Le Système Evolutif des travaux de Christian Lair

Andrée C. EHRESMANN

Université de Picardie Jules Verne, LAMFA
ehres@u-picardie.fr
https://ehres.pagesperso-orange.fr
https://vbm-ehr.pagesperso-orange.fr

COURTE BIOGRAPHIE

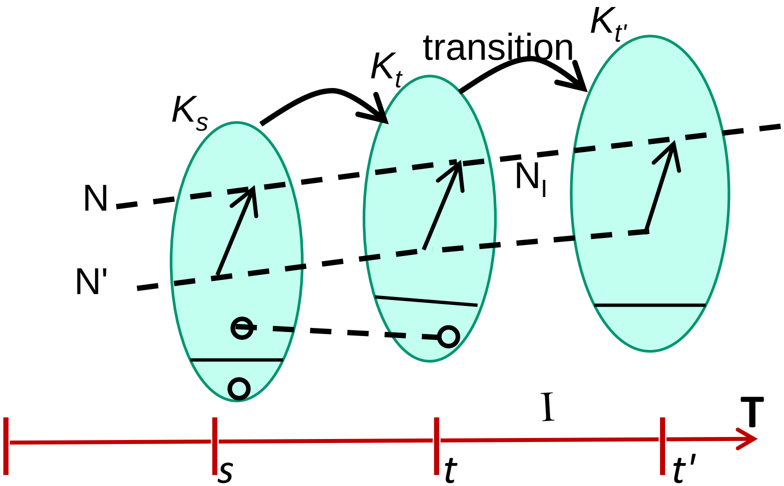
Christian Lair a soutenu sa thèse de Doctorat 3^{e} cycle à l'Université Paris 7, en Juin 1970.
Il a obtenu le Doctorat d'Etat en Juin 1977 (dans l'équipe TAC) à l'Université de Picardie (aujourd'hui Université de Picardie Jules Verne), avec une thèse, constituée d'une série d'articles. intitulée :

"*L'esquissabilité des structures algébriques*"

Toute sa carrière d'enseignant-chercheur, de 1969 à 2010, s'est déroulée en tant que Maître de Conférences à l'Université Paris 7-(Denis Diderot).
Il a dirigé les thèses de Claude Henry (1983), François Mouen (1984), André Silga (1986), Monique Mathieu (1991), Florence Cury (1997, thèse soutenue à titre posthume) et co-dirigé celle d'Ageron (1991). Plus récemment il a activement collaboré aux thèses de Jean-Pierre Laffineur (2018) et Alain Molinier (2019) .n ….

Il a été l'un des fondateurs, puis co-Directeur de la Revue mathématique *Diagrammes* (sur le site de NUMDAM) dans laquelle il a publié la majorité de ses articles à partir de 1979..

SYSTÈME EVOLUTIF (SE)



Un **Système Evolutif K** consiste en :

(i) un intervalle T de $\mathbf{R}_+$;

(ii) Pour $t \in$ T, une catégorie K_t

(iii) Pour $t < t'$, un foncteur $\mathbf{K}(t,t')$ d'une sous-categorie de K_t vers $K_{t'}$,

Ces données définissant un foncteur

K: T → *ParCat.*

[Ehresmann & Vanbremeersch, 1987

Composant N de **K** = famille maximale d'objets N_r de K_t reliés par des transitions. Les liens entre composants sont définis de même.

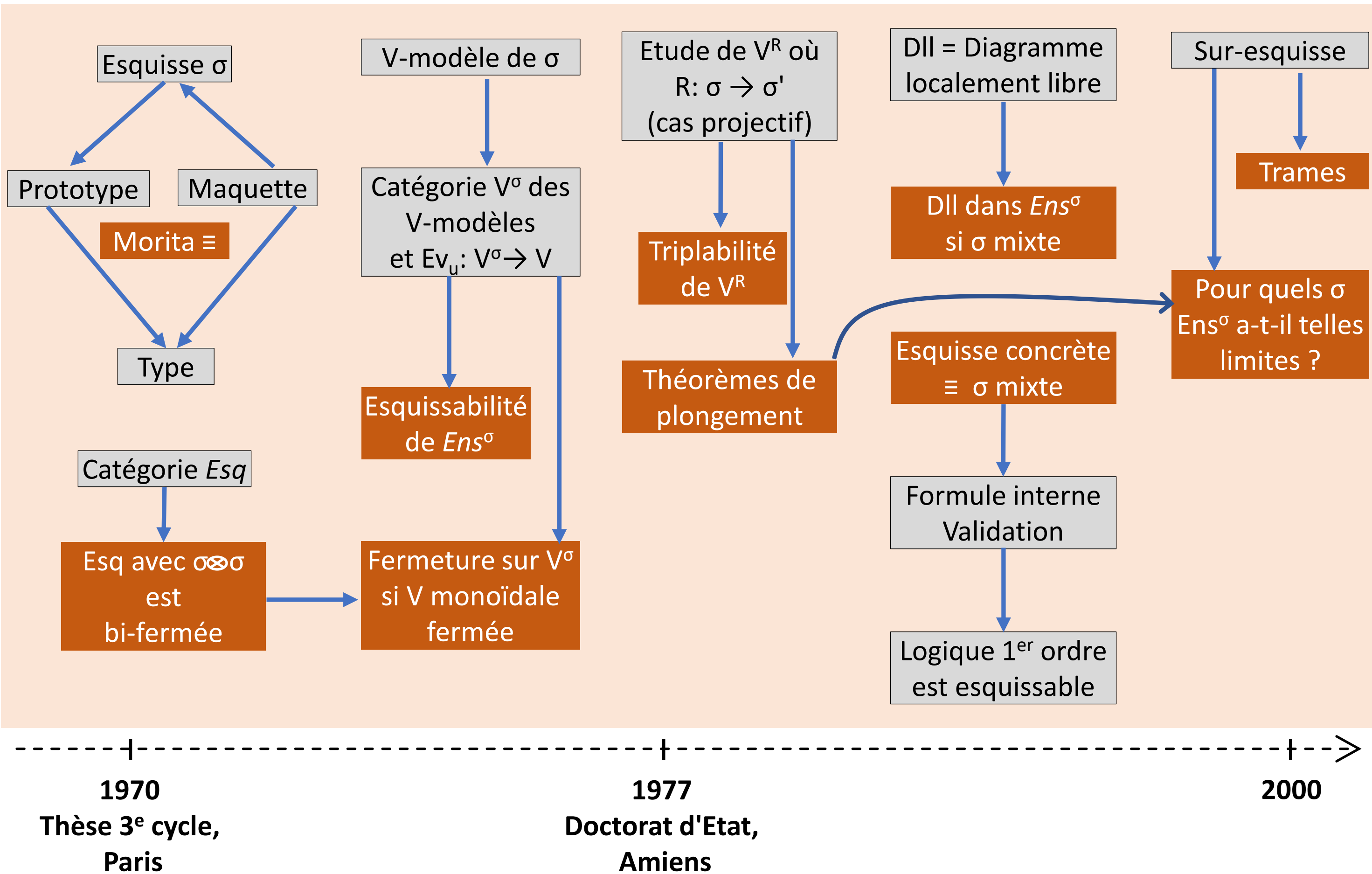
Pour I =]t, t'[, soit K_I la categorie ayant pour objets N_I les restrictions à I des composants N dont le support contient I ; les morphismes sont définis de même à partir des liens.

Théorème. *Les catégories* K_I *forment un faisceau de catégories sur* T *tel que*

(A) *Pour tout* t'' ∊ I *le foncteur de* K_I *vers la fibre* $K_{t''}$ *est injectif*.

On a une bijection entre les SE et les faisceaux satisfaisant (A).

SE de LAIR : THÉORIE DES ESQUISSES ET DE LEURS MODÈLES



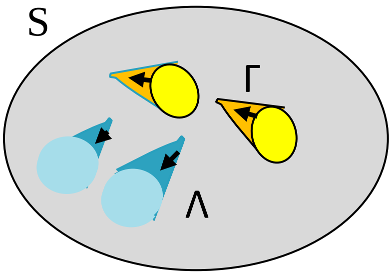
Les cases oranges indiquent les principaux résultats.

GRAPHES MULTIPLICATIFS OU CATEGORIES

Suivant la définition initiale des esquisses (Ehresmann, 1966), une esquisse est définie sur un *graphe multipplicatif* et non sur une *catégorie*.
Dans la plupart de ses articles, C. Lair fait de même, et il développe toute une théorie des graphes multiplicatifs, qu'il appellera plus tard *graphe compositif* (DIA 1987) puis *graphe à composition* (DIA 2008 avec Henry)
Toutefois dans certains textes il utilise une catégorie "pour ne pas alourdir le présent exposé théorique" (DIA 1980). C'est aussi ce que je ferai ici.

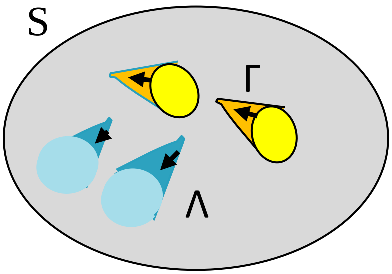
Toujours en vue de simplification, je négligerai les notions de 'taille' ; ceci est d'autant plus facile si on se place dans une théorie des univers (comme Lair le fait souvent.).

ESQUISSES ET LEURS MODELES



Une **esquisse** σ = (S, Λ, Γ) consiste en : une (petite) catégorie S, un ensemble Λ de cônes (projectifs) dans S et un ensemble Γ de co-cônes (= cônes inductifs) dans S. L'esquisse est *projective* si Γ = Ø et *inductive* si Λ = Ø.

ESQUISSES ET LEURS MODELES



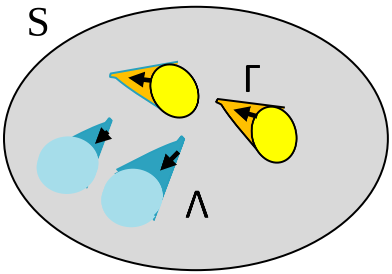
Une **esquisse** σ = (S, Λ, Γ) consiste en : une (petite) catégorie S, un ensemble Λ de cônes (projectifs) dans S et un ensemble Γ de co-cônes (= cônes inductifs) dans S. L'esquisse est *projective* si Γ = Ø et *inductive* si Λ = Ø.

Notons *Esq* la catégorie des (morphismes entre petites) esquisses. Un **morphisme** R: σ → σ' est la donnée d'un foncteur R: S→ S' tel que :

R(γ) ϵ Γ' pour tout γ ϵ Γ et R(λ) ϵ Λ' pour λ ϵ Λ.

Esq admet pour sous-catégorie pleine la catégorie des esquisses projectives (resp. inductives).

ESQUISSES ET LEURS MODELES



Une **esquisse** σ = (S, Λ, Γ) consiste en : une (petite) catégorie S, un ensemble Λ de cônes (projectifs) dans S et un ensemble Γ de co-cônes (= cônes inductifs) dans S. L'esquisse est *projective* si Γ = Ø et *inductive* si Λ = Ø.

Notons *Esq* la catégorie des (morphismes entre petites) esquisses.
Un **morphisme** R: σ → σ' est la donnée d'un foncteur R: S→ S' tel que :

R(γ) ϵ Γ' pour tout γ ϵ Γ et R(λ) ϵ Λ' pour λ ϵ Λ.

Esq admet pour sous-catégorie pleine la catégorie des esquisses projectives (resp. inductives).

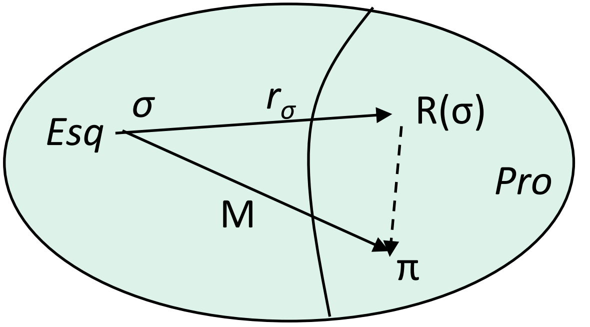
Un **modèle** *(ou* **réalisation)** M de *σ* dans une catégorie V est un foncteur M: S ⟶ V transformant les co-cônes de Γ en cônes-colimite et les cônes de Λ en cônes-limite. La catégorie V^{σ} des modèles de *σ* dans V s'identifie à une sous-catégorie de la catégorie V^{S} des foncteurs de S dans V**.**

ESQUISSES MORITA EQUIVALENTES

On dit que 2 esquisses sont **Morita équivalentes** si leurs catégories de modèles dans *Ens* sont équivalentes. Donnons des exemples.

I. Prototype d'une esquisse.

Un **prototype** est une esquisse dont les cônes sont des cônes-limite et ses co-cônes des cônes-colimite. C'est donc une esquisse qui est son propre modèle dans *Ens*. On notera *Pro* la sous-catégorie pleine de *Esq* ayant pour objets les prototypes.

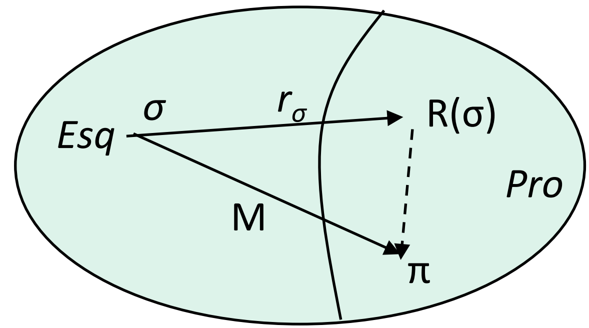


ESQUISSES MORITA EQUIVALENTES

On dit que 2 esquisses sont **Morita équivalentes** si leurs catégories de modèles dans *Ens* sont équivalentes. Donnons des exemples.

I. Prototype d'une esquisse.

Un ***prototype*** est une esquisse qui est son propre modèle dans *Ens* : ses cônes sont des cônes-limite et ses co-cônes des cônes-colimite. C'est donc une esquisse qui est son propre modèle dans *Ens*. On notera *Pro* la sous-catégorie pleine de *Esq* ayant pour objets les prototypes.



Théorème (Bastiani & Ehresmann, 1972)**.** *La sous-catégorie Pro de Esq ayant pour objets les prototypes est une sous-catégorie réflective de Esq. Si le réflecteur de σ est r_σ: σ → R(σ), alors* le foncteur r_σ *est un 'plus petit' modèle.de σ et les catégories de modèles de σ et* R*(σ) dans Ens sont équivalentes.* Si σ *est inductive ou projective, tel est aussi* R(σ).

ESQUISSES MORITA EQUIVALENTES

II. (*L, I*)-Type d'une esquisse

Soit *L* et *I* deux ensembles de petites catégories. Une esquisse σ est une *(L, I)-esquisse* si les bases des λ ϵ Λ (resp. γ ϵ Γ) sont dans *L* (resp. *I*). Ces esquisses sont les objets de la sous-catégorie pleine Esq^{LI} *de Esq*.

Définition. Un ***(L, I)-type*** est une (*L, I)*-esquisse τ = (T, Λ', Γ') telle que chaque functeur vers T de domaine dans *L* (resp. dans I) est base d'au moins un λ ϵ Λ' (resp. γ ϵ Γ'). Par suite T est *L*-complète et *I*-cocomplète.

ESQUISSES MORITA EQUIVALENTES

II. (*L, I*)-Type d'une esquisse

Soit *L* et *I* deux ensembles de catégories. Une esquisse σ est une *(L, I)-esquisse* si les bases des λ ϵ Λ (resp. γ ϵ Γ) sont dans *L* (resp. *I*). Ces esquisses sont les objets de la sous-catégorie pleine Esq^{LI} *de Esq*.

Définition. Un ***(L, I)-type*** est une (*L, I)*-esquisse τ = (T, Λ', Γ') telle que chaque functeur vers T de domaine dans *L* (resp. dans I) est base d'au moins un λ ϵ Λ' (resp. γ ϵ Γ'). Par suite T est *L*-complète et *I*-cocomplète.

Théorème (1972)**.** *A chaque (L, I)-esquisse σ est associé un morphisme t(σ): σ → τ(σ) de* Esq^{LI}*, where τ(σ) est un (L, I)-type, défini à une équivalence près. Ce type est construit par récurrence (transfinie). Les catégories de modèles de σ et de τ(σ) sont équivalences, donc σ et τ(σ) sont Morita-équivalentes.*

ESQUISSES MORITA EQUIVALENTES

II. (*L, I*)-Type d'une esquisse

Soit *L* et *I* deux ensembles de catégories. Une esquisse σ est une *(L, I)-esquisse* si les bases des λ ϵ Λ (resp. γ ϵ Γ) sont dans *L* (resp. *I*). Ces esquisses sont les objets de la sous-catégorie pleine Esq^{LI} *de Esq*.

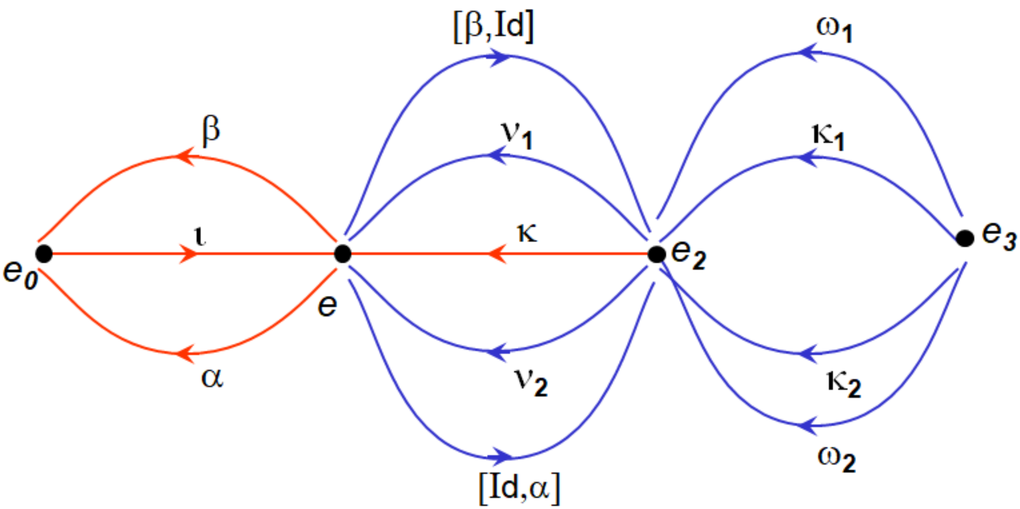
Définition. Un ***(L, I)-type*** est une (*L, I)*-esquisse τ = (T, Λ', Γ') telle que chaque functeur vers T de domaine dans *L* (resp. dans I) est base d'au moins un λ ϵ Λ' (resp. γ ϵ Γ'). Par suite T est *L*-complète et *I*-cocomplète.

Théorème (1972)**.** *A chaque (L, I)-esquisse σ est associé un morphisme t(σ): σ → τ(σ) de* Esq^{LI}*, where τ(σ) est un (L, I)-type, défini à une équivalence près. Ce type est construit par récurrence (transfinie). Les catégories de modèles de σ et de τ(σ) sont équivalences, donc σ.et τ(σ) sont Morita-équivalentes.*

III. Esquisses "minimales". Maquettes

Une *Maquette* est une esquisse μ qui admet une *idée,* i.e. un sous-graphe qui l'engendre par composition et (co)limites). Ex. idée d'une catégorie. Lair montre comment alors construire un système de générateurs d'un (*L, I)*-type de μ à partir de l'idée de μ.

L'ESQUISSE DE CATEGORIE σ_{Cat}



$$\begin{tikzcd} e & e_2 \arrow[l, "\nu_1"'] \arrow[d, "\nu_2"] \\ e_0 \arrow[from=u, "\beta"'] & e \arrow[l, "\alpha"] \arrow[ul, phantom, "\text{P.B.}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_2 \arrow[d, "\nu_2"'] & e_3 \arrow[l, "\omega_1"'] \arrow[d, "\omega_2"] \\ e & e_2 \arrow[l, "\nu_1"] \arrow[ul, phantom, "\text{P.B.}"] \end{tikzcd}$$

Axiomes : $\kappa_1 = [\kappa\omega_1, \nu_2\omega_2]$, $\kappa_2 = [\nu_1\omega_1, \kappa\omega_2]$, $\kappa\kappa_1 = \kappa\kappa_2$

Cette esquisse projective est définie sur la néocatégorie dessinée (dont l'idée de catégorie *J* est un sous-graphe) qui engendre la sous-catégorie pleine de Δ^{op} ayant pour objets 0, 1, 2, 3. (où Δ = catégorie simpliciale).
De plus σ_{Cat} a 2 cônes projectifs, indiqués à droite, à transformer en produits fibrés. par un modèle.

PRODUIT TENSORIEL D'ESQUISSES

Définition. Le **produit tensoriel** de 2 esquisses σ_i est l'esquisse *notée* $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ sur le produit $S_1 x S_2$ de leurs supports, dont les (co)cônes sont obtenus, pour tout objet u_i de S_i, par images des (co)cônes de chacune par les morphismes entre esquisses

$$(u_1, -): S_2 \to S_1 x\, S_2 \qquad \text{et} \qquad (-, u_2): S_1 \to S_1 x S_2$$

Ce produit tensoriel est associatif et symétrique, et il s'étend aux morphismes, de sorte qu'il munit *Esq d'une structure de catégorie monoïdale symétrique.* De plus *:*

PRODUIT TENSORIEL D'ESQUISSES

Définition. Le **produit tensoriel** de 2 esquisses σ_i est l'esquisse *notée* $\sigma_1 \otimes \sigma_2$ sur le produit $S_1 x S_2$ de leurs supports, dont les (co)cônes sont obtenus, pour tout objet u_i de S_i,, par images des (co)cônes de chacune par les morphismes entre esquisses

$$(u_1, -): S_2 \to S_1 x\, S_2 \qquad \text{et} \qquad (-, u_2): S_1 \to S_1 x S_2$$

Ce produit tensoriel est associatif et symétrique, et il s'étend aux morphismes, de sorte qu'il munit *Esq d'une structure de catégorie monoïdale symétrique.* De plus *:*

Théorème (Lair, EM 1975). Pour tout σ_2 *le foncteur produit tensoriel* $- \otimes \sigma_2$: *Esq* $\to$ *Esq a un adjoint à droite, d'où une fermeture sur la catégorie Esq qui en fait* une *catégorie monoïdale symétrique bi-fermée.*

Par récurrence, on construit des produits tensoriels d'esquisses d'ordre n conduisnat à l'étude de structures n-uples..

CATEGORIES DE MODELES D'UNE ESQUISSE

Soit $\sigma = (S, \Lambda, \Gamma)$ une *(L, I)*-esquisse et V^σ la catégorie de ses modèles dans une catégorie V. Une catégorie A équivalente à V^σ est dite V-*spécifiable, ou si V = Ens, modelable* (ou *accessible*). Pour toute unité u de S on définit le foncteur u-**évaluation** $Ev_u: V^\sigma \to V$, associant M(u) à $M: \sigma \to V$.

Résultats (CTGD 1971) Supposons V à *I*-colimites et *L*-limites. Alors :

- V^σ admet des *L*-limites et les Ev_u les conservent. Par contre l''existence de *I*-colimites nécessite des conditions de commutations limite/colimites..
- A l'aide d'un Théorème d'Existence d'adjoints (C. Ehresmann) on donne des conditions pour que Ev_u ait un adjoint ou soit triplable. Par exemple .
- *Proposition. Si σ est projective, Λ formé de cônes discrets et si σ a une idée qui est un ordre avec plus petit élément* u , *alors* Ev_u *est triplable*.

CATEGORIES DE MODELES D'UNE ESQUISSE

Soit $\sigma = (S, \Lambda, \Gamma)$ une *(L, I)*-esquisse et V^σ la catégorie de ses modèles dans une catégorie V. Une catégorie A équivalente à V^σ est dite V-*spécifiable, ou si V = Ens, modelable* (ou *accessible*). Pour toute unité u de S on définit le foncteur u-**évaluation** $Ev_u: V^\sigma \to V$, associant M(u) à $M: S \to V$.

Résultats (Lair, 1971) Supposons V à *I*-colimites et *L*-limites. Alors :

- V^σ admet des *L*-limites et les Ev_u les conservent. Par contre l''existence de *I*-colimites nécessite des conditions de commutations limite/colimites..
- A l'aide d'un Théorème d'Existence d'adjoints (C. Ehresmann) on donne des conditions pour que Ev_u ait un adjoint ou soit triplable. Par exemple .
- *Proposition. Si σ est projective et Λ formé de produits et si σ a une idée qui est un ordre avec plus petit élément* u , *alors* Ev_u *est triplable*.
- **Cas où** V = *Ens* : Une catégorie A équivalente à Ens^σ admet une esquisse de support Ens^A et les Ev_u en forment un système générateur.
- Si de plus σ est projective, les Ev_u sont représentables et la sous-catégorie de Ens^A formée des foncteurs représentables suffit pour esquisser A. (Comparer aux résultats de Gabriel & Ulmer).

FERMETURES STANDARD SUR V^σ

Soit $\sigma = (S, \Lambda)$ une esqusse projective, et V^σ la catégorie de ses modèles dans une catégorie V avec 'assez' de (co)limites.

Foltz, Kelly et Lair (1972-1977) utilisent le produit tensoriel d'esquisses pour obtenir des techniques 'standard' de construction de fermetures sur la catégorie $V^{\sigma,}$ lorsque V est une catégorie monoïdale symétrique fermée.. En particulier :

FERMETURES STANDARD SUR V^σ

Soit $\sigma = (S, \Lambda)$ une esqusse projective, et V^σ la catégorie de ses modèles dans une catégorie V avec 'assez' de (co)limites.

Foltz, Kelly et Lair (1972-1977) utilisent le produit tensoriel d'esquisses pour obtenir des techniques 'standard' de construction de fermetures sur la catégorie $V^{\sigma,}$ lorsque V est une catégorie monoïdale symétrique fermée.. En particulier :

Théorème (CTGD 1977)**.** *Pour que* V^σ *admette une structure de catégorie monoïdale fermée. il faut et il suffit qu'il existe sur* V^σ *une co-structure double d'espèce σ, à savoir un* C: $(\sigma \otimes \sigma)^{op} \to V^\sigma$.

Ceci s'étend pour obtenir des conditions supplémentaires d'associativité, symétrie, etc…

Application : *Il ne peut pas y avoir de structure monoïdale fermée symétrique sur la catégorie des groupes.*

FONCTEUR ESQUISSE AVEC ADJOINT OU TRIPLABLE

Soit $R: \sigma \longrightarrow \sigma'$ un morphisme d'esquisses projectives.
Si V est une catégorie avec 'assez' de limites, on définit le *foncteur esquissé* $V^R: V^{\sigma'} \longrightarrow V^{\sigma}$ qui associe à $F: \sigma' \longrightarrow V$ le composé $RP: \sigma \longrightarrow V$..

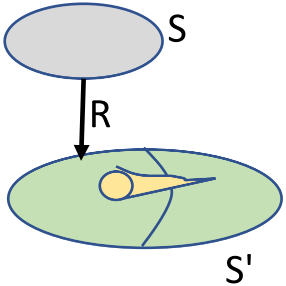
Dans (DIA 1979) Lair donne des conditions 'syntaxiques' portant sur R et sur l'existence et la commutation de (co)limites dans V pour que le foncteur esquissé V^R ait un adjoint, ou soit triplable à équivalence ou à isomorphisme près. Par exemple :

FONCTEUR ESQUISSE AVEC ADJOINT OU TRIPLABLE

Soit R: σ ⟶ σ' un morphisme d'esquisses projectives.
Si V est une catégorie avec 'assez' de limites, on définit le *foncteur esquissé* V^R: $V^{\sigma'} \longrightarrow V^{\sigma}$ qui associe à F': σ' ⟶ V le composé FP: σ ⟶ V..

Dans (DIA, 1979) Lair donne des conditions 'syntaxiques' portant sur R et sur l'existence et la commutation de (co)limites dans V pour que le foncteur esquissé V^R ait un adjoint, ou soit triplable à équivalence ou à isomorphisme près. Par exemple :

Théorème. On dit que R est *basique* si tout objet de S' non dans R(S) est limite d'un cône distingué de base dans R(S) et si la base de tout cône distingué de σ' est dans R(S). *Dans ce cas et si* V^R *a un adjoint il est triplable à équivalence près*.



On en déduit que *le foncteur insertion de la catégorie* Cat^L *(des catégories avec choix de L-limites) vers Cat a un adjoint et est triplable.*

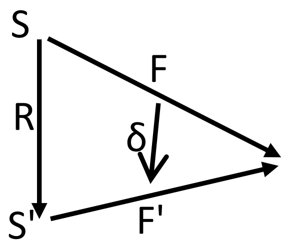
THEOREMES DE PLONGEMENT

Soit R: $\sigma \rightarrow \sigma'$ un morphisme d'esquisses projectives. Dans DIA 1979, Lair donne des condtions 'syntaxiques' (portant sur R) pour qu'un modèle F de σ se *plonge de manière injective* en un modèle F' de σ'. c'est-à-dire qu'il existe un monomorphisme δ: F => F'R. Ces conditions de 'plongement' signifient que R doit 'relever' la connexité de σ' dans σ.

THEOREMES DE PLONGEMENT

Soit R: σ→ σ' un morphisme d'esquisses projectives. Dans DIA 1979, Lair donne des condtions 'syntaxiques' (portant sur R) pour qu'un modèle F de σ se *plonge de manière injective* en un modèle F' de σ', c'est-à-dire qu'il existe un monomorphisme δ: F => F'R. Ces conditions de 'plongement' signifient que R doit 'relever' la connexité de σ' dans σ.

Cas particuliers : 1. *Extension de Kan* : Si R: S → S' est un simple foncteur, on obtient ainsi des conditions pour que l'extension de Kan F' : S' → *Ens* de F: S → *Ens* le long de R soit un R-**prolongement** *de* F, signifiant que la trans-formation naturelle δ: F => F'R soit injective.

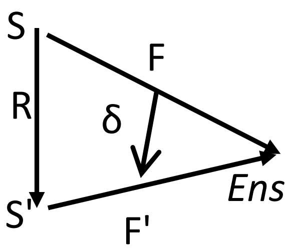


2. *Théorème du faisceau associé* lorsque σ = S et σ' = (S, Λ), le foncteur *Ens*$^{\sigma}$ → *Ens*^{S} a un adjoint fidèle.

THEOREMES DE PLONGEMENT

Soit R: σ⟶ σ' un morphisme d'esquisses projectives. Dans DIA 1979, Lair donne des condtions 'syntaxiques' (portant sur R) pour qu'un modèle F de σ se *plonge de manière injective* en un modèle F' de σ', c'est-à-dire qu'il existe un monomorphisme δ: F => F'R. Ces conditions de 'plongement' signifient que R doit 'relever' la connexité de σ' dans σ.

Cas particuliers : 1. *Extension de Kan* : Si R: S → S' est un simple foncteur, on obtient ainsi des conditions pour que l'extension de Kan F' : S' → *Ens* de F: S → *Ens* le long de R soit un R-**prolongement** *de* F, donc que la transformation naturelle δ: F => F'R soit injective.



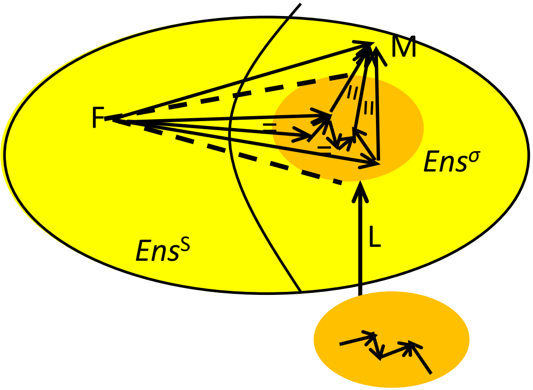
2. *Théorème du faisceau associé* lorsque σ = S et σ' = (S, Λ), le foncteur $Ens^{\sigma} \rightarrow Ens^{S}$ a un adjoint fidèle.

Application : **Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ;** *Si H est un anneau commutatif unitaire contenant Q comme sous-anneau commutatif unitaire, toute H-algèbre de Lie se plonge dans son H-algèbre associative unitaire enveloppante.*

PETIT DIAGRAMME LOCALEMENT LIBRE

Définition. Soit U: *E*' -> *E* un foncteur On dit qu'un diagramme L dans *E*' est un **diagramme localement libre** sur un objet F de *E* s'il est la base d'un cône C de sommet F dans *E* et que, pour tout objet M de *E*', on ait :

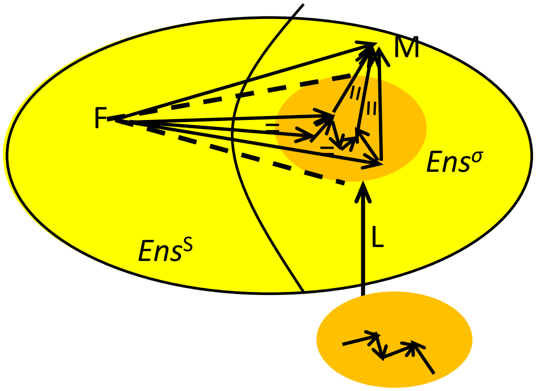
$\mathrm{Hom}_{E}(F, U(M)) = \mathrm{colim}\ (\mathrm{Hom}_{E'}(L(-),M)$-



L

PETIT DIAGRAMME LOCALEMENT LIBRE

Définition. Soit U: *E*' -> *E* un foncteur
On dit qu'un diagramme L dans *E*' est
un **diagramme localement libre** sur un
objet F de *E* s'il est la base d'un cône C
de sommet F dans *E* et que, pour tout
objet M de *E*', on ait :
$\mathrm{Hom}_E(F, U(M)) = \mathrm{colim}\,(\mathrm{Hom}_{E'}(L(-),M)$.



Soit σ = (S, Λ, Γ) une esquisse mixte et U : $Ens^\sigma \to Ens^S$ l'insertion . Si σ était projective, U aurait un adjoint. Mais ici on a seulement :

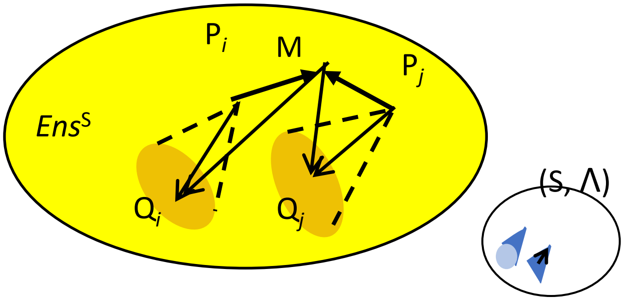
Théorème (Guitart & Lair 1980). *Soit σ est une esquisse petite où les cônes inductifs distingués sont monomorphiques (resp. sont discrets). Alors tout foncteur* F: S → *Ens est associé à un petit diagramme localement libre (resp. discret)* L dans Ens^σ..

Ceci signifie que tout morphisme de F vers un modèle M de σ se factorise via un unique zig-zag de génératrices du cône.

L n'est pas unique. Il généralise le spectre d'un anneau local.

ESQUISSES CONCRETES. CALCUL LOGIQUE

Esquisse concrète $S^* = (S, \Lambda, \mathcal{Q})$ où (S, Λ) = esquisse projective, $\mathcal{Q}$ = famille de cônes projectifs de sommet P_i et base Q_i dans Ens^S qui sont appellés des S**formules.*

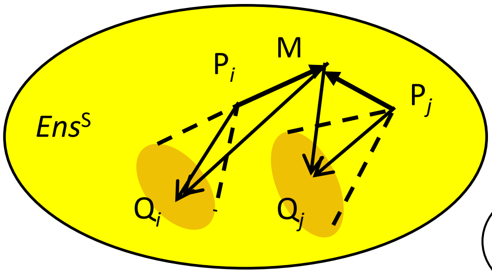


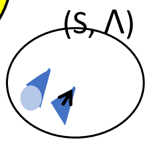
Un **modèle de** S* est un modèle M de (S, Λ) qui valide tous les Q_i au sens suivant :

$$\mathrm{Hom}(P_i, M) = \lim \mathrm{Hom}(Q_i(-), M) \qquad \text{pour tout } Q_i \in \mathcal{Q}.$$

ESQUISSES CONCRETES. CALCUL LOGIQUE

Esquisse concrète S* = (S, Λ, *Q*) où (S, Λ) = esquisse projective, *Q* = famille de cônes projectifs de sommet P_i et base Q_i dans Ens^S, appellés S*-*formules.*





Un **modèle de** S* est un modèle M de (S, Λ) qui valide tous les Q_i au sens suivant :

$$\mathrm{Hom}(P_i, M) = \lim \mathrm{Hom}(Q_i(-), M) \quad \text{pour tout } Q_i \in Q.$$

Théorème. *Une esquisse* σ = (S, Λ, Γ) *détermine une esquisse concrète* S***** = (S, Λ, Υ(Γ)) *dont les* S******-formules sont les images par* Yoneda: $S^{op} \to Ens^S$ *des co-cônes dans* Γ. *Alors* **σ** *et* S* *ont les même modèles, de sorte qu'esquisses concrètes et esquisses déterminent les mêmes catégories 'esquissables' .*

Les formules du 1er ordre peuvent s'exprimer sous forme de S*-formules ===> *Une théorie logique du 1er ordre est esquissable, et on peut: esquisser des programmes et algorithmes.*

LIMITES EXISTANT DANS *Ens*$^{\sigma}$ EN FONCTION DE σ

Dans une série d'articles (DIA 1996) Lair donne des conditions 'synta-xiques' sur une esquisse mixte σ pour que les catégories esquissables équivalentes à Ens$^{\sigma}$ possèdent certaines limites.

Résultats :

- *Existence de limites finies (resp. finies et connexes)* si les co-cônes de σ sont tous à base filtrante (resp. "simplement" filtrante).
- *Existence d'un objet terminal si* les co-cônes sont tous à base non vide et connexe. Lair retrouve ce résutat en 2012 (*Libri Amicorum)* en utilisant ce qu'il appelle *l'éclatement* d'un modèle M: σ → *Ens.*

LIMITES EXISTANT DANS *Ens*$^\sigma$ SELON LA NATURE DE σ

Dans une série d'articles (DIA 1996) Lair donne des conditions 'syntaxiques' sur une esquisse mixte σ pour que les catégories esquissables équivalentes à Ens$^\sigma$ possèdent certaines limites.

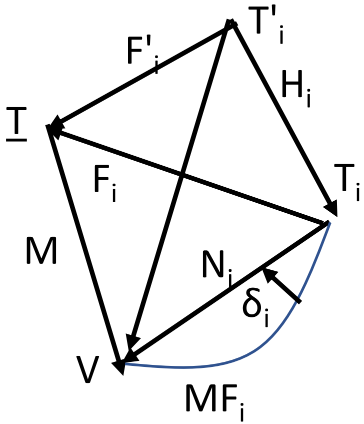
Résultats :

- *Existence de limites finies (resp. finies et connexes)* si les co-cônes de σ sont tous à base filtrante (resp. "simplement" filtrante).
- *Existence d'un objet terminal si* les co-cônes sont tous à base non vide et connexe. Ce résutat est retrouvé en 2012 (*Libri Amicorum)* en utilisant ce que Lair appelle *l'éclatement* d'un modèle M: σ ⟶ *Ens.*
- *Existence de noyaux* si σ est une '*sur-esquisse*' au sens que ses co-cônes sont a priori 'épars' mais peuvent être organisés en "paquets" spécifiques. (Une telle sur-esquisse est un cas particulier de trame).
- Ageron a aussi obtenu des résultats de cet ordre, par exemple pour l'existence de produits fibrés.

ESQUISSES GENERALISEES : TRAMES

La notion de **trame** représente une sorte de 'superposition' d'esquisses. Elle est définie par récurrence à partir d'une *trame d'ordre* 0 qui se réduit à un graphe compositif (ou une catégorie) T. Un morphisme de telles trames (resp. un modèle de T dans V) est défini par un foncteur.

Elément⁺ et élément⁻ de trame d'ordre n+1.



Définition. Un *élément*⁺ $\mathbf{H}_i(T)^+$ de trame **T** d'ordre n+1 consiste en :

- Une catégorie $\underline{T}$ *support* de **T** et 2 trames T_i et T'_j d'ordre ≤ n.
- Un triangle commutatif de foncteurs F_i: $\mathbf{T_i} \rightarrow T$, F'_i: $T'_i \rightarrow \underline{\mathbf{T}}$ et un morphisme de trames H_i $T'_i \longrightarrow T_i$.:

Un *morphisme de* $\mathbf{H}_i(T)^+$ vers une catégorie V consiste en un foncteur M: $\underline{T} \longrightarrow V$ tel que :

- MF'_i est un modèle de T'_i, et MF_i unmodèle de T_i
- pour tour modèle N_i: $T'_i \rightarrow V$ tel que $MF''_i = N_i H_i$ il existe δ_i:: $MF_i \Rightarrow N_i$ vérifiant $\delta_i H_i = \mathrm{Id}$. Donc MF'_i est un *prolongement universel de* MF_i le long de H_i

TRAMES ET LOGIQUE D'ORDRE 2

Un *élément*$^-$ **H**$_i$(T)$^-$ de trame **T** d'ordre n+1 est défini de même en échangeant les sens de H_i et de δ. Un morphisme de tels éléments$^-$ conduit donc à un *prolongement co-universel*.

Trame T d'ordre n+1 : Elle est définie par la donnée de : (i) son support $\underline{T}$ qui est un graphe compositf (ou une catégorie), (ii) une famille d'éléments$^+$ de trames d'ordre n+1 centrés sur $\underline{T}$ et (iii) d'une famille d'éléments$^-$ de trames d'ordre n+1 centrés sur le même $\underline{T}$.
Un **modèle** de la trame **T** dans une catégorie V est un foncteur M: $\underline{T} \rightarrow V$ qui définit un modèle pour chaque élément$^+$ et chaque élément$^-$ de trames associés à **T.**

TRAMES ET LOGIQUE D'ORDRE 2

Un *élément*$^-$ $\mathbf{H}_i(T)^+$ de trame **T** d'ordre n+1 est défini de même en échangeant les sens de H_i et de δ. Un morphisme de tels éléments$^-$ conduit donc à un *prolongement co-universel*.

Trame T d'ordre n+1 : Elle est définie par la donnée de : (i) son support $\underline{T}$ qui est un graphe compositf (ou une catégorie), (ii), d'une famille d'éléments$^+$ de trames d'ordre n+1 centrés sur $\underline{T}$ et (iii) d'une famille d'éléments$^-$ de trames d'ordre n+1 centrés sur le même $\underline{T}$.
Un **modèle** de la trame **T** dans une catégorie V est un foncteur
M: $\underline{T} \rightarrow$ V qui définit un modèle pour chaque élément$^+$ et chaque élément$^-$ de trames associés à **T.**

Les *systèmes de trames* représentent des constructeurs de types universels et/ou co-universels *d'ordre supérieur.* Ainsi, ils permettent d'étudier les catégories où l'on peut faire de la logique d'ordre supérieur (e.g. du λ-calcul du 2ème ordre) telles les catégories cartésiennes fermées.

COMPLEMENTS

Il est impossible de présenter tous les travaux de Lair. Ainsi il a proposé d'autres généralisations des esquisses, telles les patchworks (vite abandonnés) et les 'mosaics' (avec D. Duval).
Et je n'ai pas mentionné les nombreux articles et cours qu'il a écrits, seul ou avec d'autres (e.g. Coppey, Duval, Henry).

Ce SE a été arrêté vers 2000. Ensuite Lair a écrit seul peu d'articles de recherche pure. Il a surtout développé une longue série de *Rapports de Recherche du LACO* avec Dominique Duval, développant des applications des esquisses à la spécification de données en théorie de la programmation informatique, un sujet que je ne connais pas.
A d'autres la charge de continuer le SE.

MERCI

;