Jury proposé :

MM. BOULIGAND
CHOQUET
GERMAIN

RESUME DE LA THESE DE DOCTORAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée par BASTIANI Andrée
Licenciée es-Mathématiques
Docteur 3ème cycle en Mathématiques

Thèse préparée à l'Institut H. Poincaré
sous la direction de M. le Professeur CHOQUET

" DIFFERENTIABILITE DANS LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES - DISTRUCTURES "

La première partie de la thèse est consacrée à la définition et à l'étude de la notion de différentiabilité dans les espaces localement convexes.

Soient E et F deux espaces localement convexes, A un ouvert de E et f une application de A dans F. On dit que f est tangente à 0 en 0 si, pour tout voisinage V de 0 dans F et pour tout $v \in E$, il existe deux voisinages de 0 dans E, U (v) et U' (v), tels que les conditions : $v' \in v + U'(v)$ et $tv' \in U(v)$ entraînent $f(tv') \in tV$. Cette notion se conserve par composition, linéarité, produit. On dit que f est différentiable en $x \in A$ s'il existe une application linéaire continue Df (x) telle que l'application :

$$h \longrightarrow f(x+h) - f(x) - \langle h, Df(x) \rangle$$

soit tangente à 0 en 0.

...

Si E est de dimension finie, on sait que si f admet des dérivées partielles continues en tout point de A, alors f est différentiable sur A. Pour étendre ce théorème au cas infini, on est amené à poser : f est différentiable sur A si, pour tout $v \in E$, l'application : $t \longrightarrow f(x + tv)$, où t est un scalaire, admet une dérivée $D.f(x, v)$ en $t = 0$ et si l'application D.f :

$$(x, v) \longrightarrow D.f(x, v)$$

est continue sur $A \times E$. On a les théorèmes :

Si f est différentiable sur A, alors f est différentiable en tout point de A. De plus f est "uniformément différentiable" sur tout compact de E. La différentiabilité se conserve par composition. Une autre notion d'application différentiable sur A est introduite et les relations entre ces deux notions (qui coïncident si E est un espace de Banach réflexif par exemple) sont étudiées.

De même on étudie la différentiabilité d'ordre n de f en un point de A, puis sur A : f est n fois différentiable en x si f est $n - 1$ fois différentiable en x et s'il existe une application multilinéaire séparément continue $D^n f(x)$ de E^n dans F vérifiant la condition suivante :
Pour tout $v \in E$ et pour tout voisinage de 0 dans F, il existe deux voisinages $U(v)$ et $U'(v)$ de 0 dans E tels que, si $v' \in v + U'(v)$ et $tv' \in U(v)$, on ait :

$$f(x+tv) - f(x) - \langle tv, Df(x) \rangle - \dots - \frac{t^n}{n!} \langle (v, \dots, v), D^n f(x) \rangle \in t^n V.$$

On dit que f est n fois différentiable sur A si la restriction de f à tout sous-espace de dimension n est n fois différentiable, de différentielle $D^n f(x)$ et si l'application :

...

$$(x, v_1, \ldots, v_n) \longrightarrow D^n f(x) \ (v_1, \ldots, v_n)$$

est continue sur $A \times E^n$. Une fonction n fois différentiable sur A est n fois différentiable en tout point de A (formule de Taylor). La différentiabilité d'ordre n est conservée par composition. D'autres notions d'applications n fois différentiables sur A sont définies et comparées avec celle-ci.

Des topologies sont considérées sur l'espace D^n des fonctions n fois différentiable sur A, à valeur dans F, ainsi que sur l'espace D des fonctions indéfiniment différentiables sur A. On obtient par exemple :

Si E est métrisable et F (quasi-) complet, alors D^n_c et D_c sont (quasi-) complets. Si E est métrisable et complet et si F est un espace de Montel, alors D_c est un espace de Montel quasi-complet. Si E est un espace (DF) et si F est un espace de Montel, alors tout borné de D_c est précompact.

Soit V un ensemble. La donnée d'un atlas complet A de E dans V, compatible avec le pseudogroupe des automorphismes locaux de E qui sont n fois différentiables ainsi que leurs inverses, et tel que la topologie correspondante sur V soit séparée, définit sur V une structure de E-variété n fois différentiable. On montre comment la théorie des jets infinitésimaux et des variétés de dimension finie s'étend aux E-variétés. La principale difficulté provient de ce que les espaces fibrés à groupe structural topologique de la théorie classique deviennent ici des espaces fibrés à groupe structural appelé "hypotopologique". Il en résulte que le théorème de transitivité des prolongements d'une variété ne n'étend plus aux E-variétés (sauf dans certains cas, par exemple si

...

E est métrisable). Toutefois, on montre que ce théorème est vérifié pour les prolongements les plus utiles (jets d'ordre r, G^r - vitesses, prolongements tensoriels).

Etant données une E-variété V et une F-variété V', on étudie les applications n fois différentiables d'un ouvert A variable de V, à valeurs dans V' et on définit différentes notions de différentielles si V ou V' est un espace localement convexe. Dans le cas général, l'espace de ces applications est muni de topologies.

Partant de la catégorie des applications linéaires (continues) d'un espace vectoriel (topologique) dans un autre, sur laquelle on définit une structure d'ordre, on introduit la notion de catégorie inductive de classe vectorielle (topologique) qui est à la base de toute l'étude. Une distructure est un élément d'une catégorie inductive de classe vectorielle (topologique) vérifiant de plus une condition de complétion algébrique (et une condition de complétion topologique).

On montre que la plupart des opérations faites sur les catégories inductives s'étendent aux distructures. En particulier, les procédés d'élargissement complet et de passage aux jets locaux permettent de former de nouvelles catégories de distructures. Le principal problème considéré est celui de la construction de la plus petite catégorie de distructures contenant une catégorie vectorielle (topologique) donnée et répondant à certaines conditions supplémentaires. La méthode employée consiste à résoudre ce problème "localement" en utilisant simultanément la structure algébrique et la structure topologique, puis à "recoller" ces solutions locales par un moyen algébrique, de sorte à obtenir une catégorie de

...

distructures. On donne certains cas dans lequels on peut aussi trouver les solutions locales d'une façon purement algébrique.

Cas particuliers : Complétion au sens d'Aronszajn ; différentes notions de distribution ; courants ; diviseurs. Etude de distributions (et courants) généralisant les applications différentiables d'une E-variété dans une F-variété et possédant les principales propriétés des distributions vectorielles de L. Schwartz.

Les distructures permettent de retrouver simplement et de généraliser certains résultats connus, par exemple :

théorème d'échange de la multiplication et de la convolution par transformation de Fourier dans des cas plus généraux, étude des parties finies. Elles ont beaucoup d'applications nouvelles, notamment dans la théorie des équations aux dérivées partielles et la résolution de problèmes de Cauchy de type simple ou mixte. En particulier : résolution effective de problèmes de mécanique ou de physique mathématique comme le problème de Burmister. Ces applications seront développées dans un article ultérieur.
