (E, \mathcal{K}) \rightarrow (E', \mathcal{K}')) \in \overrightarrow{\mathbf{Cncd}}$,

$$LW(f) = LT(f) = LA(f) = f.$$

Proposition 20. *Les opérateurs LW , LT et LA définis ci-dessus sur les objets et sur les flèches de la catégorie \mathbf{Cncd} et à valeurs dans \mathbf{Diff} sont des foncteurs $\mathbf{Cncd} \rightarrow \mathbf{Diff}$.*

Preuve. Pour prouver que LW est un foncteur, il suffit de vérifier que tout morphisme connectif $(f : (E, \mathcal{K}) \rightarrow (E', \mathcal{K}')) \in \overrightarrow{\mathbf{Cncd}}$ est une application lisse de $(E, \mathcal{L}\mathcal{W}_{\mathcal{K}})$ dans $(E', \mathcal{L}\mathcal{W}_{\mathcal{K}'})$. La vérification de ce qu'en outre f est lisse de $(E, \mathcal{L}\mathcal{T}_{\mathcal{K}})$ dans $(E', \mathcal{L}\mathcal{T}_{\mathcal{K}'})$ et de $(E, \mathcal{L}\mathcal{A}_{\mathcal{K}})$ dans $(E', \mathcal{L}\mathcal{A}_{\mathcal{K}'})$ prouvera de même la functorialité de LT et de LA . Or, pour toute paramétrisation $(p : \mathbf{R} \rightarrow E) \in \mathcal{L}\mathcal{W}_{\mathcal{K}}$, on a $f \circ p : \mathbf{R} \rightarrow E'$ qui vérifie $f \circ p(\mathbf{R}) \in \mathcal{G}_{\mathcal{K}'}$ et, pour tout $b \in f \circ p(\mathbf{R})$, $f^{-1}(b) \neq \emptyset \Rightarrow (f \circ p)^{-1}(b) = \mathbf{R}$, de sorte que $f \circ p \in \mathcal{L}\mathcal{W}_{\mathcal{K}'}$. On se trouve alors dans un cas d'application triviale du critère 1.73 de [11] concernant les applications lisses entre espaces difféologiques dont les structures sont engendrées par des familles données de paramétrisations, à savoir le cas où pour toute paramétrisation p de la première famille, $f \circ p$ appartient à la seconde famille. De même, pour toute paramétrisation $(p : \mathbf{R}^n \supset U \rightarrow E) \in \mathcal{L}\mathcal{T}_{\mathcal{K}}$, on a $(f \circ p) \in \mathcal{L}\mathcal{T}_{\mathcal{K}'}$ puisque toute partie connexe (pour la topologie usuelle) de U est transformée par composition en une partie connexe de l'espace connectif (E', \mathcal{K}') . Enfin, pour toute paramétrisation $(p : \mathbf{R}^n \supset U \rightarrow E) \in \mathcal{L}\mathcal{A}_{\mathcal{K}}$, on a $(f \circ p) \in \mathcal{L}\mathcal{A}_{\mathcal{K}'}$ puisque toute partie connexe par arcs de U est transformée par composition avec f en une partie connexe de l'espace connectif (E', \mathcal{K}') .

□

La functorialité des opérateurs considérés ci-dessus conduit à s'interroger sur l'existence d'adjonctions. Commençons par remarquer que U_{DC} n'admet pas d'adjoint à gauche. En effet, on vérifie facilement que le foncteur U_{DC} ne préserve pas les produits²⁰. Considérons par exemple

²⁰. Il est connu que tout foncteur qui admet un adjoint à gauche préserve toute les limites inverses, en particulier les produits.

l'espace difféologique \mathbf{R} muni de la difféologie usuelle. Alors $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ est le plan \mathbf{R}^2 muni de la difféologie usuelle²¹, dont la structure connective est constituée des connexes par arcs, qui sont en particulier connexes au sens de la topologie usuelle du plan, tandis que le carré cartésien de l'espace connectif usuel \mathbf{R} admet pour connexe toute partie de \mathbf{R}^2 dont les deux projections sont connexes, ce qui n'implique même pas la connexité au sens de la topologie usuelle du plan²².

Remarque 11. Nous avons qualifié U_{DC} de « foncteur d'oubli », car il s'agit d'un foncteur fidèle entre catégories concrètes et qu'il ne retient qu'une partie des informations contenues dans une difféologie, à savoir la donnée des parties connectées. Mais il faut remarquer que, n'admettant pas d'adjoint à gauche, ce foncteur d'oubli U_{DC} a un statut bien différent des foncteurs d'oubli que l'on rencontre notamment en algèbre.

Proposition 21. $LA : \mathbf{Cncd} \rightarrow \mathbf{Diff}$ est adjoint à droite de $U_{DC} : \mathbf{Diff} \rightarrow \mathbf{Cncd}$:

$$U_{DC} \dashv LA.$$

Preuve. Étant donné (X, \mathcal{D}) un espace difféologique, (Y, κ_Y) un espace connectif difféologisable, et $f : U_{DC}(X, \mathcal{D}) \rightarrow (Y, \kappa_Y)$ une application connective, montrons que f est lisse de (X, \mathcal{D}) dans $LA((Y, \kappa_Y))$: pour toute plaque $(p : U_p \rightarrow X) \in \mathcal{D}$ et tout connexe par arcs $A \subset U_p$, on a $p(A) \in \mathcal{K}_{\mathcal{D}} = U_{DC}(\mathcal{D})$, et donc $f \circ p(A) \in \kappa_Y$, ce qui prouve que $(f \circ p) \in \mathcal{LA}_{\kappa_Y}$. Ceci établit la lisseté²³ de f . D'un autre côté, donnons-nous à présent une application lisse $g : (X, \mathcal{D}) \rightarrow LA(Y, \kappa_Y)$. En appliquant le foncteur U_{DC} à g , on obtient que $g = U_{DC}(g)$ est une application connective de $U_{DC}(X, \mathcal{D})$ dans $U_{DC}(LA(Y, \kappa_Y)) = (Y, \kappa_Y)$. On a ainsi établi que $f \mapsto f$ est une bijection de $\mathbf{Cncd}(U_{DC}(X, \mathcal{D}), (Y, \kappa_Y))$ sur $\mathbf{Diff}((X, \mathcal{D}), LA(Y, \kappa_Y))$, et puisque cette bijection est trivialement na-

21. Puisqu'une plaque de cet espace produit est une paramétrisation dont les deux projections sont elles-mêmes des plaques. Sur le produit des espaces difféologiques, voir [11], art. 1.55.

22. Voir [8].

23. *Je m'aperçois à l'instant qu'à l'adjectif lisse ne correspond aucun substantif [...] Qu'il me soit permis de créer le mot « lisseté » pour donner une idée, aux encombrés de toute nature, de ce que peut être un corps heureux.* Amélie Nothomb, *Le Sabotage amoureux*, 1993.

turelle, cela prouve l'adjonction annoncée.

□

Remarque 12. L'adjonction $U_{DC} \dashv LA$ peut être comparée à celle qui a lieu entre le foncteur d'oubli de la structure topologique d'une part, et d'autre part le foncteur qui consiste à munir tout ensemble de la topologie grossière. Et, de fait, la difféologie définie par LA est la plus grossière de celles qui préservent la structure connective des espaces auxquels on applique ce foncteur.

Les résultats précédents nous donnent l'occasion d'introduire la notion d'application localement connective définie sur un espace topologique et à valeurs dans un espace connectif, et de faire quelques remarques à ce sujet.

Proposition 22. *Soit (E, \mathcal{K}) un espace connectif difféologisable, et soit $\mathcal{LA}_{\mathcal{K}} \subset \text{Param}(E)$ l'ensemble des paramétrisations connectives de E tel que défini dans la proposition 18. Alors*

$$\mathcal{LA}_{\mathcal{K}} = \langle \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} \rangle .$$

Preuve. Soit $p \in \langle \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} \rangle$, une plaque de l'espace difféologique $(E, \langle \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} \rangle)$. Pour tout connexe par arcs $A \subset U_p$, $p(A)$ est une partie connectée de $(E, \langle \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} \rangle)$, autrement dit $p(A) \in U_{DC}(\langle \mathcal{LA}_{\mathcal{K}} \rangle)$ d'où, d'après la proposition 18, $p(A) \in \mathcal{K}$. On en déduit que p vérifie la propriété qui caractérise les éléments de $\mathcal{LA}_{\mathcal{K}}$, d'où l'égalité annoncée.

□

Remarque 13. Étant donné (E, \mathcal{K}) un espace connectif difféologisable, la proposition précédente entraîne que l'ensemble $\mathcal{LA}_{\mathcal{K}}$ est une difféologie, de sorte qu'il vérifie en particulier l'axiome de localité ([11], art. 1.5) : pour qu'une paramétrisation $p : \mathbf{R}^n \supset U \rightarrow E$ transforme tout connexe par arcs de U en connexe de E , il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement ouvert de U tel que la restriction de p à chacun des ouverts de ce recouvrement vérifie encore la même propriété, ce qui peut d'ailleurs se vérifier directement sans difficulté. Par contre, si on remplace « connexe par arcs » par « connexe », on obtient un énoncé qui n'est pas satisfait

pour tout espace topologique. Plus précisément, étant donné (X, \mathcal{T}_X) un espace topologique, disons qu'une application $f : X \rightarrow E$ est *localement connective* s'il existe un recouvrement ouvert $(X_i)_{i \in I}$ de X tel que, pour tout $i \in I$, $f|_{X_i}$ est un morphisme connectif $X_i \rightarrow E$, où X_i est muni de la structure connective induite²⁴ par $U_T(\mathcal{T}_X)$. On constate alors, comme le montre le contre-exemple suivant, qu'une application localement connective n'est pas nécessairement connective : on prend pour (X, \mathcal{T}_X) le sous-espace topologique du plan \mathbf{R}^2 induit par la topologie usuelle sur l'ensemble $X \subset \mathbf{R}^2$ défini par

$$X = \left(\bigcup_{x \in \mathbf{Q}^*} D_x \right) \cup \Delta \cup \{(0, 0)\},$$

où l'on a posé $\Delta = \mathbf{R} \times \{1\}$ et, \mathbf{Q}^* désignant l'ensemble des rationnels non nuls, $D_x = \{x\} \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^2$ pour tout $x \in \mathbf{Q}^*$; pour espace connectif (E, \mathcal{K}) , on prend $E = \{0, 1\}$ muni de la structure connective discrète; et pour application $f : X \rightarrow E$, on prend celle définie par $f((0, 0)) = 0$ et, pour tout $x \neq \{(0, 0)\}$, $f(x) = 1$. Cette application n'est pas connective, car $f(X)$ n'est pas connexe alors que X l'est, comme on peut le vérifier ainsi : s'agissant d'un espace métrique, il suffit²⁵ de vérifier que X ne peut être recouvert par deux ouverts non vides disjoints. Soient donc A et B deux ouverts disjoints qui recouvrent X , avec par exemple $A \ni (0, 0)$. Alors $A \setminus \{(0, 0)\}$ et B sont deux ouverts disjoints qui recouvrent le connexe par arcs $(\bigcup_{x \in \mathbf{Q}^*} D_x) \cup \Delta$, et l'on a alors $A \setminus \{(0, 0)\} \neq \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$. Donc X est connexe. Maintenant, vérifions que f est localement connective. Considérons pour cela $(U_i)_{i \in \{1, 2\}}$ le recouvrement ouvert de X défini par $U_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y > 1/4\} \cap X$ et $U_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y < 3/4\} \cap X$. L'application f étant constante sur U_1 , elle y est nécessairement connective. La connectivité de f sur U_2 résulte du fait que f est constante sur chacune des composantes connexes de U_2 , à savoir d'une part les segments $D_x \cap U_2$, et d'autre part le singleton $\{0\}$. Finalement, on a bien montré que f est localement connective mais n'est pas connective. Remarquons que l'espace

24. On vérifie facilement que la structure connective induite sur une partie $Y \subset X$ par la structure connective $U_T(\mathcal{T}_X)$ coïncide avec la structure connective $U_T(\mathcal{T}_Y)$ associée à la topologie \mathcal{T}_Y induite par \mathcal{T}_X sur Y .

25. Voir l'exemple 1 relatif au foncteur V_T .

métrique X de cet exemple n'est pas localement connexe ; nous laissons ici ouvert le problème de savoir si, dans le cas où l'on suppose X localement connexe, en particulier si X est un ouvert d'un espace \mathbf{R}^n , toute application localement connective $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (E, \mathcal{K})$ est, ou non, nécessairement connective de $U_T(X, \mathcal{T})$ dans (E, \mathcal{K}) .

Remerciements. La rédaction de cet article a bénéficié des discussions que j'ai pu avoir avec de nombreuses personnes, et je souhaite en particulier remercier ici Anatole Khelif, Patrick Iglesias-Zemmour, Jacques Riguet, Saab Abou-Jaoudé et Andrée Ehresmann, ainsi que les participants du séminaire CLE (Catégories, Logique, Etc...) dirigé à Paris VII par Anatole Khelif.

Références

- [1] Reinhard Börger. *Kategorielle Beschreibungen von Zusammenhangsbegriffen*. PhD thesis, Fernuniversität, Hagen, 1981.
- [2] Reinhard Börger. Connectivity spaces and component categories. In *Categorical topology, International Conference on Categorical Topology (1983)*, Berlin, 1984. Heldermann.
- [3] Hermann Brunn. Ueber verkettung. *Sitzungsberichte der Bayerische Akad. Wiss., MathPhys. Klasse*, 22 :77–99, 1892.
- [4] Hans Debrunner. Links of Brunnian type. *Duke Math. J.*, 28 :17–23, 1961.
- [5] Hans Debrunner. Über den Zerfall von Verkettungen. *Mathematische Zeitschrift*, 85 :154–168, 1964.
- [6] Stéphane Dugowson. Espaces connectifs et espaces de partage, 2003. Unpublished.
- [7] Stéphane Dugowson. Les frontières dialectiques. *Mathematics and Social Sciences*, 177 :87–152, 2007.
- [8] Stéphane Dugowson. On connectivity spaces. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, LI(4) :282–315, 2010. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00446998/fr>.

- [9] Stéphane Dugowson. Introduction aux dynamiques catégoriques connectives, décembre 2011. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00654494/fr/>.
- [10] Stéphane Dugowson. *Dynamiques connectives (Une introduction aux notions connectives : espaces, représentations, feuilletages et dynamiques catégoriques)*. Éditions Universitaires Européennes, 2012.
- [11] Patrick Iglesias-Zemmour. *Diffeology*. Mathematical Surveys and Monographs 185. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS). xxiii, 439 p., 2013.
- [12] Taizo Kanenobu. Satellite links with Brunnian properties. *Arch. Math.*, 44(4) :369–372, 1985.
- [13] Taizo Kanenobu. Hyperbolic links with Brunnian properties. *J. Math. Soc. Japan*, 38 :295–308, 1986.
- [14] Georges Matheron and Jean Serra. *Image analysis and Mathematical morphology*, volume 2. Academic Press, London, 1988.
- [15] Georges Matheron and Jean Serra. Strong filters and connectivity. In *Image analysis and Mathematical morphology*, volume 2, pages 141–157. Academic Press, London, 1988.
- [16] Joseph Muscat and David Buhagiar. Connective space. *Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. (Series B : Mathematical Science)*, (39) :1–13, 2006.
- [17] Dale Rolfsen. *Knots and links*. Publish or Perish, Inc., Houston, 1976, sec. ed. 1990.
- [18] J. Serra. Connectivity on complete lattices. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 9(3) :231–251, 1998.
- [19] J. Serra. Connections for sets and functions. *Fundamenta Informaticae*, 41(1-2) :147–186, 2000.