A l'impression dans *Presses Universitaires de Namur*, Actes du Colloque

Monade, Dyade, Triade, Namur 2013

Modélisation 'catégoricienne' du vivant par émergence de monades multiformes

par Andrée Ehresmann
Université de Picardie Jules Verne
ehres@u-picardie.fr
http://ehres.pagesperso-orange.fr

Résumé. Le but de l'article est de montrer comment l'évolution d'un système vivant résulte de l'émergence de monades dites multiformes, de complexité croissante, et quelles sont les propriétés du système permettant cette émergence. Ceci est fait dans le cadre des Systèmes Évolutifs à Mémoire, un modèle (basé sur la théorie des catégories) pour des systèmes autonomes multi-échelles et multi-temporalités, capables d'adaptation, tels les systèmes biologiques, sociaux ou cognitifs.

Key Words : Monade, Système vivant, Catégorie, Émergence, Principe de Multiplicité, Complexification.

1. **Introduction**

Les *systèmes vivants* que nous voulons étudier sont des systèmes évolutifs, auto-organisés, capables de gérer leurs interactions avec le milieu extérieur et de mémoriser leurs expériences pour une meilleure adaptation. Ils comprennent aussi bien des cellules, des organismes biologiques, que plus largement des systèmes écologiques, sociaux ou culturels. Comme l'ont montré depuis longtemps de nombreux auteurs, ces systèmes sont hiérarchiques, avec des composants de différents niveaux de complexité, que ce soit en Biologie (von Bertalanffy 1973, Jacob, 1970, Monod 1970), en Neurologie (Changeux 1983, Jeannerod 1983, Laborit 1983), en Théorie de l'Évolution (Dobzhanski 1970, Mayr 1976, Teilhard de Chardin 1955), en Éthologie (Lorenz 1973, Tinbergen 1951). Ainsi Jacob (1970) écrit: « Tout objet que considère la Biologie représente un système de systèmes; lui-même élément d'un système d'ordre supérieur, il obéit parfois à des règles qui ne peuvent être déduites de sa propre analyse. »

1.1. *Une hiérarchie de monades*

Étudions le cas d'un organisme biologique. Les composants et les liens entre eux permettant leurs interactions varient au cours du temps. Ils sont répartis en une hiérarchie de composants de plus en plus complexes : atomes, molécules, organites, cellules, tissus et organes, grands systèmes. Un composant C d'un certain niveau a une organisation interne propre, consistant en un pattern P formé de composants interactifs de niveaux inférieurs pouvant varier au cours du temps : pour une molécule il s'agirait de ses atomes et de leurs liaisons dans la molécule ;

pour la cellule de ses organites et leur comportement au sein de la cellule, ou encore de ses molécules et de la manière dont elles interagissent au sein de la cellule. Selon le contexte, la cellule interviendra en tant que composant simple d'un niveau supérieur tel un tissu, auquel cas elle peut être considérée comme une *monade* (sa composition interne est 'oubliée') ; mais elle est 'complexe' comparée à ses organites ou à ses molécules, et de même à chaque niveau.

De manière générale un composant M d'un niveau intermédiaire a une double face (Koestler, 1960, parle de «Janus») : il peut être considéré comme une monade (Koestler utilise le terme «holon») relativement aux niveaux supérieurs, et ainsi devenir un simple composant d'une monade d'un niveau supérieur. Mais il est complexe relativement à ses composants des niveaux inférieurs, eux-mêmes complexes relativement aux composants de niveaux encore inférieurs, d'où une ramification jusqu'aux composants (atomes) du niveau 0. Ainsi M admet une sorte de structure fractale (cf. Le Moigne 1990), dont les composants à chaque étage intermédiaire se ramifient eux-mêmes, mais avec en plus des corrélations entre ces ramifications provenant des contraintes introduites par les liens 'horizontaux' distingués entre ces composants à leur niveau.

Pendant toute son existence, la monade M en tant que telle préserve son identité malgré le renouvellement de ses composants : au bout d'un certain temps, toutes les molécules de la cellule auront été remplacées, mais la monade-cellule va « persévérer dans son être » (Spinoza 1907, Livre III). Ceci est possible en vertu d'une propriété des systèmes biologiques que Edelman (1989) appelle *dégénérescence* : « *Degeneracy, the ability of elements that are structurally different to perform the same function or yield the same output* » (Edelman & Gally, 2001). Cette propriété permet que la cellule admette des décompositions en patterns dont la composition et l'organisation varient au cours du temps tout en conservant le même rôle fonctionnel relativement à la cellule ; on dira que la cellule est une *monade multiforme*.

Le système peut évoluer selon un mode naturel, dans le cadre du maintien de l'homéostasie. La structure globale reste stable bien que des objets soient renouvelés, des réparations effectuées. Mais si l'environnement varie et si les contraintes internes ou externes deviennent trop contraignantes, il peut y avoir une rupture d'équilibre, à quelque niveau que ce soit, et les mécanismes de réparation usuels sont dépassés ; nous parlons alors de *fracture*. Pour la surmonter, il faut une modification plus ou moins profonde de la structure, par création de nouveaux composants et liens complexes, avec émergence de propriétés nouvelles, et suppression de composants devenus inutiles. Ceci sera modélisé par le processus de *complexification*. Par exemple, on pense dans le premier cas au simple renouvellement des macromolécules constituant l'architecture d'un neurone, dans le second cas aux liens synaptiques créés par un apprentissage. La complexification peut correspondre à un enrichissement de la hiérarchie du système par formation de niveaux plus élevés permettant une mémorisation des expériences plus complexes, des mécanismes mis en jeu et de leurs conséquences immédiates ou prévisibles.

Le système a une *mémoire* interne centrale flexible, qui se modifie et se développe au cours du temps pour mémoriser des items de toute nature (objets rencontrés, stimuli, situations, apprentissages, procédures, *etc*.), et ultérieurement les reconnaitre s'ils se présentent à nouveau.

Le système est auto-organisé : sa dynamique est contrôlée de manière interne. Par suite de la trop grande variabilité des différents composants des différents niveaux, il ne peut exister de mécanisme régulateur central. La dynamique est modulée par les interactions plus ou moins compétitives entre des organes de régulation internes (nous les appelons des *co-régulateurs*), qui forment un réseau parallèle horizontalement, aussi bien que verticalement dans la hiérarchie structurelle du système. Chaque co-régulateur a sa propre fonction et opère par étapes à son propre rythme, en utilisant son accès différentiel à la mémoire centrale du système ; à chaque étape les informations partielles qu'il reçoit sur le système forment son *paysage actuel*, qui est analysé pour trouver en réponse une procédure admissible qui sera évaluée à la fin de l'étape. Les procédures des différents co-régulateurs doivent être harmonisées, ce qui peut causer des fractures à certains d'entre eux. Dans cet article nous n'aborderons pas ce problème d'auto-organisation du système pour lequel nous renvoyons à notre livre (Ehresmann & Vanbremeersch 2007 ; dans la suite noté EV).

1.2. *Quel genre de modèle ?*

Comment modéliser une telle hiérarchie de monades multiformes dont chacune préserve son identité tout au long de son existence malgré ses changements internes au cours du temps ? La plupart des modèles proposés en Biologie donnent de bons résultats de nature locale, relatifs à un niveau de complexité et d'énergie particulier, chaque niveau obéissant à des lois spécifiques, par exemple le niveau moléculaire n'aura pas les mêmes lois que le niveau cellulaire ; d'autant que chaque niveau a sa propre temporalité, et ces différences temporelles retentissent intimement sur les mécanismes évolutifs de tout le système. En fait le passage d'un niveau à un niveau supérieur reste obscur car il est caractérisé par des propriétés émergentes. Les interactions de quelques molécules sont bien comprises, mais les interactions d'un très grand nombre de ces molécules à la base du fonctionnement spatial, énergétique, temporel d'une cellule obéissent à de nouvelles règles ; le comportement de la cellule dépend de la façon dont ses molécules sont unies par des liens spécifiques, chacune participant à la monade-cellule de façon 'concertée' avec les autres, sans oublier leur renouvellement progressif indispensable à la survie de la cellule.

Le problème est donc philosophique : l'interprétation ne peut être purement réductionniste, mais elle ne peut se passer de réductionnisme. La cellule doit être étudiée comme un nouvel objet en soi, représentant une monade d'un niveau supérieur. Et il émerge des interactions complexes entre deux telles monades qui ne se réduisent pas à un simple assemblage d'interactions entre leurs molécules, et qui vont permettre la formation de monades encore plus complexes telles un tissu à un niveau supérieur.

Pour progresser dans la résolution de ces problèmes, nous avons développé, avec Jean-Paul Vanbremeersch, la notion de *Système Évolutif à Mémoire* (Ehresmann & Vanbremeersch 1987, 2007). C'est un modèle, basé sur une *théorie des catégories dynamique* (intégrant temps et durées) pour des organismes vivants, auto-organisés, à multiples échelles tant spatiales que temporelles, tels que les systèmes biologiques, cognitifs ou sociaux. Contrairement aux modèles classiques qui sont bien adaptés pour étudier les problèmes locaux, les SEM proposent un modèle intégratif, qui tient compte des différents niveaux de complexité, et couvre à la fois les points de vue locaux, globaux et temporels. Ils décrivent aussi comment le système est auto-organisé, la dynamique résultant de la concurrence / coopération entre un réseau d'agents fonctionnels internes, appelés *co-régulateurs*, dont chacun opère selon sa fonction, à son propre rythme et à son propre niveau de complexité, avec l'aide d'une *mémoire* centrale se développant au cours du temps. Ici nous ne considèrerons pas cette auto-organisation multi-échelles pour laquelle nous renvoyons à EV.

2. **Pourquoi un modèle basé sur la Théorie des Catégories ?**

La Théorie des Catégories, introduite par Eilenberg et Mac Lane (1945) dans les années quarante, a un statut unique, à la frontière entre les mathématiques, la logique et la méta-mathématique. Elle a été introduite en vue de relier constructions algébriques et topologiques. Deux articles importants parus à la fin des années 1950 ont montré qu'elle pouvait jouer un rôle unificateur en mathématiques : (i) un article de Charles Ehresmann (1957) l'utilise pour développer une théorie générale des structures mathématiques et en particulier des structures locales ; (ii) un article de Kan (1958) introduit les foncteurs adjoints et les (co)limites qui unifient un grand nombre de constructions mathématiques. Plus tard, le rôle des catégories en logique a été souligné par plusieurs auteurs : par exemple, dans la théorie des *topos élémentaires* élaborée par Lawvere (1972) et Tierney, et dans la théorie des *esquisses* (C. Ehresmann 1968, Bastiani and Ehresmann 1972).

La théorie des catégories constitue une sorte de structuralisme mathématique, permettant d'unifier les idées sous-jacentes à de nombreux domaines des mathématiques et de classifier les principales opérations du « *working mathematician* » (dans les termes de Mac Lane, 1971). Nous pensons que ces opérations reflètent celles que l'homme fait pour donner un sens à son monde. Plus généralement, en développant les Systèmes Évolutifs à Mémoire, notre idée de base était que l'évolution des systèmes vivants et le fonctionnement de notre cerveau reposent sur un petit nombre d'opérations archétypes, qui sont exactement celles modélisables à l'aide de la Théorie des Catégories : distinction d'objets et de relations entre eux, composition de ces relations ; analyse par décomposition d'objets complexes, et inversement synthèse d'objets complexes par agrégation d'objets élémentaires (opération (co)limite), conduisant à la formation de hiérarchies (processus de complexification) ; optimisation de processus (problèmes universels), classification des objets en classes d'invariance (formation de concepts).

Ces opérations sont aussi à la base du développement de la science, ce qui explique pourquoi la Théorie des Catégories commence à trouver des applications dans d'autres domaines scientifiques : informatique, fondements de la physique, biologie (Rosen dès 1958).

2,1. *Graphes*

Un graphe est formé d'objets et d'arêtes entre eux. Les graphes permettent de représenter des réseaux de toute nature: réseaux cellulaires, réseaux sociaux, Internet, *etc*. Le mot graphe a été utilisé dans de nombreux sens ; en particulier on suppose souvent qu'il y a au plus une arête entre deux objets, auquel cas le graphe peut se ramener à une matrice. Ce ne sera pas le cas ici où nous appelons graphe ce qui est parfois nommé *multi-graphe orienté*.

Nous définissons donc un *graphe* G comme étant la donnée d'un ensemble **O**(G) d'objets A, B, ..., et d'un ensemble **A**(G) d'arêtes orientées entre eux. Il est possible d'avoir plusieurs arêtes de même source A et de même but B, et même des arêtes 'fermées' (la source et le but sont identiques).

Une arête de source A et de but B est souvent représentée par une flèche f: A → B. Van Lier et Lavendhomme (1996) soulignent la « révélation graphique » qu'a constituée l'idée de « considérer que la flèche pouvait inscrire toute transformation adaptée à une situation mathématique définie ». Pour Jedrzejewski (2007) : « La flèche regroupe plusieurs sens. Elle peut être à la fois : la relation d'un objet à un autre, la propriété d'un objet ou l'action d'un objet sur un autre ». Et effectivement selon les auteurs, la flèche f: A → B est interprétée de différentes manières : pour Guitart (2013) qui suit Peirce, elle peut se lire : « du point de vue f, A est un indice de B ou encore f est une différence qui ajoutée à A produit B ». Pour Mazzola (2011) f: A → B est une *perspective sur* B *d'adresse* A : « Intuitivement, on se place sur A et on regarde B », et d'ailleurs il appelle A la queue («tail») de f et B sa tête. Dans les situations concrètes que nous considérons ici, f permet à A d'agir sur B ou de lui transmettre une information ; dans ce cas, f est étiqueté par un délai de propagation et un degré d'activité.

Un *chemin* du graphe G de A à B est une suite d'arêtes consécutives. Ces chemins G forment le *graphe des chemins* de G, noté P(G) : il a les mêmes objets que G mais les arêtes de A vers B sont les chemins de G de A à B. Nous identifions G avec un sous-graphe de P(G) en identifiant une arête au chemin ayant cette arête pour seul élément.

Exemple: Le graphe des neurones à un instant t : ses objets représentent l'état N(t) des neurones N existant à la date t (mesuré par leur activité autour de t). Une arête de N(t) vers N'(t) modélise une synapse f de N à N', étiquetée par son délai de propagation et sa force pour transmettre une activation de N à N' autour de t. La force (négative si la synapse est inhibitrice) varie en fonction de la règle de Hebb (1949) : elle augmente si les activations de N et N' sont corrélées. Le graphe des chemins de ce graphe, que nous appelons *catégorie des neurones en t*, est à la base de notre modèle MENS pour un système neuro-cognitif (cf. EV, Chapitres 9 et 10).

Si G et G 'sont deux graphes, un homomorphisme p de G dans G' associe à chaque objet A de G un objet pA de G', et à chaque arête f: A → B une arête $p(f)$: pA → pB.

.

Les graphes et leurs chemins ne sont pas suffisants pour tenir compte du fait que plusieurs chemins de N vers N' peuvent jouer des rôles fonctionnels équivalents, par exemple différents chemins synaptiques peuvent transmettre en t la même activation de N à N'. La notion de catégorie enrichit celle de graphe d'une composition des chemins permettant de distinguer des chemins 'fonctionnellement équivalents'.

2.2. *Catégories*

Une *catégorie* est un graphe équipé d'une *composition* interne associant à tout chemin

$$(f\colon A \to B,\ g\colon B \to C)$$

une arête fg; $A \to C$ appelée son composé. Une arête est aussi appelée *morphisme* (ou simplement *lien*). La composition satisfait 2 conditions: (i) elle est associative de sorte que tout chemin a un unique composé quelle que soit sa décomposition en facteurs 2 par 2 ; (ii) chaque objet A a un morphisme identité $id_A\colon A \to A$ qui est neutre pour la composition.

Un *foncteur p* d'une catégorie H vers une catégorie H' est un homomorphisme de graphes qui respecte la composition et les identités.

Exemples: (i) Un monoïde est une catégorie avec un seul objet. (ii) À un ensemble ordonné on associe une catégorie ayant au plus un morphisme entre deux objets. (iii) Le graphe des chemins de tout graphe G devient une catégorie lorsque nous définissons le composé de deux chemins par leur convolution ; chaque catégorie est un quotient de la catégorie de ses propres chemins par la relation d'équivalence : deux chemins sont équivalents s'ils ont le même composé. (iii) À toute espèce de structures mathématiques est associée une 'grande' catégorie : catégorie *Set* des ensembles avec les applications entre eux pour morphismes ; catégorie des groupes, des anneaux, des modules, *etc* ; catégorie des espaces topologiques avec pour morphismes les applications continues. Les catégories elles-mêmes sont les objets d'une grande catégorie *Cat* ayant pour morphismes les foncteurs.

En fait le vrai apport des catégories est l'introduction d'une mathématique 'relationnelle' : le *Lemme de Yoneda* montre comment, dans une catégorie, un objet B est caractérisé par l'ensemble des flèches qui y aboutissent, donc, selon Mazzola (cf. plus haut), par l'ensemble des points de vue sur B. Ceci permet de considérer qu'un objet 'est' une monade au sens souligné par Chatelet (1986) : « pour Leibnitz, les monades ne sont pas des points ou des atomes, il les appelle des « points métaphysiques », ce qui est prodigieux. Ce ne sont pas des entités en elles-mêmes, mais elles existent comme des intersections de points de vue et il y a quelque chose de profondément vivant dans la monade. » De cette façon, les morphismes correspondent à des *triades* formées de 2 monades et d'une flèche entre elles, et la composition associe une triade à une dyade de triades successives. C'est le point de vue adopté dans cet article.

2.3. *L'opération colimite*

Un outil catégorique important, introduit par Kan (1958), est la notion de *limite inductive*, avec sa notion duale de limite projective. Ces limites jouent un rôle essentiel dans les systèmes évolutifs à mémoire pour décrire une hiérarchie de monades multiformes et aborder le problème de l'émergence d'une mémoire flexible. Pour simplifier ici nous utiliserons seulement des limites inductives que nous appellerons *colimites.*

Nous avons vu que la cellule ne se réduit pas à ses organites ou à ses molécules, mais forme « un tout qui est plus que la somme de ses parties ». La notion de colimite permettra de modéliser cette situation. L'analogue dans une catégorie H du pattern formé par les organites et leurs liens sera modélisé comme suit : un *pattern* (souvent appelé *diagramme*) P dans H est formé d'une famille d'objets P_i de H et de certains liens distingués entre eux ; plus formellement P est un homomorphisme d'un graphe sP (qui définit la *forme* de P) vers H. Ce pattern en tant que tel n'est pas un objet de H ; pourtant il peut opérer en tant que tel sur un objet N' de H si les P_i agissent simultanément sur N', leurs actions étant corrélées par leurs liens distingués. Ceci est modélisé par la notion d'un *lien collectif* (f_i) de P vers N' (dessiné comme un cône de base P et de sommet N') ; c'est une famille de liens f_i: $P_i \rightarrow$ N' corrélés par les liens distingués x: $P_i \rightarrow P_j$ de P ; en équation : $x f_j = f_i$.

Dans certains cas, le pattern P lui-même sera représenté dans la catégorie H par un objet M de H 'recollant' P, qui actualisera la potentialité des objets P_i à opérer collectivement à l'aide de leurs liens distingués. Lorsqu'un tel objet existe, il est appelé colimite de P. Formellement M est la *colimite de* P (caractérisée à un isomorphisme près) s'il existe un lien collectif de P vers M au travers duquel tout autre lien collectif de P vers n'importe quel objet A se factorise de manière unique ; dans ce cas les liens de M vers A correspondent de façon biunivoque aux liens collectifs du pattern P vers A. Ainsi M apparaît comme un objet complexe, admettant P comme décomposition en éléments plus simples et ayant même rôle fonctionnel que P opérant collectivement.

L'existence de la colimite M impose des contraintes au pattern P ; celles-ci peuvent être mesurées en comparant le «tout» M à la somme S de ses «parties» P_i . Formellement, la *somme* S est la colimite du pattern réduit aux objets P_i (en 'oubliant' les liens distingués entre eux) ; et il existe un lien *comparaison* de S vers M. Celui-ci mesure la différence entre les deux, et donc factorise les nouvelles propriétés qui émergent par recollement de P en M.

3. Le modèle : les Systèmes Évolutifs à Mémoires (ou SEM)

Les SEM (cf. EV) modélisent des organismes vivants ayant une *hiérarchie* enchevêtrée de composants multiformes variant au cours du temps, avec émergence de nouvelles propriétés à chaque niveau de complexité ; ils développent une *Mémoire* robuste mais flexible, et sont *auto-organisés* par les interactions entre un réseau d'agents co-régulateurs dont chacun opère à son propre rythme.

3.1. *Système Évolutif*

Contrairement aux modèles usuels (par exemple Rosen 1986), un SEM ne cherche pas à modéliser la structure invariante d'un système mais à donner une image dynamique des variations de sa structure et de son organisation au cours du temps. Les composants et leurs liens pouvant varier (*e.g.*, des cellules meurent, d'autres se forment, de nouvelles synapses apparaissent), le système ne peut pas être représenté par une unique catégorie ; il sera représenté par une famille $(H_t)_{t\in T}$ de catégories indexée par le temps T, donnant des 'photos' successives du système.

T est une partie de la droite réelle représentant la durée de vie du système. La catégorie H_t , appelée *configuration* en *t*, modélise l'état du système à l'instant *t* : ses objets représentent l'état M(*t*) des composants M existant en *t* et ses morphismes l'état des interactions entre eux en cours à cet instant, qu'elles soient de type structurel (déterminant la forme du système), ou de type fonctionnel (actions ou transferts d'informations). Avec une grande variabilité qualitative dans le niveau de complexité des composants, dans les liens assurant leur interconnexion, dans leur type d'activité spécifique au sein du système. Plus précisément un morphisme de M(*t*) vers M'(*t*) modélise l'état en *t* d'un canal par où des informations ou des actions peuvent être transmises de M à M', étiqueté par son délai de propagation et son degré d'activité en *t.*

Les changements proviennent : des échanges internes entre composants ou externes avec l'environnement, par perte ou acquisition d'informations, d'énergie, de matière ; de la perte ou de la dissociation de certains composants ; de la formation de composants plus complexes. Le changement entre *t* et *t'* est modélisé par un foncteur *transition* d'une sous-catégorie de la catégorie H_t vers la nouvelle configuration $H_{t'}$ en *t'* ; il associe à l'état M(*t*) d'un composant M en *t* son nouvel état M(*t'*) en *t'* si M existe encore en *t'*. Ces transitions vérifient une propriété de transitivité, de sorte que le composant M, vu comme étant la famille de ses états successifs M(*t*) durant son existence, est modélisé par une famille maximale d'objets de différentes configurations reliés par des transitions. On obtient de même les *liens entre composants* via leurs états successifs.

Les catégories configuration H_t et les transitions entre elles forment le système évolutif **H.**

3.2. *La structure hiérarchique*

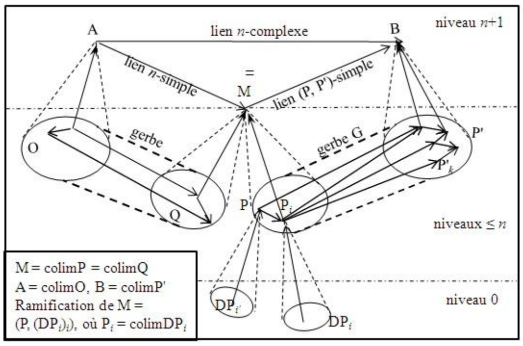
Comment représenter la hiérarchie de monades multiformes décrite dans la section 1 ? Nous avons dit que les composants sont répartis par niveaux de sorte qu'un composant M d'un certain niveau admette au moins une décomposition en un pattern de composants de niveaux inférieurs tel que M et le pattern P aient le même rôle fonctionnel, ce qui sera modélisé en demandant que M soit la colimite de P.

Formellement un SEM est un système évolutif **H** tel que, pour tout *t*, la configuration H_t est une *catégorie hiérarchique* : ses objets sont répartis par niveaux de 'complexité', tout objet de niveau n+1 étant la colimite d'au moins un pattern P de composants interactifs de niveaux inférieurs ou égal à *n.* De plus les transitions préservent le niveau de sorte que tout composant M a un niveau spécifique.

Il s'ensuit qu'un composant M agit comme une monade relativement aux niveaux supérieurs, mais est 'complexe' par rapport aux niveaux inférieurs. Plus précisément, M admet au moins une *ramification* jusqu'au niveau 0, obtenue en prenant une décomposition P de M dont les P_i sont de niveau ≤ *n*, puis une décomposition DP_i de chaque P_i de niveaux inférieurs à celui de P_i, et ainsi de suite jusqu'au niveau 0 (cf. Figure 1). On appelle *ordre de complexité* de M la plus petite longueur d'une de ses ramifications ; cet ordre mesure le nombre d'étapes minimum pour reconstruire M à partir des 'atomes' du niveau 0 par formations successives de colimites (à rapprocher de la complexité de Kolmogorov-Chaitin, 1965).

Parmi les liens de la monade M vers une monade M' recollant un pattern P', nous aurons des *liens* (P, P')-*simples* qui recollent une gerbe de liens entre composants de P et de P', bien corrélés par les liens distingués de P et P' (cf. Figure 1) ; si P et P' sont contenus dans les niveaux ≤ *n*, on parle de *liens n-simples*. Ces liens sont une simple traduction au niveau supérieur de propriétés 'locales' entre composants de P et P'. Nous allons voir qu'il peut y avoir d'autres liens, qui eux émergent au niveau *n*+1.

Figure 1 : Ramification, liens simples et complexes



3.3. *Principe de Multiplicité à la base de la complexité et de la flexibilité*

La dégénérescence des systèmes biologiques au sens de Edelman (cf. Section 1.1) sera formalisée par le

Principe de Multiplicité MP : il existe des *monades* M de niveau *n*+1, dites *multiformes*, qui sont la colimite d'au moins deux patterns P et Q de niveaux ≤ *n* qui ne sont pas connectés par une gerbe de liens entre leurs composants (de sorte que l'identité id_M de M n'est pas (P, Q)-simple).

Ce principe traduit une 'redondance flexible' car l'action de M pourra être médiatisée par n'importe lequel des patterns P ou Q que M recolle, avec possibilité de passage de l'un vers l'autre ; on parlera de *balancement*. La possibilité d'un tel balancement de P à Q donne de la flexibilité à M. En particulier les composants de la monade M peuvent varier au cours du temps sans modifier l'identité de M en soi. Et même M peut être initialement construite pour recoller un pattern P, puis acquérir une autre décomposition Q, et ultérieurement se détacher de P ; c'est par exemple ce qui permet que le système développe une *mémoire* plastique, pour s'adapter aux changements de l'environnement.

Une conséquence de MP est l'existence de *liens n-complexes* de A vers B qui sont le composé de liens *n*-simples recollant des gerbes non-adjacentes, par exemple un lien (O, Q)-simple et un lien (P, P')-simple (cf. Figure 1). De tels liens émergent au niveau $n+1$: ils ne peuvent pas être observés aux niveaux $\leq n$ car ils ne recollent pas de liens entre composants de A et B ; en fait ils traduisent des propriétés globales de ces niveaux qui 'émergent' au niveau supérieur.

L'importance de MP est mise en évidence par le

Théorème (Ehresmann & Vanbremeersch 1996). *MP est nécessaire pour qu'il existe des monades multiformes complexes, c'est-à-dire des composants d'ordre de complexité strictement supérieur à* 1.

En d'autres termes, sans MP toute monade serait obtenue en une seule étape, comme étant la colimite d'un pattern d'atomes. Ainsi MP permet de dépasser un pur réductionnisme.

3.4. *Complexification*

Dans un système vivant, les transitions sont engendrées par itération des 4 changements 'standard' (Thom 1988) : naissance/mort, scission/collision; par exemple, pour une cellule, endocytose, exocytose, scission ou synthèse de macromolécules. Ceci est modélisé par le processus de *complexification.*

Une *procédure* S sur une catégorie H consiste en la donnée: d'un graphe externe 'à absorber'; d'un ensemble d'objets et/ou de liens de la catégorie 'à supprimer', dont un ensemble d'objets colimP colimite de patterns P 'à décomposer' de sorte que P perde sa colimite, d'un ensemble de patterns sans colimite 'à recoller', de sorte qu'ils acquièrent une colimite.

Théorème de complexification (Ehresmann & Vanbremeersch 1987). *Il existe un foncteur partiel de la catégorie donnée* H *vers une catégorie* H', *appelée sa complexification relativement à la procédure* S, *solution du problème universel de construire une catégorie dans laquelle les objectifs de* S *sont atteints.*

Intuitivement, H' est une solution optimale au problème de satisfaire les objectifs de S de la manière la plus 'économique'. La complexification est construite explicitement (pour plus de détails, cf. EV, Chapitre 4) :

(i) Ses objets seront: tous les objets de H qu'on ne demande pas de supprimer, les objets à absorber, et, pour chaque pattern P sans colimite à recoller, un nouvel objet cP qui deviendra sa colimite ; cP émergera au niveau supérieur par intégration du pattern et prendra une identité propre.

(i) Les liens sont construits par récurrence. On considère d'abord des liens simples (en particulier les liens de la catégorie donnée non supprimés), qui recollent des gerbes de liens de H, puis des liens complexes obtenus par composition de liens simples recollant des gerbes non adjacentes. Ceci introduit de nouvelles gerbes à recoller, de sorte que la construction des liens doit être itérée. Remarquons que les liens complexes modélisent des processus 'non-linéaires' émergeant dans la complexification.

3.5. *Développement de la mémoire. Théorème d'émergence*

Un système vivant a une mémoire à long terme qui peut se développer au cours du temps à partir d'une mémoire innée. Dans un SEM elle est modélisée par un sous-système évolutif, encore appelé *Mémoire*. Son développement résulte d'une suite de complexifications par formation de monades d'ordres croissants mémorisant des items variés (stimuli externes ou internes, percepts, mouvements, procédures, *etc*). Comme toute monade multiforme, une monade dans la mémoire acquiert une identité propre et, si une situation analogue se présente, elle pourra être rappelée selon le contexte par l'une ou l'autre de ses différentes ramifications, avec possibilité de balancement entre elles. Ainsi une des conséquences de MP est que la mémoire est à la fois robuste et flexible.

Le théorème suivant montre comment, au cours du temps, il peut se former des monades multiformes de plus en plus complexes, en particulier dans la mémoire, sous l'effet de transitions successives correspondant à des complexifications.

Théorème d'Émergence. *MP est préservé par complexification et il permet l'émergence de monades d'ordre de complexité croissant par complexifications successives.*

Nous n'aborderons pas ici le problème de l'auto-organisation d'un SEM qui détermine le choix des procédures utilisées dans les complexifications successives. Disons seulement que ce choix se fait internement sous l'effet des interactions éventuellement conflictuelles entre un réseau de sous-systèmes évolutifs fonctionnels, les co-régulateurs, qui opérènt avec l'aide de la mémoire (pour plus de détails, cf. EV),

Conclusion

Les SEM donnent un modèle mathématique, basé sur une théorie des catégories 'dynamique', des systèmes vivants ayant une hiérarchie de monades multiformes variant au cours du temps. Le tableau suivant compare les opérations mentales intervenant dans la description du vivant, leur traduction en termes de monades, et les outils catégoriques les modélisant dans les SEM.

Opérations Mentales	**Monadologie**	**Outils Catégoriques**
Distinguer objets / relations Composer des relations	Monade, triade Dyades de triades	Multi-graphe (orienté) Catégorie
Mesurer le changement au cours du temps	États successifs d'une monade ou d'une triade	Foncteur transition Système Évolutif
Synthèse d'objets complexes. Hiérarchies	Formation de monades d'ordre croissant	Colimite Complexification. SEM
Redondance flexible Propriétés émergentes	Monades multiformes Mémoire flexible	Principe de Multiplicité Liens complexes

Dans cet article, nous avons mis en évidence une propriété essentielle des systèmes vivants, à savoir l'existence de monades multiformes (Principe de Multiplicité MP), à la base de la robustesse et de la flexibilité du système et du développement d'une mémoire à long terme assez flexible pour s'adapter aux changements de l'environnement. Introduisant le processus de complexification, nous avons montré comment l'évolution du système résulte d'une suite de telles complexifications qui, grâce à MP, permet l'émergence de monades multiformes d'ordre de complexité croissant au cours du temps. En résumé :
L'évolution du vivant résulte de l'émergence de monades multiformes d'ordre de complexité croissant ; les Systèmes Évolutifs à Mémoire permettent de la modéliser.

Références

Bastiani(-Ehresmann A. and Ehresmann C., 1972, Categories of sketched structures, *Cahiers Top. et Géom. Dif.* XIII-2, 105-214.
Bertalanffy (von) L., 1973, *General System Theory*, Harmondsworth, Penguin.
Changeux J.-P., 1983, *L'homme neuronal*, Fayard, Paris.
Chatelet G., 1986, L'enchantement du Virtuel, *Chimères* 1-19. Online : www.revue-chimeres.fr/drupal_chimeres
Dobzhansky T., 1970, *Genetics of the evolutionary process*, Columbia University Press, N.Y.
Edelman, G.M., 1989, *The remembered Present*, Basic Books, New York.
Edelman G.M. and Gally, J.A., 2001, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 98, 13763-13768.
Ehresmann A.C. and Vanbremeersch J.-P., 1987, Hierarchical Evolutive Systems: A mathematical model for complex systems, *Bull. of Math. Bio.* 49 (1),
Ehresmann A.C. and Vanbremeersch J.-P., 1996, Multiplicity Principle and emergence in MES, *Journal of Systems Analysis, Modelling, Simulation* 26, 81-117.
Ehresmann A.C. and Vanbremeersch J.-P., 2007, *Memory Evolutive Systems: Hierarchy, Emergence*, Cognition, Elsevier.
Ehresmann C. 1957, Gattungen von Lokalen Strukturen, *Jahres. d. Deutschen Math.* 60, 2, 49-77.
Ehresmann C., 1965, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris.
Ehresmann C., 1968, Esquisses et type des structures algébriques, *Bul. Inst. Poli. Iasi* XIV, 1-14.
Eilenberg S. and Mac Lane S., 1945, General theory of natural equivalences, *Trans. Am. Math. Soc.* 58, 231-294.
Guitart R., 2013, Rôle de la ternarité dans la modélisation qualitative catégoricienne (dans ce volume).
Hebb, D. O., 1949, *The organization of behaviour*, Wiley, New York.
Jacob F., 1970, *La logique du vivant*, Gallimard, Paris.
Jeannerod M., 1983, *Le cerveau-machine*, Fayard, Paris.
Jedrzejewski F., 2007, Diagrammes et catégories, Thèse Université Paris 7-Diderot.
Kan D. M., 1958, Adjoint Functors, *Trans. Am. Math. Soc.* 89, 294-329.
Koestler A., 1960, *Le cri d'Archimède*, Calmann-Lévy, Paris.
Kolmogorov A.N., 1965, Three Approaches to the Quantitative Definition of Information, *Problems of Information and Transmission*, 1(1), 1-7.
Laborit H., 1983, *La Colombe Assassinée*, Grasset, Paris.

Lawvere F.W., 1972, Introduction: Toposes, Algebraic Geometry and Logic, *Lecture Notes in Math.* 274, Springer, 1-12.
Lier (van) H. (avec Lavendhomme R.), 1996, Mathématisation de la flèche, Online : http://www.anthropogenie.com/anthropogenie_locale/phylogenese/mathematisation.htm
Le Moigne J.-L., 1990, *La modélisation des systèmes complexes*, Dunod, Paris.
Lorenz K., 1973, *L'envers du miroir,* Champs Flammarion, Paris.
Mac Lane S., 1971, *Categories for the working mathematician*, Springer.
Mayr E., 1976, *Evolution and the diversity of life, Essays*, Belknap Press of Harvard University, Cambridge.
Mazzola G., 2011, *Musical Creativity*, Springer Verlag.
Monod J., 1970, *Le hasard et la nécessité*, Éditions du Seuil, Paris.
Rosen R., 1958, A relational theory of biological systems, *Bull. Math. Biophys.* 20, 317-341; and 1959, *Bull. Math. Biophys.* 21, 109-128.
Rosen R., 1986, *Theoretical Biology and complexity*, Academic Press.
Spinoza B, 1907, *Ethique*, Traduction de Boulainvilliers, Paris, Armand Colin.
Teilhard de Chardin P., 1955, *Le phénomène humain,* Éditions du Seuil, Paris.
Thom R., 1988, *Esquisse d'une Sémiophysique*, InterÉditions, Paris.
Tinbergen N, 1951, *The study of instinct*, Clarendon Press, Oxford.