THÉORIE des ENSEMBLES

par

ANDRÉE BASTIANI

Maître de Conférences

CENTRE DE DOCUMENTATION UNIVERSITAIRE

5, Place de la Sorbonne, 5

PARIS-V

1970

A Charles EHRESMANN

INTRODUCTION

Bien que la Théorie des ensembles soit à la base de toute la Mathématique moderne, on peut aborder la plus grande partie des Mathématiques en connaissant seulement quelques rudiments de cette théorie. Il n'en est cependant plus ainsi lorsqu'on veut travailler en Théorie des Catégories, où interviennent dès le départ des questions ensemblistes et où les résultats peuvent être bien différents selon la théorie des ensembles utilisée; par exemple certains théorèmes d'existence de structures libres sont valables pour les "petites" catégories, non pour les "grandes". Toute étude des catégories présuppose donc le choix d'une théorie des ensembles. C'est pourquoi, ayant désiré enseigner en Licence, il y a deux ans, les bases de la théorie des catégories, j'avais décidé de rédiger un exposé sommaire sur la théorie des ensembles (multigraphié, Amiens 1968, 120 pages, actuellement épuisé). Ce travail reposait sur la théorie de Zermelo - Fraenkel avec axiome du choix et, de plus, axiome des univers (employé en particulier pour la construction des ordinaux). Ayant accepté de faire cette année le cours d'une unité de Maîtrise sur la Théorie des ensembles (sans être spécialiste dans ce domaine !), il m'a semblé nécessaire de remanier complètement ce texte en mettant en évidence l'incidence des axiomes "supplémentaires" (axiome de l'infini, du choix, des univers) et en

développant un certain nombre de questions à peine esquissées dans la première version; j'ai d'ailleurs tenu compte des nombreuses remarques de mes étudiants, en particulier de M. Simonnet, que je remercie.

Contrairement à la plupart des livres relatifs à la théorie des ensembles, le texte est toujours rédigé en style mathématique usuel et ne suppose aucune connaissance de Logique formelle. A la base, on admet une théorie "naïve" des collections (qui pourrait facilement être formalisée) et l'on définit axiomatiquement certaines collections particulières, les Totalités, qui sont des modèles de la théorie des ensembles de Zermelo - Fraenkel sans axiome de l'infini ni axiome du choix. Sauf dans le dernier chapitre (où l'on fait "varier" la totalité), on étudie essentiellement l'une de ces totalités, dont les objets sont appelés ensembles. Voici quelques indications sur le contenu des différents chapitres:

Le chapitre I introduit les axiomes (à l'exclusion de l'axiome des univers et de l'axiome de fondation, considérés respectivement dans les chapitres IV et VI) et la terminologie utilisée (avec assez de rigueur) dans tout le texte. La définition des ensembles finis choisie est celle de Whitehead - Russell. Les propriétés des produits et des sommes infinis sont étudiées dans le § 4; en particulier on y introduit l'axiome du choix. Cet axiome n'est généralement pas supposé vérifié dans la suite, et les résultats où il intervient sont nettement mis en évidence.

Le deuxième chapitre débute par une étude élémentaire des ensembles ordonnés. Ensuite est défini l'ensemble ordonné des U-cardinaux associé à certains ensembles U, ce qui conduit à une étude détaillée des U-cardinaux finis et, par suite, des ensembles ordonnés discrets et des ensembles de Péano. L'isomorphisme entre ensembles de Péano est déduit de l'isomorphisme entre ensembles ordonnés discrets sans dernier élément et de l'existence (en présence de l'axiome de l'infini) d'un tel ensemble ordonné discret. Il s'ensuit la construction par récurrence de l'ensemble N des entiers naturels (suivant la définition de Von Neumann: $\emptyset$ est son premier élément et $n+1 = nU\{n\}$). Les ensembles dénombrables sont étudiés dans le § 10.

Le chapitre III a trait à la construction des nombres réels. Les ensembles des entiers relatifs et des nombres rationnels sont caractérisés à la fois par les propriétés de leur ordre canonique et par celle de leur structure d'anneau. La construction du corps archimédien des nombres réels est obtenue comme cas particulier de théorèmes généraux sur la complétion des ensembles ordonnés denses et des magmas ordonnés. Les groupes archimédiens et les corps archimédiens sont entièrement caractérisés.

Les chapitres suivants sont pratiquement indépendants du chapitre III. Dans le chapitre IV, les préunivers sont introduits: ce sont les univers et les miniunivers (lesquels ne vérifient pas l'axiome de l'infini). Le mot univers est pris dans le sens de Ehresmann, i.e. on ne suppose pas que l'univers est transitif (lorsque l'axiome du choix est vérifié, ces univers sont analogues à certains ensembles considérés par Tarski). Cette terminologie est donc un peu différente de celle de Grothendieck (et de Sonner) pour

qui univers signifie toujours univers transitif. Le mini-univers engendré par un ensemble fini est construit par simple récurrence; il est dénombrable si l'axiome du choix est vérifié.

Le reste du chapitre IV est consacré à l'étude des ensembles bien ordonnés. L'équivalence entre axiome du choix, théorème de Zorn et théorème de Zermelo est démontrée dès que possible. En effet cette équivalence est très importante dans de nombreuses branches des Mathématiques (en particulier en Topologie et en Analyse), alors que les autres résultats sur les ensembles bien ordonnés sont plus spécifiques. Le § 17 prépare le terrain pour l'étude des ordinaux, dont la théorie occupe le chapitre V. Il se termine par la preuve de l'équipotence de E avec $E \times E$, lorsqu'il existe un bon ordre sur E.

Un ensemble bien ordonné dont chaque élément est identique à la section associée est appelé type ordinal. Un ordinal est l'ensemble sous-jacent à un type ordinal. Le type ordinal isomorphe à un ensemble bien ordonné est construit par induction, en utilisant la notion de U-ordinal, où U est un ensemble saturé par inclusion. Cette notion élémentaire est celle de Cantor "relativisée" à U, pour éviter les antinomies. Les cardinaux sont regardés comme des ordinaux particuliers (les ordinaux initiaux); les sommes et produits de cardinaux sont étudiés même sans axiome du choix (mais un ensemble peut alors ne pas avoir de cardinal !). Les opérations sur les ordinaux sont définies à partir des sommes ordonnées et des produits colexicographiques. Différentes caractérisations des ordinaux réguliers et des ordinaux inaccessibles sont obtenues.

Dans le dernier chapitre, partant d'un ensemble E, non nécessairement transitif, on étudie les ensembles E-fondés (définis d'une manière constructive). Si l'axiome du choix est vérifié, il en résulte qu'il existe un univers (resp. un univers transitif) engendré par E si, et seulement si, il existe un ordinal inaccessible non dénombrable strictement plus grand que le cardinal de E (resp. que le cardinal de la clôture transitive de E). Ainsi l'axiome des univers (tel qu'il est énoncé ici, pour des univers non forcément transitifs) équivaut à l'axiome des univers transitifs. Enfin on montre qu'une totalité vérifiant l'axiome du choix contient un plus petit modèle de la théorie des ensembles et, si elle vérifie aussi l'axiome des univers, un plus petit modèle vérifiant l'axiome des univers (ce qui fait intervenir les ordinaux hyperinaccessibles et les hyperunivers).

Parmi les questions qui m'ont paru dépasser le cadre de ce cours figurent en particulier l'Arithmétique ordinale fine, une étude approfondie de l'hypothèse du continu généralisée et le développement des compléments esquissés dans le dernier paragraphe. Les résultats contenus dans les chapitres I et II et dans les § 15 et 16 (chapitre IV) sont indispensables à tout mathématicien. Le chapitre III est plutôt destiné aux futurs enseignants. Quant à la théorie des ordinaux, bien que "toute la littérature sur les cardinaux et les ordinaux" ait été déclarée "stérile" (J. Dieudonné, Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques, n° 253, 1966, page 327), elle a récemment été utilisée avec succès pour démontrer des théorèmes fins sur les catégories (existence de diverses

structures libres, en particulier théorèmes de complétion des catégories).

En conclusion, j'espère que ce cours, malgré certains passages elliptiques et la rigidité générale de sa terminologie et de sa conception (en particulier renvois fréquents aux propositions antérieures par leur seul numéro) ne découragera pas de jeunes étudiants, et qu'ils pourront sentir tout l'attrait de la Théorie des ensembles et admirer le génie de son initiateur, ce mathématicien inspiré, téméraire et souvent contesté qui, le premier, a dévoilé le mystère des infinis: Cantor.

A.B.
Paris, 1969

CHAPITRE I

Base de la Théorie

1. *Premiers axiomes de la Théorie des ensembles*.

Dans le langage courant, les mots ensemble et collection (ou classe) sont synonymes. Il n'en est pas de même en Mathématiques, où le mot ensemble est pris dans un sens plus restrictif.

La notion primitive (que nous ne définissons pas) est celle de *collection* (d'objets); intuitivement une collection est un assemblage d'objets "en vrac" (abstraction faite de tout arrangement selon forme, couleur ou autre critère). On suppose d'une manière précise que:

(C1) Deux collections ayant les mêmes objets sont *identiques*, i.e. dans chaque énoncé où l'une intervient, on peut la remplacer par l'autre.

(C2) Il existe une collection (nécessairement unique) n'ayant aucun objet, dite *collection vide*.

Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux collections et si tout objet de $\mathcal{D}'$ est aussi un objet de $\mathcal{D}$, on dit que $\mathcal{D}'$ est une *sous-collection de* $\mathcal{D}$. La collection vide est une sous-collection de toute collection.

(C3) Soit $\mathcal{D}$ une collection. Si P est une propriété, on dit que P est *une propriété sur* $\mathcal{D}$ si, pour tout objet

de $\mathcal{D}$, ou bien cet objet vérifie P ou bien il ne vérifie pas P ; dans ce cas, on suppose qu'il existe une sous-collection de $\mathcal{D}$ formée des (i.e. ayant pour objets les) objets de $\mathcal{D}$ qui vérifient P.

Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait définir le mot propriété dans l'énoncé précédent, en se plaçant dans le cadre d'une Logique formelle, ce que nous ne ferons pas ici. Toutefois lorsqu'une sous-collection sera construite à l'aide de (C3), on se convaincra aisément que la propriété utilisée est formalisable.

Définition. Soit $\mathcal{D}$ une collection. On dit que $\mathcal{D}$ est une *totalité* si les axiomes suivants sont vérifiés:

(A1) Tout objet E de $\mathcal{D}$ est une sous-collection de $\mathcal{D}$.

(A2) La collection vide est un objet de $\mathcal{D}$.

(A3) Si E est un objet de $\mathcal{D}$, il existe un objet $\{E\}$ de $\mathcal{D}$ ayant E pour seul objet.

(A4) Soit E un objet de $\mathcal{D}$; il existe un objet $\mathcal{P}(E)$ de $\mathcal{D}$ défini comme suit: ses objets sont tous les objets de $\mathcal{D}$ qui sont des sous-collections de E.

(A5) Si J est un objet de $\mathcal{D}$ et si E_i est un objet de $\mathcal{D}$ pour tout objet i de J, alors les objets appartenant au moins à l'un des E_i forment une collection qui est un objet de $\mathcal{D}$, noté $\bigcup_{i\in J} E_i$.

Si $\mathcal{D}$ est une totalité, un objet de $\mathcal{D}$ est appelé *$\mathcal{D}$-ensemble.*

Remarque. En pratique, mis à part dans les discussions sur les fondements des Mathématiques, tous les objets sur lesquels on raisonne appartiennent à une totalité $\mathcal{D}$ choisie une fois pour toutes. Dans ce cas, un $\mathcal{D}$-ensemble est appelé *ensemble* et $\mathcal{D}$ est *la classe de tous les ensembles.*

HYPOTHESE. Dans tout ce chapitre, nous supposons donnée une totalité $\mathcal{D}$ et ensemble signifie $\mathcal{D}$-ensemble.

Conventions. 1° Soit E un ensemble; un objet de la sous-collection E de $\mathcal{D}$ est dit *élément de* E. La phrase

x est un élément de E

est souvent abrégée en la formule $x \in E$, ou remplacée par l'une des expressions: x appartient à E, ou: E admet (resp. E a) x pour élément. Si x et E sont des ensembles et si x n'est pas un élément de E, on posera $x \notin E$. Si E a pour éléments les ensembles x vérifiant une propriété P (en abrégé tels que Px), on dit que E est *l'ensemble des* (i.e. formé des) x *vérifiant* P, et l'on désigne aussi E par $\{x \mid Px\}$.

2° Soient E et E' des ensembles. S'ils sont identiques, on écrit $E = E'$; d'après (C1), $E = E'$ équivaut à

$x \in E$ ssi(°) $x \in E'$.

Si E et E' ne sont pas identiques, on dit qu'ils sont *différents* ou *distincts*, et l'on note $E \neq E'$.

3° Soit E un ensemble. On appelle *partie* de E un ensemble F qui est une sous-collection de la collection E. La phrase

F est une partie de E

est souvent remplacée par $F \subset E$ (resp. par $E \supset F$), formules lues respectivement: F est contenu dans E et E contient F. En particulier, E lui-même est une partie

(°) ssi doit être lu: si, et seulement si.

de E; une partie de E différente de E est dite *partie propre de* E. Tout ensemble admet pour partie la collection vide (qui est un ensemble d'après (A2)), que l'on appelle *l'ensemble vide* et que l'on désigne par $\emptyset$; la seule partie de $\emptyset$ est $\emptyset$. Un ensemble différent de l'ensemble vide est dit *non vide*.

4° Soit E un ensemble. La collection $\{E\}$ ayant E pour seul élément est appelé *ensemble réduit à* E; on a:

$$x \in \{E\} \quad \text{ssi} \quad x = E.$$

La collection P(E) de l'axiome (A4) est appelée *ensemble des parties de* E, la collection $\bigcup_{i\in J} E_i$ de l'axiome (A5) est nommée *ensemble réunion de* $(E_i)_{i\in J}$.

PROPOSITION 1. Soient E *un ensemble et* C *une sous-collection de* E. *Alors* C *est un ensemble.*

Preuve. Pour tout $x \in E$, notons E_x:

- l'ensemble $\{x\}$ si x est un objet de C,
- l'ensemble vide si x n'est pas un objet de C.

L'ensemble $\bigcup_{x\in E} E_x$ a précisément pour éléments les objets de C. Donc C est l'ensemble réunion de $(E_x)_{x\in E}$.

COROLLAIRE. Soit E *un ensemble. Une collection* E' *est une partie de* E *ssi c'est une sous-collection de* E; *ainsi* P(E) *est l'ensemble formé de toutes les sous-collections de la collection* E.

Remarques. 1° La proposition 1 n'entraîne pas que toute sous-collection de $\mathcal{D}$ est un ensemble. Par exemple, comme nous verrons plus tard, on obtient le paradoxe de Burali-Forti si l'on suppose que $\mathcal{D}$ lui-même est un $\mathcal{D}$-ensemble.

2° Soit $\mathcal{D}'$ une autre totalité et supposons que E soit à la fois un $\mathcal{D}$-ensemble et un $\mathcal{D}'$-ensemble. D'après la proposition 1, les parties du $\mathcal{D}$-ensemble E et le $\mathcal{D}$-ensemble P(E) sont identiques respectivement aux parties du $\mathcal{D}'$-ensemble E et au $\mathcal{D}'$-ensemble de ses parties. Ainsi les notions de partie et d'ensemble des parties sont définies indépendamment de la totalité à laquelle appartient E (ce qui justifie que $\mathcal{D}$ ne soit pas spécifié dans leurs notations). Il en est de même pour les autres ensembles (réunion, intersection, complémentaire, couple, famille,...) que nous construirons en partant d'ensembles donnés, et nous ne le répéterons plus.

APPLICATIONS.

1° Soient E un ensemble et P une propriété sur E. D'après la proposition 1, la collection C formée des éléments x de E vérifiant P est un ensemble (peut-être vide). On le note

$$\{x \mid x \in E, Px\} \qquad \text{ou} \qquad \{x \in E \mid Px\}$$

et on l'appelle *l'ensemble formé des* $x \in E$ *tels que* Px ou *l'ensemble des* $x \in E$ *vérifiant* P. Par exemple, si A est une partie de l'ensemble E, l'ensemble des $x \in E$ tels que $x \notin A$ est appelé *complémentaire de* A *dans* E, noté $E\backslash A$.

2° Soient I un ensemble et E_i un ensemble pour tout $i \in I$. Soit E l'ensemble réunion de $(E_i)_{i\in I}$. L'ensemble des $x \in E$ tels que

$$x \in E_i \quad \text{pour tout} \quad i \in I$$

est noté $\bigcap_{i\in I} E_i$ et nommé *intersection de* $(E_i)_{i\in I}$. Nous supposons connues les propriétés élémentaires des opérations

de réunion et d'intersection. En particulier, on a

$$\bigcup_{k\in K} E_k = \bigcup_{l\in J}\Big(\bigcup_{j\in K_l} E_j\Big) \quad \text{et} \quad \bigcap_{k\in K} E_k = \bigcap_{l\in J}\Big(\bigcap_{j\in K_l} E_j\Big),$$

si $K = \bigcup_{l\in J} K_l$; si A_l est une partie de l'ensemble E pour tout $l \in J$, alors

$$E\setminus\bigcup_{l\in J} A_l = \bigcap_{l\in J}(E\setminus A_l) .$$

3° Soit E un ensemble et posons $E_x = x$ pour tout $x \in E$. Les ensembles réunion et intersection de $(E_x)_{x\in E}$ sont représentés respectivement par $\bigcup E$ et par $\bigcap E$, et appelés *réunion de* E et *intersection de* E. Les éléments de la réunion (resp. de l'intersection) de E sont les objets appartenant à au moins un (resp. à tout) élément de E. Par exemple, si $E = \emptyset$, on trouve:

$$\bigcup\emptyset = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcap\emptyset = \emptyset.$$

Remarquons que, si J est un ensemble et E_l un ensemble pour tout $l \in J$, alors l'ensemble

$$F = \bigcup_{l\in J} F_l , \quad \text{où } F_l = \{E_l\} \text{ pour tout } l \in J,$$

admet pour éléments les E_l. Par suite

$$\bigcup F = \bigcup_{l\in J} E_l \quad \text{et} \quad \bigcap F = \bigcap_{l\in J} E_l .$$

PROPOSITION 2. Soient E et E' des ensembles. Il existe un ensemble E'' ayant pour seuls éléments E et E'. Si $E = E'$, on a $E'' = \{E\}$.

Preuve. Puisque $\emptyset$ est un ensemble, $\{\emptyset\}$ et $P(\{\emptyset\})$ sont des ensembles; ce dernier ensemble a pour seuls éléments $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$. Posons

$$J = P(\{\emptyset\}), \quad E_\emptyset = \{E\} \quad \text{et} \quad E_{\{\emptyset\}} = \{E'\}.$$

L'ensemble réunion de $(E_l)_{l\in J}$ a pour seuls éléments E et E'. En particulier si $E = E'$, son seul élément est E. Donc $E'' = \bigcup_{l\in J} E_l$.

Définition. Soient E et E' deux ensembles. L'ensemble ayant E et E' pour seuls éléments (proposition 2) est noté $\{E,E'\}$ et appelé *paire* (formée de E et de E').

Conventions. Si E et F sont des ensembles, on pose

$$E\cup F = \bigcup\{E,F\} \quad \text{et} \quad E\cap F = \bigcap\{E,F\}.$$

On désigne aussi par 0 l'ensemble $\emptyset$, par 1 l'ensemble $P(0) = \{0\}$, par 2 l'ensemble

$$P(1) = \{0,\{0\}\} = 1\cup\{1\},$$

par 3 l'ensemble $2\cup\{2\} = \{0,1,2\}$. On dit que G est un *ensemble à deux éléments* (ou une *paire propre*) s'il existe des ensembles E et E' tels que

$$E \neq E' \quad \text{et} \quad G = \{E,E'\} .$$

Si F, J et E_l, pour tout $l \in J$, sont des ensembles, on a la formule de "distributivité":

$$\Big(\bigcup_{l\in J} E_l\Big)\cap F = \bigcup_{l\in J}(E_l\cap F), \quad \Big(\bigcap_{l\in J} E_l\Big)\cup F = \bigcap_{l\in J}(E_l\cup F).$$

Définition. Soient E et E' deux ensembles. La paire $\{\{E\},\{E,E'\}\}$ est représentée par (E,E') et appelée *couple de premier terme* E, *de deuxième terme* E'.

Alors que $\{E,E'\} = \{E',E\}$ (i.e. une paire ne dépend pas de l'ordre dans lequel on écrit ses éléments), le couple (E,E') est différent du couple (E',E), si $E \neq E'$, en vertu de la proposition suivante.

PROPOSITION 3. Soient (E,E') et (F,F') des couples. On a $(E,E') = (F,F')$ ssi $E = F$ et $E' = F'$.

Preuve. Si $E = F$ et $E' = F'$, par construction on a

$(E,E') = (F,F')$. Supposons inversement que cette égalité soit vérifiée, c'est-à-dire par définition que

$$\{\{E\},\{E,E'\}\} = \{\{F\},\{F,F'\}\} .$$

Les seuls cas possibles sont les suivants:

a) $\{E\} = \{F\}$ et $\{E,E'\} = \{F,F'\}$.

La première égalité entraîne $E = F$. Il résulte alors de la seconde $E' = F'$.

b) $\{E\} = \{F,F'\}$ et $\{E,E'\} = \{F\}$.

La première formule a pour conséquence $F = F' = E$ et la deuxième $E = E' = F$. D'où

$$E = E' = F = F',$$

Définition. Soient E et E' des ensembles. Si $x \in E$, posons

$$A_{xy} = \{(x,y)\} \quad \text{pour tout } y \in E',$$

et soit A_x l'ensemble réunion de $(A_{xy})_{y\in E'}$. L'ensemble $\bigcup_{x\in E}(\bigcup_{y\in E'}\{(x,y)\})$ réunion de $(A_x)_{x\in E}$ est appelé *produit (cartésien) de* (E,E'), noté $E\times E'$.

Ainsi $E\times E'$ est l'ensemble formé des couples (x,y) tels que $x \in E$ et $y \in E'$. Par suite on a aussi:

$$E\times E' = \bigcup_{y\in E'}(\bigcup_{x\in E}\{(x,y)\}).$$

PROPOSITION 4. Soient E, E', F, F' *des ensembles non vides. On a* $E\times E' = F\times F'$ *ssi* $E' = F'$ *et* $E = F$ *. De plus* $C\times\emptyset = \emptyset = \emptyset\times C$ *pour tout ensemble* C.

Preuve. La deuxième affirmation est évidente. Montrons la première. Si $(x,y) \in E\times E'$ et si $E\times E'$ est contenu dans $F\times F'$, il existe $x' \in F$ et $y' \in F'$ tels que

$$(x,y) = (x',y'),$$

ce qui entraîne, d'après la proposition 2,

$$x = x' \in F \quad \text{et} \quad y = y' \in F'.$$

Donc $E \subset F$ et $E' \subset F'$. De même on déduit les inclusions $F \subset E$ et $F' \subset E'$ de l'inclusion $F\times F' \subset E\times E'$. Au total

$$E\times E' = F\times F' \quad \text{ssi} \quad E = F \text{ et } E' = F'.$$

Soit ξ un ensemble de couples (i.e. un ensemble dont les éléments sont des couples. Pour tout couple $m = (x,i)$ appartenant à ξ, notons A_m l'ensemble $\{i\}$ réduit au deuxième terme du couple m. L'ensemble $\bigcup_{(x,i)\in\xi}\{i\}$ réunion de $(A_m)_{m\in\xi}$ est appelé *source de* ξ. De même, on obtient un ensemble $B = \bigcup_{(x,i)\in\xi}\{x\}$, appelé *but de* ξ, en associant à $(x,i) \in \xi$ l'ensemble $\{x\}$. Evidemment ξ est une partie du produit $B\times J$, où B est le but de ξ et J sa source. D'après la proposition 4, ξ est l'ensemble vide ssi $J = \emptyset$.

Définition. Soit J un ensemble. On appelle *famille indexée par* J un ensemble ξ de couples dont J est la source et vérifiant la propriété: Pour tout $i \in J$, il existe un et un seul couple appartenant à ξ et dont i soit le deuxième terme. Soit (x_i,i) ce couple; on dit aussi que ξ est la famille $(x_i)_{i\in J}$ et que x_i est *le i-ième terme de* ξ. On appelle *famille d'éléments de* E, où E est un ensemble, une famille $\xi = (x_i)_{i\in J}$ dont le but est contenu dans E (i.e. telle que $x_i \in E$ pour tout $i \in J$).

EXEMPLES.

1° Il existe une seule famille vide (c'est-à-dire indexée par $\emptyset$), à savoir $\emptyset$. Une famille indexée par I

est un couple $(x,0)$. Ce couple correspond biunivoquement à son premier terme x.

2° Si $J = 2 = \{0,1\}$, une famille indexée par J est un ensemble de la forme $\{(x,0),(y,1)\}$. Une telle famille est déterminée d'une façon unique par la donnée du couple (x,y). C'est pourquoi, si aucune confusion n'est possible, nous substituerons le couple (x,y) à la famille indexée par 2 qui lui correspond.

3° Une famille ξ indexée par l'ensemble 3 est appelée *un triplet*; c'est donc un ensemble de la forme

$$\xi = \{(x,0),(y,1),(z,2)\} .$$

Cet ensemble est déterminé d'une manière unique par la donnée de x, de y et de z ; aussi sera-t-il désigné par la formule (x,y,z).

4° Soit E un ensemble. On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in J}$ est un *recouvrement de* E si E est l'ensemble réunion de $(x_i)_{i\in J}$. Dans ce cas x_i est une partie de E pour tout $i \in J$. On appelle *partition de* E un recouvrement $(x_i)_{i\in J}$ de E tel que:

$x_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in J$,

$x_i \cap x_j = \emptyset$ quels que soient $i \in J$ et $j \in J\setminus\{i\}$.

5° Soient J un ensemble et E_i, pour tout $i \in J$, un ensemble. Alors $(E_i)_{i\in J}$ est une famille, de source J et de but $E = \{E_i \mid i \in J\}$.

Remarque. On considère souvent des familles $(x_i)_{i\in J}$ dont les termes x_i sont des ensembles d'un certain type (par exemple des couples, des parties d'un ensemble donné, des ensembles non vides,..).Lorsqu'on voudra spécifier qu'on

ne suppose pas les termes de la famille d'un type donné, on parlera aussi d'une *famille d'ensembles* (bien que, d'une manière rigoureuse, toute famille soit une famille d'ensembles).

2. *Relations. Applications.*

Définition. On appelle *relation* un triplet (F,M,E), où E et F sont des ensembles et M une partie du produit $F\times E$. Si r est une relation de la forme (F,M,E), on dit que E est *l'ensemble source de* r, que F est l'ensemble *but de* r, que M est *le graphe de* r, souvent noté $\underline{r}$, et que r est *une relation de* E *vers* F.

Soit $r = (F,\underline{r},E)$ une relation (c'est donc l'ensemble $r = \{(F,0),(\underline{r},1),(E,2)\}$). Si (y,x) appartient à $\underline{r}$, on dit que y est *associé à* x *par* r (plusieurs éléments y de F peuvent être associés à un même x). La formule $(y,x) \in \underline{r}$ est parfois remplacée par $y\ r\ x$.

A la relation r correspond la *relation réciproque de* r, notée $\bar{r}^1$, qui est la relation (E,M',F) dont le graphe M' est formé des couples

$$(x,y) \quad \text{tels que} \quad (y,x) \in \underline{r}.$$

Il existe une seule relation dont l'ensemble source est $\emptyset$ et dont l'ensemble but est un ensemble F donné: c'est la relation $(F,\emptyset,\emptyset)$. La relation $(\emptyset,\emptyset,\emptyset)$ est appelée *la relation vide.*

Soit r une relation $(F,\underline{r},E)$. Si A et A' sont respectivement des parties de E et de F, le triplet

$$(A',\underline{r}',A), \quad \text{où} \quad \underline{r}' = \underline{r} \cap (A'\times A),$$

est une relation r', dite *restriction de* r *à* (A',A). Plus généralement, on dit qu'une relation $r'' = (F',\underline{r}'',E')$ est *contenue dans* r si l'on a:

$$E' \subset E, \quad F' \subset F \quad \text{et} \quad \underline{r}'' \subset \underline{r}.$$

Définition. On appelle *application* une relation $f = (F,\underline{f},E)$ dont le graphe $\underline{f}$ est une famille indexée par l'ensemble source E de f.

Autrement dit, une application f est une relation $(F,\underline{f},E)$ vérifiant la condition:

Pour tout $x \in E$, il existe un et un seul $y \in F$ associé à x par f (i.e. tel que $(y,x) \in \underline{f}$). On pose alors $y = f(x)$, ou parfois $y = fx$, par exemple pour éviter les doubles parenthèses lorsque x est lui-même un couple.

Soit f une application dont l'ensemble source est E et l'ensemble but F; on dit dans ce cas que f est *une application de* E *dans* F, ou encore que f est l'application

$$x \to f(x) \quad \text{de } E \text{ dans } F.$$

Si A est une partie de E, on appelle *image de* A *par* f, et l'on note $f(A)$, si aucune confusion n'est possible, l'ensemble but de $\underline{f} \cap (F \times A)$. En particulier $f(E)$ est appelé *image de* F. Supposons aussi $B \subset F$; la restriction de f à (B,A) est une application ssi $f(A) \subset B$; ainsi la restriction de f à (F,A) est toujours une application, dite *restriction de* f *à* A, et notée f/A. On appelle *point fixe de* f un élément x de E tel que $f(x) = x$.

Définition. Une application f de E dans F est dite:

- une *surjection* (*de* F *sur* F) ssi $f(E) = F$,

- *une injection* ssi l'égalité $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$,

- *une bijection* ssi f est à la fois une injection et une surjection,

- *une rétraction* ssi l'on a $F = f(E) \subset E$ et $f(x) = x$ pour tout élément x de F.

Remarques. 1° Un ensemble ξ est une famille $(x_\iota)_{\iota \in J}$ d'éléments de l'ensemble E ssi ξ est le graphe d'une application f :

$$\iota \to x_\iota \quad \text{de } J \text{ dans } E.$$

C'est cette application que beaucoup d'auteurs désignent par la formule $(x_\iota)_{\iota \in J}$ et appellent famille. L'inconvénient de cette convention est que, si A est un autre ensemble contenant le but de ξ, la "famille"

$$\iota \to x_\iota \quad \text{de } J \text{ dans } A$$

est différente de la "famille" f, la première étant le triplet (A,ξ,J) tandis que la seconde est (E,ξ,J). En toute rigueur il faudrait alors employer deux notations différentes. C'est cette difficulté qu'évite la définition que nous adoptons, selon laquelle une famille est un ensemble de couples.

2° Une surjection f est connue dès qu'on se donne son graphe $\underline{f}$; en effet, les ensembles source et but de la surjection f sont respectivement la source et le but de son graphe $\underline{f}$.

EXEMPLES.

1° Soit E un ensemble. L'*application identique de* E, notée 1_E, est la relation (E,D_E,E), où D_E désigne la

diagonale de $E \times E$, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x,x) tels que $x \in E$. Soit A une partie de E ; la restriction de ι_E à A est l'application (E, D_A, A) ; on l'appelle *injection canonique de A dans E* et on la note souvent (E, ι, A).

2° Si E et F sont des ensembles et si $b \in F$, on appelle $(F, \{b\} \times E, E)$ *l'application de E dans F constante sur b* ; c'est l'application $x \to b$ de E dans F.

3° Soient E et F des ensembles. On appelle *projection canonique de* $F \times E$ *sur* E (resp. sur F) l'application p (resp. p') telle que:

p soit la surjection $(y,x) \to x$ de $F \times E$ sur E,

p' soit la surjection $(y,x) \to y$ de $F \times E$ sur F.

Si $h = (E, \underline{h}, H)$ et $h' = (F, \underline{h'}, H)$ sont des applications de même ensemble source H, on appelle *crochet de* (h', h), et l'on note $[h', h]$, l'application

$$z \to (h'(z), h(z)) \quad \text{de } H \text{ dans } F \times E.$$

En particulier $[\iota_E, \iota_E]$ est l'application δ_E:

$$(E \times E, \underline{\delta}, E), \quad \text{où} \quad \underline{\delta} = \{((x,x),x) \mid x \in E\},$$

dite *application diagonale de E*. Si

$$f = (E', \underline{f}, E) \quad \text{et} \quad g = (F', \underline{g}, F)$$

sont des applications, on désigne par $g \times f$, et l'on appelle *produit de* (g,f), l'application

$$(y,x) \to (g(y), f(x)) \quad \text{de } F \times E \text{ dans } F' \times E'.$$

4° Si f est une application, la relation réciproque $\bar{f}^1$ n'est une application que si f est une bijection; dans ce cas, $\bar{f}^1$ est aussi une bijection, nommée *inverse de* f et représentée par f^{-1}.

5° Soit r une relation $(F, \underline{r}, I)$. Pour toute partie A de E notons $r(A)$ le but de l'ensemble de couples $\underline{r} \cap (F \times A)$, i.e. l'ensemble des $y \in F$ tels qu'il existe un $x \in A$ vérifiant $(y,x) \in \underline{r}$. Le triplet

$$(P(F), \underline{\hat{r}}, P(E)),$$

où $\underline{\hat{r}}$ est l'ensemble des couples $(r(A), A)$, où $A \subset E$, est une application, appelée *prolongement de r à l'ensemble des parties de E*, et notée Pr. A la relation r est associée l'application

$$x \to r(\{x\}) \quad \text{de } E \text{ dans } P(F);$$

inversement toute application g de E dans $P(F)$ est ainsi associée à une unique relation de E vers F, à savoir à la relation r telle que

$$y \, r \, x \quad \text{ssi} \quad y \in g(x).$$

6° Soit f une application de E dans F. Son prolongement Pf est l'application

$$A \to f(A) \quad \text{de } P(E) \text{ dans } P(F).$$

Le prolongement $P\bar{f}^1$ de la relation réciproque $\bar{f}^1$ de f est l'application

$$B \to \bar{f}^1(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \quad \text{de } P(F) \text{ dans } P(E).$$

$\bar{f}^1(B)$ est appelé *image réciproque de B par f*. Si aucune confusion n'est possible, $\bar{f}^1(\{x\})$, où $x \in F$, est remplacé par $\bar{f}^1(x)$. Pour toute partie A de E, on a

$$\bar{f}^1(f(A)) = \{x \in E \mid f(x) \in f(A)\} \supset A,$$

et, pour toute partie B de F,

$$f(\bar{f}^1(B)) = \{f(x) \mid x \in \bar{f}^1(B)\} = f(E) \cap B.$$

Il en résulte que f est

une surjection ssi $f(\bar{f}^1(B)) = B$ pour tout $B \subset F$,

une injection ssi $\bar{f}^1(f(A)) = A$ pour tout $A \subset E$.

En particulier, f est une bijection ssi Pf est une bijection dont l'inverse est $P\bar{f}^1$.

7° Soit r une relation $(F,\underline{r},E)$. Si S est la source de l'ensemble de couples $\underline{r}$ et si $(F,\underline{r},S)$ est une application, on dit que r est *une application partielle de* E *dans* F. Cette condition équivaut à:

$(y,x) \in \underline{r}$ et $(y',x) \in \underline{r}$ entraînent $y = y'$.

Définition. Soient r une relation de E vers F et r' une relation de F vers G ; on appelle *composée de* (r',r), notée $r'\circ r$, la relation de E vers G ayant pour graphe $\underline{r'}\circ\underline{r}$ l'ensemble des couples $(z,x) \in G\times E$ tels qu'il existe $y \in F$ vérifiant $(z,y) \in \underline{r'}$ et $(y,x) \in \underline{r}$.

Ainsi $(G,\underline{r'},F)\circ(F,\underline{r},E) = (G,\underline{r'}\circ\underline{r},E)$. En particulier si f est une application de E dans F et g une application de F dans G, la composée $g\circ f$ est une application, à savoir l'application

$$x \to g(f(x)) \quad \text{de } E \text{ dans } G.$$

Si g est une injection, $g\circ f$ est une injection ssi f est une injection. Si f est une surjection, $g\circ f$ est une surjection ssi g est une surjection. Enfin la composée de deux bijections est une bijection.

EXEMPLES.

1° Si r est une relation de E vers F et r' une relation de F vers G, la relation réciproque de $r'\circ r$ est la composée $\bar{r}^{-1}\circ\bar{r'}^{-1}$.

2° Une application f de E dans F est la composée $i\circ f'$, où i est l'injection canonique de $f(E)$ dans F et f' la surjection $(f(E),\underline{f},E)$ restriction de f. Cette surjection f' est une bijection ssi f est une

injection.

3° Avec les notations de l'exemple 3 ci-dessus, on a

$$p\circ[h',h] = h \quad \text{et} \quad p'\circ[h',h] = h'.$$

4° D'après l'exemple 6 précédent, une application f de E dans F est une

injection ssi $\mathcal{P}\bar{f}^{-1}\circ\mathcal{P}f = \iota_{\mathcal{P}(E)}$,

surjection ssi $\mathcal{P}f\circ\mathcal{P}\bar{f}^{-1} = \iota_{\mathcal{P}(F)}$.

Soit $(r_i)_{i\in J}$ une famille de relations, où

$$r_i = (F_i,\underline{r_i},E_i) \quad \text{pour tout } i \in J.$$

Posons:

$$r = (\bigcup_{i\in J}F_i,\bigcup_{i\in J}\underline{r_i},\bigcup_{i\in J}E_i) \quad \text{et} \quad r' = (\bigcap_{i\in J}F_i,\bigcap_{i\in J}\underline{r_i},\bigcap_{i\in J}E_i).$$

Comme

$$\bigcup_{i\in J}\underline{r_i} \subset \bigcup_{i\in J}(F_i\times E_i) \subset (\bigcup_{i\in J}F_i)\times(\bigcup_{i\in J}E_i),$$

$$\bigcap_{i\in J}\underline{r_i} \subset \bigcap_{i\in J}(F_i\times E_i) \subset (\bigcap_{i\in J}F_i)\times(\bigcap_{i\in J}E_i),$$

les triplets r et r' sont des relations, appelées respectivement *relation réunion* et *relation intersection de* $(r_i)_{i\in J}$. Supposons de plus que r_i soit une application f_i pour tout $i \in J$; la relation r est une application de $\bigcup_{i\in J}E_i$ dans $\bigcup_{i\in J}F_i$ ssi, pour tout élément (j,i) de $J\times J$, on a

$$f_i(x) = f_j(x) \quad \text{pour tout } x \in E_i\cap E_j ,$$

c'est-à-dire ssi f_i et f_j ont la même restriction à $E_i\cap E_j$.

Définition. On appelle *famille compatible d'applications* une famille $(f_i)_{i\in J}$ d'applications dont la relation réunion est une application f; dans ce cas, f est dite *application réunion de* $(f_i)_{i\in J}$.

Si $(f_i)_{i\in J}$ est une famille compatible d'applications, l'application réunion f est l'unique application telle que, si E_i et F_i sont les ensembles source et but de f_i, alors f admet $\bigcup_{i\in J} E_i$ pour source, $\bigcup_{i\in J} F_i$ pour ensemble but et f_i pour restriction à (F_i, E_i) pour tout $i \in J$; intuitivement, f est obtenue par "recollement" des applications f_i.

Une classe importante de relations est constituée des relations sur un ensemble.

Soit E un ensemble.

Définition. On appelle *relation sur* E une relation ayant E à la fois pour ensemble source et pour ensemble but.

Soit r une relation sur E. On dit que r est

transitive si $y\ r\ x$ et $z\ r\ y$ entraînent $z\ r\ x$,

réflexive si $x\ r\ x$ pour tout $x \in E$ (i.e. $D_E \subset \underline{r}$),

symétrique si $r = \bar{r}^{-1}$,

propre si $y = x$ lorsque $y\ r\ x$ et $x\ r\ y$.

Soient r une relation sur E et A une partie de E ; la restriction de r à (A,A), c'est-à-dire la relation $(A, \underline{r} \cap (A\times A), A)$ est dite *relation induite par* r *sur* A. Si r possède l'une des propriétés de la définition, il en est de même pour la relation induite sur A, ainsi que pour $\bar{r}^{-1}$. L'intersection d'une famille de relations sur E remplissant l'une de ces propriétés la remplit également.

Une relation sur E réflexive et transitive est une *relation de préordre* (abrégé en préordre); si de plus elle

est symétrique, c'est une *relation d'équivalence*. Un préordre qui est propre est une *relation d'ordre*, ou un ordre. Un ordre total sur E est une relation d'ordre r sur E telle que $\underline{r} \cup \underline{\bar{r}^{-1}} = E\times E$.

Soit r une relation d'équivalence sur E. La formule $y\ r\ x$ (ou $(y,x) \in \underline{r}$) est généralement remplacée par $y \overset{r}{\sim} x$ ou, si aucune confusion n'est possible, par $y \sim x$. Pour tout élément x de E, l'ensemble

$$r(\{x\}) = \{y \in E \mid y \overset{r}{\sim} x\}$$

est appelé *classe d'équivalence de* x *modulo* r et désigné par $x \bmod r$. Tout élément de E appartient à une et une seule classe d'équivalence modulo r. La partie de $P(E)$ formée des classes d'équivalence modulo r est dite *ensemble quotient de* E *par* r, représenté par E/r. L'application

$$x \to x \bmod r \quad \text{de } E \text{ sur } E/r$$

est appelée *surjection canonique associée à* r, dénotée $\tilde{r}$. Si $X \in E/r$, un élément de X est nommé *représentant de* X.

EXEMPLES.

1° L'application identique ι_E de E est une relation d'équivalence sur E. C'est la seule relation d'équivalence qui soit une application. L'ensemble quotient E/ι_E est formé des ensembles $\{x\}$, où $x \in E$. La surjection canonique associée est la bijection γ:

$$x \to \{x\} \quad \text{de } E \text{ sur } E/\iota_E.$$

En la composant avec l'injection canonique I de E/ι_E dans $P(E)$, on obtient l'injection $I\circ\gamma$:

$$x \to \{x\} \quad \text{de } E \text{ dans } P(E).$$

2° Soit f une application de E dans E. Soit M

l'ensemble des couples $(x,y) \in E\times E$ tels que $f(x) = f(y)$. Le triplet (E,M,E) est une relation d'équivalence, dite *relation d'équivalence associée à* f et notée r_f.

3° Soient r une relation sur E et P l'ensemble des parties M de $E\times E$ contenant $\underline{r}$ telles que (E,M,E) soit une relation d'équivalence (resp. de préordre). Alors $(E,\bigcap P,E)$ est une relation d'équivalence (resp. de préordre) contenant r et contenue dans toute relation d'équivalence (resp. préordre) sur E contenant r; on l'appelle *relation d'équivalence* (resp. *de préordre*) *engendrée par* r.

Définition. Soit f une application de E dans F; soient r une relation sur E et r' une relation sur F. On dit que f *est compatible avec* (r',r) si

$$y\ r\ x \quad \text{entraîne} \quad f(y)\ r'\ f(x).$$

Si f est compatible avec (ι_F,r), on dit simplement que f est *compatible avec* r.

Soient f une application de E dans F et r une relation sur E. Pour que f soit compatible avec r, il faut et il suffit que le graphe de r soit contenu dans celui de r_f (exemple 2), i.e. que

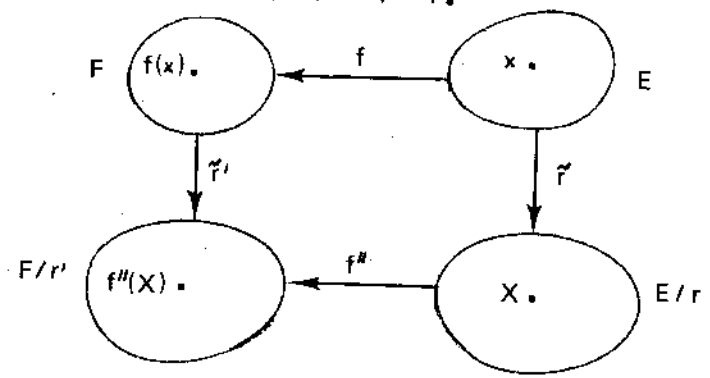
$$y\ r\ x \quad \text{entraîne} \quad f(x) = f(y);$$

dans ce cas, la relation d'équivalence engendrée par r est aussi contenue dans r_f. Supposons de plus que r soit une relation d'équivalence. Pour que f soit compatible avec r, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une application f' de E/r dans F telle que $f'\circ\tilde{r} = f$; cette application f' est alors déterminée d'une manière unique, car elle associe à $X \in E/r$ l'élément $f(x)$, où

x est un représentant de X. En particulier, f est compatible avec r_f et l'on a $f = f'\circ\tilde{r}_f$, où f' est une injection de E/r_f dans F, d'image $f(E)$; cette injection est une bijection ssi f est une surjection.

Soit de plus r' une relation d'équivalence sur F. f est compatible avec (r',r) ssi il existe une application f'' (nécessairement unique) de E/r dans F/r' vérifiant l'égalité

$$f''\circ\tilde{r} = \tilde{r}'\circ f.$$



PROPOSITION 1. Soit ρ *une relation de préordre sur* E. *La relation* $(E,\rho\cap\bar{\rho}^{-1},E)$ *est une relation d'équivalence* r *sur* E, *et la relation* $(E',(\tilde{r}\times\tilde{r})(\underline{\rho}),E')$, *où* $E' = E/r$, *est un ordre sur* E, *noté* ρ'.

Preuve. Les relations ρ et $\bar{\rho}^{-1}$ étant réflexives et transitives, la relation r intersection de $(\rho,\bar{\rho}^{-1})$ l'est aussi; r est symétrique, car on a $y\ r\ x$ ssi

$$y\ \rho\ x \quad \text{et} \quad x\ \rho\ y;$$

donc r est une relation d'équivalence. Considérons l'ensemble quotient $E' = E/r$ et la surjection canonique $\tilde{r}$. L'ensemble $M = (\tilde{r}\times\tilde{r})(\underline{\rho})$ est formé des $(Y,X) \in E'\times E'$ tels qu'il existe des représentants x de X et y de Y vérifiant

d'autres représentants de X et de Y respectivement, les relations

$(y',y) \in \underline{r} \subset \underline{\rho}$, $(y,x) \in \underline{\rho}$ et $(x,x') \in \underline{r} \subset \underline{\rho}$ entraînent $y' \rho x'$, la relation ρ étant transitive. Ainsi M est formé des couples $(Y,X) \in E' \times E'$ tels que

$$y \rho x \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et tout } y \in Y.$$

Evidemment M contient la diagonale de E' et (Z,X) appartient à M si (Z,Y) et (Y,X) sont des éléments de M. Enfin, supposons

$(Y,X) \in M$, $(X,Y) \in M$, $x \in X$ et $y \in Y$;

comme $y \rho x$ et $x \rho y$ d'après ce qui précède, le couple (x,y) appartient à $\underline{r}$, d'où $X = Y$. Ceci prouve que le triplet (E',M,E') est un ordre sur E'.

Définition. Avec les notations de la proposition 1, on appelle r et ρ' respectivement la relation d'équivalence et la relation d'ordre *associées au préordre* ρ.

Si ρ est un ordre, la relation d'équivalence r associée est la relation identique sur E; la relation d'ordre ρ' associée a pour graphe $\underline{\rho}' = J \times J(\underline{\rho})$, où J est la bijection

$$x \to \{x\} \quad \text{de} \quad E \quad \text{sur} \quad E/\iota_E.$$

Définition. Soit E un ensemble; on appelle *loi de composition sur* E une application k de $E \times E$ dans E; le couple (E,k) est alors appelé *un magma*.

Soit (E,k) un magma. On associe généralement à k un symbole: $^{\perp}$, ., +, -, ... Si par exemple est le symbole associé, on écrit

$$E^* = (E,k) \quad \text{et} \quad y.x = k(y,x).$$

Soit E' une partie de E telle que $k(E' \times E') \subset E'$; la restriction de k à $(E', E' \times E')$ est appelée *loi de composition induite par* k *sur* E' et l'on dit que (E',k') est le *sous-magma de* E* *défini par* E'.

On dit que k (ou que E*) est *associative* si

$$z.(y.x) = (z.y).x$$

quels que soient x, y et z dans E, *commutative* si

$$y.x = x.y \quad \text{pour tout } (y,x) \in E \times E.$$

Une unité de k (ou de E*) est un élément e de E tel que, pour tout $x \in E$, l'on ait

$$x.e = x = e.x .$$

S'il existe une unité e, elle est unique, car une autre unité e' vérifierait

$$e' = e'.e = e .$$

Dans ce cas, on dit qu'un élément x de E admet x' *pour inverse dans* k (ou dans E*) si

$$x'.x = e = x.x'.$$

Si k est associative, on désigne par z.y.x le composé z.(y.x) (qui est égal par définition à (z.y).x).

Définition. On appelle *monoïde* un magma associatif ayant une unité, *groupe* un monoïde dans lequel tout élément est inversible (i.e. admet un inverse).

Si E* est un monoïde d'unité e, un élément x de E admet au plus un inverse; en effet, si x' et x" sont des inverses de x, on obtient

$$x'' = x''.e = x''.(x.x') = (x''.x).x' = e.x' = x' .$$

On appelle *sous-monoïde* (resp. *sous-groupe*) de E* un sous-magma de E* qui est un monoïde (resp. un groupe).

Définition. Soient (E,k) et (F,h) des magmas, f une application de E dans F . On dit que f *définit l'homomorphisme* $\hat{f} = ((F,h),f,(E,k))$ (de (E,k) vers (F,h)) si $f \circ k = h \circ (f \times f)$; si de plus f est une bijection et $((E,k), f^{-1},(F,h))$ un homomorphisme, on appelle $\hat{f}$ un *isomorphisme.*

Soient $E' = (E,k)$ un magma et f une bijection de E sur F ; alors (F',f,E') est un isomorphisme ssi on a $F' = (F,h)$, où $h = f \circ k \circ (f \times f)^{-1}$; dans ce cas on appelle F' *magma image de* E' *par* f. On voit que F' est associatif ou commutatif ssi E' l'est; e est une unité de E' lorsque f(e) en est une de F' et x' est l'inverse de x dans E' ssi f(x') est l'inverse de f(x) dans F'. Si E' est un monoïde (resp. un groupe), F' en est aussi un.

Définition. Soient E^+ et $E^\circ = (E,k')$ des magmas. On dit que k' (ou que E°) est *distributif sur* E^+ si

$$z \circ (y+x) = (z \circ y)+(z \circ x) \quad \text{et} \quad (z+y) \circ x = (z \circ x)+(y \circ x)$$

quels que soient $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$. On appelle *anneau* un couple (E^+,E°), où E^+ est un groupe commutatif, E° un magma associatif distributif sur E^+; si de plus $E \setminus \{e\}$, où e est l'unité de E^+, définit un sous-groupe de E°, on dit que (E^+,E°) est *un corps.*

3. Ensembles équipotents. Ensembles finis.

Définition. Soient E et F des ensembles. On dit que E et F sont *équipotents* s'il existe une bijection de E sur F , en formule $E \simeq F$. On dit que E est de *puissance inférieure* (resp. *puissance strictement inférieure*) à F, ou que F est de puissance *supérieure* (resp. *strictement*

supérieure) à E, s'il existe une injection de E dans F (resp. une injection de E dans F et si E et F ne sont pas équipotents).

Toute injection de E dans F étant la composée de la surjection de E sur E' ayant même graphe et de l'injection canonique de E' dans F, dire que E est de puissance inférieure à F signifie que E est équipotent à une partie de F. En particulier l'ensemble vide est de puissance strictement inférieure à tout ensemble non vide . Tous les ensembles réduits à un élément sont équipotents, et chacun est de puissance strictement inférieure à tout ensemble ayant au moins deux éléments.

Si E est de puissance inférieure à F et si F est de puissance inférieure à un ensemble G, alors E est de puissance inférieure à G, la composée de deux injections étant une injection. De même si E et F sont équipotents et si F et G sont équipotents, alors E est équipotent à G.

PROPOSITION 1. (Théorème de CANTOR). Pour tout ensemble E, *l'ensemble* P(E) *des parties de* E *est de puissance strictement supérieure à* E.

Preuve. P(E) est de puissance supérieure à E , car l'application

$$x \to \{x\} \quad \text{de E dans P(E)}$$

est une injection. Supposons qu'il existe une bijection f de E sur P(E) et considérons l'ensemble B des éléments a de E tels que $a \notin f(a)$. Il existe un $b \in E$ tel que $B = f(b)$. Si b appartient à B , on a $b \notin f(b)$

par définition de B, c'est-à-dire $b \notin B$, ce qui est impossible. Par ailleurs, on ne peut avoir $b \notin B$, car dans ce dernier cas b appartiendrait à f(b), d'où la contradiction $b \in B$. Ainsi E' ne peut pas être équipotent à l'ensemble de ses parties.

PROPOSITION 2. (Théorème de BERNSTEIN). Soient E *et* F *deux ensembles. Si* E *est de puissance inférieure à* F *et si* F *est de puissance inférieure à* E, *alors* E *et* F *sont équipotents.*

Preuve. 1° Montrons d'abord la proposition dans le cas particulier suivant: *Si* E' *est une partie de l'ensemble* E *et s'il existe une injection* f *de* E *dans* E', *alors il existe une bijection de* E *sur* E'. En effet, posons $C = E \setminus E'$ et considérons l'ensemble P des parties X de E telles que $C \subset X$ et $f(X) \subset X$. Notons X' l'intersection de P.

a) Prouvons l'égalité $X' = f(X') \cup C$. Pour cela, les relations

$$C \subset X' \quad \text{et} \quad f(X') \subset \bigcap f(P) \subset \bigcap P = X'$$

entraînent

$$C \subset f(X') \cup C \subset X' .$$

On en déduit

$$f(f(X') \cup C) \subset f(X') \subset f(X') \cup C , \quad \text{d'où} \quad f(X') \cup C \in P.$$

Par définition de X', il s'ensuit $X' \subset f(X') \cup C$ et, au total, $X' = f(X') \cup C$.

b) Soit f' l'application de E dans E' associant f(x) à $x \in X'$ et y à $y \in E \setminus X'$. Comme

$$E \setminus X' = E \setminus (f(X') \cup C) = (E \setminus f(X')) \cap (E \setminus C) = E' \setminus f(X') ,$$

on a

$$f(X') \cup (E \setminus X') = E' .$$

Il en résulte que f' est l'application réunion de la bijection de X' sur f(X') restriction de f et de l'application identique de $E \setminus X'$. Par suite f' est une bijection de E sur E'.

2° Revenons au cas général. Par hypothèse, il existe une injection g de E dans F et une injection g' de F dans E. Posons $E' = g'(F)$. Puisque $g' \circ g(E)$ est contenu dans $g'(F) = E'$, la restriction de $g' \circ g$ à (E', E) est une injection f de E dans E'. La première partie assure l'existence d'une bijection f' de E sur E'. En notant h la bijection de F sur E' restriction de g', l'application composée $h^{-1} \circ f'$ est une bijection de E sur F. Ainsi E et F sont équipotents.

COROLLAIRE 1. Soient E, F, G *trois ensembles. Si* E *est de puissance inférieure (resp. de puissance strictement inférieure) à* F *et* F *de puissance strictement inférieure (resp. de puissance inférieure) à* G, *alors* E *est de puissance strictement inférieure à* G.

En effet, E est de puissance inférieure à G. S'il est équipotent à G, l'ensemble F de puissance supérieure à E et inférieure à G, donc à E, est équipotent à E (resp. à G), d'après la proposition 2, ce qui est impossible vu l'hypothèse.

COROLLAIRE 2. Si E *est un ensemble, il existe un ensemble* x *tel que* $x \notin E$. *La totalité* $\mathcal{D}$ *n'est pas un* $\mathcal{D}$*-ensemble.*

En effet, P(E) étant de puissance strictement supérieure à E (théorème de Cantor), il ne peut pas être contenu

dans E en vertu du corollaire 1; donc il existe une partie x de E telle que x ne soit pas élément de E. Si $\mathcal{D}$ était un $\mathcal{D}$-ensemble, ce serait un ensemble ayant pour éléments tous les ensembles, ce qui est impossible d'après ce qui précède.

COROLLAIRE 3. Si E est un ensemble, il n'existe pas d'ensemble ayant pour éléments tous les ensembles $x \notin E$.

En effet, s'il en existait un, E', l'ensemble $E \cup E'$ aurait pour éléments tous les ensembles, donc serait identique à $\mathcal{D}$, ce qui est impossible (corollaire 2).

Définition. Soit E un ensemble. On appelle *partie finiment saturée de* P(E) une partie M de P(E) vérifiant les conditions suivantes:

$\emptyset \in M$ et $A \cup \{x\} \in M$ si $A \in M$ et $x \in E \setminus A$.

Soit E un ensemble. L'ensemble L des parties finiment saturées de P(E) n'est pas vide, puisque P(E) y appartient; son intersection est évidemment aussi un élément de L.

Définition. Soit E un ensemble. On appelle *ensemble des parties finies de* E, et l'on note $P_f(E)$, l'intersection de l'ensemble des parties finiment saturées de P(E); ses éléments sont dits *parties finies de* E. On dit que E est *un ensemble fini* si $E \in P_f(E)$; dans le cas contraire, on dit que E est *un ensemble infini.*

Exemples. $\emptyset$ est un ensemble fini, ainsi que tout ensemble

ayant un seul élément.

Remarque. Soit $\mathcal{D}'$ une autre totalité, et supposons que E soit à la fois un $\mathcal{D}$-ensemble et un $\mathcal{D}'$-ensemble. Comme P(E) et $A \cup \{x\}$ sont définis indépendamment d'une totalité, les parties finiment saturées du $\mathcal{D}'$-ensemble P(E) sont identiques aux parties finiment saturées du $\mathcal{D}$-ensemble P(E), et les parties finies du $\mathcal{D}'$-ensemble E sont identiques à celles du $\mathcal{D}$-ensemble E. En particulier E est un $\mathcal{D}'$-ensemble fini (resp. infini) ssi E est un $\mathcal{D}$-ensemble fini (resp. infini). Autrement dit les notions d'ensemble fini et d'ensemble infini ne dépendent pas de la totalité.

PROPOSITION 3. Soient E un ensemble et E' une partie de E. Pour toute partie finie A de E, l'ensemble $A \cap E'$ *est une partie finie de E'. Les parties finies de E' sont les parties finies de E contenues dans E'. Si F et G sont des parties de E, la partie* $F \cup G$ *est finie ssi F et G sont des parties finies de E.*

Preuve. 1° Soit C l'ensemble des parties finies A de E telles que $A \cap E'$ soit une partie finie de E'. On a $\emptyset \in C$. Supposons $A \in C$, $x \in E$ et $A' = A \cup \{x\}$. L'égalité

$$A' \cap E' = (A \cap E') \cup (\{x\} \cap E')$$

entraîne

$A' \cap E' = A \cap E' \in P_f(E')$ si $x \notin E'$,

$A' \cap E' = (A \cap E') \cup \{x\} \in P_f(E')$ si $x \in E'$.

Donc C est une partie finiment saturée de P(E), et par suite $P_f(E) = C$.

2° Notons C' l'ensemble $P_f(E) \cap P(E')$. Pour

précède, si A appartient à C', alors

$$A = A \cap E' \in P_f(E'), \quad \text{d'où} \quad C' \subset P_f(E').$$

Inversement $\emptyset$ appartient à C' et, pour tout $A' \in C'$ et tout $x' \in E'$, l'ensemble $A' \cup \{x'\}$ est une partie de E' appartenant à $P_f(E)$, c'est-à-dire à C'. Ceci prouve que C' est une partie finiment saturée de $P(E')$, de sorte qu'elle contient $P_f(E')$. Au total $C' = P_f(E')$.

3° Supposons que F et G sont des parties de E. Si $F \cup G$ est une partie finie de E, les parties

$$F = (F \cup G) \cap F \quad \text{et} \quad G = (F \cup G) \cap G$$

de E sont finies, d'après les parties 1 et 2. Inversement supposons que F soit une partie finie de E. Soit M l'ensemble des parties X de E telles que $F \cup X$ soit une partie finie de E. Comme évidemment M est une partie finiment saturée de $P(E)$, elle contient $P_f(E)$. En particulier, si G est finie, on a $G \in M$, ce qui signifie que $F \cup G$ est une partie finie de E.

COROLLAIRE 1. Pour tout ensemble E, les parties finies de E sont les ensembles finis qui sont contenus dans E, et toute partie d'une partie finie de E est une partie finie de E. En particulier toute partie d'un ensemble fini est un ensemble fini.

Preuve. Si A est une partie finie de E, la proposition 3 entraîne que

$$A \cap B = B \in P_f(B) \quad \text{pour toute partie B de A;}$$

en particulier, si $A = B$, on trouve $A \in P_f(A)$, i.e. A est un ensemble fini. Inversement, si A est un ensemble fini et une partie de E, alors A est une partie finie de A, d'où $A \in P_f(A) \subset P_f(E)$, d'après la proposition 3.

Si E est fini (i.e. est un ensemble fini), E est une partie finie de E, de sorte que toute partie A de E est une partie finie de E, et a fortiori un ensemble fini.

COROLLAIRE 2. Si A et B sont deux ensembles, $A \cup B$ est un ensemble fini ssi A et B sont des ensembles finis.

Preuve. Le corollaire 1 assure que A et B sont finis si $A \cup B$ est fini. Réciproquement si A et B sont finis, $A \cup B$ est une partie finie de l'ensemble $A \cup B$ d'après la proposition 3, donc un ensemble fini (corollaire 1).

PROPOSITION 4. Soit f une application de E dans F. Si A est une partie finie de E, alors f(A) est une partie finie de F. En particulier si E est fini, f(E) est fini.

Preuve. Soit M l'ensemble des parties E' de E telles que f(E') soit une partie finie de F. Comme $f(\emptyset) = \emptyset$, on a $\emptyset \in M$. Si $E' \in M$ et $x \in E$, l'égalité

$$f(E' \cup \{x\}) = f(E') \cup \{f(x)\} \in P_f(F)$$

entraîne que $E' \cup \{x\}$ appartient à M. Ainsi M est une partie finiment saturée de $P(E)$, d'où $P_f(E)$ est contenu dans M.

COROLLAIRE. Si f est une bijection de E sur F, une partie A de E est finie ssi f(A) est un ensemble fini.

En effet, d'après la proposition 4 si A et B sont des parties finies de E et F respectivement, les ensembles f(A) et $f^{-1}(B)$ sont finis.

PROPOSITION 5. L'ensemble des parties d'un ensemble fini est un ensemble fini.

Preuve. Soit E un ensemble. Considérons l'ensemble M des parties A de E telles que $P(A)$ soit un ensemble fini. $\emptyset$ appartient à M, puisque l'ensemble de ses parties a $\emptyset$ pour seul élément, donc est fini. Supposons

$$A \in M, \quad x \in E \setminus A \quad \text{et} \quad A' = A \cup \{x\}.$$

On obtient $P(A') = F \cup F'$, où

$$F = P(A) \cup P(\{x\}) \quad \text{et} \quad F' = \{B \cup \{x\} \mid B \subset A\}.$$

Par hypothèse, $P(A)$ est fini. Comme $P(\{x\}) = \{\emptyset, \{x\}\}$ est aussi fini, F est fini d'après la proposition 3, corollaire 2. D'autre part on définit une bijection

$$B \to B \cup \{x\} \quad \text{de} \quad P(A) \quad \text{sur} \quad F'.$$

Puisque $P(A)$ est fini, F' est fini (proposition 4). Ceci prouve que $P(A')$ est fini, et que M est une partie finiment saturée de $P(E)$. Par conséquent M contient $P_f(E)$. Si E est fini, on en déduit que E appartient à M, c'est-à-dire que $P(E)$ est fini.

Une famille $\xi = (E_i)_{i \in J}$ étant l'ensemble de couples

$$\xi = \{(E_i, i) \mid i \in J\},$$

lequel est équipotent à sa source J, l'ensemble ξ est fini ssi J est fini; dans ce cas on dit que ξ *est une famille finie.*

PROPOSITION 6. La réunion d'une famille finie d'ensembles finis est un ensemble fini.

Preuve. Soit $(E_i)_{i \in J}$ une famille d'ensembles finis, E sa réunion. Notons M' l'ensemble des parties K de J telles que $\bigcup_{j \in K} E_j$ soit un ensemble fini. Comme la réunion de la famille vide est $\emptyset$, on a $\emptyset \in M'$. Supposons $K \in M'$

et $i \in J$. Si $K' = K \cup \{i\}$, on trouve

$$\bigcup_{j \in K'} E_j = \left(\bigcup_{j \in K} E_j\right) \cup E_i .$$

Par hypothèse $\bigcup_{j \in K} E_j$ est fini et E_i est fini; il s'ensuit (corollaire 2, proposition 3) que $\bigcup_{j \in K'} E_j$ est fini; autrement dit, K' appartient à M'. Par conséquent M' est une partie finiment saturée de $P(J)$. En particulier si J est fini, J appartient à M', de sorte que E est fini.

PROPOSITION 7. Soit E un ensemble. L'ensemble M des parties A de E telles que A soit de puissance strictement supérieure à chacune de ses parties propres est une partie finiment saturée de $P(E)$.

Preuve. L'ensemble vide appartient à M. Soient

$$A \in M, \quad x \in E \setminus A \quad \text{et} \quad A' = A \cup \{x\}.$$

Supposons qu'il existe une bijection f de A' sur une partie propre B de A' ; on a $f(x) \notin f(A)$.

1° Si $x \notin B$, alors $f(A)$ est une partie propre de A et la restriction de f à $(f(A), A)$ est une bijection de A sur $f(A)$. Ceci est impossible, A appartenant à M.

2° Si x appartient à B, il existe un élément a de A n'appartenant pas à B; soit g la bijection

$$x \to a, \quad y \to y \text{ si } y \in B \setminus \{x\}$$

de B sur la partie propre $B' = \{a\} \cup B \setminus \{x\}$ de A'. La bijection $f' = g \circ f$ est une bijection de A' sur B' et x n'appartient pas à B'. On est ainsi ramené au premier cas (en y remplaçant f par f' et B par B'), ce qui conduit à une contradiction. Donc A' appartient à M. Ceci prouve que M est une partie finiment saturée de $P(E)$.

COROLLAIRE. Un ensemble fini est de puissance strictement supérieure à chacune de ses parties propres. Si un ensemble est équipotent à l'une de ses parties propres, il est infini.

Remarque. La définition d'ensemble fini adoptée est due à Russell-Whitehead. Par ailleurs Dedekind appelait ensemble fini un ensemble qui n'est équipotent à aucune de ses parties propres. D'après le corollaire précédent, tout ensemble fini est fini au sens de Dedekind. Nous verrons plus loin que les deux définitions sont équivalentes lorsque la totalité $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix (introduit au § 4).

PROPOSITION 8. Etant donnés deux ensembles finis, l'un est de puissance inférieure à l'autre. Un ensemble fini est de puissance strictement inférieure à tout ensemble infini.

Preuve. Soient E et F deux ensembles.

1° Supposons que F ne soit pas de puissance inférieure à E et notons M l'ensemble des parties A de E équipotentes à une partie de F. Comme $(F,\emptyset,\emptyset)$ est une injection, $\emptyset$ appartient à M. Soit f une injection de $A \in M$ dans F et soit $x \in E\backslash A$. Si $f(A) \neq F$, l'ensemble F est équipotent à A, ce qui est exclu par hypothèse; il s'ensuit qu'il existe $y \in F\backslash f(A)$. L'application

$$x \to y, \qquad a \to f(a) \quad \text{si} \quad a \in A,$$

est une injection de $A \cup \{x\}$ dans F, de sorte que $A \cup \{x\}$ appartient à M. Ainsi M est une partie finiment saturée de P(E). En particulier si E est fini, il appartient à M, i.e. il est de puissance inférieure à F.

2° Supposons F infini et E fini. Tout ensemble de puissance inférieure à un ensemble fini étant fini, F ne peut pas être de puissance inférieure à E. En utilisant la partie 1, on en déduit que E est de puissance strictement inférieure à F.

COROLLAIRE. Etant donnés deux ensembles infinis, toute partie finie de l'un est équipotente à une partie finie de l'autre.

Remarque. La collection $\mathcal{D}_f$ des $\mathcal{D}$-ensembles finis vérifie les axiomes (A2) et (A3) (car $\emptyset$ et tout ensemble à un élément sont finis), (A4) (vu la proposition 5) et (A5) (d'après la proposition 6). Mais $\mathcal{D}_f$ n'est pas nécessairement une totalité, car un élément d'un ensemble fini peut ne pas être un ensemble fini. Toutefois nous construirons une sous-collection de $\mathcal{D}_f$ (le miniunivers classique, voir § 15 et chapitre VI) qui est une totalité. Ainsi il y a des totalités n'ayant aucun objet infini. Une telle totalité ne conduisant pas à une "bonne" théorie mathématique (l'ensemble des entiers, l'ensemble des réels,... qui sont infinis ne peuvent pas y être considérés), on suppose généralement vérifié de plus l'axiome de l'infini suivant.

Définition. On dit que la totalité $\mathcal{D}$ est un *modèle de la Théorie des ensembles* si elle vérifie l'axiome suivant, appelé *axiome de l'infini:*

(A6) Il existe un $\mathcal{D}$-ensemble infini.

Dans un modèle de la théorie des ensembles, nous cons-

4. *Produits et sommes.*

HYPOTHESES. Dans ce §, $\mathcal{D}$ est toujours une totalité dont les objets sont appelés ensembles. De plus J est un ensemble, $(E_\iota)_{\iota\in J}$ une famille (d'ensembles) indexée par J et E sa réunion $\bigcup_{\iota\in J} E_\iota$.

Définition. On appelle *somme de* $(E_\iota)_{\iota\in J}$, et l'on noté $\sum_{\iota\in J} E_\iota$, la réunion de la famille $(E'_\iota)_{\iota\in J}$, où

$$E'_\iota = E_\iota \times \{\iota\} \quad \text{pour tout } \iota \in J.$$

Soit S la somme de $(E_\iota)_{\iota\in J}$. Ses éléments sont les couples (x,ι) tels que $\iota \in J$ et $x \in E_\iota$. Un tel couple appartient à $E\times J$, d'où

$$\sum_{\iota\in J} E_\iota \subset \left(\bigcup_{\iota\in J} E_\iota\right)\times J .$$

Pour tout $\iota \in J$, l'application

$$x \to (x,\iota) \quad \text{de } E_\iota \text{ dans } S$$

est une injection, appelée *injection canonique de* E_ι *dans* S; notons-la v_ι. Sa restriction à $(E_\iota\times\{\iota\}, E_\iota)$ est une bijection de E_ι sur $E_\iota\times\{\iota\}$. Si $\iota \neq j$, les ensembles

$$E'_\iota = E_\iota\times\{\iota\} \quad \text{et} \quad E_j\times\{j\}$$

ont leur intersection vide. Par suite la famille $(E'_\iota)_{\iota\in J}$ est une partition de S en ensembles admettant chacun une bijection sur l'un des E_ι, si J et E_ι ne sont pas vides. Si $J = \emptyset$, on a $S = \emptyset$.

Si F est un ensemble et si f_ι est une application de E_ι dans F pour tout $\iota \in J$, il existe une et une seule application f de la somme S dans F telle que

$$f\circ v_\iota = f_\iota \quad \text{pour tout } \iota \in J,$$

à savoir l'application f:

$$(x,\iota) \to f_\iota(x) \quad \text{de } S \text{ dans } F.$$

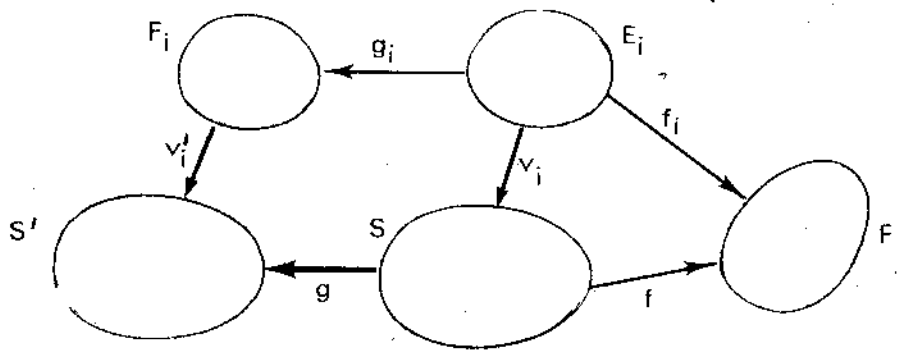
Pour tout $j \in J$, soit g_j une application de E_j dans F_j; notons S et S' les sommes de $(E_\iota)_{\iota\in J}$ et de $(F_\iota)_{\iota\in J}$. Nous noterons $\sum(g_\iota)_{\iota\in J}$ l'application

$$(x,\iota) \to (g_\iota(x),\iota) \quad \text{de } S \text{ dans } S'.$$

C'est l'unique application g telle que

$$v'_\iota\circ g_\iota = g\circ v_\iota \quad \text{pour tout } \iota \in J,$$

où v'_ι désigne l'injection canonique de F_ι dans S'.



Définition. Avec les notations précédentes, on appelle f *le cocrochet de* $(f_\iota)_{\iota\in J}$ et g *l'application somme de* $(g_\iota)_{\iota\in J}$.

Exemple. Prenons pour f_ι l'injection canonique de E_ι dans la réunion E; le cocrochet f est alors une surjection de S sur E; de plus f est une bijection ssi

$$E_\iota \cap E_j = \emptyset \quad \text{pour tout } \iota \in J,\ j \in J\setminus\{\iota\}.$$

Soit $\xi = (x_\iota)_{\iota\in J}$ une famille telle que $x_\iota \in E_\iota$ pour tout $\iota \in J$; alors ξ est une famille d'éléments de E, et par suite un élément de l'ensemble $P(E\times J)$.

Définition. On appelle *produit* de $(E_\iota)_{\iota\in J}$, et l'on représen-

te par $\prod_{i\in J} E_i$, la partie P de l'ensemble $P(E\times J)$ formée des familles $(x_i)_{i\in J}$ vérifiant la condition:

On a $x_i \in E_i$ pour tout $i \in J$.

EXEMPLES.

1° Le produit de la famille vide est $\{\emptyset\}$, c'est-à-dire 1 . Si $J = I = \{0\}$, le produit $\prod_{i\in J} E_i$ est identique à $E_0\times\{0\}$, donc équipotent à E_0.

2° Soit $J = 2 = \{0,1\}$; en associant au couple (x,y) la famille $\{(x,0),(y,1)\}$ indexée par 2, on définit une bijection du produit (cartésien) $E_0\times E_1$ sur le produit $P = \prod_{i\in J} E_i$. Selon la convention adoptée, nous remplacerons P par $E_0\times E_1$ lorsqu'aucune confusion ne pourra en résulter.

3° Soit $J = 3 = \{0,1,2\}$; le produit d'un triplet (E_0,E_1,E_2) sera souvent noté $E_0\times E_1\times E_2$; cet ensemble est formé des triplets (x,y,z) tels que

$$x \in E_0 , \quad y \in E_1 \quad \text{et} \quad z \in E_2 .$$

Soient F et G deux ensembles. Le produit

$$\{G\}\times P(G\times F)\times\{F\}$$

a pour éléments les relations de F vers G; on l'appelle *l'ensemble des relations de* F *vers* G. Il admet pour partie *l'ensemble des applications de* F *dans* G.

PROPOSITION 1. On a $\prod_{i\in J} E_i \subset P(\sum_{i\in J} E_i)$.

Preuve. Soit $(x_i)_{i\in J}$ un élément x du produit P de $(E_i)_{i\in J}$. Pour tout $i \in J$, l'élément x_i appartient à $E_i \subset E$, de sorte que (x_i,i) est élément de la somme S. L'égalité

$$x = \{(x_i,i) \mid i \in J\}$$

entraîne que x est une partie de S. Il en résulte

$$x \in P(S) , \quad \text{d'où} \quad P \subset P(S).$$

Soit P le produit de $(E_i)_{i\in J}$. Pour tout $i \in J$, l'application p_i:

$$(x_i)_{i\in J} \to x_i \quad \text{de P sur } E_i$$

est appelée *i-ième projection canonique de* P (sur E_i). Si F est un ensemble et si f_i est une application de F dans E_i, pour tout $i \in J$, nous désignons par $[f_i]_{i\in J}$ l'application:

$$y \to (f_i(y))_{i\in J} \quad \text{de F dans P.}$$

C'est l'unique application f telle que

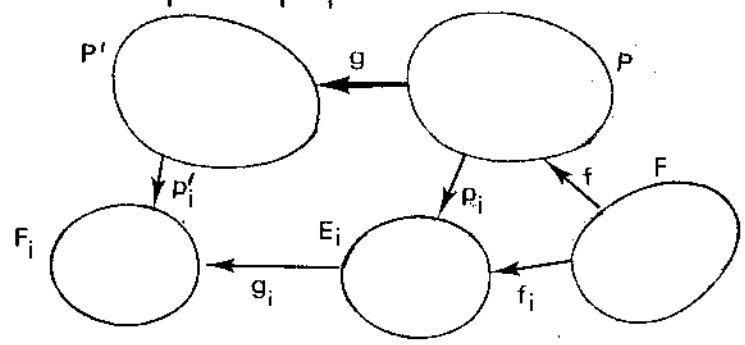
$$p_i\circ f = f_i \quad \text{pour tout } i \in J.$$

Soit g_i une application de E_i dans F_i pour tout i appartenant à J. Nous notons $\prod_{i\in J} g_i$ l'application

$$(x_i)_{i\in J} \to (g_i(x_i))_{i\in J} \quad \text{de P dans } P' = \prod_{i\in J} F_i.$$

Si p'_i désigne la projection canonique de P' sur F_i , alors $\prod_{i\in J} g_i$ est l'unique application g telle que

$$p'_i\circ g = g_i\circ p_i \quad \text{pour tout } i \in J.$$



Définition. Avec les notations précédentes, l'application $[f_i]_{i\in J}$ est appelée *crochet de* $(f_i)_{i\in J}$ et l'application $\prod_{i\in J} g_i$ est appelée *application produit de* $(g_i)_{i\in J}$.

EXEMPLES. Si $J = 2$ et si l'on identifie $E_0 \times E_1$ au produit $\prod_{i \in 2} E_i$, les applications $[f_i]_{i \in J}$ et $\prod_{i \in J} g_i$ s'identifient aux applications $[f_0, f_1]$ et $g_0 \times g_1$ définies dans le § 2. Lorsque $J = 3$, les applications $[f_i]_{i \in J}$:

$$x \to (f_0(x), f_1(x), f_2(x)) \quad \text{de } F \text{ dans } E_0 \times E_1 \times E_2$$

et $\prod_{i \in J} g_i$:

$$(x,y,z) \to (g_0(x), g_1(y), g_2(z)) \quad \text{de } E_0 \times E_1 \times E_2 \text{ dans } F_0 \times F_1 \times F_2$$

sont notées respectivement

$$[f_0, f_1, f_2] \quad \text{et} \quad g_0 \times g_1 \times g_2 .$$

Convention. Soient J et F deux ensembles. Si $E_i = F$ pour tout $i \in J$, on pose $F^J = \prod_{i \in J} E_i$; en particulier $F^0 = \{0\} = 1$. L'ensemble des applications de J dans F est désigné par $M(F,J)$.

PROPOSITION 2. Soit F un ensemble. Les ensembles F^J et $M(F,J)$ sont équipotents. L'ensemble 2^J est équipotent à l'ensemble $P(J)$ des parties de J.

Preuve. 1° Si f est une application de J dans F, son graphe $\underline{f}$ appartient à F^J. Inversement, si $\xi \in F^J$, alors ξ est le graphe de l'application (F, ξ, J). Donc l'application $f \to \underline{f}$ est une bijection de $M(F,J)$ sur F^J.

2° Supposons $F = 2 = \{0,1\}$. Si A est une partie de J, notons c_A *l'application caractéristique de A* pour J, c'est-à-dire l'application de J dans 2 telle que

$$x \to 1 \text{ si } x \in A, \quad x \to 0 \text{ si } x \in J \setminus A .$$

L'application $A \to c_A$ de $P(J)$ dans $M(2,J)$ est une bijection. Comme 2^J est équipotent à $M(2,J)$ d'après la partie 1, $P(J)$ est aussi équipotent à 2^J.

PROPOSITION 3. Soient $(E_i)_{i \in J}$ et $(F_i)_{i \in J}$ des familles, S et S' leurs sommes, P et P' leurs produits. Si g_i est une injection (resp. une bijection) de E_i dans F_i pour tout $i \in J$, les applications g somme et g' produit de $(g_i)_{i \in J}$ sont des injections (resp. des bijections).

Preuve. 1° Soient (x,i) et (x',j) deux éléments de S. L'égalité $g(x,i) = g(x',j)$ entraîne

$$(g_i(x), i) = (g_j(x'), j) ,$$

d'où $i = j$ et $g_i(x) = g_j(x') = g_i(x')$. Comme g_i est une injection, on en déduit $x = x'$. Donc g est une injection (resp. une bijection ayant pour inverse l'application somme de $(g_i^{-1})_{i \in J}$).

2° La relation $g'((x_i)_{i \in J}) = g'((y_i)_{i \in J})$ signifie

$$g_i(x_i) = g_i(y_i) \quad \text{pour tout } i \in J ,$$

et par suite $x_i = y_i$, car g_i est une injection. Ceci prouve que g' est une injection (resp. une bijection dont l'inverse est l'application produit de $(g_i^{-1})_{i \in J}$).

COROLLAIRE. Si f est une injection (resp. une bijection) de F' dans F, l'ensemble F'^J est de puissance inférieure (resp. est équipotent) à F^J

En effet, l'application g^J produit de $(g_i)_{i \in J}$, où $g_i = f$ pour tout i, est une injection (resp. une bijectio d'après la proposition.

PROPOSITION 4. Soient S la somme et P le produit de la famille $(E_i)_{i \in J}$. Soient f une bijection d'un ensemble K sur une partie J' de J (resp. sur J) et $E'_k = E_{f(k)}$ pour tout $k \in K$. La somme S' de $(E'_k)_{k \in K}$ est de puissance infé-

rieure (resp. est équipotente) à S; son produit P' est de puissance inférieure à P si $\prod_{i\in J''} E_i$, *où* $J'' = J\setminus J'$, *n'est pas vide (resp. est équipotent à P).*

Preuve. 1° L'application

$$(x,k) \to (x,f(k)) \quad \text{de } S \text{ dans } S'$$

est une injection (resp. une bijection).

2° Soit $J'' = J\setminus J'$. S'il existe $(a_i)_{i\in J''}$, l'application $(x_k)_{k\in K} \to (y_i)_{i\in J}$, où

$y_i = x_k$ si $i = f(k) \in J'$, $y_{i''} = a_{i''}$ si $i''\in J''$, est une injection de P dans P'. Si $J'' = \emptyset$, l'application de P dans P' telle que

$$(x_k)_{k\in K} \to (y_i)_{i\in J}, \text{ où } y_i = x_k \text{ si } i = f(k),$$

est une bijection.

COROLLAIRE. Si F' et K sont des ensembles de puissance inférieure (resp. ensembles équipotents) à F et à J respectivement, F'^K *est de puissance inférieure (resp. est équipotent) à* F^J, *et P(K) est de puissance inférieure (resp. est équipotent) à P(J).*

En effet, F'^K est de puissance inférieure (resp. est équipotent) à F^K (corollaire, proposition 3) et F^K est de puissance inférieure (resp. est équipotent) à F^J, en vertu de la proposition 4. En particulier si $F = F' = 2$, les ensembles 2^K et 2^J sont équipotents à P(K) et à P(J) (proposition 2), d'où résulte la $2^{\text{ème}}$ affirmation.

PROPOSITION 5. Soient S et P les somme et produit de $(E_i)_{i\in J}$. *Si F est un ensemble,* $S\times F$ *est équipotent à la somme de* $(E'_i)_{i\in J}$, *où* $E'_i = E_i\times F$ *pour tout* $i \in J$. *Soit* $(K_j)_{j\in K}$ *une partition de J et, pour tout* $j \in K$, *notons* S_j *et* P_j *les somme et produit de* $(E_i)_{i\in K_j}$. *Alors S est équipotent à la somme S' de* $(S_j)_{j\in K}$ *et P au produit P' de* $(P_j)_{j\in K}$.

Preuve. La première affirmation est évidente. L'application

$$((x,i),j) \to (x,i) \quad \text{de } S' \text{ dans } S$$

est une bijection. L'application

$$((x_i)_{i\in K_j})_{j\in K} \to (x_i)_{i\in J} \quad \text{de } P' \text{ dans } P$$

est aussi une bijection.

COROLLAIRE 1. Si F est un ensemble et si J est la somme d'une famille $(K_j)_{j\in J}$, *alors* F^J *est équipotent à* $\prod_{j\in K} P_j$ *où* $P_j = F^{K_j}$ *pour tout* $j \in K$.

En effet, d'après la proposition, F^J est équipotent au produit de $(P'_j)_{j\in K}$, où $P'_j = F^{K_j\times\{j\}}$; or celui-ci est équipotent au produit F^{K_j}, les ensembles K_j et $K_j\times\{j\}$ étant équipotents.

COROLLAIRE 2. Si F, K et K' sont des ensembles, $F^{K'\times K}$, $(F^{K'})^K$ *et* $(F^K)^{K'}$ *sont équipotents.*

En effet, $K'\times K$, $K\times K'$ et $\sum_{j\in K} K'_j$, où $K'_j = K'$ pour tout $j \in K$, étant équipotents, les ensembles $F^{K'\times K}$, $F^{K\times K'}$ et $(F^{K'})^K$ le sont aussi, ainsi que $(F^K)^{K'}$ (corollaire 1).

PROPOSITION 6. Soient S et P les somme et produit d'une famille finie $(E_i)_{i\in J}$ *d'ensembles non vides. Alors* $P \neq \emptyset$; *si* $J \neq \emptyset$, *S et P sont finis ssi* E_i *est fini pour tout* $i \in J$.

Preuve. 1° Soit M l'ensemble formé de $\emptyset$ et des parties K de J telles que l'on ait $P_K = \prod_{k\in K} E_k \neq \emptyset$.

Supposons $K \in M$ et $i \in J \setminus K$; soit $K' = K \cup \{i\}$. Si K est vide, on trouve

$$P_{K'} = E_i \times \{i\} \neq \emptyset ,$$

étant donné que E_i n'est pas vide. Supposons $K \neq \emptyset$. Par hypothèse, il existe une famille

$$\xi = (x_k)_{k \in K} \in P_K .$$

Il existe aussi un $x_i \in E_i$ et par suite la famille

$$\xi' = \xi \cup \{(x_i, i)\} = (x_k)_{k \in K'}$$

appartient à $P_{K'}$. Donc $P_{K'} \neq \emptyset$, et K' appartient à M. Il en résulte que M est une partie finiment saturée de $P(J)$, de sorte que, J étant fini, J appartient à M. Autrement dit, $P_J = P$ n'est pas vide.

2° Supposons E_i fini pour tout $i \in J$. L'ensemble $E_i' = E_i \times \{i\}$, équipotent à E_i, est fini (proposition 4-3). Comme S est la réunion de la famille finie $(E_i')_{i \in J}$ d'ensembles finis, S est fini en vertu de la proposition 6-3. De plus P est fini, car c'est une partie de $P(S)$ (proposition 1), lequel est fini (proposition 5-3).

3° Si S est fini, $P(S)$ l'est aussi, de sorte que sa partie P est finie. Supposons P fini et soit $j \in J$. D'après la partie I, il existe $(x_i)_{i \in J} \in P$. L'application f_j de E_j dans P telle que

$$z \to (z_i)_{i \in J} , \text{ où } z_j = z \text{ et } z_i = x_i \text{ si } i \in J \setminus \{j\},$$

est une injection. La partie $f_j(E_j)$ de P étant finie, l'ensemble E_j qui lui est équipotent est aussi fini.

Remarque. Si l'on ne suppose pas l'ensemble J fini dans la proposition 6, on ne sait pas démontrer que le produit P est non vide si tous les E_i sont non vides (ce produit

est évidemment vide si l'un des E_i est vide). C'est pourquoi on est conduit à introduire un nouvel axiome.

Définition. On dit que la totalité $\mathcal{D}$ *vérifie l'axiome du choix* si

(A7) Le produit d'une famille de $\mathcal{D}$-ensembles non vides indexée par un $\mathcal{D}$-ensemble infini est non vide.

On appelle *bon modèle de la Théorie des ensembles* un modèle de la Théorie des ensembles qui vérifie l'axiome du choix.

Si l'axiome du choix est vérifié et si E_i est un ensemble non vide pour tout élément i de J, il existe une famille $(x_i)_{i \in J}$ telle que x_i appartienne à E_i pour tout $i \in J$ (une telle famille existe si J est fini, d'après la proposition 6). Ceci justifie le nom axiome du choix donné à (A7), car une telle famille correspond intuitivement à un "choix" désignant, pour tout $i \in J$, un élément x_i de l'ensemble E_i.

PROPOSITION 7. Soient r une relation de F vers G et B la source du graphe $\underline{r}$ de r ; si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix (resp. si B est fini), r contient une application de B dans G.

Preuve. Désignons par G_x l'ensemble non vide $r(\{x\})$ pour tout $x \in B$. Le produit P de $(G_x)_{x \in B}$ admet au moins un élément $\xi = (m_x)_{x \in B}$ d'après l'axiome (A 7) (resp. d'après la proposition 6). L'application

$$x \to m_x \quad \text{de} \quad B \quad \text{dans} \quad G$$

est contenue dans r.

COROLLAIRE. Soit f une surjection de F' sur F; si D vérifie l'axiome du choix (resp. si F est fini), il existe une injection s de F dans F' telle que $f \circ s = 1_F$.

En effet, d'après la proposition 7 il existe une application s de F dans F' contenue dans la relation réciproque $\bar{f}^1$ de f. Comme s(x) appartient à $\bar{f}^1(\{x\})$ pour tout $x \in F$, on a $f(s(x)) = x$ et s est une injection.

PROPOSITION 8. Soient F et G deux ensembles; supposons que D vérifie l'axiome du choix (resp. que F est fini). Il existe un ensemble F' équipotent à F tel que $F' \cap G = \emptyset$.

Preuve. La proposition est triviale si $F = \emptyset$. Supposons F non vide. Il existe un ensemble A (par exemple P(G)) qui est de puissance strictement supérieure à G. Pour tout $x \in F$, considérons l'ensemble A_x des couples

$$(x,z) \in F \times A \quad \text{tels que} \quad (x,z) \notin G.$$

Comme $\{x\} \times A$ est équipotent à A, donc de puissance strictement supérieure à G, l'ensemble A_x n'est pas vide. En vertu de l'axiome du choix (resp. de la proposition 6), il existe une famille

$$(m_x)_{x \in F} \in \prod_{x \in F} A_x .$$

Soit f la surjection $x \to m_x$ de F sur une partie F' de $F \times A$. Par construction de A_x, le couple m_x n'appartient pas à G et son premier terme est x ; il s'ensuit que $F' \cap G = \emptyset$ et que f est une bijection de F sur F'.

PROPOSITION 9. Soient S et S' les sommes, P et P' les produits de deux familles $(E_i)_{i \in J}$ *et* $(F_i)_{i \in J}$ *indexées par J. Supposons que D vérifie l'axiome du choix ou que J est fini; si* E_i *est de puissance inférieure (resp. est équipotent) à* F_i *pour tout* $i \in J$, *alors S et P sont respectivement de puissance inférieure (resp. équipotents) à S' et P'.*

Preuve. Pour tout $i \in J$, soit M_i la partie de l'ensemble $\{F_i\} \times \mathcal{P}(F_i \times E_i) \times \{E_i\}$ formé des injections (resp. des bijections) de E_i dans F_i. D'après l'axiome du choix, ou d'après la proposition 6 lorsque J est fini, le produit M de $(M_i)_{i \in J}$ n'est pas vide. Soit $(f_i)_{i \in J}$ un de ses éléments. La proposition 3 affirme que l'application somme de $(f_i)_{i \in J}$ est une injection (resp. une bijection) de S dans S', et que son application produit en est une de P dans P'.

PROPOSITION 10. Soient S la somme et P le produit de $(E_i)_{i \in J}$. *S'il existe deux éléments* $(a_i)_{i \in J}$ *et* $(b_i)_{i \in J}$ *de P tels que* $a_i \neq b_i$ *pour tout* $i \in J$, *alors S est de puissance inférieure à P.*

Preuve. Soit S' la somme de $(E'_i)_{i \in J}$, où $E'_i = E_i \setminus \{a_i\}$ pour tout $i \in J$. On a

$$S = S' \cup S'', \quad \text{où} \quad S'' = S \setminus S' = \{(a_i, i) \mid i \in J\}.$$

Si $(x,i) \in S'$, notons $f(x,i)$ la famille $(x_i)_{i \in J} \in P$ telle que

$$x_i = x \quad \text{et} \quad x_j = a_j \quad \text{si} \quad j \in J \setminus \{i\}.$$

En associant $f(x,i)$ à (x,i), on définit une bijection f de S' sur la partie P' de P formée des familles dont un seul terme x_i diffère du a_i de même indice i.

1° Supposons que J ait plus de deux éléments. Si $(a_i, i) \in S''$, la famille $g(a_i, i) = (x_i)_{i \in J}$ telle que

$$x_i = a_i \quad \text{et} \quad x_j = b_j \quad \text{si} \quad j \in J \setminus \{i\}.$$

appartient à $P \setminus P'$, car deux des x_j au moins sont différents des a_j correspondants. Il s'ensuit que l'application $g: (a_\iota, \iota) \to g(a_\iota, \iota)$ de S'' dans $P \setminus P'$ est une injection. L'application h réunion de (f,g) est une injection de S dans P.

2° Si $J = \{\iota\}$, les ensembles S et P sont tous les deux équipotents à E_ι. Le seul cas non examiné est celui où J est une paire propre $\{\iota,\iota'\}$; considérons-le. On obtient une injection g'' de S'' dans $P \setminus P'$ en associant (a_ι, a_ι) à (a_ι, ι) et $(b_\iota, b_{\iota'})$ à $(a_{\iota'}, \iota')$. L'application réunion de (f,g'') est une injection de S dans P. Donc, dans tous les cas, S est de puissance inférieure à P.

COROLLAIRE. Supposons que $\mathfrak{D}$ vérifie l'axiome du choix (resp. que J est fini) et que E_ι ait au moins deux éléments pour tout $\iota \in J$; la somme de $(E_\iota)_{\iota \in J}$ est de puissance inférieure à son produit

En effet, d'après l'axiome du choix (resp. d'après la proposition 6), il existe un $(a_\iota)_{\iota \in J} \in P$ et, comme on a $E'_\iota = E_\iota \setminus \{a_\iota\} \neq \emptyset$ pour tout $\iota \in J$, il existe aussi un $(b_\iota)_{\iota \in J} \in \prod_{\iota \in J} E'_\iota$. Donc le corollaire résulte de la proposition.

PROPOSITION 11. Supposons que $\mathfrak{D}$ vérifie l'axiome du choix et soient $(E_\iota)_{\iota \in J}$ et $(F_\iota)_{\iota \in J}$ deux familles de sommes S et S', de produits P et P'. Si F_ι est de puissance strictement inférieure à E_ι pour tout $\iota \in J$, alors S' est de puissance strictement inférieure à P.

Preuve. S' est de puissance inférieure à S, d'après

la proposition 9.

1° Supposons que les E_ι aient au moins deux éléments pour tout $\iota \in J$. Alors S est de puissance inférieure à P (corollaire, proposition 10); a fortiori S' est de puissance inférieure à P. Supposons qu'il existe une bijection g de S' sur P; si p_ι désigne la projection canonique de P sur E_ι, posons

$$g_\iota = p_\iota \circ g \quad \text{et} \quad F'_\iota = g_\iota(F_\iota \times \{\iota\}).$$

Le corollaire de la proposition 7 montre que F'_ι est de puissance inférieure à $F_\iota \times \{\iota\}$, et par suite à F_ι. Ce dernier étant de puissance strictement inférieure à E_ι, la partie F'_ι de E_ι est propre, i.e.

$$F''_\iota = E_\iota \setminus F'_\iota \neq \emptyset \quad \text{pour tout} \quad \iota \in J.$$

On en déduit, à l'aide de l'axiome du choix, qu'il existe $\xi = (z_\iota)_{\iota \in J} \in \prod_{\iota \in J} F''_\iota$. Comme g est une bijection, il existe $(x,\iota) \in S'$ tel que $\xi = g(x,\iota)$, ce qui entraîne

$$z_\iota = p_\iota(\xi) = g_\iota(x,\iota) \in F'_\iota.$$

Ceci est impossible, z_ι appartenant à F''_ι. Donc S' est de puissance strictement inférieure à P.

2° E_ι étant de puissance strictement supérieure à F_ι, il a au moins un élément et, si F_ι n'est pas vide, il en a au moins deux. Soit

$$J' = \{\iota \in J \mid F_\iota \neq \emptyset\}.$$

La somme de $(F_\iota)_{\iota \in J'}$ est identique à S' et, d'après la partie 1, de puissance strictement inférieure au produit P'' de $(E_\iota)_{\iota \in J'}$. Il s'ensuit que S' est encore de puissance strictement inférieure à P, car P'' est de puissance inférieure à P d'après la proposition 4.

Remarque. La proposition précédente (théorème de König)

reste vrale même si $\mathcal{D}$ ne vérifie pas l'axiome du choix, à condition de supposer remplies les conditions suivantes:

1° S est de puissance inférieure à P (par exemple s'il existe deux éléments $(a_i)_{i\in J'}$ et $(b_i)_{i\in J'}$ du produit P" de $(E_i)_{i\in J'}$, où $J' = \{i \in J \mid F_i \neq \emptyset\}$, tels que $a_i \neq b_i$ pour tout $i \in J'$, d'après la proposition 10).

2° $F_i' = g_i(F_i \times \{i\})$ est de puissance inférieure à $F_i \times \{i\}$ pour tout $i \in J$.

3° Si F_i'' est une partie non vide de F_i pour tout $i \in J$, le produit de $(F_i'')_{i\in J}$ n'est pas vide.

Ces conditions sont en particulier vérifiées si l'on part de deux familles $(E_i,\alpha_i)_{i\in J}$ et $(F_i,\alpha_i)_{i\in J}$ d'ensembles bien ordonnés, en vertu des propriétés des ensembles bien ordonnés (voir § 16 et 17).

CHAPITRE II

Relations d'ordre. Entiers

Dans tout ce chapitre, on suppose donnée une totalité $\mathcal{D}$ et ensemble signifie $\mathcal{D}$-ensemble.

5. Ensembles ordonnés. Treillis.

Définition. On appelle *ensemble ordonné* (resp. *ensemble totalement ordonné*) le couple (E,r) d'un ensemble E et d'une relation d'ordre (resp. d'ordre total) sur E; l'ensemble ordonné $(E,\bar{r}^1)$ est dit *ensemble ordonné opposé à* (E,r), et $\bar{r}^1$ est *l'ordre opposé à* r.

Convention. Soit (E,r) un ensemble ordonné. Généralement on associe à l'ordre r un symbole, par exemple: $\leq$, $\leq'$, $\leq_1$, $\preceq$, ,... Si $\leq$ est le symbole associé à r, on écrit

(E, $\leq$) au lieu de (E,r),

$y \leq x$ au lieu de $(y,x) \in \underline{r}$,

et le symbole associé à l'ordre opposé est $\geq$ (obtenu en "renversant" le symbole $\leq$).

Hypothèse. Soient (E,$\leq$) *un ensemble ordonné,* r *l'ordre sur* E *de symbole* $\leq$ *et* A *une partie de* E.

(E,$\leq$) est totalement ordonné ssi, quels que soient les

éléments x et y de E, on a

$$x \alpha y \quad \text{ou bien} \quad y \alpha x.$$

Si r_A est la relation induite par r sur la partie A, le couple (A, r_A) est un ensemble ordonné, dit *sous-ensemble ordonné de* (E,α), et désigné souvent par (A,α) (i.e. on associe à r_A le même symbole qu'à r). Si (A,α) est un ensemble totalement ordonné, on dit que A est *une partie totalement ordonnée de* (E,α). Par exemple, toute partie d'un ensemble totalement ordonné est une partie totalement ordonnée.

On appelle *majorant* (resp. *majorant strict*) de A dans (E,α) un élément x de E (resp. de $E\backslash A$) tel que

$$a \alpha x \quad \text{pour tout} \quad a \in A.$$

Un minorant (resp. *minorant strict*) *de* A *dans* (E,α) est un majorant (resp. majorant strict) de A dans l'ensemble ordonné opposé, c'est-à-dire un élément y de E (resp. de $E\backslash A$) tel que

$$y \alpha a \quad \text{pour tout} \quad a \in A.$$

Au lieu de dire que x est un majorant (resp. un minorant) de A, on dira parfois que x majore (resp. minore) A. Si $A = \{a\}$, un majorant (resp. un minorant) (strict) de A est dit majorant (resp. minorant) (strict) de a.

Un élément maximal de (E,α) est un élément x de E n'admettant aucun majorant strict dans (E,α), i.e. tel que

$$x \alpha y \quad \text{entraîne} \quad x = y.$$

Un élément maximal de l'ensemble ordonné opposé est appelé *élément minimal de* (E,α).

E lui-même admet au plus un minorant dans (E,α), *le premier élément de* (E,α); s'il existe, c'est l'unique élément minimal de (E,α). On dit que d est *le dernier élément de* (E,α) si d est le premier élément de l'ensemble ordonné opposé, i.e. si d est un majorant de E dans (E,α).

Un élément minimal (resp. maximal) du sous-ensemble ordonné (A,α) est appelé *élément minimal* (resp. *maximal de* A *dans* (E,α). On dit que a est le *premier élément* (resp. le *dernier élément*) *de* A *dans* (E,α) si a est le premier (resp. le dernier) élément de (A,α); ceci signifie que a appartient à A et minore (resp. majore) A.

On peut associer à (E,α) un ensemble ordonné (E',α'), dit obtenu *par adjonction d'un premier élément*, comme suit: Soit u un ensemble n'appartenant pas à E (il en existe d'après la proposition 2-3, corollaire 2); on définit l'ensemble ordonné (E',α') en posant

$$E' = E \cup \{u\},$$

$$u \alpha' y \quad \text{pour tout} \quad y \in E,$$

$$x \alpha' y \quad \text{ssi} \quad x \alpha y, \text{ lorsque } x \in E, y \in E.$$

u est le premier élément de (E',α') et (E,α) est un sous-ensemble ordonné de (E',α').

Définition. Soit x un élément de E. Un élément maximal de l'ensemble des minorants stricts de x dans (E,α) est appelé *un prédécesseur de* x *dans* (E,α). Un élément minimal de l'ensemble des majorants stricts de x est appelé *un suivant de* x *dans* (E,α). On appelle *élément limite de* (E,α) un élément x de E ayant un minorant strict qui n'est majoré par aucun prédécesseur de x dans (E,α).

y est un prédécesseur de x dans (E,α) ssi l'on a $x \neq y \alpha x$ et si les relations

$$y \prec z \quad \text{et} \quad x \neq z \prec x$$

entraînent $z = y$. Pour que y' soit un suivant de x dans $(E,\prec)$, il faut et il suffit que y' soit un prédécesseur de x dans l'ensemble ordonné opposé $(E,\succ)$.

Si $(E,\prec)$ est totalement ordonné, A admet au plus un élément minimal, qui est le premier (resp. un élément maximal, qui est le dernier) élément de A dans $(E,\prec)$. Par suite $x \in E$ admet au plus un suivant et un prédécesseur dans $(E,\prec)$. Enfin x est un élément limite de $(E,\prec)$ ssi x n'a pas de prédécesseur et n'est pas le premier élément de $(E,\prec)$.

PROPOSITION 1. Soient $(E,\prec)$ *un ensemble ordonné,* x *et* y *deux éléments de* E. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1° x' *est un suivant de* x *dans* $(E,\prec)$;

2° x *est un prédécesseur de* x' *dans* $(E,\prec)$;

3° x' *est un majorant strict de* x *et les conditions* $x \prec z$ *et* $z \prec x'$ *entraînent* $z = x'$ *ou* $z = x$.

Preuve. Soit x' un suivant de x ; alors $x \prec x'$ et $x \neq x'$. Supposons

$$x \prec z \quad \text{et} \quad z \prec x' ;$$

si z est un majorant strict de x, on a $z = x'$, par définition d'un suivant; il en résulte

$$z = x \quad \text{ssi} \quad z \neq x' ,$$

car z est un majorant de x. Donc x est un prédécesseur de x'. Inversement, soit x un prédécesseur de x'; dans l'ensemble ordonné opposé, x est un suivant de x', donc, d'après ce qui précède, x' est un prédécesseur de x. Autrement dit, x' est un suivant de x dans $(E,\prec)$. Ainsi

les trois conditions sont équivalentes.

Définition. On dit que A admet b pour *borne supérieure dans* $(E,\prec)$ si b est le premier élément de l'ensemble des majorants de A dans $(E,\prec)$ (on dira en abrégé le *plus petit majorant de* A); si aucune confusion n'est possible, on désigne alors b par $\bigvee A$. Si A admet b' pour borne supérieure dans l'ensemble ordonné opposé, on appelle b' *une borne inférieure de* A *dans* $(E,\prec)$, en formule $b' = \bigwedge A$.

Soit b un élément de E; c'est la borne supérieure (nécessairement unique) de A dans $(E,\prec)$ ssi b majore A et si $b \prec y$ pour tout autre majorant y de A. De même b est la (seule) borne inférieure de A ssi b minore A et majore tout autre minorant de A.

Si A est la paire $\{x,y\}$, on écrit

$$\bigvee A = x \vee y \quad \text{et} \quad \bigwedge A = x \wedge y ,$$

lorsque ces éléments existent. En particulier, on a

$$x \vee y = y \quad (\text{resp. } x \wedge y = x) \quad \text{ssi} \quad x \prec y.$$

Si $(x_\iota)_{\iota \in J}$ est une famille d'éléments de E, de but A, et si A admet une borne supérieure (resp. borne inférieure) dans $(E,\prec)$, on appelle cette borne la *borne supérieure* (resp. *borne inférieure*) de la famille $(x_\iota)_{\iota \in J}$, et l'on pose

$$\bigvee A = \bigvee_{\iota \in J} x_\iota \quad \text{et} \quad \bigwedge A = \bigwedge_{\iota \in J} x_\iota .$$

Pour que u soit le premier élément de $(E,\prec)$, il faut et il suffit que u soit la borne supérieure de la partie $\emptyset$ (resp. la borne inférieure de E) dans $(E,\prec)$. Un élément u' est le dernier élément de $(E,\prec)$ ssi u' est la borne inférieure de $\emptyset$ (resp. la borne supérieure de E)

dans (E,α). Un premier (resp. dernier) élément de A dans (E,α) est une borne inférieure (resp. borne supérieure) de A dans (E,α) qui appartient à A.

Définition. Si S est une partie de (resp. partie propre de) E telle que $x \in S$ et $y \alpha x$ entraînent $y \in S$, on appelle S une *section* (resp. section *propre*) de (E,α), et le sous-ensemble ordonné (S,α) une *section ordonnée de* (E,α). Si S est une section de (E,α) et S' une section de (E,β), on appelle $S \cap S'$ *un intervalle*, et $(S \cap S',\alpha)$ un *intervalle ordonné*, de (E,α).

Une section de (E,α) est donc une partie de E saturée par induction (i.e. contenant l'ensemble des minorants de chacun de ses éléments). Soit $x \in E$. L'ensemble des minorants stricts (resp. des minorants) de x dans (E,α) est une section de (E,α), notée, si aucune confusion n'est possible, $\overleftarrow{x}$ (resp. $\overleftrightarrow{x}$); on appelle $\overleftarrow{x}$ *section de* (E,α) *associée à* x ; on a $\overleftrightarrow{x} = \overleftarrow{x} \cup \{x\}$. Soient $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{\overrightarrow{x}}$ les sections analogues de (E,β), c'est-à-dire:

$\overrightarrow{x} = \{y \in E \mid y \neq x \alpha y\}$ et $\overrightarrow{\overrightarrow{x}} = \{y \in E \mid x \alpha y\}$.

Si M est un ensemble de sections de (E,α), son intersection et sa réunion sont des sections de (E,α). En particulier A est contenu dans une plus petite section, à savoir $\bigcup_{x \in A} S_x$, où $S_x = \overleftrightarrow{x}$ pour tout $x \in A$; on l'appelle *section de* (E,α) *engendrée par* A .

Si $x \in E$, $y \in E$ et $x \alpha y$, l'ensemble des $z \in E$ tels que $x \alpha z \alpha y$ est un intervalle, noté $|x,y|$, de même que $]x,y[= |x,y| \setminus \{x,y\}$. Une partie J de E est un intervalle ssi $|x,y| \subset J$ lorsque $x \in J$, $y \in J$. L'intersection J_A de l'ensemble des intervalles contenant A est *l'intervalle engendré par* A ; on a $J_A = S \cap S'$, où S et S' sont les sections de (E,α) et de (E,β) engendrées par A, et J_A est aussi la réunion de l'ensemble des intervalles $|x,y|$ tels que $x \in A$ et $y \in A$.

Définition. Des parties A et B de E sont dites *cofinales dans* (E,α) si elles engendrent la même section. On dit que A est *cofinal avec* (E,α) si A et E sont cofinales.

A est cofinal avec (E,α) ssi, pour tout $y \in E$, il existe $x \in A$ tel que $y \alpha x$. Si d est un dernier élément de (E,α), alors $\{d\}$ est cofinal avec (E,α). Si (E,α) est totalement ordonné, A est cofinal avec (E,α) ssi A n'a pas de majorant strict dans (E,α).

PROPOSITION 2. Soit S *une section d'un ensemble totalement ordonné* (E,α). *Alors* $E \setminus S$ *est l'ensemble des majorants stricts de* S. *De plus* S *admet* x *pour borne supérieure dans* (E,α) *ssi l'une des conditions suivantes est remplie:*

1° x est le dernier élément de S *dans* (E,α);

2° S n'a pas de dernier élément, et c'est la section $\overleftarrow{x}$ *de* (E,α) *associée à* x.

Preuve. Soit $z \in E \setminus S$. Si $x' \in S$, on a $x' \alpha z$ ou $z \alpha x'$; cette dernière relation est exclue, car elle entraînerait $z \in S$; par suite z est un majorant strict de S . On en déduit que x est la borne supérieure de S ssi l'on est dans l'un des cas suivants:

1° x appartient à S ; alors x est le dernier élément de S , d'où $S = \overleftrightarrow{x}$.

2° x est le premier élément de $E\backslash S$ et S n'a pas de dernier élément; dans ce cas x majore strictement S et, si $z \in {}^{\leftarrow}x$, on obtient $z \notin E\backslash S$, c'est-à-dire $z \in S$. Donc S est la section ${}^{\leftarrow}x$ associée à x.

COROLLAIRE. Soient (E,α) un ensemble totalement ordonné et $x \in E$. Alors x est la borne supérieure de la section ${}^{\leftarrow}x$ associée à x ssi x n'a pas de prédécesseur (i.e. si x est élément limite ou premier élément de (E,α)).

En effet, comme $x \notin {}^{\leftarrow}x$, on a $x = V{}^{\leftarrow}x$ ssi ${}^{\leftarrow}x$ n'a pas de dernier élément, d'après la proposition.

PROPOSITION 3. Toute partie (resp. partie non vide, resp. minorée non vide, resp. minorée) de E admet une borne inférieure dans (E,α) ssi toute partie (resp. partie majorée, resp. majorée non vide, resp. non vide) admet une borne supérieure dans (E,α).

Preuve. Cette proposition résulte de la remarque suivante: A admet x pour borne supérieure (resp. borne inférieure) ssi x est une borne inférieure de l'ensemble des majorants (resp. borne supérieure de l'ensemble des minorants) de A dans (E,α).

PROPOSITION 4. Soient A et B des parties de E admettant des bornes supérieures a et b dans (E,α). Si (a,b) admet une borne supérieure c dans (E,α), alors c est aussi une borne supérieure dans (E,α) de $C = A \cup B$.

Preuve. c est un majorant de C. Si x majore C, il majore A et B ; il s'ensuit

$a \alpha x$ et $b \alpha x$, d'où $c \alpha x$.

Donc c est la borne supérieure de C.

COROLLAIRE 1. Soient x, y et z trois éléments de E. Si la borne supérieure $x \vee (y \vee z)$ (resp. $(x \vee y) \vee z$) existe, dans (E,α), elle est aussi la borne supérieure de $\{x,y,z\}$ dans (E,α), notée $x \vee y \vee z$.

COROLLAIRE.2. Soit (E,α) un ensemble ordonné tel que toute paire contenue dans E admette une borne supérieure (resp. borne inférieure). Alors toute partie finie non vide de E admet une borne supérieure (resp. borne inférieure).

Preuve. Considérons l'ensemble M ayant pour éléments $\emptyset$ et les parties A de E admettant une borne supérieure (resp. borne inférieure) dans (E,α). Soit $x \in E$; on a

$$\{x\} \in M, \quad \text{car} \quad x = V\{x\} = \Lambda\{x\};$$

si A appartient à M, la proposition 4 entraîne que l'ensemble $A \cup \{x\}$ appartient à M. Ainsi M est une partie finiment saturée de $P(E)$, de sorte que toute partie finie de E appartient à M; c'est-à-dire toute partie finie non vide admet une borne supérieure (resp. inférieure).

Définition. On appelle *treillis* un ensemble ordonné (E,α) tel que toute paire d'éléments de E admette une borne supérieure et une borne inférieure. On dit que (E,α) est un *treillis complet* si c'est un ensemble ordonné dans lequel toute partie de E admet une borne inférieure.

Soit (E,α) un treillis complet. D'après la proposition 3, c'est un treillis et toute partie de E admet une borne

supérieure; en particulier (E,α) a un premier élément u et un dernier élément d.

Un treillis (resp. treillis complet) (E,α) est dit *distributif* si, pour tout élément x de E et toute partie A à deux éléments (resp. toute partie A) de E, on a

$$x \wedge (\vee A) = \vee A' , \quad \text{où} \quad A' = \{x \wedge a \mid a \in A\}.$$

Soit (E,α) un treillis admettant un premier élément u et un dernier élément d. Si $x \in E$, on appelle *complément de x dans* (E,α) un élément x' de E tel que:

$$x \wedge x' = u \quad \text{et} \quad x \vee x' = d.$$

PROPOSITION 5. Soit (E,α) un treillis distributif ayant un premier élément u et un dernier élément d; un élément x de E a au plus un complément dans (E,α).

Preuve. Soient x' et x'' deux compléments de x. Des égalités:

$$x'' = d \wedge x'' = (x \vee x') \wedge x'' = (x \wedge x'') \vee (x' \wedge x'') =$$
$$= u \vee (x' \wedge x'') = x' \wedge x'' ,$$

on déduit $x'' \alpha x'$. De même on voit que $x' \alpha x''$. Au total $x' = x''$.

Définition. On appelle *treillis complémenté* un treillis distributif, ayant un premier élément, un dernier élément, et dans lequel tout élément admet un complément.

EXEMPLE. Soit X un ensemble. Soit $(P(X),\subset)$ l'ensemble ordonné obtenu en munissant l'ensemble des parties de X de la *relation d'inclusion*, dont le graphe est formé des couples (A,B) de parties de X tels que $A \subset B$. Toute partie M de $P(X)$ admet pour borne supérieure $\bigcup M$

et elle admet pour borne inférieure: $\bigcap M$ si $M \neq \emptyset$ et X si $M = \emptyset$. (On dit parfois que X est l'intersection de $\emptyset$ dans X, mais par définition $\bigcap \emptyset = \emptyset$!). Donc $(P(X),\subset)$ est un treillis complet, qui est distributif et complémenté, le complément de Y étant $X \setminus Y$. L'ensemble L des parties de $P(X)$ ayant un élément minimal dans $(P(X),\subset)$ est finiment saturé dans $P(P(X))$ et une partie $M \neq \emptyset$ de $P(X)$ telle que $\{A \subset X \mid A \notin M\}$ soit finiment saturé dans $P(X)$ n'appartient pas à L. Il s'ensuit que X *est fini ssi toute partie non vide de $P(X)$ a un élément minimal.* Telle est la définition de Tarski d'un ensemble fini.

6. Applications ordonnées.

Définition. On appelle *application ordonnée* un triplet $F = ((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$, où (E,α) et (E',α') sont des ensembles ordonnés et f une application de E dans E' telle que $x \alpha y$ entraîne $f(x) \alpha' f(y)$.

Soient (E,α) et (E',α') deux ensembles ordonnés, f une application de E dans E'. On dit que *f définit une application ordonnée F de (E,α) vers (E',α')* si

$$F = ((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$$

est une application ordonnée; dans ce cas, on posera

$F(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$,

$F(A) = f(A)$ pour toute partie A de E.

Si x majore (resp. minore) la partie A de E dans (E,α), alors $f(x)$ majore (resp. minore) $f(A)$ dans (E',α'). En particulier, si A et $f(A)$ admettent respectivement des bornes supérieures $\vee A$ et $\vee f(A)$ (resp. bornes inférieures $\wedge A$ et $\wedge f(A)$) dans (E,α) et dans

(E',α'), on a

$$\forall f(A) \alpha' f(\forall A) \quad \text{(resp. } f(\wedge A) \alpha' \wedge f(A)\text{)}.$$

Soient

$F = ((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$ et $G = ((E'',\alpha''),g,(E',\alpha'))$ deux applications ordonnées. L'application composée $g \circ f$ de E dans E'' définit une application ordonnée

$$((E'',\alpha''),g\circ f,(E,\alpha))$$

de (E,α) vers (E'',α''); on la notera $G \circ F$ et on l'appellera *l'application ordonnée composée de* (G,F).

Définition. On appelle *isomorphisme de* (E,α) *sur* (E',α') une application ordonnée $((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$ telle que f soit une bijection dont l'inverse f^{-1} définisse une application ordonnée de (E',α') vers (E,α).

Soit $F = ((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$ un isomorphisme; l'application ordonnée

$$((E,\alpha),f^{-1},(E',\alpha'))$$

est aussi un isomorphisme, dit *inverse de* F, et désigné par F^{-1}. L'application ordonnée composée $F^{-1} \circ F$ est l'application ordonnée

$$^{1}(E,\alpha) = ((E,\alpha),{}^{1}_{E},(E,\alpha))$$

définie par l'application identique de E; l'application ordonnée composée $F \circ F^{-1}$ est identique à $^{1}(E',\alpha')$. On a

$$x \alpha y \quad \text{ssi} \quad f(x) \alpha' f(y),$$

de sorte que l'ordre sur E' de symbole α' a pour graphe l'ensemble des couples

$$(f(x),f(y)) \quad \text{tels que} \quad x \alpha y.$$

On dit alors que (E',α') est *l'ensemble ordonné image de* (E,α) *par* f.

Soit $F = ((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$ une application ordonnée telle que f soit une bijection; F n'est pas nécessairement un isomorphisme. Toutefois il en est ainsi lorsque (E,α) est totalement ordonné. En effet, si x et y appartiennent à E, on a $x \alpha y$ ou bien $y \alpha x$, donc

$$f(x) \alpha' f(y) \quad \text{entraîne} \quad x \alpha y.$$

Définition. On appelle *application sup-compatible* (resp. *application inf-compatible*) une application ordonnée F de (E,α) vers (E',α') vérifiant la condition:

Si M est une partie finie non vide de E admettant une borne supérieure $\forall M$ (resp. borne inférieure $\wedge M$) dans (E,α), alors $F(\forall M)$ est la borne supérieure (resp. $F(\wedge M)$ est la borne inférieure) de $F(M)$ dans (E',α'). L'application ordonnée F est dite *complètement sup-compatible* (resp. *complètement inf-compatible*) si elle vérifie la condition obtenue en supprimant le mot "finie" dans l'énoncé précédent.

Un isomorphisme est une application complètement sup-compatible et complètement inf-compatible. Soient F et G deux applications ordonnées composables; si G et F sont sup-compatibles (resp. inf-compatibles, resp. complètement sup-compatibles, resp. complètement inf-compatibles), l'application composée $G \circ F$ a la même propriété.

PROPOSITION 1. Soient (E,α) *et* (E',α') *deux ensembles ordonnés,* f *une application de* E *dans* E'. *Si toute paire* (x,y) *contenue dans* E *admet une borne supérieure* $x \vee y$ *dans* (E,α) *telle que*

$f(x) \vee f(y)$ *de* $\{f(x),f(y)\}$ *dans* (E',α'), *alors le triplet* $F = ((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$ *est une application sup-compatible.*

Preuve. Si $x \alpha y$, l'égalité $y = x \vee y$ entraîne

$$f(y) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y),$$

d'où $f(x) \alpha' f(y)$; ainsi F est une application ordonnée. Considérons l'ensemble M dont les éléments sont $\emptyset$ et les parties A de E admettant une borne supérieure VA dans (E,α) telle que $f(VA)$ soit la borne supérieure $Vf(A)$ de $f(A)$ dans (E',α'). On a $\{x\} \in M$ pour tout $x \in E$. Soient

$$A \in M, \quad x \in E \quad \text{et} \quad A' = A \cup \{x\}.$$

Il existe par hypothèse $(VA) \vee x$, et cet élément y est, d'après la proposition 4-5, la borne supérieure de A'. L'égalité

$$f(y) = f((VA) \vee x) = f(VA) \vee f(x) = (Vf(A)) \vee f(x)$$

entraîne, en utilisant la proposition 4-5, que $f(y)$ est la borne supérieure de

$$f(A) \cup \{f(x)\} \alpha f(A \cup \{x\}) = f(A').$$

Donc A' appartient à M, de sorte que M est une partie finiment saturée de $P(E)$. Ainsi toute partie finie de E appartient à M, c'est-à-dire F est une application sup-compatible.

COROLLAIRE. Si f définit une application ordonnée de (E,α) *vers* (E',α') *et si toute paire* $\{x,y\}$ *contenue dans* E *admet une borne inférieure* $x \wedge y$ *telle que* $f(x \wedge y)$ *soit une borne inférieure de* $\{f(x),f(x)\}$, *alors f définit une application inf-compatible de* (E,α) *vers* (E',α').

Définition. On appelle *homomorphisme entre treillis* (resp. *entre treillis complets*) une application ordonnée

$$F = ((E',\alpha'),f,(E,\alpha)),$$

où (E,α) et (E',α') sont des treillis (resp. treillis complets), qui est à la fois (resp. à la fois complètement) inf-compatible et sup-compatible.

Soient (E,α) un ensemble ordonné et (A,α) un sous-ensemble ordonné. L'injection canonique de A dans E définit une application ordonnée i de (A,α) vers (E,α). Si A est une section de (E,α), alors I est complètement inf-compatible, les minorants d'un élément x de A dans (A,α) étant aussi ses minorants dans (E,α). Si l'ensemble ordonné (E,α) est un treillis, I n'est un homomorphisme entre treillis que si

$$x \wedge y \in A \quad \text{et} \quad x \vee y \in A,$$

pour tout $x \in A$, $y \in A$. Dans ce cas, (A,α) est un treillis, dit *sous-treillis de* (E,α) *défini par* A. Si (E,α) est un treillis complet, I est un homomorphisme entre treillis complets ssi A est stable pour V et pour $\wedge$, i.e. ssi l'on a

$$VC \in A \quad \text{et} \quad \wedge C \in A$$

pour toute partie C de A; lorsque ces conditions sont remplies, (A,α) est un sous-treillis de (E,α), dit *sous-treillis complet de* (E,α) *défini par* A.

EXEMPLES.

1° Soit X un ensemble. La bijection C:

$$A \to X \setminus A \quad \text{de} \quad P(X) \quad \text{sur} \quad P(X)$$

définit un isomorphisme du treillis complet $(P(X),\subset)$ des parties de X sur le treillis complet opposé $(P(X),\supset)$. On

retrouve les formules (§ 1):

$$C(\bigcup M) = \bigcap C(M) \quad \text{et} \quad C(\bigcap M) = \bigcup C(M)$$

pour toute partie M de P(X). Si A est une partie de X, alors $(P(A),\subset)$ est un sous-treillis complet de $(P(X),\subset)$.

2° Soit h une application de X dans X'. L'application Ph prolongement de h définit une application complètement sup-compatible F du treillis $(P(X),\subset)$ vers $(P(X'),\subset)$, car

$$h(\bigcup M) = \bigcup h(M)$$

pour toute partie M de P(X). Si de plus h est une injection, on a aussi

$$h(\bigcap M) = \bigcap h(M) ,$$

donc F est un homomorphisme entre treillis complets. Par ailleurs l'application $P\bar{h}^{1}$ prolongement de la relation réciproque $\bar{h}^{1}$ définit un homomorphisme G entre treillis complets de $(P(X'),\subset)$ vers $(P(X),\subset)$, vu les égalités

$$\bar{h}^{1}(\bigcup \hat{M}) = \bigcup \bar{h}^{1}(\hat{M}) \quad \text{et} \quad \bar{h}^{1}(\bigcap \hat{M}) = \bigcap \bar{h}^{1}(\hat{M}),$$

valables pour toute partie non vide $\hat{M}$ de P(X'). Si h est une bijection, F et G sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.

PROPOSITION 2. Soit (E,∝) *un ensemble ordonné. L'ensemble* L *des sections de* (E,∝) *définit un sous-treillis complet du treillis* $(P(E),\subset)$, *et l'application* s:

$$x \to {}^{\leftarrow}x \quad \text{de E dans L}$$

définit une application complètement inf-compatible de (E,∝) *vers* $(L,\subset)$.

Preuve. L définit un sous-treillis complet de $(P(E),\subset)$, puisque l'intersection et la réunion d'un ensemble de sections est une section. Comme

$$x \propto y \quad \text{équivaut à} \quad {}^{\leftarrow}x \subset {}^{\leftarrow}y ,$$

s définit une application ordonnée de (E,∝) vers $(L,\subset)$. Si une partie A de E admet y pour borne inférieure, la section $\bigcap s(A)$ est formée des minorants de y dans (E,∝), et par suite

$$\bigcap s(A) = s(\wedge A) .$$

Donc $((L,\subset),s,(E,\propto))$ est une application complètement inf-compatible (mais non sup-compatible).

Hypothèses. Nous supposons donnée une famille $((E_i,\propto_i))_{i\in J}$ d'ensembles ordonnés. Soient P le produit de la famille $(E_i)_{i\in J}$ et p_i la projection canonique $(x_i)_{i\in J} \to x_i$ de P sur E_i, pour tout $i \in J$.

Définition. On appelle *ensemble ordonné produit de la famille* $((E_i,\propto_i))_{i\in J}$, et l'on note $\prod_{i\in J}(E_i,\propto_i)$, l'ensemble ordonné (P,∝) obtenu en munissant le produit P de l'ordre défini par:

$$(x_i)_{i\in J} \propto (y_i)_{i\in J} \quad \text{ssi} \quad x_i \propto_i y_i \quad \text{pour tout } i \in J.$$

PROPOSITION 3. Avec les notations précédentes, soient $x = (x_i)_{i\in J} \in P$ *et* A *une partie de* P; *posons* $A_i = p_i(A)$ *pour tout* $i \in J$. *Alors* x *est une borne supérieure (resp. borne inférieure) de* A *dans* (P,∝) *ssi* x_i *est une borne supérieure (resp. inférieure) de* A_i *dans* $(E_i,\propto_i)$ *pour tout* $i \in J$.

Preuve. x majore A dans (P,∝) ssi x_i majore A_i dans $(E_i,\propto_i)$ pour tout $i \in J$. Il s'ensuit que, si

$x_i = Va_i$ pour tout $i \in J$,

x est une borne supérieure de A dans (P,α). Inversement supposons $x = VA$ et soit j un élément de J. Si y_j est un majorant de A_j, la famille $z = (z_i)_{i\in J}$, où

$z_j = y_j$ et $z_i = x_i$ si $i \in J\setminus\{j\}$,

est un majorant de A; par suite

$x \alpha z$, d'où $x_j \alpha_j y_j$.

Ceci montre que x_j est la borne supérieure de A_j. L'ensemble ordonné opposé de (P,α) étant évidemment l'ensemble ordonné produit de la famille $(E_i,\alpha_i)_{i\in J}$, on en tire:

$x = \wedge A$ ssi $x_i = \wedge A_i$ pour tout $i \in J$.

COROLLAIRE 1. p_i *définit une application complètement sup-compatible et complètement inf-compatible de* (P,α) *vers* (E_i,α_i) *pour tout* $i \in J$.

COROLLAIRE 2. L'ensemble ordonné produit d'une famille de treillis (resp. de treillis complets) est un treillis (resp. treillis complet).

Soient (E',α') un ensemble ordonné et F_i une application ordonnée $((E_i,\alpha_i),f_i,(E',\alpha'))$ pour tout $i \in J$. L'application crochet $f = [f_i]_{i\in J}$ définit l'unique application ordonnée F de (E',α') vers l'ensemble ordonné produit (P,α) telle que

$$F_i = ((E_i,\alpha_i),p_i,(P,\alpha)) \circ F$$

pour tout $i \in J$. On appelle F *l'application ordonnée crochet de* $(F_i)_{i\in J}$ et on la note $[F_i]_{i\in J}$. Si F_i est (complètement) sup-compatible (resp. inf-compatible) pour tout $i \in J$, alors F a la même propriété.

Définition. On appelle *ensemble ordonné somme de* $((E_i,\alpha_i)_{i\in J}$ l'ensemble ordonné (S,α) obtenu en munissant la somme S de $(E_i)_{i\in J}$ de l'ordre défini par:

$(x,i) \alpha (y,j)$ ssi $i = j$ et $x \alpha_i y$.

Avec les notations de la définition, la bijection

$x \to (x,i)$ de E_i sur $E_i \times \{i\}$

définit un isomorphisme de l'ensemble ordonné (E_i,α_i) sur une section ordonnée de (S,α), et l'injection canonique v_i de E_i dans S définit une application complètement sup-compatible et complètement inf-compatible V_i de (E_i,α_i) vers (S,α), pour tout $i \in J$. Si

$$F_i' = ((E',\alpha'),f_i',(E_i,\alpha_i))$$

est une application ordonnée vers l'ensemble ordonné (E',α') pour tout $i \in J$, l'application cocrochet f' de la famille $(f_i')_{i\in J}$ définit l'unique application ordonnée F' de (S,α) vers (E',α') telle que

$F' \circ V_i = F_i'$ pour tout $i \in J$.

On appelle F' *l'application ordonnée cocrochet de* $(F_i')_{i\in J}$. Si F_i' est (complètement) sup-compatible (resp. inf-compatible) pour tout $i \in J$, il en est de même pour F'.

EXEMPLES.

1° Si $J = \{0\}$, (P,α) et (S,α) sont isomorphes à (E_0,α_0). Si $J = \{0,1\}$ et si l'on remplace une famille indexée par J par un couple, (P,α) s'identifie à l'ensemble ordonné, noté $(E_0,\alpha_0)\times(E_1,\alpha_1)$, obtenu en munissant le produit (cartésien) $E_0 \times E_1$ de l'ordre:

$(x,y) \alpha (x',y')$ ssi $x \alpha x'$ et $y \alpha y'$.

On dit alors aussi que (P,α) et (S,α) sont les ensembles ordonnés produit et somme du couple $((E_0,\alpha_0),(E_1,\alpha_1))$. Si $J = \{0,1,2\}$, on désigne simplement (P,α) par

$$(E_0,\alpha_0)\times(E_1,\alpha_1)\times(E_2,\alpha_2).$$

2° Soit X un ensemble. Notons R_X la partie du produit $P(X)\times P(X\times X)\times P(X)$ formée des relations entre parties de X. L'ordre induit sur R_X par le treillis produit

$$(T,\subset) = (P(X),\subset)\times(P(X\times X),\subset)\times(P(X),\subset)$$

est la relation sur R_X ayant pour graphe l'ensemble des couples (r',r) d'éléments de R_X tels que r' soit une relation contenue dans r (définition § 2). Soit $(R_X,\subset)$ l'ensemble ordonné correspondant. C'est un treillis complet dans lequel la borne supérieure et la borne inférieure d'une famille $(r_i)_{i\in J}$ sont respectivement la relation réunion et la relation intersection de la famille (voir § 2). Soit M_X la partie de R_X formée des applications d'une partie de X dans une partie de X. Le sous-ensemble ordonné $(M_X,\subset)$ de $(R_X,\subset)$ est tel que

$$g \subset f \quad \text{ssi} \quad g \text{ est une restriction de } f.$$

Une famille ξ d'éléments de M_X admet une borne supérieure f dans $(M_X,\subset)$ ssi elle est majorée, i.e. ssi ξ est une famille compatible d'applications (§ 2); dans ce cas, f est l'application réunion de ξ. Il s'ensuit que l'injection canonique de M_X dans R_X définit une application complètement sup-compatible de $(M_X,\subset)$ vers $(R_X,\subset)$ et que, d'après la proposition 3-5, toute partie non vide de M_X admet une borne inférieure dans $(M_X,\subset)$ (généralement différente de sa borne inférieure dans $(R_X,\subset)$).

3° Soient U un ensemble et X la réunion de U. Alors U est une partie de $P(X)$ et nous désignerons par

$(U,\subset)$ le sous-ensemble ordonné du treillis $(P(X),\subset)$ correspondant. On appelle *ensemble des relations* (resp. *ensemble des applications*) *associé à* U la partie $R(U)$ (resp. partie $M(U)$) de R_X formée des relations (resp. des applications) entre éléments de U. Si l'on a

$$P(E'\times E)\subset U \text{ pour tout } E\in U \text{ et } E'\in U,$$

les sous-ensembles ordonnés $(R(U),\subset)$ et $(M(U),\subset)$ de $(R_X,\subset)$ sont aussi des sous-ensembles ordonnés de l'ensemble ordonné produit $(U,\subset)\times(U,\subset)\times(U,\subset)$.

Soient encore $(E_i,\alpha_i)_{i\in J}$ la famille d'ensembles ordonnés considérée, et S la somme de $(E_i)_{i\in J}$. Supposons de plus que (J,α) soit un ensemble ordonné.

PROPOSITION 4. Il existe un ensemble ordonné (E,α) tel que $(x,i)\ \alpha\ (y,j)$ ssi $j \neq i\ \alpha\ j$ ou si $i = j$ et $x\ \alpha_i\ y$. (E_i,α_i) est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de (S,α). De plus (S,α) est totalement ordonné ssi (J,α) et tous les (E_i,α_i) le sont.

Preuve. 1° Soit r la relation sur S dont le graphe $\underline{r}$ est formé des $((x,i),(y,j))$ tels que

$$i = j \text{ et } x\ \alpha_i\ y, \quad \text{ou que } i\ \alpha\ j \neq i.$$

Cette relation est un ordre; l'ensemble ordonné (S,α) correspondant a pour sous-ensemble ordonné l'ensemble ordonné image de (E_i,α_i) par la bijection $x \to (x,i)$ de E_i sur $E_i\times\{i\}$, pour tout $i\in J$. En particulier si (S,α) est totalement ordonné, (E_i,α_i) l'est aussi; dans ce cas, (J,α) est totalement ordonné, car la surjection

$$(x,i) \to i \quad \text{de } S \text{ sur } J$$

définit une application ordonnée de (S,α) vers (J,α).

2° Supposons (J,α) et (E_ι,α_ι) totalement ordonnés. Soit $z = ((x,\iota),(y,\jmath)) \in S\times S$. Si $\iota \neq \jmath$, on a $\iota \alpha \jmath$ ou $\jmath \alpha \iota$; si $\iota = \jmath$, alors $x \alpha_\iota y$ ou $y \alpha_\iota x$. Il s'ensuit $z \in \underline{r} \cup \underline{r}^{-1}$. Donc (S,α) est totalement ordonné.

Définition. L'ensemble ordonné (S,α) de la proposition 4 est appelé *somme (J,α)-ordonnée de* $(E_\iota,\alpha_\iota)_{\iota\in J}$ (resp. somme ordonnée de $((E_0,\alpha_0),(E_1,\alpha_1))$ si $J = \{0,1\}$ et $0 \alpha 1$).

Exemple. Un ensemble totalement ordonné (E,α) est isomorphe à la somme ordonnée de $((E',\alpha),(E'',\alpha))$, où E' est une section de (E,α) et $E'' = E\setminus E'$.

7. Cardinaux. Ensembles ordonnés discrets.

Dans beaucoup de questions, on peut remplacer un ensemble E par un ensemble équipotent. Il est donc naturel de chercher à associer "canoniquement" à E un ensemble $\tilde{E}$ (son "cardinal") de sorte que $\tilde{E} = \tilde{F}$ ssi E et F sont équipotents. Pour cela, deux idées se présentent:

1° Associer à E un ensemble "canonique" équipotent (c'est ce que nous ferons plus loin).

2° Associer à E sa *classe cardinale*, i.e. la collection C des ensembles équipotents à E. Mais nous allons voir que C n'est pas un ensemble (sauf si $E = \emptyset$, auquel cas $C = 1$). C'est pourquoi nous introduirons des sous-collections de C, les U-cardinaux, qui sont des ensembles.

PROPOSITION 1. Soit E un ensemble non vide. Il n'existe pas d'ensemble ayant pour éléments tous les ensembles équipotents à E.

Preuve. Supposons que la collection C ayant pour objets les ensembles équipotents à E soit un ensemble. Soit x un élément de E. Si y est un ensemble n'appartenant pas à E, l'ensemble

$$E(y) = \{y\} \cup (E\setminus\{x\})$$

est équipotent à E, donc appartient à C. Ainsi il existe une partie C' de C formée des ensembles $E(y)$, où $y \notin E$. Pour tout élément Y de C', il existe un et un seul $y \notin E$ tel que $Y = E(y)$; posons alors $F_Y = \{y\}$. Comme C' est un ensemble, il existe un ensemble E' réunion de la famille $(F_Y)_{Y\in C'}$. Ceci est impossible d'après le corollaire 3 de la proposition 2-3, car les éléments de E' sont tous les ensembles n'appartenant pas à E. Il s'ensuit que C n'est pas un ensemble.

Supposons donné un ensemble U. L'ensemble des couples

$(E',E) \in U\times U$ tels que E et E' sont équipotents

est le graphe d'une relation d'équivalence r_U sur U. L'ensemble des couples

$(E',E) \in U\times U$ tels que E' est un ensemble de puissance inférieure à E

est le graphe d'une relation de préordre ρ'_U sur U. La relation d'équivalence associée à ρ'_U (proposition 1-2) est identique à r_U, car elle est définie par:

$E' \sim E$ ssi E est de puissance inférieure à E' et E' de puissance inférieure à E,

c'est-à-dire, d'après le théorème de Bernstein, par:

$E' \sim E$ ssi E' est équipotent à E.

Tout ensemble équipotent à un ensemble fini étant fini, des

ensembles équivalents modulo r_U sont tous les deux finis ou bien tous les deux infinis.

Soit ρ_U la relation d'ordre sur l'ensemble quotient U/r_U associée à ρ'_U (proposition I-2): son graphe est formé des couples (Y,X) d'éléments de U/r_U vérifiant la condition suivante:

Il existe $E \in X$ et $E' \in Y$ tels que E' soit de puissance inférieure à E.

(resp. Tout représentant de Y est de puissance inférieure à tout représentant de X.).

Définition. Une classe d'équivalence modulo r_U est appelée un U-*cardinal* (resp. U-cardinal *fini*, si elle admet pour représentant un ensemble fini). Si F est un ensemble, on dit que F *admet un* U-*cardinal* si F est équipotent à un élément E de U; dans ce cas la classe $E \bmod r_U$ est appelée U-*cardinal de* F.

Convention. Le U-cardinal de F est noté $\tilde{F}$ si aucune confusion n'est possible. L'ensemble U/r_U des U-cardinaux est désigné par C_U, l'ensemble ordonné (C_U,ρ_U) par $(C_U,\leq)$, le sous-ensemble ordonné de $(C_U,\leq)$ formé des U-cardinaux finis par $(N_U,\leq)$. Si X et Y sont deux U-cardinaux, la formule $X < Y$ signifie $X \leq Y$ et $X \neq Y$.

Toute partie d'un ensemble fini étant finie, l'ensemble N_U des U-cardinaux finis est une section de $(C_U,\leq)$.

Définition. On dit que l'ensemble U *vérifie la condition* (∞) si $\emptyset$ appartient à U et si, pour tout ensemble fini

$E \in U$ et $x \notin E$, il existe un élément de U équipotent à $E \cup \{x\}$. Si U vérifie la condition (∞), un U-cardinal fini est aussi appelé un U-*entier* et $(N_U,\leq)$ est dit *ensemble ordonné des* U-*entiers*.

Exemple. Un ensemble est infini ssi l'ensemble de ses parties finies vérifie la condition (∞). Nous verrons plus loin que cette condition est aussi vérifiée lorsque U est un univers.

PROPOSITION 2. Soit U *un ensemble vérifiant la condition* (∞). *Tout ensemble fini admet un* U-*cardinal (qui est un* U-*entier).*

Preuve. Soit F un ensemble. L'ensemble M des parties finies de F équipotentes à un élément de U est une partie finiment saturée de $P(F)$, car, d'après la condition (∞), $\emptyset$ appartient à M et

$$E' \cup \{x\} \in M \quad \text{si} \quad E' \in M \text{ et } x \in F.$$

Donc M a pour élément toute partie finie de F, en particulier F lui-même si F est fini.

COROLLAIRE 1. Si U *est un ensemble vérifiant la condition* (∞) *et si* U' *est un ensemble contenant* U, *alors* U' *vérifie la condition* (∞).

En effet, si E' est un ensemble fini appartenant à U', il est équipotent à un élément de U d'après la proposition, donc $E' \cup \{x\}$ est équipotent à un élément de la partie U de U'.

COROLLAIRE 2. Si U *et* U' *sont deux ensembles vérifi-*

ant la condition (∞), les ensembles ordonnés $(N_U,\leq)$ *et* $(N_{U'},\leq)$ *sont isomorphes.*

Preuve. D'après la proposition 2, tout représentant d'un U-cardinal fini X (resp. d'un U'-cardinal fini X') admet un U'-cardinal f(X) (resp. un U-cardinal g(X')). Comme X et f(X) (resp. g(X') et X') sont les intersections de U et U' avec le même (U∪U')-cardinal fini, l'application f:

$$X \to f(X) \quad \text{de } N_U \text{ dans } N_{U'}$$

est une bijection admettant pour inverse l'application g:

$$X' \to g(X') \quad \text{de } N_{U'} \text{ sur } N_U.$$

Evidemment f définit un isomorphisme de $(N_U,\leq)$ sur $(N_{U'},\leq)$.

Définition. Un ensemble ordonné (T,∝) est dit *discret* s'il vérifie les conditions:

1° Toute partie non vide de T a un premier élément;

2° Tout élément de T autre que le premier élément a un prédécesseur.

Exemple. Si F est un ensemble fini, il existe un ensemble ordonné discret (F,∝). En effet, l'ensemble M des parties A de F telles qu'il existe un ensemble ordonné discret (A,∝) est finiment saturé dans P(F), l'ensemble obtenu par adjonction de x comme premier élément à (A,∝), si $x \in F\backslash A$, étant discret. Donc $F \in M$.

PROPOSITION 3. Soit (T,∝) un ensemble ordonné discret. Il est totalement ordonné et il admet un premier élément u; tout élément de T autre que le dernier élément (s'il existe) admet un suivant; toute partie majorée non vide a un dernier élément; toute section propre est la section associée à un élément de T.

Preuve. u est le premier élément de la partie T. Si x et y sont deux éléments de T, la paire {x,y} a un premier élément, de sorte que l'on a

$$x \propto y \quad \text{ou} \quad y \propto x.$$

Ainsi (T,∝) est totalement ordonné. Si x ne majore pas l'ensemble des majorants stricts de x n'est pas vide, et son premier élément est le suivant s(x) de x dans (T,∝). Soit S une section propre de (T,∝). L'ensemble T\S n'étant pas vide, il a un premier élément y. Si $y = u$, alors $S = \emptyset = {}^{\leftarrow}u$. Si $y \neq u$, le prédécesseur z de y est le dernier élément de S et, d'après la proposition 2-5, S est la section ${}^{\leftarrow}y$ associée à y. Si de plus S est la section engendrée par une partie A majorée non vide de T, l'élément z est aussi le dernier élément de A.

COROLLAIRE 1. Soit (T,∝) un ensemble ordonné. Il est discret ssi toute partie majorée non vide de T a un premier et un dernier élément. En particulier tout sous-ensemble ordonné d'un ensemble ordonné discret est discret.

COROLLAIRE 2. Soient (T,∝) un ensemble ordonné discret et (L,⊂) l'ensemble ordonné de ses sections propres. L'application p:

$$x \to {}^{\leftarrow}x \quad \text{de } T \text{ dans } L$$

définit un isomorphisme de (T,∝) sur (L,⊂).

Preuve. p est une surjection d'après la proposition Lorsque $p(x) = p(y)$, on trouve $x = y$, car x est le

premier élément de $T\backslash{}^{\leftarrow}x$. Ainsi p est une bijection. Comme $x \propto y$ équivaut à ${}^{\leftarrow}x \subset {}^{\leftarrow}y$, ceci prouve que p définit un isomorphisme.

Définition. On appelle *ensemble de Péano* un couple (T,s) d'un ensemble T et d'une injection s de T dans T vérifiant les conditions suivantes:

1° $T\backslash s(T)$ a un seul élément; notons-le u.

2° Si V est une partie de T telle que $u \in V$ et $s(V) \subset V$, alors $V = T$.

Si (T,s) est un ensemble de Péano, T est équipotent à sa partie propre s(T), de sorte que T est infini (corollaire, proposition 7-3).

EXEMPLE. Soit f une bijection d'un ensemble E sur une partie propre E' de E et soit $u \in E\backslash E'$. L'intersection T_u (ou plus simplement T) de l'ensemble L des parties B de E telles que

$$u \in B \quad \text{et} \quad f(B) \subset B$$

appartient à L et f admet pour restriction à (T,T) une injection s . On a $T\backslash s(T) = \{u\}$, car $u \neq x$ et $x \in T\backslash s(T)$ entraînerait $T\backslash\{x\} \in L$. Le couple (T,s) est un ensemble de Péano. Remarquons que la partie X' de E construite dans la partie I de la preuve du théorème de Bernstein est la réunion de la famille $(T_u)_{u \in E\backslash E'}$.

Définition. On appelle *isomorphisme entre ensembles de Péano* un triplet $((T',s'),f,(T,s))$, où (T,s) et (T',s') sont des ensembles de Péano et f une bijection de T

sur T' telle que $s' \circ f = f \circ s$; s'il existe un tel isomorphisme, on dit que (T,s) et (T',s') sont *isomorphes.*

Si (T,s) est un ensemble de Péano et si f est une bijection de T sur un ensemble T', le couple (T',s') , où $s' = f \circ s \circ f^{-1}$, est un ensemble de Péano, appelé *image de* (T,s) *par* f ; dans ce cas f définit un isomorphisme de (T,s) sur (T',s') et l'on a $T'\backslash s'(T') = \{f(u)\}$.

PROPOSITION 4. Soit (T,∝) un ensemble ordonné discret. T est fini ssi (T,∝) a un dernier élément. Si T est infini, (T,s) est un ensemble de Péano, en notant s l'application de T dans T qui associe à x son suivant dans (T,∝).

Preuve. 1° Supposons que (T,∝) ait un dernier élément d . Considérons l'ensemble A des $x \in T$ tels que la section ${}^{\leftarrow}x$ associée à x soit finie. Comme A est majoré par d, il admet un dernier élément x, d'après la proposition 3. Si $x \neq d$, x admet un suivant s(x) qui n'appartient pas à A. Ceci est impossible, car, ${}^{\leftarrow}x$ étant finie, la section ${}^{\leftarrow}s(x) = {}^{\leftarrow}x \cup \{x\}$ est finie. Donc $x = d$.

2° Supposons que (T,∝) n'ait pas de dernier élément, et soit u son premier élément. Tout élément x de T a un suivant (proposition 3), noté s(x); comme x est le seul prédécesseur de s(x), l'application s est une injection et $T\backslash s(T) = \{u\}$. Soit V une partie de T telle que $u \in V$ et $s(V) \subset V$. Si $V \neq T$, l'ensemble non vide $T\backslash V$ a un premier élément $z \neq u$; le prédécesseur x de z appartenant à V, le suivant z de x appartient à $s(V) \subset V$, ce qui est impossible. Ainsi $V = T$, et (T,s) est un en-

semble de Péano. A fortiori, T est infini.

COROLLAIRE 1. Soit (T,α) *un ensemble ordonné discret; une partie* A *de* T *est finie ssi* A *est majorée dans* (T,α).

En effet, comme le sous-ensemble ordonné (A,α) est discret, A est fini ssi (A,α) a un dernier élément.

COROLLAIRE 2. Soit (T,α) *un ensemble ordonné discret; toute section propre est finie. Si* F *est un ensemble fini de puissance strictement inférieure à* T, *il est équipotent à une section propre de* (T,α).

Preuve. Une section propre étant la section associée à un x, elle est majorée par x, donc finie (corollaire 1). Soit M l'ensemble des parties de F équipotentes à une section propre. On a $\emptyset \in M$; si $A \in M$ est équipotent à $\overleftarrow{x}$ et si $y \in F\backslash A$, alors $A' = A \cup \{y\}$ est équipotent à la section $\overleftarrow{x} = \overleftarrow{x} \cup \{x\}$, qui est propre, F et a fortiori A' étant de puissance strictement inférieure à T. Ainsi M est une partie finiment saturée de P(F), d'où $F \in M$.

Définition. Avec les notations de la proposition 4, on appelle (T,s) *l'ensemble de Péano associé à* (T,α).

PROPOSITION 5. Soit U *un ensemble tel que* $P(E) \subset U$ *si* $E \in U$ *est fini (resp. ensemble vérifiant la condition* (∞)*). Alors* $(N_U,\leq)$ *est un ensemble ordonné discret, dont une section propre* S *est la section associée au* U*-cardinal de* S *(resp. de* S*; il n'a pas de dernier élément et l'ensemble de Péano associé est* (N_U,s_U), *où* s_U *associe au* U*-cardinal de* E *le* U*-cardinal de la somme de* (E,1)*; enfin* U *est infini).*

Preuve. Soient X et Y des U-cardinaux finis, E et F des représentants de X et Y. D'après la proposition 8-3, l'un des ensembles E ou F est équipotent à une partie de l'autre, i.e. on a $X \leq Y$ ou bien $Y \leq X$. Donc $(N_U,\leq)$ est un ensemble totalement ordonné; il admet pour premier élément le U-cardinal 1 de $\emptyset$.

2° Soient X un U-cardinal fini, E un représentant de X. Supposons qu'il existe un élément de U de puissance strictement supérieure à E; (resp. X. D'après la condition (∞)) il existe une injection f de E dans un $E' \in U$ tel que $E'\backslash f(E) = \{x\}$; soit Y le U-cardinal de E'. Alors Y est le U-cardinal de tout ensemble obtenu en ajoutant un élément à E , par exemple de l'ensemble somme de (E,1) . Comme E' est fini, il n'est pas équipotent à sa partie propre f(E) (corollaire de la proposition 7-3), de sorte que $X < Y$. Soit Z un majorant strict de X dans $(N_U,\leq)$, et soit g une injection de E dans un représentant F de Z ; il existe au moins un $y \in F\backslash g(E)$, sans quoi g serait une bijection, et l'on aurait $X = Z$. L'application

$$x \to y, \qquad z' \to g(z) \text{ si } f(z) = z' \in f(E),$$

de E' dans F est une injection; par suite $Y \leq Z$. Ceci prouve que Y est le suivant de X dans $(N_U,\leq)$; nous le noterons $s_U(X)$. En particulier, X ne peut pas être le dernier élément de $(N_U,\leq)$, puisque Y majore strictement X.

3° Soient A une partie de N_U et B l'ensemble de ses minorants stricts. Si 1 appartient à A, c'est le premier élément de A. Supposons $1 \notin A$ et soit E un re-

présentant d'un élément X de A. Considérons l'ensemble M des parties de E dont le U-cardinal appartient à B. Par hypothèse, $\emptyset$ appartient à M. Si, pour tout $F \in M$, on avait

$$F \cup \{x\} \in M \quad \text{lorsque} \quad x \in E \setminus F,$$

M serait une partie finiment saturée de $P(E)$ et, E étant fini, E appartiendrait à M, ce qui est impossible, car le U-cardinal X de E appartient à A, non à B. Par suite il existe un élément F de M tel que le suivant Y de son U-cardinal appartienne à A. On voit que Y est le premier élément de A, et le U-cardinal $\tilde{F}$ le dernier élément de B. Appliqué en prenant pour A l'ensemble des majorants de Y, ceci prouve que, si $Y \neq I$, alors Y admet $\tilde{F}$ pour prédécesseur dans $(N_U, \leq)$.

4° Ce qui précède montre que $(N_U, \leq)$ est un ensemble ordonné discret. Si U vérifie la condition (∞), N_U n'a pas de dernier élément et l'ensemble de Péano associé est (N_U, s_U), où $s_U(X)$ est le suivant de X. Dans ce cas, N_U est infini et, N_U étant le quotient de la partie U' de U formée des ensembles finis appartenant à U, il résulte de la proposition 4-3 que U' est infini (sinon N_U serait fini); a fortiori U est infini.

5° Comme $(N_U, \leq)$ est discret, toute section propre est la section associée à un U-cardinal fini X (proposition 3). Soit V l'ensemble des $X \in N_U$ tels que la section $\overleftarrow{X}$ soit finie et admette X pour U-cardinal. On a $I \in V$; car la section associée à I est vide. Si $V \neq N_U$, soit Y le premier élément de $N_U \setminus V$. Puisque le prédécesseur X de Y appartient à V et que la section $\overleftarrow{Y} = \overleftarrow{X} \cup \{X\}$ a un élément de plus que $\overleftarrow{X}$, cette section est finie et admet $Y = s_U(X)$

pour U-cardinal; d'où $Y \in V$, ce qui est impossible. Par conséquent $V = N_U$.

COROLLAIRE 1. Sont équivalentes les conditions:

1° U vérifie l'axiome de l'infini.

2° Il existe un ensemble U vérifiant la condition (∞).

3° Il existe un ensemble ordonné discret sans dernier élément (T, α) (resp. un ensemble de Péano (T, s)).

Preuve. Si A est un ensemble infini, $P(A)$ vérifie la condition (∞). Si la condition 2 est remplie, $(N_U, \leq)$ est discret, sans dernier élément, (N_U, s_U) est un ensemble de Péano (proposition 5). Si la condition 3 est satisfaite, T est infini (proposition 4). Ceci prouve le corollaire.

COROLLAIRE 2. Soient E un ensemble fini et $U = P(E)$; N_U est fini; il existe un ensemble ordonné discret (E, α) isomorphe à la section ordonnée de $(N_U, \leq)$ associée au U-cardinal X de E, qui est le dernier élément de $(N_U, \leq)$.

Preuve. Le quotient N_U de U fini est fini; ainsi l'ensemble ordonné discret $(N_U, \leq)$ a un dernier élément; celui-ci est forcément X (preuve, proposition 5). La section associée à X ayant X pour U-cardinal, elle est équipotente à E. Donc N_U est équipotent à la somme de (E, I).

8. *Isomorphismes entre ensembles de Péano.*

PROPOSITION 1. Soient (T, α) et (T', α') des ensembles ordonnés discrets. Il existe au plus un isomorphisme de (T', α') sur une section ordonnée de (T, α). S'il n'en existe pas, il existe un et un seul isomorphisme de (T, α) sur une section ordonnée de (T', α').

Preuve. Si au plus un des ensembles T et T' est infini, l'un est de puissance inférieure à l'autre (proposition 8-3). On peut donc supposer T de puissance inférieure à T', ou T et T' infinis. Deux sections équipotentes d'un ensemble ordonné discret sont identiques, l'une étant une partie de l'autre et seule la section impropre pouvant être infinie (corollaire 2, proposition 4-7).

1° Soient g et g' des isomorphismes de (T,α) sur des sections ordonnées de (T',α'). Si $x \in T$, les sections $^{\leftarrow}g(x)$ et $^{\leftarrow}g'(x)$ de (T',α'), équipotentes à $^{\leftarrow}x$, sont identiques. On en déduit $g(x) = g'(x)$, et $g = g'$.

2° Soit x un élément de T. La section $^{\leftarrow}x$ est finie, de puissance strictement inférieure à T, et a fortiori à T'; d'après le corollaire 2 de la proposition 4-7, il existe une et une seule section propre $^{\leftarrow}x'$ de (T',α') équipotente à $^{\leftarrow}x$. En associant x' à x, on définit une application f de T dans T'. C'est une injection, car $f(x) = f(y)$ entraîne que les sections $^{\leftarrow}x$ et $^{\leftarrow}y$ sont équipotentes, i.e. identiques, d'où $x = y$. Si $y' \in f(T)$ et $z' \alpha' y'$, il existe une section $^{\leftarrow}z$ de (T,α) équipotente à la partie $^{\leftarrow}z'$ de $^{\leftarrow}y'$, de sorte que

$$z' = f(z) \in f(T).$$

Il s'ensuit que f(T) est une section de (T',α') et que la bijection de T sur f(T) restriction de f définit un isomorphisme de (T,α) sur la section ordonnée $(f(T),\alpha')$.

COROLLAIRE 1. Soient (T,α) et (T',α') deux ensembles ordonnés discrets sans derniers éléments. Il existe un et un seul isomorphisme de (T,α) sur (T',α').

Preuve. D'après la proposition 1, il existe un et un seul isomorphisme de l'un, disons (T,α) sur une section ordonnée (S',α') de l'autre. Si $S' \neq T'$, alors S' est propre, donc finie (proposition 4-7); a fortiori T est fini. Ceci est impossible, car T est infini en vertu de la proposition 4-7.

COROLLAIRE 2. Soit (T,α) un ensemble ordonné discret. Si F est un ensemble de puissance strictement inférieure à T, alors F est fini.

Preuve. Il existe une injection f de F sur une partie T' de T. Le sous-ensemble ordonné (T',α) est discret. Si (T',α) a un dernier élément, T' est fini, de sorte que F est fini. Dans le cas contraire, T' et aussi T sont infinis (proposition 4-7), de sorte que (T,α) et (T',α) sont isomorphes en vertu du corollaire 1. Il en résulte que T et T' sont équipotents.

PROPOSITION 2. Soient (T,α) un ensemble ordonné discret et $(F,\leq)$ un ensemble totalement ordonné. Si F est de puissance inférieure à T et fini, $(F,\leq)$ est isomorphe à une section ordonnée de (T,α).

Preuve. Soit M l'ensemble des parties A de F telles qu'il existe un isomorphisme du sous-ensemble ordonné $(A,\leq)$ de $(F,\leq)$ sur une section ordonnée de (T,α). On a $\emptyset \in M$. Supposons $A \in M$, $a \in F \setminus A$ et $A' = A \cup \{a\}$. A étant de puissance strictement inférieure à F, donc à T, il existe un isomorphisme f de $(A,\leq)$ sur une section ordonnée propre $(^{\leftarrow}x,\alpha)$ de (T,α). Soit B l'ensem-

ble des minorants stricts de a dans $(A',\leq)$; comme B est une section de $(A,\leq)$, l'ensemble f(B) est une section de $(\overleftarrow{x},\alpha)$ et, par suite, une section propre $\overleftarrow{y}$ de (T,α). L'application de A' sur la section $\overleftarrow{\leftrightarrow}x$ telle que

$b \to f(b)$ si $b \in B$, $a \to y$, $a' \to s(f(a'))$ si $a' \in A\backslash B$

définit un isomorphisme de $(A',\leq)$ sur $(\overleftarrow{\leftrightarrow}x,\alpha)$. Donc $A' \in M$ et M est une partie finiment saturée de P(F); d'où $F \in M$.

COROLLAIRE. Un ensemble totalement ordonné (F,α), où F est fini, est discret.

En effet, si $U = P(F)$, alors $(N_U,\leq)$ est discret (proposition 5-7) et F est équipotent à l'une de ses sections (corollaire de la proposition 5-7).

Hypothèse. Dans la fin de ce §, nous supposons que (T,α) est un ensemble ordonné discret, u son premier élément, d son dernier élément (s'il en existe un), r l'ordre sur T de symbole α. Soit s l'application de T dans T qui associe à x son suivant s(x) s'il existe, x lui-même si x = d. Si (T,α) n'a pas de dernier élément, (T,s) est l'ensemble de Péano associé à (T,α).

PROPOSITION 3. r est la relation de préordre r' engendrée par la relation $\rho = (T,G,T)$, où $G = \{(x,s(x)) \mid x \in T\}$. Si S est une partie de T telle que $s(x) \in S$ entraîne $x \in S$, alors S est une section de (T,α). Si C est une partie non vide de T et si $s(C) \subset C$, c'est le complémentaire dans T de la section associée au premier élément de C.

Preuve. 1° Comme l'ordre r contient ρ, il contient aussi la relation de préordre r' engendrée par ρ. Pour

montrer que $r = r'$, il nous suffit de voir que l'ensemble A des $x \in T$ tels que r et r' induisent la même relation sur la section $\overleftarrow{\leftrightarrow}x = \overleftarrow{x}\cup\{x\}$ est identique à T. Or supposons $A \neq T$. A étant une section non vide de (T,α), elle admet un dernier élément y ; si y était le dernier élément de (T,α), on aurait $A = T$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Aussi y a-t-il un suivant y' , qui est le premier élément de T\A. Soient z et z' deux éléments de $\overleftarrow{\leftrightarrow}y'$ tels que

$$z \neq z' \quad \text{et} \quad z \alpha z'.$$

a) Si z et z' appartiennent à $\overleftarrow{\leftrightarrow}y$, on a z r' z' , car y appartient à A.

b) Autrement $z' = y'$ et $z \alpha y$, d'où z r' y; étant donné que r' est transitive et que y r' y' , il s'ensuit z r' z' .

c) Il en résulte que y' appartient à A, ce qui est absurde. Ainsi $A = T$.

2° Supposons qu'il existe un élément y de la partie S ayant un minorant n'appartenant pas à S. L'ensemble B des minorants stricts z de y tels que $z \notin S$ a un dernier élément x ; le suivant de x appartenant à S, on a $x \in S$ par hypothèse, ce qui est impossible. Donc S est une section de (T,α).

3° Si $s(C) \subset C \neq \emptyset$ et si s(y) appartient à T\C, y ne peut pas être élément de C. Par conséquent la partie 2 s'applique à $S = T\backslash C$, et elle prouve que S est la section de (T,α) associée au premier élément de C , et C est le complémentaire de S.

COROLLAIRE. Soient (I',α') un ensemble ordonné discret

sans dernier élément, (T',s') l'ensemble de Péano associé, f une bijection de T sur T'. Alors f définit un isomorphisme de (T,∝) sur (T',∝') ssi f définit un isomorphisme de l'ensemble de Péano (T,s) sur (T',s').

Preuve. Comme T' est infini (proposition 4-7), l'ensemble équipotent T est aussi infini, de sorte que (T,∝) est un ensemble ordonné discret sans dernier élément. Si

$$((T',\propto'),f,(T,\propto))$$

est un isomorphisme, le suivant s(x) de x est appliqué par f sur le suivant s'(f(x)) de f(x) dans (T',∝'), c'est-à-dire f définit un isomorphisme de (T,s) sur (T',s'). Inversement, supposons que

$$((T',s'),f,(T,s))$$

soit un isomorphisme entre ensembles de Péano. D'après la proposition 3, r est la relation de préordre sur T engendrée par la relation

$$\rho = (T,G,T), \quad \text{où} \quad G = \{(x,s(x)) \mid x \in T\}.$$

Si r_1 est une relation (resp. relation de préordre) sur T, le triplet $(T',(f\times f)(r_1),T')$ est une relation (resp. relation de préordre) fr_1 sur T'. En associant fr_1 à la relation de préordre r_1 sur T, on définit une bijection de l'ensemble des relations de préordre sur T sur l'ensemble des relations de préordre sur T'. Il s'ensuit que fr est la relation de préordre sur T' engendrée par la relation $f\rho$, laquelle est identique, d'après la proposition 3, à l'ordre r' de symbole ∝', car le graphe de $f\rho$ est

$$(f\times f)(G) = \{(x',s'(x')) \mid x' \in T'\}.$$

Donc $((T',\propto'),f,(T,\propto))$ est un isomorphisme.

PROPOSITION 4. (Construction par récurrence). Soient B un ensemble, C une partie du produit B×T et g une application de C dans C telle que

$$g(b,x) = (b',s(x)) \quad \textit{pour tout} \quad (b,x) \in C,$$

et g(b,d) = (b,d) lorsque le dernier élément d existe. Soit $(b_o,u) \in C$; il existe une et une seule application f de T dans B dont le graphe est contenu dans C et qui vérifie: $f(u) = b_o$ *et*

$$(f(s(x)),s(x)) = g(f(x),x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in T.$$

Preuve. Soit M l'ensemble des parties C' de C telles que

$$(b_o,u) \in C' \quad \text{et} \quad g(C') \subset C' ;$$

soit L l'intersection de M. Evidemment L appartient à M. Pour tout $x \in T$, notons A_x l'ensemble $(B\times\{x\}) \cap L$. A_u a pour seul élément (b_o,u), car $(b,u) \in L\setminus\{(b_o,u)\}$ entraînerait $L\setminus\{(b,u)\} \in M$, ce qui est contraire à la définition de L. Ainsi u appartient à l'ensemble V des $x \in T$ tels que A_x ait un seul élément. Soient

$$x \in V \quad \text{et} \quad A_x = \{c\}.$$

Alors g(c) appartient à $A_{s(x)}$; s'il existe

$$c' \in A_{s(x)}\setminus\{g(c)\},$$

$L\setminus\{c'\} \in M$, ce qui est impossible. Il en résulte

$$A_{s(x)} = \{g(c)\} \quad \text{et} \quad s(x) \in V.$$

Les relations $u \in V$ et $s(V) \subset V$ ont pour conséquence (proposition 3) V = T. Ceci prouve que L est le graphe d'une application f de T dans B vérifiant les conditions requises. Si f' est une application de T dans B possédant ces mêmes propriétés, son graphe appartient à M, et par suite contient L, c'est-à-dire f' = f.

COROLLAIRE. Soient E *un ensemble,* B *un ensemble d'applications tel que, si* $b \in B$, *alors* $b = (E, \underline{b}, \alpha(b))$, *où* $\alpha(b)$ *est une section finie de* (T,α). *Soit* p *une application de* B *dans* B *telle que*

$$\alpha(p(b)) = {}^{\leftarrow}x \quad \text{et} \quad b = p(b)/{}^{\leftarrow}x \quad \text{si} \quad \alpha(b) = {}^{\leftarrow}x .$$

Si $b_o \in B$ *et* $\alpha(b_o) = \{u\}$, *il existe une et une seule application* h *de* T *dans* $\mathfrak{B}$ *vérifiant* $h(u) = b_o(u)$ *et*

$$h/{}^{\leftarrow}x = p(h/{}^{\leftarrow}x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in T.$$

Preuve. Pour tout élément b de B, posons

$$p'(b) = p(b) \text{ si } \alpha(b) \neq T , \quad p'(b) = b \text{ si } \alpha(b) = T.$$

Soit C l'ensemble des couples $(b,x) \in B \times T$ tels que $\alpha(b) = {}^{\leftarrow}x$, et soit g l'application

$$(b,x) \to (p'(b), s(x)) \quad \text{de C dans C.}$$

D'après la proposition 4, il existe une et une seule application f de T dans B telle que:

$$f(u) = b_o , \quad (f(x),x) \in C ,$$
$$f(s(x)) = p'(f(x)) \quad \text{pour tout } x \in T.$$

Désignons par b_x l'application f(x) de ${}^{\leftarrow}x$ dans T , et montrons que la famille $(b_x)_{x \in T}$ d'applications est compatible. En effet, soit $x \in T$, et soit S l'ensemble des $z \neq x$ tels que b_z soit une restriction de b_x . Si s(y) appartient à S, on a $f(s(y)) = p(f(y))$, de sorte que b_y est une restriction de $b_{s(y)}$ et, a fortiori, de b_x ; ainsi y appartient à S. On en déduit, d'après la proposition 3, que S est une section de (T,α). Puisque $x \in S$, on obtient $S = {}^{\leftarrow}x$. Il s'ensuit que la famille $(b_x)_{x \in T}$ est compatible, car, de deux de ses termes, l'un est une application restriction de l'autre. L'application h réunion de cette famille est l'application cherchée de T dans [illegible].

PROPOSITION 5. Supposons que (T,α) *n'ait pas de dernier élément et soit* (T',s') *un ensemble de Péano. Il existe une et une seule bijection* f *définissant un isomorphisme de* (T,s) *sur* (T',s'), *et* (T',s') *est l'ensemble de Péano associé à un ensemble ordonné discret sans dernier élément, à savoir l'ensemble ordonné image de* (T,α) *par* f.

Preuve. 1° Soit u' l'unique élément de $T' \setminus s'(T')$. Notons C l'ensemble $T' \times T$ et g l'application $s' \times s$:

$$(x',x) \to (s'(x'), s(x)) \quad \text{de C dans C .}$$

La proposition 4 assure l'existence d'une et d'une seule application f de T dans T' telle que $f(u) = u'$ et

$$g(f(x),x) = (f(s(x)), s(x)) = (s' \circ f(x), s(x))$$

pour tout $x \in T$, ce qui signifie $s' \circ f = f \circ s$. Montrons que f est une bijection.

a) L'ensemble $V' = f(T)$ admet u' pour élément. Pour tout élément x' de V', il existe un $x \in T$ tel que $x' = f(x)$, de sorte que

$$s'(x') = s'(f(x)) = f(s(x)) \in V' ,$$

d'où $s'(V') \subset V'$. On en déduit $V' = T'$. Donc f est une surjection.

b) Pour tout $x \neq u$, on a

$$f(x) = s'(f(\hat{x})) \in s'(T'),$$

où $\hat{x}$ est le prédécesseur de x ; ainsi $f(x) \neq f(u) = u'$, et u n'appartient pas à l'ensemble S des

$$x \in T \quad \text{tels que} \quad f(x) \in f(T \setminus \{x\}).$$

Supposons qu'il existe un élément x de S; on a $f(x) = f(y)$, pour un certain $y \in T \setminus \{x\}$. Si $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont les prédécesseurs de x et de y , l'égalité

$$s'(f(\hat{x})) = f(s(\hat{x})) = f(x) = f(y) = s'(f(\hat{y}))$$

entraîne $f(\hat{x}) = f(\hat{y})$, car s' est une injection; par

suite $\hat{x} \in S$. Mais alors la proposition 3 assure que S est une section de (T,α), ce qui est impossible, u n'appartenant pas à S. Donc S est vide, et f est une injection. Au total

$$((T',s'),f,(T,s)) = \bar{f}$$

est un isomorphisme entre ensembles de Péano.

2° L'ensemble ordonné (T',α') image de (T,α) par f est discret, sans dernier élément. Le suivant de x' dans (T',α') est identique à $f(s(f^{-1}(x')))$, c'est-à-dire à $s'(x')$. Ceci prouve que (T',s') est l'ensemble de Péano associé à (T',α'). Il en résulte, en vertu des corollaires de la proposition 1, que f définit l'unique isomorphisme de (T,α) sur (T',α'), de sorte que $\hat{f}$ est l'unique isomorphisme de (T,s) sur (T',s').

COROLLAIRE 1. Soit U un ensemble vérifiant la condition (∞). Si (T',s') est un ensemble de Péano, il existe un et un seul isomorphisme de (T',s') sur l'ensemble de Péano (N_U,s_U) associé (proposition 5-7) à l'ensemble ordonné discret des U-entiers.

COROLLAIRE 2. Si (T_1,s_1) et (T_2,s_2) sont deux ensembles de Péano, il existe un et un seul isomorphisme de (T_1,s_1) sur (T_2,s_2).

En effet, il existe un ensemble U vérifiant la condition (∞), par exemple, l'ensemble des parties finies de T_1. Si g_1 définit l'unique isomorphisme de (N_U,s_U) sur (T_1,s_1), pour $i = 1$ et 2, alors $g_2 \circ g_1^{-1}$ définit l'unique isomorphisme de (T_1,s_1) sur (T_2,s_2).

Remarque. Soit (T',s') un ensemble de Péano. D'après la proposition 5, il est associé à un ensemble ordonné discret sans dernier élément. La proposition 3 caractérise cet ensemble ordonné à l'aide de s' seulement. En fait, en s'inspirant de la proposition 3, on peut démontrer directement l'existence de cet ensemble ordonné discret (T',α'), sans passer par l'intermédiaire de (T,α). Pour cela on procède comme suit: Pour tout $x \in T'$, désignons par $x^{\mapsto}$ l'intersection de toutes les parties B de T' telles que

$$x \in B \quad \text{et} \quad s'(B) \subset B.$$

On montre que la relation r' sur T' dont le graphe est formé des couples

$$(x,y) \in T' \times T' \quad \text{tels que} \quad y^{\mapsto} \subset x^{\mapsto}$$

est un ordre sur T' et que (T',r') est un ensemble ordonné discret sans dernier élément, dont (T',s') est l'ensemble de Péano associé.

9. *Entiers naturels.*

Définition. Un ensemble E est dit *transitif* (resp. *purement transitif*) si tout élément de E est une partie (resp. partie propre) de E.

Exemple. Un ensemble $\{a\}$ à un seul élément est transitif ssi $a = \emptyset$ ou $a = \{a\}$; dans ce dernier cas, on l'appelle *un individu*. En particulier, $1 = \{\emptyset\}$ est l'unique ensemble à un élément purement transitif.

PROPOSITION 1. L'ensemble des parties d'un ensemble transitif et la réunion d'une famille d'ensembles transitifs

sont transitifs. Si E *est un ensemble purement transitif,* E ∪ {E} *est purement transitif.*

Preuve. 1° Si E est transitif, l'inclusion $E \subset P(E)$ entraîne

$$P(E) \subset P(P(E)) ,$$

de sorte que $P(E)$ est transitif. Si J est un ensemble et si E_ι est un ensemble transitif pour tout $\iota \in J$, la réunion $F = \bigcup_{\iota \in J} E_\iota$ est un ensemble transitif, car

$$F \subset \bigcup_{\iota \in J} P(E_\iota) \subset P(\bigcup_{\iota \in J} E_\iota) = P(F).$$

2° Supposons E purement transitif et soit E' l'ensemble E ∪ {E}. Les éléments de E' sont:

- les éléments de E, qui sont des parties propres de E, et a fortiori de E',
- l'ensemble E, qui est une partie propre de E', car $E \in E' \setminus E$.

Donc E' est purement transitif.

Hypothèse. Nous supposons dans la fin de ce chapitre que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome de l'infini. Il existe donc un ensemble U vérifiant la condition (∞); soient $(N_U, \leq)$ l'ensemble ordonné des U-entiers et (N_U, s_U) l'ensemble de Péano associé.

PROPOSITION 2. Il existe un et un seul ensemble de Péano (N, s) *vérifiant la condition:*

$$\emptyset \in N \quad \textit{et} \quad s(n) = n \cup \{n\} \ \textit{pour tout} \ n \in N.$$

De plus, N *est formé d'ensembles purement transitifs finis et l'unique isomorphisme de* (N, s) *sur* (N_U, s_U) *associe à* $n \in N$ *son U-cardinal.*

Preuve. 1° Pour tout ensemble purement transitif fini E, notons $\hat{s}(E)$ l'ensemble purement transitif (proposition 1) E ∪ {E}; comme E est fini, il admet un U-cardinal fini X (proposition 2-7), et $s_U(X)$ est le U-cardinal de $\hat{s}(E)$ d'après la proposition 5-7, $\hat{s}(E)$ ayant juste un élément de plus que E. Si S est une section de $(N_U, \leq)$, appelons application S-*admissible* une bijection f de S sur un ensemble f(S) vérifiant les conditions suivantes:

a) les éléments de f(S) sont des ensembles purement transitifs finis;

b) f(X) admet X pour U-cardinal, pour tout élément X de S;

c) $f(s_U(X)) = \hat{s}(f(X))$ si $s_U(X) \in S$.

Si f est S-admissible et si S' est une section contenue dans S, la restriction de f à (f(S'), S') est S'-admissible. Pour tout U-entier X, notons S_X la section $\overleftarrow{X}$. Considérons l'ensemble V des $X \in N_U$ tels qu'il existe une et une seule application S_X-admissible; cette application sera notée h_X et l'on posera $h_X(S_X) = n_X$. Le U-entier 1 (= U-cardinal de ∅) appartient à V, l'application

$$1 \to \emptyset \quad \text{de} \quad S_1 = \{1\} \quad \text{sur} \quad n_1 = \{0\} = 1$$

étant la seule application S_1-admissible. Si $X \in V$ et si $X' = s_U(X)$, la bijection $h_{X'}$ de $S_{X'}$ sur $n_{X'}$ définie par

$$Y \to h_X(Y) \ \text{si} \ Y \leq X , \qquad X' \to \hat{s}(h_X(X)) ,$$

est l'unique application $S_{X'}$-admissible, de sorte que X' appartient à V. Il en résulte $s_U(V) \subset V$, d'où $V = N_U$. Ainsi on obtient une famille d'applications $(h_X)_{X \in N_U}$; elle est compatible, la restriction de h_X à (n_Y, S_Y), où $Y < X$, étant l'unique application S_Y-admissible, i.e.

étant h_Y . Soit h l'application réunion de la famille; c'est une application de N_U sur l'ensemble N réunion de $(n_X)_{X\in N_U}$. Evidemment N est formé d'ensembles purement transitifs finis. Si $h(Y) = h(Z)$, il existe une section S_X à laquelle appartiennent Y et Z et l'égalité

$$h_X(Y) = h(Y) = h(Z) = h_X(Z)$$

entraîne $Y = Z$, vu que h_X est une bijection. Il s'ensuit que h est une bijection de N_U sur N , et c'est une application N_U-admissible. Si h' est une autre application N_U-admissible, sa restriction à $(h'(S_X),S_X)$ est l'unique application S_X-admissible h_X , pour tout U-entier X, d'où $h = h'$.

2° Soit (N,s) l'ensemble de Péano image de (N_U,s_U) par la bijection h. On a

$$\emptyset = h(1) \in N\backslash s(N).$$

Pour tout $n \in N$, on trouve

$$s(n) = h(s_U(h^{-1}(n))) = \hat{S}(h(h^{-1}(n))) = \hat{S}(n) = n \cup \{n\}.$$

Ainsi (N,s) vérifie la condition voulue. Comme

$$((N,s),h,(N_U,s_U))$$

est un isomorphisme, la bijection h^{-1} définit l'unique isomorphisme de (N,s) sur (N_U,s_U) et, par construction, $h^{-1}(n)$ est le U-cardinal de n (condition b ci-dessus).

3° Supposons que (N',s') soit un autre ensemble de Péano vérifiant la condition de l'énoncé. Il existe un unique isomorphisme $((N',s'),g,(N,s))$, en vertu du corollaire 2 de la proposition 5-8. Soit W l'ensemble des $n \in N$ tels que $n = g(n)$. L'égalité $\emptyset = n' \cup \{n'\}$ étant impossible, on trouve

$$\emptyset \in N'\backslash s'(N') , \qquad \text{d'où} \quad \emptyset = g(\emptyset) \in W.$$

Si n appartient à W, les relations

$$s(n) = n \cup \{n\} = g(n) \cup \{g(n)\} = s'(g(n)) = g(s'n))$$

entraînent $s(n) \in W$. Donc $W = N$ et, a fortiori, $N = N'$. Ainsi la condition de l'énoncé caractérise (N,s).

Définition. Avec les notations de la proposition 2, on appelle (N,s) *l'ensemble de Péano des entiers naturels.* Un élément de N est dit *entier naturel* (ou simplement entier si aucune confusion n'est possible). L'ensemble ordonné discret sans dernier élément auquel est associé (N,s) est noté $(N,\leq)$ et appelé *ensemble ordonné des entiers (naturels).* Un ensemble équipotent à l'entier n est dit *ensemble à n éléments.*

Dans l'ensemble ordonné des entiers, le premier élément est $\emptyset = 0$, le suivant de 0 est 1, le suivant de 1 est 2, le suivant de 2 est 3; ce sont les seuls entiers que nous aylons explicitement utilisés auparavant.

PROPOSITION 3. L'ensemble ordonné des entiers est le seul ensemble ordonné discret sans dernier élément $(N,\leq)$ vérifiant la condition:

$$\emptyset \in N \quad \textit{et} \quad n = {}^{\leftarrow}n \ \textit{pour tout} \quad n \in N.$$

Preuve. 1° Soit V l'ensemble des entiers n tels que n soit identique à la section ${}^{\leftarrow}n$ associée à n dans $(N,\leq)$. Comme 0 est le premier élément de $(N,\leq)$, on a $0 = \emptyset \in V$. Si n appartient à V, les égalités

$${}^{\leftarrow}s(n) = {}^{\leftarrow}n \cup \{n\} = n \cup \{n\} = s(n)$$

entraînent $s(n) \in V$, d'où $s(V) \subset V$. Il s'ensuit $V = N$.

Ainsi la condition de l'énoncé est vérifiée.

2° Soit $(N', \overset{\alpha}{<})$ un ensemble ordonné discret sans dernier élément vérifiant la condition de l'énoncé, et soit (N', s') l'ensemble de Péano associé. Pour tout $n' \in N'$, on obtient

$$s'(n') = {}^{+}s'(n') = {}^{+}n' \cup \{n'\} = n' \cup \{n'\},$$

de sorte que (N', s') est identique à (N, s), d'après la proposition 2. A fortiori $(N', \overset{\alpha}{<})$ est identique à $(N, <)$.

COROLLAIRE 1. Dans l'ensemble ordonné $(N, <)$, on a

$m \leq n$ *ssi* $m \subset n$, $m < n$ *ssi* $m \in n$.

COROLLAIRE 2. Si A est un ensemble fini, il existe un et un seul entier n tel que A soit un ensemble à n éléments.

Convention. Une section de $(N, <)$ est dite section de N. Si n est un entier, son suivant dans $(N, <)$ (on dira dans N) est noté $n+1$, donc $n+1 = n \cup \{n\}$; le prédécesseur de n dans $(N, <)$ (on dira dans N) est désigné par $n-1$.

REMARQUES.

1° Soit $\mathcal{D}'$ une autre totalité. Tout entier (construit à partir de $\mathcal{D}$) est aussi un objet de $\mathcal{D}'$. En effet, soit V l'ensemble des entiers n qui sont objets de $\mathcal{D}'$; comme $0 \in V$ et $n+1 = n \cup \{n\} \in V$ si $n \in V$, on trouve $V = N$. Supposons de plus que $\mathcal{D}'$ soit aussi un modèle de la Théorie des ensembles; il existe alors un $\mathcal{D}'$-ensemble des entiers N'. En considérant l'ensemble W des $n \in N$ tels que n appartienne aussi à N', on voit de même que $W = N$; il s'ensuit $N = N'$. Autrement dit, l'ensemble des entiers est indépendant de la totalité.

2° Quand on utilise l'ensemble des entiers, on oublie généralement sa construction pour ne retenir que ses propriétés. Ainsi la plupart des textes mathématiques parlent de "l'ensemble des entiers" sans référence à une définition précise. Il semble toutefois désirable de réfléchir au moins une fois sur la signification précise du mot "entier". La définition adoptée ici est celle de von Neumann. D'autres auteurs appellent entier un cardinal fini; la difficulté (proposition I-7) est de donner un sens à cet mot, si l'on veut qu'un entier soit un ensemble. Des constructions explicites différentes ont été proposées, telle celle de Dedekind pour qui l'ensemble de Péano (N', s') des entiers est caractérisé par la propriété:

$$0 = \emptyset \in N' \quad \text{et} \quad s'(n') = \{n'\} \text{ si } n' \in N'.$$

Soient m et m' deux entiers, $m \leq m'$; posons

$$m^{\mapsto} = \{n \in N \mid m \leq n\},$$

$$|m, m'| = \{n \in N \mid m \leq n \leq m'\}.$$

Si A est une partie de N (resp. de $|m, m'|$) telle que

$m \in A$ et que $n \in A$ (resp. $n \in A$, $n \neq m'$)

entraîne $n+1 \in A$,

alors $A = m^{\mapsto}$ (resp. $= |m, m'|$) d'après la proposition 4-8 (resp. 4-8 appliquée à l'ensemble ordonné $(|m, m'|, <)$). Ce résultat est souvent employé pour montrer qu'une propriété P donnée est vraie pour tout entier $n \geq m$ (resp. n tel que $m \leq n \leq m'$) , i.e. pour montrer que l'ensemble A_P des entiers vérifiant P est $m^{\mapsto}$ (resp. est $|m, m'|$); pour simplifier, on omet fréquemment dans la rédaction la considération *explicite* de l'ensemble A_P comme suit:

1° On montre que m vérifie P ;

2° On suppose qu'un entier $n \geq m$ (resp. n tel que $m \leq n < m'$) vérifie P ; on en déduit que $n+1$ vérifie P ;

3° On dit alors: Par récurrence P est vérifié pour tout entier $n \geq m$ (resp. $n \in |m,m'|$).

La proposition 4-8 (construction par récurrence) s'applique à l'ensemble ordonné discret $(N,\leq)$ En particulier si g' est une application de B dans B et si $b_o \in B$, on appelle *application définie par récurrence en posant*

$f(0) = b_o$, $f(n+1) = g'(f(n))$ pour tout $n \in N$,

l'unique application f de N dans B vérifiant ces conditions, application dont la proposition 4-8 (où l'on prend $C = B \times N$ et $g = g' \times s$) assure l'existence.

Définition. On appelle *suite* (resp. *suite finie*) une famille indexée par N (resp. par une section propre de N).

Comme toute section propre de N est de la forme $\overleftarrow{n}$, c'est-à-dire est identique à l'entier n (proposition 3), une suite finie à n éléments est une famille $\xi = (x_i)_{i \in n}$ indexée par n; on dit alors que ξ est *de longueur* n , ou que ξ est un *n-uplet*, et on note aussi ξ par

$$(x_i)_{i<n} \qquad \text{ou} \qquad (x_i)_{i \leq n-1} .$$

Conventions. 1° Si ξ est une suite finie $(x_i)_{i \in n}$, on la représentera souvent par le symbole $(x_0,\ldots,x_{n-1})$, étant entendu que le terme écrit à gauche est le 0-ième, celui à droite est le (n-1)-ième, terme de la famille. Ainsi une suite de longueur 2 est représentée (ou même remplacée) par le couple correspondant. Les suites de longueur 3

sont les triplets. Des variantes de cette notation seront utilisées; par exemple on comprendra que

$$(y_n,\ldots,y_1,x_m,\ldots,x_1)$$

est la suite $(z_i)_{i<m+n}$, où

$z_i = y_{n-i}$ si $0 \leq i < n$, $z_j = x_{m-j+n}$ si $n \leq j < m+n$.

2° Le produit de la suite $(E_i)_{i<n}$ sera souvent noté $E_0 \times \ldots \times E_{n-1}$ et l'on posera

$[f_i]_{i<n} = [f_0,\ldots,f_{n-1}]$ et $\prod_{i \in n} g_i = g_0 \times \ldots \times g_{n-1}$

si f_i est une application d'un ensemble F dans E_i et g_i une application de E_i dans F_i pour tout $i \in n$. On fait des conventions analogues pour les produits d'ensemble ordonnés.

3° Si $(E,\ll)$ est un ensemble ordonné, une suite finie $(x_i)_{i \in J}$ d'éléments de E est dite *croissante* (resp. *strictement croissante*) dans $(E,\ll)$ si x_{i+1} est un majorant (resp. majorant strict) de x_i pour tout $i+1 \in J$; elle est dite *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) dans $(E,\ll)$ si c'est une suite croissante (resp. strictement croissante) dans l'ensemble ordonné opposé.

Etant donné que tout ensemble fini est équipotent à une section propre $\overleftarrow{n}$ de N, c'est-à-dire à un entier n, et que la somme et le produit d'une famille finie d'ensembles finis sont finis, on peut poser la définition:

Définition. Si ξ est une famille finie d'entiers, on appelle *entier somme* (resp. *entier produit*) de ξ l'entier équipotent à l'ensemble somme (resp. à l'ensemble produit) de la famille d'ensembles ξ

Les entiers somme et produit d'une suite finie d'entiers $(n_i)_{i\leq m}$ seront notés respectivement

$n_0+\ldots+n_m$ et $n_0\ldots n_m$ (ou parfois $n_0.\ \ldots\ .n_m$). L'entier somme du couple (m,n) est $m+n$, son entier produit mn (ou $m.n$). Comm le suivant $s(m)$ de m dans N est l'entier somme de $(m,1)$, la notations $s(m) = m+1$ déjà adoptée est bien justifiée.

On appelle *addition* et *multiplication sur* N les applications

$\kappa_N: (m,n) \to m+n$ et $\kappa'_N: (m,n) \to mn$

de $N\times N$ dans N. Des résultats du § 4, il résulte que, si m, n et n' sont des entiers, on a:

$m+0 = m$, $m1 = m$, $m+n = n+m$, $mn = nm$,

$m+(n+n') = m+n+n' = (m+n)+n'$, $m(nn') = mnn' = (mn)n'$,

$m(n+n') = (mn)+(mn')$,

$mn = 0$ ssi $m = 0$ ou $n = 0$, $mn = 1$ ssi $m = 1 = n$.

Ainsi $N^+ = (N,\kappa_N)$ et $N^\bullet = (N,\kappa'_N)$ sont des monoïdes d'unités 0 et 1, et $N^\bullet$ est distributif sur N^+.

Définition. N^+ est appelé *monoïde additif des entiers*, $N^\bullet$ *monoïde multiplicatif des entiers.*

PROPOSITION 4. L'application τ_m:

$$n \to m+n \quad \textit{de } N \textit{ dans } m^{\mapsto}$$

définit l'unique isomorphisme de $(N,\leq)$ *sur son sous-ensemble ordonné* $(m^{\mapsto},\leq)$, *pour tout entier* m.

Preuve. D'après la proposition I-8, il existe un unique isomorphisme f de l'ensemble ordonné discret $(N,\leq)$ sur $(m^{\mapsto},\leq)$. Posons $\hat{n} = f(n)$. La section S associée à $\hat{n}$ dans $(m^{\mapsto},\leq)$ est équipotente à la section ${}^{\leftarrow}n$ de N,

et ${}^{\leftarrow}m \cap S = \emptyset$, de sorte que ${}^{\leftarrow}m \cup S$ est équipotent à l'ensemble somme de (m,n), i.e. à $m+n$. Comme ${}^{\leftarrow}m \cup S$ est la section de N associée à $\hat{n}$, il s'ensuit $\hat{n} = m+n$, $f = \tau_m$.

COROLLAIRE 1. Si m *et* $\hat{m}$ *sont des entiers tels que* $m \leq \hat{m}$, *il existe un unique* $n \in N$ *vérifiant* $\hat{m} = m+n$.

COROLLAIRE 2. Si m, n *et* n' *sont des entiers tels que* $m \neq 0$ *et* $mn = mn'$, *alors* $n = n'$.

Preuve. Supposons $n \leq n'$; il existe un seul $n'' \in N$ tel que $n' = n+n''$; on a $mn'' = 0$, car

$(mn)+(mn'') = m(n+n'') = mn' = mn$; d'où $n'' = 0$.

Si $m \in N$, $m' \in N$ et $m \leq m'$, on note $m'-m$ l'unique n tel que $m' = m+n$; on appelle *soustraction* l'application $(m',m) \to m'-m$ de $\{(m',m) \in N\times N \mid m \leq m'\}$ dans N.

PROPOSITION 5. Si N° *est un magma distributif sur* N^+ *ayant une unité* e, *on a* $N^\circ = N^\bullet$.

Preuve. Si n est un entier, les égalités

$1\circ n = (1+0)\circ n = (1\circ n)+(0\circ n)$ et $n\circ 1 = (n\circ 1)+(n\circ 0)$

entraînent $0\circ n = 0 = n\circ 0$. Si $n\circ 1 = n(1\circ 1)$, d'après la distributivité de N°, on trouve

$$(n+1)\circ 1 = (n\circ 1)+(1\circ 1) = n(1\circ 1)+1(1\circ 1) = (n+1)(1\circ 1).$$

Par récurrence, il s'ensuit $n\circ 1 = n(1\circ 1)$ pour tout n. En particulier $1 = e\circ 1 = e(1\circ 1)$, d'où $e = 1 = 1\circ 1$. Si $m \in N$, on obtient par récurrence $m\circ n = mn$ pour tout n, car $m\circ 1 = m = m1$ et, si $m\circ n = mn$, alors

$$m\circ(n+1) = (m\circ n)+(m\circ 1) = (mn)+(m1) = m(n+1).$$

Donc $N^\circ = N^\bullet$.

Soit $E^* = (E,k)$ un monoïde d'unité e. Pour tout $x \in E$, on définit par récurrence une application f de N dans E en posant $f(0) = e$ et $f(n+1) = f(n).x$ si $n \in N$. On appelle $f(n)$ *l'itéré d'ordre* n *de* x *dans* E^*, noté x^{*n}.

PROPOSITION 6. Soient E^* *un monoïde,* e *son unité,* $x \in E$ *et* n *et* m *des entiers. On a* $x^{*1} = x$, $e^{*n} = e$,

(1) $x^{*(n+m)} = x^{*n}.x^{*m}$, $x^{*(nm)} = (x^{*n})^{*m}$, $g(x^{*n}) = (g(x))^{*n}$,

si F^* *est un monoïde et* (F^*,g,E^*) *un homomorphisme. Si* x' *est un élément de* E *tel que* $x.x' = x'.x$, *alors*

(2) $x'.x^{*n} = x^{*n}.x'$ *et* $(x'.x)^{*n} = x'^{*n}.x^{*n}$.

Si x *a un inverse* x^{-1}, *l'itéré* $(x^{-1})^{*n}$ *est l'inverse de* x^{*n}.

Preuve. Comme $x^{*0} = e$, on voit que

$$x^{*1} = x^{*(0+1)} = x^{*0}.x = e.x = x.$$

$e^{*(n+1)} = e^{*n}.e = e^{*n}$ entraîne, par récurrence, $e^{*n} = e$. On a

$$x^{*(n+0)} = x^{*n} = x^{*n}.e = x^{*n}.x^{*0}$$

et, si $x^{*(n+m')} = x^{*n}.x^{*m'}$, alors

$$x^{*(n+m'+1)} = x^{*(n+m')}.x = x^{*n}.x^{*m'}.x = x^{*n}.x^{*(m'+1)}.$$

Par récurrence, on en déduit la première formule (1). On obtient de même la 3ème, l'égalité $g(x^{*m}) = g(x)^{*m}$ donnant

$$g(x^{*(m+1)}) = g(x^{*m}.x) = g(x)^{*m}.g(x) = g(x)^{*(m+1)}.$$

2° On a $x^{*(n1)} = x^{*n} = (x^{*n})^{*1}$. Supposons que m' soit un entier tel que $x^{*(nm')} = (x^{*n})^{*m'}$. En utilisant la partie 1 et la distributivité de N^* sur N^+, on trouve

$$(x^{*n})^{*(m'+1)} = (x^{*n})^{*m'}.(x^{*n}) = x^{*(nm')}.x^{*n} = x^{*(nm'+n)}.$$

d'où par récurrence la 2ème formule (1), car $nm'+n = n(m'+1)$.

3° Supposons $x'.x = x.x'$. Soit m un entier tel que

$$(x'.x)^{*m} = x'^{*m}.x^{*m} \quad \text{et} \quad x^{*m}.x' = x'.x^{*m}.$$

Il en résulte

$$x^{*(m+1)}.x' = x^{*m}.x.x' = x^{*m}.x'.x = x'.x^{*m}.x = x'.x^{*(m+1)}$$

et par suite

$$(x'.x)^{*(m+1)} = (x'.x)^{*m}.(x'.x) = (x'^{*m}.x^{*m}).(x'.x) =$$

$$= x'^{*m}.(x'.x^{*m}.x) = x'^{*(m+1)}.x^{*(m+1)}.$$

Par récurrence, on trouve les formules (2).

4° Si x^{-1} est l'inverse de x dans E^*, les relations $x^{-1}.x = e = x.x^{-1}$ ont pour conséquence

$$(x^{-1})^{*n}.x^{*n} = (x^{-1}.x)^{*n} = e^{*n} = e = (x.x^{-1})^{*n} = x^{*n}.(x^{-1})^{*n}.$$

Donc $(x^{-1})^{*n}$ est l'inverse de x^{*n}.

EXEMPLES.

1° Soient E^+ un monoïde commutatif et $x \in E$. L'itéré x^{+n} d'ordre n est alors noté nx. D'après la proposition, l'application $(n,x) \to nx$ de $N \times E$ dans E vérifie:

$$(n+m)x = (nx)+(mx) \quad \text{et} \quad (nm)x = n(mx),$$

si m et n sont des entiers. Si $-x$ est un inverse de x, on a aussi $n(-x) = -(nx)$. Si E^* est un magma distributif sur E^+, alors (E^+,t_x,E^+), où $t_x(y) = x.y$ (resp. $= y.x$) est un homomorphisme, de sorte que $(nx).y = n(x.y) = x.ny$.

2° Soient X un ensemble et M(X) l'ensemble des applications de X dans X. On obtient un monoïde $M(X)^\circ$ en munissant M(X) de la loi de composition:

$$(f',f) \to f' \circ f \quad \text{de } M(X) \times M(X) \text{ dans } M(X);$$

l'unité est l'application identique 1_X. L'application $f^{\circ n}$, pour un $f \in M(X)$, est appelée *n-ième itérée de* f. On a

$$f^{\circ(n+m)} = f^{\circ n} \circ f^{\circ m} \quad \text{et} \quad f^{\circ(nm)} = (f^{\circ n})^{\circ m}$$

si n et m sont des entiers. Si f admet un inverse f' dans $M(X)^\circ$, c'est-à-dire si f est une bijection et si f' est la bijection inverse, alors $(f^{-1})^{\circ n} = (f^{\circ n})^{-1}$.

10. Ensembles dénombrables.

Nous supposons encore que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome de l'infini; soit $(N,\leq)$ l'ensemble ordonné des entiers.

Définition. On appelle *ensemble dénombrable* un ensemble équipotent à N.

PROPOSITION 1. Soit T un ensemble dénombrable. Toute partie A de T est finie ou dénombrable. Si g est une surjection de T sur E, alors E est fini ou dénombrable.

Preuve. Il existe une bijection f de N sur T Soit (T,α) l'ensemble ordonné discret image de $(N,\leq)$ par f.

1° Le sous-ensemble ordonné (A,α) de (T,α) étant discret, il est isomorphe à une section ordonnée de (T,α) d'après la proposition I-8, donc A est fini ou dénombrable (ce lorsque A n'a pas de dernier élément).

2° Pour tout $x \in E$, l'ensemble $\bar{g}^{1}(\{x\})$ a un premier élément $\hat{x}$ dans (T,α). L'application

$$x \to \hat{x} \quad \text{de} \quad E \quad \text{dans} \quad T$$

est une injection. Il en résulte que E est de puissance inférieure à T, c'est-à-dire (partie 1) fini ou dénombrable.

PROPOSITION 2. Soit $\xi = (\!(T_\iota,\alpha_\iota)\!)_{\iota\in J}$ une famille d'ensembles totalement ordonnés tels que T_ι soit fini non vide pour tout $\iota \in J$, et soit S la somme de $(T_\iota)_{\iota\in J}$. Alors S est dénombrable ssi J est dénombrable. Si (J,α) est un ensemble ordonné discret, la somme (J,α)-ordonnée (S,α) de ξ (fin § 6) est discrète.

Preuve. 1° Supposons que (J,α) soit un ensemble ordonné discret. Comme T_ι est fini, (T_ι,α_ι) est un ensemble ordonné discret (corollaire, proposition 2-8), pour tout $\iota \in J$. Soit A une partie non vide de S, majorée dans (S,α). La source de l'ensemble de couples A est majorée dans (J,α), de sorte qu'elle a un premier élément $\check{\jmath}$ et un dernier élément $\hat{\jmath}$. Soit A_ι l'ensemble des $x \in T_\iota$ tels que $(x,\iota) \in A$. Les ensembles $A_{\check{\jmath}}$ et $A_{\hat{\jmath}}$ étant non vides, $A_{\check{\jmath}}$ a un premier élément $(x_{\check{\jmath}},\check{\jmath})$ dans $(T_{\check{\jmath}},\alpha_{\check{\jmath}})$ et $A_{\hat{\jmath}}$ un dernier élément $(x_{\hat{\jmath}},\hat{\jmath})$ dans $(T_{\hat{\jmath}},\alpha_{\hat{\jmath}})$. Evidemment $(x_{\check{\jmath}},\check{\jmath})$ est le premier élément de A dans (S,α) et $(x_{\hat{\jmath}},\hat{\jmath})$ son dernier élément. Ceci prouve que (S,α) est un ensemble ordonné discret. Il admet (x_ι,ι) pour dernier élément ssi ι est le dernier élément de (J,α) et x_ι le dernier élément de (T_ι,α_ι).

2° Supposons que J soit dénombrable. Il existe une bijection f de N sur J, et l'ensemble ordonné image de $(N,\leq)$ par f est discret sans dernier élément. D'après la partie 1, il s'ensuit que (S,α) est un ensemble ordonné discret sans dernier élément. Mais alors (S,α) est isomorphe à $(N,\leq)$ (corollaire 1, proposition I-8), et par suite S est dénombrable.

3° Si S est dénombrable, J est fini ou dénombrable en vertu de la proposition 1, l'application

$$(x,\iota) \to \iota \quad \text{de} \quad S \quad \text{sur} \quad J$$

étant une surjection. Comme les T_ι sont finis et qu'une somme finie d'ensembles finis est finie, J ne peut pas être fini. Ainsi il est dénombrable.

COROLLAIRE. N×N *est dénombrable.*

Preuve. Considérons l'addition κ_N de N×N dans N. Pour tout entier n, soit $T_n = \kappa_N^{-1}(\{n\})$; alors T_n est fini, car il est contenu dans $(n+1)\times(n+1)$. On définit un ensemble totalement ordonné (T_n, α_n) en posant:

$$(m,m') \alpha_n (\hat{m},\hat{m}') \quad \text{ssi} \quad m \leq \hat{m}.$$

D'après la proposition 2, la somme S de $(T_n)_{n\in N}$ est dénombrable. Il s'ensuit que N×N est dénombrable, $(T_n)_{n\in N}$ étant une partition de N×N.

PROPOSITION 3. Soit $\xi = ((T_\iota, \alpha_\iota))_{\iota\in J}$ *une famille d'ensembles ordonnés discrets,* S *et* E *les somme et réunion de* $(T_\iota)_{\iota\in J}$*; si* J *est fini ou dénombrable,* S *et* E *sont finis ou dénombrables.*

Preuve. Il existe une injection f de J dans N et, pour tout $\iota \in J$, il existe une unique bijection f_ι définissant un isomorphisme de (T_ι, α_ι) sur une section ordonnée de $(N, \leq)$, d'après la proposition I-8. L'application $(x,\iota) \to (f_\iota(x), f(\iota))$ de S dans N×N est une injection, donc S est fini ou dénombrable, car N×N est dénombrable d'après le corollaire de la proposition 2. Comme E est l'image de S par la surjection $(x,\iota) \to x$, E est fini ou dénombrable (proposition I).

COROLLAIRE 1. L'ensemble somme d'une famille finie ou dénombrable $(T_\iota)_{\iota\in J}$ *de parties de* N *est fini ou dénombrable.*

En effet, ceci résulte de la proposition 3 appliquée à la famille $((T_\iota, \leq))_{\iota\in J}$ de sous-ensembles ordonnés de N.

COROLLAIRE 2. Soient $(T_\iota)_{\iota\in J}$ *une famille d'ensembles finis ou dénombrables,* E *et* S *ses réunion et somme. Si* J *est fini (resp.* J *est dénombrable et si* $\mathcal{D}$ *vérifie l'axiome du choix),* E *et* S *sont finis ou dénombrables.*

Preuve. Pour tout $\iota \in J$, l'ensemble R_ι des ordres r_ι sur T_ι tels que (T_ι, r_ι) soit discret n'est pas vide. Il s'ensuit d'après la proposition 6-4 (resp. d'après l'axiome du choix) qu'il existe une famille

$$(r_\iota)_{\iota\in J} \in \prod_{\iota\in J} R_\iota$$

Le corollaire résulte de la proposition 3, appliquée à la famille $((T_\iota, r_\iota))_{\iota\in J}$ d'ensembles ordonnés discrets.

PROPOSITION 4. Le produit P *d'une famille finie* $(E_\iota)_{\iota\in J}$ *d'ensembles finis ou dénombrables est fini ou dénombrable.*

Preuve. Supposons que J soit un ensemble à n éléments. D'après la proposition II-4, P est de puissance inférieure au produit N^n. Or N^1 qui est équipotent à N est dénombrable. Soit $m \geq 1$ un entier; l'application

$$(n_\iota)_{\iota\leq m} \to ((n_\iota)_{\iota<m}, n_m) \quad \text{de } N^{m+1} \text{ dans } N^m\times N$$

est une bijection. Si l'on a montré que N^m est dénombrable, le produit $N^m\times N$ est équipotent à N×N et, a fortiori à N (corollaire proposition 2); c'est-à-dire N^{m+1} est dénombrable. Par récurrence, on en déduit que N^m est dénombrable pour tout entier $m \neq 0$. Donc P est fini ou dénombrable.

Remarque. Si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix, le produit P d'une suite $(E_n)_{n\in N}$ d'ensembles finis ayant au moins deux éléments n'est pas dénombrable. En effet, P est de puissanc

supérieure au produit 2^N; or celui-ci est équipotent à P(N) (proposition 2-4), et par suite non dénombrable en vertu du théorème de Cantor.

PROPOSITION 5. Supposons que D vérifie l'axiome du choix. Si E est un ensemble infini, il existe une partie de E qui est dénombrable.

Preuve. Soit M l'ensemble des parties finies de E. D'après l'axiome du choix, il existe une application c de M dans E telle que

$$c(A) \in E\backslash A \quad \text{pour tout } A \in M.$$

Soit B l'ensemble des injections b d'une section propre de N dans E. En particulier, l'application b_a:

$$0 \to a \text{ de } {}^{\leftarrow}0 \text{ dans } E$$

appartient à B, pour tout élément a de E. Si b admet pour ensemble source la section ${}^{\leftarrow}n$ et pour image A_n, l'application de ${}^{\leftarrow}(n+1)$ dans E définie par

$$m \to b(m) \text{ si } m \leq n, \quad n+1 \to c(A_n)$$

est une injection, de sorte qu'elle appartient à B; nous la noterons p(b). Le corollaire de la proposition 4-8 assure l'existence d'une unique application f de N dans E telle que

$$f(0) = b_a(0), \quad f/{}^{\leftarrow}n \in B \quad \text{et} \quad f/{}^{\leftarrow}(n+1) = p(f/{}^{\leftarrow}n)$$

pour tout entier n, c'est-à-dire vérifiant les conditions:

$$\begin{cases} f(0) = a, \quad f(n+1) = c(\{f(m) \mid m \leq n\}) \text{ ✦} \\ \text{et } f/{}^{\leftarrow}n \text{ est une injection pour tout } n \in N. \end{cases}$$

L'application f est une injection, car $f(n) = f(m)$ et, par exemple $m \leq n$, entraîne

✦Nous n'utilisons pas le symbole $f({}^{\leftarrow}n)$ car, ${}^{\leftarrow}n$ étant identique à $(n+1)$, il y aurait confusion. D'une manière générale, si g est une application de F dans F', il faut se méfier de la notation g(A) (§2) pour l'image de A par g, si $A \in F \cap P(F)$.

$$(f/{}^{\leftarrow}n)(n) = (f/{}^{\leftarrow}n)(m), \quad \text{d'où } m = n.$$

Par suite l'image de f est une partie dénombrable de E.

COROLLAIRE 1. Supposons que D vérifie l'axiome du choix, que A soit un ensemble infini et U un ensemble contenant P(A). Dans l'ensemble ordonné des U-cardinaux (§ 7) l'ensemble $C_U\backslash N_U$ des U-cardinaux infinis a pour premier élément le U-cardinal de N.

Preuve. Soit X un U-cardinal infini; tout représentant E de X étant infini, E contient une partie dénombrable T d'après la proposition 5. Comme T est également équipotent à une partie de l'ensemble infini A, il admet un U-cardinal Y, qui est aussi le U-cardinal de N. Par définition de l'ensemble ordonné $(C_U, \leq)$, on a $Y \leq X$. Puisque Y est un U-cardinal infini, c'est donc le premier élément de $C_U\backslash N_U$:

COROLLAIRE 2. Si D vérifie l'axiome du choix, un ensemble A est infini ssi il est équipotent à s'une de ses parties propres (resp. ssi A est équipotent à $A\backslash\{a\}$, où $a \in A$).

Preuve. La condition est suffisante d'après le corollaire de la proposition 7-3. Inversement, supposons A infini; nous avons prouvé dans la proposition 5 qu'il existe, pour tout élément a de A, une bijection f de N sur une partie A' de A telle que $f(0) = a$. L'application h:

$$x \to x \text{ si } x \in A\backslash A', \quad f(n) \to f(n+1) \text{ pour } n \in N,$$

de A dans A est une injection, et $f(A) = A\backslash\{a\}$. Donc $A\backslash\{a\}$ est équipotent à A.

COROLLAIRE 3. Supposons que A *soit un ensemble de puissance supérieure à* N *(resp. ensemble infini et que* D *vérifie l'axiome du choix). Si* T *est fini ou dénombrable, la somme* S *et la réunion* E *de* (A,T) *sont équipotentes à* A.

Preuve. Il existe une partie A' de A, dénombrable par hypothèse (resp. d'après la proposition 5). Comme

$$E = (A \setminus A') \cup (A' \cup T)$$

et que $A' \cup T$ est dénombrable (proposition 2), donc équipotent à A', l'ensemble E est équipotent à $(A \setminus A') \cup A'$, c'est-à-dire à A. La somme S étant équipotente à la réunion de (A,T'), où T' est un ensemble dénombrable tel que $A \cap T' = \emptyset$, il en résulte que S est équipotent à A.

PROPOSITION 6. Soit E *un ensemble non vide. Si* E *est de puissance inférieure à* P(N), *le produit* P, *la somme* S *et la réunion* F *de* (E,P(N)) *sont équipotents à* P(N). *Si* E *est fini ou dénombrable,* $P(N)^E$ *est équipotent à* P(N).

Preuve. 1° P(N) est équipotent à 2^N (proposition 2-4). Or le corollaire de la proposition 5-4 montre que $2^N \times 2^N$ est équipotent à $2^{N'}$, où N' est la somme de (N,N). D'après la proposition 3, N' est équipotent à N, de sorte que $2^{N'}$ est aussi équipotent à 2^N. Il en résulte que $P(N) \times P(N)$ et P(N) sont équipotents.

2° Si E est de puissance inférieure à P(N), le produit $1 \times P(N)$, qui est équipotent à P(N), est de puissance inférieure à P, lequel est de puissance inférieure à $P(N) \times P(N)$. Ce dernier étant équipotent à P(N) en vertu de la partie 1, il en est de même pour P.

3° S est de puissance inférieure à la somme du couple (P(N),P(N)), i.e. à $2 \times P(N)$, et de puissance supérieure à la somme de (1,P(N)), c'est-à-dire à P(N). Comme $2 \times P(N)$ est équipotent à P(N), il s'ensuit que S est équipotent à P(N).

4° (E',P(N)), où $E' = E \cap P(N)$, est une partition de F; la somme de ce couple étant équipotente à P(N) d'après la partie 3, F est équipotent à P(N).

5° $P(N)^E$ est équipotent à $(2^N)^E$, lequel est équipotent (corollaire 2 proposition 5-4) à $2^{N \times E}$. Si E est fini ou dénombrable, $N \times E$ est équipotent à N, de sorte que $2^{N \times E}$, et a fortiori $P(N)^E$, est équipotent à 2^N, donc à P(N).

Remarque. On construit explicitement une bijection du produit $N \times P(N)$ sur P(N) en associant au couple (n,A) l'ensemble ayant pour éléments:

$$n \quad \text{et} \quad x+n+1 \quad \text{pour tout} \quad x \in A.$$

CHAPITRE III

Rationnels. Réels

Dans tout ce chapitre, nous supposons que D est un modèle de la Théorie des ensembles (i.e. une totalité vérifiant l'axiome de l'infini) et ensemble signifie D-ensemble.

Nous désignons par $(N,\leq)$ l'ensemble ordonné discret des entiers naturels, par $\hat{N}$ l'ensemble $N\setminus\{0\}$, par N^+ le monoïde additif des entiers, par N^* le monoïde multiplicatif des entiers, et nous reprenons les conventions du § 9. Nous nous proposons de construire et de caractériser le corps des nombres réels.

11. Entiers relatifs.

Définition. Un ensemble ordonné (E,α) est dit *pseudo-discret* s'il vérifie les conditions suivantes:

1° C'est un ensemble totalement ordonné sans dernier élément.

2° Tout élément de E admet un prédécesseur.

3° Toute partie non vide de E minorée dans (E,α) admet un premier élément dans (E,α).

PROPOSITION 1. Soit (E,α) un ensemble ordonné. Il est pseudo-discret ssi l'ensemble ordonné opposé est pseudo-discret.

Preuve. Il suffit de montrer que, si (E,α) est pseudo-discret, tout élément de E a un suivant et toute partie majorée a un dernier élément, dans (E,α).

1° Soit x un élément de E; l'ensemble des majorants stricts de x n'est pas vide, sinon x serait le dernier élément de (E,α), et il est minoré par x; par suite il a un premier élément, qui est le suivant de x dans (E,α).

8° Soit A une partie non vide de E, majorée par y. Si y appartient à A, c'est le dernier élément de A. Dans le cas contraire, l'ensemble des majorants stricts de A admet un premier élément z. Le prédécesseur de z est le dernier élément de A dans (E,α).

PROPOSITION 2. Soit (E,α) un ensemble totalement ordonné sans premier ni dernier élément. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1° (E,α) est pseudo-discret.

2° Toute partie non vide de E minorée a un premier élément et toute partie non vide majorée a un dernier élément.

3° Si $x \in E$ et si $y \alpha x$, l'ensemble $|y,x|$ des $z \in E$ tels que $y \alpha z$ et $z \alpha x$ est fini.

Preuve. 1° Supposons (E,α) pseudo-discret. La condition 2 est remplie d'après la proposition 1. Le sous-ensemble ordonné $(|y,x|,\alpha)$ admet y pour premier élément, x pour dernier élément, de sorte que toute partie non vide de $|y,x|$ a un premier et un dernier élément. Ainsi il est discret et, vu la proposition 4-7, $|y,x|$ est fini.

2° Supposons la condition 2 vérifiée et soit $x \in E$. L'ensemble des minorants stricts de x n'étant pas vide et étant majoré par x, il admet un dernier élément, qui est le prédécesseur de x dans (E,α). Ainsi (E,α) est pseudo-discret.

3° Supposons la condition 3 satisfaite et soit A une partie non vide de E. Soit x un majorant de A et y un élément de A; l'ensemble ordonné $(|y,x|,\alpha)$ est discret d'après la proposition 2-8, car il est totalement ordonné et $|y,x|$ est fini. Le dernier élément de $A \cap |y,x|$ dans $(|y,x|,\alpha)$ est aussi le dernier élément de A dans (E,α). L'ensemble ordonné opposé vérifiant aussi la condition 3, il en résulte que A admet un premier élément dans (E,α), lorsqu'il est minoré. Donc (E,α) vérifie la condition 2, et a fortiori il est pseudo-discret.

COROLLAIRE. La somme ordonnée $(Z',\leq)$ *de* $\{(\hat{N},\geq),(N,\leq)\}$, *où* $\hat{N} = N\setminus\{0\}$, *est un ensemble ordonné pseudo-discret.*

Preuve. $(Z',\leq)$ n'a ni premier ni dernier élément. Soient x et y deux éléments de Z' tels que $y \leq x$.

a) Si $x = (n,1)$ et $y = (n',1)$ (resp. si $x = (n',0)$ et $y = (n,0)$), l'ensemble $|y,x|$ est équipotent à l'ensemble $\{m \in N \mid n' \leq m \leq n\}$, lequel est fini.

b) Si $y = (n,0)$ et $x = (m,1)$, l'intervalle $|y,x|$ est aussi fini, étant la réunion du couple d'ensembles finis $(|y,(1,0)|,|(0,1),x|)$.

PROPOSITION 3. Soient (E,α) *et* (E',α') *deux ensembles ordonnés pseudo-discrets,* $a \in E$ *et* $a' \in E'$. *Il existe un*

et un seul isomorphisme $\{(E',\alpha'),\hat{f},(E,\alpha)\}$ *tel que* $\hat{f}(a)=a'$.

Preuve. 1° Soit $a^{\mapsto}$ l'ensemble des majorants de a dans (E,α). Comme $a^{\mapsto}$ admet a pour premier élément, toute partie de $a^{\mapsto}$ est minorée, donc admet un premier élément dans $(a^{\mapsto},\alpha)$; le prédécesseur de $x \in a^{\mapsto}$ dans (E,α) est le prédécesseur de x dans $(a^{\mapsto},\alpha)$, si $x \neq a$. Par suite $(a^{\mapsto},\alpha)$ est un ensemble ordonné discret sans dernier élément. De même le sous-ensemble ordonné $(a'^{\mapsto},\alpha')$ de (E',α') formé des majorants de a' est discret, sans dernier élément. D'après la proposition 1-8, il existe un et un seul isomorphisme $((a'^{\mapsto},\alpha'),g,(a^{\mapsto},\alpha))$, et $g(a) = a'$.

2° On peut appliquer ce qui précède en partant des prédécesseurs b de a dans (E,α) et b' de a' dans (E',α'), et des ensembles ordonnés pseudo-discrets opposés de (E,α) et de (E',α'). Il en résulte qu'il existe un et un seul isomorphisme $((b'^{\mapsto},\alpha'),g',(b^{\mapsto},\alpha))$, c'est-à-dire g' est l'unique bijection définissant un isomorphisme de la section $({}^{\leftarrow}b,\alpha)$ de (E,α) sur la section $({}^{\leftarrow}b',\alpha')$ de (E',α'). L'application f réunion de (g',g):

$$x \to g'(x) \text{ si } x \alpha b, \quad y \to g(y) \text{ si } a \alpha y$$

de E dans E' est une bijection, qui définit un isomorphisme de (E,α) sur (E',α').

2° Soit $((E',\alpha'),f',(E,\alpha))$ un autre isomorphisme tel que $f'(a) = a'$. On a $f'(a^{\mapsto}) \subset a'^{\mapsto}$ et la restriction de f' à $(a'^{\mapsto},a^{\mapsto})$ définit un isomorphisme de $(a^{\mapsto},\alpha)$ sur $(a'^{\mapsto},\alpha')$, de sorte qu'elle est identique à g. D'une façon analogue, f' a g' pour restriction à $({}^{\leftarrow}b',{}^{\leftarrow}b)$. D'où $f = f'$.

COROLLAIRE 1. Si (E,α) *est un ensemble ordonné pseudo-*

discret, il est isomorphe à la somme ordonnée $(Z',\leq)$ *de* $((\hat{N},\geq),(N,\leq))$ *et* E *est dénombrable.*

En effet, ceci résulte de la proposition, car $(Z',\leq)$ est pseudo-discret et Z' est la somme de $(\hat{N},N)$, donc est dénombrable (corollaire de la proposition 3-10).

COROLLAIRE 2. Soient (E,α) *un ensemble ordonné pseudo-discret,* $a \in E$ *et* $a' \in E\setminus\{a\}$. *Il existe un unique isomorphisme* o *de* (E,α) *sur l'ensemble ordonné opposé tel que* $o(a) = a$, *et* a *est le seul point fixe de* o. *Il existe un unique isomorphisme* $((E,\alpha),f,(E,\alpha))$ *tel que* $f(a) = a'$ *et* f *n'a pas de point fixe.*

Preuve. L'existence de o et de f résulte de la proposition 3. Comme o applique $a^{\mapsto}$ sur $^{\mapsto}a$, l'égalité $o(x) = x$ entraîne $x = a$. L'application identique ι_E définissant l'unique isomorphisme de (E,α) sur (E,α) tel que $\iota_E(a) = a$, un isomorphisme ayant a pour point fixe est identique à ι_E.

HYPOTHESE. Dans la fin de ce §, nous supposons donné un ensemble ordonné pseudo-discret (E,α) (il en existe, par exemple $(Z',\leq)$), et un élément e de E. Nous posons

$$A = e^{\mapsto} = \{x \in E \mid e \alpha x\} \quad \text{et} \quad A' = {}^{\mapsto}e .$$

Soient $\hat{g} = ((A,\alpha),g,(N,\leq))$ et $\hat{g}' = ((A',\alpha),g',(N,\geq))$ les isomorphismes dont la proposition 3 assure l'existence.

Définition. On appelle *valeur absolue sur* (E,α) l'application v de E dans N réunion de (g'^{-1},g^{-1}).

En particulier, on a $v(e) = 0$.

Définition. On appelle *translation sur* (E,α) une bijection définissant un isomorphisme de (E,α) sur (E,α). On appelle *symétrie de centre* e une bijection définissant un isomorphisme de (E,α) sur l'ensemble ordonné opposé et laissant fixe e.

D'après la proposition 3, il existe une unique symétrie de centre e; nous la noterons o et nous poserons:

$$o(x) = -x \quad \text{pour tout} \quad x \in E ;$$

en particulier e est l'unique élément de E tel que $e = -e$.

Soit Γ l'ensemble des translations sur (E,α). La composée de deux translations et l'inverse d'une translation étant des translations, Γ définit un sous-groupe Γ° du monoïde $M(E)^\circ$ des applications de E dans E (exemple 2, fin § 9), ayant ι_E pour unité et dans lequel l'inverse de f est la bijection f^{-1}. Pour tout élément x de E, il existe un et un seul $f \in \Gamma$ tel que $f(e) = x$; nous le désignerons par t_x et l'appellerons *translation de* e *à* x. Il résulte de la proposition 3 que l'application t:

$$x \to t_x \quad \text{de E sur } \Gamma$$

est une bijection; la bijection t^{-1} inverse de t associe à la translation $f \in \Gamma$ l'élément f(e).

Définition. On appelle *groupe additif sur* (E,α) le magma E^+ image de Γ° par t^{-1}.

L'image d'un groupe étant un groupe, E^+ est le groupe obtenu en munissant E de la loi de composition k:

$$(y,x) \to y+x \text{ , où } y+x = t_y \circ t_x(e), \text{ de } I\times I \text{ dans } E.$$

PROPOSITION 4. E^+ *est un groupe commutatif, d'unité* e, *dans lequel* $y+x = t_y(x)$ *et l'inverse de* x *est* -x. *L'ensemble* A *définit un sous-monoïde* A^+ *de* E^+, *qui est l'image par* g *du monoïde additif* N^+ *des entiers. Les relations* $x \propto y$ *et* $x' \propto y'$ *dans* $(E,\propto)$ *entraînent* $x+x' \propto y+y'$.

Preuve. 1° L'inverse x' de x dans E^+ est tel que $t_{x'}$ soit la bijection t_x^{-1} inverse de t_x. La translation t_x^{-1} et la symétrie o appliquant l'intervalle

$$|e,x| \text{ si } e \propto x \quad (\text{resp. } |x,e| \text{ si } x \propto e)$$

sur des intervalles équipotents, à savoir sur $|x',e|$ et sur $|-x,e|$ (resp. sur $|e,x'|$ et sur $|e,-x|$), il s'ensuit $x' = -x$, et a fortiori $t_{-x} = t_x^{-1}$.

2° Soient x et y des éléments de E. On a

$$y+x = t_y \circ t_x(e) = t_y(x).$$

Supposons que y et x appartiennent à A; alors y+x appartient à A, car, t_y définissant un isomorphisme,

$$e \propto y = t_y(e) \propto t_y(x) = y+x.$$

Ainsi A définit un sous-monoïde A^+ de E^+. La bijection restriction de $v \circ t_y$ à $(v(y)^{\mapsto},A)$ définissant l'unique isomorphisme de l'ensemble ordonné discret $(A,\propto)$ sur le sous-ensemble ordonné discret $(v(y)^{\mapsto},\leq)$ de $(N,\leq)$, elle est identique à $\tau_{v(y)} \circ g^{-1}$, où $\tau_{v(y)}$ définit l'unique isomorphisme de $(N,\leq)$ sur $(v(y)^{\mapsto},\leq)$. Or, d'après la proposition 5-9, $\tau_{v(y)}(n) = v(y)+n$. Il en résulte

$$v(y+x) = v \circ t_y(x) = \tau_{v(y)}(v(x)) = v(y)+v(x),$$

de sorte que A^+ est l'image de N^+ par g.

3° N^+ étant commutatif, A^+ l'est aussi. Soient z et z' des éléments de E.

- Si z et z' appartiennent à A, on a $z+z' = z'+z$.

- Si $z' \propto e$ et $z \propto e$, on a $z'+z = z+z'$, car

$$-(z'+z) = (-z)+(-z') = (-z')+(-z) = -(z+z').$$

- Si $z \propto e \propto z'$, on obtient

$$z+z' = z+z'+((-z)+z) = z+(z'+(-z))+z = z+((-z)+z')+z = z'+z.$$

Ceci prouve la commutativité de E^+. Enfin, si $x \propto y$ et $x' \propto y'$ dans $(E,\propto)$, on trouve $x+x' \propto y+x' \propto y+y'$.

COROLLAIRE 1. Si x *et* y *sont des éléments de* A *tels que* $x \propto y$, *on a* $v(y+(-x)) = v(y)-v(x)$.

En effet, comme $v(x) \leq v(y)$ et $e \propto y+(-x)$, on a $v(y+(-x))+v(x) = v(y+(-x)+x) = v(y)$, d'où $v(y+(-x)) = v(y)-v(x)$.

COROLLAIRE 2. Si C^* *est un groupe et* (C^*,f,A^+) *un homomorphisme, il existe un et un seul homomorphisme* (C^*,f',E^+) *tel que* f *soit une restriction de* f'.

Preuve. f' associe f(x) à x et son inverse $f(x)^{-1}$ à -x, si $x \in A$. En effet, si $(y,x) \in A \times A$ et $y \propto x$, on a

$$f'((-x)+(-y)) = f'(-(y+x)) = f(y+x)^{-1} = f'(-x).f'(-y),$$

$$f'(x).f'((-x)+y) = f(x+(-x)+y) = f'(y) = f'(y+(-x)).f'(x),$$

d'où $f'(-x).f'(y) = f'((-x)+y) = f'(y).f'(-x)$ et

$$f'(x+(-y)) = f'(y+(-x))^{-1} = f'(-x)^{-1}.f'(y)^{-1} = f'(x).f'(-y).$$

Convention. Si $(x,y) \in E \times E$, on pose $y-x = y+(-x)$.

PROPOSITION 5. Il existe une et une seule loi de composition k' *distributive sur* E^+ *ayant une unité appartenant à* A. *Le magma* $E^* = (E,k')$ *est un monoïde commutatif admettant pour sous-magma le monoïde image de* N^* *par* g ; (E^+,E^*) *est un anneau,* (N^*,v,E^*) *un homomorphisme. Si* $(y,x) \in E \times E$, *on a* $y.x = v(y)x$ (= *itéré d'ordre* v(y) *de* x *dans* E^+) *si* $e \propto y$ *et* $y.x = -v(y)x$ *si* $y \propto o$.

Preuve. Soit E° un magma distributif sur E^+, ayant une unité $u' = g(n') \in A$. Soient $x \in A$ et $u = g(1)$. Si $x \circ u \in A$ (resp. $\in A'$), on voit par récurrence que l'on a $x \circ g(n) \in A$ (resp. $\in A'$) pour tout $n \in N$, car cette formule, si elle est vraie pour n, entraîne par distributivité:

$$x \circ g(n+1) = x \circ (g(n)+u) = (x \circ g(n)) + (x \circ u) \in A \text{ (resp. } \in A').$$

Comme $x \circ g(n') = x \in A$, il s'ensuit $x \circ g(n) \in A$ et $k'(A \times A)$ est contenu dans A. Ainsi A définit un sous-magma A° de E°, dont l'image N° par g^{-1} est distributive sur N^+, d'unité n'. D'après la proposition 5-9, il en résulte $N^\circ = N^*$ et $u' = u$. Si $(y,x) \in E \times E$, on trouve

$$y \circ x = y \circ (x+e) = (y \circ x) + (y \circ e),$$

d'où $e = y \circ e = y \circ (x-x) = (y \circ x) + (y \circ (-x))$

et, a fortiori $y \circ (-x) = -(y \circ x)$. De même $(-y) \circ x = -(y \circ x)$ et $(-y) \circ (-x) = -(y \circ (-x)) = y \circ x$. Ceci conduit inversement à considérer l'application de $E \times E$ dans E associant à (y,x):

$$\begin{cases} y.x = g(v(y)v(x)) & \text{si } (y,x) \in A \times A, \\ (-y).(-x) & \text{si } (y,x) \in A' \times A', \\ -(y.(-x)) \text{ si } x \propto e \propto y, \quad -((-y).x) & \text{si } y \propto e \propto x. \end{cases}$$

Notons l'application ainsi définie k', posons $y.x = k'(y,x)$ et montrons que le magma $E^* = (E,k')$ vérifie les conditions voulues.

1° Puisque A^+ et A^* sont les images de N^+ et de N^* par g, il résulte des propriétés de (N^+,N^*) que A^* est un monoïde commutatif dont la loi de composition est distributive sur A^+; son unité $g(1)$ est le suivant u de e dans $(E,\propto)$. De plus

$$e.x = g(0x) = g(0) = e$$

et $x+u$ est le suivant de x dans $(E,\propto)$, pour tout $x \in A$. Si $y \in A'$, les égalités

$y.u = -((-y).u) = -(-y) = y$ et $u.y = -(u.(-y)) = y$ signifient que u est une unité de E^*.

2° Soient x et y des éléments de E. S'ils appartiennent à A, alors

$$x.y = y.x \quad \text{et} \quad v(y.x) = v(y)v(x).$$

En utilisant la "règle des signes" (définition de k'), on en déduit facilement que ces deux égalités sont aussi vraies quels que soient x et y, c'est-à-dire que E^* est un magma commutatif et (N^*,v,E^*) un homomorphisme.

3° Soient x, y et z des éléments de E. Puisque (N^*,v,E^*) est un homomorphisme, on a

$$v(z.(y.x)) = v(z)v(y)v(x) = v((z.y).x).$$

Par ailleurs $z.(y.x)$ et $(z.y).x$ appartiennent

- tous les deux à A si $(x,y,z) \in A \times A \times A$ ou si un seul des éléments x, y et z appartient à A,
- tous les deux à A' dans le cas contraire.

Les restrictions de v à A et à A' étant des injections il s'ensuit $z.(y.x) = (z.y).x$ toujours, de sorte que E^* est un monoïde.

4° Soient x, y et z des éléments de E. S'ils appartiennent tous les trois à A, nous savons (partie I) que

$$z.(y+x) = (z.y)+(z.x).$$

On vérifie sans difficulté que cette égalité est encore vérifiée lorsque x et y appartiennent tous les deux à A ou tous les deux à A'. Enfin si $x \propto e \propto y$ ou si $y \propto e$ et $e \propto x$, l'un, x', des éléments y ou x est tel que $y+x$ et $-x'$ appartiennent à la fois à A ou à A'; il résulte de ce qui précède

$$z.(y+x) = z.(y+x)+(z.(-x'))+(z.x') = (z.(y+x-x'))+(z.x'),$$

d'où $z.(y+x) = (z.y)+(z.x)$. Par conséquent (E^+,E^*) est un anneau.

5° Supposons $x \in E$. Considérons l'ensemble V des $y \in A$ tels que $y.x = v(y)x$. Les égalités

$$e.x = e = 0x \qquad \text{et} \qquad u.x = x = 1x$$

entraînent $e \in V$ et $u \in V$. Supposons $y \in V$; en utilisant les formules de l'exemple 1, §9 et l'égalité (proposition 4) $v(y+x) = v(y)+v(u)$, on obtient:

$$v(y+u)x = v(y)x + v(u)x = (y.x)+(u.x) = (y+u).x,$$

c'est-à-dire $y+u \in V$. Il en résulte $V = A$. Par ailleurs, si $z \in A'$, on trouve

$$z.x = -((-z).x) = -(v(z)x).$$

COROLLAIRE 1. (E^+,E^*) *est un anneau intègre, i.e. si* $y.x = e$, *alors* $x = e$ *ou* $y = e$.

En effet, ceci est vrai (vu les propriétés de N^*) lorsque x et y appartiennent à A; le cas général s'en déduit immédiatement.

COROLLAIRE 2. Soient x, y *et* z *des éléments de* E, $z \neq e$. *Alors* $x \ll y$ *équivaut à* $z.x \ll z.y$ *si* $e \ll z$, *à* $z.y \ll z.x$ *si* $z \ll e$; *de plus* $x = y$ *ssi* $z.x = z.y$.

Preuve. 1° Supposons $x \ll y$, c'est-à-dire $e \ll y-x$. Si $z \in A$, les relations

$$e = z.e \ll z.(y-x) = (z.y)-(z.x)$$

ont pour conséquence $z.x \ll z.y$ et

$$(-z).y = -(z.y) \ll -(z.x) = (-z).x .$$

2° Si $z.x = z.y$, alors $z.(y-x) = e$ et, d'après le corollaire 1, $y = x$. Si $z \in A$ et $z.x \ll z.y$, on trouve $x \ll y$, car $y \ll x$ entraînerait $z.y \ll z.x$, d'où $y = x$.

CAS PARTICULIER. Soient $(Z',\leq)$ l'ensemble ordonné pseudo-discret somme ordonnée de $((\hat{N},\geq),(N,\leq))$ et ζ l'application

$$(n,0) \to (n,0), \qquad (m,1) \to m$$

de Z' sur $Z = (\hat{N}\times\{0\}) \cup N$ (c'est-à-dire nous "remplaçons $N\times\{1\}$ par N"). Comme

$$0 \notin (n,0) = \{\{n\},\{n,0\}\} \qquad \text{et} \qquad 0 \in n$$

pour tout entier n, on a $(\hat{N}\times\{0\}) \cap N = \emptyset$, de sorte que ζ est une bijection de Z' sur Z. Soit $(Z,\leq)$ l'ensemble ordonné image de $(Z',\leq)$ par ζ. C'est un ensemble ordonné pseudo-discret.

Définition. Un élément de Z est appelé *entier relatif*. On dit que $(Z,\leq)$ est *l'ensemble ordonné des entiers relatifs* et l'anneau (Z^+,Z^*) associé (proposition 5) est appelé *anneau des entiers relatifs*.

Les entiers relatifs sont donc les entiers naturels et les couples $(n,0)$, où $n \in \hat{N}$; un tel couple est représenté par $-n$ (en accord avec la convention générale dans les ensembles pseudo-discrets), et appelé *entier négatif* (un élément de N est parfois dit *entier positif*). $(N,\leq)$ est un sous-ensemble ordonné de $(Z,\leq)$ et, si m et n sont des entiers naturels, on a toujours $-n \leq m$ et, si $n \leq m$, alors $-m \leq -n$. La valeur absolue v_Z sur $(Z,\leq)$ est l'application de Z dans N telle que

$$v(n) = n = v(-n) \quad \text{pour tout } n \in N.$$

On pose souvent $|z| = v_Z(z)$; on voit que

$$|z+z'| \leq |z| + |z'| \text{ si } (z,z') \in Z\times Z.$$

Les monoïdes N^+ et N^* sont des sous-monoïdes de Z^* et

de Z^* respectivement. La loi de composition κ_Z:

$$(y,x) \to y+x \quad \text{de} \quad Z\times Z \quad \text{dans} \quad Z$$

est appelée *addition sur* Z et y+x est *l'entier relatif somme de* (y,x). L'addition est obtenue, à partir de l'addition des entiers naturels, par les formules suivantes, où m et n appartiennent à N:

$$\begin{cases} (-m)+(-n) = -(m+n), \\ m+(-n) = m-n = (-n)+m & \text{si } n \leq m, \\ m+(-n) = -(n-m) = (-n)+m & \text{si } m < n. \end{cases}$$

La loi de composition $\kappa_Z^!$ de Z^*, dite *multiplication sur* Z, associe à (y,x) *l'entier relatif produit* y.x (parfois noté yx), défini à partir du produit des entiers naturels comme suit, où m et n appartiennent à N:

$$(-m).(-n) = m.n, \qquad (-m).n = -(m.n) = m.(-n).$$

L'itéré z^{*n} de $z \in Z$, où $n \in N$, est noté aussi z^n, et appelé *puissance n-ième de z*.

12. Ensemble des nombres rationnels.

Soient $(N,\leq)$ et $(Z,\leq)$ les ensembles ordonnés des entiers (naturels) et des entiers relatifs, $\hat{N} = N\setminus\{0\}$. Si z et z' sont des entiers relatifs, nous désignons par $|z|$ la valeur absolue $v_Z(z)$, par z'z l'entier relatif produit de (z',z).

Considérons la relation r sur $Z\times\hat{N}$ dont le graphe $\underline{r}$ est formé des couples

$$((z,n),(z',n')) \in (Z\times\hat{N})\times(Z\times\hat{N}) \text{ tels que } zn' = z'n.$$

PROPOSITION 1. r est une relation d'équivalence; posons $Q' = (Z\times\hat{N})/r$. *Il existe une injection* ϕ *de* Q' *dans* $Z\times\hat{N}$ *telle que, si* $q \in Q'$ *et* $\phi(q) = (\hat{z},\hat{n})$, *on ait*

$$q = \{(m\hat{z},m\hat{n}) \mid m \in \hat{N}\}.$$

L'application $c: z \to (z,1) \bmod r$ *est une bijection de* Z *sur une partie de* Q'.

Preuve. 1° r est réflexive et symétrique. Supposons

$$((z,n),(z',n')) \in \underline{r} \quad \text{et} \quad ((z',n'),(z'',n'')) \in \underline{r}.$$

Si $z' = 0$, les égalités

$$zn' = z'n = 0 \quad \text{et} \quad z''n' = z'n'' = 0$$

entraînent $z = 0 = z''$, d'où $zn'' = z''n$. Si $z' \neq 0$, des relations

$$(zn'')(z'n') = (zn')(z'n'') = (z'n)(z''n') = (z''n)(z'n'),$$

on déduit $zn'' = z''n$, car n', et a fortiori $z'n'$, sont différents de 0. Par suite r est une relation d'équivalence. Soit Q' l'ensemble quotient $(Z\times\hat{N})/r$.

2° Soient $q \in Q'$ et $(z,n) \in q$. Si (z',n') est un autre représentant de q, l'égalité $z'n = zn'$ assure que z est positif (resp. est négatif, resp. = 0) en même temps que z'. Si de plus $n = n'$, alors $z = z'$. Enfin

$$(mz,mn) \in q \quad \text{pour tout } m \in \hat{N}.$$

3° Supposons $q \in Q'$. L'ensemble des entiers n tels qu'il existe un représentant (z,n) de q admet un premier élément $\hat{n}$ dans $(\hat{N},\leq)$ et (partie 2) il existe un et un seul $(\hat{z},\hat{n}) \in q$. Si l'on a

$$\hat{z} = bz' \quad \text{et} \quad \hat{n} = bn' \quad \text{pour un } b \in \hat{N},$$

alors (z',n') est un représentant de q pour lequel $n' \leq \hat{n}$, de sorte que $b = 1$. Ainsi $\hat{m} = |\hat{z}|$ et $\hat{n}$ sont premiers entre eux. Soit $(z,n) \in q$; l'égalité $z\hat{n} = \hat{z}n$ a pour conséquence $\hat{m} \leq |z|$, car $\hat{n} \leq n$. Les entiers $\hat{m}$ et $\hat{n}$ étant premiers entre eux, il existe (théorème d'Arithmétique) un $d \in \hat{N}$ tel que

$$|z| = d\hat{m} \text{ et } n = d\hat{n}.$$

Il s'ensuit $(z,n) = (d\hat{z},d\hat{n})$. Donc

$$q = \{(m\hat{z},m\hat{n}) \mid m \in \hat{N}\} .$$

Nous poserons $\phi(q) = (\hat{z},\hat{n})$. En particulier, si q est la classe d'équivalence de $(0,n)$, on a

$$\phi(q) = (0,1) \quad \text{et} \quad q = \{0\}\times\hat{N}.$$

3° Nous obtenons une bijection ϕ de Q' sur l'ensemble des couples $(\hat{z},\hat{n})$ d'entiers relatifs tels que $|\hat{z}|$ et $\hat{n}$ soient premiers entre eux, en associant $\phi(q)$ à q. Comme $\phi(q) = (\hat{z},1)$ ssi

$$q = \{(m\hat{z},m) \mid m \in \hat{N}\} = c(\hat{z}),$$

l'application c de l'énoncé est une bijection de Z sur la partie $\bar{\phi}^1(Z\times\{1\})$ de Q'.

COROLLAIRE. $Z \cap Q'$ *est vide.*

En effet, un élément de Z est un ensemble fini (couple $(0,n)$ ou entier n), tandis qu'un élément q de Q' est un ensemble infini, d'après la proposition 1.

Ce corollaire entraîne que l'application

$$c(z) \to z \text{ si } z \in Z, \quad q \to q \text{ si } q \in Q'\backslash c(Z)$$

est une bijection de Q' sur $Q = Z \cup (Q'\backslash c(Z))$.

Définition. Avec les notations précédentes, un élément q de Q' est appelé *fraction* et $\phi(q)$ *fraction irréductible représentant* q. On note Q l'ensemble $Z \cup (Q'\backslash c(Z))$, et un élément de Q est appelé *nombre rationnel.*

Les nombres rationnels sont donc les entiers relatifs et les classes (z,n) mod r telles que n ne divise pas z. Si $z \in Z$, un élément de $c(z)$ (i.e. un couple (mz,m))

sera appelé représentant de z, et $(z,1)$ est dit fraction irréductible représentant z. Soit q un nombre rationnel si (z,n) est un représentant de q, on désigne généralement q par la formule z/n, ou par $\frac{z}{n}$, et l'on dit que (z,n) admet z pour *numérateur*, n pour *dénominateur*. Il résulte de la proposition 1, que $z/n = \hat{z}/\hat{n}$, où $(\hat{z},\hat{n})$ est la fraction irréductible représentant q.

Si $(q_i)_{1<j+1}$ est une suite finie de nombres rationnels, on peut trouver des représentants des q_i ayant tous le même dénominateur; en effet, si (z_i,n_i) est un représentant de q_i, il en est de même pour $(m_i z_i,n)$, où

$$m_i = n_0 \cdots n_{i-1} n_{i+1} \cdots n_j \quad \text{et} \quad n = n_0 \cdots n_j .$$

PROPOSITION 2. Q *est dénombrable. Il existe des lois de composition* κ_Q *et* κ'_Q *sur* Q *associant à* $(z'/n',z/n)$ *resp.* $(z'n+zn')/n'n$ *et* $z'z/n'n$. *Si* $Q^+ = (Q,\kappa_Q)$ *et* $Q^\cdot = (Q,\kappa'_Q)$, *alors* $(Q^+,Q^\cdot)$ *est un anneau dont* $(Z^+,Z^\cdot)$ *est un sous-anneau,* $q \in Q\backslash\{0\}$ *admet un inverse dans* $Q^\cdot$ *et* κ'_Q *est l'unique loi de composition distributive sur* Q^+ *ayant* 1 *pour unité.*

Preuve. 1° Comme Z et $\hat{N}$ sont dénombrables, $Z\times\hat{N}$ l'est aussi (proposition 4-10); l'ensemble quotient Q' est donc dénombrable ou fini (proposition 1-10), de même que l'ensemble équipotent Q; ce dernier contenant Z, il est dénombrable.

2° Soient q et q' deux nombres rationnels, (z,n) et (x,m) des représentants de q, (z',n') et (x',m') des représentants de q'. Des égalités $zm = xn$ et $z'm' = x'n'$, on déduit

$$(z'n+zn')m'm = (z'nm'm)+(zn'm'm) = (x'n'nm)+(xnn'm') =$$
$$= (x'm+xm')n'n,$$

c'est-à-dire $(z'n+zn')/n'n = (x'm+xm')/m'm$. Ainsi κ_Q est bien définie. En particulier, si y et y' appartiennent à Z, on obtient

$$\kappa_Q(y',y) = \kappa_Q(y'/1,y/1) = (y'+y)/1 = y'+y,$$

de sorte que Z^+ est un sous-magma de $Q^+ = (Q,\kappa_Q)$; pour tout $(q',q) \in Q\times Q$, nous poserons $q'+q = \kappa_Q(q',q)$. Remarquons que l'on a

$$\frac{z'}{n} + \frac{z}{n} = \frac{z'n+zn}{nn} = \frac{z'+z}{n} = \frac{z+z'}{n} = \frac{z}{n} + \frac{z'}{n}.$$

Ainsi Q^+ est commutatif. Trois nombres rationnels ayant des représentants de même dénominateur, l'égalité

$$\frac{z''}{n} + (\frac{z'}{n} + \frac{z}{n}) = \frac{z''+z'+z}{n} = (\frac{z''}{n} + \frac{z'}{n}) + \frac{z}{n}$$

montre l'associativité de Q^+. Evidemment 0 est l'unité de Q^+ et z/n admet $(-z)/n$ pour inverse dans Q^+. Par suite Q^+ est un groupe commutatif.

3° Si (z,n) et (x,m) sont des représentants de $q \in Q$, (z',n') et (x',m') des représentants de $q' \in Q$, on trouve d'une façon analogue

$$(z'z)(m'm) = x'n'xn = (x'x)(n'n),$$

ce qui prouve l'existence de κ'_Q. Si y et y' appartiennent à Z, alors

$$\kappa'_Q(y',y) = \kappa'_Q(y'/1,y/1) = y'y/1 = y'.y;$$

ainsi Z^* est un sous-magma de $Q^* = (Q,\kappa'_Q)$. Pour tout couple (q',q) de nombres rationnels, nous poserons

$$\kappa'_Q(q',q) = q'.q \quad (\text{ou même } = q'q).$$

La commutativité et l'associativité de Z^* ont pour conséquences celles de Q^*. L'élément 1 est une unité de Q^* et $q = z/n \neq 0$ a un inverse dans Q^*, noté q^{-1}, à savoir

$$n/z \quad \text{si} \quad z > 0 \quad \text{et} \quad (-n)/(-z) \quad \text{si} \quad z < 0.$$

4° La distributivité de Q^* sur Q^+ résulte de

$$(z''/m).((z'/n)+(z/n)) = (z''/m).((z'+z)/n) = (z''z'+z''z)/mn =$$
$$= (z''z'/mn)+(z''z/mn) = ((z''/m).(z'/n))+((z''/m).(z/n)).$$

Donc (Q^+,Q^*) est un corps. Si $(n,q) \in N\times Q$, on voit par récurrence que $n.q$ est l'itéré nq de Q^+, car $1.q = q$ entraîne $(n+1)q = (nq)+q = (n+1).q$.

5° Soit Q° un magma distributif sur Q^+, d'unité 1. Si $q = z/n \in Q$ et $q' = z'/n' \in Q$, par distributivité

$$n'n(q'\circ q) = (n'q')\circ(nq) = z'\circ z \text{ (exemple 1, §9)}.$$

Or, si $z' > 0$, on a

$$z'\circ z = (z'1)\circ z = z'(1\circ z) = z'z,$$

et, si $z' < 0$, alors $z'\circ z = -((-z')\circ z) = z'z$. Il s'ensuit

$$q'\circ q = (z'z)/n'n = q'.q.$$

COROLLAIRE. Si (E^+,E^*) est un corps, si (E^+,f,N^+) est un homomorphisme et si $f(1)$ est l'unité e de E^*, il existe un et un seul homomorphisme (E^+,h,Q^+) tel que f soit une restriction de h et que (E^*,h,Q^*) soit un homomorphisme.

Preuve. D'après le corollaire de la proposition 4-11, il existe un unique homomorphisme (E^+,g,Z^+) tel que f soit une restriction de g.

a) Montrons que (E^*,g,Z^*) est un homomorphisme. En effet, si $n \in N$ et $z \in Z$, on voit par récurrence que $g(nz)$ est l'itéré $ng(z)$ de $g(z)$ dans E^+, car ceci est vrai pour $n = 1$ et l'égalité $g(nz) = ng(z)$ entraîne

$$g((n+1)z) = g((nz)+z) = (ng(z))+g(z) = (n+1)g(z).$$

Il s'ensuit $g(n) = g(n1) = ng(1) = ne$, d'où

$$g(n.z) = ng(z) = n(e.g(z)) = (ne).g(z) = g(n).g(z),$$
$$g((-n).z) = g(-nz) = -g(nz) = (-g(n)).g(z) = g(-n).g(z).$$

b) Notons x^{-1} l'inverse de $x \in E$ dans E^*, et soit g' l'application $(z,n) \to g(z).g(n)^{-1}$ de $Z \times \hat{N}$ dans E. Si $(z',m) \sim (z,n) \bmod r$, i.e. si $z'n = zm$, on trouve $g(z').g(n) = g(z'n) = g(zm) = g(z).g(m)$, d'où

$g'(z,n) = g(z).g(n)^{-1} = g(z').g(n).g(m)^{-1}.g(n)^{-1} = g'(z',m)$,

puisque $g(m)^{-1}.g(n)^{-1} = g(nm)^{-1} = g(mn)^{-1} = g(n)^{-1}.g(m)^{-1}$. Ainsi g' est compatible avec r, et il existe une unique application h de Q dans E telle que $h(z/n) = g'(z,n)$.

c) Montrons que (E^*,h,Q^*) et $(E^*,h \circ^*)$ sont des homomorphismes. Soit $(q',q) \in Q \times Q$. Il existe des représentants (z,n) et (z',n) de q et q' de même dénominateur, et l'on obtient

$h(q'+q) = h((z'+z)/n) = g(z'+z).g(n)^{-1} = (g(z')+g(z)).g(n)^{-1}$

$= (g(z').g(n)^{-1}) + (g(z).g(n)^{-1}) = h(q')+h(q)$,

$h(q'.q) = g(z'z).g(n\,n)^{-1} = g(z').g(z).g(n)^{-1}.g(n)^{-1} =$

$= g(z').g(n)^{-1}.g(z).g(n)^{-1} = h(q').h(q)$,

l'égalité $g(n)^{-1}.g(z) = g(z).g(n)^{-1}$ résultant de

$g(z) = g(z).g(n).g(n)^{-1} = g(zn).g(n)^{-1} = g(n).g(z).g(n)^{-1}$.

Définition. (Q^+,Q^*) est appelé *corps des nombres rationnels*, κ_Q et κ'_Q *l'addition* et la *multiplication sur* Q.

Remarque. (Q^+,Q^*) s'identifie au corps des fractions associé à l'anneau intègre (Z^+,Z^*). La construction générale (voir cours d'Algèbre) a été un peu simplifiée, en introduisant Q' au lieu de l'ensemble Q'' quotient de $Z \times Z$, où $\hat{Z} = Z \setminus \{0\}$, par la relation d'équivalence r': $(z,y) \sim (z',y')$ ssi $zy' = z'y$. Ceci est possible, l'application

$$(z,n) \bmod r \to (z,n) \bmod r'$$

étant une bijection de Q' sur Q''.

Définition. Soient $(E,\propto)$ un ensemble ordonné, $A \subset E$. On dit que A est *dense dans* $(E,\propto)$ si, pour tout $(x,y) \in E \times E$ tel que $y \neq x \propto y$, il existe $a \in A$ tel que $a \neq x \propto a \propto y \neq a$. Si E est dense dans $(E,\propto)$, on dit que $(E,\propto)$ est *dense*.

PROPOSITION 3. L'ensemble $\underline{\rho}$ *des couples* $(q',q) \in Q \times Q$ *tels qu'il existe des représentants* (x,m) *de* q *et* (x',m) *de* q' *vérifiant* $x' \leq x$ *est le graphe d'un ordre total* ρ *sur* Q. *L'ensemble ordonné* $(Q,\leq)$ *correspondant est dense, sans premier ni dernier élément; il admet* $(Z,\leq)$ *pour sous-ensemble ordonné;* Z *est cofinal avec* $(Q,\leq)$ *et avec* $(Q,\geq)$.

Preuve. 1° Soient q et q' des nombres rationnels ayant des représentants (x,m) et (x',m) qui vérifient $x' \leq x$. Soient (z,n) et (z',n') d'autres représentants de q et q' respectivement. Comme $zm = xn$ et $z'm = x'n'$, on obtient

$$(z'n)m = x'n'n \leq xn'n = (zn')m ,$$

d'où, m étant positif, $z'n \leq zn'$. Ainsi $\underline{\rho}$ est contenu dans l'ensemble M des couples $(q',q) \in Q \times Q$ tels que, quels que soient les représentants (z,n) et (z',n') de q et de q', on ait $z'n \leq zn'$. Inversement, si (q',q) appartient à M, il existe des représentants (x,m) de q et (x',m) de q' de même dénominateur et $x'm \leq xm$ entraîne $x' \leq x$, donc $M \subset \underline{\rho}$. Au total $M = \underline{\rho}$. Remarquons que $\underline{\rho}$ est aussi l'ensemble des couples $(q',q) \in Q \times Q$ tels qu'il existe des représentants (z,n) de q et (z',n') de q' vérifiant $z'n \leq zn'$.

2° La relation $\rho = (Q,\underline{\rho},Q)$ est réflexive. Si (q'',q') et (q',q) appartiennent à $\underline{\rho}$, il existe des représentants (z,n) de q, (z',n) de q' et (z'',n) de q'' de même

dénominateur et, d'après la partie I, on a

$$z'' \leq z' \quad \text{et} \quad z' \leq z, \quad \text{c'est-à-dire} \quad z'' \leq z.$$

Par suite (q'',q) appartient à $\underline{\rho}$. En particulier si $q = q''$, alors $q' = q$, car $z = z'$ résulte de $z \leq z' \leq z$. Ceci prouve que (Q,ρ) est un ensemble ordonné. Comme $n' \leq n$ dans $(Z,\leq)$ équivaut à $(n'/1, n/1) \in \underline{\rho}$, l'ordre induit par ρ sur Z est celui de $(Z,\leq)$. Nous associons aussi à ρ le symbole $\leq$.

3° Soient q et q' des nombres rationnels, (z,n) et (z',n) des représentants de q et q'. On a $z' \leq z$ ou $z \leq z'$, d'où $q' \leq q$ ou $q \leq q'$. Ainsi $(Q,\leq)$ est totalement ordonné. Si $q' < q$, i.e. si $z' < z$, le nombre rationnel $\hat{q} = (2z'+1)/2n$ vérifie $q' < \hat{q} < q$, puisque $q = 2z/2n$, $q' = 2z'/2n'$ et $2z' < 2z'+1 < 2(z'+1) \leq 2z$. Par suite $(Q,\leq)$ est dense.

4° Si $q = z/n \in Q$, on a l'une des relations

$$0 \leq q \leq z \quad \text{ou} \quad z \leq q \leq 0.$$

Donc Z est cofinal avec $(Q,\leq)$ et avec $(Q,\geq)$. A fortiori, $(Q,\leq)$ n'a ni premier ni dernier élément.

COROLLAIRE 1. L'application $q \to -q$ de Q dans Q définit un isomorphisme de $(Q,\leq)$ sur $(Q,\geq)$ et κ'_Q une application ordonnée de $(Q,\leq)\times(Q,\leq)$ vers $(Q,\leq)$. Si $q' \leq q$ et si $0 \leq \hat{q}' \leq \hat{q}$, on a $\hat{q}'.q' \leq \hat{q}.q$, lorsque $q' \geq 0$ ou $\hat{q}' = \hat{q}$.

En effet, ceci se déduit des propriétés analogues de $(Z,\leq)$, montrées précédemment.

COROLLAIRE 2. Soient $\hat{n} \in \hat{N}$ et $b \in \hat{N}\setminus\{1\}$. Si l'on a $q' < q$ dans $(Q,\leq)$, il existe des entiers relatifs z, x et $m > \hat{n}$ tels que $z \leq q' < z+(x/b^m) < q$ et $0 < x < b^m$.

Preuve. L'ensemble des $n \in N$ tels que $b^n \leq (q-q')^{-1}$ étant fini, il existe $m > \hat{n}$ vérifiant $(1/b^m) < q-q'$. En notant z le dernier élément de $\{z' \in Z \mid z' \leq q\}$ et x le premier élément de $\{x' \in Z \mid b^m(q'-z) < x'\}$, on trouve $x < b^m$, $z \leq z+((x-1)/b^m) \leq q' < z+(x/b^m) \leq q'+(1/b^m) < q$.

Définition. On appelle $(Q,\leq)$ (proposition 3) *l'ensemble ordonné des nombres rationnels.* Un élément q de Q est dit *positif* si $0 \leq q$, *négatif* si $q \leq 0$.

Soit (E,α) un ensemble totalement ordonné; il est dense ssi l'ensemble ordonné opposé est dense. Si x et y sont deux éléments de E et si $x \alpha y$, nous notons $]x,y[$ l'intervalle "ouvert" formé des $z \in E$ tels que

$$x \neq z \neq y \quad \text{et} \quad x \alpha z \alpha y.$$

Cet intervalle est vide ssi y est le suivant de x ; il s'ensuit que (E,α) est dense ssi aucun élément de E n'admet de suivant. En particulier un ensemble ordonné pseudo-discret ou discret ayant plus d'un élément n'est pas dense.

Soit A une partie de E. Si A est dense dans (E,α), le sous-ensemble ordonné (A,α) est dense, ainsi que (E,α). Si (E,α) est dense et si A contient $]x,y[$ lorsque $x \in A$ et $y \in A$, alors (A,α) est dense; par exemple une section ordonnée de (E,α) est dense.

PROPOSITION 4. Soient (E,α) un ensemble totalement ordonné, x et y des éléments de E tels que $x \alpha y$ et $x \neq y$, et A une partie dense dans (E,α). Alors $E' = A \cap]x,y[$ et Γ sont infinis. Si B est dense dans (A,α), il est dense

dans (E,α). *Si* $A' \subset A$ *et si* (A',α) *est discret (par exemple si* A' *est fini),* $A \setminus A'$ *est dense dans* (E,α).

Preuve. 1° Le sous-ensemble ordonné (E',α) de l'ensemble ordonné dense (A,α) étant dense, il ne peut pas être discret. Or, si E' était fini, (E',α) serait discret d'après la proposition 2-8. Donc E', et a fortiori E, sont infinis.

2° Il existe $a \in A \cap]x,y[$ et $a' \in A \cap]a,y[$, car A est dense dans (E,α). Si B est dense dans (A,α), il existe $b \in B \cap]a,a'[\subset B \cap]x,y[$; ainsi B est dense dans (E,α).

3° Soient (A',α) un sous-ensemble ordonné discret de (A,α) et $A'' = A \setminus A'$. Comme $(A' \cap]x,y[,\alpha)$ est discret tandis que (E',α) est dense, on a $E' \neq A' \cap]x,y[$, de sorte qu'il existe un $a \in E'$ n'appartenant pas à A' ; donc $a \in A'' \cap]x,y[$, et A'' est dense dans (E,α).

PROPOSITION 5. Soient (E,α) *et* (E',α') *des ensembles totalement ordonnés denses sans premier ni dernier élément. Si* E *et* E' *sont dénombrables,* (E,α) *et* (E',α') *sont isomorphes.*

Preuve. Puisque E et E' sont dénombrables, il existe des bijections f et f' de N sur E et sur E'. Pour tout entier n, soit

$A_n = \{f(m) \mid m \leq n\}$ et $A'_n = \{f'(m) \mid m \leq n\}$.

Considérons l'ensemble B des bijections b d'une partie finie $\alpha(b)$ de E sur une partie finie $\beta(b)$ de E', définissant un isomorphisme du sous-ensemble ordonné $(\alpha(b),\alpha)$ sur $(\beta(b),\alpha')$. Soit C l'ensemble des couples

$(b,n) \in B \times N$ tels que $A_n \subset \alpha(b)$, $A'_n \subset \beta(b)$.

En particulier, on a $(b_0,0) \in C$, où b_0 est l'application

$f(0) \to f'(0)$ de $\{f(0)\}$ sur $\{f'(0)\}$.

Nous allons définir une application g de C dans C. Soient $(b,n) \in C$, $x = f(n+1)$ et $x' = f'(n+1)$. Si x appartient à $\alpha(b)$ et x' à $\beta(b)$, posons

$$g(b,n) = (b,n+1).$$

Supposons maintenant $x \notin \alpha(b)$.

1° Prolongeons b en une bijection b' d'ensemble source $\alpha(b) \cup \{x\}$. Comme (E',α') est dense et $\beta(b)$ fini, $A'' = E' \setminus \beta(b)$ est dense dans (E',α') (proposition 4).

a) Si x majore (resp. minore) $\alpha(b)$ dans (E,α), l'ensemble des $m \in N$ tels que $f'(m) \in A''$ et que $f'(m)$ majore (resp. minore) $\beta(b)$ a un premier élément $\hat{m}$; posons $b'(x) = f'(\hat{m})$.

b) Dans le cas contraire, $(\alpha(b),\alpha)$ étant discret, les ensembles $\overleftarrow{x} \cap \alpha(b)$ et $\overrightarrow{x} \cap \alpha(b)$ ont respectivement un dernier élément $f(m')$ et un premier élément $f(m'')$. L'ensemble des entiers m tels que

$$f'(m) \in A'' \cap]b(f(m')),b(f(m''))[$$

n'étant pas vide, il a un premier élément $\hat{m}$; posons alors $b'(x) = f'(\hat{m})$.

c) L'application b':

$y \to b(y)$ si $y \in \alpha(b)$, $x \to b'(x)$

est une bijection de $\alpha(b') = \alpha(b) \cup \{x\}$ sur une partie $\beta(b')$ de E'. D'après sa construction, elle définit un isomorphisme de $(\alpha(b'),\alpha)$ sur $(\beta(b'),\alpha')$, c'est-à-dire elle appartient à B.

2° Si x' appartient à $\beta(b')$, on a $(b',n+1) \in C$, et nous poserons $g(b,n) = (b',n+1)$. Si x' n'appartient

pas à $\beta(b')$, un raisonnement analogue fait en remplaçant dans la partie I b par b' et en échangeant les rôles de (E,α) et de (E',α') permet de construire une bijection $b'' \in B$ d'une partie $\alpha(b'')$ de E contenant $\alpha(b')$ sur $\beta(b'') = \beta(b') \cup \{x'\}$, prolongeant b'; nous poserons

$$g(b,n) = (b'',n+1) \in C.$$

3° Nous obtenons ainsi une application g:

$$(b,n) \to g(b,n) \quad \text{de} \quad C \quad \text{dans} \quad C$$

telle que $g(b,n) = (\hat{b},n+1)$, où $\hat{b}$ admet b pour restriction. La construction par récurrence peut s'appliquer; elle assure l'existence d'une unique application h de N dans B telle que $h(0) = b_0$,

$$(h(n),n) \in C \quad \text{et} \quad (h(n+1),n+1) = g(h(n),n)$$

pour tout entier n. Une démonstration analogue à celle du corollaire de la proposition 4-8 montre que la famille

$$(b_n)_{n\in N}, \quad \text{où} \quad b_n = h(n),$$

d'applications est compatible; soit k sa réunion. Comme A_n est contenu dans $\alpha(b_n)$ et A'_n dans l'image de b_n, k est une surjection de

$$E = \bigcup_{n\in N} A_n \quad \text{sur} \quad E' = \bigcup_{n\in N} A'_n.$$

Deux éléments de E appartenant à un même $\alpha(b_n)$ et b_n étant une bijection définissant un isomorphisme, k est une injection et $((E',\alpha'),k,(E,\alpha))$ une application ordonnée; c'est un isomorphisme, (E,α) étant totalement ordonné.

COROLLAIRE 1. Si (E,α) est un ensemble totalement ordonné sans premier ni dernier élément et dense, et si est dénombrable, (E,α) est isomorphe à $(Q,\leq)$.

En effet, ceci résulte de la proposition, puisque Q est dénombrable (proposition 2) et $(Q,\leq)$ dense.

COROLLAIRE 2. Soient (E,α) un ensemble totalement ordonné dense, q et q' des nombres rationnels et $q' < q$. Si E est dénombrable, (E,α) est isomorphe au sous-ensemble ordonné $(A,\leq)$ de $(Q,\leq)$, où A est identique à $]q',q[$ si (E,α) n'a ni premier ni dernier élément, à $]q',q[\cup \{q\}$ (resp. à $]q',q[\cup \{q'\}$) si (E,α) a un dernier (resp. premier) élément, à $]q',q[$ si (E,α) a un premier et un dernier élément.

En effet, les ensembles ordonnés obtenus en ôtant de A et de E leurs premiers et derniers éléments (s'ils existent) sont denses, sans premiers ni derniers éléments; par suite ils sont isomorphes (proposition 5) et, a fortiori, $(A,\leq)$ et (E,α) sont isomorphes.

PROPOSITION 6. Soient (E,α) un ensemble totalement ordonné dense où E a plus d'un élément et (T,α') un ensemble totalement ordonné. Si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix et si T est dénombrable, (T,α') est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de (E,α).

Preuve. On peut supposer que (E,α) n'a ni premier ni dernier élément (car, s'il en a, en les enlevant on obtient un ensemble ordonné dense sans premier ni dernier élément). Soit f une bijection de N sur T. Considérons l'ensemble B des injections b d'une section propre $\alpha(b)$ de N dans E telles que les conditions

$$n \in \alpha(b), \quad m \in \alpha(b) \quad \text{et} \quad f(m) \alpha' f(n)$$

entraînent $b(m) \alpha b(n)$.

1° Soient $b \in B$ et $\alpha(b) = \overleftarrow{n}$. Montrons que l'ensem-

ble B_b des injections appartenant à B, ayant $\overleftarrow{n}$ pour ensemble source et admettant b pour restriction n'est pas vide. En effet, notons A l'image de b et A' l'image de $\alpha(b)$ par f. Puisque A est fini, E\A est dense et A est majoré et minoré dans (E,α).

- Si f(n) majore (resp. minore) A' dans (T,α'), soit b'(n) un majorant (resp. minorant) strict de A.

- Dans le cas contraire, comme A' est fini, (A',α') est discret et l'ensemble des entiers $m < n$ tels que

$$f(m) \alpha' f(n) \quad \text{(resp. que } f(n) \alpha' f(m)\text{)}$$

a un dernier élément $\hat{m}$ (resp. un premier élément $\hat{m}'$) dans N. L'intervalle $]b(\hat{m}),b(\hat{m}')[$ de (E,α) n'est pas vide; désignons par b'(n) l'un de ses éléments.

- L'application $b' : m \to b(m)$ si $m < n$, $n \to b'(n)$ de $\overleftarrow{n}$ dans E appartient à B_b.

2° D'après la partie I et l'axiome du choix, il existe une application g de B dans B telle que $g(b) \in B_b$ pour tout $b \in B$. Si $x \in E$, l'application b_0:

$$0 \to x \quad \text{de } \{0\} \text{ dans } E$$

appartient à B. Le corollaire de la proposition 4-8 assure l'existence d'une unique application h de N dans E telle que $h(0) = x$,

$$h/\overleftarrow{n} \in B \quad \text{et} \quad g(h/\overleftarrow{n}) = h/\overleftarrow{n}$$

pour tout entier n. Puisque $h/\overleftarrow{n}$ appartient à B, l'application h est une injection, de même que $h \circ f^{-1}$; si $f(n) \alpha' f(m)$ et si $\hat{n}$ majore n et m, on a

$$h(n) = (h/\overleftarrow{\hat{n}})(n) \alpha (h/\overleftarrow{n})(m) = h(m),$$

de sorte que $h \circ f^{-1}$ définit une application ordonnée de (T,α') vers (E,α). La proposition en résulte.

13. *Complétion des ensembles ordonnés denses.*

Définition. Un ensemble ordonné (E,α) est dit *complet* si toute partie non vide de E majorée dans (E,α) admet une borne supérieure dans (E,α).

Par exemple un ensemble ordonné discret ou pseudo-discret est complet.

Soit (E,α) un ensemble ordonné. D'après la proposition 3-5 il est complet ssi toute partie non vide minorée dans (E,α) admet une borne inférieure. Comme une partie A de E admet x pour borne supérieure ssi la section de (E,α) engendrée par A a x pour borne supérieure, (E,α) est complet ssi toute section majorée a une borne supérieure dans (E,α).

Supposons (E,α) totalement ordonné. Une section S est majorée ssi elle est propre ou si (E,α) a un dernier élément qui appartient à S. Il résulte de la caractérisation des bornes supérieures d'une section (proposition 2-5) que (E,α) est complet ssi toute section propre S vérifie l'une des conditions suivantes:

S a un dernier élément,

E\S a un premier élément.

Si de plus (E,α) est dense, S vérifie au plus l'une de ces conditions, car si x est un dernier élément de S et y un premier élément de E\S, alors y est le suivant de x, ce qui est impossible.

Soit A une partie de E. Nous désignerons toujours par $\overleftarrow{x}$ la section de (E,α) associée à $x \in E$ et, si $x \alpha y$, par $]x,y[$ l'intervalle ouvert de (E,α) correspon-

dant (§ 12). Par contre, si $x \in A$, la section de (A,α) associée à x est notée ${}^{\leftarrow}x \cap A$ (pour éviter les confusions). Nous munirons toute partie de l'ensemble des sections de (A,α) de l'ordre induit par le treillis $(P(A),\subset)$.

PROPOSITION 1. Soient (E,α) un ensemble totalement ordonné sans premier ni dernier élément, A une partie dense dans (E,α) et $(L,\subset)$ l'ensemble ordonné des sections propres de (A,α), non vides sans dernier élément. Alors $(L,\subset)$ est complet, l'application $j: x \to {}^{\leftarrow}x \cap A$ de E dans L est une injection, $j(E)$ est dense dans $(L,\subset)$ et $x = \forall j(x)$ dans (E,α). De plus j est une bijection ssi (E,α) est complet.

Preuve. 1° Si M est une partie non vide de L majorée par $S \in L$, l'ensemble $\bigcup M$ est une section de (A,α) contenue dans S, donc propre et sans dernier élément; c'est la borne supérieure de M dans $(P(A),\subset)$ et, a fortiori, dans $(L,\subset)$. Ainsi $(L,\subset)$ est complet.

2° Soient $x \in E$ et $j(x) = {}^{\leftarrow}x \cap A$. Alors $j(x)$ est une section de (A,α). Comme x n'est ni le premier ni le dernier élément de (E,α), il a un minorant strict z' et un majorant strict z dans (E,α); les ensembles non vides $]z',x[\cap A$ et $]x,z[\cap A$ sont contenus respectivement dans $j(x)$ et dans $A \setminus j(x)$, de sorte que $j(x)$ est une section propre non vide. x est un majorant strict de $j(x)$ dans (E,α); soit y un majorant de $j(x)$ dans (E,α) tel que $y \alpha x$. Si $y \neq x$, il existe $y' \in]y,x[\cap A \subset j(x)$, ce qui est impossible. Donc x est la borne supérieure de $j(x)$ dans (E,α). Il s'ensuit que $j(x)$ appartient à L et que j est une injection.

3° Soient S et S' deux éléments de L tels que

$S' \subset S$. Si $S' \neq S$, il existe $x \in S \setminus S'$ et x est un majorant strict de S'. Comme S n'a pas de dernier élément, il existe un $y \in S$ tel que $x \alpha y \neq x$, et, A étant dense dans (E,α), il existe $a \in A \cap]x,y[$. Il s'ensuit

$$S' \subset j(a) \subset S \quad \text{et} \quad S' \neq j(a) \neq S,$$

car x appartient à $j(a) \setminus S'$ et y à $S \setminus j(a)$. Ceci prouve que $j(A)$ est dense dans $(L,\subset)$.

4° j définit une application ordonnée $\hat{j}$ de (E,α) vers $(L,\subset)$. Si j est une bijection, $\hat{j}$ est un isomorphisme puisque $(L,\subset)$ est totalement ordonné; dans ce cas, $(L,\subset)$ étant complet, (E,α) l'est aussi. Inversement si (E,α) est complet et si $S \in L$, alors S admet une borne supérieure x dans (E,α) et $S \subset j(x)$. Par ailleurs $j(x) \subset S$, un élément z de $j(x) \setminus S$ devant être un majorant strict de S, c'est-à-dire vérifier $x \alpha z$, ce qui est impossible. Par conséquent $S = j(x)$ et j est une surjection.

COROLLAIRE. Si (E,α) est un ensemble totalement ordonné dense sans premier ni dernier élément et L l'ensemble de ses sections propres non vides sans dernier élément, (E,α) est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de $(L,\subset)$, qui est identique à $(L,\subset)$ ssi (E,α) est complet. De plus $(L,\subset)$ n'a ni premier ni dernier élément.

Définition. Si (E,α) est un ensemble totalement ordonné dense sans premier ni dernier élément, l'ensemble ordonné $(L,\subset)$ de ses sections propres non vides sans dernier élément est appelé *complétion* de (E,α), et l'application $j: x \to {}^{\leftarrow}x$ de E dans L *injection canonique* de E dans L.

L'injection canonique j définit une application ordonnée $\hat{j}$ de (E,α) vers sa complétion $(L,\subset)$ et $j(E)$ est dense dans $(L,\subset$ d'après la proposition 1. $\hat{j}$ est un isomorphisme ssi $(E,\alpha$ est complet.

PROPOSITION 2. Soient (E,α) un ensemble ordonné sans élément maximal ni minimal, $A \subset E$ et A dense dans (E,α) et $((E',\alpha'),g,(A,\alpha))$ une application ordonnée, où $(E',\alpha'$ est complet. Il existe une application ordonnée $((E',\alpha'),\hat{g},(E,\alpha))$ telle que $\hat{g}$ admette g pour restriction; si (E,α) est totalement ordonné, $\hat{g}$ est une injection ssi g en est une; si, pour tout $x \in E$, $g(A \cap (\overleftarrow{x} \cup x^{\rightarrow}))$ est dense dans l'intervalle ordonné de (E',α') qu'il engendre, alors $\hat{g}$ est unique.

Preuve. Soit $x \in E$; nous posons $\overleftarrow{x} = \overleftarrow{x} \cup \{x\}$ (§ 5),

$$A'_x = A \cap \overleftarrow{x} \quad \text{et} \quad A_x = A \cap x^{\mapsto} = \{a \in A \mid x \alpha a\}.$$

x n'étant ni minimal ni maximal, il a un minorant strict $\check{x}'$ et un majorant strict $\hat{x}$ dans (E,α), et il existe

$$a' \in A \cap]\check{x}', x[\subset A'_x \quad \text{et} \quad a \in A \cap]x, \hat{x}[\subset A_x.$$

Dans l'ensemble ordonné complet (E',α'), la partie non vide $g(A'_x)$ majorée par $g(a)$ admet une borne supérieure $i'(x)$ et la partie non vide $g(A_x)$, minorée par $g(a')$, a une borne inférieure $i(x)$. Comme $i'(x)$ minore $g(A_x)$, on a $i'(x) \alpha' i(x)$. Supposons $x' \in E$, $x \neq x' \alpha x$. Par hypothèse, il existe

$$y \in A \cap]x', x[\subset A'_x \quad \text{et} \quad y' \in A \cap]x', y[\subset A_{x'}.$$

Il s'ensuit

$$i'(x') \alpha' i(x') \alpha' g(y') \alpha' g(y) \alpha' i'(x).$$

1° Supposons qu'il existe une application $\hat{g}$ ayant les propriétés voulues. $\hat{g}(A'_x) = g(A'_x)$ étant majoré par

$\hat{g}(x)$ et $\hat{g}(A_x) = g(A_x)$ minoré par $\hat{g}(x)$, on trouve

$$i'(x) \alpha' \hat{g}(x) \alpha' i(x).$$

Si $x' \in E$ et $x' \neq x$, $x' \alpha x$, on obtient avec les notations ci-dessus

$$\hat{g}(x') \alpha' i(x') \alpha' g(y') \alpha' g(y) \alpha' i'(x) \alpha' \hat{g}(x).$$

Ceci entraîne $\hat{g}(x') \neq \hat{g}(x)$ si $g(y') \neq g(y)$. En particulier, si (E,α) est totalement ordonné, $\hat{g}$ est une injection ssi g en est une.

2° Supposons $B_x = g(A'_x \cup A_x)$ dense dans l'intervalle ordonné (J_x,α') de (E',α') qu'il engendre. $i(x)$ et $i'(x)$ appartiennent à J_x, car

$$g(a') \alpha' i'(x) \alpha' i(x) \alpha' g(a) \quad \text{si} \quad a' \in A'_x, \ a \in A_x.$$

Si $i'(x) \neq i(x)$, il existe $z \in A'_x \cup A_x$ tel que

$$g(z) \in B_x \cap]i'(x), i(x)[;$$

mais ceci est impossible, $g(A'_x)$ étant majoré par $i'(x)$ et $g(A_x)$ minoré par $i(x)$. Il en résulte $i'(x) = i(x)$, de sorte qu'il existe au plus une application $\hat{g}$, celle-ci associant à x l'élément $i'(x)$.

3° Montrons que, dans tous les cas, l'application $\hat{g}$:

$$x \to i'(x) \quad \text{de } E \text{ dans } E'$$

a les propriétés énoncées. Si $x \in A$, alors

$$g(x) \in g(A'_x), \quad \text{d'où} \quad g(x) = i'(x) = \hat{g}(x).$$

De plus $((E',\alpha'),\hat{g},(E,\alpha))$ est une application ordonnée, car, comme nous l'avons vu au début, $x' \alpha x$ entraîne

$$\hat{g}(x') = i'(x') \alpha' i'(x) = \hat{g}(x).$$

COROLLAIRE. Soient (E,α) un ensemble totalement ordonné sans premier ni dernier élément, (E',α') un ensemble ordonné complet, A une partie de E dense dans (E,α) et $((E',\alpha'),g,(A,\alpha))$ une application ordonnée telle que $g(A)$

soit dense dans l'intervalle ordonné (J,α') *de* (E',α') *qu'il engendre; alors il existe une et une seule application ordonnée* $((E',\alpha'),\hat{g},(E,\alpha))$ *telle que* $\hat{g}$ *ait* g *pour restriction;* $\hat{g}$ *est une injection ssi* g *en est une. Si* (E,α) *est complet, on a* $\hat{g}(E) = J$.

Preuve. (E,α) n'a ni élément maximal ni élément minimal et A y est dense; de plus $A \cap (\overleftarrow{x} \cup x\overrightarrow{})$ $= A$ pour tout élément x de E. Ainsi la proposition s'applique, et elle assure l'existence et l'unicité de $\hat{g}$, et l'injectivité de $\hat{g}$ ssi g est injective. Supposons (E,α) complet et montrons que $\hat{g}(E) = J$. En effet, si $z \in J \setminus g(A)$, il existe des éléments a et a' de A tels que

$$z \neq g(a) \alpha' z \alpha' g(a') \neq z .$$

L'ensemble S des $x \in A$ tels que $g(x) \alpha' z$ est une section non vide de (A,α), majorée par a'; il en résulte que S a une borne supérieure $\hat{x}$ dans l'ensemble ordonné complet (E,α). Puisque $g(A)$ est dense dans (J,α') et $z \notin g(A)$, l'ensemble $g(S) = \overleftarrow{z} \cap g(A)$ n'a pas de dernier élément, et z est sa borne supérieure. S n'ayant pas non plus de dernier élément, on a $S = \overleftarrow{\hat{x}} \cap A$, d'où $z = \hat{g}(\hat{x})$.

Définition. On appelle *magma ordonné*, et l'on note (A^*,α) un couple $((A,\alpha),A^*)$, où (A,α) est un ensemble totalement ordonné et $A^* = (A,\kappa)$ un magma tel que $((A,\alpha),\kappa,(A,\alpha)\times(A,\alpha))$ soit une application ordonnée.

PROPOSITION 3. Supposons que (E,α) *soit un ensemble totalement ordonné complet sans premier ni dernier élément et* A *une partie de* E *dense dans* (E,α). *Si* (A^*,α), *où* $A^* = (A,\kappa)$, *est un magma (resp. magma commutatif) ordonné, il*

existe un magma (resp. magma commutatif) ordonné (E^*,α) *tel que* A^* *soit un sous-magma de* E^*. *Si* A^* *est associatif et* $\kappa(S_a \times S_b)$ *cofinal avec* $(S_{a.b},\alpha)$ *pour tout* $(a,b) \in A\times A$, *où* $S_a = \overleftarrow{a} \cap A$, *il existe un tel* E^* *associatif; cette condition est vérifiée en particulier si* A^* *est un groupe.*

Preuve. Si $(x,y) \in E\times E$, soit $C_{xy} = (\overleftarrow{x} \cap A)\times(\overleftarrow{y} \cap A)$. Comme par hypothèse il existe $a \in A \cap x\overrightarrow{}$ et $b \in A \cap y\overrightarrow{}$, $\kappa(C_{xy})$ est majoré par $a.b$, et par suite il admet une borne supérieure dans (E,α) (qui est complet); notons-la $\hat{\kappa}(x,y)$. Si $x' \alpha x$ et $y' \alpha y$, on a $C_{x'y'} \subset C_{xy}$, d'où $\hat{\kappa}(x',y') \alpha \hat{\kappa}(x,y)$. Ainsi l'application $\hat{\kappa}$:

$$(x,y) \to \hat{\kappa}(x,y) \quad \text{de } E\times E \text{ dans } E$$

définit une application ordonnée de $(E,\alpha)\times(E,\alpha)$ vers (E,α), i.e. $((E,\hat{\kappa}),\alpha)$ est un magma ordonné. Lorsque $(x,y) \in A\times A$, $x.y = \hat{\kappa}(x,y)$, car (x,y) est le dernier élément de C_{xy}. Il s'ensuit que A^* est un sous-magma de $(E,\hat{\kappa})$. Nous poserons $x.y = \hat{\kappa}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E\times E$, et $E^* = (E,\hat{\kappa})$.

1° Si e est une unité de A^*, les applications

$$f: x \to x.e \quad \text{et} \quad f': x \to e.x$$

de E dans E définissent des applications ordonnées de (E,α) vers (E,α) et ont ι_A pour restriction à (A,A). Comme $f(A) = A = f'(A)$ est dense dans (E,α), d'après le corollaire de la proposition 2 on a $f = \iota_E = f'$. Ainsi e est une unité de E^*. Si A^* est commutatif, alors

$$a.b = b.a \quad \text{pour tout } (a,b) \in A\times A$$

entraîne $x.y = y.x$ si $(x,y) \in E\times E$, c'est-à-dire E^* est commutatif.

2° Posons $S_x = x \cap A$ pour tout $x \in E$ et supposons que $\kappa(S_a \times S_b)$ est cofinal avec $(S_{a.b},\alpha)$ pour tout élément (a,b) de $A\times A$.

a) Montrons que, si $(x,y) \in E\times E$, le composé $x.y$ est la borne supérieure de $M = \kappa(S_x \times S_y)$. En effet, si z est cette borne supérieure (qui existe, (E,α) étant complet), on a $z \alpha x.y$. Si $z \neq x.y$, il existe

$$c \in A \cap]z, x.y[\quad \text{et} \quad d \in A \cap]c, x.y[,$$

car A est dense dans (E,α). Par définition du composé, il existe des éléments a et b de A tels que

$$a \alpha x, \quad b \alpha y \quad \text{et} \quad c \alpha d \alpha a.b \alpha x.y.$$

Par hypothèse, il existe $a' \in S_a$ et $b' \in S_b$ tels que

$$c \alpha a'.b' \alpha a.b.$$

Comme $a'.b'$ appartient à M, on a $c \alpha a'.b' \alpha z$, ce qui est impossible. Donc $x.y = z$ est la borne supérieure de M.

b) Montrons que E^* est associatif si A^* l'est. Soient x, y et z trois éléments de E. Les composés $\hat{x} = x.(y.z)$ et $\hat{x}' = (x.y).z$ sont respectivement les bornes supérieures de

$$M = \kappa(S_x \times S_{y.z}) \quad \text{et de} \quad M' = \kappa(S_{x.y} \times S_z).$$

Si $a \in S_x$ et $d \in S_{y.z}$, il existe $b \in S_y$ et $c \in S_z$ tels que $d \alpha b.c \alpha y.z$, le composé $y.z$ étant la borne supérieure de $\kappa(S_y \times S_z)$. Il s'ensuit

$$a.d \alpha a.(b.c) = (a.b).c \in M'.$$

D'une manière analogue, on voit que tout élément de M' est majoré par un élément de M. Donc M et M' ont la même borne supérieure, i.e. $\hat{x} = \hat{x}'$. Ceci prouve que E^* est associatif (resp. est un monoïde si A^* en est un).

3° Dans la fin de cette démonstration, nous supposons que A^* est un groupe et nous notons x^{-1} l'inverse de x dans A^*. Si $a' \alpha a$ dans (A,α), alors

$$a^{-1} = a^{-1}.a'.a'^{-1} \alpha a^{-1}.a.a'^{-1} = a'^{-1},$$

de sorte que la bijection $\sigma: x \to x^{-1}$ de A sur A défi-

nit un isomorphisme de (A,α) sur l'ensemble ordonné opposé. Si $(a,b) \in A\times A$ et $c \in S_{a.b}$, il existe $c' \in A \cap]c, a.b[$ en posant $a' = c'.b^{-1}$ et $b' = a'^{-1}.c$, on a $c = a'.b'$, $a \neq a' \alpha a.b.b^{-1} = a$, $b \neq b' \alpha a'^{-1}.c' = a'^{-1}.a'.b = b$. Par suite $\kappa(S_a \times S_b) = S_{a.b}$. A fortiori $\kappa(S_a \times S_b)$ est cofinal avec $(S_{a.b},\alpha)$ et, d'après la partie 3, E^* est un monoïde.

Définition. Avec les hypothèses de la proposition 3, on appelle *magma complétion de* A^* *relativement à* (E,α) le magma $E^* = (E,\hat{\kappa})$, où $\hat{\kappa}(x,y)$ est, pour tout $(x,y) \in E\times E$, la borne supérieure dans (E,α) de $\kappa((\overleftarrow{x} \cap A)\times(\overleftarrow{y} \cap A))$ (et par suite aussi, voir partie 2a ci-dessus, de $\kappa(S_x \times S_y)$, où $S_x = \overleftarrow{x} \cap A$, si $\kappa(S_a \times S_b)$ est cofinal avec $(S_{a.b},\alpha)$ pour tout $(a,b) \in A\times A$).

PROPOSITION 4. Avec les hypothèses de la proposition 3, supposons que (A^+,α) *et* (A^*,α) *soient des magmas ordonnés,* E^+ *et* E^* *les magmas complétions de* $A^+ = (A,\kappa)$ *et de* $A^* = (A,\kappa')$ *relativement à* (E,α). *Si* $\kappa(S_a \times S_b)$ *et* $\kappa'(S_a \times S_b)$ *sont cofinaux avec* (S_{a+b},α) *et* $(S_{a.b},\alpha)$ *respectivement pour tout* $(a,b) \in A\times A$, *où* $S_a = \overleftarrow{a} \cap A$, *et si* A^* *est distributif sur* A^+, *alors* E^* *est distributif sur* E^+.

Preuve. Soient x, y et z des éléments de E. Par définition, les composés $v = x.(y+z)$ et $v' = (x.y)+(x.z)$ sont respectivement les bornes supérieures de

$$M' = \kappa'(S_x \times S_{y+z}) \quad \text{et de} \quad M = \kappa(S_{x.y} \times S_{x.z}).$$

Si $a \in S_x$ et $d \in S_{y+z}$, il existe $b \in S_y$ et $c \in S_z$ tels que $d \alpha b+c$, d'où

$$a.d \alpha a.(b+c) = (a.b)+(a.c) \in M.$$

Si $d' \in S_{x.y}$ et $d'' \in S_{x.z}$, il existe des éléments a

et a' de S_x, b de S_y et c de S_z tels que l'on ait $d' \propto a.b$ et $d'' \propto a'.c$. Si $a'' = aVa'$, on en déduit

$$d'+d'' \propto (a'',b)+(a'',c) = a''.(b+c) \in M'$$

Donc M et M' sont cofinaux, et l'on a $v = v'$. On prouve de même que $(x+y).z = (x.z)+(y.z)$.

Définttion. On appelle *groupe archimédien* un magma ordonné $(A^*,\propto)$ tel que A^* soit un groupe d'unité e, vérifiant l'axiome suivant, dit *axiome d'Archimède:*

Pour tout $a \in e^{\rightarrow}$ et tout $c \in e^{\rightarrow}$, il existe un entier n tel que $a \propto c^{*n}$ (= itéré d'ordre n de c dans A^*).

Soit $(A^*,\propto)$ un groupe archimédien; alors $(A,\propto)$ est un ensemble totalement ordonné sans premier ni dernier élément (sauf si $A = \{e\}$). Si C^* est un sous-groupe de A^*, $(C^*,\propto)$ est un groupe archimédien, dit *sous-groupe archimédien de* $(A^*,\propto)$ défini par C. Soit $(B^*,\propto')$ un autre groupe archimédien; on dit qu'il est *isomorphe* à $(A^*,\propto)$ s'il existe une bijection g telle que $((B,\propto'),g,(A,\propto))$ soit un isomorphisme et (B^*,g,A^*) un homomorphisme (dans ce cas, B^* est l'image de A^* par g et $(B,\propto')$ l'image de $(A,\propto)$ par g); le triplet $((B^*,\propto'),g,(A^*,\propto))$ est appelé *isomorphisme entre groupes archimédiens*, et l'on dit que $(B^*,\propto')$ est *le groupe archimédien image de* $(A^*,\propto)$ *par* g.

PROPOSITION 5. Reprenons les hypothèses de la proposition 3 et supposons que A^* *soit un groupe d'unité* e *et* E^* *son magma complétion dans* $(E,\propto)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes: 1° (resp. 2°) Si* $c \in A \cap e^{\rightarrow}$ *et* $x \in E \cap e^{\rightarrow}$, *il existe* $a \in {}^{\leftarrow}x \cap A$ *tel que* $x \propto a.c \neq x$ (*resp. tel que* $c.a \propto x$); *3°* $(A^*,\propto)$ *est un groupe archimédien; 4°* E^* *est un groupe. Si elles sont vérifiées,* $(E^*,\propto)$ *est un groupe archimédien et c'est l'unique magma ordonné tel que* A^* *soit un sous-magma de* E^*.

Preuve. Posons $A' = A \cap e^{\rightarrow}$ et $S_x = {}^{\leftarrow}x \cap A$ si $x \in E$.

1° Supposons la première (resp. la seconde) condition remplie et soient a et c des éléments de A'. Considérons l'ensemble M des itérés c^{*n}, où $n \in N$. Comme c est un majorant strict de e, on a

$$c^{*n} \propto c^{*n}.c = c^{*(n+1)} \neq c^{*n}.$$

Si M est majoré par a, il admet une borne supérieure x dans l'ensemble ordonné complet $(E,\propto)$; pour tout $b \in S_x$, il existe un entier n tel que $b \propto c^{*n} \propto x$, de sorte que

$$b.c \text{ (resp. } c.b) \propto c^{*n}.c = c^{*(n+1)} \propto c^{*(n+2)} \propto x \neq b.c,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi il existe un n tel que $a \propto c^{*n}$, et l'axiome d'Archimède est vérifié.

2° Supposons $(A^*,\propto)$ archimédien et soient $c \in A'$ et $x \in E \cap e^{\rightarrow}$. Il existe $b \in A \setminus S_x$ et il existe un entier m tels que $b \propto c^{*m}$. L'ensemble des entiers n tels que $x \neq c^{*n} \propto x$ n'est pas vide, et il est majoré par m; aussi a-t-il un dernier élément $\hat{n}$ pour lequel

$$x \neq c^{*\hat{n}} \propto x \propto c^{*\hat{n}}.c = c.c^{*\hat{n}}.$$

Comme A est dense dans $(E,\propto)$, il existe $d \in A \cap]c^{*\hat{n}},x[$ et l'on trouve $x \propto d.c \neq x$ et $x \propto c.d \neq x$. Par conséquent les conditions 1 et 2 sont satisfaites.

3° Supposons $(A^*,\propto)$ archimédien. D'après la partie 3 de la démonstration de la proposition 3 dont nous reprenons les notations, l'application $o: x \to x^{-1}$ de A dans A définit un isomorphisme de $(A,\&)$ sur l'ensemble ordonné

opposé. D'après le corollaire de la proposition 2, il existe une unique application ordonnée $((E,\infty),\hat{o},(E,\alpha))$ telle que $\hat{o}$ admette o pour restriction; $\hat{o}(E)$ est l'intervalle de (E,α) engendré par A, c'est-à-dire E, et $\hat{o}$ est injective. Autrement dit, $\hat{o}$ définit un isomorphisme de (E,α) sur l'ensemble ordonné opposé. Soit $x \in E$ et montrons que $z = \hat{o}(x).x$ est identique à e. En effet, z est la borne supérieure de $M = \kappa(S_{\hat{o}(x)} \times S_x)$. Si $a \in S_x$ et $b \in S_{\hat{o}(x)}$, alors

$$a \propto x \propto b^{-1} \quad \text{et} \quad b.a \propto b.b^{-1} = e,$$

ce qui entraîne $z \propto e$. Supposons $z \neq e$. Comme A est dense dans (E,α), il existe $c \in A \setminus e^{\rightarrow}$ tel que

$$c^{-1} \neq z \propto c^{-1} \propto e.$$

a) Si $e \propto x$, il existe $a \in S_x$ tel que $x \propto a.c$; on en déduit

$$c^{-1}.a^{-1} = o(a.c) \propto \hat{o}(x),$$

et par suite

$$c^{-1} = c^{-1}.a^{-1}.a \propto \hat{o}(x).x = z.$$

b) Si $x \propto e$, alors $e \propto \hat{o}(x)$ et il existe de même $b \in S_{\hat{o}(x)}$ vérifiant $\hat{o}(x) \propto c.b$, ce qui donne

$$o(b.c) = b^{-1}.c^{-1} \propto x,$$

et $$c^{-1} = b.b^{-1}.c^{-1} \propto \hat{o}(x).x = z.$$

On obtient ainsi dans les deux cas une contradiction, de sorte que $z = e$. Une démonstration analogue prouve que $x.\hat{o}(x) = e$. Donc $\hat{o}(x)$ est l'inverse de x dans E^*. Nous le noterons x^{-1}. Ceci prouve que E^* est un groupe.

4° Supposons que (E,k') soit un magma admettant A^* pour sous-groupe et tel que $((E,\alpha),k',(E,\alpha)\times(E,\alpha))$ soit une application ordonnée. Soient x et y deux éléments de E. Si $A^* = (A,\nu)$, le composé $z = k'(x,y)$ majorant

$$k'(S_x \times S_y) = \kappa(S_x \times S_y),$$

on trouve $x.y \propto z$. Supposons $x.y \neq z$. Etant donné que A est dense dans (E,α) et que

$$x^{-1}.z.y^{-1} \neq e = x^{-1}.x.y.y^{-1} \propto x^{-1}.z.y^{-1},$$

il existe $d \in A \cap]e, x^{-1}.z.y^{-1}[$, i.e. $z \neq x.d.y \propto z$. Il existe aussi $t \in A \cap]e,d[$ et l'on a $d = t.t'$, avec

$$t' = t^{-1}.d \neq e \quad \text{et} \quad e = d^{-1}.d \propto t^{-1}.d = t'.$$

La condition I assure l'existence de a et b tels que

$$a \in S_x,\ a.t \neq x \propto a.t,\quad b \in S_y,\ t'.b \neq y \propto t'.b.$$

Il en résulte $(a.t).(t'.b) \in]x.y,z[\cap A$, car

$$x.y \propto (a.t).(t'.b) = a.d.b \propto x.d.y \propto z.$$

Puisque z est majoré par $k'(a.t,t'.b) = (a.t).(t'.b)$, ceci est impossible. En définitive $z = x.y$ et $(E,k') = E^*$.

5° Supposons inversement que E^* soit un groupe. Si $c \in A'$ et $x \in E \cap e^{\rightarrow}$, on a $x \neq x.c$, de sorte qu'il existe $b \in A \cap]x,x.c[$. Comme $a = b.c^{-1} \in S_x$ et $x \propto b = a.c$, la condition I est vérifiée. A fortiori (A^*,α) est un groupe archimédien. Il en est de même pour (E^*,α), car E^* est la complétion de A^* relativement à (E,α).

COROLLAIRE. Un magma ordonné (E^*,α), où E^* est un groupe et où (E,α) est dense complet, est un groupe archimédien.

En effet, si E n'est pas réduit à l'unité e, il existe $u \in e^{\rightarrow}$, et (E,α) n'a ni premier ni dernier élément, car on a $x \in]x.u^{-1}, x.u[$. Donc E^* est la complétion de E^* relativement à (E,α), et le corollaire résulte de la proposition.

PROPOSITION 6. Soient (E^*,α) un groupe archimédien et e l'unité de E^*. Alors E^* est commutatif. Si (E,α) est dense, pour tout $x \in o^{\rightarrow}$ et tout $m \in \hat{N}$, il existe $y \in o^{\rightarrow}$ tel

que $y^{\cdot n} \propto x$. Si $(E,\propto)$ n'est pas dense, $(E',\propto)$ est isomorphe au groupe archimédien $(Z^+,\leq)$ des entiers relatifs.

Preuve. Soit $E' = e^{\rightarrow} = \{x \in E \mid e \propto x \neq e\}$. Si $x \in E$, notons x^{-1} son inverse, x^m son itéré $x^{\cdot m}$ d'ordre m dans E'.

1° Supposons $(E,\propto)$ dense. Montrons d'abord que, si $a \in E'$, il existe $c \in]e,a[$ tel que $a \neq c^2 \propto a$. Si $x \in E'$, posons $M_x = \{x' \in]e,x[\mid x \neq x'^2 \propto x\}$ et $M'_x = \{x'^2 \mid x' \in]e,x[\}$.

a) Prouvons que, si M_x est vide, alors x est la borne inférieure de M'_x. En effet, x minore M'_x par définition. Si y est un minorant de M'_x majorant x et si $x' \in]e,x[$, on a

$$e \propto y.x^{-1} \propto x'^2.x^{-1} = x'.x'.x^{-1} \propto x' .$$

Comme $(E,\propto)$ est dense, e est la borne inférieure de E', et a fortiori de $]e,x[$, donc

$$y.x^{-1} = e , \quad \text{et} \quad y = x.$$

b) Soit $a \in E'$ et supposons $M_a = \emptyset$. D'après ce qui précède, a est la borne inférieure de M'_a. Il existe $x \in]e,a[$ et la relation $x \propto a \propto x'^2$ pour tout élément x' de $]e,x[\subset]e,a[$ entraîne $M_x = \emptyset$, de sorte que x est la borne inférieure de M'_x. Il en résulte $x = a$, car M'_x est une section de $(M'_a,\propto)$. Ceci étant impossible, M_a n'est pas vide.

c) Soit $x \in E'$ et montrons que, pour tout entier $m \neq 0$, il existe un $a \in]e,x[$ tel que $x \neq a^m \propto x$. Nous venons de prouver ce résultat lorsque $m = 2$. S'il est supposé vérifié pour m, il existe un $c \in]e,x[$ tel que x majore c^2 et un $a \in]e,c[$ tel que $a^m \propto c$. On en déduit

$$x \neq a^{m+1} \propto c.a \propto c^2 \propto x .$$

Par récurrence ceci prouve l'affirmation.

d) Soient x, y et a des éléments de E'.

Nous savons qu'il existe $c \in]e,a[$ tel que $a \neq c^2 \propto a$. D'après l'axiome d'Archimède, l'ensemble des entiers n tels que $c^n \propto y$ (resp. $c^n \propto x$) a un dernier élément $\hat{m}$ (resp. m); ceci signifie que

$$c^m \propto x \propto c^{m+1} \quad \text{et} \quad c^{\hat{m}} \propto y \propto c^{\hat{m}+1}.$$

Il s'ensuit

$$c^{m+\hat{m}} = c^m.c^{\hat{m}} \propto x.y \propto c^{m+\hat{m}+2},$$

$$c^{m+\hat{m}} = c^{\hat{m}}.c^m \propto y.x \propto c^{m+\hat{m}+2},$$

d'où, en utilisant la proposition 6-9,

$$z = (x.y).(y.x)^{-1} \propto c^{m+\hat{m}+2}.(c^{m+\hat{m}})^{-1} = c^2 \propto a \neq c^2$$

et

$$(c^2)^{-1} \neq a^{-1} \propto (c^2)^{-1} = c^{m+\hat{m}}.(c^{m+\hat{m}+2})^{-1} \propto z .$$

Ainsi $z \in]a^{-1},a[$ pour tout $a \in E'$, c'est-à-dire

$$z = e \quad \text{et} \quad x.y = y.x .$$

e) Pour tout élément x de E, on a $x.e = x$ et $x = e.x$. Si x et y appartiennent à $E\backslash E'$, leurs inverses appartiennent à E', de sorte que

$$x.y = (y^{-1}.x^{-1})^{-1} = (x^{-1}.y^{-1})^{-1} = y.x.$$

Si $x \in E'$ et $y \in E\backslash E'$, des égalités

$$(y.x).y^{-1} = y.y^{-1}.x = x = (x.y).y^{-1},$$

on déduit $y.x = x.y$. Par conséquent E' est commutatif.

3° Evidemment $(Z^+,\leq)$ est un groupe archimédien. Supposons que $(E,\propto)$ ne soit pas dense. Il existe alors un élément x de E ayant un suivant y dans $(E,\propto)$; a fortiori $e = x.x^{-1}$ admet $u = y.x^{-1}$ pour suivant dans $(E,\propto)$, l'application $z \to z.x^{-1}$ définissant un isomorphisme de $(E,\propto)$ sur $(E,\propto)$; de plus $x'.u$ est le suivant de $x' \in E$ dans $(E,\propto)$. L'injection f de Z dans E associant à l'entier relatif z l'itéré

$$u^z \text{ si } z \geq 0, \quad (u^{-1})^{-z} \text{ si } z < 0,$$

définit un homomorphisme (E^*,f,Z^+), et $f(z+1)$ est le suivant de $f(z)$ dans $(E,\propto)$. Si $x' \in E\backslash f(Z)$, il résulte de l'axiome d'Archimède que l'ensemble des $z \in Z$ tels que $x' \neq f(z) \propto x'$ a un dernier élément $\hat{z}$ dans $(Z,\leq)$, et l'on a

$$x' \neq f(\hat{z}) \propto x' \propto f(\hat{z}+1) \neq x' ,$$

ce qui est impossible. Il s'ensuit que f définit l'unique isomorphisme de $(Z^+,\leq)$ sur $(E^*,\propto)$. A fortiori E^*, étant l'image par f du groupe commutatif Z^+, est commutatif.

Définition. On appelle *corps archimédien*, et l'on désigne par $(A^+,A^*,\propto)$, un couple $((A,\propto),(A^+,A^*))$ vérifiant les conditions suivantes:

1° $(A^+,\propto)$ est un groupe archimédien;

2° (A^+,A^*) est un corps; nous désignerons par e l'unité du groupe A^+;

3° La restriction de la loi de composition de A^* à $A' = e^{\rightarrow}$ définit une application ordonnée de $(A',\propto)\times(A',\propto)$ vers $(A,\propto)$.

Soit $(A^+,A^*,\propto)$ un corps archimédien. Si M^+ et M^* sont des sous-magmas de A^+ et de A^* tels que $(M^+,M^*,\propto)$ soit un corps archimédien, on dit que $(M^+,M^*,\propto)$ est un *sous-corps archimédien de* $(A^+,A^*,\propto)$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que M définisse un sous-corps de (A^+,A^*), c'est-à-dire que M^+ soit un sous-groupe de A^+ et M^* un sous-monoïde de A^* tel que $e \neq x \in M$ entraîne $x^{-1} \in M$, où x^{-1} est l'inverse de x dans A^*. Si $(B^+,B^*,\propto)$ est un corps archimédien et si $((B,\propto),g,(A,\propto))$ est un isomorphisme tel que (B^+,g,A^+) et (B^*,g,A^*) soient

des homomorphismes, on dit que g définit *l'isomorphisme* $((B^+,B^*,\propto),g,(A^+,A^*,\propto))$ entre corps archimédiens, et on appelle $(B^+,B^*,\propto)$ le *corps archimédien image de* $(A^+,A^*,\propto)$ par g ; alors B^+, B^* et $(B,\propto)$ sont respectivement les magmas images de A^+ et de A^* et l'ensemble ordonné image de $(A,\propto)$ par g.

PROPOSITION 7. Soient $(A^+,A^*,\propto)$ un corps archimédien, e et u les unités de A^+ et de A^*. Le monoïde A^* est commutatif, $(A,\propto)$ est dense, $A' = e^{\rightarrow}$ définit des sous-magmas A'^+ de A^+ et A'^* de A^*, et $(A'^*,\propto)$ est un groupe archimédien.

Preuve. Pour tout élément x de A, notons $-x$ son inverse dans le groupe A^+. Si x et x' appartiennent à A', on trouve

$$e = e+e \propto x+x' ,$$

de sorte que A' définit un sous-magma A'^+ de A^+. De la distributivité de A^* sur A^+, il résulte

$$(-x).(-y) = x.y \quad \text{et} \quad (-x).y = -(x.y) = x.(-y)$$

quels que soient les éléments x et y de A.

1° Montrons que A' définit un sous-groupe de A^*. En effet, u appartient à A', car $u \propto e$ entraînerait

$$e \propto -u \quad \text{et} \quad e = e.e \propto (-u).(-u) = u.u = u,$$

d'où $u = e$, ce qui est impossible. Comme

$$e = e.e \propto x.x' \quad \text{si} \quad (x,x') \in A'\times A' ,$$

A' définit un sous-magma A'^* de A^*. Soit x^{-1} l'inverse de $x \in A'$ dans A^*. Si c'est un minorant strict de e, alors $x^{-1} = -z$ pour un $z \in A'$, et

$$u = x.x^{-1} = x.(-z) = -(z.x) \propto e,$$

ce qui est contraire à $u \in A'$. Ainsi x^{-1} appartient à A'

et $A'^{\bullet}$ est un sous-groupe de $A^{\bullet}$.

2° Montrons que (A,α) est dense. En effet, supposons qu'il ne le soit pas; d'après la proposition 6, il existe un isomorphisme $((Z^+,\leq),g,(A^+,\alpha))$ entre groupes archimédiens. $A^{\bullet}$ étant un monoïde distributif sur A^+, d'unité $u \in A'$, son magma Z° image par g est un monoïde distributif sur Z^+, d'unité $g(u) > 0$. Il en résulte, en vertu de la proposition 5-II, que Z° est identique à $Z^{\bullet}$. Or tout élément x de A' admet un inverse x^{-1} dans $A^{\bullet}$, de sorte que $g(x^{-1})$ est l'inverse de $g(x)$ dans $Z^{\bullet}$. Ceci est impossible, aucun élément de Z n'étant inversible dans $Z^{\bullet}$. Par suite (A,α) est dense.

3° Puisque (A,α) est dense, (A',α) l'est aussi, et le corollaire de la proposition 6 montre que $(A'^{\bullet},\alpha)$ est un groupe archimédien. A fortiori $A'^{\bullet}$ est commutatif.

4° Soient x et y des éléments de A. On a $e.x = e = x.e$. Si $x \in A'$ et $y \in A'$, nous venons de voir que $x.y = y.x$. Si $x \in A\backslash A'$ et $y \in A\backslash A'$, on obtient

$$x.y = (-x).(-y) = (-y).(-x) = y.x ;$$

enfin si x appartient à A' et y à $A\backslash A'$,

$$x.y = -(x.(-y)) = -((-y).x) = y.x .$$

Ceci prouve que $A^{\bullet}$ est commutatif.

PROPOSITION 8. Reprenons les hypothèses de la proposition 3 et supposons que $(A^+,A^{\bullet},\alpha)$ soit un corps archimédien. e et u les unités de A^+ et de $A^{\bullet}$, et $A' = A \cap \vec{e}$. Si E^+ est le magma complétion de A^+ relativement à (E,α), il existe un et un seul magma $E^{\bullet} = (E,k')$ distributif sur E^+, admettant $A'^{\bullet}$ pour sous-magma et tel que la restriction de k' à

$E'\times E'$, où $E' = E \cap \vec{e}$, définisse une application ordonnée de $(E',\alpha)\times(E',\alpha)$ vers (E,α). De plus $(E^+,E^{\bullet},\alpha)$ est un corps archimédien et E^+ et $E^{\bullet}$ admettent pour sous-magmas les complétions de A'^+ et $A'^{\bullet}$ dans (E',α).

Preuve. 1° Comme (A^+,α) est un groupe archimédien, (E^+,α) en est un (proposition 5). Le sous-ensemble ordonné (E',α) de (E,α) est complet sans premier ni dernier élément et A' y est dense. D'après la proposition 7, A' définit un sous-magma A'^+ de E^+, de sorte qu'il admet un magma $(E',\hat{k})$ pour complétion dans (E',α). Si x et y appartiennent à E', leur composé dans E^+ est la borne supérieure $x+y$ de

$$M = \{a+b \mid a \in A,\ b \in A,\ a \alpha x,\ b \alpha y\},$$

tandis que $\hat{k}(x,y)$ est la borne supérieure z de

$$M' = \{a'+b' \mid a' \in A',\ b' \in A',\ a' \alpha x,\ b' \alpha y\} \subset M.$$

Tout élément de M étant majoré par un élément de M', on obtient

$$x+y = \vee M = \vee M' = \hat{k}(x,y).$$

Par suite $(E',\hat{k})$ est un sous-magma E'^+ de E^+.

2° A' définit aussi un sous-groupe $A'^{\bullet}$ de $A^{\bullet}$ et $(A'^{\bullet},\alpha)$ est un groupe archimédien (proposition 7). Il en résulte que le magma $E'^{\bullet}$ complétion de $A'^{\bullet}$ relativement à (E',α) est un groupe et $(E'^{\bullet},\alpha)$ un groupe archimédien. De plus les conditions de la proposition 4 étant remplies par A'^+ et $A'^{\bullet}$, le magma $E'^{\bullet}$ est distributif sur E'^+. Soit κ' l'application de $E\times E$ dans E qui associe au couple $(x,y) \in E\times E$:

$$\begin{cases} x.y & \text{si } (x,y) \in E'\times E', \\ e & \text{si } x = e \text{ ou si } y = e, \\ (-x).(-y) & \text{si } x \alpha e \text{ et } y \alpha e,\ x \neq e \neq y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(x.(-y)) & \text{si } x \in E' \text{ et } e \neq y \propto e, \\ -(-x).y & \text{si } e \neq x \propto e \text{ et } y \in E'. \end{cases}$$

Une démonstration analogue à celle de la proposition 5-II prouve les résultats suivants: $E^* = (E,\kappa')$ est l'unique magma distributif sur E^+ admettant E'^* pour sous-magma; (E^+,E^*) est un anneau; tout élément x de $E\setminus\{e\}$ admet un inverse dans E^*, à savoir son inverse x^{-1} dans E'^* si $x \in E'$ et $-(-x)^{-1}$ si $x \propto e$; l'application v:

$$x \to x \text{ si } x \in E', \quad x \to -x \text{ si } x \propto e$$

de E dans E définit un homomorphisme de E^* vers E^*. Il s'ensuit que $(E^+,E^*,\propto)$ est un corps archimédien.

3° Soit $E^\circ = (E,k')$ un magma vérifiant les conditions de l'énoncé. Si x et y appartiennent à E', il existe des éléments a et b de A' tels que $a \propto x$ et $b \propto y$; on en déduit

$$e \propto a.b = a \circ b \propto x \circ y ;$$

ainsi E' définit un sous-magma E'° de E° . Comme $(E'^\circ,\propto)$ est un magma ordonné et $(A'^*,\propto)$ un groupe archimédien, où A'^* est un sous-magma de E'°, la proposition 5 montre que E'° est la complétion E'^* de A'^* relativement à $(E',\propto)$. Ceci entraîne $E^\circ = E^*$ (partie 2).

Définition. Avec les hypothèses de la proposition 8, on appelle $(E^+,E^*,\propto)$ *le corps archimédien complétion de* (A^+,A^*) relativement à $(E,\propto)$.

Si $(E^+,E^*,\propto)$ est un corps archimédien, (A^+,A^*) un sous-corps de (E^+,E^*) et si A est dense dans $(E,\propto)$ et $(E,\propto)$ complet, il résulte des propositions 6, 7 et 8 que $(E^+,E^*,\propto)$ est le corps archimédien complétion de (A^+,A^*) relativement à $(E,\propto)$.

14. *Corps archimédien des nombres réels.*

Soit $(R',\subset)$ la complétion de l'ensemble ordonné dense $(Q,\leq)$ des nombres rationnels, i.e. R' est l'ensemble des sections propres non vides sans dernier élément de $(Q,\leq)$. L'injection canonique j de Q dans R' applique q sur la section ^+q de $(Q,\leq)$ associée. Un nombre rationnel ayant pour éléments des ensembles finis (par construction de Q) alors qu'un $S \in R'$ a parmi ses éléments des nombres rationnels qui n'appartiennent pas à Z, donc des ensembles infinis, $Q \cap R'$ est vide. Il en résulte que l'application

$$j(q) \to q \text{ si } q \in Q, \quad S \to S \text{ si } S \in R'\setminus j(Q)$$

définit une bijection η de R' sur l'ensemble

$$R = Q \cup (R'\setminus j(Q)).$$

Nous noterons $(R,\leq)$ l'ensemble ordonné image de $(R',\subset)$ par η .

Définition. Avec les notations précédentes, on appelle *nombre réel* un élément de R, *nombre irrationnel* un élément de $R\setminus Q$, et l'on dit que $(R,\leq)$ est *l'ensemble ordonné des nombres réels.*

Les nombres réels sont donc les nombres rationnels et les sections propres non vides de $(Q,\leq)$ n'admettant pas de borne supérieure dans $(Q,\leq)$ (car une section S admet q pour borne supérieure ssi q est le dernier élément de S ou si $S = j(q)$). D'après la proposition I-13,

$$((R',\subset),j,(Q,\leq))$$

est une application ordonnée, $(R',\subset)$ est complet sans premier ni dernier élément et $j(Q)$ y est dense; a fortiori $(R,\leq)$ est un ensemble totalement ordonné dense complet, Q est dense dans $(R,\leq)$ et $(Q,\leq)$ est un sous-ensemble ordonné de $(R,\leq)$ (ce qui justifie l'emploi de $\leq$ pour l'ordre sur R). Si k et k' sont des nombres réels dont l'un au moins est irrationnel, on a $k' \leq k$ ssi

$k' \subset k$ lorsque k et k' sont irrationnels,
$k' \in k$ lorsque $k \in R\backslash Q$ et $k' \in Q$,
$k \notin k'$ lorsque $k \in Q$ et $k' \in R\backslash Q$.

Si T est une partie de Q dense dans $(Q,\leq)$, alors T est dense dans $(R,\leq)$ et, d'après la proposition 1-13, $(R,\leq)$ est isomorphe à la complétion de $(T,\leq)$.

PROPOSITION 1. Soit (E,α) un ensemble totalement ordonné complet sans premier ni dernier élément. Si T est une partie dénombrable de E dense dans (E,α), alors (E,α) est isomorphe à $(R,\leq)$. Si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix et si (E,α) est dense, $(R,\leq)$ est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de (E,α).

Preuve. Si T est dénombrable et dense dans (E,α), la complétion de (T,α) est isomorphe à (E,α) (proposition 1-13). Comme (T,α) est un ensemble ordonné dense sans premier ni dernier élément tel que T soit dénombrable, il est isomorphe à $(Q,\leq)$, d'après le corollaire 1 de la proposition 5-12; par suite la complétion de (T,α) est isomorphe à celle de $(Q,\leq)$; a fortiori (E,α) et $(R,\leq)$ sont isomorphes. Supposons maintenant que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix et que (E,α) soit dense. La proposition 6-12 montre qu'il existe une application ordonnée $((E,\alpha),f,(Q,\leq))$

telle que f soit une injection. D'après la proposition 2-13, f s'étend en une injection f' de R dans E, dont la restriction à $(f'(R),R)$ définit un isomorphisme de $(R,\leq)$ sur un sous-ensemble ordonné de (E,α).

Nous poserons

$$\bar{Q} = \{q \in Q \mid q > 0\} \quad \text{et} \quad \bar{R} = \{x \in R \mid x > 0\}.$$

PROPOSITION 2. $(Q^+,Q^\cdot,\leq)$ est un corps archimédien ; soit $(R^+,R^\cdot,\leq)$ son corps archimédien complétion relativement à $(R,\leq)$. Alors $R^\cdot = (R,\kappa'_R)$ est l'unique magma distributif sur R^+ ayant 1 pour unité et tel que la restriction $\bar{\kappa}'_R$ de κ'_R à $\bar{R}\times\bar{R}$ définisse une application ordonnée de $(\bar{R},\leq)\times(\bar{R},\leq)$ vers $(R,\leq)$. Si $(n,x) \in N\times R$, on a $n.x = nx$ (itéré de x dans R^+). Si (R^+,f,Q^+) est un homomorphisme, $f(x) = f(1).x$ pour tout $x \in Q$.

Preuve. 1° $(Q^+,\leq)$ est un magma ordonné, d'après le corollaire de la proposition 3-12. Si q et q' sont des nombres rationnels positifs, il existe un entier majorant $q'.q^{-1}$, i.e. vérifiant $q' < nq$; donc $(Q^+,\leq)$ est un groupe archimédien. La restriction de κ'_Q définit une application ordonnée de $(\bar{Q},\leq)\times(\bar{Q},<)$ vers $(Q,\leq)$ (corollaire de la proposition 3-12), de sorte que $(Q^+,Q^\cdot,\leq)$ est un corps archimédien. Sa complétion $(R^+,R^\cdot,\leq)$ est telle que R^+ soit le magma complétion de Q^+ et que $R^\cdot$ admette pour sous-groupe le groupe $\bar{R}^\cdot$ complétion de $\bar{Q}^\cdot$ relativement à $(\bar{R},\leq)$. Si x est un nombre réel, on voit par récurrence que $n.x = nx$ pour tout entier n, car cette égalité est vraie pour $n = 1$ et, si elle est vérifiée pour n, on a

$$(n+1).x = (n.x)\cdot(1.x) = (nx)\cdot x = (n+1)x.$$

Ceci justifie de noter parfois $x'x$ le composé $x'.x$ dans R^* de $(x',x) \in R \times R$.

2° Soit (R^+,f,Q^+) un homomorphisme et posons $c = f(1)$. Pour tout entier n, on a (proposition 6-9) $f(nq) = nf(q) = n.f(q)$, pour tout nombre rationnel q. En particulier

$$f(n) = f(n1) = n.c \quad \text{et} \quad f(-n) = -f(n) = (-n).c.$$

Si $q = z/n$, il s'ensuit

$$n.f(q) = f(nq) = f(z) = c.z, \quad \text{d'où} \quad f(q) = c.z.n^{-1} = c.q$$

3° Supposons que $R^\circ = (R,k')$ soit un magma distributif sur R^+ ayant 1 pour unité; l'application $q \to x \circ q$ définissant un homomorphisme de Q^+ vers R^+, d'après ce qui précède $x \circ q = (x \circ 1).q = x.q$ pour tout $q \in Q$; ainsi Q^* est un sous-magma de R°. On en déduit $R^\circ = R^*$, en utilisant la proposition 8-13, si la restriction $\bar{k}'$ de k' à $\bar{R} \times \bar{R}$ définit une application ordonnée $((R,\leq),\bar{k}',(\bar{R},\leq)\times(\bar{R},\leq))$.

COROLLAIRE. Soit $c \in \bar{R}$; il existe un unique homomorphisme (R^+,h,R^+) tel que $((R,\leq),h,(R,\leq))$ soit une application ordonnée et que $h(1) = c$. De plus $h(x) = c.x$ pour $x \in R$ et $((R^+,\leq),h,(R^+,\leq))$ est un isomorphisme.

Preuve. Soit g l'application $x \to c.x$ de R dans R. Elle définit un isomorphisme de $(R^+,\leq)$ sur $(R^+,\leq)$. Supposons que h vérifie les conditions de l'énoncé, et posons $f = g^{-1} \circ h$. Alors $((R,\leq),f,(R,\leq))$ est une application ordonnée; la restriction de f à Q définissant un homomorphisme de Q^+ vers R^+ tel que $f(1) = 1$, c'est, d'après la proposition, l'application identique de Q. Comme $f(Q) = Q$ est dense dans $(R,\leq)$, il résulte du corollaire de la proposition 2-13 que $f = \iota_R$, d'où $g = h$.

Définition. Le corps (R^+,R^*) de la proposition 2 est appelé *corps des nombres réels*. On appelle *valeur absolue sur* R l'application v_R de R dans R telle que

$$v_R(x) = x \text{ si } x \geq 0, \quad v_R(x) = -x \text{ si } x < 0.$$

PROPOSITION 3. Soient b un entier, $b \geq 2$, et B l'ensemble des suites $(p_n)_{n\in N}$ d'entiers telles que $0 \leq p_n < b$ pour tout entier n et que $\{n \in N \mid p_n \neq 0\}$ soit infini. Si $(E^+,\leq)$ est un groupe archimédien, il existe une injection u_E de E dans $Z \times B$; l'injection u_R correspondant à $(R^+,\leq)$ est une bijection.

Preuve. Soient e l'unité de E^+ et u un élément de E tel que $e < u$; nous notons nx l'itéré de x et $(-n)x$ l'itéré $n(-x)$ de son inverse $-x$ dans E^+, pour tout entier n. De plus nous posons $y-x = y+(-x)$.

1° Soit $x \in E$. D'après l'axiome d'Archimède, l'ensemble des entiers relatifs z tels que $zu < x$ a un dernier élément, noté $z(x)$, dans $(Z,\leq)$; posons

$$z_m = z(b^m x) \quad \text{et} \quad p_m(x) = z_{m+1} - bz_m$$

pour tout entier m. Les relations

$$z_m u < b^m x \leq (z_m+1)u$$

entraînent

$$bz_m u < b^{m+1} x \leq b(z_m+1)u, \quad \text{d'où} \quad bz_m \leq z_{m+1} < bz_m + b,$$

c'est-à-dire $0 \leq p_m(x) < b$ pour tout entier m. Supposons qu'il existe un entier m tel que $p_{m+n}(x) = 0$ pour tout $n \in N$. On voit par récurrence que $z_{m+n} = b^n z_m$ pour tout entier n. En vertu de l'axiome d'Archimède et comme tout entier est majoré par une puissance de b, il existe $n > 0$ tel que $u < b^n(b^m x - z_m u)$. Il en résulte, E^+ étant commutatif,

$$(1+b^n z_m)u < b^{n+m}x \ , \quad \text{d'où} \quad b^n z_m < 1+b^n z_m \leq z_{m+n},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc $(p_n(x))_{n\in N} \in B$ et

$$u_E(x) = (z(x),(p_n(x))_{n\in N}) \in Z\times B.$$

Soit u_E l'application $x \to u_E(x)$ de E dans $Z\times B$.

2° Montrons que u_E est une injection. Soient x et x' des éléments de E tels que $x < x'$ et $u_E(x) = u_E(x')$. Reprenons les notations précédentes et posons $z'_n = z(b^n x')$ pour tout entier n. On a $z(x) = z(x')$ et, puisque

$$z'_{n+1} - bz'_n = p_n(x') = p_n(x) = z_{n+1} - bz_n \ ,$$

on en déduit par récurrence $z'_n = z_n$ pour tout entier n. Or il existe $m > 0$ tel que $u < b^m(x'-x)$, de sorte que

$$(1+z_m)u < u+b^m x < b^m x' \ , \text{ donc } z_m < 1+z_m \leq z'_m \ .$$

Ceci étant impossible, $x' = x$ et u_E est une injection.

3° Prenons pour $(E^+,\leq)$ le groupe archimédien $(R^+,\leq)$. Soit $u' \in \bar{R}$. Si $y \in R$ et $x = u.u'^{-1}.y$, on a

$$z_m u < b^m x \leq (z_m+1)u \quad \text{ssi} \quad z_m u' < b^m y \leq (z_m+1)u' \ ,$$

d'où $u_R(x) = u'_R(y)$. L'application $y \to u.u'^{-1}.y$ de R dans R étant une bijection, il s'ensuit que u_R est une bijection ssi u'_R en est une. Il nous suffit donc de prouver que u_R, pour $u = 1$, est une bijection. Or supposons $w = (z,(p_n)_{n\in N}) \in Z\times B$. On définit par récurrence $z_n \in Z$ et $q_n \in Q$ pour tout entier n en posant:

$$z_0 = z = q_0, \quad z_{n+1} = bz_n+p_n \ , \quad q_n = z_n/b^n \quad \text{si} \quad n \in \hat{N} \ .$$

a) Soit $n \in N$ et montrons par récurrence que

$$b^m z_n \leq z_{n+m} < b^m(z_n+1), \quad \text{i.e.} \quad q_n \leq q_{n+m} < q_n+(1/b^n),$$

pour tout entier m. En effet

$$bz_n \leq z_{n+1} = bz_n+p_n < b(z_n+1)$$

et, si la formule a été prouvée pour m, on obtient

$$b^{m+1} z_n \leq bz_{n+m} \leq z_{n+m+1} = bz_{n+m}+p_{n+m} \leq b(b^m z_n+b^m-1)+p_{n+m} < b^{m+1}(z_n+1) \ .$$

b) En particulier $z_0 = q_0 < q_m < z_0+1$, et il existe une borne supérieure x de $(q_n)_{n\in N}$ dans $(R,\leq)$. Puisque $q_{n+1} = q_n+(p_n/b^{n+1})$ et que $\{n \in N \mid p_n \neq 0\}$ est infini, pour tout $n \in N$ il existe un m tel que $q_n < q_{n+m}$ d'où $q_n < x \leq q_n+(1/b^n)$, et $z_n < b^n x \leq z_n+1$. Il s'ensuit $z_n = z(b^n x)$ pour tout n, de sorte que $p_n = p_n(x)$ et, a fortiori, $u_R(x) = w$.

Définition. Avec les notations de la partie 3 de la preuve précédente, on appelle q_n (resp. $q_n+(1/b^n)$) *valeur approchée par défaut* (resp. par *excès*) de x d'ordre n dans la base b, et $u_R(x)$, pour $u = 1$, est dit *développement de base* b *de* x *dans* R^+.

Le nombre réel x est donc la borne supérieure (resp. borne inférieure) de l'ensemble de ses valeurs approchées par défaut (resp. par excès) dans la base b.

PROPOSITION 4. R *est équipotent à* $P(N)$.

Preuve. D'après la proposition 3, R est équipotent à $Z\times B$. Considérons le cas où $b = 2$. Alors $B = 2^N \setminus C$, en notant C l'ensemble des suites $x = (d_n)_{n\in N}$ telles que $d_n \in \{0,1\}$ et que $A_x = \{n \in N \mid d_n \neq 0\}$ soit fini.

1° Soit g l'application de C dans N qui associe à $x = (d_n)_{n\in N}$ l'entier $d_0+\ldots+2^{n-1}d_{n-1}+2^n d_n$, si n est le dernier élément de A_x. Montrons que g est une injection. En effet, soit $x' = (d'_n)_{n\in N} \in C$ tel que $g(x) = g(x')$. On a

$$z_0+\ldots+2^m z_m = 0, \quad \text{où} \quad z_i = d_i - d'_i$$

pour tout entier $i \leq m$ et où m est le dernier élément de $A_x \cup A_{x'}$. Si l'ensemble des $m' \leq m$ tels que $z_{m'} \neq 0$ n'est pas vide, il a un premier élément n. Des relations

$$z_n \in \{1,-1,0\} \quad \text{et} \quad -z_n = 2(z_{n+1}+\ldots+2^{m-n-1} z_m)$$

on déduit $z_n = 0$, ce qui est impossible. Donc $z_i = 0$ pour tout $i \leq m$, c'est-à-dire $x = x'$. Il en résulte que C est fini ou dénombrable (en fait il est dénombrable, car on montre par récurrence que $N = g(C)$: si $m = g((d_n)_{n\in N})$ et si m' est le premier élément de $\{n \in N \mid d_n = 0\}$, on voit que $m+1 = g((\hat{d}_n)_{n\in N})$, où $\hat{d}_i = 0$ si $i < m'$, $\hat{d}_{m'} = 1$ et $\hat{d}_n = d_n$ si $n > m'$).

2° En associant à l'entier m la suite $(p_n)_{n\in N}$, où

$$p_m = 0 \quad \text{et} \quad p_n = 1 \quad \text{si} \quad n \in N\setminus\{m\},$$

on définit une injection de N dans B. Par suite le corollaire 3 de la proposition 5-10 affirme que B^{UC} est équipotent à B. Puisque $B^{UC} = 2^N$ est équipotent à $P(N)$ (proposition 2-4), B est donc équipotent à $P(N)$. Enfin $Z\times B$, et a fortiori R, sont équipotents à $P(N)$, d'après la proposition 6-10, Z étant dénombrable.

Définition. Si F est un ensemble équipotent à R (donc à $P(N)$), on dit que F a *la puissance du continu.*

Soit E un ensemble non vide. D'après la proposition 6-10, $E\times R$ et $E \cup R$ ont la puissance du continu si E est de puissance inférieure à R, et R^E est équipotent à R lorsque E est fini ou dénombrable. En particulier R^n a la puissance du continu pour tout entier $n \neq 0$.

PROPOSITION 5. Si $(E^+,\leq)$ est un groupe archimédien, il est isomorphe à un sous-groupe archimédien de $(R^+,\leq)$ (resp. à $(R^+,\leq)$ si $(E,\leq)$ est dense et complet).

Preuve. Si $(E,\leq)$ n'est pas dense, $(E^+,\leq)$ est isomorsphe à $(Z^+,\leq)$ (proposition 6-13). Supposons $(E,\leq)$ dense, et soient e l'unité de E^+, $E' = e^{\rightarrow}$ et $u \in E'$. Notons $-x$ l'inverse de x dans E^+ et nx son itéré. D'après la proposition 6-13, E^+ est commutatif et, si $x \in E'$ et $m \in \hat{N}$, il existe $x' \in E'$ tel que $mx' \leq x$.

1° Supposons $(E,\leq)$ complet et $m \in \hat{N}$. L'ensemble

$$A_m = \{x \in]e,u[\mid mx \leq u\}$$

étant non vide et majoré, il a une borne supérieure $y \leq u$ dans l'ensemble ordonné complet $(E,\leq)$. Montrons que l'on a $u = my$. En effet, soit $a \in E'$; il existe $c \in E'$ tel que $mc \leq a$. Comme $y-c$ $(= y+(-c)) < y < y+c$, on a

$$m(y-c) < my \leq u < m(y+c).$$

En utilisant la commutativité de E^+, on en déduit

$$(my)-a < (my)-(mc) = m(y-c) < u < (my)+(mc) \leq (my)+a,$$

d'où

$$u-(my) \in]-a,a[\quad \text{pour tout } a \in E',$$

i.e. $my = u$. Nous allons construire une application f de Q dans E.

a) Soient $x \in E$ et I_x l'application $z \to zx$ de Z dans E, où l'on pose

$$zx = nx \text{ si } z = n \in N, \quad zx = n(-x) \text{ si } z = -n.$$

L'application $n \to nx$ définissant un homomorphisme de N^+ vers E^+, (proposition 6-9), (E^+,i_x,Z^+) est un homomorphisme (corollaire, proposition 4-11). Si $(z',z) \in Z\times Z$, on a $(z'+z)x = (z'x)+(zx)$, et il résulte de la proposition 6-9

que $z'(zx) = (z'z)x$. L'application $x \to zx$ de E dans E est une injection pour tout $z \in Z\backslash\{0\}$, car, si $m \in \hat{N}$ et $x < y$ dans $(E,\leq)$, on obtient

$$mx = ((m-1)x)+x < my \quad \text{et} \quad (-m)y = m(-y) < (-m)x .$$

Il s'ensuit que, pour tout $m \in \hat{N}$, il existe un et un seul $y \in E'$ tel que $my = u$; nous le noterons u/m. En particulier $u = u/1$. Pour tout $(z,n) \in Z\times\hat{N}$, posons

$$f'(z,n) = z(u/n).$$

Si $(z',m) \in Z\times\hat{N}$ et $zm = z'n$, on déduit des relations

$$nm(zy) = (mz)(ny) = (zm)u = (z'n)u = (z'n)(mx) = nm(z'x),$$

où $y = u/n$ et $x = u/m$, l'égalité

$$f'(z,n) = zy = z'x = f'(z',m).$$

Ainsi l'application $(z,n) \to f'(z,n)$ de $Z\times\hat{N}$ dans E est compatible avec la relation d'équivalence r permettant de définir Q, de sorte qu'il existe une application f de Q dans E telle que $f(q) = f'(z,n)$ si $q = z/n \in Q$. Evidemment

$$f(z) = f'(z,1) = zu \quad \text{si} \quad z \in Z,$$

$$f(1/n) = f'(1,n) = u/n \quad \text{si} \quad n \in \hat{N}.$$

b) Montrons que f est une injection définissant un homomorphisme de Q^+ vers E^+ et une application ordonnée de $(Q,\leq)$ vers $(E,\leq)$. En effet, soient q et q' des nombres rationnels; ils admettent des représentants (z,n) et (z',n) de même dénominateur. Si $u/n = y$, on trouve

$$f(q+q') = f'(z+z',n) = (z+z')y = (zy)+(z'y) = f(q)+f(q').$$

Par ailleurs $q' < q$ signifie $z = z'+p$, où $p \in \hat{N}$. Comme $e < y$ entraîne $e < py$, il s'ensuit

$$z'y = (z'y)+e < (z'y)+(py) = (z'+p)y = zy.$$

A fortiori l'égalité $f(q) = f(q')$ ne peut être réalisée que si $q = q'$.

2° Reprenons les notations précédentes. Q étant dense dans $(R,\leq)$ et $(E,\leq)$ complet, le corollaire de la proposition 2-13 montre qu'il existe une unique injection g de R dans E admettant f pour restriction et définissant une application ordonnée de $(R,\leq)$ vers $(E,\leq)$; de plus g est une bijection ssi $f(Q)$ est dense dans $(E,\leq)$. Montrons que cette condition est vérifiée et que g définit un isomorphisme de $(R^+,\leq)$ sur $(E^+,\leq)$.

a) Soit $c \in E'$. D'après l'axiome d'Archimède, l'ensemble des entiers n tels que $nc \leq u$ a un dernier élément m tel que $mc \leq u < (m+1)c$. On trouve, en posant $y = u/(m+1)$,

$$(m+1)y = u < (m+1)c , \quad \text{i.e.} \quad y < c.$$

Ainsi y appartient à $f(Q)\cap]e,c[$.

b) Soient x' et x deux éléments de E tels que $x < x'$, et $c = x'-x$. Il existe un $n \in \hat{N}$ tel que $y = u/n < c$. D'après l'axiome d'Archimède, l'ensemble des entiers n' tels que $n'y \leq x$ a un dernier élément m'. On a

$$m'y \leq x < (m'+1)y = (m'y)+y < x+c = x',$$

de sorte que

$$(m'+1)y = f((m'+1)/n) \in f(Q)\cap]x,x'[.$$

Par suite $f(Q)$ est dense dans $(E,\leq)$ et g est une bijection.

c) Soit E^* le groupe image de R^+ par g; il admet pour sous-groupe le sous-groupe $f(Q)^+$ de E^+, la restriction f de g définissant un homomorphisme de Q^+ vers E^+. Etant donné que $f(Q)$ est dense dans l'ensemble ordonné complet $(E,\leq)$ et que $(f(Q)^+,\leq)$ est un groupe archimédien (image de $(Q^+,\leq)$), la proposition 5-13 assure

que le magma complétion de $f(Q)^+$ relativement à $(E,\leq)$ est le seul groupe E° ayant $f(Q)^+$ pour sous-groupe et tel que $(E^\circ,\leq)$ soit un magma ordonné. Il en résulte que E^+ et E' sont tous deux identiques à E°. Donc g définit un isomorphisme $((E^+,\leq),g,(R^+,\leq))$.

3° Considérons maintenant le cas où $(E,\leq)$ est dense mais non complet. Soit $(L,\subset)$ la complétion de $(E,\leq)$ et soit j l'injection canonique de E dans L. Si $A = j(E)$, la restriction j' de j à (A,E) définit un isomorphisme de $(E,\leq)$ sur $(A,\subset)$, et A est dense dans $(L,\subset)$. Soit $(A^+,\subset)$ le groupe archimédien image de $(E^+,\leq)$ par j'. En vertu de la proposition 5-13, $(L^+,\subset)$, où L^+ est le magma complétion de A^+ relativement à $(L,\subset)$, est un groupe archimédien. Comme $(L,\subset)$ est dense et complet, la partie 2 montre qu'il existe un isomorphisme $((R^+,\leq),h,(L^+,\subset))$. La restriction de h à $(h(A),A)$ définit un isomorphisme de $(A^+,\subset)$ sur un sous-groupe archimédien de $(R^+,\leq)$, qui est a fortiori isomorphe à $(E^+,\leq)$.

COROLLAIRE. Soient $(E^+,\leq)$ et (F^+,α) des groupes archimédiens. Si $(E,\leq)$ et (F,α) ne sont pas denses (resp. sont complets et denses), il existe un et un seul isomorphisme de $(E^+,\leq)$ sur (F^+,α) (resp. sur (F^+,α) appliquant u sur u', où u et u' sont des éléments donnés de E et F différents des unités).

Preuve. Supposons $(E,\leq)$ et (F,α) non denses. D'après la proposition 6-13, $(E^+,\leq)$ et (F^+,α) sont alors isomorphes à $(Z^+,\leq)$, et a fortiori ils sont isomorphes entre eux. $(E,\leq)$ et (F,α) étant pseudo-discrets, il existe un unique isomorphisme $((F,\alpha),f,(E,\leq))$ (proposition 3-11)

tel que $f(e) = e'$, où e et e' sont les unités de E^+ et F^+. Donc f définit l'unique isomorphisme de $(E^+,\leq)$ sur (F^+,α).

2° Supposons $(E,\leq)$ et (F,α) denses et complets. D'après la démonstration précédente, il existe des bijections g et g' définissant des isomorphismes de $(R^+,\leq)$ sur $(E^+,\leq)$ et sur (F^+,α) respectivement et telles que $g(1) = u$ et $g'(1) = u'$. La bijection $g'\circ g^{-1}$ définit un isomorphisme de $(E^+,\leq)$ sur (F^+,α) et $g'\circ g^{-1}(u) = u'$. Si $((F^+,\alpha),h,(E^+,\leq))$ est un isomorphisme, et si $h(u) = u'$ $k = g'^{-1}\circ h\circ g$ définit un isomorphisme de $(R^+,\leq)$ sur lui-même tel que $k(1) = 1$. Il résulte du corollaire de la proposition 2 que k est l'application identique de R et, a fortiori, $h = g'\circ g^{-1}$.

Cas particulier: Comme $(\bar{R}^*,\leq)$ est un groupe archimédien et que $(\bar{R},\leq)$ est complet et dense, pour tout $a \in \bar{R}$ il existe, d'après la proposition 5, une unique bijection g définissant un isomorphisme de $(R^+,\leq)$ sur $(\bar{R}^*,\leq)$ et telle que $g(1) = a$. On appelle cette bijection g *la fonction exponentielle de base* a et g^{-1} *la fonction logarithmique de base* a.

Remarque. Il existe une infinité de groupes archimédiens tels que deux d'entre eux ne soient pas isomorphes. En effet, soit b un entier, $b \geq 2$. L'ensemble des nombres rationnels z/b^n, où $z \in Z$ et $n \in N$, définit un sous-groupe archimédien E_b de $(R^+,\leq)$. Mais si b et b' sont des nombres premiers différents, E_b et $E_{b'}$ sont non isomorphes.

PROPOSITION 6. Soit (I^+,I^*,α) un corps archimédien; il

est isomorphe à un sous-corps archimédien de $(R^+,R^\cdot,\leq)$. *Si* e *et* u *sont les unités de* E^+ *et de* $E^\cdot$, *alors* $E^\cdot$ *est l'unique magma* (E,k') *distributif sur* E^+ *ayant* u *pour unité et tel que la restriction de* k' *à* $E'\times E'$, *où* $E' = e^{\rightarrow}$, *définisse une application ordonnée de* $(E',\alpha)\times(E',\alpha)$ *vers* (E,α).

Preuve. $(E^{\rightarrow},\alpha)$ étant un groupe archimédien, il existe d'après la proposition 5 une bijection g définissant un isomorphisme de (E^+,α) sur un sous-groupe archimédien $(A^+,\leq)$ de $(R^+,\leq)$ et telle que $g(u) = 1$.

1° Montrons que A contient Q. En effet, (A^+,g,E^+) étant un homomorphisme, pour tout entier n on a

$$g(nu) = ng(u) = n \quad \text{et} \quad g((-n)u) = -g(nu) = -n,$$

d'après la proposition 6-9, où $(-n)u$ est l'inverse $-(nu)$ de nu dans E^+. Supposons $n \neq 0$. Si x désigne l'inverse $(nu)^{-1}$ de nu dans $E^\cdot$, on trouve

$$u = (nu).x = n(u.x) = nx,$$

d'où $n.g(x) = ng(x) = g(nx) = g(u) = 1$,

c'est-à-dire $g(x) = 1/n$. Si $q = z/n \in Q$, il s'ensuit

$$q = z(1/n) = zg(x) = g(zx) \in A.$$

2° Comme A contient Q, il est dense dans $(R,\leq)$, et R^+ est le magma complétion de A^+ relativement à $(R,\leq)$. D'après la proposition 8-13, il existe un corps archimédien $(R^+,R^\perp,\leq)$ complétion de $(A^+,A^\perp)$ relativement à $(R,\leq)$, en notant $(A^+,A^\perp)$ le corps image de $(E^+,E^\cdot)$ par g. Le magma $R^\perp$ étant distributif sur R^+, d'unité $g(u) = 1$, et la restriction de sa loi de composition à $\bar{R}\times\bar{R}$ définissant une application ordonnée de $(\bar{R},\leq)\times(\bar{R},\leq)$ vers $(R,\leq)$, la proposition 2 affirme que $R^\perp = R^\cdot$. Par suite $(A^+,A^\perp,\leq)$ est un sous-corps archimédien de $(R^+,R^\cdot,\leq)$ isomorphe à $(I^+,I^\cdot,\alpha)$; nous poserons $A^\cdot = A^\perp$.

3° Supposons que $E^\circ = (E,k')$ soit un magma vérifiant les conditions de l'énoncé. Le magma $A^\circ = (A,k'')$ image de E° par g est distributif sur A^+, d'unité 1 et la restriction de k'' à $\bar{A}\times\bar{A}$, où $\bar{A} = A\cap\bar{R}$, définit une application ordonnée de $(\bar{A},\leq)\times(\bar{A},\leq)$ vers $(A,\leq)$. De plus $Q^\cdot$ est un sous-magma de A°, car, si $x \in A$, l'application $q \to q\circ x$ de Q dans R définit un homomorphisme de Q^+ vers R^+, ce qui entraîne (proposition 2) $q\circ x = q.(1\circ x) = q.x$. Si $a \in \bar{A}$ et $a' \in \bar{A}$, il existe $q \in \bar{Q}$ et $q' \in \bar{Q}$ tels que $q < a$ et $q' < a'$; des relations $0 < q.q' = q\circ q' \leq a\circ a'$, on déduit $a\circ a' \in \bar{A}$. Ainsi $\bar{A}$ définit un sous-monoïde $\bar{A}^\circ$ de A° ayant $\bar{Q}^\cdot$ pour sous-monoïde. Comme $(\bar{A}^\circ,\leq)$ est un magma ordonné, il existe un magma ordonné $(\bar{R}^\circ,\leq)$ complétion de $\bar{A}^\circ$ relativement à $(\bar{R},\leq)$. $(\bar{Q}^\cdot,\leq)$ étant un sous-magma ordonné de $(\bar{R}^\circ,\leq)$ et un groupe archimédien ayant $(\bar{R}^\cdot,\leq)$ pour complétion, la proposition 5-13 affirme que $\bar{R}^\cdot = \bar{R}^\circ$, d'où $\bar{A}^\cdot = \bar{A}^\circ$. Il s'ensuit $A^\cdot = A^\circ$, et a fortiori $E^\cdot = E^\circ$, car $A^\cdot$ et A° sont distributifs sur A^+ et ont $\bar{A}^\cdot$ pour sous-magma.

COROLLAIRE. Un corps archimédien $(E^+,E^\cdot,\alpha)$ *tel que* (E,α) *soit complet est isomorphe à* $(R^+,R^\cdot,\leq)$.

Remarque. La construction de R que nous donnons ici est une variante de celle de Dedekind, pour qui le nombre réel x est la "coupure" $(x^{\leftarrow},x^{\mapsto})$ de $(Q,\leq)$; nous l'obtenons comme cas particulier de la complétion des ensembles totalement ordonnés denses, construction qui se généralise d'ailleurs pour compléter des ensembles ordonnés non denses. En utilisant la théorie de la complétion d'un espace métrique ou d'un espace uniforme, on peut également obtenir R. Dans le premier cas, le corps valué $(R^\cdot,R^\cdot,v_R)$ se présen-

te comme la complétion métrique du corps valué (Q^+,Q^*,v_Q), et un nombre réel s'identifie à une classe d'équivalence de suites de Cauchy (méthode de Cantor). Dans le second cas, l'espace uniforme associé à (R,v_R) est le complété de l'espace uniforme associé à (Q,v_Q), et un nombre réel s'identifie à un filtre de Cauchy minimal relativement à cet espace uniforme, ou encore à une suite d'intervalles emboîtés de $(Q,\leq)$; telle est la méthode de Weierstrass.

CHAPITRE IV

Univers. Ensembles bien ordonnés

Dans ce chapitre, nous supposons que D est une totalité, ensemble signifie D-ensemble; lorsque D vérifie l'axiome de l'infini, $(N,\leq)$ désigne l'ensemble ordonné des entiers.

15. Univers.

Définition. On appelle *préunivers* un ensemble U vérifiant les conditions suivantes:

(U1) $\emptyset \in U$; si $E \in U$ et $x \in E$, alors $\{x\} \in U$.

(U2) $E \in U$ entraîne $P(E) \in U$.

(U3) La réunion d'une famille d'éléments de U indexée par un élément de U appartient à U.

Si de plus U est un ensemble transitif (§ 9), on dit que U est un *préunivers transitif.*

Un préunivers U est transitif ssi il vérifie:

(Ut) Si $E \in U$ et $x \in E$, on a $x \in U$.

Soit U un préunivers. L'axiome (U3) entraîne plus généralement que, si $(E_i)_{i\in J}$ est une famille d'éléments de U et si J est équipotent à un élément J' de U, alors $E = \bigcup_{i\in J} E_i$ appartient à U; en effet, si f est une bijection de J sur J', on a $E = \bigcup_{i'\in J'} E'_{i'}$, c U, on posant $E'_{i'} = E_{f^{-1}(i')}$, pour tout $i' \in J'$.

Remarque. La notion de préunivers est indépendante de la totalité dans le sens suivant: Si U est un préunivers et un objet d'une autre totalité $\mathcal{D}'$, alors U est également un préunivers relativement à la totalité $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire lorsqu'on le considère comme un $\mathcal{D}'$-ensemble.

PROPOSITION 1. Soit U un préunivers; il vérifie les conditions suivantes:

(U'1) *Si $E \in U$ et $E' \subset E$, on a $E' \in U$.*

(U'2) *$E \in U$ et $F \in U$ entraînent* $\{E\} \in U$, $\{E,F\} \in U$, $(E,F) \in U$, $E \cup F \in U$, $E \times F \in U$.

(U'3) *Si r est une relation d'équivalence sur $E \in U$, on a* $E/r \in U$.

(U'4) *Si $(E_i)_{i \in J}$ est une famille d'éléments de U et si $J \in U$, les ensembles somme et produit de $(E_i)_{i \in J}$ appartiennent à U.*

(U'5) *Tout élément de U est de puissance strictement inférieure à U; en particulier $U \notin U$.*

(U'6) *Toute partie de U équipotente à un élément de U appartient à U.*

Preuve. 1° Supposons $E \in U$ et $E' \subset E$. Pour tout élément x de E, posons

$E_x = \{x\}$ si $x \in E'$, $E_x = \emptyset$ si $x \in E \setminus E'$.

D'après (U1), $(E_x)_{x \in E}$ est une famille d'éléments de U, indexée par un élément de U; l'axiome (U3) entraîne que sa réunion appartient à U; or cette réunion est E'. Ainsi $\mathcal{P}(E) \subset U$. Il s'ensuit que, si r est une relation d'équivalence sur E, l'ensemble quotient E/r, qui est une partie de $\mathcal{P}(E) \in U$, appartient aussi à U.

2° Si E est un élément de U, les relations $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(E) \in U$ ont pour conséquence $\{E\} \in U$. En particulier étant donné que $\emptyset$ appartient à U, on obtient

$$1 = \{\emptyset\} \in U \quad \text{et} \quad 2 = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) \in U.$$

Soient E et F deux éléments de U. L'ensemble $E \cup F$ étant la réunion de $(E_i)_{i \in 2}$, où

$$E_0 = E, \quad E_1 = F \quad \text{et} \quad \{0,1\} = 2 \in U,$$

(U3) affirme que $E \cup F$ appartient à U. Puisque $\{E\}$ et $\{E,F\}$ appartiennent à U, on en déduit

$$\{E,F\} = \{E\} \cup \{F\} \in U \quad \text{et} \quad (E,F) = \{\{E\},\{E,F\}\} \in U.$$

Par ailleurs, si $x \in E$ et $y \in F$, alors $\{x\}$ et $\{y\}$ sont des éléments de U, d'après (U1), d'où

$$\{x,y\} = \{x\} \cup \{y\} \in U \quad \text{et} \quad (x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\} \in U.$$

En posant $E^y_x = \{(x,y)\}$ et $F_y = \bigcup_{x \in E} E^y_x$, il s'ensuit

$$E^y_x \in U, \quad F_y \in U \quad \text{et} \quad E \times F = \bigcup_{y \in F} F_y \in U.$$

3° Supposons $J \in U$ et $E_i \in U$ pour tout $i \in J$. Comme la réunion E de $(E_i)_{i \in J}$ appartient à U, nous venons de prouver que $E \times J \in U$; sa partie S somme de $(E_i)_{i \in J}$ appartient aussi à U. Il en résulte que $\mathcal{P}(S) \in U$, et le produit P de $(E_i)_{i \in J}$, qui est une partie de $\mathcal{P}(S)$ (proposition 1-4) appartient aussi à U

4° Soit E un élément de U. L'application $x \to \{x\}$ de E dans U est une injection; ainsi E est de puissance inférieure à U. Si E était équipotent à U, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ serait équipotent à $\mathcal{P}(U)$, lequel est (théorème de Cantor) de puissance strictement supérieure à U. Ceci est impossible, $\mathcal{P}(E)$ étant une partie de U. Par suite E est de puissance strictement inférieure à U. Enfin si M est une partie de U équipotente à un élément de U, on trouve $M \in U$, car M est la réunion de $(M_x)_{x \in M}$, où

$$M_x = \{x\} \in U \quad \text{pour tout } x \in M.$$

COROLLAIRE 1. Un ensemble non vide U est un préuniverse ssi il vérifie les conditions (U'1), (U2) et (U3).

Preuve. Ces conditions sont nécessaires d'après la proposition 1. Supposons-les vérifiées et soient $E \in U$ et x un élément de U. Comme $\emptyset$ et $\{x\}$ sont des parties de E, ce sont aussi des éléments de U (condition (U'1)), de sorte que U vérifie (U1), i.e. est un préunivers.

COROLLAIRE 2. Soit U un ensemble transitif; c'est un préuniverse ssi c'est une totalité; dans ce cas U est l'ensemble des parties de U de puissance inférieure à un élément de U .

Preuve. Les axiomes (A1), (A4) et (A5) équivalent respectivement aux conditions (Ut), (U2) et (U3). Lorsque (Ut) est vérifiée, (U1) équivaut aux axiomes (A2) et (A3), ce qui prouve la première affirmation. Soit U un préunivers transitif; l'ensemble L des parties de U équipotentes à un élément de U est contenu dans U (condition (U'6)); comme $E \in U$ entraîne $E \subset U$, c'est-à-dire $E \in L$, on a $U \subset L$. Au total $U = L$.

COROLLAIRE 3. Soient U un préuniverse, F et G des éléments de U. Si D vérifie l'axiome du choix (resp. Si F est fini), il existe un $F' \in U$ équipotent à F et tel que $F' \cap G = \emptyset$.

Preuve. Soit $A = P(G) \in U$. D'après la démonstration de la proposition 8-4, il existe une partie F' de $F \times A$ équipotente à F et telle que $F' \cap G = \emptyset$. Evidemment F' appartient à U, car $F \times A$ y appartient (condition (U'2)).

PROPOSITION 2. Si U est un préuniverse, D vérifie l'axiome de l'infini, U est infini et vérifie la condition (∞) (§ 7), l'ensemble Z des entiers relatifs et le produit U^n, pour tout entier n , sont des parties de U.

Preuve. 1° Soit E un élément de U. Pour tout $F \in U$ les ensembles $\{F\}$ et $E \cup \{F\}$ appartiennent à U (proposition 1). Puisque $U \notin U$, il existe un $G \in U$ tel que G n'appartienne pas à E. L'ensemble $E \cup \{G\}$ est un élément de U équipotent à $E \cup \{x\}$ pour tout $x \notin E$. Ainsi U vérifie la condition (∞); a fortiori U est infini (proposition 5-7), D vérifie l'axiome de l'infini, donc N existe.

2° $0 = \emptyset \in U$. Si un entier n appartient à U, l'entier $n+1 = n \cup \{n\}$ appartient aussi à U (proposition 1); par récurrence il s'ensuit $N \subset U$. L'entier relatif $-n$ étant par définition (§ 11) le couple $(n,0)$, c'est aussi un élément de U, de sorte que $Z \subset U$.

3° Soit $\xi = (E_i)_{i<n} \in U^n$, où $n \in N$. Comme n et E_i appartiennent à U, les ensembles

$$E'_i = \{E_i\}, \qquad E = \bigcup_{i<n} E'_i \qquad \text{et} \qquad E \times n$$

sont des éléments de U (proposition 1). Il en résulte que ξ, qui est une partie de $E \times n$, appartient à U.

COROLLAIRE 1. Soit U un préuniverse. Toute partie finie P de U est un élément de U.

En effet, P est équipotent à un entier; celui-ci appartenant à U, il en est de même pour P (condition (U'6)).

COROLLAIRE 2. Soit U un préuniverse. L'ensemble R(U) des relations associé à U est contenu dans U. Les ensembles or-

donnés $(U,\subset)$ et $(R(U),\subset)$ sont des treillis sans dernier élément, dans lesquels toute partie non vide a une borne inférieure et toute partie équipotente à un élément de U a une borne supérieure.

Preuve. Si $r = (F,\underline{r},E) \in R(U)$ (fin § 6), la partie $\underline{r}$ de $F\times E$ appartient à U, car E et F y appartiennent de sorte que r est un élément de $U\times U\times U$; ce produit étant contenu dans U d'après la proposition 2, R(U) est une partie de U. Une partie M non vide de U a pour borne inférieure dans $(U,\subset)$ l'intersection de M; si M est équipotent à un élément de U, elle admet la réunion de M pour borne supérieure dans $(U,\subset)$. Si $(U,\subset)$ avait un dernier élément E, on aurait $P(E) \subset E$, ce qui est impossible. Soit ξ une famille non vide d'éléments de R(U); elle admet pour borne inférieure dans $(R(U),\subset)$ la relation intersection de ξ, pour borne supérieure la relation réunion de ξ lorsque ξ, et a fortiori son ensemble source, est équipotent à un élément de U. Enfin si $r = (F,\underline{r},E)$ était un dernier élément de $(R(U),\subset)$, les ensembles E et F seraient tous les deux le dernier élément de $(U,\subset)$, ce qui est impossible, $(U,\subset)$ n'ayant pas de dernier élément.

PROPOSITION 3. Soient U et U' deux préunivers tels que U soit contenu dans U'. Soit U" l'ensemble des éléments de U' équipotents à un élément de U. Si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix, U" est un préunivers.

Preuve. 1° Soient E' un élément de U" et f une bijection de E' sur $E \in U$. Si A' est une partie de E', la restriction de f à $(f(A'),A')$ est une bijection et, comme f(A') appartient à U, il s'ensuit $A' \in U"$, le prolongement Pf de f étant une bijection de P(E') sur $P(E) \in U$, on trouve également $P(E') \in U"$. Ainsi U" vérifie les conditions (U1) et (U2).

2° Soit $(E'_i)_{i\in J}$ une famille d'éléments de U" indexée par $J \in U"$. Il existe une bijection g de J sur un $K \in U$. A l'aide de l'axiome du choix, on obtient pour tout $i \in J$ une bijection f_i de E'_i sur un $E_{g(i)} \in U$. La somme S de la famille $(E_k)_{k\in K}$ appartient à U, d'après la proposition 1. Soit h l'application

$$(x,g(i)) \to f_i^{-1}(x) \quad \text{de } S \text{ sur } E' = \bigcup_{i\in J} E'_i .$$

Si r_h est la relation d'équivalence associée à h, l'ensemble quotient S/r_h appartient à U (proposition 1), et il est équipotent à E', l'application

$$(x,g(i)) \bmod r_h \to f_i^{-1}(x) \quad \text{de } S/r_h \text{ dans } E'$$

étant une bijection. Donc E' est un élément de U", et U" est un préunivers.

Remarque. Un préunivers non transitif n'est pas une totalité, car il ne vérifie pas (A1). Il peut exister des préunivers non transitifs; ainsi, avec les hypothèses de la proposition 3, U" n'est généralement pas transitif, même si U et U' le sont.

Hypothèse. Nous supposons dans la fin de ce § que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome de l'infini, de sorte que N existe.

Définition. On appelle *univers* (resp. univers *transitif*) un préunivers (resp. préunivers transitif) U vérifiant l'axiome de l'infini:

(U4) Il existe un ensemble infini appartenant à U.

Un préunivers ne vérifiant pas (U4) est dit *miniunivers*.

Tout préunivers contenant un univers est un univers. Un ensemble transitif U est un univers ssi U est un modèle de la Théorie des ensembles, d'après le corollaire 2 de la proposition 1.

Définition. Soit U un préunivers. On appelle *partie finiment saturée de* U une partie M de U telle que

$\emptyset \in M$ et $E \cup \{x\} \in M$ si $E \in M$ et $\{x\} \in U$.

U est une partie finiment saturée du préunivers U; si M est une partie finiment saturée de U, elle vérifie la condition (∞); en particulier elle est infinie.

PROPOSITION 4. Soit U un préunivers. L'ensemble U_f des ensembles finis appartenant à U est un miniunivers, et U_f est l'intersection de l'ensemble L des parties finiment saturées de U. De plus U est identique à l'ensemble de ses parties finies ssi U est un miniunivers transitif.

Preuve. Les parties et l'ensemble des parties d'un ensemble fini étant finis, de même que la réunion d'une famille finie d'ensembles finis, U_f vérifie les axiomes (U'1), (U2) et (U3), i.e. est un préunivers, et c'est une partie finiment saturée de U. Par ailleurs, soit $M \in L$. Si E est un élément de U_f, considérons l'ensemble

$$M' = M \cap P(E).$$

$\emptyset$ appartient à M' et les relations $A \in M'$ et $x \in E$ entraînent $A \cup \{x\} \in M'$. Il en résulte que M est une partie finiment saturée de $P(E)$. Comme E est fini, on a

$E \in M' \subset M$. Ceci montre que U_f est contenu dans M. Donc U_f est l'intersection de L. La dernière affirmation résulte du corollaire 1 de la proposition 2.

La proposition 4 montre que tout préunivers contient un plus grand miniunivers, qui est identique au préunivers U ssi U est un miniunivers.

PROPOSITION 5. Soit U un univers. Les ensembles N, Z, Q et R (des entiers, entiers relatifs, nombres rationnels et nombres réels respectivement, voir chapitre précédent) sont des éléments de U.

Preuve. 1° Il existe un ensemble infini $E \in U$. L'ensemble P des parties finies de E appartient à U et vérifie la condition (∞). Il admet pour quotient l'ensemble dénombrable N_P des P-entiers (voir § 7). Ainsi N_P appartient à U et, a fortiori, toute suite d'éléments de U a pour réunion un élément de U (puisqu'elle est indexée par N qui est équipotent à $N_P \in U$). Comme N est la réunion de la suite $(E_n)_{n \in N}$, où $E_n = \{n\} \in U$ (d'après la proposition 2) pour tout entier n, on en déduit $N \in U$.

2° Puisque $Z = N \cup (N \times \{0\})$, les relations $N \in U$ et $0 \in U$ entraînent $N \times \{0\} \in U$, d'où $Z \in U$. L'ensemble $Q \backslash Z$ étant une partie de l'ensemble quotient de $Z \times N \in U$ par r (§ 12), on trouve $Q \backslash Z \in U$, et par suite $Q = Z \cup (Q \backslash Z) \in U$. Enfin un nombre irrationnel étant une section de $(Q, \leq)$, c'est-à-dire un élément de $P(Q) \in U$, on obtient $R \backslash Q \in U$ et, a fortiori, $R = Q \cup (R \backslash Q) \in U$.

COROLLAIRE. Soit L *un ensemble de préunivers (resp. d'univers, resp. de préunivers ou univers transitifs). L'intersection* U *de* L *est un préunivers (resp. univers, resp. préunivers ou univers transitif).*

Preuve. U est évidemment un préunivers. Si tout $U' \in L$ est un univers, on a $N \in U'$ (proposition 5), de sorte que N appartient à U, et U est un univers. Si tout élément de L est transitif, U est transitif, l'intersection d'un ensemble d'ensembles transitifs étant transitive.

Remarque. Soit U un miniunivers. Les ensembles infinis N et Z sont des parties de U (proposition 2), mais non des éléments de U. Si $q \in Q \backslash Z$, alors q n'appartient pas à U, car q est un ensemble infini (voir § 12). On pourrait cependant modifier la définition de Q, afin que Q soit contenu dans tout miniunivers: Il suffirait d'identifier q à la fraction irréductible le représentant. Par contre si U admettait pour éléments un représentant de chaque nombre réel, U aurait la puissance du continu, mais nous verrons qu'il existe des miniunivers qui sont dénombrables.

Définition. Soit E un ensemble. On dit que E *engendre un préunivers* (resp. un *univers*, resp. *un préunivers ou univers transitif*) U si $E \in U$ et si U est contenu dans tout préunivers (resp. tout univers, resp. tout préunivers ou univers transitif) dont E est un élément.

PROPOSITION 6. Soit E *un ensemble.* E *engendre un préunivers (resp. un univers, resp. un préunivers ou univers transitif) ssi il existe un préunivers (resp. un univers, resp. un préunivers ou univers transitif)* U *auquel appartient* E.

Preuve. La condition est évidemment nécessaire. Supposons-la vérifiée, et soit L l'ensemble des préunivers (resp. des univers) contenus dans U auxquels appartient E. L'intersection U' de L appartient à L (corollaire, proposition 5). Soit U" un préunivers (resp. univers) auquel appartient E. L'ensemble $U'' \cap U$ appartenant à L, on obtient $U' \subset U'' \cap U \subset U''$. Donc U' est le préunivers (resp. l'univers) engendré par E. Le raisonnement est analogue dans le cas transitif.

COROLLAIRE 1. S'il existe un univers (resp. univers transitif), il existe un plus petit univers (resp. univers transitif), à savoir celui engendré par $\emptyset$.

En effet, $\emptyset$ appartenant à tout univers, la proposition 6 affirme qu'il engendre un univers (resp. univers transitif) U_0, et celui-ci est contenu dans tout autre univers (resp. univers transitif).

COROLLAIRE 2. Il peut exister une totalité D' qui soit un modèle de la Théorie des ensembles et telle qu'aucun D'-ensemble ne soit un univers transitif.

Preuve. Si aucun D-ensemble n'est un univers transitif, D remplit les conditions. Autrement, d'après le corollaire 1, il existe un plus petit univers transitif U_0, et U_0 est un modèle de la Théorie des ensembles (corollaire 2 de la proposition 1). Or il n'existe aucun U_0-ensemble qui soit un univers transitif; en effet, s'il en

existait un, ce serait un $\mathcal{D}$-ensemble et un univers transitif strictement contenu dans U_0, ce qui est exclu par la définition de U_0.

PROPOSITION 7. Soit E *un ensemble fini.* E *engendre un préuniverse* U, *qui est un miniuniverse. Si* E *est transitif,* U *est aussi le préuniverse transitif engendré par* E. *Si* $\mathcal{D}$ *vérifie l'axiome du choix,* U *est dénombrable.*

Preuve. 1° Considérons l'ensemble V des entiers n tels qu'il existe une et une seule surjection f_n de la section $\overleftarrow{}(n+1)$ de N sur un ensemble U_n vérifiant les conditions suivantes:

(1_n) $f_n(0) = P(E)$, $f_n(m+1) = P(E \cup f_n(m))$ pour $m < n$.

(2_n) $f_n(m)$ est un ensemble fini dont les éléments sont des ensembles finis, pour tout $m \leq n$.

(3_n) On a $f_n(m) \subset f_n(m')$ si $m < m' \leq n$.

Puisque $P(E)$ est fini et que ses éléments sont les parties de E qui sont finies, 0 appartient à V.

a) Supposons $n \in V$ et montrons que $n+1 \in V$. Pour cela, considérons la surjection f_{n+1} de $\overleftarrow{}(n+2)$ sur $U_{n+1} = U_n \cup \{F\}$, où $F = P(E \cup f_n(n))$, telle que

$$f_{n+1}(m) = f_n(m) \text{ si } m \leq n, \quad f_{n+1}(n+1) = F.$$

C'est l'unique surjection d'ensemble source $\overleftarrow{}(n+2)$ vérifiant la condition (1_{n+1}). Les ensembles E et $f_n(n)$ étant finis, F est fini et les éléments de F sont finis, car ce sont des parties de l'ensemble fini $E \cup f_n(n)$; ainsi la condition (2_{n+1}) est remplie. Pour tout $m < n$, on trouve:

$$f_{n+1}(m) = f_n(m) \subset f_n(m+1) = f_{n+1}(m+1).$$

Montrons que $f_{n+1}(n) \subset f_{n+1}(n+1)$. En effet, soit A un élément de $f_{n+1}(n) = f_n(n)$. Si $n \neq 0$, de $A \subset E$ on déduit

$A \in P(E \cup f_0(0)) = f_1(1)$, d'où $f_1(0) \subset f_1(1)$. Si $n \neq 0$, les relations

$$f_n(n-1) \subset f_n(n) \quad \text{et} \quad A \in P(E \cup f_n(n-1)) = f_n(n)$$

impliquent

$A \subset E \cup f_n(n-1) \subset E \cup f_n(n)$, i.e. $A \in F = f_{n+1}(n+1)$. Ceci prouve que $f_{n+1}(n)$ est une partie de $f_{n+1}(n+1)$, et la condition (3_{n+1}) est remplie, (3_n) l'étant.

b) Il s'ensuit par récurrence $V = N$. Soit ξ la famille d'applications $(f_n)_{n \in N}$ ainsi obtenue. Si n et m sont des entiers et si $m < n$, la surjection restriction de f_n à $S = \overleftarrow{}(m+1)$ vérifie les conditions (1_m), (2_m) et (3_m), de sorte qu'elle est identique à f_m. Donc ξ est une famille compatible d'applications. L'application f réunion de ξ vérifie les conditions (1_n), (2_n) et (3_n) pour tout entier n (en remplaçant dans leurs énoncés f_n par f). Nous désignons par U la réunion de l'ensemble image de f, c'est-à-dire $U = \bigcup_{n \in N} B_n$, où $B_n = f_n(n)$.

2° Comme U est la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles finis d'après les conditions (2_n), il est dénombrable lorsque $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix (proposition 3-10). Dans tous les cas, U est formé d'ensembles finis. Soit $A \in U$. Il existe un entier n tel que $A \in f(n+1)$, i.e. $A \subset E \cup f(n)$. Les relations

$$P(A) \subset P(E \cup f(n)) = f(n+1) \subset U,$$

$$P(A) \in P(f(n+1)) \subset P(E \cup f(n+1)) = f(n+2) \subset U$$

montrent que U vérifie (U'1) et (U2). Soient $(A_i)_{i \in J}$ une famille d'éléments de U indexée par un élément J de U, et A sa réunion. Pour tout élément I de J, il existe un entier n_I tel que $A_I \subset E \cup f(n_I)$. Si n est le dernier élément de l'ensemble fini $\{n_I \mid I \in J\}$ d'entiers, on a

$A_i \subset E \cup f(n_i) \subset E \cup f(n)$ pour tout $i \in J$,

ce qui entraîne

$A \subset E \cup f(n)$ et $A \in P(E \cup f(n)) = f(n+1) \subset U$.

Par suite U est un miniunivers.

3° Soit U' un préunivers auquel appartient E. On voit par récurrence que $f(n) \subset U'$ et $f(n) \in U'$ pour tout entier n. En effet, ces relations sont vraies pour $n = 0$, puisque, par définition d'un préunivers,

$$f(0) = P(E) \subset U' \quad \text{et} \quad f(0) = P(E) \in U'.$$

Supposons-les vérifiées pour n; E et $f(n)$ appartenant à U', l'ensemble $E \cup f(n)$ appartient à U', d'où

$$f(n+1) = P(E \cup f(n)) \subset U' \quad \text{et} \quad f(n+1) \in U'.$$

Il en résulte $U \subset U'$, c'est-à-dire U est le préunivers engendré par E.

4° Supposons E transitif. D'après la proposition I-9, l'ensemble des parties d'un ensemble transitif est transitif, de même que la réunion d'une famille d'ensembles transitifs. En particulier, $f(0) = P(E)$ est transitif et, si $f(n)$ est transitif, $E \cup f(n)$ et $f(n+1) = P(E \cup f(n))$ sont transitifs. Par récurrence on en déduit que $f(n)$ est transitif pour tout entier n. A fortiori U est un miniunivers transitif. Comme U est le plus petit préunivers auquel appartienne E, c'est aussi le préunivers transitif engendré par E. Remarquons que, si E est transitif, la définition de f se simplifie, la condition (I_n) devenant:

$$f(0) = P(E) \quad \text{et} \quad f(n+1) = P(f(n)) \quad \text{pour} \quad n \in N.$$

COROLLAIRE. Il existe un plus petit miniunivers U_0, et c'est un miniunivers transitif.

En effet, U_0 est le préunivers engendré par l'ensemble

transitif $\emptyset$.

Définition. Le plus petit miniunivers U_0 sera appelé *miniunivers classique*; ses éléments sont dits *ensembles classiques héréditairement finis*.

Remarque. Soit E un ensemble fini non transitif; le préunivers U qu'il engendre peut être transitif ou non. Par exemple si l'un des éléments de E est un ensemble infini, U n'est pas transitif. Par contre si E est l'ensemble non transitif $\{1,2\}$, alors U est le miniunivers classique, car E est une partie de $3 = \{0,1,2\} \in U_0$. Nous généraliserons plus loin la proposition 7 aux ensembles infinis.

L'existence d'un univers n'étant pas conséquence des axiomes de la Théorie des ensembles (corollaire 2, proposition 6), on est conduit à considérer un nouvel axiome.

Définition. Soit D une totalité. On dit que D est *un modèle achevé de la Théorie des ensembles* si elle vérifie l'axiome suivant, dit *axiome des univers*:

(A8) Tout D-ensemble appartient à un univers.

PROPOSITION 8. Supposons que D vérifie l'axiome des univers. Alors tout ensemble engendre un univers et, si U est un univers, il existe un univers U' tel que

$$U \subset U' \quad \text{et} \quad U \in U'.$$

Preuve. La première affirmation résulte de la proposition 6. Si U est un univers, A sa réunion, l'axiome (A8) assure qu'il existe un univers U' ayant pour élément l'ensemble $\{A, \mathfrak{P}A, \mathfrak{P}\mathfrak{P}A\}$. Les relations $U \subset U'$ et $U \in U'$,

pour tout $E \in U$, entraînent $U \in U'$ et $U \subset U'$.

Remarque. Généralement, suivant Grothendieck, on appelle univers ce qui est appelé ici univers transitif et axiome des univers l'axiome suivant, que nous nommerons *axiome des univers transitifs:*

(A'8) Tout ensemble appartient à un univers transitif.

Nous verrons plus loin que, si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix, il satisfait l'axiome des univers ssi il vérifie l'axiome des univers transitifs.

16. *Ensembles bien ordonnés.*

Définition. On appelle *ensemble bien ordonné* un ensemble ordonné (E,α) dans lequel toute partie non vide de E a un premier élément; l'ordre correspondant est dit *bon ordre sur* E. Si (E,α) est un ensemble ordonné et si $A \subset E$, on dit que A est *bien ordonné dans* (E,α) si le sous-ensemble ordonné (A,α) de (E,α) est bien ordonné.

Exemples. Si (E,α) est un ensemble bien ordonné, toute partie A de E est bien ordonnée dans (E,α). Un ensemble totalement ordonné est discret ssi c'est un ensemble bien ordonné sans élément limite. Si (E,α) est un ensemble totalement ordonné, toute partie finie A de E est bien ordonnée dans (E,α), car (A,α) est discret (proposition 2-8).

Nous supposons dans ce § que (E,α) est un ensemble ordonné et nous désignons encore par $\overleftarrow{x}$ la section de (E,α) associée à $x \in E$, par $\overleftarrow{\overleftarrow{x}}$ la section formée de tous les minorants de x.

PROPOSITION 1. Soit (E,α) un ensemble bien ordonné. Il est totalement ordonné, admet un premier élément u et vérifie le principe d'induction suivant:

Si V est une partie de E telle que $u \in V$ et que $x \in V$ si $\overleftarrow{x} \subset V$, alors $V = E$.

Le but de toute suite décroissante dans (E,α) est fini.

Preuve. Si x et y appartiennent à E, la paire $\{x,y\}$ étant bien ordonnée, on a $x \alpha y$ ou $y \alpha x$, de sorte que (E,α) est totalement ordonné. u est le premier élément de E dans (E,α).-Supposons que V ait les proprlétés indiquées; si $V \neq E$, le premier élément x de $E \setminus V$ est tel que $\overleftarrow{x} \subset V$, d'où $x \in V$, ce qui est impossible. Donc $V = E$.-Enfin, soit $(x_n)_{n\in N}$ une suite décroissante dans (E,α); son but $B = \{x_n \mid n \in N\}$ admet un premier élément x_m; si $n \in N$, la relation $x_{m+n} \alpha x_{m+1} \alpha x_m$ entraîne $x_{m+n} = x_m$. Donc B a au plus m éléments.

COROLLAIRE. Si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix, un ensemble totalement ordonné (E,α) est bien ordonné ssi le but de toute suite décroissante dans (E,α) est fini.

Preuve. Si E est fini, (E,α) est discret (proposition 2-8). Prenons E infini. La condition est nécessaire (proposition 1). Supposons-la vérifiée et soit B une partie non vide de E sans premier élément. Pour tout $x \in B$, l'ensemble $B_x = \overleftarrow{x} \cap B$ est non vide; d'après l'axiome du choix, il existe une famille $(y_x)_{x\in B}$ telle que $y_x \in B_x$ pour tout $x \in B$. Soit a un élément de B. On construit par récurrence une application f de N dans B en posant $f(0) = a$ et $f(n+1) = y_{f(n)}$ pour tout entier $n \in N$. La suite $(x_n)_{n\in N}$, où $x_n = f(n)$, étant décroissante dans

(E,α), son but B' est fini et il a un premier élément x_m dans (E,α). Ceci est impossible, car x_{m+1} est un minorant strict de x_m qui appartient à B. Donc B a un premier élément dans (E,α), et (E,α) est bien ordonné.

PROPOSITION 2. Soit (E,α) un ensemble totalement ordonné. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1° (E,α) est bien ordonné.

2° Toute section propre de (E,α) est la section associée à un élément de E.

3° Toute section propre de (E,α) admet une borne supérieure et tout élément de E autre que le dernier (s'il existe) admet un suivant dans (E,α).

Preuve. 1° Si (E,α) est bien ordonné et si S est une section propre, c'est la section associée au premier élément de l'ensemble $E\backslash S$ des majorants stricts de S (proposition 2-5); ainsi la condition 1 entraîne 2.

2° Supposons vérifiée la condition 2. Soit S une section propre de (E,α); on a $S = {}^{\leftarrow}x$ pour un $x \in E$. S admet pour borne supérieure (proposition 2-5):

$$\begin{cases} \text{son dernier élément s'il existe,} \\ x \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Si y est un élément de E qui n'est pas le dernier élément de (E,α), la section ${}^{\leftrightarrow}y$ est de la forme ${}^{\leftarrow}z$, pour un certain $z \in E$; par suite z est le suivant de y dans (E,α). Ainsi la condition 3 est remplie.

3° Supposons la condition 3 satisfaite et soit A une partie non vide de E. La section S formée des minorants stricts de A admet une borne supérieure x. Si $x \notin S$,

c'est le premier élément de A. Si $x \in S$, le suivant de x dans (E,α) est le premier élément de A. Ceci prouve que (E,α) est bien ordonné.

COROLLAIRE. Soient (E,α) un ensemble bien ordonné, L l'ensemble de ses sections propres. L'application $s: x \to {}^{\leftarrow}x$ définit un isomorphisme de (E,α) sur $(L,\subset)$. Si x ne majore pas E, le suivant de $s(x)$ dans $(L,\subset)$ est ${}^{\leftrightarrow}x$.

En effet, $((L,\subset),s,(E,\alpha))$ est un isomorphisme, car s est une surjection d'après la proposition, une injection étant donné que x est le premier élément de $E\backslash {}^{\leftarrow}x$.

PROPOSITION 3. (Construction par induction). Soient G un ensemble, (E,α) un ensemble bien ordonné de premier élément u et B un ensemble d'applications b d'une section $\alpha(b)$ de (E,α) dans G. On suppose que $b' \in B$ si b' est une application d'une section propre S de (E,α) sans dernier élément dans G telle que $b'/S' \in B$ pour toute section propre S' de (S,α). Soit p une application de B dans B telle que $\alpha(p(b)) = {}^{\leftrightarrow}x$ et $b = p(b)/{}^{\leftarrow}x$ si $\alpha(b) = {}^{\leftarrow}x$. Si $b_o \in B$ et $\alpha(b_o) = \{u\}$, il existe une et une seule application f de E dans G telle que $f(u) = b_o(u)$, $f/{}^{\leftarrow}x \in B$, $f/{}^{\leftrightarrow}x = p(f/{}^{\leftarrow}x)$ si $x \in E\backslash\{u\}$.

Preuve. Si S est une section de (E,α), disons qu'une application g de S dans G est *admissible* si sa restriction à toute section propre de (S,α) appartient à B et si $g(u) = b_o(u)$ et $g/{}^{\leftrightarrow}y = p(g/{}^{\leftarrow}y)$ pour tout $y \in S\backslash\{u\}$; dans ce cas la restriction g/S' de g à une section S' de (S,α) est aussi admissible.

1° Considérons l'ensemble V des $x \in L$ tels qu'il existe une et une seule application admissible, notée f_x,

de la section $\overleftarrow{x}$ de (E,α) dans G. L'élément u appartient à V. Supposons $x \in E$ et $\overleftarrow{x} \subset V$. Si y et y' sont des minorants stricts de x, on a, par exemple, $y \alpha y'$, de sorte que f_y est une restriction de $f_{y'}$. Ainsi la famille d'applications admissibles $(f_y)_{y \in \overleftarrow{x}}$ est compatible. Sa réunion f' est une application admissible appartenant à B, car, pour tout $y \in \overleftarrow{x}$, on trouve

$$f'/\overleftarrow{y} = f_y = p(f'/\overleftarrow{y}) \in B.$$

L'application p(f') est l'unique application admissible de $\overleftarrow{x}$ dans G, de sorte que x appartient à V. D'après le principe d'induction (proposition 1), V = E.

2° Soit ξ la famille $(f_x)_{x \in E}$ d'applications admissibles ainsi obtenue. On voit comme dans la partie I que ξ est une famille compatible d'applications et que son application réunion f est une application admissible de E dans G. Si f' est une application admissible de E dans G, on a $f'/\overleftarrow{x} = f_x$ pour tout $x \in E$, car $f'/\overleftarrow{x}$ est admissible, d'où f = f'. Ceci achève la preuve.

Définition. On appelle *ensemble ordonné inductif* un ensemble ordonné (E,α) dans lequel toute partie totalement ordonnée non vide admet une borne supérieure.

Soit A un ensemble. Nous noterons W(A) la partie de $P(A) \times R(P(A))$ (voir § 6) formée des ensembles bien ordonnés (B,α) tels que B soit une partie de A. On obtient un ensemble ordonné $(W(A),\prec)$ en munissant W(A) de la relation d'ordre définie par:

$(B,\alpha) \prec (B',\alpha')$ ssi $B \subset B'$ et si (B,α) est une section ordonnée de (B',α').

PROPOSITION 4. Pour tout ensemble A, l'ensemble ordonné (W(A),$\prec$) défini ci-dessus est inductif.

Preuve. Soit M une partie totalement ordonnée non vide de $(W(A),\prec)$. Autrement dit, M est formé d'ensembles bien ordonnés $w = (B_w,\alpha_w)$ tels que B_w soit une partie de A et que, si w et w' sont des éléments de M, l'un est une section ordonnée de l'autre. Soient C la partie de A réunion de la famille $(B_w)_{w \in M}$ et r la relation sur C réunion de la famille $(r_w)_{w \in M}$ de relations, où r_w désigne l'ordre sur B_w de symbole α_w.

1° Montrons que r est un ordre. r est évidemment réflexive. Si x r y et y r z, il existe des éléments w et w' de M tels que

$$x \alpha_w y \quad \text{et} \quad y \alpha_{w'} z.$$

Comme w ou w', disons w', est une section ordonnée de l'autre, on trouve

$$x \alpha_w y \quad \text{et} \quad y \alpha_w z, \quad \text{d'où} \quad x \alpha_w z;$$

a fortiori x r z, c'est-à-dire r est transitive. Si de plus z = x, on obtient x = y. Ceci prouve que r est un ordre sur C; soit (C,α) l'ensemble ordonné correspondant.

2° Si x et y appartiennent à C, il existe des éléments w et w' de M tels que $x \in B_w$ et $y \in B_{w'}$; puisque l'un des ensembles B_w ou $B_{w'}$, disons $B_{w'}$, est une partie de l'autre, et que w est totalement ordonné, on a

$$x \alpha_w y \text{ ou } y \alpha_w x, \text{ i.e. } x \, r \, y \text{ ou } y \, r \, x.$$

Ainsi (C,α) est totalement ordonné. De plus $w \in M$ est un sous-ensemble ordonné de (C,α).

3° Montrons que $w \in M$ est une section ordonnée de (C,α). En effet, soit y un minorant dans (C,α) de $x \in B$

Il existe $w' \in M$ tel que $y \in B_{w'}$. Si $w \subset w'$, on a $y \in B_w$; dans le cas contraire, w' est une section de w et $y \in B_{w'} \subset B_w$. Donc w est un minorant de $(C,\propto)$ dans $(W(A),\subset)$, pour tout $w \in M$.

4° Soit A' une partie non vide de C. Il existe un $w \in M$ tel que $A' \cap B_w \neq \emptyset$. Dans l'ensemble bien ordonné w, $A' \cap B_w$ admet un premier élément x; celui-ci est aussi le premier élément de A' dans $(C,\propto)$, car w est une section ordonnée de $(C,\propto)$. Donc $(C,\propto)$ est un ensemble bien ordonné, et c'est la borne supérieure de M dans $(W(A),\subset)$, de sorte que $(W(A),\subset)$ est un ensemble ordonné inductif.

PROPOSITION 5. Soient A un ensemble et O(A) l'ensemble des ordres sur A. Alors $(O(A),\subset)$ est un ensemble ordonné inductif pour la relation d'ordre:

$r \subset r'$ *ssi* r *est contenue dans* r' .

Les éléments maximaux de $(O(A),\subset)$ sont les ordres totaux.

Preuve. $(O(A),\subset)$ est un sous-ensemble ordonné de l'ensemble ordonné des relations associé à A (fin § 6).

1° Soient M une partie totalement ordonnée non vide de $(O(A),\subset)$ et r la relation réunion de M. C'est une relation réflexive sur A. Si $x\,r\,y$ et $y\,r\,z$, il existe $r' \in M$ et $r'' \in M$ tels que $x\,r'\,y$ et $y\,r''\,z$. Comme M est totalement ordonné, l'une des relations r' ou r'', disons r'', est contenue dans l'autre; il s'ensuit $x\,r'\,z$, r' étant transitive. Si de plus $z = x$, on en déduit $x = y$, car r' est propre. Donc r est un ordre, qui est la borne supérieure de M dans $(O(A),\subset)$. Ceci prouve que $(O(A),\subset)$ est un ensemble ordonné inductif.

2° Soient $r = (A,\underline{r},A)$ un ordre et $(A,\propto)$ l'ensemble

ordonné correspondant. Si $(A,\propto)$ n'est pas totalement ordonné, il existe un couple $(x,y) \in A\times A$ tel que (x,y) n'appartienne pas à $\underline{r} \cup \underline{r}^{-1}$. Considérons la relation r' sur A ayant pour graphe $C' = \underline{r} \cup C$, où C est l'ensemble des couples $(z,z') \in A\times A$ tels que

$$z \propto x \quad \text{et} \quad y \propto z',$$

et montrons que c'est un ordre. En effet, r est réflexive. Supposons que (z,z') et (z',z'') appartiennent à C'. 4 cas sont à examiner:

a) Si $z \propto z'$ et $z' \propto z''$, alors $(z,z'') \in \underline{r} \subset C'$

b) Si $(z,z') \in C$ et $z' \propto z''$, les relations $z \propto x$, $y \propto z'$ et $z' \propto z''$ entraînent $y \propto z''$, ce qui signifie $(z,z'') \in C \subset C'$.

c) Si $z \propto z'$ et $(z',z'') \in C$, de même $z \propto x$ et $y \propto z''$, d'où $(z,z'') \in C \subset C'$.

d) Si $(z,z') \in C$ et $(z',z'') \in C$, on aurait $z \propto x$, $y \propto z'$, $z' \propto x$ et $y \propto z''$, et a fortiori $y \propto x$, ce qui est impossible; donc ce cas est exclu.

Ainsi r' est transitive. Si de plus $z'' = z$, le cas a donne $z = z'$, tandis que les cas b et c sont exclus, car ils entraîneraient $z \propto x$ et $y \propto z$, i.e. $y \propto x$. Ceci prouve que r' est un ordre, qui est la relation de préordre engendrée par $\underline{r} \cup \{(x,y)\}$. Comme r' est un majorant strict de r, tout élément maximal de $(O(A),\subset)$ est un ordre total.

3° Soient r un ordre total sur A et r' un majorant de r dans $(O(A),\subset)$. Supposons $(x,y) \in \underline{r}'$; étant donné que $(x,y) \in \underline{r} \cup \underline{r}^{-1}$ et que $(y,x) \in \underline{r} \subset \underline{r}'$ a pour conséquence $y = x$, on trouve $(x,y) \in \underline{r}$. Par suite $r' = r$ et r est un élément maximal de $(O(A),\subset)$.

PROPOSITION 6. Soient (E,α) *un ensemble ordonné et* L' *l'ensemble de ses parties bien ordonnées ayant un majorant strict. Soit* f *une application de* L' *dans* E *telle que* $f(B)$ *soit un majorant strict de* $B \in L'$. *Si* $c \in E$, *il existe une et une seule partie bien ordonnée* C *de* (E,α) *sans majorant strict, ayant* c *pour premier élément et telle que* $f(\overleftarrow{x} \cap C) = x$ *pour* $x \in C\setminus\{c\}$. *Si* (E,α) *est totalement ordonné,* C *est cofinal avec* (E,α).

Preuve. Si B est une partie bien ordonnée de (E,α), posons $B_x = \overleftarrow{x} \cap B$ pour tout $x \in E$. Soit L l'ensemble des parties bien ordonnées B de (E,α) ayant c pour premier élément et telles que $x = f(B_x)$ pour tout $x \in B\setminus\{c\}$.

1° Soient B et B' des éléments de L. Montrons que l'un est une section du sous-ensemble ordonné de (E,α) défini par l'autre. En effet, soit $B'' = \{x \in B \cap B' \mid B_x = B'_x\}$. Si $B\setminus B''$ est vide, B est une section de (B',α). Si $B'\setminus B''$ est vide, c'est B' qui est une section de (B,α). Supposons $B\setminus B''$ et $B'\setminus B''$ non vides. Ils admettent des premiers éléments y et y' dans les ensembles bien ordonnés (B,α) et (B',α) respectivement, et l'on a

$$y \neq c \neq y', \quad \text{car} \quad c \in B \cap B'.$$

Comme $B_y = B'' = B'_{y'}$, les égalités

$$y = f(B_y) \quad \text{et} \quad y' = f(B'_{y'})$$

entraînent $y = f(B'') = y'$, ce qui est impossible par définition de y et de y'. Donc $B = B''$ ou bien $B' = B''$.

2° Désignons par C la réunion de L et par M l'ensemble des sous-ensembles ordonnés (B,α) de (E,α) tels que $B \in L$. La partie 1 signifie que M est une partie totalement ordonnée de l'ensemble ordonné inductif $(W(E),\subset)$ (proposition 3). D'après cette proposition, M admet pour

borne supérieure dans $(W(E),\subset)$ l'ensemble bien ordonné (C,α') dont l'ordre est défini par:

$x \alpha' y$ ssi il existe $B \in L$ tel que $x \alpha y$ dans (B,α).

Deux éléments de C appartenant toujours à un même élément B de L et (B,α) étant un sous-ensemble ordonné de (E,α) il s'ensuit que (C,α') est identique au sous-ensemble ordonné (C,α) de (E,α) défini par C. Par conséquent (C,α) est bien ordonné, il admet c pour premier élément et tout élément de L pour section.

3° Pour tout $x \in C\setminus\{c\}$, il existe un $B \in L$ tel que $x \in B$, et, B étant une section de (C,α), on a

$$C_x = \overleftarrow{x} \cap C = \overleftarrow{x} \cap B = B_x,$$

d'où $x = f(B_x) = f(C_x)$. Ceci prouve que C appartient à L. Supposons que C ait un majorant strict dans (E,α) et soit $z = f(C)$. La partie $C' = C \cup \{z\}$ est bien ordonnée dans (E,α); posons $C'_y = \overleftarrow{y} \cap C'$ pour tout $y \in C'\setminus\{c\}$. Lorsque $y \in C$, on trouve $C'_y = C_y$, puisque C est une section de (C',α), et $y = f(C_y) = f(C'_y)$. Par ailleurs l'égalité $C'_z = \overleftarrow{z} \cap C' = C$ entraîne $z = f(C'_z)$. Il en résulte que C' appartient à L et, a fortiori, $C' \subset C$. Ceci étant impossible, C n'a pas de majorant strict dans (E,α). En particulier, si (E,α) est totalement ordonné, C est cofinal avec (E,α).

4° Si C' est un élément de L sans majorant strict dans (E,α), c'est une section de (C,α) d'après la partie 2, donc $C' = C$.

COROLLAIRE 1. Supposons que D *vérifie l'axiome du choix et que* (I,α) *soit un ensemble ordonné. Si* $\alpha \in I$, *il*

existe une partie bien ordonnée C *de* (E,α) *admettant* c *pour premier élément et sans majorant strict.*

Preuve. Soit L' l'ensemble des parties bien ordonnées B de (E,α) admettant un majorant strict dans (E,α) et soit E_B l'ensemble des majorants stricts de $B \in L'$. D'après l'axiome du choix, le produit de $(E_B)_{B\in L'}$ n'est pas vide. Par suite il existe une application f de L' dans E telle que $f(B) \in E_B$ pour tout $B \in L'$, et les hypothèses de la proposition 6 sont vérifiées. La partie C construite dans cette proposition satisfait le corollaire.

COROLLAIRE 2. Supposons que D vérifie l'axiome du choix et que (E,α) *soit un ensemble ordonné dans lequel toute partie bien ordonnée non vide admet un majorant. Si* $c \in E$, *il existe une partie bien ordonnée* C *ayant* c *pour premier élément et un élément maximal de* (E,α) *pour dernier élément.*

Preuve. D'après le corollaire 1, il existe une partie bien ordonnée C de (E,α) admettant c pour premier élément et sans majorant strict. Comme C admet un majorant z dans (E,α), ce z est le dernier élément de C; tout majorant strict de z étant un majorant strict de C, z est un élément maximal de (E,α).

COROLLAIRE 3. Supposons que D vérifie l'axiome du choix et soit (E,α) *un ensemble ordonné. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

1° Toute partie totalement ordonnée non vide de (E,α) *admet un majorant (resp. une borne supérieure).*

2° Toute partie bien ordonnée non vide de (E,α) *admet*

un majorant (resp. une borne supérieure).

Preuve. La condition 2 est une conséquence triviale de 1. Supposons-la vérifiée et soit A une partie totalement ordonnée non vide de (E,α). Il existe d'après le corollaire 1 une partie bien ordonnée B de (A,α) cofinale avec (A,α). Comme B est une partie bien ordonnée de (E,α), elle admet un majorant (resp. une borne supérieure) x dans (E,α). Ce x est aussi un majorant (resp. une borne supérieure) de A dans (E,α).

Remarque. La proposition 3 (construction par induction), qui généralise la construction par récurrence (corollaire de la proposition 5-8), peut aussi être obtenue comme cas particulier de la proposition 6. En effet, avec les notations de la proposition 3, considérons l'ensemble A des applications $b \in B$ dont la restriction à toute section de (E,α) contenue dans $\alpha(b)$ appartient à B. On obtient un ensemble ordonné $(A,\subset)$ pour la relation:

$b' \subset b$ ssi b' est une restriction de b.

Si M est une partie totalement ordonnée non vide de $(A,\subset)$, ayant un majorant strict, elle admet une borne supérieure h dans $(A,\subset)$, et $p(h)$ en est un majorant strict. Par suite la proposition 6 affirme qu'il existe une partie bien ordonnée C de $(A,\subset)$ telle que $b_o \in C$ et sans majorant strict. On voit que l'application f dont la proposition 3 assure l'existence est l'unique application de E dans G dont tout élément de C est une restriction.

PROPOSITION 7. Les conditions 1,2,3 sont équivalentes:

1° D vérifie l'axiome du choix.

2° Tout ensemble ordonné inductif admet un élément maximal (Théorème de Zorn).

3° Sur tout ensemble, il existe un bon ordre (Théorème de Zermelo).

Preuve. Le théorème de Zorn résulte de l'axiome du choix, d'après le corollaire 2 de la proposition 6. Supposons la condition 2 vérifiée et soit A un ensemble. L'ensemble ordonné $(W(A),\subset)$ des bons ordres sur les parties de A étant inductif (proposition 3), il admet un élément maximal (B,α); soit r_B l'ordre sur B de symbole α. Nous allons montrer que $A = B$; il s'ensuivra que r_B est un bon ordre sur A. En effet, supposons qu'il existe un $y \in A\backslash B$. La relation sur $B' = B \cup \{y\}$ de graphe

$$\underline{r} = \underline{r_B} \cup (B' \times \{y\})$$

est un bon ordre r sur B'; l'ensemble ordonné (B',α) correspondant admet (B,α) pour section ordonnée et y pour dernier élément. Par suite (B',α) est un majorant strict de (B,α) dans $(W(A),\subset)$, ce qui est impossible, (B,α) étant maximal. Donc $A = B$, et le théorème de Zermelo est vrai.

2° Supposons la condition 3 satisfaite. Soient $(E_i)_{i\in J}$ une famille non vide d'ensembles non vides, A sa somme et A_i la partie $E_i \times \{i\}$ de A, pour tout $i \in J$. Par hypothèse il existe un bon ordre sur A. Dans l'ensemble bien ordonné (A,α) correspondant, la partie non vide A_i a un premier élément (x_i,i). La famille $(x_i)_{i\in J}$ ainsi obtenue appartient au produit de $(E_i)_{i\in J}$. Ce produit n'est donc pas vide, de sorte que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix.

COROLLAIRE 1. Supposons que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix et soit A un ensemble. Si r est un ordre sur A, il existe un ordre total sur A contenant r.

Preuve. D'après la proposition 5, l'ensemble ordonné $(O(A),\subset)$ des ordres sur A est inductif, et ses éléments maximaux sont les ordres totaux. Le corollaire 2 de la proposition 6 affirme qu'il existe un élément maximal r' de $(O(A),\subset)$ contenant r. Par suite r' est un ordre total sur A.

COROLLAIRE 2. Soit (E,α) un ensemble ordonné. Si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix et si A est une partie totalement ordonnée de (E,α), il existe une partie totalement ordonnée C de (E,α) contenant A et qui n'est partie propre d'aucune partie totalement ordonnée de (E,α).

Preuve. Soit $(T,\subset)$ le sous-ensemble ordonné du treillis des parties de E formé des parties totalement ordonnées de (E,α). Alors $(T,\subset)$ est un ensemble ordonné inductif. En effet, soient M une partie totalement ordonnée de $(T,\subset)$ et B sa réunion. Si x et y appartiennent à B, il existe un $F \in M$ tel que $x \in F$ et $y \in F$; comme F est une partie totalement ordonnée de (E,α), on a $x \alpha y$ ou $y \alpha x$ dans (B,α), d'où $B \in T$. D'après le théorème de Zorn, il existe un élément maximal C de $(T,\subset)$ dont A est le premier élément, ce qui prouve le corollaire

Remarque. Beaucoup de résultats valables pour *tous* les ensembles si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix sont vrais, même si $\mathcal{D}$ ne vérifie pas cet axiome, pour les ensembles sur lesquels il existe un bon ordre. Par exemple:

1° Soit $(I_i,\alpha_i)_{i\in J}$ une famille d'ensembles bien or-

donnés; le produit P de $(E_i)_{i\in J}$ n'est pas vide; en effet il a au moins pour élément $(0_i)_{i\in J}$, où 0_i est le premier élément de (E_i,α_i).

2° Si (F,α) est un ensemble bien ordonné et f une surjection de F sur E, alors E est de puissance inférieure à F; car on définit une injection de E dans F en associant à $x \in E$ le premier élément de $f^{-1}(\{x\})$. On généralise de même la proposition 7-4.

17. Applications bien ordonnées.

PROPOSITION 1. Soient (E,α) un ensemble bien ordonné, (S,α) une section ordonnée de (E,α) et $((E,\alpha),f,(S,\alpha))$ une application ordonnée. Si f est une injection, on a $x \alpha f(x)$ pour tout $x \in E$.

Preuve. Soit A l'ensemble des $x \in E$ tels que x soit un majorant strict de $f(x)$. Si A n'est pas vide, il admet un premier élément x. Les relations

$$f(y) \neq f(x) \quad \text{et} \quad y \alpha f(y) \alpha f(x)$$

pour tout minorant strict y de x entraînent que $f(x)$ est un majorant strict de la section $\overleftarrow{x}$, d'où $x \alpha f(x)$. Ceci étant impossible, $A = \emptyset$.

COROLLAIRE 1. Soit (A,α) un sous-ensemble ordonné de l'ensemble bien ordonné (E,α); alors (E,α) n'est isomorphe à aucune section propre ordonnée de (A,α).

Preuve. Supposons qu'il existe un isomorphisme

$$((S,\alpha),f,(E,\alpha)),$$

où (S,α) est une section ordonnée propre de (A,α). L'ensemble C des majorants stricts de S dans (E,α) n'étant

pas vide, il a un premier élément x. Comme $f(x)$ appartient à S, on trouve $f(x) \alpha x \neq f(x)$. Ceci est impossible, car la proposition 1 montre que $x \alpha f(x)$.

COROLLAIRE 2. Si (E,α) est un ensemble bien ordonné et $((E,\alpha),f,(E,\alpha))$ un isomorphisme, f est l'application identique de E.

En effet, soit $x \in E$; d'après la proposition 1, on a $x \alpha f(x)$. Puisque $((E,\alpha),f^{-1},(E,\alpha))$ est aussi un isomorphisme, $x \alpha f^{-1}(x)$, d'où $f(x) \alpha x$. Au total $x = f(x)$.

PROPOSITION 2. Soient (E,α) et (E',α') des ensembles bien ordonnés. Il existe au plus un isomorphisme F de (E,α) sur une section ordonnée de (E',α'). Si G est un isomorphisme de (E',α') sur une section ordonnée (S,α) de (E,α) et si F existe, alors $S = E$ et G est l'inverse de F.

Preuve. 1° Supposons que f et f' définissent des isomorphismes F et F' de (E,α) sur des sections ordonnées (S',α') et (S'',α') de (E',α'). L'une des sections S' ou S'', disons S'', est contenue dans l'autre, et $f'\circ f^{-1}$ définit l'isomorphisme $F'\circ F^{-1}$ de (S',α') sur sa section ordonnée (S'',α'). D'après le corollaire 1 de la proposition 1, il s'ensuit $S' = S''$, d'où, en utilisant le corollaire 2, $f'\circ f^{-1} = 1_{S'}$, c'est-à-dire $f' = f$.

2° Supposons de plus que $G = ((S,\alpha),g,(E',\alpha'))$ soit un isomorphisme et (S,α) une section ordonnée de (E,α). La restriction g' de g à $(g(S'),S')$ définit un isomorphisme de (S',α') sur une section ordonnée (S_1,α) de (S,α), de sorte que $g'\circ f$ définit un isomorphisme de (E,α) sur sa section ordonnée (S_1,α). On en déduit $S_1 = E$ (co-

rollaire 1, proposition 1) et $S = E$, $S' = E'$, $G = F^{-1}$.

PROPOSITION 3. Soient (E,α) et (E',α') deux ensembles bien ordonnés. Il existe un isomorphisme de (E,α) sur une section ordonnée de (E',α') ou un isomorphisme de (E',α') sur une section ordonnée de (E,α).

Preuve. Soit M l'ensemble des isomorphismes

$$w = ((S'_w,\alpha'),f_w,(S_w,\alpha))$$

d'une section ordonnée de (E,α) sur une section ordonnée de (E',α'). Si w et w' appartiennent à M, l'une des sections S_w ou $S_{w'}$, disons $S_{w'}$, est contenue dans l'autre. La restriction de f_w à $(f_w(S_{w'}),S_{w'})$ définit un isomorphisme de $(S_{w'},\alpha)$ sur une section ordonnée de (E',α'). D'après la proposition 2, elle est identique à $f_{w'}$. Ainsi la famille $(f_w)_{w\in M}$ d'applications est compatible; soit f son application réunion. L'ensemble source $S = \bigcup_{w\in M} S_w$ de f est une section de (E,α), son ensemble but S' est une section de (E',α'). Si $S' \neq E'$, alors S' est la section $\overleftarrow{x}'$ associée à un $x' \in E'$ (proposition 2-16). Si $S \neq E$, on a $S = \overleftarrow{x}$, pour un $x \in E$. Si ces deux conditions sont vérifiées, l'application g de $\overleftarrow{x}$ sur $\overleftarrow{x}'$ telle que

$$y \to f(y) \quad \text{si} \quad y \in S, \quad x \to x'$$

définit un isomorphisme de $(\overleftarrow{x},\alpha)$ sur $(\overleftarrow{x}',\alpha')$, ce qui est impossible par construction de f. Par suite $S = E$ ou bien $S' = E'$.

COROLLAIRE 1. Soit (E,α) un ensemble bien ordonné, où E est infini; il existe un et un seul isomorphisme f de l'ensemble ordonné $(N,\leq)$ des entiers sur une section ordonnée de (E,α). Pour tout $x \in E$, alors E est équipotent à $E' = E\setminus\{x\}$.

Preuve. $(N,\leq)$ est bien ordonné; ses sections propres S_n sont finies, de sorte que S n'est isomorphe ni à (E,α) ni à (E',α'). Donc (proposition 3) f existe, et N est de puissance inférieure à E. Il s'ensuit (corollaire 3, proposition 5-10) que E' est équipotent à $E = E' \cup \{x\}$.

COROLLAIRE 2. Si D vérifie l'axiome du choix, de deux ensembles, l'un est de puissance inférieure à l'autre.

En effet, soient E et E' deux ensembles. D'après le théorème de Zermelo, il existe des ensembles bien ordonnés (E,α) et (E',α'). La proposition 3 montre que l'un est isomorphe à une section ordonnée de l'autre.

Définition. On appelle *application bien ordonnée* un triplet $((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$, où (E,α) et (E',α') sont des ensembles bien ordonnés et f une application de E dans E' telle que $f(x)$ soit le premier élément de $E'\setminus f(\overleftarrow{x})$, pour tout $x \in E$.

Un isomorphisme entre ensembles bien ordonnés est une application bien ordonnée.

PROPOSITION 4. Soit $F = ((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$ une application bien ordonnée. F est une application ordonnée et la restriction de f à $(f(E),E)$ définit un isomorphisme de (E,α) sur une section ordonnée de (E',α').

Preuve. 1° Soit u le premier élément de (E,α); alors $f(u)$ est le premier élément de (E',α'), car $\overleftarrow{u} = \emptyset$. Soient x et y deux éléments de E tels que $x \alpha y$. La relation $\overleftarrow{x} \subset \overleftarrow{y}$ entraîne $f(\overleftarrow{x}) \subset f(\overleftarrow{y})$, d'où

$f(x) \alpha' f(y)$. Si V est l'ensemble des x tels que $f/^{\leftarrow}x$ soit une injection et si $^{\leftarrow}y \subset V$, alors $f(y)$ n'appartient pas à $f(^{\leftarrow}y)$, de sorte que $y \in V$. Par suite (principe d'induction) $V = E$ et f est une injection.

2° Si f est une surjection, F est un isomorphisme. Dans le cas contraire, $E' \backslash f(E)$ admet un premier élément x' dans (E',α'). Supposons que la section A de (E,α) formée des $x \in E$ tels que $f(x) \alpha' x'$ soit propre; $E \backslash A$ a un premier élément y dans (E,α), et l'on trouve

$$f(^{\leftarrow}y) = {}^{\leftarrow}x' , \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(y) = x'.$$

Ceci étant impossible, $A = E$, et $f(E)$ est une section S' de (E',α'). Il en résulte que la bijection restriction de f à (S',E) définit un isomorphisme de (E,α) sur la section ordonnée (S',α') de (E',α').

COROLLAIRE 1. Soient (E,α) et (E',α') des ensembles bien ordonnés. Il existe au plus une application bien ordonnée de (E,α) vers (E',α'); s'il n'en existe pas, il existe une et une seule application bien ordonnée de (E',α') vers (E,α). Si $((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$ et $((E,\alpha),g,(E',\alpha'))$ sont des applications bien ordonnées, f est une bijection inverse de g.

En effet, une application f de E dans E' définit une application bien ordonnée $((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$ ssi sa restriction à $(f(E),E)$ définit un isomorphisme de (E,α) sur une section ordonnée de (E',α'), d'après la proposition 4. Donc le corollaire est une autre formulation des propositions 2 et 3.

COROLLAIRE 2. Soient (E,α) et (E',α') deux ensembles bien ordonnés. Si $((E',\alpha'),f,(E,\alpha))$ est une application ordonnée et f une injection, il existe une application bien ordonnée de (E,α) vers (E',α').

Preuve. S'il n'en existe pas, il existe, d'après le corollaire 1, une application bien ordonnée de (E',α') vers (E,α), c'est-à-dire (E',α') est isomorphe à une section ordonnée propre (S,α) de (E,α). Il s'ensuit que (E',α') est aussi isomorphe à la section ordonnée propre $(f(S),\alpha)$ de son sous-ensemble ordonné $(f(E),\alpha')$, ce qui est impossible d'après le corollaire 1 de la proposition 1. Donc c'est (E,α) qui est isomorphe à une section ordonnée de (E',α').

Hypothèse. Dans la fin de ce § nous nous donnons un ensemble totalement ordonné (J,α) et une famille d'ensembles ordonnés $\xi = (E_i,\alpha_i)_{i \in J}$ indexée par J. Nous désignons par S la somme, par P le produit, de la famille $(E_i)_{i \in J}$.

PROPOSITION 5. Soit (S,α) la somme (J,α)-ordonnée de ξ (voir § 6). Alors (S,α) est bien ordonné ssi (J,α) est bien ordonné de même que (E_i,α_i) pour tout $i \in J$.

Preuve. 1° Supposons (J,α) et les (E_i,α_i) bien ordonnés. Soit A une partie non vide de S. Dans l'ensemble bien ordonné (J,α), la source de l'ensemble de couples A admet un premier élément j. L'ensemble A_j des $x \in E_j$ tels que $(x,j) \in A$ n'étant pas vide, il a un premier élément x' dans l'ensemble bien ordonné (E_j,α_j). Il s'ensuit que (x',j) est le premier élément de A dans $(S,\alpha$ et (S,α) est un ensemble bien ordonné.

2° Supposons (S,α) bien ordonné. (E_i,α_i) étant isomorphe à un sous-ensemble ordonné de (S,α), il est bien ordonné, pour tout $i \in J$. Si u_i est le premier élément de (E_i,α_i), l'application $i \to (u_i,i)$ de J sur une partie J' de S définit un isomorphisme de (J,α) sur le sous-ensemble ordonné (J',α) de (S,α). Donc (J,α) est bien ordonné.

COROLLAIRE. Si (E,α) est un ensemble bien ordonné et si E est infini, la somme ordonnée

$$(E',\alpha') \quad de \quad (\{b\},=),(E,\alpha))$$

est isomorphe à (E,α).

Preuve. (E',α') est bien ordonné d'après la proposition 5, de sorte qu'il existe (corollaire 2, proposition 3) une section ordonnée (C,α') de (E',α') isomorphe à $(N,\leq)$ On définit une bijection g de E' sur E en associant:

à $(b,0)$ le premier élément u de (E,α),

à $(x,1)$, où $x \in C$, le suivant de x dans (E,α),

à $(y,1)$, où $y \in E\backslash C$, l'élément y.

f définit un isomorphisme de (E',α') sur (E,α).

PROPOSITION 6. Supposons (J,α) bien ordonné. Il existe un ensemble ordonné (P,α) dont l'ordre a pour graphe l'ensemble $\underline{r}$ des couples $((x_i)_{i\in J},(y_i)_{i\in J}) \in P\times P$ tels que $J' = \{j \in J \mid x_j \neq y_j\}$ soit vide ou que l'on ait $x_i \alpha_i y_i$ pour son premier élément i dans (J,α). Si (E_i,α_i) est totalement ordonné pour tout $i \in J$, alors (P,α) est totalement ordonné.

Preuve. 1° La relation $r = (P,\underline{r},P)$ est réflexive. Supposons $(x,y) \in \underline{r}$ et $(y,z) \in \underline{r}$, où

$$x = (x_i)_{i\in J}, \quad y = (y_i)_{i\in J} \quad et \quad z = (z_i)_{i\in J}.$$

Notons A l'ensemble des $i \in J$ tels que $x_i = y_i = z_i$. Si $A = J$, on a $x = y = z$. Dans le cas contraire $J\backslash A$ admet un premier élément j, et $x_i = z_i$ si $j \neq i \alpha j$.

a) Si $x_j = y_j$, alors $y_j \alpha_j z_j$, d'où $x_j \alpha_j z_j$.

b) Si $x_j \neq y_j$, on a $x_j \alpha_j y_j$ et $y_j \alpha_j z_j$, c'est-à-dire $x_j \alpha_j z_j$.

Donc $x \alpha z$, et $x = y$ si de plus $z = x$. Ceci prouve que r est un ordre; soit (P,α) l'ensemble ordonné correspondant.

2° Supposons (E_i,α_i) totalement ordonné pour tout $i \in J$ et soit $x = (x_i)_{i\in J}$ et $y = (y_i)_{i\in J}$ des éléments distincts de P. L'ensemble des $j \in J$ tels que $x_j \neq y_j$ a un premier élément i dans (J,α). Comme

$$x_i \alpha_i y_i \quad ou \quad y_i \alpha_i x_i,$$

on trouve $x \alpha y$ ou $y \alpha x$. Par suite (P,α) est totalement ordonné.

COROLLAIRE 1. Reprenons les notations de la proposition 6 et supposons que (E_i,α_i) ait un premier élément u_i pour tout $i \in J$. Alors (E_i,α_i) est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de (P,α). Si (E_i,α_i) est bien ordonné et si E_i a au moins deux éléments, (J,α) est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de (P,α).

Preuve. 1° Soit $j \in J$. A $x_j \in E_j$, associons la famille $f(x_j) = (x_i)_{i\in J}$ telle que

$$x_i = u_i \quad pour\ tout\ i \in J\backslash\{j\}.$$

La bijection $x_j \to f(x_j)$ définit un isomorphisme de (E_j,α_j) sur un sous-ensemble ordonné de (P,α).

2° Supposons (I_i,α_i) bien ordonné et E_i à au moins deux éléments pour tout $i \in J$. Alors u_i admet un suivant

b_i. Si $J \in \mathcal{J}$, notons x^J la famille $(x^J{}_i)_{i\in J}$, où

$$x^J{}_i = b_i \text{ si } i \in J\backslash\{j\}, \quad x^J{}_j = u_j.$$

La bijection $J \to x^J$ définit un isomorphisme de (J,α) sur un sous-ensemble ordonné de (P,α).

COROLLAIRE 2. Si, avec les notations de la proposition 6, (P,α) est totalement ordonné et admet un premier élément $u = (u_i)_{i\in J}$, alors (E_i,α_i) est totalement ordonné et admet u_i pour premier élément, pour tout $i \in J$.

Preuve. Soient $j \in J$ et $x_j \in E_j$. La famille $y = (y_i)_{i\in J} \in P$, où

$$y_j = x_j \text{ et } y_i = u_i \text{ si } i \in J\backslash\{j\},$$

majorant u dans (P,α), on obtient $u_j \alpha_j x_j$. Ainsi (E_j,α_j) admet u_j pour premier élément et, d'après le corollaire 1, il est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de (P,α). Ce dernier étant totalement ordonné, il en est de même pour (E_j,α_j).

Définition. Avec les notations de la proposition 6, on appelle (P,α) le *produit (J,α)-lexicographique de ξ* (resp. produit lexicographique de ξ, si (J,α) est une section ordonnée de $(N,\leq)$).

PROPOSITION 7. Supposons (J,α) bien ordonné et P non vide. Le produit (J,α)-lexicographique (P,α) de ξ est bien ordonné ssi (E_i,α_i) est bien ordonné pour tout $i \in J$ et si l'ensemble J' des $i \in J$ tels que E_i ait au moins deux éléments est fini.

Preuve. L'application $(x_i)_{i\in J} \to (x_j)_{j\in J'}$ de P sur $P' = \prod_{j\in J'} E_j$ définissant un isomorphisme de (P,α) sur le produit (J',α)-lexicographique de $(E_j,\alpha_j)_{j\in J'}$, on peut supposer $J = J'$. Considérons d'abord le cas où P est fini. (P,α) est totalement ordonné ssi il est bien ordonné (corollaire, proposition 2-8); d'après la proposition 6 et son corollaire 2 il en est ainsi ssi les (E_i,α_i) sont totalement ordonnés et ont des premiers éléments; mais alors le corollaire 1 de la proposition 6 dit que (E_i,α_i) est bien ordonné, et que les E_i sont finis ainsi que J. Supposons donc P infini. Alors N existe.

1° Supposons (E_i,α_i) bien ordonné pour tout $i \in J$ et J fini. Il existe un isomorphisme $((\overleftarrow{n},\leq),f,(J,\alpha))$ sur une section ordonnée de $(N,\leq)$. Pour tout entier $m < n$, posons $\hat{m} = f^{-1}(m)$ et soit p_m la projection canonique de P sur $E_{\hat{m}}$. Soit M une partie non vide de P. Nous définissons une suite finie $(y_m)_{m<n}$ comme suit:

y_0 est le premier élément de $p_0(M)$ dans $(E_{\hat{0}},\alpha_{\hat{0}})$.

Soit $m < n$ et supposons définie une suite $(y_k)_{k<m}$ finie vérifiant $M_m \neq \emptyset$ si M_m désigne l'ensemble des $(x_i)_{i\in J} \in M$ tels que $x_{\hat{m}'} = y_{m'}$ pour tout entier $m' < m$. Notons alors y_m le premier élément de $p_m(M_m) \neq \emptyset$ dans $(E_{\hat{m}},\alpha_{\hat{m}})$; l'ensemble M_{m+1} n'est évidemment pas vide.

Par récurrence nous construisons ainsi une suite finie $(y_m)_{m<n}$. La famille $(x_i)_{i\in J}$, où $x_i = y_{f(i)}$ pour tout $i \in J$, est le premier élément de M dans (P,α). Par conséquent (P,α) est bien ordonné.

2° Inversement, supposons (P,α) bien ordonné et soit $u = (u_i)_{i\in J}$ son premier élément. D'après le corollaire 2 de la proposition 6, (E_i,α_i) est un ensemble totalement ordonné dont u_i est le premier élément, et il est isomor-

phe à un sous-ensemble ordonné de (P,α), donc bien ordonné. Supposons de plus J infini et soit $b = (b_i)_{i\in J} \in P$, où b_i est le suivant de u_i dans (E_i,α_i) (qui existe, car nous avons supposé $J = J'$). D'après le corollaire de la proposition 3, il existe un isomorphisme $((K,\alpha),g,(N,\leq))$ sur une section ordonnée de (J,α). Pour tout entier n, désignons par ξ_n la famille $(x^n_i)_{i\in J} \in P$, où

$$x^n_{g(n)} = b_{g(n)} \quad \text{et} \quad x^n_j = u_j \quad \text{si} \quad j \in J\setminus\{g(n)\}.$$

La suite $(\xi_n)_{n\in N}$ a son but infini et est décroissante dans (P,α). La proposition I-16 montre que ceci est impossible, (P,α) étant bien ordonné. Par suite J est fini.

Remarque. La fin de la démonstration précédente montre que le sous-ensemble de P formé des familles $(x_i)_{i\in J} \in P$ telles que $x_i = u_i$ sauf pour un nombre fini d'indices i n'est pas non plus une partie bien ordonnée de (P,α).

PROPOSITION 8. Supposons que (E_i,α_i) ait un premier élément u_i pour tout $i \in J$ et soit C l'ensemble des $(x_i)_{i\in J} \in P$ tels que l'ensemble des $i \in J$ vérifiant $x_i \neq u_i$ soit fini. (C,α) est un ensemble ordonné ayant un sous-ensemble ordonné isomorphe à (E_i,α_i), le graphe de l'ordre r étant formé des couples $((x_i)_{i\in J},(y_i)_{i\in J})$ tels que

$x_i = y_i$ pour tout $i \in J$, ou que $x_j \alpha_j y_j$ lorsque j est le dernier élément de $\{i \in J \mid x_i \neq y_i\}$.

(C,α) admet $(u_i)_{i\in J}$ pour premier élément. Il est totalement ordonné ssi (E_i,α_i) l'est pour tout $i \in J$.

Preuve. 1° Soient $x = (x_i)_{i\in J}$ et $y = (y_i)_{i\in J}$ des éléments de C. L'ensemble J' formé des $i \in J$ tels que

$x_i \neq y_i$ est fini. Si $J' = \emptyset$, on a $x = y$. Si $J' \neq \emptyset$, l'ensemble ordonné discret (J',α) a un dernier élément j. Il en résulte que la relation r considérée dans l'énoncé sur C est bien définie, réflexive et propre. Supposons que l'on ait aussi $z = (z_i)_{i\in J} \in C$ et que $x\ r\ y$ et $y\ r\ z$. Soient j' le dernier élément de

$$J'' = \{i \in J \mid y_i \neq z_i\}$$

et j'' la borne supérieure de (j,j') dans (J,α). Alors j'' est le dernier élément de $\{i \in J \mid x_i \neq z_i\}$. En effet, ceci est évident si $j \neq j'$. Si $j = j'$, les relations

$$x_j \alpha_j y_j \alpha_j z_j \quad \text{entraînent} \quad x_j \neq z_j$$

(sans quoi $x_j = y_j = z_j$). On en déduit $x_{j''} \alpha_{j''} z_{j''}$, car $x_{j''} \alpha_{j''} y_{j''}$ et $y_{j''} \alpha_{j''} z_{j''}$, d'où $x\ r\ z$. Ainsi r est un ordre. Evidemment $(u_i)_{i\in J}$ est le premier élément de (C,α).

2° L'application associant à $x_i \in E_i$ la famille

$$(x_j)_{j\in J}, \quad \text{où} \quad x_j = u_j \quad \text{pour tout} \quad j \in J\setminus\{I\},$$

définit un isomorphisme de (E_i,α_i) sur un sous-ensemble ordonné de (C,α). Il s'ensuit que (E_i,α_i) est totalement ordonné lorsque (C,α) l'est. Enfin si (E_i,α_i) est totalement ordonné pour tout $i \in J$, une démonstration analogue à celle de la proposition 6 prouve que (C,α) est totalement ordonné.

COROLLAIRE. Avec les notations de la proposition 8 et si (E_i,α_i) est un ensemble bien ordonné tel que E_i ait au moins deux éléments pour tout $i \in J$, alors (J,α) est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de (C,α).

Preuve. (E_i,α_i) a un premier élément u_i et u_i admet un suivant b_i. La bijection associant à $j \in J$ la famille

$(x^j_i)_{i\in J} \in C$, où $x^j_j = b_j$, $x^j_i = u_i$ si $i \in J\setminus\{j\}$, définit un isomorphisme de (J,α) sur un sous-ensemble ordonné de (C,α).

Définttion. Avec les hypothèses de la proposition 8, on appelle (C,α) le *produit* (J,α)*-colexicographique de* ξ (resp. produit colexicographique de ξ si (J,α) est une section ordonnée de $(N,\leq)$).

Hypothèse. Lorsque nous parlons du produit (J,α)-colexicographique de ξ, nous supposons que (E_i,α_i) a un premier élément u_i pour tout $i \in J$.

Exemples. 1° Soit (C,α) le produit (J,α)-colexicographique de ξ. Si J est fini, $C = P$ et (J,α) est discret; alors (C,α) est identique au produit $(J,\gg)$-lexicographique de ξ.

2° Soient (E,α) et (E',α') deux ensembles bien ordonnés. L'ensemble $E'\times E$ est identique à la somme de $(E'_x)_{x\in E}$, où $E'_x = E'$ pour tout élément x de E. Il en résulte que le produit colexicographique de $((E',\alpha'),(E,\alpha))$ est identique à la somme (E,α)-ordonnée de la famille $(E'_x,\alpha')_{x\in E}$, les ordres étant évidemment les mêmes.

3° Soit c la bijection de $P(J)$ sur 2^J qui associe à une partie de J le graphe de sa fonction caractéristique. Soit (C,α) le produit (J,α)-colexicographique de

$$(E_x,\leq)_{x\in J}, \text{ où } E_x = \{0,1\} \text{ et } 0 \leq 1$$

pour tout $x \in J$. Comme la partie A de J est finie ssi $c(A)$ appartient à C, il existe un ordre sur l'ensemble $P_f(J)$ des parties finies de J tel que $(P_f(J),\alpha)$ soit isomorphe à (C,α). Cet ordre est total.

Supposons que $\xi' = (E'_j,\alpha'_j)_{j\in J'}$ soit une famille d'ensembles ordonnés et que

$\hat{f} = ((J,\alpha),f,(J',\alpha'))$ et $\hat{g}_j = ((E_{f(j)},\alpha_{f(j)}),g_j,(E'_j,\alpha'_j))$,

pour tout $j \in J'$, soient des applications ordonnées, f étant une injection. L'application h:

$$(y,j) \quad (g_j(y),f(j)) \quad \text{de} \quad S' = \sum_{j\in J} E'_j \quad \text{dans} \quad S$$

définit une application ordonnée $\hat{h}$ de (S',α') vers $(S,\alpha$ où (S,α) et (S',α') sont les sommes (J,α)-ordonnée de ξ et (J',α')-ordonnée de ξ'.

Si de plus (E'_j,α'_j) a un premier élément u'_j, si g_j est une injection pour tout $j \in J'$ et si (J',α') est totalement ordonné, l'application h':

$$(y_j)_{j\in J'} \to (x_i)_{i\in J}, \text{ où } x_{f(j)} = g_j(y_j) \text{ si } j \in J',$$
$$x_i = u_i \text{ si } i \in J\setminus f(J'),$$

définit une application ordonnée $\hat{h}' = ((C,\alpha),h',(C',\alpha'))$, où (C,α) et (C',α') sont les produits (J,α)-colexicographique de ξ et (J',α')-colexicographique de ξ' ; l'application h' est une injection.

Définition. Avec les notations précédentes, $\hat{h}$ est appelée *l'application somme* $\hat{f}$*-ordonnée de* $(\hat{g}_j)_{j\in J'}$, et $\hat{h}'$ l'application *produit* $\hat{f}$*-colexicographique de* $(\hat{g}_j)_{j\in J'}$.

En particulier, $\hat{h}$ et $\hat{h}'$ sont des isomorphismes si f et g_j, pour tout $j \in J'$, sont des bijections.

Si (J',α) est un sous-ensemble ordonné de (N,α), désignons par $(M_{J'},\alpha)$ la somme (J',α)-ordonnée (resp. le produit (J',α)-colexicographique) de $(E_j,\alpha_j)_{j\in J'}$.

PROPOSITION 9. Avec les notations précédentes, si (J',α) *est une section ordonnée de* (J,α), *alors* $(M_{J'},\alpha)$ *est (resp. est isomorphe à) une section ordonnée de* (M_J,α). *Si* $((L,\alpha),f,(J,\alpha))$ *est un isomorphisme, où* (L,α) *est la somme* (K,α)*-ordonnée d'une famille* $(J_k,\alpha_k)_{k\in K}$ *de sous-ensembles ordonnés de* (J,α), *il existe un isomorphisme* v *de* (M_J,α) *sur la somme* (K,α)*-ordonnée (resp. sur le produit* (K,α)*-colexicographique)* (C',α) *de* $(M_{J_k},\alpha)_{k\in K}$.

Preuve. L'application identique (resp. l'application

$$(x_i)_{i\in J'} \to (x_i)_{i\in J}\ ,\quad \text{où}\quad x_i = u_i \quad \text{si}\quad i \in J\backslash J'$$

est une bijection de $M_{J'}$ sur une section de (M_J,α). Par ailleurs l'isomorphisme v est défini par la bijection:

$$(x,i) \to ((x,i_k),k) \quad \text{si}\quad f(i) = (i_k,k)$$

(resp. $(x_i)_{i\in J} \to (y_k)_{k\in K'}$ où $y_k = (x_i)_{i\in J_k}$ si $k \in K$) de M_J sur C'.

La deuxième affirmation de la proposition 9 signifie qu'il y a "associativité à un isomorphisme près" de la somme ordonnée et du produit colexicographique.

PROPOSITION 10. Le produit (J,α)*-colexicographique* (C,α) *de* $(E_i,\alpha_i)_{i\in J}$ *est bien ordonné ssi* (E_i,α_i) *est bien ordonné pour tout* $i \in J$ *et si l'ensemble* J' *des* $i \in J$ *tels que* E_i *ait au moins deux éléments est une partie bien ordonnée de* (J,α).

Preuve. Comme dans la proposition 7, on se ramène au cas où $J = J'$. Si (C,α) est bien ordonné, (E_i,α_i) l'est aussi, car il est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de (C,α) (proposition 8), et il résulte du corollaire de la

proposition 8 que (J,α) est bien ordonné. Inversement, supposons (J,α) et les (E_i,α_i) bien ordonnés. Notons (C_i,α) le produit $(\overleftarrow{i},\alpha)$-colexicographique de $(E_j,\alpha_j)_{j\in\overleftarrow{i}}$ pour tout $i \in J$. D'après la proposition 9, (C_i,α) est isomorphe à la section ordonnée (C'_i,α) de (C,α), où C'_i est l'ensemble des $(x_j)_{j\in J} \in C$ tels que $x_j = u_j$ si $i \alpha j$. Soit V l'ensemble des $i \in J$ tels que (C'_i,α) soit bien ordonné.

1° Si $\overleftarrow{i}$ est fini, (C_i,α) est aussi le produit $(\overleftarrow{i},\alpha)$-lexicographique de $(E_j,\alpha_j)_{j\in\overleftarrow{i}}$ d'après l'exemple 1; il est donc bien ordonné (proposition 7), et $i \in V$.

2° Supposons $i \in J$ et $\overleftarrow{i} \subset V$.

a) Si i admet un prédécesseur j, d'après la proposition 9 (C_i,α) est isomorphe au produit colexicographique de $((C_j,\alpha),(E_j,\alpha_j))$, qui est bien ordonné (partie I), (C_j,α) et (E_j,α_j) étant bien ordonnés par hypothèse. D'où $i \in V$.

b) Si i est un élément limite de (J,α) et si A est une partie non vide de C'_i, posons $A_j = A \cap C'_j$ pour tout $j \in \overleftarrow{i}$. Puisque i est la borne supérieure de $J' = \overleftarrow{i}$, on a $C'_i = \bigcup_{j\in J'} C'_j$, de sorte qu'il existe un $j \in J'$ tel que $A_j \neq \emptyset$. Le premier élément de A_j dans l'ensemble bien ordonné (C'_j,α) est également le premier élément de A dans (C'_i,α), car C'_j est une section de (C'_i,α). Ainsi i appartient encore à V.

c) Dans les deux cas, $i \in V$. D'après le principe d'induction, on en déduit $V = E$.

3° C est la réunion de la famille $(C'_i)_{i\in J}$ de sections de (C,α), où C'_i est une partie bien ordonnée de (C,α). Une démonstration analogue à celle de la partie 2b montre

que (C,α) est bien ordonné.

COROLLAIRE. Supposons (J,α) et (E_ι,α_ι) bien ordonnés pour tout $\iota \in J$. La somme (J,α)-ordonnée (S,α) de ξ est isomorphe à un sous-ensemble ordonné du produit colexicographique (C,α) de $((S,\alpha'),(J,\alpha))$, où (S,α') désigne l'ensemble ordonné somme de ξ.

En effet l'isomorphisme est défini par la bijection $(x,\iota) \to ((x,i),i)$ de S sur l'ensemble C' des éléments $((x,\iota),\iota)$ de C tels que $x \in E_\iota$ et $i \in J$.

Remarque. La proposition 10 et l'exemple 3 prouvent que, si (E,α) est un ensemble bien ordonné, il existe un bon ordre sur l'ensemble des parties finies de E. Par contre il peut ne pas exister de bon ordre sur $P(E)$. En effet, on montre que, s'il existe un bon ordre sur $P(E)$ dès qu'il existe un bon ordre sur E, alors $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix.

PROPOSITION 11. S'il existe un bon ordre sur un ensemble infini E, alors $E\times E$ est équipotent à E.

Preuve. Soit (E,α) un ensemble bien ordonné, où E est infini. Désignons par $(E\times E,\alpha')$ le produit lexicographique de $((E,\alpha),(E,\alpha))$ et par v l'application de $E\times E$ dans E associant à (x,y) sa borne supérieure $x \vee y$ dans (E,α). D'après la proposition 7, $(E\times E,\alpha')$ est bien ordonné. Pour tout $x \in E$, soit (E_x,α) le sous-ensemble ordonné de $(E\times E,\alpha')$ tel que E_x soit formé des

$$(z,y) \in E\times E \quad \text{vérifiant} \quad z \vee y = x.$$

L'application

$$((x,y),x \vee y) \to (x,y)$$

définit un isomorphisme de la somme (E,α)-ordonnée de la famille $(E_z,\alpha)_{z\in E}$ sur un ensemble ordonné $(E\times E,\alpha)$. Etant donné que (E_z,α) est bien ordonné pour tout $z \in E$ et que (E,α) est bien ordonné, $(E\times E,\alpha)$ est bien ordonné (proposition 5).

1° Pour tout $x \in E$, posons $S_x = {}^{\leftarrow}x$ et $S'_x = S_x \times S_x$. Si $(y,z) \in S'_x$ et si $(y',z') \alpha (y,z)$ dans $(E\times E,\alpha)$, les relations

$$y' \vee z' \alpha y \vee z \alpha x$$

entraînent $(y',z') \in S'_x$. Ainsi S'_x est une section de $(E\times E,\alpha)$. Par ailleurs $(y,z) \in E\times E$ étant majoré par $(y \vee z, y \vee z)$ dans $(E\times E,\alpha)$, la diagonale Δ_E de $E\times E$ est cofinale avec $(E\times E,\alpha)$. Comme la bijection $x \to (x,x)$ de E sur Δ_E définit un isomorphisme de (E,α) sur un sous-ensemble ordonné de $(E\times E,\alpha)$, il existe, d'après le corollaire 2 de la proposition 4, un isomorphisme $((E',\alpha),g,(E,\alpha))$ de (E,α) sur une section ordonnée (E',α) de $(E\times E,\alpha)$. De même il existe un isomorphisme de (S_x,α) sur une section ordonnée de (S'_x,α) et, $(g(S_x),\alpha)$ étant l'unique section ordonnée de $(E\times E,\alpha)$ isomorphe à (S_x,α), on a $g(S_x) \subset S'_x$.

2° Soit L l'ensemble des sections de (E,α); c'est une partie bien ordonnée du treillis $(P(E),\subset)$ admettant E pour dernier élément (corollaire, proposition 2-16). Considérons l'ensemble V des sections A de (E,α) telles que A soit ou bien finie, ou bien infinie et équipotente à $A\times A$. Evidemment $\emptyset \in V$. Soit $A \in L$ tel que $A' \in V$ pour toute section propre $A' \subset A$. Si A est fini, A appartient à V. Examinons le cas où A est infini.

a) Supposons qu'il existe un $x \in A$ tel que A

soit équipotent à S_x. Alors S_x est infini et, comme $S_x \in V$, il est équipotent à $S'_x = S_x \times S_x$; ce produit étant équipotent à $A \times A$, il s'ensuit que A et $A \times A$ sont équipotents, i.e. $A \in V$. En particulier il en est ainsi lorsque A, infini, admet un prédécesseur S_x dans $(L, \subset)$, car, d'après le corollaire 1 de la proposition 3, S_x est équipotent à $S_x \cup \{x\} = A$.

b) Supposons S_x de puissance strictement inférieure à A pour tout $x \in A$. Alors A est un élément limite de $(L, \subset)$, de sorte que A est la réunion de $(S_x)_{x \in A}$ et $A \times A$ celle de $(S'_x)_{x \in A}$. Etant donné que la section $g(A)$ de $(E \times E, \alpha)$, image de A par la bijection g (partie 1), est équipotente à l'ensemble infini A et que la section S'_x est finie ou équipotente à S_x, c'est-à-dire de puissance strictement inférieure à $g(A)$, on trouve $S'_x \subset g(A)$ pour tout $x \in A$, ce qui entraîne

$A \times A = \bigcup_{x \in A} S'_x \subset g(A) \subset A \times A$. D'où $g(A) = A \times A$ et $A \in V$.

c) Puisque A appartient à V dans tous les cas, le principe d'induction affirme que $V = L$. Comme E appartient à V, l'ensemble E est équipotent à $E \times E$.

COROLLAIRE 1. Avec les notations de la preuve précédente, et si aucune section propre de (E, α) n'est équipotente à E, alors (E, α) est isomorphe à $(E \times E, \alpha)$.

En effet, le raisonnement de la partie 2b ci-dessus s'applique en prenant $A = E$.

COROLLAIRE 2. Soit E un ensemble infini sur lequel il existe un bon ordre. Si E' est un ensemble non vide de puissance inférieure à E, le produit $E' \times E$ est équipotent à E. Pour tout entier $n \neq 0$, les ensembles $n \times E$ et E^n sont équipotents à E.

Preuve. 1° $E' \times E$ est de puissance supérieure à $\{1\} \times E$ et inférieure à $E \times E$. Comme $E \times E$ est équipotent à E d'après la proposition, et $\{1\} \times E$ à E, le théorème de Bernstein affirme que $E' \times E$ est équipotent à E. En particulier $n \times E$ est équipotent à E, si n est un entier, $n \neq 0$.

2° E^1 est équipotent à E. Si E^n est équipotent à E pour un entier n, le produit E^{n+1} est équipotent à $E^n \times E$, c'est-à-dire à $E \times E$ et, a fortiori (proposition 10), à E. Par récurrence il s'ensuit que E^n est équipotent à E pour tout entier $n \neq 0$.

COROLLAIRE 3. Soit (E, α) un ensemble bien ordonné, E infini. Si J est un ensemble non vide de puissance inférieure à E et si $(E_i)_{i \in J}$ est une famille finie d'ensembles de puissance inférieure à E (resp. famille de parties de E), la somme de $(E_i)_{i \in J}$ est de puissance inférieure à E.

Preuve. J étant de puissance inférieure à E, il existe une application bien ordonnée $\hat{f} = ((E, \alpha), f, (J, \alpha))$. Il existe aussi une famille $(\hat{g}_i)_{i \in J}$ d'applications bien ordonnées où $\hat{g}_i = ((E, \alpha), g_i, (E_i, \alpha_i))$, car J est fini (resp. où $\hat{g}_i$ est l'application ordonnée du sous-ensemble ordonné (E_i, α_i) de (E, α) vers (E, α) définie par l'injection canonique de E_i dans E). Soient (S, α) et (S', α') les sommes (J, α)-ordonnée de $(E_i, \alpha_i)_{i \in J}$ et (E, α)-ordonnée de $(A_i, \alpha)_{i \in J}$, où $A_i = E$ pour tout $i \in J$. L'application h de S dans S' définissant l'application somme $\hat{f}$-ordonnée de $(\hat{g}_i)_{i \in J}$ est une injection. D'après la proposition, $S' = E \times E$ est équipotent à E. On en déduit que S est de puissance inférieure à E

COROLLAIRE 4. Soit E un ensemble sur lequel il existe un bon ordre. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1° E est infini.

2° E est équipotent à la somme F de (E,E).

3° E est équipotent à une partie propre de E.

Preuve. Si E est équipotent à une de ses parties propres, il est infini (proposition 5-3), de sorte que F et E sont équipotents (corollaire 3). Si f est une bijection de F sur E, alors F est équipotent à sa partie propre $E' = E \times \{0\}$ et $f(E')$ est une partie propre de E équipotente à E. Les 3 conditions sont donc équivalentes.

Remarque. Si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix, il existe un bon ordre sur tout ensemble E (théorème de Zermelo), et par suite E est infini ssi E remplit la condition 2 (resp. condition 3) du corollaire 4. Réciproquement on montre que, si tout ensemble infini satisfait la condition 2 (resp. condition 3) du corollaire 4, alors $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix.

CHAPITRE V

Ordinaux. Cardinaux

Dans ce chapitre, nous supposons que $\mathcal{D}$ est une totalité et ensemble signifie $\mathcal{D}$-ensemble. Lorsque $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome de l'infini, nous notons encore $(\mathbb{N},\leq)$ l'ensemble ordonné discret des entiers.

18. Ordinaux.

Définition. On appelle *ensemble saturé par inclusion* un ensemble non vide U tel que

$$P(E) \subset U \quad \text{pour tout } E \in U.$$

Exemples. Si U est un préuniverse, U est un ensemble saturé par inclusion. Si E est un ensemble, l'ensemble de ses parties est saturé par inclusion.

Si U est un ensemble saturé par inclusion et si l'un de ses éléments E est un ensemble infini, U vérifie la condition (∞) du § 7. En effet, si F est un ensemble fini appartenant à U et si $y \notin F$, il existe une partie finie E' de E équipotente à F, et $F \cup \{y\}$ est équipotent à l'élément $E' \cup \{x\}$ de U, si $x \in E \setminus E'$.

Hypothèse. Nous supposons que U est un ensemble saturé

par inclusion non vide. $(C_U,\leq)$ et $(N_U,\leq)$ sont les ensembles ordonnés des U-cardinaux et des U-cardinaux finis (§ 7).

Soit $R(U)$ l'ensemble des relations associé à U, i.e. (fin § 6) l'ensemble des relations entre éléments de U. Soit B_U la partie de $U\times R(U)$ formée des ensembles bien ordonnés (E,α) tels que $E \in U$. Munissons B_U de la relation d'équivalence r_U:

$(E,\alpha) \sim (E',\alpha')$ ssi il existe un isomorphisme de (E,α) sur (E',α').

Définition. L'ensemble B_U/r_U quotient de B_U par r_U est appelé *ensemble des U-ordinaux*, noté Ω_U. Si (E,α) est un ensemble bien ordonné isomorphe à un élément (E',α') de B_U, la classe d'équivalence (E',α') mod r_U est appelée *U-ordinal de* (E,α).

Le U-ordinal de l'ensemble bien ordonné (E,α) est donc défini ssi il existe un élément de U équipotent à E, et c'est alors l'ensemble des ensembles bien ordonnés (E',α') isomorphes à (E,α) et tels que E' appartienne à U.

Remarque. Comme la collection ayant pour objets les ensembles équipotents à E n'est pas un ensemble (proposition I-7), il n'existe pas d'ensemble ayant pour éléments tous les ensembles bien ordonnés isomorphes à un ensemble bien ordonné (E,α) si $E \neq \emptyset$. C'est pourquoi U est introduit.

PROPOSITION 1. $(\Omega_U,\leq)$ est un ensemble bien ordonné pour l'ordre ρ'_U défini par:

$\mu \leq \lambda$ ssi il existe un représentant de μ isomorphe à une section ordonnée d'un représentant de λ.

Soit $\lambda \in \Omega_U$; alors λ est le U-ordinal de la section ordonnée $({}^{+}\lambda,\leq)$ et il a un suivant λ' ssi ${}^{+}\lambda$ est infini ou si ${}^{+}\lambda$ est fini et s'il existe un élément de U de puissance strictement supérieure à ${}^{+}\lambda$; si λ' existe, c'est le U-ordinal de la somme ordonnée de $(({}^{+}\lambda,\leq),(1,=))$.

Preuve. U étant fixé dans toute cette démonstration, nous y supprimerons les indices U.

1° Considérons sur B la relation de préordre ρ ayant pour graphe l'ensemble des couples $((E',\alpha'),(E,\alpha)) \in B\times B$ tels que (E',α') soit isomorphe à une section ordonnée de (E,α). D'après la proposition 3-17, (E,α) et (E',α') sont isomorphes ssi

$$((E',\alpha'),(E,\alpha)) \in \underline{\rho} \text{ et } ((E,\alpha),(E',\alpha')) \in \underline{\rho}\ .$$

Donc r est la relation d'équivalence associée à ρ, et ρ' est l'ordre associé à ρ (§ 2); il s'ensuit que ρ' est aussi défini par:

$\mu \leq \lambda$ ssi les relations $(E,\alpha) \in \lambda$ et $(E',\alpha') \in \mu$ entraînent que (E',α') est isomorphe à une section ordonnée de (E,α).

De deux ensembles bien ordonnés, l'un étant isomorphe à une section ordonnée de l'autre (proposition 3-17), on a

$$\rho \cup \bar{\rho}^{-1} = B\times B, \quad \text{d'où} \quad \rho' \cup \rho'^{-1} = \Omega\times\Omega\ .$$

Ainsi $(\Omega,\leq)$ est un ensemble totalement ordonné; son premier élément est le U-ordinal $\bar{\emptyset}$ de $(\emptyset,(\emptyset,\emptyset,\emptyset))$.

2° Soit (E,α) un représentant du U-ordinal λ. Pour tout $x \in E$, la section ${}^{+}x$ appartenant à U, le U-ordinal μ_x de $({}^{+}x,\alpha)$ est majoré par λ. L'application $g: x \to \mu_x$

définissant une application ordonnée de (E,α) vers $({}^{\leftarrow}\lambda,\leq)$, et deux sections ordonnées différentes de (E,α) ne pouvant pas être isomorphes (corollaire 2, proposition I-17), g est une injection. C'est une surjection, car un représentant d'un U-ordinal $\mu < \lambda$ est isomorphe à une section ordonnée propre de (E,α), soit $({}^{\leftarrow}x_\mu,\alpha)$, c'est-à-dire on a $\mu = g(x_\mu)$. Par suite $(({}^{\leftarrow}\lambda,\leq),g,(E,\alpha))$ est un isomorphisme, et $({}^{\leftarrow}\lambda,\leq)$ est un ensemble bien ordonné ayant λ pour U-ordinal. A fortiori $({}^{\leftarrow}\lambda,\leq)$ est un ensemble bien ordonné, isomorphe à la somme ordonnée de $(({}^{\leftarrow}\lambda,\leq),(1,=))$, et dont le U-ordinal, s'il existe, est le suivant de λ. Si A est une partie non vide de Ω, il existe un U-ordinal λ tel que $A_\lambda = {}^{\leftarrow}\lambda \cap A$ soit non vide, et A_λ admet un premier élément μ dans l'ensemble bien ordonné $({}^{\leftarrow}\lambda,\leq)$; ce μ est aussi le premier élément de A dans $(\Omega,\leq)$. Ceci montre que $(\Omega,\leq)$ est un ensemble bien ordonné.

3° Soient λ un U-ordinal et (S,α) la somme ordonnée de $(({}^{\leftarrow}\lambda,\leq),(1,=))$. D'après la partie 2, λ admet un suivant λ' ssi (S,α) admet un U-ordinal λ'.

a) Si ${}^{\leftarrow}\lambda$ est infini, S est équipotent à ${}^{\leftarrow}\lambda$ et, a fortiori, à un élément de U, de sorte que λ' existe.

b) Si ${}^{\leftarrow}\lambda$ est fini, S est fini; il s'ensuit que (S,α) est discret (corollaire, proposition 2-8). Il existe un élément E' de U de puissance strictement supérieure à ${}^{\leftarrow}\lambda$ ssi il existe une partie E de E' équipotente à S, i.e. ssi (S,α) admet un U-ordinal.

c) On en déduit que λ est le dernier élément de $(\Omega,\leq)$ ssi ${}^{\leftarrow}\lambda$ est fini et si son U-cardinal est le dernier élément de $(C_U,\leq)$ (et par suite de $(N_U,\leq)$).

Définition. Avec les notations de la proposition 1, $(\Omega_U,\leq)$ est appelé *ensemble bien ordonné des U-ordinaux.*

PROPOSITION 2. Soit Ω_U^f l'ensemble des U-ordinaux λ tels que ${}^{\leftarrow}\lambda$ soit fini. L'application c_U^f associant à λ le U-cardinal de ${}^{\leftarrow}\lambda$ définit un isomorphisme de la section ordonnée $({}^{\leftarrow}\lambda,\leq)$ de $(\Omega_U,\leq)$ sur l'ensemble ordonné discret $(N_U,\leq)$. $(\Omega_U,\leq)$ a un dernier élément ssi N_U est fini (i.e. ssi il existe un ensemble fini de puissance supérieure à tous les éléments de U). Dans ce cas, $\Omega_U^f = \Omega_U$.

Preuve. 1° Soient λ et μ deux éléments de Ω_U^f tels que $c_U^f(\lambda) = c_U^f(\mu)$. Des deux ensembles bien ordonnés $({}^{\leftarrow}\lambda,\leq)$ et $({}^{\leftarrow}\mu,\leq)$, l'un, disons $({}^{\leftarrow}\mu,\leq)$, est une section ordonnée de l'autre. Il s'ensuit ${}^{\leftarrow}\lambda = {}^{\leftarrow}\mu$, car ${}^{\leftarrow}\lambda$ est équipotent à ${}^{\leftarrow}\mu$ et l'ensemble fini ${}^{\leftarrow}\lambda$ ne peut pas être équipotent à l'une de ses parties propres. Donc $\lambda = \mu$, et c_U^f est une injectio

2° Si $c_U^f(\Omega_U^f) \neq N_U$, la partie $N_U \setminus c_U^f(\Omega_U^f)$ a un premier élément X dans $(N_U,\leq)$, puisque $(N_U,\leq)$ est discret (proposition 5-7), et X admet un prédécesseur Y. Il existe un $\lambda \in \Omega_U^f$ tel que $Y = c_U^f(\lambda)$. Un représentant E de X étant équipotent à la somme de $({}^{\leftarrow}\lambda,1)$, la proposition 1 montre que le U-ordinal λ admet un suivant λ', et $X = c_U^f(\lambda'$ Ceci étant impossible, c_U^f définit un isomorphisme de la section ordonnée $(\Omega_U^f,\leq)$ sur $(N_U,\leq)$.

3° D'après la proposition 1, si $(\Omega_U,\leq)$ a un dernier élément $\hat{\mu}$, celui-ci appartient à Ω_U^f et $c_U^f(\hat{\mu})$ est le dernier élément de $(N_U,\leq)$; il s'ensuit que N_U, et a fortiori $\Omega_U^f = \Omega_U$, sont finis. Inversement, N_U est fini ssi l'ensemble ordonné discret $(N_U,\leq)$ a un dernier élément X

(proposition 3-7), c'est-à-dire ssi tous les éléments de U sont de puissance inférieure à un représentant de X. Dans ce cas, $c_U^{f-1}(X)$ est le dernier élément de Ω_U^f et, en vertu de la proposition 1, de Ω_U.

Définition. On appelle *type ordinal* un ensemble bien ordonné $(E,\leq)$ tel que tout élément v de E soit identique à la section $\overleftarrow{v}$ de $(E,\leq)$ qui lui est associée.

Si $(E,\leq)$ est un type ordinal, toute section ordonnée propre de $(E,\leq)$ est aussi un type ordinal. Si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome de l'infini, la proposition 2-9 montre que l'ensemble ordonné $(N,\leq)$ des entiers est un type ordinal.

PROPOSITION 3. Un type ordinal $(E,\leq)$ est identique à l'ensemble ordonné par inclusion $(L,\subset)$ de ses sections propres, et l'on a $v < v'$ ssi $v \in v'$. De deux types ordinaux, l'un est une section ordonnée de l'autre.

Preuve. 1° L'isomorphisme canonique de l'ensemble bien ordonné $(E,\leq)$ sur $(L,\subset)$ est défini par la bijection s associant à v la section $\overleftarrow{v}$, c'est-à-dire v lui-même; par suite s est l'application identique de E. Il s'ensuit que 0 est le premier élément de $(E,\leq)$ et que l'on a

$$v \leq v' \quad \text{ssi} \quad v \subset v', \quad \text{d'où} \quad v < v' \quad \text{ssi} \quad v \in v'.$$

2° Soit $(E',\leq')$ un autre type ordinal. 0 appartient à $V = E \cap E'$. Si $v \in V$, alors v est à la fois la section de $(E,\leq)$ associée à v et celle de $(E',\leq')$ associée à v, de sorte que v est une partie de V. Il en résulte que V est une section de $(E,\leq)$ et de $(E',\leq')$ et que le type ordinal $(V,\leq)$ est une section ordonnée de $(E,\leq)$ et de $(E',\leq')$.

a) Si $V = E$, le type ordinal $(E,\leq) = (V,\leq)$ est une section ordonnée de $(E',\leq')$.

b) Si $V = E'$, c'est $(E',\leq')$ qui est une section ordonnée de $(E,\leq)$.

c) Si $E\backslash V$ et $E'\backslash V$ sont non vides, ils ont des premiers éléments x dans $(E,\leq)$ et x' dans $(E',\leq')$. Comme V est la section de $(E,\leq)$ associée à x et celle de $(E',\leq')$ associée à x', on obtient

$$x = V = x', \quad \text{d'où} \quad x \in V,$$

ce qui est impossible. Le cas c est donc exclu.

COROLLAIRE 1. Soit $(E,\leq)$ un type ordinal; c'est l'unique type ordinal ayant E pour ensemble sous-jacent. Si A est une partie majorée dans $(E,\leq)$, elle admet sa réunion pour borne supérieure. Soit $v \in E$; il a un suivant v' ssi $v \cup \{v\} \in E$, et dans ce cas $v' = v \cup \{v\}$; si v est un élément limite, v est la réunion de v.

COROLLAIRE 2. Deux types ordinaux isomorphes sont identiques.

En effet, l'un est une section ordonnée de l'autre d'après la proposition, et un ensemble bien ordonné ne peut pas être isomorphe à l'une de ses sections ordonnées propres.

COROLLAIRE 3. Si $(E,\leq)$ est un type ordinal et si E est infini, $(N,\leq)$ est une section ordonnée de $(E,\leq)$.

En effet, $(N,\leq)$ est un type ordinal isomorphe, d'après la proposition 3-17, corollaire, à une section ordonnée $(S,\leq)$ de $(E,\leq)$. Du corollaire 2, il résulte $N = S$, car $(S,\leq)$ est un type ordinal.

Définition. On appelle *ordinal* un ensemble v tel qu'il

existe un type ordinal de la forme $(v,\leq)$; celui-ci (qui est unique) est appelé *type ordinal de* v et noté $\bar{v}$. Soient v et v' deux ordinaux; on dit que v est *plus petit* (resp. *est strictement plus petit*) que v' si $v \subset v'$ (resp. si $v \in v'$), en formule $v \leq v'$ (resp. $v < v'$); dans ce cas on dit que v' est *plus grand* (resp. est *strictement plus grand*) que v, note $v' \geq v$ (resp. $v' > v$). Soit A un ensemble d'ordinaux; on dit qu'un ordinal v *majore* (resp. v *minore*) A si $v \geq w$ (resp. si $v \leq w$) pour tout $w \in A$; si de plus $v \in A$, on dit que v est *le dernier* (resp. le *premier*) élément de A.

Soient v et v' deux ordinaux. D'après la proposition 3, v est plus petit que v' ssi $\bar{v}$ est une section ordonnée de $\bar{v}'$ et si $v \leq v'$ dans $\bar{v}'$; dans le cas contraire, v' est plus petit que v, des deux types ordinaux $\bar{v}$ et $\bar{v}'$ l'un étant une section ordonnée de l'autre.

PROPOSITION 4. Soit v un ordinal; ses éléments sont des ordinaux et v est un ensemble purement transitif dont toute partie propre transitive est un élément; $v \cup \{v\}$ est un ordinal. La réunion d'une famille (resp. d'un ensemble) d'ordinaux est un ordinal.

Preuve. 1° Si $v' \in v$, la section ordonnée $(v',\leq)$ du type ordinal $\bar{v}$ de v est un type ordinal, de sorte que v' est un ordinal, dont le type ordinal est $(v',\leq)$. L'ensemble v est transitif, car $v \subset P(v)$. Si $v \in v$, la section propre de $\bar{v}$ associée à l'élément v est identique à v, ce qui est impossible. Donc $v \notin v$, et v est purement transitif. Soit A une partie propre transitive de v. Si $x \in A$ et si $y < x$ dans $\bar{v}$, on a $y \in x$, ce qui entraîne $y \in A$. Ainsi A est une section propre de $\bar{v}$, et A est le premier élément de $v \setminus A$ dans $\bar{v}$.

2° Comme v n'appartient pas à v (partie 1), il existe un ensemble bien ordonné $\bar{v}' = (v',\leq)$, où $v' = v \cup \{v\}$, obtenu en ajoutant v comme dernier élément à $\bar{v}$. C'est un type ordinal, la section de $\bar{v}'$ associée à v étant v. Par conséquent v' est un ordinal.

3° Soient ξ une famille $(v_i)_{i \in J}$ (resp. un ensemble) d'ordinaux, et E la réunion de ξ. Considérons l'ensemble ordonné inductif (proposition 4-16) $(W(E),\subset)$ des ensembles bien ordonnés sur les parties de E. L'ensemble M des types ordinaux $\bar{v}_i$, où $i \in J$ (resp. où $v_i \in \xi$), en est une partie totalement ordonnée, car (proposition 3) de deux types ordinaux l'un est une section ordonnée de l'autre, i.e. un minorant de l'autre dans $(W(E),\subset)$. Par suite M admet une borne supérieure $(E,\leq)$ dans $(W(E),\subset)$, et $(E,\leq)$ admet les $\bar{v}_i$ pour sections ordonnées. Si x est un élément de E, il existe un v_i auquel appartient x, et la section de $(E,\leq)$ associée à x est identique à celle qui lui est associée dans $\bar{v}_i$, c'est-à-dire est x. Ceci prouve que $(E,\leq)$ est un type ordinal.

COROLLAIRE 1. Si D vérifie l'axiome de l'infini, N est un ordinal et les entiers sont les ordinaux finis.

Preuve. N est un ordinal, car $(N,\leq)$ est un type ordinal (corollaire 3, proposition 3); les entiers appartenant à N, ce sont des ordinaux finis. Si v est un ordinal fini, $\bar{v}$ est une section ordonnée de $(N,\leq)$ d'après

la proposition 3; a fortiori v est un entier (proposition 2-9).

COROLLAIRE 2. Un ensemble v est un ordinal ssi il existe un type ordinal $(E,\leq)$ tel que $v \in E$.

En effet, la condition est suffisante d'après la proposition. Inversement si v est un ordinal, $v \cup \{v\}$ est un ordinal auquel appartient v.

COROLLAIRE 3. Il n'existe pas d'ensemble dont tous les ordinaux soient des éléments.

Preuve. Supposons que la collection Ω dont les objets sont tous les ordinaux soit un ensemble. Si v est un ordinal, c'est une partie de Ω et un élément de l'ordinal $v \cup \{v\}$; il s'ensuit que Ω est la réunion de Ω et, d'après la proposition 4, Ω est un ordinal, i.e. un élément de Ω. Ceci est impossible, l'ordinal Ω étant un ensemble purement transitif (proposition 4). Donc Ω n'est pas un ensemble.

Définition. Soit v un ordinal; l'ordinal $v' = v \cup \{v\}$ (proposition 4) est appelé *ordinal suivant de* v et l'on dit que v est *l'ordinal prédécesseur de* v'. Si v est la réunion de v, on appelle v un *ordinal limite*. La réunion d'une famille (resp. d'un ensemble) ξ d'ordinaux est appelée *ordinal borne supérieure de* ξ.

Soit v un ordinal; un ordinal v' est le suivant de v ssi $v < v'$ et si $v' \leq v''$ pour tout ordinal $v'' > v$, i.e. ssi v' est le suivant de v dans tout type ordinal $(E,\leq)$ tel que $v' \in E$. Un ordinal limite est sa propre borne supérieure. Si ξ est un ensemble d'ordinaux, v est

sa borne supérieure ssi v majore ξ et si $v \leq v''$ pour tout ordinal v'' majorant ξ, i.e. ssi v est la borne supérieure de ξ dans un (resp. dans tout) type ordinal $(E,\leq)$ tel que ξ soit contenu dans E.

Remarque. Supposons que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome de l'infini et notons Ω la collection ayant pour objets tous les ordinaux; les ordinaux finis sont les entiers. Soient $\mathcal{D}'$ une totalité, Ω' la collection ayant pour objets les ordinaux définis relativement à la totalité $\mathcal{D}'$ (que nous appellerons $(\mathcal{D}')$-ordinaux) et N' sa sous-collection ayant pour objets les $(\mathcal{D}')$-ordinaux finis, laquelle est identique à Ω' ssi $\mathcal{D}'$ ne vérifie pas l'axiome de l'infini. Soit V la partie de N formée des entiers qui sont des objets de N'. On a $0 \in V$ et, si $n \in V$, alors $n+1$ est aussi le $(\mathcal{D}')$-ordinal suivant du $(\mathcal{D}')$-ordinal n, de sorte que $n+1 \in V$. Il en résulte $V = N$. Si v est un $(\mathcal{D}')$-ordinal fini, il appartient à N, sans quoi il majorerait N et serait infini. Au total $N = N'$, que $\mathcal{D}'$ vérifie ou ne vérifie pas l'axiome de l'infini. Ceci conduit à une théorie des entiers relative à une totalité ne vérifiant pas nécessairement l'axiome de l'infini, en posant:

Définition. Quelle que soit la totalité $\mathcal{D}$, un ordinal fini est appelé *un entier.*

PROPOSITION 5. Soit (E,α) un ensemble bien ordonné; il existe un et un seul ordinal W dont le type ordinal $\bar{W}$ est isomorphe à (E,α).

Preuve. Pour tout élément x de E, notons S_x la section α_x de tous les minorants de x dans (E,α). Con-

sidérons l'ensemble V des $x \in E$ tels qu'il existe un ordinal v_x et un isomorphisme $(\bar{v}_x, g_x, (S_x, \alpha))$ de la section ordonnée (S_x, α) de (E, α) sur le type ordinal $\bar{v}_x$.

1° Si $x \in V$ et si $x' \alpha x$, la restriction $g_{x'}$ de g_x à $(v_{x'}, S_{x'})$, où $v_{x'}$ est la section de $\bar{v}_x$ image par g_x de $S_{x'}$, définit un isomorphisme de $(S_{x'}, \alpha)$ sur le type ordinal $\bar{v}_{x'}$, isomorphisme qui est unique en vertu des propositions 3 et 2-17. Il s'ensuit que V est une section de (E, α) et que la famille $(g_x)_{x \in V}$ d'applications est compatible; soit g l'application réunion de cette famille. Comme les g_x sont des bijections, g est une bijection de la section $V = \bigcup_{x \in V} S_x$ sur l'ordinal $W = \bigcup_{x \in V} v_x$ borne supérieure de la famille $(v_x)_{x \in V}$ d'ordinaux. On en déduit que g définit un isomorphisme de (V, α) sur le type ordinal $\bar{W}$ de W, celui-ci ayant $\bar{v}_x$ pour section ordonnée pour tout $x \in V$.

2° Montrons que $V = E$. En effet, dans le cas contraire, $E \setminus V$ a un premier élément y dans (E, α). Soit v_y l'ordinal $W \cup \{W\}$ suivant de W. Puisque y est le dernier élément de (S_y, α) et l'unique élément de $S_y \setminus V$, l'application g_y:

$$x \to g(x) \quad \text{si} \quad x \in V, \quad y \to W,$$

définit un isomorphisme de (S_y, α) sur le type ordinal $\bar{v}_y$. Ceci est impossible, car y appartiendrait alors à V. Par suite $V = E$, et (E, α) est isomorphe à $\bar{W}$. D'après le corollaire 2 de la proposition 3, W est l'unique ordinal dont le type ordinal soit isomorphe à (E, α).

Définition. Si (E, α) est un ensemble bien ordonné et si

v est l'ordinal dont le type ordinal $\bar{v}$ est isomorphe à (E, α), on appelle v *l'ordinal de* (E, α), $\bar{v}$ le *type ordinal de* (E, α).

Si v est un ordinal, v est l'ordinal de $\bar{v}$, et $\bar{v}$ le type ordinal de $\bar{v}$.

PROPOSITION 6. Soient U *un ensemble saturé par inclusion,* W *l'ordinal de l'ensemble bien ordonné* $(\Omega_U, \leq)$ *des* U*-ordinaux.* W *est l'ensemble des ordinaux équipotents à un élément de* U. *L'isomorphisme de* $\bar{W}$ *sur* $(\Omega_U, \leq)$ *associe à* $v \in W$ *le* U*-ordinal de* v.

Preuve. Soit $((\Omega_U, \leq), f, \bar{W})$ l'unique isomorphisme de $\bar{W}$ sur $(\Omega_U, \leq)$. Si $v \in W$, la section ordonnée $\bar{v}$ de $\bar{W}$ est isomorphe à la section ordonnée $(\overleftarrow{\lambda}, \leq)$ de $(\Omega_U, \leq)$, où $\lambda = f(v)$; cette dernière admettant λ pour U-ordinal (proposition 1), λ est aussi le U-ordinal de $\bar{v}$. On en déduit que v est équipotent à un élément de U. Inversement si v est un ordinal équipotent à un élément de U, son type ordinal $\bar{v}$ admet un U-ordinal λ et, d'après ce qui précède, $f^{-1}(\lambda) = v \in W$.

COROLLAIRE. Le type ordinal $(W, \leq)$ *de* $(\Omega_U, \leq)$ *admet un dernier élément ssi il existe un ensemble fini de puissance supérieure à tous les éléments de* U *(resp. ssi* W *est fini). Si* W *est infini,* $(N, \leq)$ *est une section ordonnée de* $(W, \leq)$.

En effet, ceci résulte des propositions 2 et 6 et du corollaire 3 de la proposition 3.

Définition. L'ordinal (resp. le type ordinal) de $(\Omega_U, \leq)$

est appelé *ordinal* (resp. *type ordinal*) *correspondant à* U.

PROPOSITION 7. (Définition de Bernays). Soit E *un ensemble; c'est un ordinal ssi* E *est un ensemble transitif dont toute partie propre transitive est un élément.*

Preuve. La condition est nécessaire d'après la proposition 4. Inversement supposons-la vérifiée et soit W l'ordinal correspondant à l'ensemble saturé par inclusion U = P(E). Posons V = W∩E.

1° V est un ordinal. En effet, soit $v \in V$. Si v' est un ordinal strictement plus petit que v, il appartient à W et c'est une partie propre transitive de v; a fortiori v' est une partie propre transitive de E, car v est une partie de l'ensemble transitif E. Il s'ensuit $v' \in E$, d'où $v' \in V$. Ainsi V est une section du type ordinal $\bar{W}$, c'est-à-dire est un ordinal. En particulier V n'est pas élément de V.

2° V étant une partie de E, il appartient à U, donc (proposition 6) à W. Comme V est transitif, on a V = E ou $V \in E$; cette dernière relation entraînant $V \in W \cap E = V$, elle est exclue. Par suite E est identique à l'ordinal V.

Définition. Une famille $\xi = (x_\iota)_{\iota \in v}$ indexée par un ordinal v est appelée *suite transfinie*, aussi notée $(x_\iota)_{\iota<v'}$ ou $(x_\iota)_{\iota \leq v'}$ si v' est un ordinal prédécesseur de v. Si x_ι est un ensemble bien ordonné pour tout $\iota \in v$ et si $\bar{v}$ est le type ordinal de v, la somme $\bar{v}$-ordonnée de ξ est appelée *somme ordonnée de* ξ, le produit $\bar{v}$-colexicographique de ξ est appelé *produit colexicographique de* ξ.

En particulier une suite (indexée par N) ou une suite finie est aussi une suite transfinie.

Définition. Si $(E,\underline{\alpha})$ est un ensemble ordonné, on appelle *suite transfinie décroissante* (resp. *strictement décroissante*) *dans* $(E,\underline{\alpha})$ une suite transfinie $(x_\iota)_{\iota<v}$ d'éléments de E telle que, pour tout ordinal $\iota \in v$, on ait $x_{\iota'} \underline{\alpha} x_\iota$ (resp. $x_{\iota'} \alpha x_\iota$) si ι' est l'ordinal suivant de ι et si $\iota' \in v$.

PROPOSITION 8. Soient (E,α) *et* (J,α) *deux ensembles bien ordonnés. Si une application* f *de* J *dans* E *définit une application ordonnée de* (J,α) *vers l'ensemble ordonné opposé de* (E,α), *l'image* A *de* f *est finie.*

Preuve. Supposons A infini. Pour tout $x \in A$, soit ι_x le premier élément de $\bar{f}^1(\{x\})$ dans (J,α). Si J' est l'ensemble des ι_x où $x \in A$, la restriction f' de f à J' est une injection. Le sous-ensemble ordonné (J',α) de (J,α) est bien ordonné et J' est infini, car il est équipotent à A. Par suite (proposition 3-17), il existe une application bien ordonnée $((J',\alpha),g,(N,\underline{\leq}))$. La suite $(x_n)_{n\in}$ où $x_n = f'(g(n))$ pour tout entier n, a son but qui est dénombrable, et $x_{n+1} \alpha x_n$ pour tout $n \in N$. Ceci est impossible, le but d'une suite décroissante dans l'ensemble bien ordonné (E,α) étant fini (proposition I-16). Il en résulte que A est fini.

COROLLAIRE. Si (E,α) *est un ensemble bien ordonné, le but d'une suite transfinie décroissante dans* (E,α) *est fini.*

19. Cardinaux.

Définition. On appelle *cardinal* un ordinal u tel que tout ordinal v strictement plus petit que u soit de puissance strictement inférieure à u.

Ainsi l'ordinal u est un cardinal ssi aucune section propre du type ordinal $\bar{u}$ de u n'est équipotente à u. Tout ordinal fini (i.e. tout entier) est un cardinal. SI $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome de l'infini, N est un cardinal, et c'est le plus petit cardinal infini.

PROPOSITION 1. Si u est un cardinal, c'est un ordinal limite ou un entier. De deux cardinaux, l'un est de puissance strictement inférieure à l'autre. Tout ordinal v est équipotent à un cardinal $\bar{\bar{v}}$, et $\bar{\bar{v}} \leq v$. La réunion d'une famille de cardinaux est un cardinal.

Preuve. 1° Tout entier est un cardinal. Soit u un cardinal infini. Si u admet un ordinal prédécesseur v, on a $u = v \cup \{v\}$, de sorte que u est équipotent à la somme de $(v,1)$. Or celle-ci est, d'après le corollaire 4 de la proposition II-17, équipotente à v, car v est infini (sans quoi u serait fini). Ceci est impossible, le cardinal u ne pouvant pas être équipotent à l'ordinal strictement plus petit v. Donc u est un ordinal limite.

2° Soient u et u' deux cardinaux distincts. Comme ce sont des ordinaux, l'un, disons u', est une partie propre de l'autre. Par définition, u' ne peut pas être équipotent à u; aussi est-il de puissance strictement inférieure à u.

3° Si v est un ordinal, l'ensemble des ordinaux w équipotents à v et plus petits que v n'est pas vide, de sorte qu'il a un premier élément $\bar{\bar{v}}$. Celui-ci est l'unique cardinal équipotent à v.

4° Soient $(u_i)_{i \in J}$ une famille de cardinaux et u sa réunion. Nous savons que u est un ordinal. Soit v un ordinal tel que $v < u$. Comme $v \in u$, il existe un $i \in J$ tel que $v \in u_i$; il en résulte que v est de puissance strictement inférieure au cardinal u_i et, a fortiori, à u. Ceci prouve que u est un cardinal.

COROLLAIRE. Un cardinal u est l'ordinal borne supérieure de l'ensemble des ordinaux de puissance strictement inférieure à u.

En effet, cet ensemble est identique à u et, u étant un ordinal limite, c'est la réunion de u.

Si u et u' sont deux cardinaux, nous dirons que le cardinal u est *plus petit* (resp. *strictement plus petit*) que u' si l'ordinal u est plus petit (resp. strictement plus petit) que l'ordinal u', i.e. si $u \subset u'$ (resp si $u \in u'$); dans ce cas, on dit également que u' est *plus grand* (resp. *strictement plus grand*) que u. D'après la proposition I, il en est ainsi ssi u est de puissance (resp. puissance strictement) inférieure à u'. Soit $(u_i)_{i \in J}$ une famille de cardinaux; sa réunion u est un cardinal (proposition I) et c'est l'ordinal borne supérieure de $(u_i)_{i \in J}$; on l'appelle *cardinal borne supérieure de* $(u_i)_{i \in J}$. De même

la réunion d'un ensemble A de cardinaux est un cardinal, appelé *cardinal borne supérieure de* A.

PROPOSITION 2. Soit E *un ensemble. Il existe un cardinal* u *dont les éléments sont les ordinaux de puissance inférieure à* E*; c'est le plus petit cardinal qui n'est pas de puissance inférieure à* E*. Il existe un cardinal équipotent (resp. de puissance strictement supérieure) à* E *ssi il existe un bon ordre sur* E*; dans ce cas* u *est le plus petit cardinal de puissance strictement supérieure à* E.

Preuve. 1° Soit W(E) l'ensemble des ensembles bien ordonnés $a = (A,\alpha)$ tels que A soit une partie de E (§ 16). Pour tout $a \in W(E)$, l'ordinal v_a de a est de puissance inférieure à E. Soit u l'ordinal borne supérieure de $(v'_a)_{a\in W(E)}$, où v'_a est l'ordinal suivant de v_a. Tout élément de u est un ordinal de puissance inférieure à E. Si v est un ordinal de puissance inférieure à E, il existe un élément a de W(E) isomorphe au type ordinal de v, et l'on a

$$v = v_a \in v'_a \subset u.$$

Il en résulte que l'ensemble u est formé de tous les ordinaux de puissance inférieure à E. Comme $u \notin u$, u est un cardinal, qui n'est pas de puissance inférieure à E. Si u' est un autre cardinal qui n'est pas de puissance inférieure à E, il n'est pas plus petit que u, d'où $u \leq u'$.

2° Supposons de plus que (E,≤) soit un ensemble bien ordonné, et soit v son ordinal. Le cardinal $\bar{\bar{v}}$ équipotent à v (proposition 1) est l'unique cardinal équipotent à E. Un cardinal qui n'est pas de puissance inférieure à E,

i.e. à v, est de puissance strictement supérieure à v, c'est-à-dire à E. En particulier le cardinal u considé ci-dessus est le plus petit cardinal de puissance strictement supérieure à E.

3° S'il existe un cardinal u' de puissance supérieu à E, il existe un ensemble bien ordonné (E,≤) isomorphe une section ordonnée du type ordinal de u'.

COROLLAIRE 1. (Théorème de Hartogs). Si v *est un ordinal, il existe un plus petit cardinal de puissance strictement supérieure à* v.

COROLLAIRE 2. Si D *vérifie l'axiome du choix et si* E *est un ensemble, il existe un cardinal équipotent à* E *et un plus petit cardinal de puissance strictement supérieure à* E.

En effet, ce corollaire résulte de la proposition, le théorème de Zermelo affirmant qu'il existe un bon ordre sur E.

Définition. Soit v un ordinal. Le cardinal équipotent à v est appelé *cardinal de* v. Le cardinal u tel que $v < u$ et que $u < u'$ pour tout cardinal u' strictement plus grand que v est dit *cardinal suivant de* v. Si E est un ensemble et s'il existe un cardinal u équipotent à E, on appelle u *le cardinal de* E, souvent noté $\bar{\bar{E}}$.

Si v est un ordinal, le cardinal suivant de v est identique au cardinal suivant de v', pour tout ordinal v' équipotent à v; en particulier, c'est le cardinal sui

vant du cardinal $\bar{\bar{v}}$ de v. Il n'est identique à l'ordinal $\hat{v}$ suivant de v que si v est fini, car, autrement, $\hat{v}$ n'est pas un cardinal (proposition 1). Si E est un ensemble, il admet un cardinal u ssi il existe un bon ordre sur E, et u est alors le cardinal de tout ordinal d'un ensemble bien ordonné de la forme (E,α); dans ce cas, tout ensemble de puissance inférieure à E admet aussi un cardinal, plus petit que u. Si E est fini, il a un cardinal fini.

PROPOSITION 3. Soient v un ordinal et $\Omega(v)$ l'ensemble de tous les ordinaux équipotents à v. Si v est fini, on a $\Omega(v) = \{v\}$. Si v est infini, $\Omega(v)$ admet un cardinal u, à savoir le cardinal u suivant de v.

Preuve. $\Omega(v)$ est un ensemble, car c'est une partie du cardinal u suivant de v.

1° Si v est fini, c'est un cardinal et u est identique à l'ordinal suivant de v, d'où $\Omega(v) = \{v\}$.

2° Supposons v infini. Si $\bar{\bar{v}}$ est le cardinal de v, on a $\Omega(v) = u \backslash \bar{\bar{v}}$, et u est équipotent à la somme S de $(\bar{\bar{v}},\Omega(v))$. En particulier, $\Omega(v)$ est de puissance inférieure à u. S'il était de puissance strictement inférieure à u, il serait de puissance inférieure à $\bar{\bar{v}}$, et S serait de puissance inférieure à la somme de $(\bar{\bar{v}},\bar{\bar{v}})$. Ceci est impossible, cette somme étant équipotente à $\bar{\bar{v}}$ (corollaire 4, proposition II-17), tandis que u est de puissance strictement supérieure à $\bar{\bar{v}}$. On en déduit que $\Omega(v)$ est équipotent à u.

Si u est un cardinal infini, nous désignerons par K(u) l'ensemble des cardinaux infinis strictement plus petits que u, par $(K(u),\leq)$ le sous-ensemble ordonné du type ordinal $\bar{u}$ de u correspondant. Si $u' \in K(u)$, le cardinal suivant u" de u' est ou bien u ou bien le suivant de u' dans $(K(u),\leq)$. Si $\xi = (u_i)_{i\in J}$ est une famille de cardinaux appartenant à K(u), le cardinal borne supérieure de ξ (i.e. réunion de ξ) est aussi la borne supérieure de ξ dans $(K(u),\leq)$, ou bien u.

Définition. Soit u un cardinal infini. On appelle *indice de u* l'ordinal de l'ensemble bien ordonné $(K(u),\leq)$.

L'indice du cardinal infini u est un ordinal plus petit que u. Si u et u' sont des cardinaux infinis d'indices v et v' et si $u' < u$, l'ensemble ordonné $(K(u'),\leq)$ est une section ordonnée de $(K(u),\leq)$, de sorte que $v' < v$. Par suite il existe au plus un cardinal d'indice v; nous le notons ω_v. Par exemple $N = \omega_0$, car $K(N) = \emptyset$.

PROPOSITION 4. Soit u un cardinal infini d'indice v. L'application γ^u qui associe à un cardinal infini strictement plus petit que u son indice définit un isomorphisme de $(K(u),\leq)$ sur le type ordinal $\bar{v}$ de v.

Preuve. Par définition de l'indice, il existe un isomorphisme $(\bar{v},f,(K(u),\leq))$. Si u' appartient à K(u) et si v' est son indice, il existe une bijection de K(u') sur une section S de $\bar{v}$, qui définit un isomorphisme de $(K(u'),\leq)$ sur $(S,\leq)$. Comme $\bar{v}'$ est l'unique section ordonnée de $\bar{v}$ isomorphe à $(K(u'),\leq)$, on trouve $S = v'$, d'où $f(u') = v'$ et par suite $f = \gamma^u$.

COROLLAIRE. Soit u un cardinal infini d'indice v; l'indice v' du cardinal u' suivant de u est l'ordinal suivant de v. Si u est le cardinal borne supérieure d'une famille $\xi = (u_i)_{i\in J}$ *de cardinaux infinis et si* v_i *est l'indice de* u_i, *alors v est l'ordinal borne supérieure de* $(v_i)_{i\in J}$.

Preuve. Il existe un cardinal u" strictement plus grand que le suivant u' de u ; si $\bar{v}$" est le type ordinal de l'indice v" de u", d'après la proposition 11 existe un isomorphisme $(\bar{v}", \gamma^{u"}, (K(u"), \leq))$. Il en résulte que $\gamma^{u"}(u')$ est l'ordinal suivant de $v = \gamma^{u"}(u)$ et, si u est le cardinal borne supérieure de ξ, c'est aussi la borne supérieure de ξ dans $(K(u"), \leq)$, de sorte que v est la borne supérieure de $(v_i)_{i\in J}$, car $v_i = \gamma^{u"}(u_i)$.

PROPOSITION 5. Si D vérifie l'axiome de l'infini et si v est un ordinal, il existe un et un seul cardinal d'indice v.

Preuve. Considérons l'ensemble V des ordinaux v' plus petits que v et tels qu'il existe un cardinal $\omega_{v'}$ d'indice v'. C'est une partie de l'ordinal $\hat{v}$ suivant de v, à laquelle appartient 0, qui est l'indice de N. Soit w un ordinal plus petit que v vérifiant $w \subset V$.

1° Si w est un ordinal limite, pour tout $w' \in w$, il existe un cardinal $\omega_{w'}$ d'indice w' et, d'après le corollaire de la proposition 4, le cardinal u borne supérieure de la famille $(\omega_{w'})_{w'\in w}$ admet pour indice la borne supérieure de w, c'est-à-dire w. Il s'ensuit $w \in V$.

2° S'il existe un ordinal w' dont w est l'ordinal suivant, le cardinal suivant de $\omega_{w'}$ admet pour indice w (corollaire, proposition 4), d'où $w \in V$.

3° Du principe d'induction, on déduit $V = \hat{v}$, de sorte que v appartient à V, c'est-à-dire ω_v existe.

Soit U un ensemble saturé par inclusion. Notons Γ_U l'ensemble des cardinaux correspondant à U, i.e. l'ensemble des cardinaux équipotents à un élément de U. C'est une partie de l'ordinal W_U correspondant à U (§ 18).

PROPOSITION 6. Si D vérifie l'axiome du choix et si U est un ensemble saturé par inclusion, l'ensemble ordonné $(C_U, \leq)$ *des U-cardinaux est isomorphe au sous-ensemble ordonné* $(\Gamma_U, \leq)$ *du type ordinal* $\bar{W}_U$.

Preuve. Tout élément u de Γ_U admet un U-cardinal k(u), car il est équipotent à un élément de U. L'application k:

$$u \to k(u) \quad \text{de } \Gamma_U \text{ dans } C_U$$

est une injection, deux cardinaux équipotents étant identiques, et elle définit une application ordonnée de $(\Gamma_U, \leq)$ vers $(C_U, \leq)$. Si X est un U-cardinal et E un de ses représentants, le théorème de Zermelo affirme qu'il existe un bon ordre sur E, de sorte qu'il existe un cardinal u équipotent à E, c'est-à-dire $X = k(u)$. Donc k est une bijection, qui définit l'unique isomorphisme de $(\Gamma_U, \leq)$ sur $(C_U, \leq)$.

Remarque. Si D ne vérifie pas l'axiome du choix, $(\Gamma_U, \leq)$ peut être isomorphe à une section odonnée propre de $(C_U, \leq)$.

Définition. Soit $\xi = (u_i)_{i\in J}$ une famille de cardinaux. Si l'ensemble somme S de ξ admet un cardinal u, on appelle u le *cardinal somme de* ξ, noté $\mathbf{S}\xi$. Si l'ensemble produit P de ξ admet un cardinal u', on dit que u' est le *cardinal produit de* ξ et on le note $\mathbf{P}\xi$.

Soit $\xi = (u_i)_{i\in J}$ une famille de cardinaux. Si J est fini et si les u_i sont des entiers, les entiers somme et produit de ξ sont respectivement les cardinaux somme et produit de ξ. Soit $\hat{\xi} = (\hat{u}_i)_{i\in J'}$ une famille de cardinaux telle que J' soit une partie de J et que $\hat{u}_i \leq u_i$ pour tout $i \in J'$. La somme de $\hat{\xi}$ étant une partie de celle de ξ, si ξ admet un cardinal somme u, alors $\hat{\xi}$ admet un cardinal somme $\hat{u}$ et $\hat{u} \leq u$. Le produit $\hat{P}$ de $\hat{\xi}$ étant une partie du produit de $(u_i)_{i\in J'}$, lequel est de puissance inférieure au produit de ξ (proposition 4-4), si ξ a un cardinal produit u', alors $\hat{\xi}$ a un cardinal produit $\hat{u}' \leq u'$.

PROPOSITION 7. Soient ξ une famille $(u_i)_{i\in J}$ de cardinaux et J' l'ensemble des $i \in J$ tels que $u_i \neq 0$. Il existe un cardinal u somme de ξ ssi il existe un bon ordre sur J' et dans ce cas le cardinal de J' est plus petit que u. Si J' = J et s'il existe un cardinal produit de ξ, il existe un bon ordre sur $J'' = \{i \in J \mid u_i \geq 2\}$ et le cardinal de J" est plus petit que $\mathbf{P}\xi$. Si J' est fini (resp. si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix), il existe un cardinal somme et un cardinal produit de ξ.

Preuve. Soient S et P les somme et produit de ξ. Il existe un cardinal somme (resp. cardinal produit) de ξ ssi il existe un bon ordre sur S (resp. sur P). En particulier il en est ainsi lorsque $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix, d'après le théorème de Zermelo.

1° S est identique à la somme de $(u_i)_{i\in J'}$. L'application $i \to (0,i)$ de J' dans S étant une injection, s'il existe un cardinal u somme de ξ, il existe un bon ordre sur S, et par suite un bon ordre sur J', et le cardinal de J' est plus petit que u. Inversement s'il existe un ensemble bien ordonné (J',α), la somme (J',α)-ordonnée de $(\bar{u}_i)_{i\in J'}$, où $\bar{u}_i$ est le type ordinal de u_i, est un ensemble bien ordonné de la forme (S,α), de sorte que S admet un cardinal, qui est le cardinal somme de ξ. En particulier si J' est fini (a fortiori si J est fini), il existe un ordre discret sur J', et ξ admet un cardinal somme

2° Si $J \neq J'$, le produit P est vide, donc de cardinal 0. Supposons $J = J'$. Le produit P est équipotent au produit P' de $(u_i)_{i\in J''}$.

a) S'il existe un cardinal u' produit de $(u_i)_{i\in J''}$, u' est aussi le cardinal de P' et il existe un bon ordre sur P'. L'application $J \to (x_i)_{i\in J''}$, où $x_j = 1$ et $x_i = 0$ si $i \in J''\setminus\{j\}$ étant une injection de J" dans P', il existe un bon ordre sur J" et le cardinal de J" est plus petit que u'.

b) Si J" est fini, il existe un ensemble ordonné discret $(J",\alpha)$ et le produit $(J",\alpha)$-colexicographique de $(\bar{u}_i)_{i\in J''}$ est un ensemble bien ordonné (P',α) (proposition 10-17). Le cardinal de P' existe donc; a fortiori c'est le cardinal de P, i.e. le cardinal produit de ξ.

COROLLAIRE 1. Une suite transfinie de cardinaux a un cardinal somme, une suite finie de cardinaux a un cardinal

produit.

COROLLAIRE 2. Soit ξ une famille de cardinaux $(u_i)_{i\in J}$ où $u_i \geq 2$. S'il existe un cardinal u' produit de ξ, alors ξ admet un cardinal somme u et u est plus petit que u'.

Preuve. D'après la proposition, il existe un bon ordre sur J et par suite u existe. u et u' sont équipotents respectivement à la somme S et au produit P de ξ. D'après la proposition 10-4, S est de puissance inférieure à P, donc $u \leq u'$.

COROLLAIRE 3. Soit ξ une famille $(u_i)_{i\in J}$ de cardinaux admettant un cardinal produit u'. Si ξ' est une famille $(u'_i)_{i\in J}$ de cardinaux et si $u'_i < u_i$ pour tout $i \in J$, alors ξ' admet un cardinal somme $\hat{u}$ et $\hat{u} < u'$.

Preuve. Si $u_i \geq 2$, i.e. si $u'_i \geq 1$ pour tout $i \in J$, ξ a un cardinal somme $u \leq u'$, et par suite ξ' a un cardinal somme $\hat{u} \leq u'$. De la remarque finale du § 4, il résulte $\hat{u} < u'$. Si $J' = \{i \in J \mid u'_i \neq 0\} \neq J$, le cardinal somme $\hat{u}$ de $(u'_i)_{i\in J'}$ est identique à celui de ξ' et, d'après ce qui précède, strictement plus petit que le cardinal produit de $(u_i)_{i\in J'}$; or celui-ci est plus petit que u' .

PROPOSITION 8. Soient J un ensemble ayant un cardinal w et u' le cardinal borne supérieure d'une famille de cardinaux $\xi = (u_i)_{i\in J}$. Si $\hat{u}$ est un cardinal infini plus (resp. strictement plus) grand que w et que u', le cardinal somme u de ξ est (resp. est strictement) plus petit que $\hat{u}$.

Preuve. 1° La proposition 7 assure que u existe. J et les u_i étant de puissance inférieure à $\hat{u}$, d'après le

corollaire 3 de la proposition II-17, la somme de ξ est de puissance inférieure à $\hat{u}$, d'où $u \leq \hat{u}$.

2° Si le plus grand, w' , des cardinaux w et u' est fini, u est fini, donc strictement plus petit que le cardinal infini $\hat{u}$. Si w' est infini, la partie I (appliquée en prenant w' pour $\hat{u}$) entraîne $u \leq w'$; on en déduit $u < \hat{u}$ lorsque $w' < \hat{u}$.

COROLLAIRE. Si le cardinal u borne supérieure d'une famille $\xi = (u_i)_{i\in J}$ de cardinaux est infini et de puissance supérieure à J, alors u est le cardinal somme de ξ.

Preuve. J étant de puissance inférieure à u , il existe un bon ordre sur J et, d'après la proposition 7, ξ admet un cardinal somme $\hat{u}$; la proposition 8 montre que $\hat{u} \leq u$. Par ailleurs la somme de ξ étant de puissance supérieure à chacun des u_i, on trouve $u \leq \hat{u}$. Au total, $\hat{u} = u$.

PROPOSITION 9. Soient $(K_i)_{i\in J}$ une famille d'ensembles K sa somme, $\xi_i = (u^i_j)_{j\in K_i}$ une famille de cardinaux pour tout $i \in J$ et ξ la famille $(u_k)_{k\in K}$, où $u_k = u^i_j$ si $k = (j,i) \in K$. Si ξ admet un cardinal somme u, il existe des cardinaux sommes u'_i de ξ_i pour tout $i \in J$ et u' de $(u'_i)_{i\in J}$ et l'on a $u' \leq u$. (resp. Si ξ admet un cardinal produit v et si $u_k \neq 0$ pour tout $k \in K$, il existe des cardinaux produits v'_i de ξ_i pour tout $i \in J$ et v' de $(v'_i)_{i\in J}$, et $v' \leq v$. De plus $u' = u$ (resp. $v' = v$) si D vérifie l'axiome du choix ou si J est fini.

Preuve. 1° Supposons que ξ ait un cardinal somme u . La somme de ξ étant identique à celle de $(u_k)_{k\in K'}$, où K'

$\{k \in K \mid u_k \neq 0\}$, on peut supposer $K = K'$. D'après la proposition 7, il existe un bon ordre sur K; par suite il existe un bon ordre sur K_i ; l'application $(j,i) \to j$ de K dans J étant une surjection, J est de puissance inférieure à K (remarque fin § 16), et il existe un bon ordre sur J. Il en résulte (proposition 7) qu'il existe des cardinaux u'_i somme de ξ_i et u' somme de $(u'_i)_{i\in J}$. Soient S, S_i et S' les sommes de ξ, de ξ_i et de $(S_i)_{i\in J}$. L'application $((x,j),i) \to (x,(j,i))$ de S' dans S est une bijection. Comme il existe un ensemble bien ordonné (S,α) et que la surjection $g_i : (x,j) \to (x,(j,i))$ de S_i sur $S'_i \subset S$ est une injection, il existe un ensemble bien ordonné (S_i,α_i) image par g_i^{-1} du sous-ensemble ordonné (S'_i,α) de (S,α). L'ordinal de (S_i,α_i) étant plus grand que u'_i, il existe une application bien ordonnée $((S_i,\alpha_i),f_i,\bar{u}'_i)$. L'application f somme de la famille $(f_i)_{i\in J}$ d'injections est une injection de la somme S'' de $(u'_i)_{i\in J}$ dans S'. Il s'ensuit que le cardinal u' de S'' est plus petit que celui, u, de S.

2° Supposons que ξ ait un cardinal produit v et que $u_k \neq 0$ pour tout $k \in K$. Soient P, P_i et P' les produits de ξ, de ξ_i et de $(P_i)_{i\in J}$. Les ensembles P et P' sont équipotents (proposition 5-4) et l'application g'_i:

$$(x_j)_{j\in K_i} \to (y_k)_{k\in K}, \quad \text{où} \quad y_{(j,i)} = x_j \text{ si } j \in K_i, \quad y_k = 0 \text{ si } k \in K\backslash K\times\{i\},$$

est une bijection de P_i sur une partie P'_i de P. Il existe un ensemble bien ordonné (P,α); soit (P_i,α_i) l'ensemble bien ordonné image par $g_i'^{-1}$ du sous-ensemble ordonné (P'_i,α) de (P,α). Le cardinal v'_i de P_i est le cardinal produit de ξ_i et, l'ordinal de (P_i,α_i) étant plus grand que v'_i, il existe une application bien ordonnée

$$((P_i,\alpha_i),f'_i,\bar{v}'_i).$$

L'application f' produit de la famille $(f'_i)_{i\in J}$ d'injections est une injection du produit P'' de $(v'_i)_{i\in J}$ dans P'. Par suite P'' admet un cardinal v', qui est le cardinal produit de $(v'_i)_{i\in J}$, et qui est plus petit que le cardinal de P', c'est-à-dire que le cardinal v de P.

3° Supposons que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix ou que J soit fini. D'après la proposition 9-4 et avec les notations de la partie 1, S'' et S' sont équipotents, ce S_i et u'_i le sont pour tout $i \in J$, d'où $u' = u$. De même, avec les notations de la partie 2, P'' et P' sont équipotents, ce qui entraîne $v = v'$.

PROPOSITION 10. Soit Γ_U l'ensemble des cardinaux correspondant à un ensemble U saturé par inclusion et ayant un élément infini. Γ_U^+ et $\Gamma_U^\bullet$ sont des monoïdes commutatifs, admettant N^+ et $N^\bullet$ pour sous-monoïdes respectivement, pour les lois de composition:

$$(u',u) \to u'+u = S(u',u) \text{ et } (u',u) \to u'\bullet u = P(u',u).$$

De plus $u'+u = u = u'\bullet u$ si u' et u sont des cardinaux tels que u soit infini et que $u' \leq u$.

Preuve. Soient u et u' deux cardinaux appartenant à Γ_U. Ils admettent un cardinal somme v et un cardinal produit $\mathring{v}$ d'après le corollaire 1 de la proposition 7. Si u et u' sont finis, on a

$$v = u'+u \in N \subset \Gamma_U \quad \text{et} \quad \mathring{v} = u'.u \in N \subset \Gamma_U.$$

Si le plus grand des cardinaux u et u', disons u, est infini, les ensembles produit et somme de (u',u) sont équipotents à u (proposition 11-17 et corollaires), d'où

$v = u \varepsilon \Gamma_U$ et $0 = u \varepsilon \Gamma_U$.

Ainsi les lois de composition indiquées sont bien définies. Elles sont évidemment commutatives; d'après la proposition 9, elles sont associatives. Le monoïde Γ_U^+ admet 0 pour unité, tandis que 1 est l'unité de $\Gamma_U^\bullet$.

COROLLAIRE. Le monoïde $\Gamma_U^\bullet$ (notations de la proposition) est distributif sur Γ_U^+.

Preuve. Soient u, u' et u" trois cardinaux équipotents à des éléments de U. Si u, u' et u" sont finis, on trouve

$$(u+u').u" = (u.u")+(u'.u"),$$

car $N^\bullet$ est distributif sur N^+. Si l'un des trois cardinaux est infini, les deux cardinaux

$$(u+u')\bullet u" \quad \text{et} \quad (u\bullet u")+(u'\bullet u")$$

sont identiques au plus grand des trois cardinaux u, u' et u". Ainsi $\Gamma_U^\bullet$ est distributif sur Γ_U^+.

Définition. Soient u et v deux cardinaux. Si l'ensemble produit u^v admet un cardinal u', on appelle u' le *cardinal* u *puissance* v, et on le note $u^{\bullet v}$.

Soient u et v deux cardinaux. L'ensemble u^v est équipotent (proposition 2-4) à l'ensemble M(u,v) des applications de v dans u, de sorte que $u^{\bullet v}$, s'il existe, est le cardinal de M(u,v) ; si de plus u = 2, c'est aussi le cardinal de P(v) (proposition 2-4). Par suite le cardinal $2^{\bullet v}$ existe ssi il existe un bon ordre sur P(v). Dans ce cas, d'après le théorème de Cantor, on a $v < 2^{\bullet v}$. Si v est fini ou si D vérifie l'axiome du choix, le cardinal $u^{\bullet v}$ existe quels que soient les cardinaux u et v.

20. Opérations sur les ordinaux.

Hypothèse. Dans le début de ce §, (J,≤) désigne un ensemb bien ordonné, d'ordinal w, et $\xi = (v_i)_{i\varepsilon J}$ une famille d'or dinaux. Si v est un ordinal, $\bar{v}$ est son type ordinal (§18 et $\bar{\bar{v}}$ son cardinal (§19).

Définition. On appelle *ordinal* (J,≤)-*somme de* ξ l'ordinal de la somme (J,≤)-ordonnée de $(\bar{v}_i)_{i\varepsilon J}$, et on le note ${}_{(J,\leq)}^{+}$. L'ordinal du produit (J,≤)-colexicographique de $(\bar{v}_i)_{i\varepsilon J}$ est appelé *ordinal* (J,≤)-*produit de* ξ, désigné par ${}_{(J,\leq)}^{\cdot}\xi$.

Si $(E_i,\leq_i)$ est un ensemble bien ordonné d'ordinal v pour tout $i \varepsilon J$, la somme (J,≤)-ordonnée de $(E_i,\leq_i)_{i\varepsilon J}$ est isomorphe à celle de $(\bar{v}_i)_{i\varepsilon J}$ (voir § 17), de sorte qu'elle admet pour ordinal l'ordinal (J, ≤)-somme de ξ. De même l'ordinal (J,≤)-produit de ξ est aussi l'ordinal du produit (J,≤)-colexicographique de $(E_i,\leq_i)_{i\varepsilon J}$.

Si les v_i sont des entiers et si J est fini, l'ordinal (J,≤)-somme de ξ est l'entier somme de ξ et l'ordinal (J,≤)-produit de ξ est son entier produit.

PROPOSITION 1. Soient v *et* v' *les ordinaux* (J,≤)-*somme et* (J,≤)-*produit de* ξ, *et* J' *une partie de* J. *Si* $\xi' = (v_i)_i$ *on a* ${}_{(J',\leq)}^{+}\xi' \leq v$; *si* $v_i \neq 0$ *pour tout* $i \varepsilon J$, *alors* $w \leq v$ *et* ${}_{(J',\leq)}^{\cdot}\xi' \leq v'$; *de plus* $w \leq v'$ *si* $v_i \geq 2$ *pour tout* $i \varepsilon J$. *Soient* u *et* u' *les cardinaux somme et produit de* $(\bar{\bar{v}}_i)_{i\varepsilon J}$; $u \leq \bar{\bar{v}}$ (*resp.* $u = \bar{\bar{v}}$ *et* $\bar{\bar{v}}' \leq u'$ *si* D *vérifie l'axiome du choix*). *Si* J *est fini,* $u = \bar{\bar{v}}$ *et* $u' = \bar{\bar{v}}'$.

Preuve. Soient (S,≤) la somme (J,≤)-ordonnée de $(\bar{v}_i)_{i\varepsilon J}$ et (P,≤) son produit (J,≤)-colexicographique.

1° La somme (J',α)-ordonnée de $(\bar{v}_i)_{i\in J'}$, étant un sous-ensemble ordonné de (S,α), elle est isomorphe (corollaire 2, proposition 4-17) à une section ordonnée de (S,α), de sorte que son ordinal $(J',\bar{\alpha})^{\xi'}$ est plus petit que v. Si $v_i \neq 0$ pour tout $i \in J$, l'injection $(x_i)_{i\in J'} \to (y_i)_{i\in J}$, où $y_i = x_i$ si $i \in J'$ et $y_j = 0$ si $j \in J\setminus J'$, définit une application ordonnée du produit (J',α)-colexicographique de $(\bar{v}_i)_{i\in J'}$ vers (C,α). Par suite $(J',\alpha)^{\xi'} \leq v'$.

2° Si $v_i \geq 1$ (resp. $v_i \geq 2$) pour tout $i \in J$, l'ensemble ordonné (J,α) est isomorphe à un sous-ensemble ordonné de (S,α), d'après la proposition 4-6, d'où $w \leq v$ (resp. de (C,α) d'après la proposition 8-17, d'où $w \leq v'$).

3° S, somme de $(v_i)_{i\in J}$, est de puissance supérieure à la somme S' de $(\bar{v}_i)_{i\in J}$, car $\bar{v}_i$ est une partie de v_i; il s'ensuit $u = \bar{\xi}' \leq \bar{\xi} = \bar{v}$. Supposons que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix (resp. que J est fini); v_i étant équipotent à $\bar{v}_i$, S et S' sont équipotents, et par suite $u = \bar{v}$. Par ailleurs le produit P de ξ est équipotent au produit P' de $(\bar{v}_i)_{i\in J}$, de sorte que P et P' ont le même cardinal u'; comme C est contenu dans le (resp. est identique au) produit P, son cardinal $\bar{v}'$ est plus petit que (resp. est égal à) celui u' de P.

COROLLAIRE. Soit u un cardinal. Si $\diamond$ est l'ordinal $\bar{2}$-produit de (v',v), où $v < u$, $v' < u$, on a $\hat{v} < u$.

En effet, le cardinal de $\diamond$ est, d'après la proposition, le cardinal produit $\bar{v}'\bullet\bar{v}$; or $\bar{v}'\bullet\bar{v} < u$ (proposition 10-19); u étant un cardinal, il s'ensuit $\hat{v} < u$.

PROPOSITION 7. Soit $\hat{I} = ((J,\alpha),f,(J',\alpha'))$ une application bien ordonnée et $\xi' = (v'_j)_{j\in J'}$ une famille d'ordinaux telle que $v'_j \leq v_{f(j)}$ pour tout $j \in J'$. Alors

$$(J',\dot{\alpha}')^{\xi'} \leq (J,\dot{\alpha})^{\xi} \quad \text{et} \quad (J',\dot{\alpha}')^{\xi'} \leq (J,\dot{\alpha})^{\xi}.$$

Preuve. Si $\hat{g}_j$ est l'application bien ordonnée de $\bar{v}'_j$ vers $\bar{v}_{f(j)}$, l'application somme $\hat{f}$-ordonnée de $(\hat{g}_j)_{j\in J}$ est une application bien ordonnée de la somme (J',α')-ordonnée (S',α) de $(\bar{v}'_j)_{j\in J'}$ vers la somme (J,α)-ordonnée (S,α) de $(\bar{v}_j)_{j\in J}$, de sorte que l'ordinal $(J',\dot{\alpha}')^{\xi'}$ de (S',α) est plus petit que l'ordinal $(J,\dot{\alpha})^{\xi}$ de (S,α). On montre de même la deuxième inégalité en utilisant l'application produit $\hat{f}$-colexicographique de $(\hat{g}_j)_{j\in J'}$.

COROLLAIRE. L'ordinal (J,α)-somme (resp. (J,α)-produit) d'une famille $\xi' = (v'_j)_{j\in J}$ d'ordinaux telle que $v'_j \leq v_j$ pour tout $j \in J$ est plus petit que l'ordinal (J,α)-somme (resp. (J,α)-produit) de ξ.

PROPOSITION 8. (Associativité). Soient (K,α) un ensemble bien ordonné et (J_k,α) un sous-ensemble ordonné de (J,α) pour tout $k \in K$. Si (J,α) est isomorphe à la somme (K,α)-ordonnée de $(J_k,\alpha)_{k\in K}$, on a

$$(J,\dot{\alpha})^{\xi} = (K,\dot{\alpha})^{(\xi_k)_{k\in K}}, \text{ où } \xi_k = (J_k,\dot{\alpha})^{(v_j)_{j\in J_k}},$$

$$(J,\dot{\alpha})^{\xi} = (K,\dot{\alpha})^{(\xi'_k)_{k\in K}}, \text{ où } \xi'_k = (J_k,\dot{\alpha})^{(v_j)_{j\in J_k}}.$$

En effet, ceci résulte de la proposition 9-17.

Définition. Si $\xi = (v_i)_{i<w}$ est une suite transfinie d'ordinaux, on appelle *ordinal somme de* ξ l'ordinal $\bar{w}$-somme de ξ, *ordinal produit de* ξ l'ordinal $\bar{w}$-produit de ξ; on les note respectivement $\sum_{i<w} v_i$ et $\prod_{i<w} v_i$ ou $\sum_{i\leq w'} v_i$ et $\prod_{i\leq w'} v_i$, si w' est l'ordinal prédécesseur de w.

L'ordinal somme d'une suite finie $\xi = (v_0,\dots,v_n)$ est parfois noté $v_0+\dots+v_n$, son ordinal produit $v_0.\ \dots\ .v_n$. Si $n = 2$ en particulier, l'ordinal $v+v'$ somme du couple (v,v') est l'ordinal de la somme ordonnée de $(\bar{v},\bar{v}')$, l'ordinal $v.v'$ produit de (v,v') est l'ordinal du produit colexicographique de $(\bar{v},\bar{v}')$.

PROPOSITION 4. Soient v, v', v" trois ordinaux. On a $v+0 = v = 0+v$, $v.0 = 0 = 0.v$, $v.1 = v = 1.v$, $v+1 = v \cup \{v\}$ *et, si v est infini,* $1+v = v$. *L'ordinal* $v.v'$ *est l'ordinal somme de* $(v_i)_{i<v'}$, *où* $v_i = v$ *si* $i < v'$; *si v et v' sont plus grands que 2, alors* $v+v' \leq v.v'$. *De plus* $v+(v'+v") = v+v'+v" = (v+v')+v"$ *et* $v.(v'.v") = v.v'.v" = (v.v').v"$.

Preuve. Les premières formules résultent du fait que $\bar{v}$ est isomorphe aux sommes ordonnées de $(\bar{v},\bar{0})$ et de $(\bar{0},\bar{v})$ et aux produits colexicographiques de $(\bar{v},\bar{1})$ et de $(\bar{1},\bar{v})$, alors que 0 est le produit de $(v,0)$ et de $(0,v)$. L'ordinal suivant de v étant l'ordinal de la somme ordonnée de $(\bar{v},\bar{1})$ d'après la proposition 1-18, il est identique à $v+1$. Si v est infini, la somme ordonnée de $(\bar{1},\bar{v})$ est isomorphe à $\bar{v}$ (corollaire, proposition 6-17), de sorte que $1+v = v$. Par ailleurs, le produit colexicographique (P,α) de $(\bar{v},\bar{v}')$ est identique à la somme $\bar{v}'$-ordonnée de $(\bar{v}_i)_{i\in J}$ d'après l'exemple 2-17; il s'ensuit que son ordinal $v.v'$ est aussi l'ordinal $\bar{v}'$-somme de $(v_i)_{i<v'}$. Si $v \cap v' \geq 2$, l'application $(x,0) \to (x,0)$ si $x \in v$, $(x',1) \to (x',1)$ si $x' \in v \cap v'$, $(x',1) \to (0,x')$ si $x' \in v'$ et $x' \notin v$, définit un isomorphisme de la somme ordonnée de $(\bar{v},\bar{v}')$ sur un sous-ensemble ordonné de (P,α), d'où $v+v' \leq v.v'$. Enfin la dernière affirmation résulte de la proposition 3.

COROLLAIRE 1. Si v' est un ordinal et si v est l'ordinal somme de la suite transfinie $\xi = (v_i)_{i<w}$ *d'ordinaux, on a* $v'.v = \overset{+}{\sum}_{i<w} v'_i$, *où* $v'_i = v'.v_i$ *pour tout* $i \in w$.

En effet, si $v''_j = v'$ pour tout $j \in v$, on obtient, en utilisant les propositions 3 et 4,

$$v'.v = \overset{+}{\sum}_{j<v} v''_j = \overset{+}{\sum}_{i<w} v'_i, \quad \text{où} \quad v'_i = \overset{+}{\sum}_{j<v_i} v''_j = v'.v_i,$$

pour tout $i \in w$.

COROLLAIRE 2. Soient U un ensemble saturé par inclusion dont un élément est infini, W_U *l'ordinal et* Γ_U *l'ensemble des cardinaux correspondant à U. Alors* W_U^+ *et* $W_U^\bullet$ *sont des monoïdes ayant* N^+ *et* $N^\bullet$ *pour sous-monoïdes respectivement relativement aux lois de composition:*

$$(v',v) \to v'+v \qquad \text{et} \qquad (v',v) \to v'.v.$$

(Γ_U^+, c, W_U^+) *et* $(\Gamma_U^\bullet, c, W_U^\bullet)$ *sont des homomorphismes, où c associe* $\bar{\bar{v}}$ *à v.*

Preuve. Soient v et v' deux éléments de W_U; alors $\bar{\bar{v}}$ et $\bar{\bar{v}}'$ appartiennent à Γ_U. Les cardinaux $c(v'+v)$ et $c(v'.v)$ étant (proposition 1) les cardinaux somme et produit de $(\bar{\bar{v}}',\bar{\bar{v}})$, ils appartiennent à Γ_U d'après la proposition 10-19. Il en résulte que $v'+v$ et $v'.v$ sont équipotents à des éléments de U, c'est-à-dire appartiennent à W_U (proposition 6-18). Donc W_U^+ et $W_U^\bullet$ sont des magmas et c définit des homomorphismes de W_U^+ vers Γ_U^+ et de $W_U^\bullet$ vers $\Gamma_U^\bullet$. La proposition 4 prouve que W_U^+ et $W_U^\bullet$ sont associatifs et admettent respectivement 0 et 1 pour unités, N^+ et $N^\bullet$ pour sous-monoïdes.

PROPOSITION 5. Soient (J,α) *un ensemble bien ordonné de premier élément* α, $\xi = (v_i)_{i\in J}$ *une famille d'ordinaux et* θ_j

l'ordinal $({}^{\leftarrow}j,\alpha)$*-somme (resp.* $({}^{\leftarrow}j,\alpha)$*-produit) de* $\xi_j = (v_i)_{i\in{}^{\leftarrow}j}$ *pour tout* $j \in J$. *La surjection* $j \to \mathring{v}_j$, *où* $j \in J$, *est l'unique surjection* f *ayant* J *pour ensemble source et vérifiant les conditions:*

1° $f(a) = 0$ *(resp.* $= 1$*)*

2° $f(j) = f(j')+v_{j'}$ *(resp.* $f(j) = f(j').v_{j'}$*) si* j *admet* j' *pour prédécesseur dans* (J,α).

3° $f(j)$ *est la réunion de l'ensemble* $\{f(i) \mid i \in {}^{\leftarrow}j\}$, *si* j *est un élément limite de* (J,α).

Preuve. Nous posons $\circ = +$ (resp. $\circ = \cdot$).

1° Montrons que la surjection $g : J \to \mathring{v}_j$ de J sur $\{\mathring{v}_j \mid j \in J\}$ a les propriétés voulues. Les ordinaux somme et produit de la famille vide sont 0 et 1, de sorte que $g(a) = 0$ (resp. $g(a) = 1$). Soit $j \in J$.

a) Si J admet un prédécesseur j', on a ${}^{\leftarrow}j = {}^{\leftarrow}j' \cup \{j'\}$, la section ordonnée $({}^{\leftarrow}j,\alpha)$ de (J,α) est isomorphe à la somme ordonnée de $(({}^{\leftarrow}j',\alpha),(\{j'\},\cdot))$ et la proposition 3 entraîne

$$g(j) = \overset{\circ}{\underset{({}^{\leftarrow}j,\alpha)}{}}\xi_j = \left(\overset{\circ}{\underset{({}^{\leftarrow}j',\alpha)}{}}\xi_{j'}\right)\circ v_{j'} = g(j')\circ v_{j'}.$$

b) Supposons que j soit un élément limite; c'est alors la borne supérieure de ${}^{\leftarrow}j$ dans (J,α). Pour tout $i \in J$ notons (S_i,α) la somme $({}^{\leftarrow}i,\alpha)$-ordonnée (resp. le produit $({}^{\leftarrow}i,\alpha)$-colexicographique) de $(\bar{v}_{i'})_{i'\in{}^{\leftarrow}i}$; son ordinal est $\mathring{v}_i = g(i)$. D'après la proposition 9-17, si $i \in {}^{\leftarrow}j$, l'ensemble ordonné (S_i,α) est (resp. est isomorphe à) une section ordonnée (S'_i,α) de (S_j,α), et l'on a $\bigcup_{i\in{}^{\leftarrow}j} S'_i = S_j$. Il s'ensuit que $\mathring{v}_j$ est l'ordinal borne supérieure de l'ensemble $\{g(i) \mid i \in {}^{\leftarrow}j\}$ d'ordinaux.

2° Soit f une surjection de J sur F vérifiant

les conditions de l'énoncé; a appartient à l'ensemble V des $i \in J$ tels que $f(i) = g(i)$. Supposons $j \in J$ et ${}^{\leftarrow}j$ contenu dans V. Si j' est un prédécesseur de j, on a

$j' \in V$, d'où $f(j) = f(j')\circ v_{j'} = g(j')\circ v_{j'} = g(j)$.

Si j est un élément limite,

$f(j) = \bigcup\{f(i) \mid i \in {}^{\leftarrow}j\} = \bigcup\{g(i) \mid i \in {}^{\leftarrow}j\} = g(j)$.

Dans les deux cas, j appartient à V. Le principe d'induction affirme que $V = J$; autrement dit, $f = g$.

COROLLAIRE. Soient v' *un ordinal et* v *un ordinal limite; alors* $v'.v$ *est l'ordinal borne supérieure de*

$$B = \{v'.\hat{w} \mid \hat{w} \in v\}.$$

Preuve. Posons $v'_i = v'$ pour tout $i \in v$. Puisque, en vertu de la proposition 4, $v'.v = \overset{+}{\underset{i<v}{}}v'_i$ et que v est la borne supérieure de v, il résulte de la proposition 5 que $v'.v$ est la borne supérieure de l'ensemble des $\overset{+}{\underset{i<\hat{w}}{}}v'_i = v'.\hat{w}$ où $\hat{w} \in v$, c'est-à-dire de B.

Remarque. La proposition 5 montre que les ordinaux (J,α)-somme et (J,α)-produit de ξ peuvent être définis par induction, à partir des ordinaux somme et produit d'un couple d'ordinaux.

PROPOSITION 6. Soit v *un ordinal. Si* v' *est un ordinal tel que* $v' \leq v$, *il existe un et un seul ordinal* v'' *tel que* $v = v'+v''$; *si* $v' \neq 0$, *il existe au plus un ordinal* $\hat{w}$ *tel que* $v = v'.\hat{w}$. *L'ensemble des ordinaux* v'' *pour lesquels il existe un ordinal* v' *vérifiant* $v = v'+v''$ *(resp.* $= v'.v''$ *et* $v' \neq 0$*) est fini.*

Preuve. 1° Soit $v' \leq v$. Si v'' et v''_1 sont deux or-

dinaux tels que $v'+v'' = v = v'+v'_1$, l'un, disons v'', est strictement plus petit que l'autre. La somme ordonnée de $(\bar{v}', \bar{v}'')$ est alors une section ordonnée propre de la somme ordonnée de $(\bar{v}', \bar{v}'_1)$, ce qui est impossible, ces deux sommes ordonnées étant isomorphes à $\bar{v}$. Donc $v'' = v'_1$. Puisque $\bar{v}$ est en particulier isomorphe à la somme ordonnée de $(\bar{v}', (v \backslash v', \leq))$, il s'ensuit que l'ordinal de $(v \backslash v', \leq)$ est l'unique ordinal v'' vérifiant $v'+v'' = v$; nous le noterons $v_{v'}$.

2° Soit $0 \neq v' \leq v$. Si w' et w'' sont deux ordinaux tels que $v'.w' = v = v'.w''$, l'un, disons w'', est strictement plus petit que l'autre et, d'après la partie I, il existe δ tel que $w'' = w'+\delta$. En utilisant le corollaire 1 de la proposition 4, on en déduit

$$v'.w' = v = v'.w'' = (v'.w')+(v'.\delta) ,$$

donc (partie 1) $v'.\delta = 0$; a fortiori $\delta = 0$ et $w' = w''$.

3° L'ensemble $A = \{v_{v'} \mid v' \leq v\}$ est majoré par v. Si y est un ordinal tel que $y < v' < v$, il existe un ordinal $y' \neq 0$ tel que $v' = y+y'$ et l'égalité

$$v = v'+v_{v'} = y+y'+v_{v'}$$

entraîne $v_y = y'+v_{v'} \geq v_{v'}$, d'après la partie 1. Il s'ensuit que $(v_{v'})_{v' \leq v}$ est une suite transfinie décroissante dans le type ordinal du suivant de v; le corollaire de la proposition 8-18 assure que le but de cette suite transfinie, à savoir A, est fini.

4° Soit L l'ensemble des ordinaux v' tels que $0 \neq v' \leq v$ et qu'il existe un ordinal $\hat{w}$ vérifiant $v'.\hat{w} = v$; l'ordinal $\hat{w}$, qui est unique, sera noté $w_{v'}$. L'ensemble $B = \{w_{v'} \mid v' \in L\}$ est majoré par v, i.e. contenu dans

l'ordinal $v+1$ suivant de v. Soient v' et v'' des éléments de L tels que $v' < v''$; on a $v = v'.w_{v'} \leq v''.w_{v'}$. Si $w_{v'} < w_{v''}$, il existe un ordinal $w' \neq 0$ tel que l'on ait $w_{v''} = w_{v'}+w'$, de sorte que

$v'.w_{v'} = v = v''.w_{v''} = v''.(w_{v'}+w') = (v''.w_{v'})+(v''.w') > v''.w_{v'}$,

ce qui est impossible. Par suite $w_{v''} \leq w_{v'}$ et l'application $v' \to w_{v'}$ de L dans $v+1$ définit une application ordonnée de l'ensemble bien ordonné $(L, \leq)$ vers l'ensemble ordonné opposé du type ordinal de $v+1$. La proposition 8-18 assure que l'image B de cette application est finie.

COROLLAIRE 1. Soient v et v' deux ordinaux et $\hat{w} = v'+v$. L'application $s: x \to v'+x$ de v sur $\hat{w} \backslash v'$ définit l'unique isomorphisme de $\bar{v}$ sur $(\hat{w} \backslash v', \leq)$.

En effet s est une bijection d'après la proposition et $x \leq x'$ entraîne

$$s(x) = v'+x \leq v'+x' = s(x') .$$

COROLLAIRE 2. Soit v l'ordinal borne supérieure d'un ensemble A d'ordinaux; pour tout ordinal v', l'ordinal somme $v'+v$ est l'ordinal borne supérieure de $A' = \{v'+x \mid x \in A\}$.

En effet, ceci résulte du corollaire 1.

Définition. Soit v un ordinal. Soit v' un ordinal tel que $v' < v$; l'unique ordinal $v_{v'}$ vérifiant $v = v'+v_{v'}$ est appelé *reste* de (v, v'), noté $-v'+v$; s'il existe un ordinal $\hat{w} > 1$ tel que $v = v'.\hat{w}$, on l'appelle *diviseur* de v *par* v' , noté v/v' . On dit que v est un ordinal *indécomposable* si v est l'unique reste de v, un ordinal *irréductible* si v est l'unique diviseur de v .

Soit v un ordinal. L'ensemble des restes de v est fini, de même que l'ensemble de ses diviseurs, d'après la proposition 6. v est indécomposable ssi $v = v'+v$ pour tout ordinal $v' < v$; il est irréductible ssi l'égalité

$$v = v'.\hat{w}\ ,\quad \text{où}\quad v' < v\ ,$$

entraîne $\hat{w} = v$. Un entier $v \neq 1$ n'est pas indécomposable; il est irréductible ssi c'est un nombre premier. N est indécomposable et irréductible, car le produit et la somme de deux entiers sont des entiers.

PROPOSITION 7. Soient v et v' deux ordinaux tels que $0 \neq v' \leq v$. Il existe un et un seul couple (w,w') d'ordinaux tel que $v = (v'.w)+w'$, $w \leq v$, $w' < v'$.

Preuve. Comme $v < v'.(v+1)$, l'ensemble des ordinaux $y \leq v+1$ tels que $v < v'.y$ n'est pas vide, de sorte qu'il a un premier élément $\hat{w}$.

1° Si $\hat{w}$ est un ordinal limite, c'est la borne supérieure de $\hat{w}$ et, d'après le corollaire de la proposition 5, $v'.\hat{w}$ est la borne supérieure de $B = \{v'.w' \mid w' < \hat{w}\}$; l'ordinal v majorant B par définition de $\hat{w}$, il s'ensuit $v'.\hat{w} \leq v$, ce qui est impossible. Par conséquent $\hat{w}$ admet un prédécesseur w, et l'on a $w \leq v$ et $v'.w \leq v$.

2° Puisque $v'.w \leq v$, il existe un reste

$$w' = -(v'.w)+v.$$

Si $v' \leq w'$, il existe un reste $w'' = -v'+w'$, ce qui entraîne

$$v = (v'.w)+w' = (v'.w)+v'+w'' = (v'.(w+1))+w'' = (v'.\hat{w})+w'',$$

égalité incompatible avec la relation $v < v'.\hat{w}$. Donc on a $0 \leq w' < v'$.

3° Si $v = (v'.w_1)+w'_1$, où $w'_1 < v'$, on trouve

$v'.w_1 \leq v$ et $v < (v'.w_1)+v' = v'.(w_1+1)$, c'est-à-dire $w_1+1 = \hat{w}$. Il en résulte $w_1 = w$ et, a fortiori, $w'_1 = w'$.

COROLLAIRE. v est un ordinal limite ssi il existe un ordinal $w \neq 0$ tel que $v = N.w$.

Preuve. 1° Soit v un ordinal limite; il est plus grand que N et, d'après la proposition, il existe des ordinaux w et $w' < N$ tels que $v = (N.w)+w'$. Si l'entier w' est différent de 0, il admet pour prédécesseur l'entier $w'-1$, et l'ordinal v admet $(N.w)+(w'-1)$ pour prédécesseur; autrement dit, v n'est pas un ordinal limite, ce qui est impossible. Il s'ensuit $w' = 0$ et $v = N.w$.

2° Soit v' un ordinal de la forme $N.w$. Si v' admet un prédécesseur v'', l'ordinal v'' est infini, et il existe des ordinaux $w' \leq v''$ et $w'' < N$ tels que $(N.w')+w'' = v''$. Des relations

$$v' = N.w = v''+1 = (N.w')+(w''+1) \quad \text{et} \quad w''+1 < N\ ,$$

on déduit (proposition 7) $w = w'$ et $w''+1 = 0$, ce qui est absurde. Ainsi v' est un ordinal limite.

PROPOSITION 8. Soit v un ordinal. Il existe une et une seule suite finie décroissante d'ordinaux indécomposables non nuls dont v est l'ordinal somme, et une suite finie d'ordinaux irréductibles dont v est l'ordinal produit.

Preuve. 1° Supposons que l'on ait $v = u_0+\ldots+u_n$, où $\xi = (u_i)_{i<n+1}$ est une suite finie décroissante d'ordinaux indécomposables $u_i \neq 0$.

a) Supposons $i \leq n$ et montrons que u_i est le

dernier élément de l'ensemble A des ordinaux indécomposables plus petits que $\hat{u}_i = u_i + \ldots + u_n$. En effet, u_i appartient à A. Supposons qu'il existe $u \in A$ tel que $u_i < u$; puisque $u_j < u$ si $i \leq j \leq n$, où u_j est indécomposable, on a $u_j + u = u$, d'où

$$\hat{u}_i + u = u_i + \ldots + u_n + u = u_i + \ldots + u_{n-1} + u$$

et, par récurrence, $\hat{u}_i + u = u$. Il s'ensuit $\hat{u}_i < u$, ce qui est contraire à la relation $u \in A$, c'est-à-dire $u \leq \hat{u}_i$. Donc u_i majore A.

b) Supposons que l'on ait aussi $v = u'_0 + \ldots + u'_m$, où $\xi' = (u'_i)_{i<m+1}$ est une suite finie décroissante d'ordinaux indécomposables $u'_i \neq 0$. Comme u_0 et u'_0 sont, d'après la partie a, le plus grand ordinal indécomposable plus petit que v, on a $u_0 = u'_0$. Si l'on a prouvé que $u_i = u'_i$ pour tout entier $i \leq j$, où j est plus petit que n et que m, le reste de v par $u_0 + \ldots + u_j = u'_0 + \ldots + u'_j$ est égal à $\hat{u}_{j+1} = u'_{j+1} + \ldots + u'_m$, et le plus grand ordinal indécomposable plus petit que ce reste est (partie a) $u_{j+1} = u'_{j+1}$. Par récurrence, on en déduit $m = n$ et $u_j = u'_j$ pour tout $j \leq n$, d'où $\xi = \xi'$.

2° Soit $\hat{v}$ un ordinal strictement plus grand que v. Posons $\circ = \cdot$ (resp. $\circ = +$) et considérons l'ensemble V des ordinaux 0, 1 et des $w \in \hat{v}$ tels qu'il existe une suite finie $\xi = (u_i)_{i<n+1}$ d'ordinaux vérifiant les conditions:

1) On a $w = u_0 \circ \ldots \circ u_n$;

2) u_n est le plus petit diviseur (resp. plus petit reste) de w ;

3) Pour tout $i \leq n$, l'ordinal u_i est irréductible différent de 1 (resp. est indécomposable différent de 0 et ξ est une suite décroissante d'ordinaux).

Pour montrer que $V = \hat{v}$ (et a fortiori que $v \in V$), d'après le principe d'induction il nous suffit de prouver que $v' \in V$ si v' est un ordinal tel que $v' \in \hat{v}$ et $v' \subset V$. Or v' admet un plus petit diviseur u_{n+1} et celui-ci est irréductible (resp. plus petit reste u_{n+1} qui est indécomposable) soit w le plus petit ordinal vérifiant $v' = w \circ u_{n+1}$. Comme $w < v'$, il appartient à V et il existe une suite finie du type indiqué ci-dessus. On en déduit $v' \in V$, car la suite $\xi' = (u_i)_{i<n+2}$ vérifie les conditions 1, 2 et 3 (resp. les conditions 1 et 2; de plus c'est une suite décroissante en effet, si l'on avait $u_n < u_{n+1}$, alors $u_{n+1} = u_n + u_{n+1}$, ce qui entraîne

$$v' = u_0 + \ldots + u_n + u_{n+1} = u_0 + \ldots + u_{n-1} + u_{n+1},$$

où $u_0 + \ldots + u_{n-1} < w$; or ceci est contraire à la définition de w).

Définition. Si v et w sont des ordinaux, on appelle *ordinal v puissance w* l'ordinal produit de $(v_i)_{i<w}$, où $v_i = v$ pour tout $i < w$; on le note $v^{\cdot w}$.

Si w est un entier, $v^{\cdot w}$ est l'itéré d'ordre w de v dans le monoïde $W^{\circ}_{P(vUN)}$ correspondant (corollaire 2, proposition 4) à $P(vUN)$.

Soient v, w et w' des ordinaux. De la proposition 1 il résulte que, si $v \geq 2$, on a $w \leq v^{\cdot w}$. Si $v' \leq v$ et $w' \leq w$, la proposition 2 entraîne $v'^{\cdot w'} \leq v^{\cdot w}$. La proposition 3 montre que

$$v^{\cdot (w+w')} = v^{\cdot w} . v^{\cdot w'} \quad \text{et} \quad v^{\cdot (w . w')} = (v^{\cdot w})^{\cdot w'} .$$

On en déduit, en utilisant la proposition 6 et si $v \geq 2$ et $w' < w$, que $v^{\cdot w'} < v^{\cdot w}$.

PROPOSITION 9. Si v est un ordinal et u un ordinal limite, $v^{\cdot u}$ est l'ordinal borne supérieure de $\{v^{\cdot u'} \mid u' < u\}$. Si v et v' sont des ordinaux où $v > 1$, $v' > 0$, il existe un et un seul ordinal w tel que $v^{\cdot w} \leq v' < v^{\cdot (w+1)}$.

Preuve. La première affirmation résulte de la proposition 5. Soit A l'ensemble des ordinaux u' tels que l'on ait $v' < v^{\cdot u'}$; cet ensemble d'ordinaux a un premier élément u . Celui-ci ne peut pas être un ordinal limite, car $v^{\cdot u}$ serait alors l'ordinal borne supérieure de $\{v^{\cdot w} \mid w < u\}$, et u ne pourrait pas être le premier élément de A. Donc u admet un prédécesseur w ; il s'ensuit $v^{\cdot w} \leq v' < v^{\cdot (w+1)}$

Remarque. A partir de l'addition, du produit, du reste, du diviseur et de la puissance, on développe une Arithmétique ordinale. Ainsi on caractérise les ordinaux indécomposables (ce sont les ordinaux $N^{\cdot v}$, où v est un ordinal), les ordinaux irréductibles,... Bien que cette théorie généralise l'Arithmétique usuelle (des entiers), les propriétés des entiers ne sont pas toutes conservées. Par exemple, si v , v' et v" sont des ordinaux quelconques, on peut avoir $v'+v = v''+v$, avec $v' \neq v''$,

$$(v'+v'').v \neq (v'.v)+(v''.v), \qquad (\hat{v}.v)^{\cdot v'} \neq \hat{v}^{\cdot v'}.v^{\cdot v'}$$

21. *Ordinaux réguliers. Ordinaux inaccessibles.*

Nous reprenons les notations des § précédents; en particulier si v est un ordinal, $\bar{v}$ est son type ordinal et $\bar{\bar{v}}$ son cardinal.

Définition. Soit v un ordinal. Un ordinal v' est dit *cofinal avec* v s'il existe une partie A de v cofinale avec $\bar{v}$ et telle que $(A,\leq)$ ait v' pour ordinal.

Soit v un ordinal. Un ordinal v' est cofinal avec v ssi il existe une suite transfinie $(v_\iota)_{\iota<v'}$ strictement croissante dans $\bar{v}$ dont le but A est cofinal avec $\bar{v}$. Soit A une partie de v. Si A est cofinal avec $\bar{v}$, l'ordinal borne supérieure de A est identique à l'ordinal borne supérieure de v: Si v est ordinal limite, A est cofinal avec $\bar{v}$ ssi v est la réunion de A; si v admet un prédécesseur v', alors A est cofinal avec $\bar{v}$ ssi v' appartient à A; en particulier {v'} est cofinal avec $\bar{v}$. Il s'ensuit que v est cofinal avec v; de plus v est cofinal avec 1 ssi v admet un prédécesseur.

PROPOSITION 1. Soient v, v' et w des ordinaux, v' étant cofinal avec v. Si w est cofinal avec v', alors w est cofinal avec v. Si w est cofinal avec v et plus petit que v', il existe un ordinal w' plus petit que w et cofinal avec v'.

Preuve. Il existe une partie A de v cofinale avec $\bar{v}$ et un isomorphisme $((A,\leq),f,\bar{v}')$.

1° S'il existe un isomorphisme $((B,\leq),g,\bar{w})$, où B est cofinal avec $\bar{v}'$, l'image B' de B par f est cofinale avec $(A,\leq)$ et, a fortiori, avec $\bar{v}$. Comme $(B',\leq)$ est isomorphe à $(B,\leq)$, il admet w pour ordinal et w est cofinal avec v .

2° Supposons w cofinal avec v et $w \leq v'$. Il existe un isomorphisme $((C,\leq),g,\bar{w})$, où C est cofinal avec $\bar{v}$. Puisque A est cofinal avec $\bar{v}$, pour tout élément x de w l'ensemble M_x des $y < v'$ vérifiant

$g(x) \leq f(y)$ n'est pas vide. Soit h l'application de w dans v' associant à x le premier élément de M_x ; on a $f^{-1}(g(x)) \leq h(x)$.

a) L'image B de h est cofinale avec $\bar{v}'$. En effet, si $y \in v'$, il existe un $x \in w$ tel que $f(y) \leq g(x)$, car C est cofinal avec $\bar{v}$. Il en résulte

$$y = f^{-1}(f(y)) \leq f^{-1}(g(x)) \leq h(x) \in B$$

b) h définit une application ordonnée de $\bar{w}$ dans $\bar{v}'$. En effet, si $x \leq x'$ et si $y \in M_{x'}$, on trouve

$$g(x) \leq g(x') \leq f(y), \quad \text{d'où} \quad y \in M_x ,$$

et $M_{x'} \subset M_x$. Il s'ensuit que le premier élément $h(x)$ de M_x est plus petit que le premier élément $h(x')$ de $M_{x'}$.

c) Si $y \in B$, soit x_y le premier élément de l'ensemble des $x \in w$ tels que $h(x) = y$. L'ensemble des x_y, où $y \in B$, est une partie L de w, et la restriction de h à (B,L) définit un isomorphisme de $(L,\leq)$ sur $(B,\leq)$. On en déduit que l'ordinal w' de $(L,\leq)$, qui est plus petit que w, est cofinal avec v'.

Définition. On appelle *ordinal régulier* un ordinal u tel qu'il n'existe pas d'ordinal strictement plus petit que u et qui soit cofinal avec u .

Un ordinal différent de 1 et admettant un prédécesseur n'est pas régulier, car il est cofinal avec 1 . En particulier 0 et 1 sont les seuls entiers qui sont des ordinaux réguliers. N est régulier, puisque toute partie finie de N est strictement majorée dans $\bar{N}$, i.e. n'est pas cofinale avec $\bar{N}$. Un ordinal limite u est régulier ssi toute suite transfinie $(v_\iota)_{\iota<w}$ strictement croissante dans $\bar{u}$ et telle que w soit strictement plus petit que

u admet une borne supérieure v strictement plus petite que u .

PROPOSITION 2. Pour tout ordinal v, il existe un et un seul ordinal régulier cofinal avec v.

Preuve. L'ensemble des ordinaux cofinaux avec v n'étant pas vide (v y appartient), il admet un premier élément u. Si v' est un ordinal plus petit que u et cofinal avec u, il est cofinal avec v (proposition 1), d'où $v' \leq u$ et, a fortiori, $v' = u$. Ainsi u est régulier. Si u' est un ordinal régulier cofinal avec v, comme $u \leq u'$, la proposition 1 affirme qu'il existe $u_1 \leq u$ cofinal avec u'; il s'ensuit $u_1 = u'$, car u' est régulier, d'où $u = u'$.

Définition. Soit v un ordinal. L'unique ordinal régulier cofinal avec v est appelé *caractère cofinal de v*.

PROPOSITION 3. Soient u un cardinal infini, $(J,\preccurlyeq)$ un ensemble bien ordonné tel que $w < u$, où w est le cardinal de J, et v' l'ordinal borne supérieure, v'' l'ordinal $(J,\preccurlyeq)$-somme, d'une famille $\xi = (v_\iota)_{\iota \in J}$ d'éléments de u. On a $v' < u$ ssi $v'' < u$. Si D vérifie l'axiome du choix et si u' et u'' sont les cardinaux borne supérieure et somme de $\xi' \simeq (\bar{v}_\iota)_{\iota \in J}$, les conditions suivantes sont équivalentes:

$$v'' < u \; ; \quad u'' < u' ; \quad u' < u .$$

Preuve. 1° Comme $v' \leq v''$, on a $v' < u$ lorsque $v'' < u$. Inversement supposons $v' < u$. Les relations

$$v_\iota \leq v' \quad \text{pour tout} \quad \iota \in J$$

entraînent, en posant $v'_\iota = v'$ pour tout $\iota \in J$,

$v'' =$

Or cette dernière somme est égale à $v'.w$ et, d'après le corollaire, proposition I-20, $v'.w < u$. Donc $v'' < u$.

2° Supposons que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix. Alors u'' est le cardinal de v'' (proposition I-20), de sorte que $u'' < u$ équivaut à $v'' < u$, car u est un cardinal. Dans ce cas la relation $u' \leq u''$ entraîne $u' < u$. Enfin, si $u' < u$, la proposition 8-19 montre que $u'' < u$, puisque $u' \cup w < u$.

PROPOSITION 4. Soit u un ordinal infini. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1° u est régulier;

2° u est un ordinal limite et $v < u$ si v est l'ordinal borne supérieure d'une suite transfinie $(v_i)_{i<w}$ d'éléments de u telle que $w < u$.

3° (resp. 4°) u est un cardinal et $v < u$ si v est l'ordinal borne supérieure (resp. ordinal (J,α)-somme) d'une famille $(v_i)_{i\in J}$ d'éléments de u telle que J admette un cardinal $w < u$.

Preuve. 1° Supposons u régulier. Comme u est infini, c'est un ordinal limite. Soit $\xi = (v_i)_{i<w}$ une suite transfinie d'éléments de u telle que $w < u$; soit v son ordinal borne supérieure. Pour tout $J < w$, soit w_J l'ordinal borne supérieure de $(v_i)_{i<J}$. Si $J < w$, l'ensemble des $i < w$ pour lesquels $w_i = w_J$ admet un premier élément $p(J)$. Soient $J' = \{p(J) \mid J \in w\}$ et $(\bar{w}, f, (J', \leq))$ l'isomorphisme canonique du sous-ensemble ordonné $(J', \leq)$ de $\bar{w}$ sur son type ordinal. En posant

$$\hat{v}_k = w_{f^{-1}(k)} \quad \text{pour tout } k < w',$$

on obtient une suite transfinie $(\hat{v}_k)_{k<w'}$ strictement croissante dans $\bar{u}$ indexée par $w' \leq w < u$; son ordinal borne supérieure est v, car la réunion de $(v_i)_{i<J}$ est identique à celle de $(w_i)_{i<J}$ pour tout $J < w$; il s'ensuit $v < u$, puisque u est régulier. Ceci prouve que la condition 2 est satisfaite.

2° Supposons remplie la condition 2.

a) Soit u' le cardinal de u. Il existe une bijection f de u' sur u; l'ordinal u est la borne supérieure de la suite $(w_i)_{i<u'}$, où $w_i = f(i)$ pour tout $i < u'$. Comme $w_i < u$, la relation $u' < u$ entraînerait $u < u$ en vertu de la condition 2, ce qui est absurde. Par suite $u = u'$.

b) Soit $\xi = (v_j)_{j\in J}$ une famille d'éléments de u telle que J admette un cardinal $w < u$. Il existe une bijection g de w sur J et l'ordinal v borne supérieure de ξ est aussi celui de la suite transfinie $(v'_i)_{i<w}$ où $v'_i = v_{g(i)} < u$ pour tout $i < w$. Il en résulte que $v < u$. Ainsi la condition 3 est vérifiée.

3° Si la condition 3 est satisfaite et si ξ est une suite transfinie $(v_i)_{i<w}$ d'éléments de u telle que $w < u$, le cardinal de w est a fortiori strictement plus petit que u, de sorte que $v < u$, où v est l'ordinal borne supérieure de ξ. Par suite u est régulier. Ceci prouve l'équivalence des conditions 1, 2 et 3. Enfin les conditions 3 et 4 sont équivalentes, d'après la proposition 3.

COROLLAIRE. Supposons que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix et soit u un cardinal infini. Les conditions suivantes sont équivalentes:

1° u est régulier;

2° (resp. 3°) On a $\hat{u} < u$ si $\hat{u}$ est le cardinal borne supérieure (resp. cardinal somme) d'une famille $(u_i)_{i\in J}$ de cardinaux telle que $u_i < u$ pour tout $i \in J$ et que, si w est le cardinal de J, on ait $w < u$.

Preuve. 1° u est un ordinal limite. Les conditions 2 et 3 sont équivalentes d'après la proposition 3. Supposons la condition 2 remplie et soit v l'ordinal borne supérieure d'une suite transfinie $\xi = (v_i)_{i<w}$ d'éléments de u telle que $w < u$. Si $\hat{u}$ est le cardinal borne supérieure de $(\bar{v}_i)_{i<w}$, on a par hypothèse $\hat{u} < u$. Il s'ensuit $v < u$ en vertu de la proposition 3. Ainsi la condition 2 de la proposition 4 est vérifiée, de sorte que u est régulier.

2° Supposons u régulier et soient $\xi = (u_i)_{i\in J}$ une famille de cardinaux, w le cardinal de J. Si $u_i < u$ pour tout $i \in J$ et si $w < u$, l'ordinal (i.e. le cardinal) $\hat{u}$ borne supérieure de ξ vérifie $\hat{u} < u$ (proposition 4). Donc la condition 2 est remplie. Ainsi 1, 2, 3 sont équivalentes.

PROPOSITION 5. Soit u un cardinal ω_v d'indice $v \neq 0$. Si v est un ordinal limite et si u est régulier, on a $v = u$. Si D vérifie l'axiome du choix et si v admet un prédécesseur, u est régulier.

Preuve. 1° Supposons u régulier et v limite. Alors u est (corollaire, proposition 4-19) l'ordinal borne supérieure de la suite transfinie $(\omega_w)_{w<v}$ d'éléments de u. La condition $v < u$ entraînerait, u étant régulier, $u < u$ Ceci étant impossible, on a $v = u$.

2° Supposons que v admette un prédécesseur v'. Le

cardinal $u = \omega_v$ est le cardinal suivant de $\omega_{v'}$. Soit ξ une famille $(u_i)_{i\in J}$ de cardinaux appartenant à u ; des relations $u_i \leq \omega_{v'} < u$ pour tout $i \in J$, on déduit que le cardinal u' borne supérieure de ξ vérifie $u' \leq \omega_{v'}$, d'où $u' < u$. Par suite u est régulier (corollaire de la proposition 4).

Remarque. La dernière affirmation de la proposition 5 ne s'étend pas au cas où D ne vérifie pas l'axiome du choix; dans ce cas, on ne peut pas prouver l'existence d'ordinaux réguliers autres que 0, 1 et N.

Définition. On appelle *ordinal inaccessible* un ordinal régulier u tel que, si u' est un cardinal et si $u' < u$, on ait $u'' \leq u$, où u'' est le plus petit cardinal qui n'est pas de puissance inférieure à $P(u')$. Si u est un ordinal inaccessible infini et L(u) l'ensemble des ordinaux inaccessibles infinis $\hat{u} < u$, l'ordinal du sous-ensemble ordonné $(L(u), \leq)$ de $\bar{u}$ est appelé *ordre de u*.

Un ordinal inaccessible est un cardinal (proposition 4 0 est le seul qui soit fini. N est l'ordinal inaccessible d'ordre 0. Si u est un ordinal inaccessible d'ordre $v \neq 0$ la bijection r associant à un ordinal inaccessible infin $u' < u$ son ordre définit le seul isomorphisme de $(L(u), \leq)$ sur son type ordinal $\bar{v}$, de sorte que $r^{-1}(v')$ est l'ordinal inaccessible d'ordre v', pour tout $v' < v$.

PROPOSITION 6. Supposons que D vérifie l'axiome du choix et soit u un ordinal infini. Les conditions suivantes

sont équivalentes:

1° u est un ordinal inaccessible;

2° u est un ordinal régulier et le cardinal $2^{\bullet u'}$ *vérifie* $2^{\bullet u'} < u$ *si u' est un cardinal tel que* $u' < u$.

3° On a $u' < u$ *si u' est le cardinal produit d'une famille* $(u_\iota)_{\iota \in J}$ *de cardinaux telle que les* u_ι *et le cardinal de J soient strictement plus petits que u.*

Preuve. 1° Si u' est un cardinal, le plus petit cardinal u'' qui n'est pas de puissance inférieure à $P(u')$ est le cardinal suivant du cardinal 2 puissance u' de $P(u')$, de sorte que la relation $u'' \leq u$ équivaut à $2^{\bullet u'} < u$. Ainsi les deux premières conditions sont équivalentes.

2° Supposons la condition 3 remplie. Puisque $\bar{\bar{u}} < u$ entraînerait $2^{\bullet \bar{\bar{u}}} < u$ et que $\bar{\bar{u}} \leq u < 2^{\bullet \bar{\bar{u}}}$, u est égal à son cardinal $\bar{\bar{u}}$. Soit u'' le cardinal borne supérieure d'une famille $(u_\iota)_{\iota \in J}$ de cardinaux appartenant à u telle que $w < u$, où w est le cardinal de J. Si u'' est fini, $u'' < u$. Supposons u'' infini; u'' est aussi l'ordinal borne supérieure de la famille $\xi = (u_\iota)_{\iota \in J'}$ d'ordinaux, où J' est l'ensemble des $\iota \in J$ tels que $u_\iota \neq 0$. Le cardinal produit u' de ξ est plus grand que u''. Il s'ensuit $u'' < u$, car $u' < u$, le cardinal w' de J' vérifiant $w' \leq w < u$. Ceci prouve que u est régulier, en vertu du corollaire de la proposition 4. Par ailleurs, soit v un cardinal tel que $v < u$; le cardinal $2^{\bullet v}$ produit de la famille $(u_\iota)_{\iota \in v}$, où $u_\iota = 2 < u$ pour tout $\iota \in v$, est strictement plus petit que u. Donc u est inaccessible.

3° Supposons u inaccessible et soient u' et u'' les cardinaux produit et somme d'une famille $(u_\iota)_{\iota \in J} = \xi$

de cardinaux telle que $u_\iota < u$ et $w < u$, où w est le cardinal de J. Le cardinal u'' de la somme S de ξ vérifie $u'' < u$, u étant régulier, d'où $2^{\bullet u''} < u$. Comme le produit de ξ est une partie de P(S) (proposition I-4), son cardinal u' est plus petit que le cardinal $2^{\bullet u''}$ de P(S); il en résulte $u' < u$, ce qui prouve la condition 3.

COROLLAIRE. Supposons que D vérifie l'axiome du choix et soit u un ordinal inaccessible infini. C'est un cardinal dont l'indice est 0 ou l'ordinal limite u.

En effet, si v avait un prédécesseur v', le cardinal u' d'indice v' aurait u pour cardinal suivant, d'où $u' < 2^{\bullet u'} < u$. Ceci étant impossible, $v = 0$ (et $u = N$), ou bien v est un ordinal limite et $u = \omega_u$ (proposition 6

Définition. Si D vérifie l'axiome du choix, on dit que D vérifie *l'hypothèse du continu généralisée* si l'on a:

(A9) Si E est un D-ensemble infini, le cardinal suivant du cardinal de E est le cardinal de P(E).

Dans ce cas, en particulier le cardinal de P(N) (i.e. le cardinal de l'ensemble R des nombres réels) est le cardinal suivant de N. Cette seule condition est appelée *hypothèse du continu.*

PROPOSITION 7. Si D vérifie l'axiome du choix et l'hypothèse du continu généralisée, un cardinal infini $u \neq N$ *est inaccessible ssi c'est un ordinal régulier dont l'indice est un ordinal limite; dans ce cas, cet indice est u.*

Preuve. Si u est inaccessible, il est son propre in-

dice (corollaire, proposition 6). Supposons la condition remplie. Si u' est un cardinal tel que $u' < u$, le cardinal $2^{\bullet u'}$ suivant de u' est différent de u, sans quoi son indice serait le prédécesseur de l'indice v de u. Il s'ensuit $2^{\bullet u'} < u$, et u est inaccessible.

Remarque. Les ordinaux inaccessibles sont aussi appelés *nombres de Zermelo, cardinaux inaccessibles au sens de Tarski* ou *cardinaux fortement inaccessibles*. Un ordinal régulier dont l'indice est un ordinal limite est dit *nombre de Hausdorff* ou *cardinal inaccessible au sens de Kuratowski* (parfois simplement cardinal inaccessible, mais cette terminologie étant en contradiction avec celle utilisée ici, nous ne l'emploierons pas). Un nombre de Zermelo est a fortiori un nombre de Hausdorff. La proposition 7 montre que ces deux notions sont équivalentes lorsque $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix et l'hypothèse du continu généralisée.

Un préunivers (§ 15) étant un ensemble saturé par inclusion, il lui correspond un ordinal W qui est (proposition 6-18) l'ensemble des ordinaux équipotents à un élément du préunivers.

PROPOSITION 8. Soit U un préunivers. L'ordinal W correspondant est l'ensemble des ordinaux appartenant à U et c'est un ordinal inaccessible.

Preuve. 1° Tout ordinal appartenant à U appartient à W. Supposons que l'ensemble des ordinaux appartenant à W mais non à U ne soit pas vide; il a un premier élément v et, v étant la section de $\bar{W}$ associée à v, c'est une

partie de U, qui est équipotente à un élément de U. La proposition 1-15 entraîne que v appartient à U, ce qui est impossible. Donc W est une partie de U.

2° W n'ayant pas de dernier élément (corollaire, proposition 6-18), c'est un ordinal limite. Soit $\xi = (v_i)_{i<w}$ une suite transfinie d'ordinaux telle que

$$w < W \quad \text{et} \quad v_i < W \quad \text{pour tout } i \in w.$$

Puisque w et les v_i appartiennent à U, la réunion v (c'est-à-dire la borne supérieure) de ξ appartient à U, et par suite à W, d'où $v < W$. Ceci prouve que W est un ordinal régulier.

3° Soit u un cardinal strictement plus petit que W. La relation $u \in U$ a pour conséquence $P(u) \in U$. Si W était de puissance inférieure à $P(u)$, il appartiendrait à U, car W serait une partie de U équipotente à un élément de U ; il s'ensuivrait $W \in W$, ce qui est impossible. Ainsi $u' \leq W$, si u' est le plus petit cardinal qui n'est pas de puissance inférieure à $P(u)$. Il en résulte que W est un ordinal inaccessible.

COROLLAIRE 1. Supposons que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix et soit W l'ordinal correspondant à un préunivers U. Si U est un univers, W est l'indice de W ; si U est un miniunivers, $W = N$.

En effet, d'après le corollaire de la proposition 6, W étant inaccessible (proposition 8) son indice est W ou 0. Comme W est infini, dans le premier cas $N < W$, d'où $N \in U$; dans le second $N \notin U$, de sorte que U n'est pas un univers (proposition 5-15).

COROLLAIRE 2. Soient U et U' deux univers, W , W' et W" les ordinaux correspondants à U, à U' et à U∩U' . Alors W" est égal au plus petit des ordinaux W et W'.

En effet, un ordinal appartenant à W" ssi il appartient au préunivers U∩U', et par suite ssi il appartient à W et à W' , on obtient W" = W∩W' .

COROLLAIRE 3. Supposons que D vérifie l'axiome du choix. Soient W l'ordinal correspondant à un univers U et K(W) l'ensemble des cardinaux infinis appartenant à W. L'application γ associant à un cardinal u ε W son indice définit un isomorphisme de (K(W),≤) sur W̄.

En effet, γ définit l'isomorphisme canonique du sous-ensemble ordonné (K(W),≤) sur le type ordinal de l'indice de W ; or cet indice est W , d'après le corollaire 1.

PROPOSITION 9. Si D vérifie l'axiome des univers, pour tout ordinal v il existe un ordinal inaccessible d'ordre v.

Preuve. Soit V l'ensemble des ordinaux $v' \leq v$ tels qu'il existe un ordinal inaccessible $W_{v'}$ d'ordre v'. Comme V est une section de l'ordinal suivant de v, c'est un ordinal. Considérons l'ordinal u borne supérieure de la suite transfinie $(W_{v'})_{v'<V}$ d'ordinaux. Il existe un univers U auquel appartient u ; l'ordinal W correspondant à U est inaccessible (proposition 8) et $u < W$. Si w est l'ordre de W , les relations $W_{v'} \leq u < W$ entraînent $v' < w$, pour tout $v' \in V$, d'où $V \leq w$. Il en résulte qu'il existe un ordinal inaccessible d'ordre V; par suite $V \in V$ si $V \leq v$. Ceci étant impossible, on a $v \in V$.

CHAPITRE VI

Construction d'univers

Dans ce chapitre, D est une totalité, ensemble signifie D-ensemble et E est un ensemble donné.

22. Ensembles E-fondés.

PROPOSITION 1. Soit v un ordinal; il existe une unique suite transfinie $\xi_v = (U_w)_{w\leq v}$ telle que, si $w \leq v$, on ait

(1) $A \in U_w$ ssi il existe $w' < w$ tel que $A \subset E \cup U_{w'}$.

ξ_v vérifie les conditions suivantes, où $w \leq v$:

1° U_w est saturé par inclusion, $E \in U_w$ et $w \subset U_w$;

2° Si $w' < w$, on a $U_{w'} \in U_w$ et $U_{w'} \subset U_w$;

3° Si E est transitif, U_w est transitif.

Preuve. 1° Supposons qu'il existe une suite transfinie ξ_v vérifiant la condition (1), et soit $w < v$. Alors U_w est saturé par inclusion et l'on a $E \in U_w$, car $E \subset E \cup U_{w'}$ pour tout $w' < w$. Supposons $w' < w$; si $A \in U_{w'}$, c'est une partie de $E \cup U_{w''}$ pour un $w'' < w'$, d'où $A \in U_w$ et $U_{w'} \subset U_w$. De plus $U_{w'} \in U_w$, puisque $U_{w'} \subset E \cup U_{w'}$. D'après (1), $U_0 = \emptyset$, et $0 \subset U_0$. Supposons $w' \in U_{w'}$ pour tout $w' < w$.

a) Si w a un prédécesseur w', de l'inclusion $w' \subset U_{w'} \subset E \cup U_{w'}$, on déduit $w' \in U_w$ et par suite $w = w' \cup \{w'\} \subset U_{w'} \cup U_w \subset U_w$.

b) Si w est un ordinal limite, $w = \bigcup_{w'<w} w'$ et, comme $w' \in U_{w'}$ si $w' < w$, on trouve $w \subset \bigcup_{w'<w} U_{w'} \subset U_w$.

c) Dans les deux cas, $w \subset U_w$. Il s'ensuit (principe d'induction) que l'ensemble des ordinaux w tels que $w \subset U_w$ est v. Ainsi les conditions 1 et 2 sont remplies.

3° Supposons qu'il existe des suites transfinies $\xi_v = (U_w)_{w \leq v}$ et $\xi' = (U'_w)_{w \leq v}$ vérifiant (1). On a $U_0 = 0 = U'_0$. Soit $w \leq v$ et supposons prouvé $U_{w'} = U'_{w'}$ pour tout $w' < w$. Si $A \in U_w$, il existe un $w' < w$ tel que A soit une partie de $E \cup U_{w'} = E \cup U'_{w'}$, de sorte que $A \in U'_w$. Donc $U_w \subset U'_w$. Une preuve analogue montre que $U'_w \subset U_w$. Au total $U'_w = U_w$ et, d'après le principe d'induction, $U_w = U'_w$ pour tout ordinal $w \leq v$. Par conséquent $\xi' = \xi_v$.

3° Montrons l'existence d'une suite transfinie ξ_v. Pour cela, posons $U_0 = 0$ et considérons l'ensemble V des ordinaux $\hat{w} \leq v$ tels qu'il existe une suite transfinie $(U_{w'})_{w' \leq \hat{w}}$ vérifiant (1). Il résulte de la partie I que $U_{w''} \subset U_{w'}$ si $w'' \leq w'$. Soit w un ordinal tel que $w \subset V$.

a) Si w admet un prédécesseur w', posons

$$U_w = P(E \cup U_{w'}),$$

c'est-à-dire $A \in U_w$ ssi $A \subset E \cup U_{w'}$. Si B est un ensemble tel que $B \subset E \cup U_{w''}$ pour un $w'' \leq w'$, on a aussi

$$B \subset E \cup U_{w'}, \quad \text{d'où } B \in U_w.$$

b) Si w est un ordinal limite, posons

$$U_w = \bigcup_{w' \in w} U_{w'},$$

de sorte que $A \in U_w$ ssi il existe $w'' < w' < w$ pour lequel A soit une partie de $E \cup U_{w''}$.

c) Dans les deux cas, la suite $(U_{w'})_{w' \leq w}$ vérifie encore la condition (1), i.e. $w \in V$. D'après le principe d'induction, il en résulte $v \in V$. Ceci prouve qu'il existe ξ_v et ξ_v est construite par induction en posant:

$U_0 = 0$, $U_1 = P(E)$, $U_{w+1} = P(E \cup U_w)$ pour tout $w < v$, $U_w = \bigcup_{w' \in w} U_{w'}$ pour tout ordinal limite $w \leq v$.

4° Avec les notations précédentes, supposons E transitif. Comme E est une partie de $P(E) = U_1$, c'est une partie de tout U_w et par conséquent $U_{w+1} = P(E \cup U_w) = P(U$ ce qui simplifie la définition de ξ_v. Supposons $w \leq v$ et $U_{w'}$ transitif pour tout $w' < w$.

a) Si w admet un predécesseur w', l'ensemble $U_w = P(U_{w'})$ est transitif, $U_{w'}$ l'étant (proposition I-9

b) Si w est un ordinal limite, la réunion U_w de la famille $(U_{w'})_{w' < w}$ d'ensembles transitifs est transitive (proposition I-9).

c) Dans les deux cas, U_w est transitif. D'après le principe d'induction, il en résulte que U_w est transitif pour tout $w \leq v$.

Si v et v' sont deux ordinaux, d'après la proposition I il existe des suites transfinies $(U_w)_{w \leq v}$ et $(U'_w)_{w \leq v'}$ vérifiant la condition (1). Supposons $v' \leq v'$. Comme la suite transfinie $(U'_w)_{w \leq v}$ vérifie aussi la condition (1), la proposition I affirme que

$$U'_w = U_w \quad \text{pour tout } w \leq v$$

Ainsi nous avons associé à E et à chaque ordinal v un et un seul ensemble U_v; nous le noterons parfois U_v^E pour spécifier qu'il est construit en partant de E.

Définition. On dit qu'un ensemble A est E-*fondé* s'il existe un ordinal v tel que $A \in U_v^E$; on appelle alors E-*rang de* A, noté $r_E(A)$, le plus petit ordinal w tel que $A \in U_w^E$. Un ensemble 0-fondé est dit *ensemble classique*.

Les ensembles E-fondés de E-rang 1 sont les parties de E. Soit v un ordinal; puisque U_v^E est saturé par inclusion, toute partie d'un ensemble E-fondé est E-fondée. U_v^E est l'ensemble des ensembles E-fondés de E-rang plus petit que v. Comme $v \subset U_v^E$ (proposition 1), v appartient à U_{v+1}^E, de sorte que v est un ensemble E-fondé de E-rang plus petit que $v+1$.

Remarque. Supposons que E ne soit pas transitif. Un élément de E n'est pas nécessairement E-fondé; de plus le E-rang de l'ordinal v peut être strictement plus petit que $v+1$; par exemple si E admet 3 pour élément, le E-rang de 4 est plus petit que 4.

PROPOSITION 2. Un ensemble A est E-fondé ssi tout élément de A est E-fondé ou appartient à E; dans ce cas, le E-rang v de A admet un prédécesseur v' et le E-rang d'un élément de A n'appartenant pas à E est plus petit que v'.

Preuve. 1° Si A est E-fondé, $A \subset E \cup U_w$ pour un certain ordinal w et tout élément de A appartient à E ou est E-fondé. Si tout élément de A appartient à E ou est E-fondé, on a $A \subset E \cup U_v$, où v est l'ordinal borne supérieure de $\{r_E(x) \mid x \in A, x \notin E\}$, d'où $A \in U_{v+1}$ et A est E-fondé.

2° Supposons que A soit E-fondé, de E-rang v.. Comme U_0 est vide, on a $v \neq 0$. Si v était un ordinal limite, d'après la proposition 1 il existerait par définition un $w < v$ tel que $A \in U_w$, ce qui est impossible. Autrement dit, v admet un prédécesseur v', et $A \subset E \cup U_{v'}$; il s'ensuit $x \in U_{v'}$ et

$$r_1(x) < r_1(A) = v \quad \text{si} \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \notin E.$$

COROLLAIRE 1. Si A est un ensemble E-fondé, P(A) est E-fondé et $r_E(P(A)) \leq r_E(A)+1$. Si B est la réunion d'une famille $(A_i)_{i \in J}$ d'ensembles E-fondés et si δ est l'ordinal borne supérieure de $(v_i)_{i \in J}$, où v_i est le E-rang de A_i, alors B est E-fondé et $r_E(B) \leq \delta+1$.

Preuve. 1° Soit v le E-rang de l'ensemble E-fondé A; l'ensemble saturé par inclusion U_v contenant P(A), on trouve $P(A) \in U_{v+1}$, d'où $r_E(P(A)) \leq v+1$.

2° D'après la proposition 2, v_i admet un prédécesseur v_i' et l'on a

$$A_i \subset E \cup U_{v_i'} \subset E \cup U_{v_i} \subset E \cup U_\delta .$$

Il en résulte $B \subset E \cup U_\delta$, d'où $B \in U_{\delta+1}$ et $r_E(B) \leq \delta+1$.

COROLLAIRE 2. Si E est transitif, la collection $\mathcal{D}_E$ ayant pour objets les ensembles E-fondés est une totalité.

Preuve. Tout élément de E étant une partie de E, c'est un ensemble E-fondé de E-rang 1. Par suite, si A est E-fondé, il résulte de la proposition 2 que tout élément x de A est E-fondé et $r_E(x) < r_E(A)$. D'après le corollaire 1, l'ensemble des parties d'un ensemble E-fondé et la réunion d'une famille d'ensembles E-fondés sont E-fondés. Ceci prouve que $\mathcal{D}_E$ est une totalité.

COROLLAIRE 3. Soit $\mathcal{D}'$ une totalité ayant pour objet E. Si l'ordinal u est une sous-collection de $\mathcal{D}'$, alors U_u en est aussi une. Si tout ordinal est un objet de $\mathcal{D}'$, la collection $\mathcal{D}_E$ ayant pour objets les ensembles E-fondés est une sous-collection de $\mathcal{D}'$.

Preuve. Soient u un ordinal et $\mathcal{D}'$ une collection

qui admet E pour objet, u pour sous-collection et qui vérifie les axiomes (A2), (A3), (A4),(A5) (mais non nécessairement (A1)) du §1, ainsi que l'axiome

(A'1) Si A est un objet de $\mathcal{D}'$, c'est une collection et toute sous-collection de A est un objet de $\mathcal{D}'$.

En particulier, ces axiomes sont remplis si $\mathcal{D}'$ est une totalité. Soit V l'ensemble des ordinaux $v \leq u$ tels que U_v soit à la fois une sous-collection et un objet de $\mathcal{D}'$. On a $0 \in V$, car $U_0 = 0$ est une sous-collection et (axiome (A2)) un objet de $\mathcal{D}'$. Soit v un ordinal tel que $v \leq u$ et $v \subset V$.

a) Supposons que v ait un prédécesseur w. Comme 0 est un objet de $\mathcal{D}'$, l'axiome (A3) entraîne que $1 = \{0\}$ est un objet de $\mathcal{D}'$, de même que $2 = P(1)$ (axiome (A4)). En utilisant l'axiome (A5), on en déduit que $E \cup U_w$, qui est la réunion du couple (E, U_w) d'objets de $\mathcal{D}'$, est un objet de $\mathcal{D}'$. A fortiori $U_v = P(E \cup U_w)$ est un objet et une sous-collection de $\mathcal{D}'$.

b) Si v est un ordinal limite, $U_v = \bigcup_{w \in v} U_w$ est une sous-collection de $\mathcal{D}'$; si de plus $v < u$, alors v est un objet de $\mathcal{D}'$ ainsi que U_w pour tout $w \in v$, de sorte que U_v est un objet de $\mathcal{D}'$ (axiome (A5)).

c) Dans les deux cas, U_v est une sous-collection de $\mathcal{D}'$ et, si $v < u$, alors $v \in V$. D'après le principe d'induction, on trouve $V = u$, et U_u est une sous-collection de $\mathcal{D}'$ (partie b). En particulier si $\mathcal{D}'$ est une totalité ayant pour objets tous les ordinaux, chaque U_v est une sous-collection de $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire $\mathcal{D}_E$ est une sous-collection de $\mathcal{D}'$.

Remarques. 1° Si E n'est pas transitif, $\mathcal{D}_E$ n'est pas nécessairement une totalité, un élément de E pouvant ne pas être E-fondé.

2° Supposons E transitif; relativement à la totalité $\mathcal{D}_E$, on peut construire les $\mathcal{D}_E$-ensembles E-fondés; comme l'ensemble des parties d'un ensemble et la réunion d'une famille sont indépendants de la totalité à laquelle appartiennent les ensembles considérés, on voit par induction que les ensembles U_v^E obtenus à partir de $\mathcal{D}_E$ et de $\mathcal{D}$ sont identiques; par suite tous les objets de $\mathcal{D}_E$ sont des $\mathcal{D}_E$-ensembles E-fondés. Ceci signifie que $\mathcal{D}_E$ vérifie l'axiome de fondation, au sens suivant:

Définition. On dit que la totalité $\mathcal{D}$ vérifie *l'axiome de E-fondation* si

(A 10)$_E$ Tout $\mathcal{D}$-ensemble est E-fondé.

L'axiome de 0-fondation est appelé *axiome de fondation.*

PROPOSITION 3. Soit F un ensemble. Si E est F-fondé (par exemple si E est une partie de F) et si A est E-fondé, A est F-fondé.

Preuve. Supposons que A ne soit pas F-fondé et soit v son E-rang. Si M est l'ensemble des éléments de U_v^E qui ne sont pas F-fondés, notons B un élément de M dont le E-rang w soit le premier élément de $\{r_E(C) \mid C \in M\}$. Soit $x \in B$. Comme B est E-fondé, x appartient à E ou est E-fondé (proposition 2). Si $x \in E$, il appartient à F ou est F-fondé, E étant F-fondé. Si x est E-fondé, $r_E(x) < w$ d'après la proposition 2, de sorte que x n'appartient pas à M, c'est-à-dire x est F-fondé. Ainsi les éléments de B appartiennent à F ou sont F-fondés, ce qui

entraîne que B est F-fondé. Ceci est contraire à la relation $B \in M$. Donc A est F-fondé.

COROLLAIRE. Tout ensemble classique est E-fondé. Si E est classique, tout ensemble E-fondé est classique. Si D vérifie l'axiome de fondation, il vérifie l'axiome de E-fondation.

PROPOSITION 4. Soit A un ensemble non vide. Si A est E-fondé, il existe $x \in A$ *tel que* $x \cap A$ *soit contenu dans E. Si A est transitif et si pour toute partie B non vide de A il existe un élément b de B tel que* $b \cap B$ *soit une partie de E, alors A est E-fondé.*

Preuve. 1° Supposons que A soit E-fondé. L'ensemble des E-rangs $r_E(y)$ des éléments y de A admet un premier élément v dans le type ordinal de $r_E(A)$. Soit x un élément de A de E-rang v. Si $x' \in x \cap A$, on a, d'après la proposition 2, $x' \in E$ ou bien $r_E(x') < v$; cette dernière relation étant contraire à la définition de x, il s'ensuit que $x \cap A$ est contenu dans E.

2° Supposons A transitif et la condition de l'énoncé vérifiée. Si A n'est pas E-fondé, l'ensemble B formé des éléments x de A tels que x ne soit pas E-fondé et n'appartienne pas à E n'est pas vide (proposition 2). Par hypothèse il existe alors un élément b de B tel que $b \cap B$ soit contenu dans E. Soit $x \in b$. Comme A est transitif, b appartient à A, d'où $x \in A$; il en résulte que $x \in E$ ou que x est E-fondé. Donc b est E-fondé, ce qui est contraire à la relation $b \in B$. Ainsi A est E-fondé.

COROLLAIRE. Un ensemble transitif A est E-fondé ssi, pour toute partie non vide B de A, il existe un élément b de B tel que $b \cap B$ *soit contenu dans E.*

En effet, toute partie de A est E-fondée.

Hypothèse. Dans la fin de ce §, nous supposons que D vérifie l'axiome de l'infini.

Définition. On appelle *ε-chaîne* une suite ou suite finie $\zeta = (x_n)_{n<v}$ telle que $x_{n+1} \in x_n$ si $n+1 < v$. Si A est un ensemble, on dit que ζ est *issue de* A si $x_0 \in A$, que ζ *rencontre* A s'il existe un entier $n < v$ tel que $x_n \in A$.

Soit $\zeta = (x_n)_{n<v}$ une ε-chaîne; elle est *finie* si v est un entier, *infinie* si $v = N$. On dit qu'une ε-chaîne $\zeta' = (y_n)_{n<v'}$ *prolonge* ζ si ζ est contenu dans ζ', c'est-à-dire si $v \leq v'$ et si $x_n = y_n$ pour tout $n < v$. Il existe une ε-chaîne $\zeta' \neq \zeta$ prolongeant ζ ssi v est un entier et si $x_{v-1} \neq 0$.

Définition. Si A est un ensemble, on appelle *clôture transitive de* A un ensemble transitif A' contenant A et contenu dans tout ensemble transitif contenant A.

PROPOSITION 5. Soit A un ensemble. Il admet une clôture transitive A' et l'on a $x \in A'$ *ssi il existe une ε-chaîne finie* $(x_n)_{n<v+1}$ *issue de A telle que* $x_v = x$. *Si E est transitif, A est E-fondé ssi A' est E-fondé.*

Preuve. On définit par récurrence une suite $(A_n)_{n \in N}$ en posant :

$A_0 = A$ et $A_{n+1} = \bigcup A_n$ pour tout $n \in N$. Soit A' la réunion de cette suite.

1° A_n est une partie de A' pour tout n. Si x' est un élément de A', il existe un entier n tel que $x' \in A_n$; comme tout élément de x' appartient à $A_{n+1} \subset A'$ on voit que A' est transitif. Soit $(x_n)_{n<v}$ une ε-chaîne issue de A; on montre par récurrence que $x_n \in A'$ pour tout $n < v$, car les relations

$$x_n \in A_n \quad \text{et} \quad n+1 < v$$

entraînent $x_{n+1} \in x_n \subset A_{n+1}$. Par ailleurs, $(x_0)_{0<1}$ est une ε-chaîne, pour tout élément x_0 de $A = A_0$; supposons que, pour tout $x \in A_n$, il existe une ε-chaîne $(x_i)_{i\leq n}$ vérifiant $x_0 \in A$ et $x_n = x$; si $y \in A_{n+1}$, il existe un $x \in A_n$ tel que $y \in x$, et par suite il existe une ε-chaîne

$$(x_i)_{i\leq n+1}, \text{ où } x_0 \in A, \ x_n = x \text{ et } x_{n+1} = y.$$

Par récurrence ceci prouve que les éléments de A' sont les éléments appartenant au but d'une ε-chaîne finie issue de A.

2° Soit T un ensemble transitif contenant $A = A_0$. Si T contient A_n et si $y \in A_{n+1}$, il existe un élément x de $A_n \subset T$ tel que $y \in x$; il s'ensuit $y \in T$, puisque T est transitif; d'où $A_{n+1} \subset T$. Par récurrence, on en déduit que T contient tous les A_n et, a fortiori, A'.

3° Supposons E transitif. Comme A est une partie de A', si A' est E-fondé, A l'est aussi. Inversement supposons que $A = A_0$ soit E-fondé. Si A_n est E-fondé, A_{n+1} l'est aussi; en effet, si $y \in A_{n+1}$, il existe un $x \in A_n$ tel que $y \in x$. Comme A_n est E-fondé, x est E-fondé ou appartient à E. Dans le premier cas, $y \in E$

ou est E-fondé (proposition 2); dans le second, $y \in E$, car E est transitif. On en déduit par récurrence que les éléments de A_n pour tout entier n, et par suite ceux de A', sont E-fondés ou appartiennent à E. Ainsi A' est E-fondé.

COROLLAIRE. Les conditions suivantes sont équivalentes:
1° D vérifie l'axiome de E*-fondation;*
2° Pour tout ensemble $F \neq \emptyset$ *il existe un élément de* F *dont l'intersection avec* F *soit contenue dans* E.

Preuve. D'après la proposition 4, la condition 1 entraîne 2. Inversement supposons la condition 2 vérifiée et soit A un ensemble. Il admet une clôture transitive A' et, pour toute partie $B \neq \emptyset$ de A', il existe un $b \in B$ tel que $b \cap B$ soit contenu dans E. Il s'ensuit (proposition 4) que A' est E-fondé. A fortiori A est E-fondé.

Remarque. D'après le corollaire précédent, D vérifie l'axiome de fondation ssi, pour tout ensemble $F \neq \emptyset$, il existe un $x \in F$ tel que $x \cap F = \emptyset$. C'est généralement sous cette forme qu'est énoncé l'axiome de fondation.

PROPOSITION 6. Soit A *un ensemble* E*-fondé. Toute* ε*-chaîne finie issue de* A *et ne rencontrant pas* E *se prolonge en une* ε*-chaîne finie rencontrant* $E \cup \{0\}$.

Preuve. Soit A' la clôture transitive de A. Considérons l'ensemble A'' des $x \in A'$ tels qu'il existe une ε-chaîne finie $(x_i)_{i<v+1}$ issue de A, ne rencontrant pas E et telle que $x_v = x$. Comme A est E-fondé, x_0 est E-fondé, car $x_0 \notin 1$ (proposition 2). De même si x_1 est E-

fondé et $\iota \leq \nu$, alors $x_{\iota+1}$ l'est aussi; on en déduit par récurrence que $x_\nu = x$ est E-fondé. Par suite tout élément de A" est E-fondé, de sorte que A" est E-fondé. Soit B l'ensemble des $y \in A''$ tels qu'il n'existe pas de ε-chaîne finie issue de $\{y\}$ rencontrant $E \cup \{0\}$; en particulier $B \cap E = \emptyset$.

1° Montrons que B est vide. En effet, supposons qu'il ne le soit pas. La proposition 4 affirme qu'il existe un élément b de B tel que $b \cap B$ soit contenu dans E, c'est-à-dire $b \cap B = \emptyset$. Si $y \in b$, on a $y \notin B$, et il existe une ε-chaîne finie $(y_\iota)_{\iota<\nu'}$ rencontrant $E \cup \{0\}$ et telle que $y_0 = y$. Mais alors $(z_\iota)_{\iota<\nu'+1}$, où

$$z_0 = b \quad \text{et} \quad z_{\iota+1} = y_\iota \ \text{pour tout} \ \iota < \nu',$$

est une ε-chaîne finie rencontrant $E \cup \{0\}$; d'où $b \in B$. Ceci étant impossible, $B = \emptyset$.

2° Soit $\zeta = (x_\iota)_{\iota<\nu+1}$ une ε-chaîne finie issue de A ne rencontrant pas E. Si $x_\nu \neq 0$, on a $x_\nu \in A''$ et, d'après la partie 1, il existe une ε-chaîne finie rencontrant $E \cup \{0\}$ de la forme $(x_\nu, y_1, \ldots, y_{\nu'})$. Il en résulte que $(x_0, \ldots, x_\nu, y_1, \ldots, y_{\nu'})$ est une ε-chaîne finie prolongeant ζ et rencontrant $E \cup \{0\}$.

PROPOSITION 7. Soit A un ensemble. Pour que A soit E-fondé, il faut (resp. il suffit, si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix) que toute ε-chaîne issue de A et ne rencontrant pas E soit finie.

Preuve. 1° Supposons que A soit E-fondé et soit $\zeta = (x_\iota)_{\iota<\nu}$ une ε-chaîne issue de A et ne rencontrant pas E. Soit E le but de ζ; Il existe, d'après la proposition 4,

un $n < \nu$ tel que $x_n \cap B \subset E$. Si $\nu \neq n+1$, on a

$$x_{n+1} \in x_n \cap B \subset E,$$

ce qui est impossible, ζ ne rencontrant pas E. Donc $\nu = n+1$, c'est-à-dire ζ est finie.

2° Montrons que, si la condition est vérifiée et si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix, A est E-fondé. En effet, supposons qu'il ne le soit pas et soit A' la clôture transitive de A. Soit M l'ensemble des éléments de A' qui ne sont pas E-fondés et n'appartiennent pas à E. D'après la proposition 2, $J = M \cap A$ n'est pas vide (sinon A serait E-fondé); de plus tout élément y de M est une partie de A' et $M_y = M \cap y$ n'est pas vide. En vertu de l'axiome du choix, il existe une famille $(z_y)_{y \in M}$ telle que $z_y \in M_y$ pour tout $y \in M$. Si $x \in M \cap A$, on construit par récurrence une ε-chaîne infinie $(x_n)_{n \in N}$ en posant $x_0 = x$ et, pour tout entier n, $x_{n+1} = z_{x_n}$. Ceci étant contraire à l'hypothèse, A est E-fondé.

COROLLAIRE 1. Soit A un ensemble E-fondé tel que A ne soit pas élément de E. On a $A \notin A$. Si B est un ensemble n'appartenant pas à E, alors $A \in B$ entraîne $B \notin A$.

Preuve. 1° Si $A \in A$, il existe une ε-chaîne infinie $(x_n)_{n \in N}$ issue de A ne rencontrant pas E, à savoir $x_n = A$ pour tout entier n. Comme A est E-fondé, ceci est impossible d'après la proposition; d'où $A \notin A$.

2° Supposons $A \in B \notin E$. Si $B \in A$, on construit par récurrence une ε-chaîne infinie $(y_n)_{n \in N}$ ne rencontrant pas E en posant $y_{2n} = B$ et $y_{2n+1} = A$ pour tout entier n. Ceci étant impossible vu la proposition, $B \notin A$.

COROLLAIRE 2. Si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix, les conditions suivantes sont équivalentes:

1° $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome de E-fondation;

2° Toute ε-chaîne ne rencontrant pas E est finie.

En particulier, si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix, il vérifie l'axiome de fondation ssi toute ε-chaîne est finie.

23. Construction d'univers.

Nous reprenons les notations du début du § précédent (mais nous ne supposons pas, pour l'instant, que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome de l'infini). En particulier, si v est un ordinal, U_v^E est l'ensemble des ensembles E-fondés de E-rang plus petit que v (construit dans la proposition I-22).

PROPOSITION 1. Soit u un ordinal. U_u^E est contenu dans tout préunivers U' contenant u et tel que $E \in U'$. Si $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix et si u est un ordinal inaccessible de puissance strictement supérieure à E, alors U_u^E est un préunivers dont u est à la fois le cardinal et l'ordinal correspondant, $E \in U_u^E$ et toute partie de U_u^E de puissance strictement inférieure à U_u^E appartient à U_u^E.

Preuve. La première affirmation résulte du corollaire 3 de la proposition 2-22 (preuve), car un préunivers U' vérifie les axiomes (A2) à (A5) et l'axiome (A'1) introduit dans la démonstration de ce corollaire. Supposons que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome du choix; soient $\hat{u}$ le cardinal de E et u un cardinal inaccessible vérifiant $\hat{u} < u$. Pour tout $v \leq u$, nous notons u_v le cardinal de $U_v = U_v^E$ et

W_v l'ordinal correspondant à l'ensemble saturé par inclusion U_v. En particulier $u_0 = 0 = W_0$.

1° Montrons que $u_u = u = W_u$. En effet, soit V l'ensemble des ordinaux $v' < u$ tels que $W_w \leq u_w < u$ pour tout $w < v'$. Soit $v \leq u$ tel que v soit contenu dans V.

a) Supposons que v ait un prédécesseur w. Le cardinal u' de $E \cup U_w$ est plus petit que le cardinal u'' somme de $(\hat{u}, u_w)$. Il en résulte $u_v = 2^{\bullet u'} \leq 2^{\bullet u''} < u$, car, u étant inaccessible, les relations $\hat{u} < u$ et $u_w < u$ entraînent $u'' < u$, d'où $2^{\bullet u''} < u$. Comme tout élément de U_v est une partie de $E \cup U_w$, son cardinal est plus petit que u'; par suite W_v est plus petit que le cardinal suivant de u' et, a fortiori que $2^{\bullet u'} = u_v$. Ceci prouve que $W_v \leq u_v < u$. Donc $v \in V$ car, u étant limite, $v \neq u$.

b) Si v est un ordinal limite, U_v est la réunion de $(U_w)_{w<v}$; il s'ensuit

$$W_v = \bigcup_{w \in v} W_w \leq \bigcup_{w \in v} u_w \leq u_v .$$

Puisque u_v est plus petit que le cardinal $\hat{u}'$ somme de $(u_w)_{w<v}$, c'est-à-dire (proposition 8-19) que le plus grand des deux cardinaux $\bigcup_{w \in v} u_w$ et v, on trouve $u_v \leq u$. Ainsi $W_v \leq u_v \leq u$. Si de plus $v < u$, alors $\hat{u}' < u$ étant donné que u est régulier (proposition 3-21) et que $u_w < u$ pour tout $w < v$; a fortiori $u_v < u$, et $v \in V$.

c) D'après le principe d'induction, $V = u$. Il s'ensuit (début de la partie b) que $W_u \leq u_u \leq u$. Par ailleurs u étant contenu dans U_u (proposition 1), on a $u \leq W_u$. En définitive $u = W_u = u_u$.

2° Montrons que U_u est un préunivers. En effet, u étant un ordinal limite, $A \in U_u$ ssi le E-rang v de A

vérifie $v < u$; dans ce cas $P(A)$ est contenu dans U_u et, son E-rang étant plus petit que $v+1$ (corollaire 1, proposition 2-22), il appartient à U_u. Soient η une famille $(A_i)_{i\in J}$ d'éléments de U_u, où $J \in U_u$, et v_i le E-rang de A_i. Si v est l'ordinal borne supérieure de $(v_i)_{i\in J}$, la réunion B de η appartient à U_{v+1} (corollaire 1, proposition 2-22). Or J ayant un E-rang $w < u$, le cardinal u' de J est plus petit que W_w, lequel vérifie $W_w < u$ (partie 1); u étant inaccessible, on trouve $v < u$ (proposition 4-21); a fortiori $v+1 < u$, d'où $B \in U_u$. Donc U_u est un préunivers.

3° Soit M une partie de U_u de puissance strictement inférieure à U_u ; son cardinal u' appartient à W_u; par suite M est équipotent à un élément de U_u et, en vertu de la proposition 1-15, il appartient à U_u.

COROLLAIRE 1. Supposons que D vérifie l'axiome du choix; un ordinal u non dénombrable est inaccessible ssi il existe un univers dont l'ordinal correspondant est u.

En effet, la condition est suffisante d'après la proposition 8-21. Si u est inaccessible, il est l'ordinal correspondant à l'univers U_u^O, d'après la proposition.

COROLLAIRE 2. Supposons que D vérifie l'axiome du choix et soit $\hat{u}$ le cardinal de E. Il existe un univers engendré par E ssi il existe un ordinal inaccessible strictement plus grand que $\hat{u} \cup N$. Dans ce cas l'univers engendré par E est U_u^E, où u est le plus petit ordinal inaccessible tel que $u > \hat{u} \cup N$; si E est transitif, U_u^E est aussi l'univers transitif engendré par E.

Preuve. S'il existe un univers auquel appartient E, l'ordinal correspondant est inaccessible et strictement plus grand que $\hat{u} \cup N$. Inversement, supposons qu'il existe un ordinal inaccessible strictement plus grand que $\hat{u} \cup N$; notons u le plus petit ordinal inaccessible qui a cette propriété. La proposition affirme que U_u^E est un univers auquel appartient E et qui admet u pour ordinal correspondant et pour cardinal. Soit U' l'univers engendré par E (il existe, d'après la proposition 6-15); l'ordinal u' correspondant à U' étant inaccessible et strictement plus grand que $\hat{u} \cup N$, on a $u \leq u'$, i.e. u est contenu dans U', car u' est contenu dans U' (proposition 8-21). Mais alors la proposition montre que U' contient U_u^E. Il en résulte $U' = U_u^E$. Si de plus E est transitif, U_u^E l'est aussi (proposition 1-22), de sorte que U' est a fortiori l'univers transitif engendré par E.

COROLLAIRE 3. Supposons que D vérifie l'axiome du choix. S'il existe un univers, le plus petit univers est transitif, il vérifie l'axiome de fondation et son cardinal est l'ordinal inaccessible u d'ordre 1. D vérifie l'axiome des univers ssi, pour tout cardinal $\hat{u}$, il existe un ordinal inaccessible strictement plus grand que $\hat{u}$.

En effet, le plus petit univers est l'univers U_u^O engendré par O; comme O est transitif, U_u^O est transitif, u est son cardinal et l'ordinal correspondant (corollaire 2). La deuxième affirmation résulte du corollaire 1.

Remarque. Si E est fini, la proposition 1 montre que U_N^E est le miniunivers engendré par E, déjà construit au §15

en utilisant un raisonnement par simple récurrence. En particulier U_N^0 est le miniunivers classique (§ 15).

Hypothèse. Dans la fin de ce §, nous supposons que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome de l'infini et l'axiome du choix (i.e. est un bon modèle de la Théorie des ensembles). Nous désignons par E' la clôture transitive de E, par $\hat{u}$ son cardinal.

PROPOSITION 2. Il existe un univers transitif auquel appartient E ssi la clôture transitive E' de E appartient à un univers; dans ce cas l'univers transitif engendré par E est identique à l'univers engendré par E'.

Preuve. 1° Supposons qu'il existe un univers transitif U auquel appartient E. Par construction E' est la réunion de $\xi = (E_n)_{n\in N}$, où

$$E_0 = E \quad \text{et} \quad E_{n+1} = \bigcup E_n \text{ pour tout } n \in N.$$

Or $E_0 \in U$. Comme U est transitif, si $E_n \in U$, c'est une partie de U équipotente à un élément de U, de sorte que sa réunion E_{n+1} appartient à l'univers U (proposition I-15). Par récurrence, on en déduit que ξ est une famille d'éléments de U; sa réunion E' appartient à U, car N appartient à U, d'après la proposition 5-15.

2° Supposons qu'il existe un univers U' auquel appartient E'; l'ordinal W correspondant à U' est un ordinal inaccessible contenu dans U' (proposition 8-21). Puisque N et E' appartiennent à U', leurs cardinaux N et $\hat{u}$ respectivement appartiennent à W. Par suite il existe un premier ordinal inaccessible u tel que $\hat{u} \cup N < u \leq W$. Considérons l'ensemble $U_u^{E'}$ formé des ensembles E'-fondés de E'-rang plus petit que u. D'après la proposition 1, $U_u^{E'}$

est l'univers, et l'univers transitif, engendrés par E'. A fortiori, c'est un univers transitif auquel appartient E. De plus il existe (proposition 6-15) un univers transitif U engendré par E ; il est contenu dans $U_u^{E'}$ et (partie 1) E' y appartient; il s'ensuit $U_u^{E'} \subset U$. D'où $U = U_u^{E'}$.

COROLLAIRE 1. Il existe un univers transitif U engendré par E ssi il existe un ordinal inaccessible différent de N respectivement plus grand que le cardinal $\hat{u}$ de E'; dans ce cas et si u est le premier ordinal inaccessible tel que $\hat{u} \cup N < u$, on a $U = U_u^{E'}$ et u est l'ordinal correspondant à U et le cardinal de U.

En effet, ceci résulte du corollaire 2 de la proposition 1, U étant l'univers engendré par E'.

COROLLAIRE 2. $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome des univers ssi $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome des univers transitifs.

En effet, la condition est évidemment suffisante. Si elle est vérifiée et si A est un ensemble, sa clôture transitive A' appartient à un univers et, d'après la proposition, A engendre un univers transitif.

Remarque. Si E appartient à un univers sans que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome des univers, il peut ne pas exister d'univers transitif auquel appartienne E.

Hypothèse. $\mathcal{D}_{E'}$ désigne la collection ayant pour objets les ensembles E'-fondés (E' étant encore la clôture transitive de E). Si $\mathcal{D}'$ est une totalité, ses objets sont appelés $\mathcal{D}'$-ensembles et les ordinaux définis à partir de $\mathcal{D}'$ sont dits $\mathcal{D}'$-ordinaux (bien que, si $\mathcal{D}'$ est un ensemble, cette termi-

nologie ne soit pas conforme à celle du § 18, où $\mathcal{D}'$-ordinal aurait désigné une classe d'équivalence d'ensembles bien ordonnés). Ensemble et ordinal signifient toujours $\mathcal{D}$-ensemble et $\mathcal{D}$-ordinal.

PROPOSITION 3. Soit $\mathcal{D}'$ une totalité. S'il existe un ordinal qui n'est pas objet de $\mathcal{D}'$, la collection ayant pour objets les $\mathcal{D}'$-ordinaux est un ordinal inaccessible. Si $\mathcal{D}'$ vérifie l'axiome de l'infini et si E est un $\mathcal{D}'$-ensemble, E' est aussi un $\mathcal{D}'$-ensemble.

Preuve. Si v est un ordinal et un $\mathcal{D}'$-ensemble, c'est un $\mathcal{D}'$-ordinal, car la définition d'un ordinal ne fait intervenir que des notions indépendantes de la totalité. De même un $\mathcal{D}'$-ordinal qui est un ensemble est un ordinal.

1° Supposons qu'il existe un ordinal qui ne soit pas un $\mathcal{D}'$-ensemble; il existe alors un premier ordinal u qui n'est pas un $\mathcal{D}'$-ensemble. Si u admet un prédécesseur v, v étant un $\mathcal{D}'$-ensemble, {v} est un $\mathcal{D}'$-ensemble, ainsi que la réunion u du couple (v,{v}). Ceci étant impossible par définition de u, il s'ensuit que u est un ordinal limite et, a fortiori, u est la réunion de u. Montrons que u est la collection des $\mathcal{D}'$-ordinaux. En effet, tout élément de u est un $\mathcal{D}'$-ordinal. Supposons qu'il existe un $\mathcal{D}'$-ordinal qui n'appartient pas à u; il en existe alors un plus petit u'. On voit comme plus haut que u' est un $\mathcal{D}'$-ordinal limite, de sorte que u' est identique à la collection des $\mathcal{D}'$-ordinaux v' tels que $v' < u$, c'est-à-dire à u. Il s'ensuit $u = u'$, ce qui est impossible, u n'étant pas un $\mathcal{D}'$-ensemble. Par suite u est la collection des $\mathcal{D}'$-

ordinaux. Montrons que u est un ordinal inaccessible.

a) u est un ordinal limite. Soit v l'ordinal borne supérieure d'une suite transfinie $\xi = (v_i)_{i<w}$ d'éléments de u telle que $w < u$. Comme v est la réunion de ξ et que les v_i et w sont des $\mathcal{D}'$-ensembles, ξ admet v pour réunion dans la totalité $\mathcal{D}'$. Il s'ensuit que v est un $\mathcal{D}'$-ordinal, d'où $v < u$. D'après la proposition 4-21, ceci prouve que u est un ordinal régulier.

b) Soit v' un élément de u; notons u' le cardinal de P(v') (qui existe, $\mathcal{D}$ vérifiant l'axiome du choix) et $(P(v'),\alpha)$ un ensemble bien ordonné isomorphe au type ordinal de u'. Puisque v' est un $\mathcal{D}'$-ensemble, P(v') en est aussi un (axiome (A4)), et il existe un $\mathcal{D}'$-ordinal $\hat{u}'$ isomorphe au $\mathcal{D}'$-ensemble bien ordonné $(P(v'),\alpha)$. Comme $\hat{u}'$ est un élément de u, c'est l'unique ordinal isomorphe à $(P(v'),\alpha)$, c'est-à-dire $u' = \hat{u}' < u$. Par conséquent u est un ordinal inaccessible.

2° Supposons que $\mathcal{D}'$ vérifie l'axiome de l'infini.

a) Si tout ordinal est un $\mathcal{D}'$-ensemble, N en particulier est un $\mathcal{D}'$-ordinal. Dans le cas contraire, la collection des $\mathcal{D}'$-ordinaux est un ordinal inaccessible u, d'après la partie 1. Puisqu'il existe un $\mathcal{D}'$-ordinal infini, N appartient à u. Ainsi N est dans les deux cas un $\mathcal{D}'$-ensemble.

b) E' est la réunion de $(E_n)_{n\in N}$, où

$$E_0 = E \quad \text{et} \quad E_{n+1} = \bigcup E_n \quad \text{pour tout entier } n.$$

Supposons que $E = E_0$ soit un $\mathcal{D}'$-ensemble. Par récurrence on voit que $(E_n)_{n\in N}$ est une famille de $\mathcal{D}'$-ensembles, car, si E_n est un $\mathcal{D}'$-ensemble, sa réunion E_{n+1} en est aussi

un (axiome (A5)). Comme elle est indexée par le $\mathcal{D}'$-ensemble N, sa réunion E' est un $\mathcal{D}'$-ensemble.

COROLLAIRE 1. Soit $\mathcal{D}'$ un modèle de la théorie des ensembles ayant E pour objet. $\mathcal{D}_{E'}$ est une sous-collection de $\mathcal{D}'$, ou bien il existe un ordinal inaccessible strictement plus grand que $\hat{0} \cup N$.

Preuve. D'après la proposition, E' est un $\mathcal{D}'$-ensemble. Si tout ordinal est un $\mathcal{D}'$-ensemble, le corollaire 3 de la proposition 2-22 dit que $\mathcal{D}_{E'}$ est une sous-collection de $\mathcal{D}'$. Dans le cas contraire, la collection ayant pour objets les $\mathcal{D}'$-ordinaux est un ordinal inaccessible u en vertu de la proposition, et la preuve précédente montre que N appartient à u. Si $(E', <)$ est un ensemble bien ordonné isomorphe au type ordinal de $\hat{0}$, il admet un $\mathcal{D}'$-ordinal v. v étant un élément de u, on obtient $\hat{0} = v < u$, et par suite $\hat{0} \cup N < u$.

COROLLAIRE 2. Désignons par $\hat{D}$: l'univers transitif engendré par E s'il existe, la collection $\mathcal{D}_{E'}$ s'il n'existe pas d'ordinal inaccessible strictement plus grand que $\hat{0} \cup N$. Alors $\hat{D}$ est le plus petit modèle de la théorie des ensembles dont E soit un objet (i.e. $\hat{D}$ est une sous-collection de $\mathcal{D}'$, si $\mathcal{D}'$ est un modèle de la théorie des ensembles dont E est un objet).

Preuve. $\hat{D}$ est un modèle de la théorie des ensembles dont E est un objet, car $\mathcal{D}_{E'}$ en est un (corollaire 2, proposition 2-22), de même que l'univers transitif engendré par E s'il existe (corollaire 2, proposition 1-15). Soit $\mathcal{D}'$ un modèle de la théorie des ensembles dont E est un

objet. Si tout ordinal est un $\mathcal{D}'$-ensemble, alors $\mathcal{D}_{E'}$, et, a fortiori $\hat{D}$, est une sous-collection de $\mathcal{D}'$ (corollaire 1). Dans le cas contraire, la collection des $\mathcal{D}'$-ordinaux est un ordinal inaccessible u' tel que $\hat{0} \cup N < u'$. Par suite il existe un premier ordinal inaccessible u tel que $\hat{0} \cup N < u$, et E engendre un univers transitif $\hat{D}$; vu le corollaire 1 de la proposition 2, $\hat{D} = U_u^{E'}$ et l'ordinal correspondant est u. Comme u est une sous-collection de u', donc de $\mathcal{D}'$, le corollaire 2 de la proposition 2-22 entraîne que $\hat{D}$ est une sous-collection de $\mathcal{D}'$.

Définition. On appelle *ordinal hyperinaccessible* un ordinal inaccessible $u \neq 0$ tel que u soit la borne supérieure de l'ensemble des ordinaux inaccessibles strictements plus petits que u. Un univers (resp. univers transitif) dont l'ordinal correspondant est hyperinaccessible est appelé *hyperunivers* (resp. hyperunivers *transitif*).

PROPOSITION 4. Soit W un ordinal hyperinaccessible; son ordre est W. Si $0 < W$, il existe un hyperunivers transitif dont l'ordinal correspondant est W et auquel appartient E. Tout hyperunivers transitif est un modèle achevé de la théorie des ensembles.

Preuve. 1° Soit v l'ordre de W; on a $v \leq W$. Pour tout $\iota \in v$, notons W_ι l'ordinal inaccessible d'ordre ι (Il existe, par définition de l'ordre); étant donné que W est inaccessible et que $W_\iota < W$, si $v < W$ l'ordinal u borne supérieure de $(W_\iota)_{\iota < v}$ appartient à W. Ceci est impossible, car $u = W$. Par suite $v = W$. On en déduit que $N < W$, l'ordre de l'ordinal inaccessible N étant 0.

2° Supposons $\hat{u} < W$; d'après ce qui précède, on a $\hat{u} \cup N < W$. Soit U l'ensemble $U_W^{E'}$ des ensembles E'-fondés de E'-rang plus petit que W ; la proposition I dit que U est un univers transitif auquel appartient E' (et a fortiori E) et que W est l'ordinal correspondant. Donc U est un hyperunivers transitif.

3° Soit U un hyperunivers transitif d'ordinal correspondant W. C'est un modèle de la Théorie des ensembles et, D vérifiant l'axiome du choix, U le vérifie également. Supposons $A \in U$. Le cardinal u' de A appartient à W et, W étant hyperinaccessible, il existe un ordinal inaccessible W' tel que $u' < W' < W$. Soient $U_{W'}^A$ et U_W^A les ensembles des ensembles de A-rang plus petit que W' et W respectivement. Ce sont des univers d'ordinaux correspondants W' et W, auxquels appartient A. Comme U contient W, il contient U_W^A (proposition 1). De plus $U_{W'}^A$ appartient à U_W^A d'après la proposition I-22. Il s'ensuit que $U_{W'}^A$ est un univers qui est un U-ensemble, i.e. c'est un univers relativement au modèle U de la théorie des ensembles. Ainsi U vérifie l'axiome des univers.

COROLLAIRE 1. Un ordinal est hyperinaccessible ssi c'est l'ordinal correspondant à un hyperunivers (resp. à un hyperunivers transitif).

COROLLAIRE 2. Supposons qu'il existe des ordinaux hyperinaccessibles strictement plus grands que $\hat{u}$ et soit W le premier d'entre eux. Il existe un hyperunivers transitif auquel appartient E et qui est contenu dans tout hyperunivers auquel appartient E, à savoir $U_W^{E'}$.

Preuve. U est un hyperunivers transitif, dont W est l'ordinal correspondant. Soit U' un hyperunivers transitif auquel appartient E ; l'ordinal W' correspondant à U' est hyperinaccessible et $\hat{u}$ appartient à W', car, U' étant transitif, E' y appartient. Il s'ensuit $W \leq W'$, de sorte que, W étant contenu dans W', il est contenu dans U'. Donc (proposition I) U' contient U.

Définition. L'hyperunivers U du corollaire précédent est appelé *hyperunivers transitif engendré par* E.

PROPOSITION 5. Soit D' un modèle achevé de la Théorie des ensembles ayant E *pour objet et tel qu'il existe un ordinal qui n'est pas un D'-ensemble. Alors la collection des D'-ordinaux est un ordinal hyperinaccessible,* $u > \hat{u}$.

Preuve. Nous savons (proposition 3) que u est un ordinal inaccessible. Soit v l'ordinal borne supérieure de l'ensemble des ordinaux inaccessibles appartenant à u. On a $v \leq u$ et il nous faut montrer que $v = u$. Or supposons $v < u$, c'est-à-dire v est un D'-ordinal. Comme D' vérifie l'axiome des univers, il vérifie l'axiome des univers transitifs (corollaire 2, proposition 2), de sorte qu'il existe un D'-univers transitif U' dont v est élément. Puisque U' est un modèle de la théorie des ensembles dont v est un objet et qu'il existe des D'-ordinaux (et a fortiori des ordinaux) qui ne sont pas des U'-ensembles, la collection des U'-ordinaux est un ordinal inaccessible W tel que $v < W < u$. Ceci est impossible, par définition de v. Par suite $v = u$.

COROLLAIRE. Supposons que $\mathcal{D}$ vérifie l'axiome des univers et désignons par $\hat{\mathcal{D}}$: l'hyperunivers transitif engendré par E s'il existe, $\mathcal{D}_E$, autrement. Alors $\hat{\mathcal{D}}$ est le plus petit modèle achevé de la théorie des ensembles dont E est objet.

Preuve. Si A est un ensemble E'-fondé, de E'-rang v, il existe un ordinal inaccessible u tel que $v < u$, et A appartient à l'univers $U_u^{E'}$ des ensembles E'-fondés de E'-rang plus petit que u. Comme $U_u^{E'}$ est E'-fondé, c'est aussi un univers relativement au modèle $\mathcal{D}_{E'}$ de la théorie des ensembles. Ainsi $\mathcal{D}_{E'}$ est un modèle achevé. Il en est de même pour l'hyperunivers transitif engendré par E, s'il existe (proposition 4). Soit $\mathcal{D}'$ un modèle achevé de la théorie des ensembles dont E est objet. Une démonstration entièrement analogue à celle du corollaire 2 de la proposition 3 (en utilisant les corollaires de la proposition 4) prouve que $\hat{\mathcal{D}}$ est une sous-collection de $\mathcal{D}'$.

24. *Remarques et compléments.*

1° Si $\mathcal{D}$ est un modèle de la Théorie des ensembles, il existe:

a) une totalité (le miniunivers classique) qui vérifie l'axiome de fondation, l'axiome du choix et non l'axiome de l'infini;

b) un modèle (l'univers engendré par 0 s'il existe, $\mathcal{D}_0$ sinon) qui vérifie l'axiome de fondation, non l'axiome des univers.

Si $\mathcal{D}$ est un modèle achevé, il existe un modèle achevé (la collection ayant pour objets les ensembles classiques) qui vérifie l'axiome de fondation.

Il en résulte que les axiomes de l'infini, de fondation et des univers sont indépendants entre eux, et indépendants des axiomes (A1) à (A5). On peut également construire:

a) un modèle ne vérifiant pas l'axiome du choix;

b) un modèle vérifiant l'axiome de fondation, l'axiome du choix et l'hypothèse du continu;

c) un modèle ne vérifiant pas l'hypothèse du continu ni l'axiome du choix;

d) un modèle ne vérifiant pas l'axiome de fondation et, plus précisément, dont certains ensembles sont des *individus* (i.e. sont tels que $A = \{A\}$).

Pour ces questions, nous renvoyons à la bibliographie, en particulier à [5] , où l'on trouve également une discussion approfondie concernant l'hypothèse du continu généralisé.

2° Considérons un modèle $\mathcal{D}$ de la Théorie des ensembles vérifiant l'axiome de fondation. Tous les ensembles étant classiques, ils sont donc construits à partir de l'ensemble vide à l'aide des opérations de passage aux parties et de réunion (proposition I-22). On peut développer toutes les Mathématiques classiques (Théorie des nombres, Analyse réelle ou complexe,...) dans un tel modèle, puisque les ensembles des entiers, des rationnels, des réels, des complexe appartiennent à tout univers. Un des aspects de la révolution cantorienne a consisté à donner droit de cité en Mathématiques aux ensembles quelconques, abstraction faite de leur construction.

3° Soient $\mathcal{D}$ un bon modèle de la Théorie des ensembles et U un préunivers.

Définition. On appelle U-*atome* un ensemble n'appartenant pas à U mais appartenant à l'un des éléments de U

Il existe des U-atomes ssi U n'est pas transitif. Un univers U ayant un U-atome est une collection vérifiant les axiomes (A2) à (A6) et l'axiome (A'1) de la preuve du corollaire 3 de la proposition 2-22, mais non l'axiome (A1). C'est pourtant des collections de ce genre qui interviennent naturellement lorsqu'on veut axiomatiser une théorie mathématique particulière. Par exemple dans la Géométrie euclidienne, on part des points et des droites, sans parler des "éléments" d'un point. Pour considérer de telles notions primitives, deux méthodes ont été proposées:

a) Certains auteurs ont introduit des "Théories atomistes" d'ensembles, reposant sur la donnée non plus d'une collection d'ensembles, mais de deux collections: une A d'atomes, une V d'ensembles. L'axiome (A1) est alors modifié de sorte que seuls les ensembles aient des éléments (qui peuvent être des ensembles ou des atomes). Pour l'étude d'une telle théorie, voir par exemple [17].

b) Mais, comme l'a montré Quine [16], on peut aussi se placer dans le cadre de la Théorie des ensembles (comme elle est exposée ici, sans axiome de fondation), en considérant un élément primitif comme un individu, c'est-à-dire en admettant qu'un élément primitif est son seul élément (et les éléments primitifs sont ainsi caractérisés).

Bien que les deux méthodes répondent aux mêmes préoccupations, elles ne se ramènent pas l'une à l'autre. Partant d'un modèle (A,V) de la théorie atomiste, on peut bien lui associer un modèle D de la théorie des ensembles

avec individus. Mais cela conduit à de nombreuses identifications entre objets de V ; en particulier pour un atome x, les ensembles {x} et {{x}}, qui sont des objets distincts de V, doivent être identifiés avec x dans D.

Nous allons construire, à partir d'un bon modèle D de la Théorie des ensembles, un modèle atomiste.

PROPOSITION. Soient E *un ensemble non transitif et* u *un ordinal inaccessible strictement plus grand que le cardinal de* E. *Si* U *est le préuniverse* U_u^E *des ensembles* E-*fondés de* E-*rang plus petit que* u, *l'ensemble* A *des* U-*atomes est une partie de* E *et l'on a* $U = U_u^A$.

Preuve. 1° Soit $x \in A$; il existe un $F \in U$ auquel appartienne x. D'après la proposition 2-22, $x \in E$ ou x est E-fondé. Dans ce dernier cas, on a $r_E(x) < r_E(F) < u$, d'où $x \in U$, ce qui est contraire à la définition de A. Donc A est contenu dans E. Il s'ensuit que tout ensemble A-fondé est E-fondé (proposition 3-22). Comme u est l'ordinal correspondant à $U = U_u^E$ et à U_u^A en vertu de la proposition 1-23, on en déduit que U_u^A est contenu dans U, car A appartient à U et U contient u.

2° Soit $M = U \setminus U_u^A$. Supposons M non vide; il existe alors un élément F de M dont le E-rang est le premier élément de $\{r_E(B) \mid B \in M\}$. Si $y \in F$, on a $y \in E$ ou y est E-fondé; par suite y appartient à A ou bien est E-fondé; dans ce dernier cas il est aussi A-fondé, car $r_E(y) < r_E(F)$. Il en résulte que F est A-fondé, ce qui est impossible. Ainsi $U = U_u^A$.

COROLLAIRE. Soient u *un ordinal inaccessible et* A *un*

ensemble d'ordinaux plus grands que u tel que le cardinal de A soit strictement plus petit que u. Si U est le préuni-vers U_u^A , alors A est l'ensemble des U-atomes.

En effet, l'ensemble A' des U-atomes est contenu dans A d'après la proposition. Comme l'ordinal correspondant à U est u (proposition I-23), aucun élément de A ne peut appartenir à U_u^A . Donc A = A' .

En particulier $U_N^{\{N\}}$ admet N (resp. $U_u^{\{u\}}$, où u est un ordinal inaccessible, admet u) pour seul atome.

Reprenons les notations du corollaire précédent. En prenant pour collection des ensembles U , pour collection des atomes A et pour U-élément d'un objet E de U les éléments usuels de E (qui sont donc des éléments de U ou des U-atomes), on obtient un modèle d'une théorie atomiste si u ≠ N , un modèle d'une théorie atomiste sans axiome de l'infini si u = N . (Dans ce modèle, on "oublie" que les atomes sont des collections particulières, i.e. on ne parle plus de leurs éléments.)

4° A la base de la théorie des ensembles (en abrégé théorie ZF), nous avons placé l'idée intuitive de collection (qui intervient essentiellement dans l'axiome (A5)). Nous n'avons utilisé que peu de propriétés des collections (voir p. 1 et 2) et il serait facile de formaliser cette théorie des collections. C'est ce qui est fait dans la théorie des ensembles de Von Neumann-Bernays-Gödel (en abrégé théorie NBG), qui a certains avantages du point de vue logique, car elle est finiment axiomatisable.

Pour ces auteurs, la notion première est celle de

classe (qui correspond à notre notion de collection, mais en y imposant des conditions plus restrictives, telles l'existence de la réunion et du produit de deux classes). Les ensembles sont caractérisés comme étant celles des classes qui sont éléments d'une autre classe. La collection de tous les ensembles est une classe V, et toutes les classes sont des sous-classes de V .

V est alors un modèle de la théorie ZF. Inversement si $\mathcal{D}$ est un modèle de la théorie ZF et s'il existe un univers, il existe un univers transitif U vérifiant l'axiome de fondation (corollaire 3, proposition I-23) et l'on obtient un modèle de la théorie NBG en appelant classe les éléments et les parties de U , ensembles les éléments de U . Les classes propres (i.e. qui ne sont pas des ensembles) sont les parties de U équipotentes à U . Mais la question se pose de savoir si, à tout modèle V de la théorie NBG, on peut associer un modèle $\mathcal{D}$ de ZF dont V soit un univers.

Les deux théories sont équiconsistantes (même sans existence d'un univers pour ZF, voir [5]) et pratiquement équivalentes. En particulier les résultats que nous avons prouvés restent valables dans la théorie NBG, à l'exclusion des propositions des § 22 et 23 dans lesquelles nous utilisons explicitement deux modèles différents; même celles-ci peuvent être reformulées dans le cadre de la théorie NBG .

Si nous avons choisi ici la théorie ZF au lieu de la théorie NBG et si nous avons particulièrement développé l'étude des univers, c'est en vue de la Théorie des Catégories. En effet, on peut certes (comme le font la plupart

des auteurs) baser la Théorie des Catégories sur la Théorie NBG ; mais alors dès qu'on veut construire de nouvelles catégories (par exemple la catégorie des transformations naturelles), il faut se limiter à des petites catégories (i.e. dont la classe des objets est un ensemble) ou introduire des hyperclasses. Il me paraît donc plus naturel, pour éviter d'avoir sans cesse à se préoccuper de questions de Logique étrangères au sujet, de partir d'un modèle achevé de la Théorie ZF . De cette façon on pourra en particulier considérer de "bonnes" catégories concrètes (catégorie des applications, des applications continues, des homomorphismes entre groupes, des foncteurs,...) de plus en plus grandes, à savoir celles qui sont associées à un univers U . Dans la théorie élémentaire des catégories il suffit évidemment que U soit saturé par inclusion et stable par produits finis (les classes M_o introduites par EHRESMANN dans *Catégories et Structures*, Dunod, 1965, sont de cette espèce et les "schools" de MAC LANE, *Lecture Notes* 92, page 146, jouent le même rôle). Mais les théorèmes plus avancés (en particulier les théorèmes "constructifs" démontrés par induction comme le sont les théorèmes de complétion des catégories de EHRESMANN, *Lecture Notes* 92, page 74) utilisent à fond toute les propriétés des univers.

INDEX TERMINOLOGIQUE

INDEX DES NOTATIONS

BIBLIOGRAPHIE

Nous indiquons essentiellement quelques ouvrages généraux sur la Théorie des ensembles. Pour une bibliographie plus complète, voir par exemple [1] *et* [8].

1 . BACHMANN H., *Transfinite Zahlen*, Springer 1967 (2e éd.)

2 . BERNAYS-FRAENKEL, *Axiomatic Set Theory*, North Holland, Amsterdam 1958.

3 . BOURBAKI N., *Théorie des Ensembles*, 3 fasc., Hermann, Paris, 1958.

4 . CANTOR G., *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, 1932.

5 . COHEN P.J., *Set Theory and the continuum Hypothesis*, Benjamin, New York, 1966.

6.. DEDEKIND R., *Was sind und was sollen die Zahlen*, Vieweg Braunschweig, 1888.

7 . DENJOY A., *L'énumération transfinie*, I, II, III, IV, Paris 1946-54.

8 . FRAENKEL- BAR-HILLEL, *Foundations of Set theory*, North Holland, Amsterdam 1958.

9 . GÖDEL K., The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum Hypothesis, *Ann. of Math. Studies*, Princeton 1951.

10. HALMOS P., *Naive set Theory*, Van Nostrand, 1960.

11.. HAUSDORFF F., *Set Theory*, Chelsea Publ. Co. 1957 (trad.

12. KAMKE E., *Mengenlehre*, W. de Gruyter, Berlin 1962.

13. KRIVINE J.L., *Théorie axiomatique des ensembles*, P.U.F., Paris 1969.

14. MORSE A., *A theory of sets*, Acad. Press, 1965.

15. VON NEUMANN J., Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Math. Zeitsch.* 27, 1928.

16. QUINE W.V.O., *Set Theory and its Logic*, Harvard Un. Press, Cambridge 1963.

17. RUBIN J., *Set theory for the mathematician*, Holde-Day Ser. in Math., 1967.

18. RUBIN H. & J., *Equivalents of the Axiom of choice*, Studies in Logic, North. Holl., Amsterdam 1963.

19. STOLL R., *Set theory and Logic*, Freeman, San Francisco, 1963.

20. SIERPINSKI W., *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris, 1928.

21. " *Cardinal and Ordinal numbers*, Varsovie, 1958.

22. TARSKI A., Uber unerreichbare Kardinalzahlen, *Fund. Math.* 30, 1938.

23. WHITEHEAD-RUSSELL, *Principia Mathematica*, Uni. Press, Cambridge, 1910-13.

Concernant l'histoire des origines de la Théorie des ensembles, on pourra consulter la 1ère partie de [2] *et:*

24. BOURBAKI N., *Eléments d'histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris.

25. CAVAILLES J., *Philosophie mathématique*, Hermann, 1962.

TABLE DES MATIERES