1982-83

Parcours d'un topologue-catégoricien : Jean-Marc CORDIER (1946-2014)

par

Andrée C. Ehresmann

Université de Picardie Jules Verne, LAMFA
http://ehres.pagesperso-orange.fr

UN PEU D'HISTOIRE

UNIVERSITÉ DE LILLE

CENTRE UNIVERSITAIRE DE PICARDIE

COLLÈGE SCIENTIFIQUE UNIVERSITAIRE D'AMIENS

ANNÉE SCOLAIRE 1965-1966

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DE PREMIER CYCLE (PROPÉDEUTIQUE)

M. G. P.

S. P. C. N.

M. P. C.

C. P. E. M.

CERTIFICATS D'ÉTUDES SUPÉRIEURES DE SECOND CYCLE

BOTANIQUE

GÉOLOGIE GÉNÉRALE

CHIMIE GÉNÉRALE I

ZOOLOGIE

CHIMIE MINÉRALE

BIOLOGIE GÉNÉRALE

ELECTRICITÉ

Jacques TILLIEU — Fernand MARION — Robert MALLET

Cordier obtient le 1^er^ cycle en 1966 au Collège Scientifique Universitaire (CSU) d'Amiens dépendant de l'Université de Lille.

1966-67 : Le CSU n'assurant que le 1^er^ cycle, Cordier doit aller à Lille pour suivre TMP .

1967-68 : Création au CSU d'une (éphémère) "Licence d'Enseignement en 1 an". Il l'obtient avec TB (j'en assure les cours).

1968-69 : A la suite de Mai 68, l'Université de Picardie est créée, et autorisée à délivrer les C1 et C2 de Mathématiques. Il les obtient avec mentions, ce qui complète sa Maîtrise.

1969-71 : Pas de 3^e^ cycle à Amiens. Il s'inscrit à l'Université Paris 7 sous la responsabilité de Charles Ehresmann. En 1971 je suis rapporteur de sa thèse de 3^e^ cycle.

COURTE BIOGRAPHIE

Doctorat 3e cycle (équipe TAC), Paris 7, Juin 1971 :

" *Catégories auto-dominées: Transformations naturelles. Espaces fonctionnels quasi-uniformes* ".

Doctorat d'Etat (sous la direction de Michel Zisman), Université Paris 7, Juin 1987 :

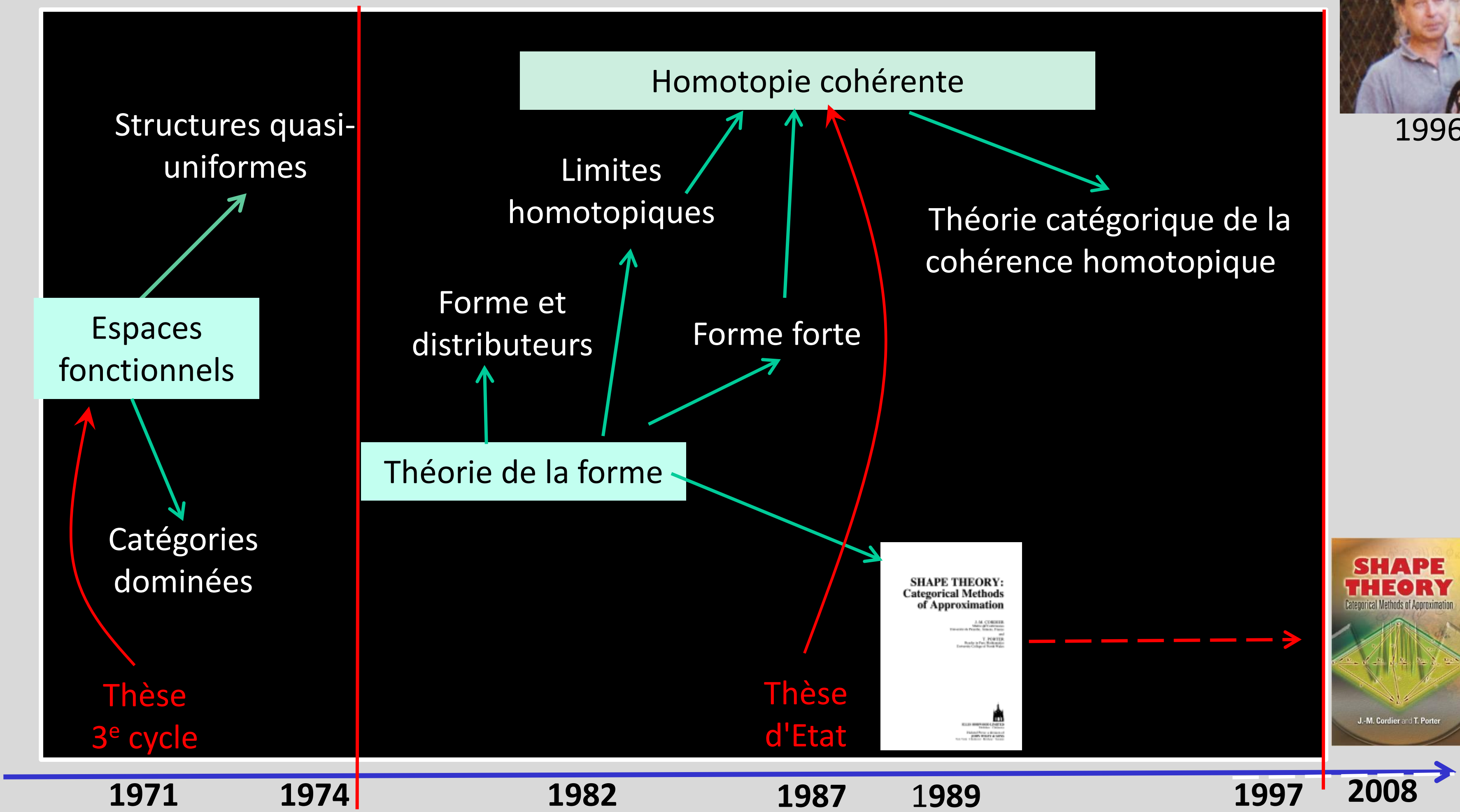
" *Sur la cohérence homotopique et les limites homotopiques* "

Nommé Assistant à l'Université de Picardie en Octobre 1971, puis Maitre de Conférences, enfin Professeur à partir d'Octobre 1988.

Coopérant à l'Université Fluminense de Niteroï (Brésil) de février 1974 à Juillet 1975
Invitation Université de Galles du Nord à Bangor en octobre 1981

SYSTEME EVOLUTIF DES TRAVAUX DE J.-M. CORDIER


1996



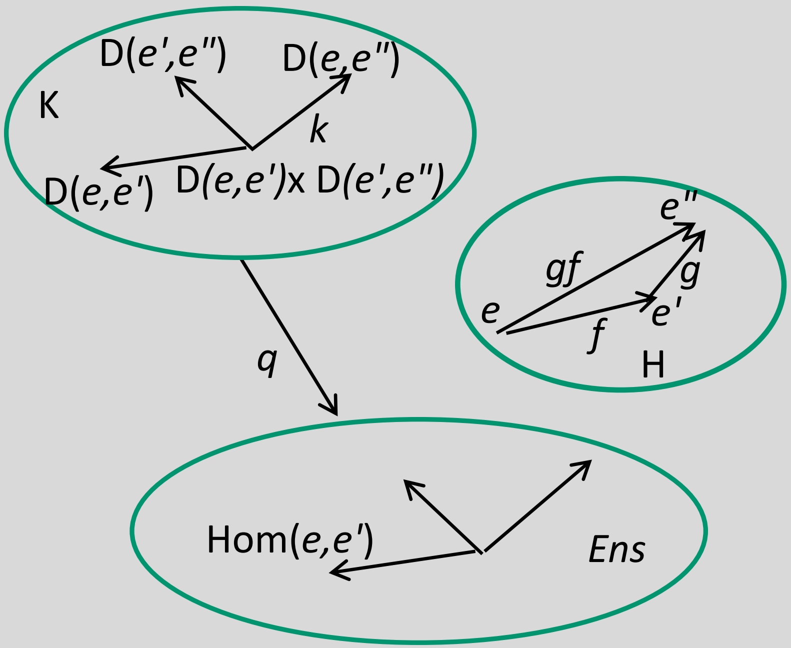
1970

1970-74: PREMIERS TRAVAUX: Catégories et Topologie

Mémoire de 3^{e} cycle Paris 7: Topogenèses (66 p., non publié).
Thèse de 3^{e} cycle, Université Paris 7, 1971, en liaison avec les 3 articles :

Sur la notion de catégorie tensoriellement dominée, *C.R.A.S. Paris* 270, 1970, 572-75.
Catégories auto-dominées, *Esquisses Math.* 15, 1972.
Espaces fonctionnels quasi-uniformes, *Cahiers Top. et Géom. Diff*. XII-2, 1973, 113-136.

CATEGORIES DOMINEES. APPLICATIONS



Foncteur q: K -> *Ens.*
H est *(fortement) q-dominée* s'il existe un foncteur D: $H \times H^{op} \to K$ tel que :

$$\begin{tikzcd}
H\times H^{op} \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}_H"'] & \arrow[d, phantom, "="] & K \arrow[dl, "q"] \\
& Ens &
\end{tikzcd}$$

et $k_{ee'e''}$: $D(e,e') \times D(e',e'') \to D(e, e'')$ tel que $q(k_{ee'e''})$: $(f, g) \mapsto gf$.

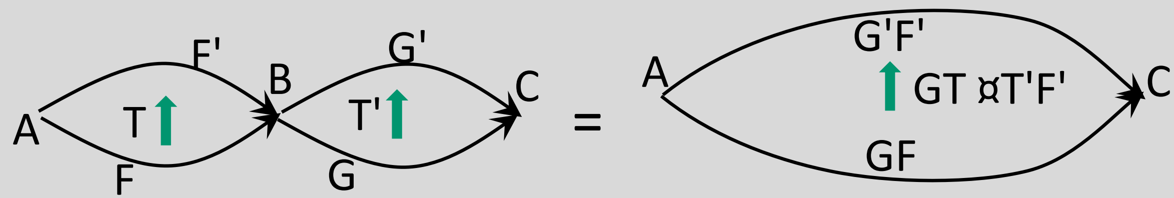
H est *tensoriellement q-dominée en e* si de plus K = H et si $D(e, -)$: $H \to H$ a un adjoint X_e.

Ces notions sont étudiées dans le cas où q n'est pas fidèle, ce qui oblige à ajouter des conditions de cohérence (comparer aux catégories enrichies). Divers critères techniques sont indiqués pour construire des dominations.

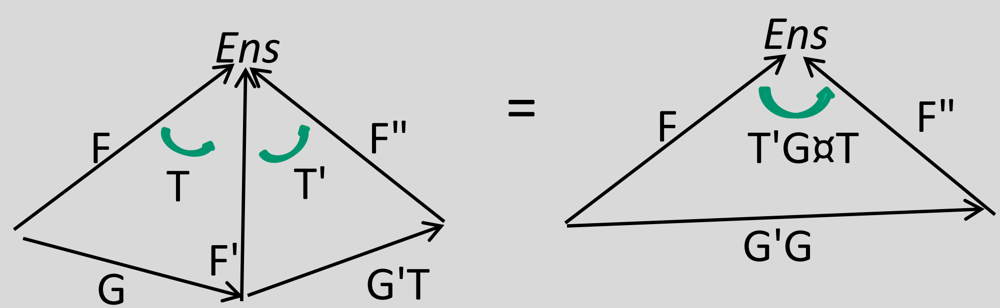
Proposition. *Une catégorie à produits finis et objet final* 1 *est cartésienne fermée ssi elle est tensoriellement* Hom(1, -)*-dominée pour tout objet e, avec* X_e *= produit par e*

Exemples de catégories cartésiennes fermées:

1. **Cat**.
2. La catégorie **Nat** des transformations naturelles avec sa 1^e loi de composition :

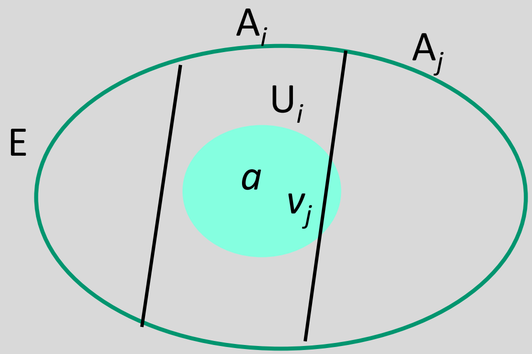


2. La catégorie **A** des diagrammes dans *Ens.*



Dans chaque cas le Hom interne est construit explicitement.

ESPACES FONCTIONNELS QUASI-UNIFORMES



$u = ((A_i)_{i\in I}, (Q_i)_{i\in I})$ est une *structure quasi-uniforme* sur un ensemble E si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E et si Q_i pour tout i est un filtre sur ExE vérifiant :

(i) tout $V_i \in Q_i$ contient la diagonale D_i de $A_i x A_i$ et un élément symétrique de Q_i.

(ii) si $V_i \in Q_i$ rencontre D_j, il existe $V'_i \in Q_i$ et $V'_j \in Q_j$ tels que $V'_i \circ V'_j \subset V_i$.

Topologie sous-jacente à u : une base de voisinages de $a \in A_j$ est formée des $U_i = \{v_i \in E \mid (a, v_i) \in V_i\}$ où $V_i \in Q_i$.

Exemples. (i) u = structure uniforme si I = {1}. **(ii)** u = topologie si $A_i = \{i\}$ pour tout $i \in E = I$. **(iii)** u sur groupoïde topologique microtransitif (G, T): $A_{(e,e')} = \mathrm{Hom}(e, e')$, $Q_{(e,e')}$ engendré par les $(U' a_i U) x (U' a_i U)$, où $a_i: e \to e'$ et U et U' sont des voisinages dans T de e et e' respectivement.

Soit $\boldsymbol{Q}$ la *catégorie des structures quasi-uniformes*. On a $f: u \to u'$ si pour tout i il existe j tel que $f(A_i) \subset A'_j$ et si le filtre image de Q_i par $f x f$ est plus fin que Q'_j. Elle est à limites et colimites, préservées par $q: \boldsymbol{Q} \to Ens$.

Proposition. *Soit* Ed *la structure uniforme discrète sur* E. *Le foncteur produit* - xEd: $\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$ *a un co-adjoint.*

Pour $u' = ((A'_j)_{j \in J}, (Q'_j)_{j \in J})$, l'objet colibre $\boldsymbol{Q}(E, u')$ associé à u' est appelé *structure de pseudo-convergence quasi-uniforme de* E *vers* u'. On a :

$$\boldsymbol{Q}(E, u') = ((M_j)_{j \in J}, (P_j)_{j \in J}), \quad \text{où} \quad M_j = \{f : E \to E' \mid f(E) \subset A'_j\}$$

et P_j est engendré par les

$$W_j = \{(f, f') \mid [f, f'](E) \subset V'_j\}, \text{ où } V'_j \in Q'j \text{ et } j \in J.$$

u est *quasi-discrète* si $A_i x A_i \in Q_i$ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire si chaque $u|A_i$ est une structure uniforme discrète et u est leur somme.$_i$.

Théorème. *$\boldsymbol{Q}$ est tensoriellement q-dominée en tout u quasi-discrete (donc cartésienne 'partiellement' fermée).*

Le Hom interne $\boldsymbol{Q}(u, u')$, où u est quasi-discrète, est isomorphe à une sous-structure du produit des $\boldsymbol{Q}(A_i, u')$.

1975

TRAVAUX DE TOPOLOGIE ALGEBRIQUE
Théorie de la forme
Homotopie cohérente

Partiellement en collaboration avec
Dominique BOURN ou Tim PORTER

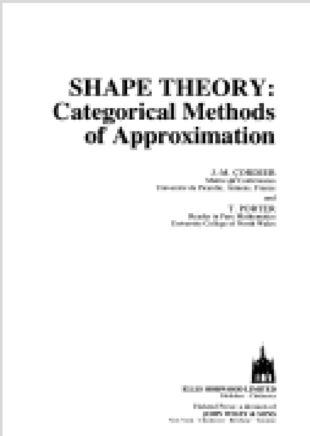
A la mémoire de Jean-Marc Cordier
par Michel ZISMAN

D'abord je dois vous dire combien je regrette de ne pas pouvoir célébrer avec vous la mémoire de Jean-Marc car je me déplace très difficilement maintenant, après avoir dans un passé aujourd'hui révolu parcouru les Alpes et d'autres montagnes du monde.

C'est en 1987 dans mon bureau au 5^{e} étage à Jussieu qu'un jeune mathématicien, sur le conseil de René Guitart me semble-t-il, était venu me demander de superviser sa thèse. Une thèse bien avancée d'ailleurs, foisonnant d'idées, et un manuscrit lui aussi foisonnant, excellent peut-être pour son auteur qui savait comment s'y retrouver, mais dans lequel un autre lecteur, moi le premier, risquait de s'enliser.

Pendant quelques mois, ensemble, lui rédigeant et moi lisant et critiquant, nous avons ordonné, lissé, peigné le manuscrit, mis au point quelques démonstrations, obtenant *in fine* un beau texte pour une belle thèse de Doctorat d'Etat qui fut alors rapidement soutenue.

Nos chemins ont depuis peu a peu divergé car ont divergé nos intérêts en mathématiques. Que puis-je ajouter sinon qu'il est bien triste de voir partir ceux qui alors étaient les élèves avant ceux qui alors avaient été leurs maîtres.

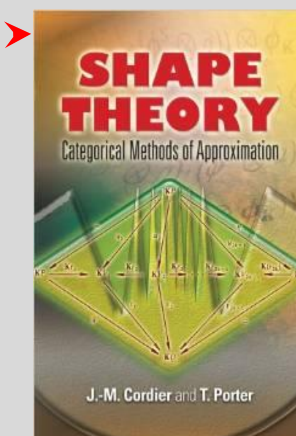


1989

La *théorie de la forme* (*shape* theory) part d'une catégorie W d'objets P "connus", qui vont jouer le rôle de "modèles" ou "prototypes" pour une catégorie H d'objets X à étudier, en construisant des 'approximations' des X par des P. Ceci permet par exemple d'étendre certaines propriétés des P au cas des X.

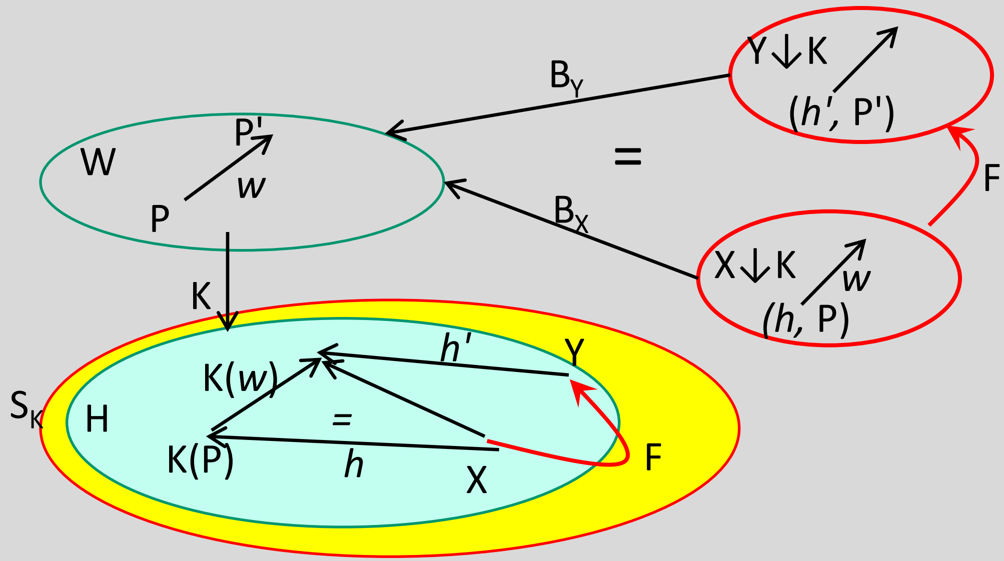
Elle a été introduite en topologie par Borsuk : H est la catégorie d'homotopie des espaces métriques compacts, et W sa sous-catégorie pleine des polyèdres finis. Il en résulte une extension de l'homologie simpliciale des polyèdres en l'homologie de Čech des compacts.

Cette théorie est formalisée dans le cadre catégorique, en partant d'une catégorie W de "modèles" P, munie d'un foncteur K vers une catégorie H à étudier. D'où des applications en topologie, théorie des groupes, modèles mathématiques divers...



2008

CATEGORIE FORME ASSOCIEE A UN FONCTEUR K



Soit K: W → H un foncteur. Pour X ϵ |H|, la *catégorie de* K-*approximation* de X, est la catégorie X↓K, où |X↓K| = {(*h,* P) | P ϵ |W|, *h*: X → K(P)}, et *w*: (*h,* P) → (*h*K(*w*), P') pour *w*: P→ P'. Soit B_X: K↓X → W: (*h*, P) |→ P.

Une catégorie S_K est une *catégorie forme* (de Holtsziynski) pour K si :

$$|S_K| \approx |H|, \ S_K(X, K(P)) \approx H(X, K(P)),$$
$$S_K(X, Y) \approx \{F: X{\downarrow}K \to Y{\downarrow}K \mid B_X = B_Y F\}.$$

X et Y ont *la même forme* pour K s'ils sont isomorphes dans S.

Ces conditions sont traduites en termes de distributeurs dans un article avec Bourn.

Proposition. *Le foncteur* $S_K(X, -)$ *est une extension de Kan de* $H(X, K-)$**.**

On appelle *invariant de K-forme* un foncteur $T: H \to H'$ qui se factorise via S_K. Dans les exemples topologiques, ces invariants conservent l'homologie.

K-*stabilité* : un objet X de H est K-*stable* si la catégorie $X{\downarrow}K$ a un objet initial (A, K(A)).

1er Théorème de stabilité. X *est* K-*stable si et seulement si* X *et* KA *ont la même forme, i.e. sont isomorphes dans* S_K.

Parmi les applications : étude des suites d'homologie de Čech.

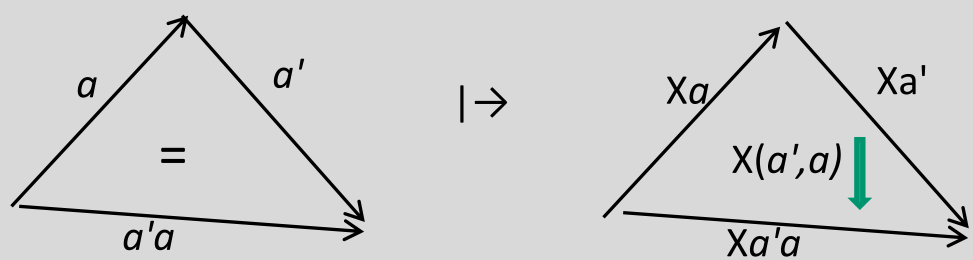
Dans un court article, Cordier et Porter suggèrent une application à la *reconnaissance d'images*. Les objets de W sont des images "modèles", ses morphismes les compare entre elles. Les objets X de H sont approchés par des modèles via $X{\downarrow}H$, et X est K-stable s'il est isomorphe à un K(A) dans S_K

HOMOTOPIE COHERENTE

Divers problèmes créés par la théorie de la forme pour les espaces topologiques (comparaison entre complexes de Čech et de Vietoris) ont conduit à introduire une théorie de la *forme forte* (Edwards & Hastings), en remplaçant l'homotopie par une notion de 'cohérence homotopique' que Cordier va préciser.

Un *diagramme homotopiquement cohérent* (h. c.) d'une catégorie *A* vers *Top* consiste en la donnée : (i) d'un homomorphisme X de graphes ; (ii) pour tout 'triangle commutatif' (a, a', a'a) dans A d'une homotopie

X(a', a): X(a')X(a) => X(a'a) (en notation "2-catégorique") :



(iii) pour tout 'tétraèdre' commutatif dans A, d'une homotopie de niveau 2 entre les composés des homotopies associées aux faces de A ...

(iv) et ainsi de suite pour les simplexes d'ordre supérieur avec des homotopies de niveau croissant.

Une importante contribution de Cordier (pas assez reconnue dans les travaux récents) a été de transposer l'étude de la cohérence homotopique dans le cadre des catégories simpliciales (*i.e.,* enrichies dans la catégorie *Simp* des ensembles simpliciaux), en particulier par l'introduction du *nerf homotopiquement cohérent* d'une catégorie simpliciale.

Théorème (1980). *Un diagramme h.c. de A vers une catégorie simpliciale T correspond à un foncteur simplicial du nerf de A dans le nerf h.c. de T*.

Parmi les résultats généraux :

1. Définition de la *limite homotopique* d'un foncteur simplicial et sa construction comme limite simpliciale indexée (avec Bourn).

2. Construction (avec Porter) d'un *foncteur d'homotopie cohérente*

$$\check{\mathrm{C}}\mathrm{ech}(X, -): \mathrm{Cov}(X) \to \mathit{Simp},$$

où *Cov*(X) = catégorie des recouvrements d'un espace topologique X.

3. Applications à l'homologie de Steenrod-Sitnikov.

4. Dans son dernier article (1997, avec Porter) introduction à une *théorie catégorique de la cohérence homotopique*, développant des analogues h.c. de notions catégoriques : fins, cofins, lemme de Yoneda, extensions de Kan.

PUBLICATIONS DE J.-M. CORDIER

Livre (avec T. Porter)

Shape Theory: Categorical Methods of Approximation, Mathematics and its Applications, Ellis Horwood Ltd., March 1989, 207 pages.

Edition augmentée, Dover, 2008.

Articles de recherche

Sur la notion de catégorie tensoriellement dominée, *C.R.A.S Paris* 270, 1970, 572

Catégories auto-dominées, *Esquisses Mathématiques* 15, 1972

Espaces fonctionnels quasi-uniformes, *Cahiers Top. et Géom. Diff*. XII-2, 1973, 113-136.

(avec Porter) Une introduction à la théorie de la forme, *Esquisses Mathématiques* 30, 1978, 138 pages.

(avec Bourn) Distributeurs et théorie de la forme, *Cahiers Top. et Géom. Diff*. XXI-2, 1980, 161-189.

Sur la notion de diagramme homotopiquement cohérent, Proc. 3$^{\text{éme}}$ Colloque sur les Catégories, Amiens (1980), *Cahiers Top. et Géom. Diff.* XXIII-1, 1982, 93 -112.

The algebraic homotopy limit functor, Preprint 84-12, Univ. Wales, 58 p. (Traduction de "Le foncteur Holim algébrique", Prépub. Amiens, 1982.)

(avec Porter) Functors between shape categories, *J. Pure Appl. Alg*. 27, 1983, 1-13.

(avec Bourn) A general formulation of homotopy limits. *J. Pure Appl. Algebra* 29(2), 1983, 129-141.

Extension de Kan simplicialement cohérente, *Prépub. Amiens* 1986

(avec Porter) Vogt's Theorem on Categories of Homotopy Coherent Diagrams, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc*. 100, 1986, 65-90.

Sur les limites homotopiques de diagrammes homotopiquement cohérents, *Comp. Math* 62, 1987, 367-388.

Homologie de Steenrod-Sitnikov et limite homotopique algèbrique, *Manuscripta Math.* 59, 1987, 35-52.

Sur la cohérence homotopique et les limites homotopiques, Thèse Univ. Paris 7, 1987, 137 pages.

(avec Porter) Maps between homotopy coherent diagrams, *Top. and its Applications* 28, 1988, 255-275.

(avec Porter) Pattern Recognition and Categorical Shape Theory, *Pattern Recognition Letters* 7, 1988, 73-76.

Comparaison de deux catégories d'homotopie de morphismes cohérents, *Cahiers Top. et Géom. Diff. Cat.* XXX, 1989, 257-275.

(avec Porter) Fibrant diagrams, rectifications and a construction of Loday, *J.Pure Appl. Algebra* 67, 1990, 111-124.

(avec Porter) Categorical Aspects of Equivariant Homotopy, *Proc. ECCT, Applied Cat.Structures* 4, 1996, 195-212.

(avec Porter) Homotopy Coherent Category Theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* 349, 1997, 1-54.

From Michael Batanin

Tim Porter just informed me that Jean-Marc Cordier passed away in May 2014. This news makes me very sad. I know from Tin that there will be a memorial meeting for Jean-Mark to-morrow. I'd wish to be here. Please, pass my condolences to Jean-Mark's family members and friends.

His influence on my mathematics and my life and carrier in general is hard to underestimate. I remember my visit to Amiens in spring of 1994 and our conversations with Jean-Mark very vividly. We discussed many things like coherence for simplicial categories, braided monoidal categories, operads and even game theory. Many of the subjects of our conversations have become central for my research for the next 20 years.
Besides it this visit saved my life literally. I would be certainly dead from my cancer if I stayed in Russia.

Sincerely yours,