A propos des Systèmes Evolutifs à Mémoire et du modèle MENS

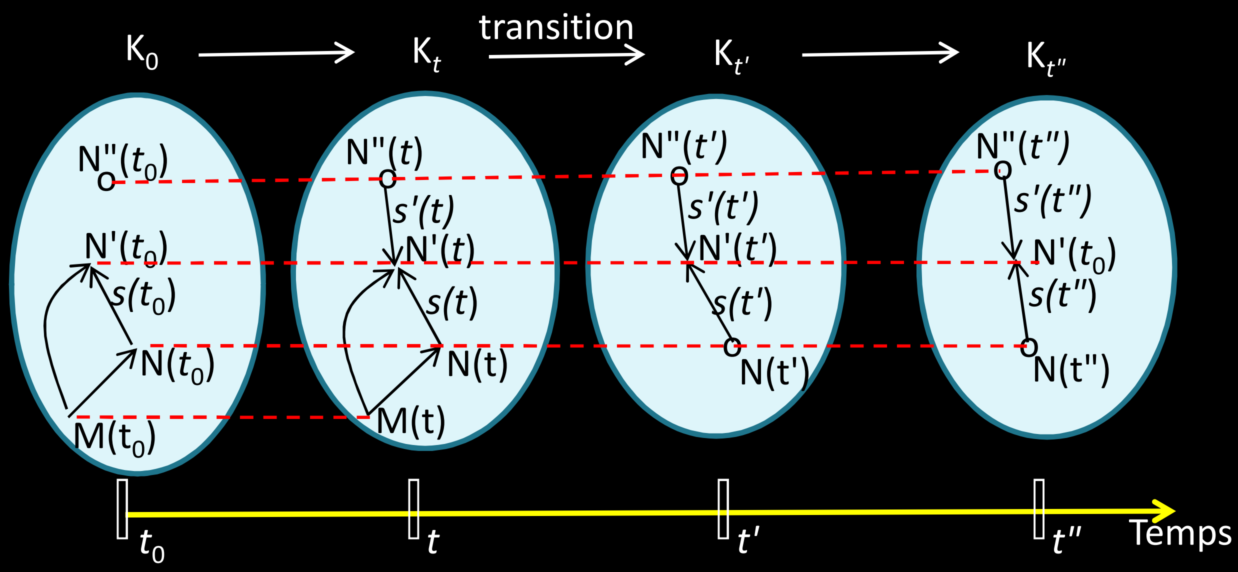
A.C. Ehresmann (et J.-P. Vanbremeersch)

http://pagesperso-orange.fr/ehres

http://pagesperso-orange.fr/vbm-ehr

Paris, SIC, Octobre 2009

SYSTÈME ÉVOLUTIF



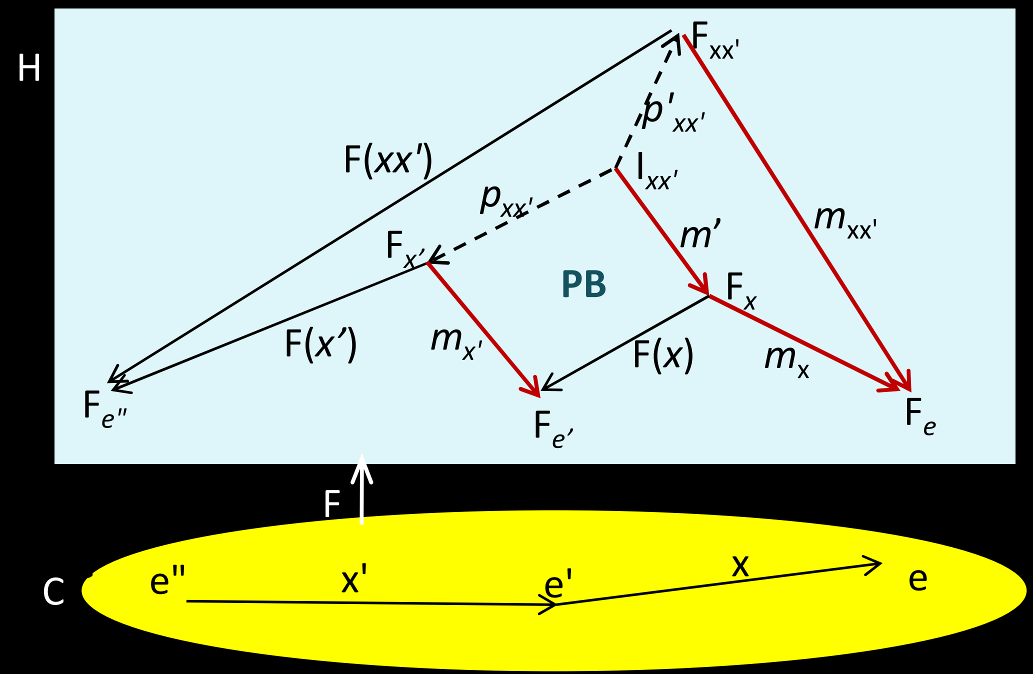
Un *système évolutif* **K** est formé de :

1. une *échelle de temps* T, partie finie ou non de **R** ;
2. pour chaque *t* de T une catégorie K_t *configuration* en *t* ;
3. pour *t* < *t'*, un foncteur *transition* $k_{t,t'}$ d'une sous-catégorie de K_t vers $K_{t'}$; si elle existe, l'image N(*t'*) de N(*t*) par $k_{t,t'}$ est appelée *état de* N(*t*) *en t'*. Ces foncteurs vérifient une condition de T*ransitivité* : si N(*t*) a un état N(*t'*) en *t'*, alors il a un état N(*t"*) en *t"* ssi N(*t'*) a N(*t"*) pour état en *t"*.

Un *composant* N de **K** est un ensemble maximal d'états successifs N(t) et un *lien s* entre composants est un ensemble maximal d'états successifs *s(t)*.

Exemple : Le SE des neurones **NEUR** : NEUR$_t$ est la *catégorie des neurones en t*, un objet N(*t*) représente l'état d'un neurone N en *t* (mesuré par son activité *n(t)* en *t*), un morphisme *s(t)* l'état d'un chemin synaptique *s* en *t* (pondéré par son délai de propagation et sa force en *t*).

(H, M)-SEMI-FAISCEAU



Un SE est un (Cat, Inc)-*semi-faisceau* sur la catégorie Temps au sens suivant.

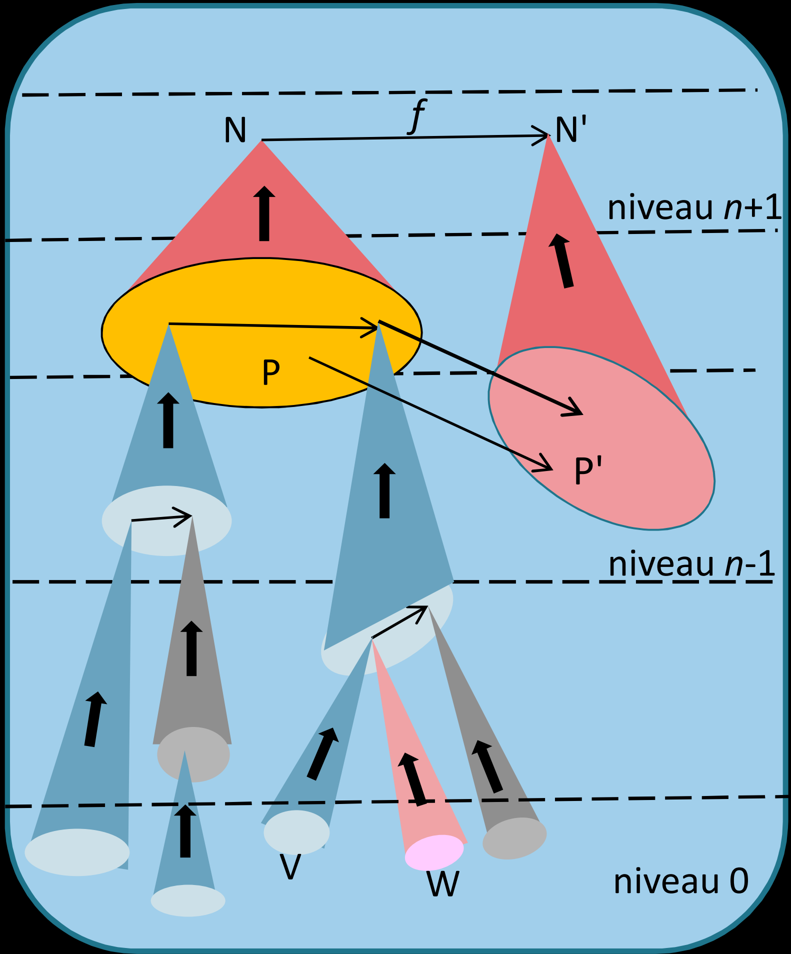
H une catégorie et M une classe de monomorphismes (en rouge) contenant les identités, stable par pullbacks et avec au plus un *m* entre 2 objets. Un (H, M)-*semi-faisceau* F sur C est une application de C vers K telle que : 1. F(*e*) est un objet F_e pour tout objet *e* de C.

2. Pour $x: e' \to e$, on a $F(x): F_x \to F_{e'}$ où F_x est un objet tel qu'il existe un $m_x: F_x \to F_e$ dans M.

3. *Transitivité*: pour $x': e'' \to e'$ dans C, le pullback $I_{xx'}$ de $(m_{x'}, F(x))$ est aussi le pullback de $(m_x, m_{xx'})$ et, en notant $p_{xx'}$ et $p'_{xx'}$ les projections des PB, on a :

$$F(xx')p'_{xx'} = F(x')p_{xx'}.$$

CATÉGORIE HIÉRARCHIQUE. SHE

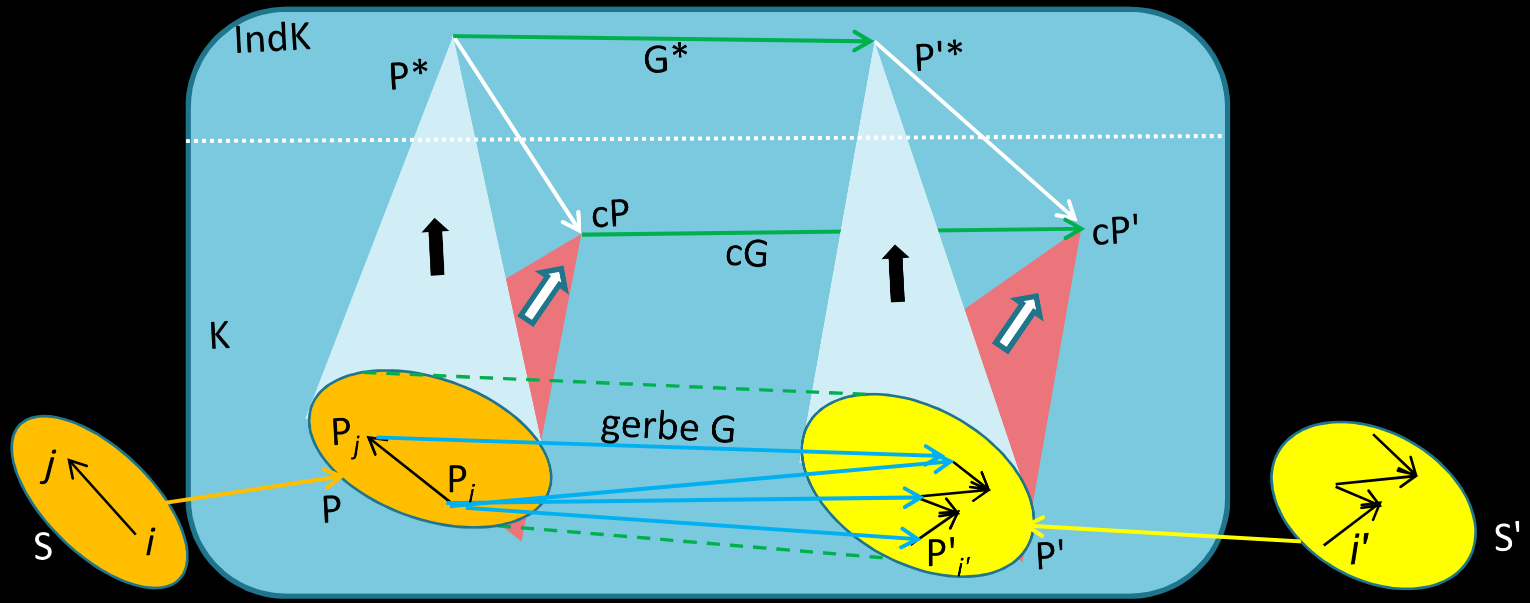


Une catégorie K est *hiérarchique* si ses objets sont séparés en niveaux "de complexit*é*" 0, 1, ..., *m*, de sorte qu'un objet N de niveau n+1 soit la colimite d'au moins un *pattern* (ou 'diagramme') à valeurs dans la sous-catégorie pleine H_n dont les objets sont de niveaux < n+1. Par suite N a des *ramifications* jusqu'au niveau 0, formées d'une décomposition P de N, puis une décomposition de chaque P_i, et ainsi de suite jusqu'au niveau 0. Ici on voit deux ramifications différentes de N, arrivant à V et W resp.

La hiérarchie est *basée* si les niveaux supérieurs peuvent être reconstruits à partir du niveau 0 par des 'processus de recollement' successifs en un sens précis que nous allons expliciter.

Un *système hiérarchique évolutif* est un système évolutif dont les catégories K_t sont hiérarchiques et les transitions respectent le niveau.

IndK. GERBES. LIENS SIMPLES

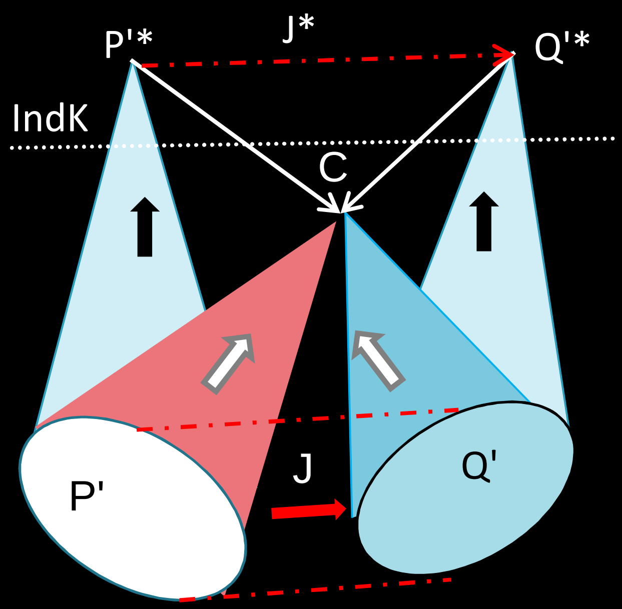


K s'identifie à une sous-catégorie pleine de sa complétion 'libre' IndK qui a pour objets P* les colimites dans IndK des petits patterns P: S ⟶ K. Un morphisme $G^* = \lim_i \mathrm{colim}_{i'} \mathrm{Hom}_K(P-, P'-)$ de P* vers P'* 'recolle' dans IndK une *gerbe* G de P vers P', c'est-à-dire une famille maximale de morphismes d'un composant de P vers un composant de P' vérifiant les conditions :

1. Pour tout *i* de S, il existe dans G au moins un morphisme de P_i vers un composant de P' et s'il y en a plusieurs, ils sont liés par un zigzag de liens distingués de P'.
2. Le composé d'un élément de G avec un lien distingué de P ou de P' est dans G.

Si P et P' ont des colimites cP et cP' dans K, G se recolle aussi en un morphisme cG : cP → cP', appelé *lien* (P, P')-*simple,* qui rend commutatif le diagramme supérieur.

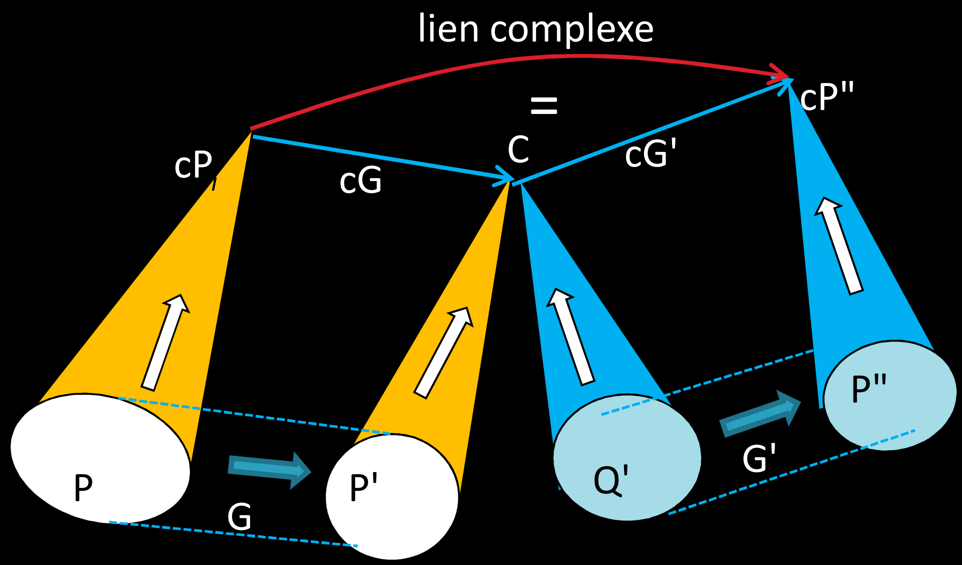
PATTERNS (NON-)CONNECTES. LIENS COMPLEXES



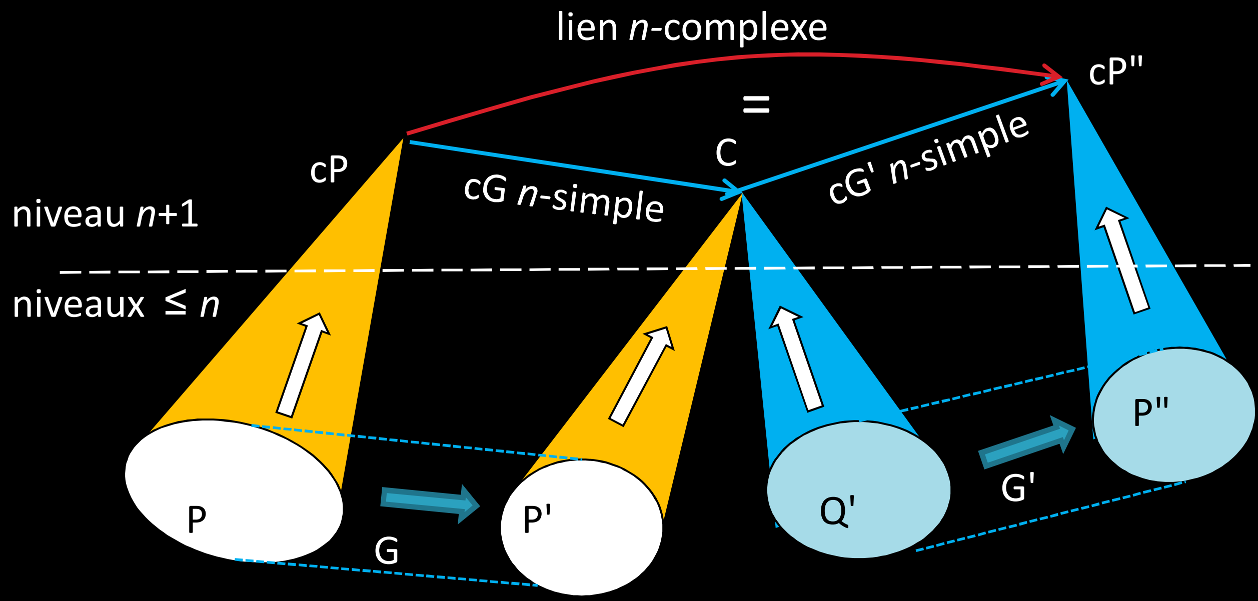
Deux patterns P' et Q' sont dits *homologues* si les catégories Q'*↓K et P'*↓K sont isomorphes (exemple : si P' et Q' ont la même colimite).

Des patterns homologues P' et Q' sont *connectés* s'il existe une gerbe J de P' vers Q' tel que cet isomorphisme soit défini par composition avec J* ; sinon ils sont dits *non-connectés*. Un objet C est *multiforme* s'il admet 2 décompositions non-connectées P' et Q'.

Si P' et Q' sont non-connectés, le composé d'un lien (P, P')-simple et d'un lien (Q',P")-simple, qui n'est pas (P, P")-simple, est appelé lien (P, P")-*complexe*.



HIERARCHIE BASEE

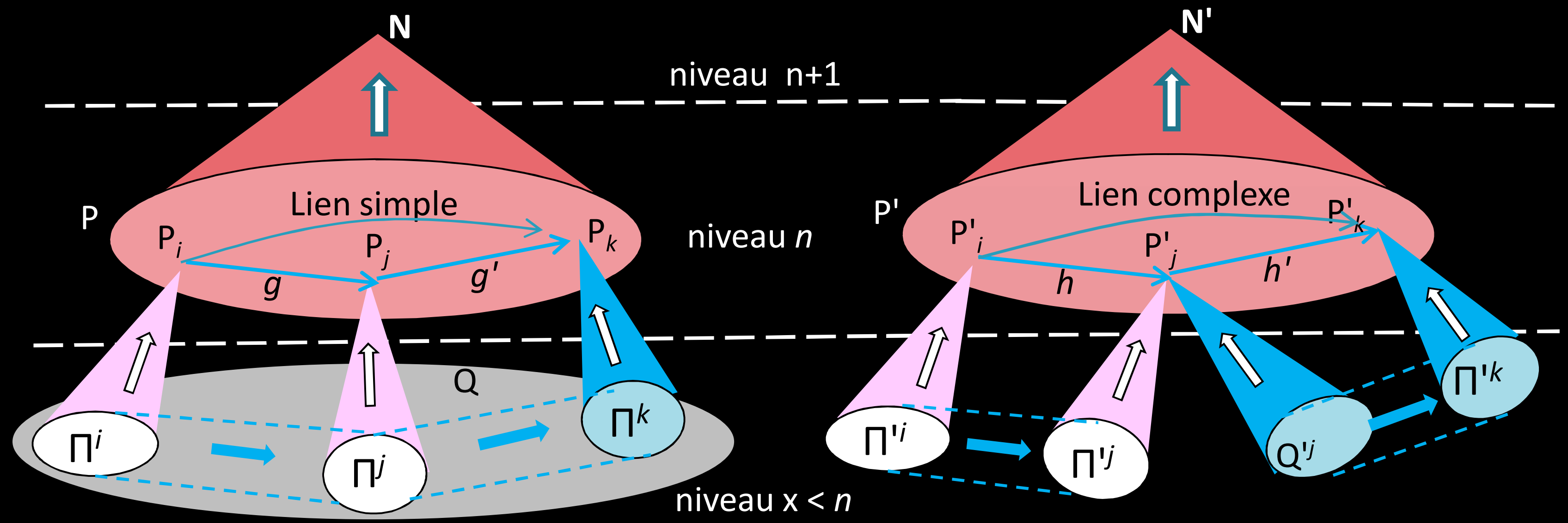


Soit H une catégorie hiérarchique. Elle vérifie le *Principe de Multiplicité* s'il existe des objets *multiformes* C de niveau n+1 qui sont colimite de 2 patterns non-connectés à valeurs dans H_n .

Un morphisme de H est appelé *lien n-simple* s'il recolle une gerbe entre patterns de H_n.
Soit E_n la plus petite sous-catégorie de H qui contient les liens n-simples, et les morphismes recollant une gerbe contenue dans E_n. Un morphisme de E_n qui n'est pas n-simple est appelé *lien n-complexe* ; il modélise une propriété globale des niveaux ≤ n qui *émerge* au niveau n+1.
La hiérarchie de H est dite *basée* si tout morphisme est n-simple ou n-complexe.
Exemple. IndK a une hiérarchie (à 2-niveaux) basée sur K dont tout morphisme est 0-simple.

Théorème. *La hiérarchie de* H *est basée ssi tout morphisme est* 0*-simple ou* 0*-complexe.*

ORDRE DE COMPLEXITE. OBJET REDUCTIBLE



N est *m-réductible* s'il est la colimite d'un pattern dont les objets sont de niveau ≤ *m*. *L'ordre de complexité* d'un objet N est le plus petit *m* tel que N soit *m*-réductible.

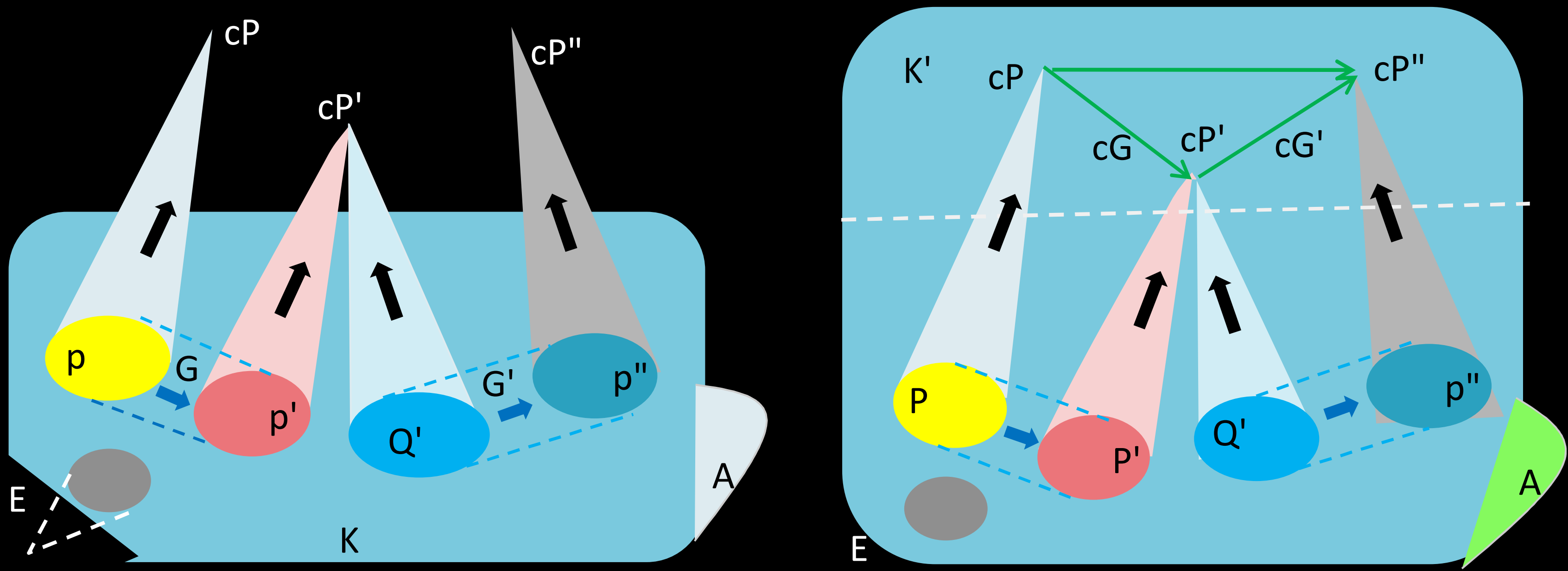
Théorème. *Un objet* N *de niveau n*+1 *ayant une ramification* (P, (Π^i)) *telle que les liens distingués de* P *sont* (Π^i, Π^j)*-simples est n*-1*-réductible, donc d'ordre de complexité* ≤ *n*-1.

N est la colimite d'un grand pattern Q formé des Π^i et des liens des gerbes entre eux.

L'objet N' qui recolle le pattern P' ayant un lien distingué *h'h* complexe n'est pas n-1-réductible. Il faut 2 étapes pour le 'reconstruire' à partir des niveaux < *n*.

Théorème d'émergence. *Dans une catégorie hiérarchique, le Principe de Multiplicité est la condition pour qu'il existe des objets d'ordre de complexité* > 1.

COMPLEXIFICATION

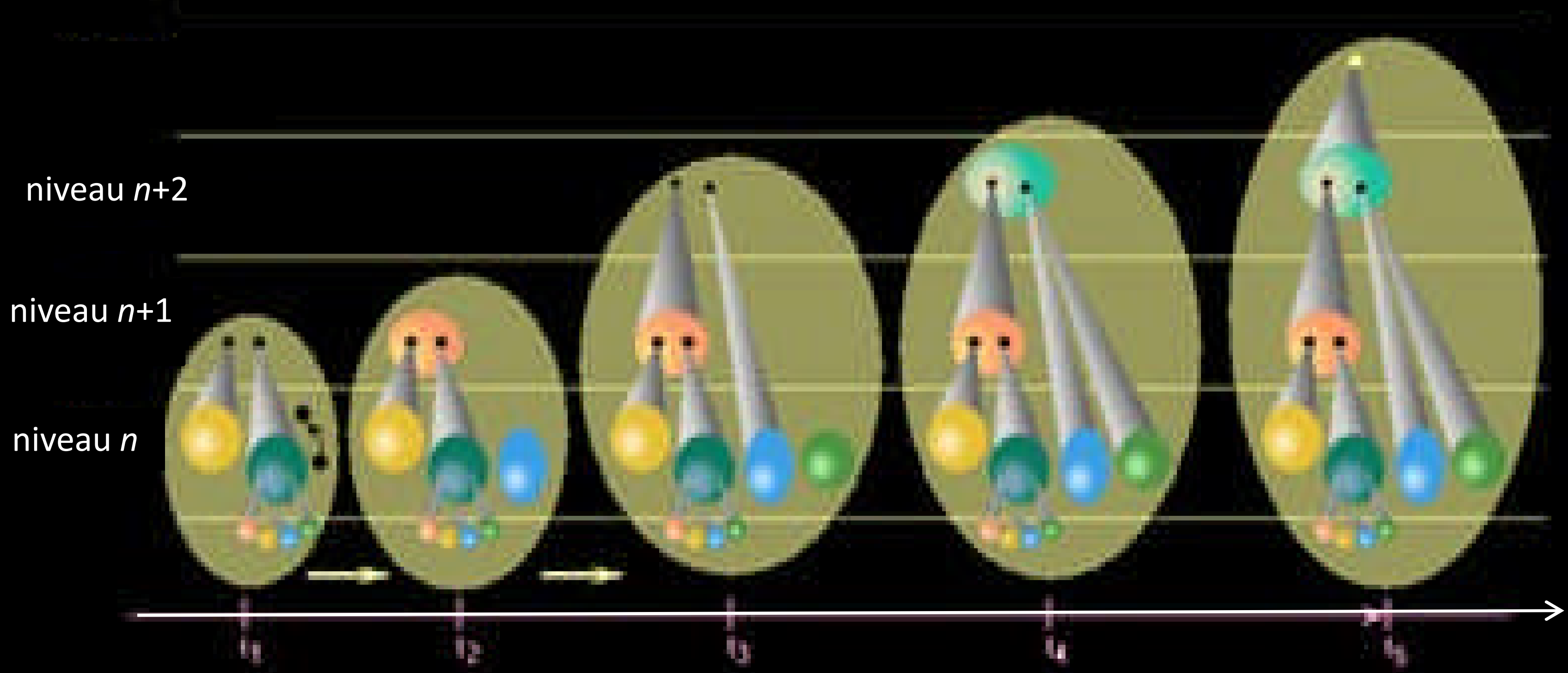


Une *procédure* Pr sur K est définie par une esquisse de la forme suivante : son graphe multiplicatif contient : la catégorie K sauf un ensemble E d'éléments 'à éliminer', un graphe donné A 'à absorber', un ensemble de cônes de base un pattern P sans colimite dans K 'à recoller', le sommet cP étant choisi de sorte que, si P' et Q' sont homologues, on ait cP' = cQ'. Les cônes distingués sont ces cônes ainsi qu'un ensemble de cônes-colimite dans K 'à préserver'.

La *complexification* K' *de* K *relativement à* Pr est le prototype (A. et C. Ehresmann, 1972) associé à cette esquisse.

La procédure est *mixte* si on veut aussi ajouter des limites à certains cônes. La construction d'une complexification mixte se fait par récurrence, en ajoutant successivement à chaque étape les colimites voulues, puis les limites sous la forme de colimites sur l'opposée.

EMERGENCE D'OBJETS DE COMPLEXITE CROISSANTE



Théorème. *Si* K *vérifie le principe de multiplicité, sa complexification* K' *aussi et, par complexifications successives, il émergera des objets d'ordre de complexité strictement croissant*.

Théorème. *Une catégorie hiérarchique est basée ssi elle se déduit du niveau* 0 *par une suite de complexifications pour des procédures avec seulement recollement de patterns.*

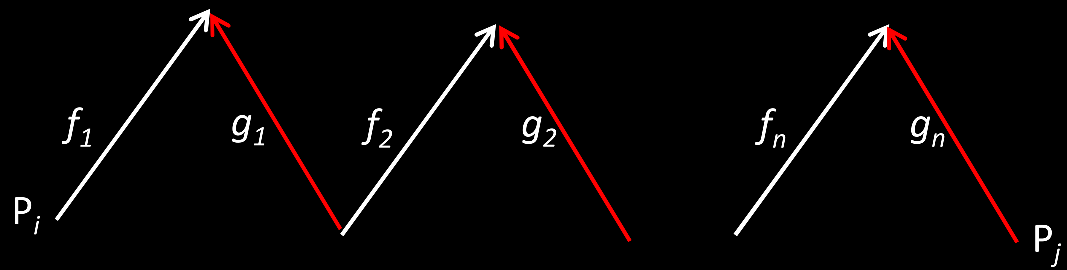
A partir du SE des neurones **NEUR**, on construit le modèle **MENS** pour un système cognitif et mental par complexifications (mixtes) successives ; ses composants, appelés *neurones de catégorie* (ou cat-neurones) modélisent des objets mentaux de complexité croissante.

PONDERATION *d*. PATTERNS *d*-CONNEXES

(K, *d*) est une catégorie *pondérée dans un monoïde* M si *d* est un foncteur de K vers M.
Un système évolutif tel que **NEUR (**ou un SEM) est muni de 2 pondérations :

1. un *délai de propagation d* associant à chaque catégorie K_t une pondération *d(t)* dans le monoïde additif des réels positifs ; *d* varie très lentement avec *t.*
2. une *force w* qui associe à chaque catégorie K_t une pondération *w(t)* dans le groupe multiplicatif des réels ≠ 0.

Supposons K pondérée dans un monoïde M dont le réflexion dans un groupe M' est injective, et identifions M à un sous-groupe de M'. Nous appelons *d-poids* du zigzag *z* de K :



le composé (dans M') :

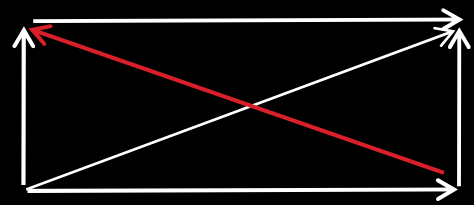
$$d(z) = d(f_1)d(g_1)^{-1}d(f_2)d(g_2)^{-1} \dots d(f_n)d(g_n)^{-1}$$

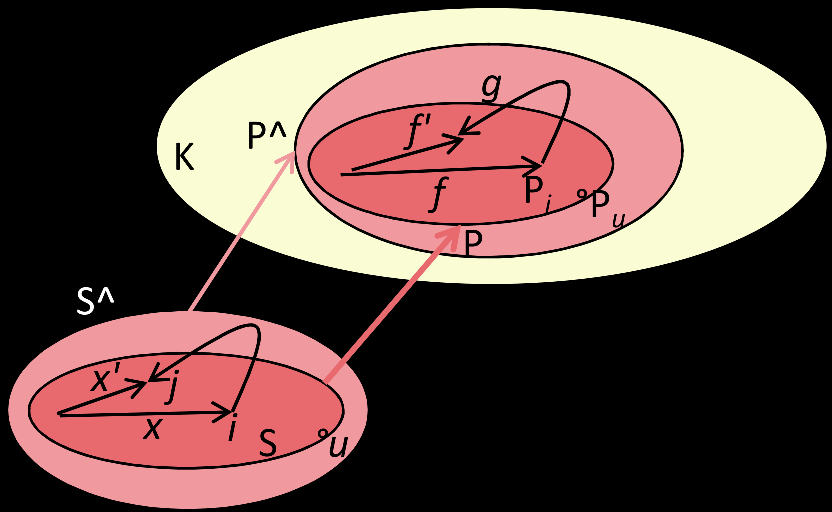
Un pattern P dans K est *d-connexe* s'il est connexe et si tous les zigzags de liens distingués de P entre P_i et P_j ont le même poids.

Théorème. *La complexification d'une catégorie pondérée* (K, *d*) *dans laquelle tous les patterns à recoller sont d-connexes admet une pondération étendant d*.

COLIMITES DANS LES CATEGORIES LIBRES ET LES GROUPOIDES

Une catégorie K est *à diagonales* si tout morphisme est à la fois mono et épi et si tout carré commutatif a 2 diagonales. Catégories libres et groupoïdes en sont des exemples.



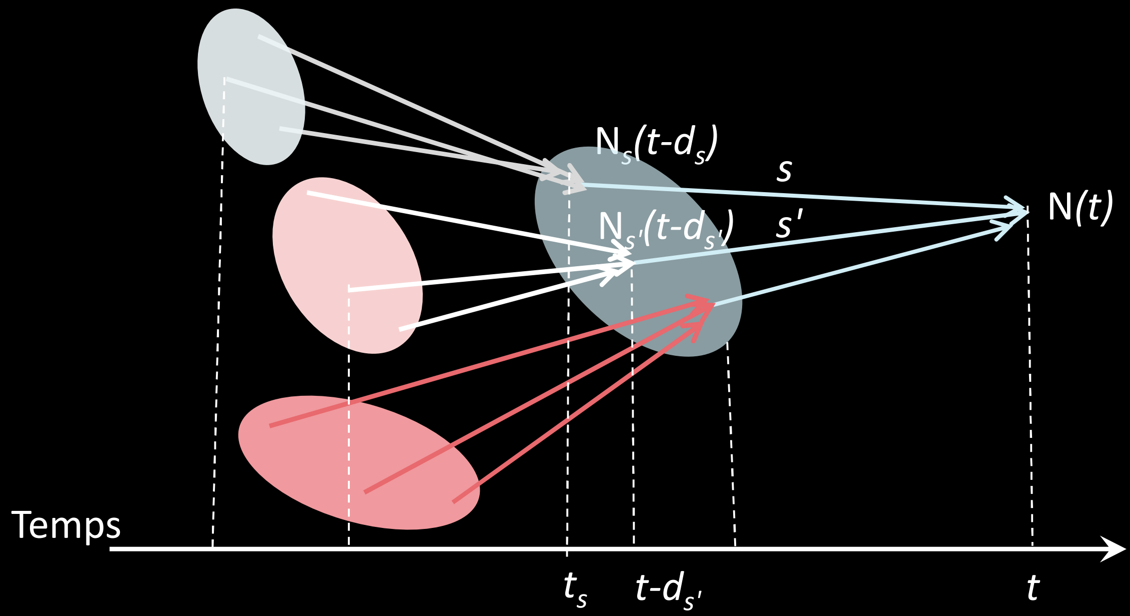


A un pattern P: S ⟶ K on associe le pattern *saturé* P^: S^ ⟶ K associé à P : c'est le plus petit pattern étendant P, qui est stable par composition et tel que : si $f = \mathrm{P}(x)$ et $f' = \mathrm{P}(x')$ sont des liens distingués de P et g un morphisme de K de P_i vers P_j vérifiant $f' = gf$, alors g définit un lien distingué P^(i, g, j) de P^. Ainsi S et S^ ont les mêmes objets, et P et P^ ont la même colimite si elle existe.

Théorème (A. Ehresmann, 1996)**.** *Dans une catégorie à diagonales, si un pattern connexe* P *admet une colimite* cP, *alors le pattern saturé* P^ *définit un préordre sur* |S^| *tel que 2 éléments ont une borne supérieure et l'ordre est total sur la section* $i^{>}$*. Si* P *est fini, l'ordre a un élément maximal u, et* cP = P*(u)*.

Corollaire 1. Dans une catégorie libre (exemple : NEUR_t) ou un groupoïde, un pattern connexe fini ne peut avoir qu'une colimite triviale.
Corollaire 2. Dans un groupoïde, un pattern P connexe a une colimite ssi les (Id)-poids des zigzags de liens distingués joignant 2 composants P_i et P_j sont égaux.

DYNAMIQUE DE NEUR



Dans **NEUR**, les patterns *d*-connexes sont des patterns *polychrones* (ou time-locked) au sens de Izhikevitch, Edelman & Gallo qui montrent que le pattern activé par un stimulus (ou un objet mental) est de cette forme. Et l'activité $n(t)$ d'un (cat-)neurone N en t est donnée par la formule :

$$n(t) = \phi(\Sigma_s w_s(t\text{-}d_s) n_s(t\text{-}d_s) + \mathrm{J}(t)).$$

où ϕ est une fonction sigmoïde, la somme est prise sur toutes les synapses s: $N_s \rightarrow N$ dont w_s dénote la force et d_s le délai de propagation (supposé constant autour de t), et J est un possible input externe (pour les 'récepteurs'). On suppose que la force w_s d'une synapse s varie en suivant une *loi de Hebb*, à savoir elle augmente si les activités de N_s et N sont corrélées.

LE MODELE MENS ET SA DYNAMIQUE

Le modèle **MENS** est un SEM obtenu par complexifications successives (mixtes) de **NEUR** recollant certains patterns *d*-connexes (et *w*-connexes). Ainsi les pondérations *d* et *w* s'étendent à **MENS**, ainsi que la formule précédente.
Il s'ensuit que, si l'on se place dans l'espace des phases (de coordonnées $(n_i, w_s)_{i,s}$ où les n_i sont les activités des différents (cat-)neurones et w_s les forces des liens *s* entre eux, la dynamique au voisinage de *t* (disons sur un intervalle $]t–a, t+a[$) est régie par un système d'équations différentielles du type "Cohen-Grossberg-Hopfield avec délais" :

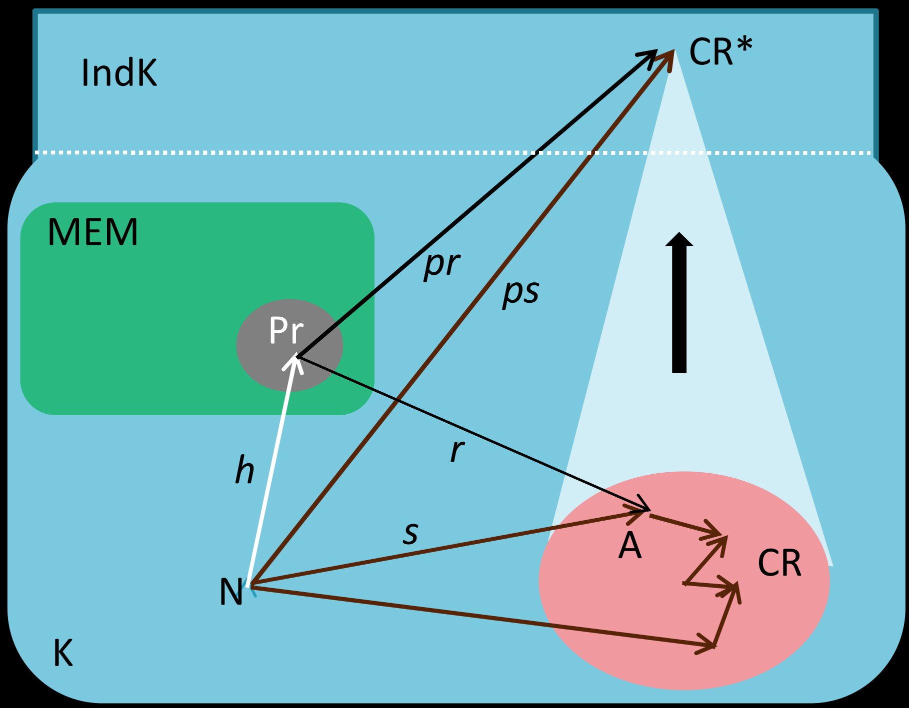
$$dn_i(t)/dt = -n_i(t) + \Sigma_{s:\ Nj \to Ni} w_s(t-d_s)n_j(t-d_s) + \mathrm{J}_i(t)$$

$$dw_s/dt = C<n_j n_i>.$$

où J_i est un input externe, C une constant et $<n_j n_i >$ signifie qu'on fait la moyenne du produit $n_j(t')n_i(t')$ sur $]t–a, t]$.

Le choix des patterns P qui seront recollés dans la complexification à un instant donné *t* sera fait via des sous-systèmes particuliers, les *corégulateurs*. Du point de vue dynamique un pattern à recoller sera un pattern *d*-connexe qui est *activé en t* (au sens que les dérivées en *t* des activités de ses composants sont > 0) et dont l'activation fait tendre la dynamique vers un attracteur dans l'espace des phases (associé au paysage d'un corégulateur). Ainsi le cat-neurone colimite de P modélise un tel attracteur.

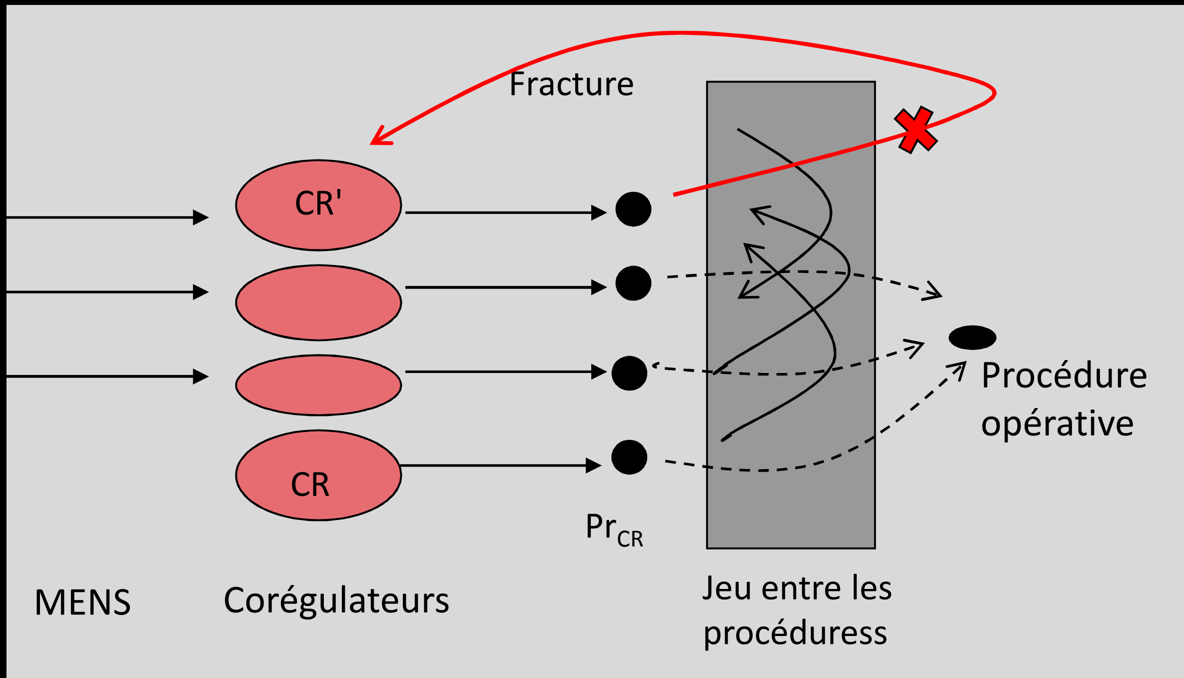
SEM ET PAYSAGE D'UN COREGULATEUR



Un SEM est un SE avec un sous-système hiérarchique, la mémoire Mem, et un ensemble de sous-SE appelés *corégulateurs*. Un corégulateur CR a sa propre complexité, sa propre échelle de temps discrète et un accès différentiel à Mem, en particulier à ses *procédures admissibles* Pr.

A chaque étape t de son échelle de temps, CR construit son *paysage :* c'est la sous-catégorie pleine L_t de IndK ayant pour objets les morphismes d'un objet N de K vers CR* recollant une gerbe vers CR qui a au moins un élément s : N $\rightarrow$ A tel que $n'(t\text{-}d_s) > 0$. Une procédure admissible Pr est choisie sur L_t et le paysage anticipé à la fin de l'étape est la complexification correspondante de L_t. Les commandes de Pr sont envoyées aux effecteurs, et le résultat est évalué via un foncteur *comparaison* entre AL_t et le nouveau paysage en t+1.

JEU DES PROCEDURES



A l'instant *t*, les commandes des procédures choisies par les différents corégulateurs sont envoyées au système, où un processus d'harmonisation, le *jeu des procédures*, est déclenché, tenant compte des forces des divers CR et de leurs procédures. Il conduit à la procédure opérative qui sera effectivement exécutée par le système; celle-ci peut causer des fractures à un corégulateur CR dont la procédure n'est pas retenue.