Extrait de
"Identification, Optimalisation et Stabilité des Systèmes Automatiques"
(Actes du Congrès d'Automatique Théorique Paris 1965)
DUNOD 1967

SUR LE PROBLÈME GÉNÉRAL D'OPTIMISATION [1]

par Mme A. BASTIANI [2]

« L'état d'esprit » (p. 59, [2]) de la méthode de « programmation dynamique » de Bellman conduit naturellement à formuler le problème d'optimisation en utilisant la théorie des structures et des catégories structurées d'Ehresmann. On est ainsi amené à étudier un modèle mathématique général, que je propose d'appeler système guidable préférentiel. Nous pourrons seulement énoncer ici quelques définitions et théorèmes. En particulier, nous indiquerons comment, à l'aide de la théorie des distributions vectorielles de Schwartz (considérée sous une forme « locale »), on obtient des équations généralisant l'équation de Bellman, mais valables sans hypothèse de différentiabilité trop restrictive. Bien que le théorème de Pontryagin puisse aussi être transposé dans ce cadre, nous n'aborderons pas cette question. Enfin, nous construirons le système guidable associé à un système différentiel dépendant de fonctions de commande, défini sur un espace de dimension infinie. Un texte développé est actuellement prépublié dans [1]. Les résultats de [5] sont supposés connus.

1. Systèmes guidables.

Si E est un ensemble, le symbole $\tau(E)$ désigne une topologie sur E. Si $E' \subset E$, la topologie induite par $\tau(E)$ sur E' est notée $\tau(E)/E'$.

Soit $C^{\cdot}$ une catégorie (voir déf. 11, Chap. I, [5]) ; la classe de ses unités est notée $C_0^{\cdot}$, ses applications source et but α et β respectivement. Supposons que $C^{\cdot}$ soit un graphe multiplicatif d'opérateurs (voir déf. 2, Chap. II, [5]) sur une classe E, relativement à la loi de composition κ', qui est une application d'une partie $C^{\cdot} * E$ de $C \times E$ dans E, le composé $\kappa'(f, z)$ de $(f, z) \in C^{\cdot} * E$ étant noté fz. Soit p la projection canonique $z \to e$, si $(e, z) \in C^{\cdot} * E$ et $e \in C_0^{\cdot}$, de E sur $C_0^{\cdot}$.

---

(1) Travail fait sous contrat, convention n° 63-FR-199 entre la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique et la Faculté des Sciences de Caen.

(2) Docteur ès Sciences Mathématiques.

Supposons de plus que $(C^{\cdot}, \tau(C))$ soit une catégorie topologique (déf. 1 [5']). Nous dirons que $[(C^{\cdot}, \tau(C)), p, (E, \tau(E))]$ est *un noyau d'espèce de structures relativement à* κ' si :

1° Soit $\alpha \vee p$ l'ensemble produit fibré

$$\alpha \vee p = \{ (f, z) \in C \times E \mid \alpha(f) = p(z) \} .$$

Alors $C^{\cdot} * E$ est ouvert dans $\tau(C) \times \tau(E)/\alpha \vee p$; posons

$$\tau(C) * \tau(E) = \tau(C) \times \tau(E)/C^{\cdot} * E .$$

2° p est une application continue de $\tau(E)$ dans $\tau(C)$.

3° κ' est une application continue de $\tau(C) * \tau(E)$ dans $\tau(E)$.

Exemple : Si on suppose de plus $C^{\cdot} * E = \alpha \vee p$, alors

$$[(C^{\cdot}, \tau(C)), p, (E, \tau(E))]$$

est une espèce de structures topologique au sens de [5'].

THÉORÈME : *Soit* $[(C^{\cdot}, \tau(C)), p, (E, \tau(E))]$ *un noyau d'espèce de structures et soit* $(C^{\cdot} * E)^{\cdot}$ *le graphe multiplicatif des hypermorphismes associé à* $[C^{\cdot}, E, \kappa']$ (déf. 6, Chap. II, [5]). *Alors* $\widehat{C}^{\cdot} = ((C^{\cdot} * E)^{\cdot}, \tau(C) * \tau(E))$ *est une catégorie topologique et l'application* $(f, z) \to f$ *de* $C^{\cdot} * E$ *dans* C *définit un foncteur* $\widehat{p}$ *bien fidèle* (déf. 3, Chap. II, [5]) *continu de* $\widehat{C}^{\cdot}$ *vers* $(C^{\cdot}, \tau(C))$.

DÉFINITION : Nous appelons *système guidable* un élément

$$\Sigma = [(\tilde{S}^{\perp}, \tau(\tilde{S})), q, (C^{\cdot}, \tau(C)), p, (E, \tau(E))] ,$$

où $[(C^{\cdot}, \tau(C)), p, (E, \tau(E))]$ est un noyau d'espèce de structures, et où

$$((\tilde{S}^{\perp}, \tau(\tilde{S})), q, (C^{\cdot}, \tau(C)))$$

est un foncteur continu. Nous disons que (ψ, φ) *est une solution de* Σ *au-dessus d'une sous-catégorie* (déf. 12, Chap. I, [5]) $S^{\perp}$ de $\tilde{S}^{\perp}$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1° $((C^{\cdot}, \tau(C)), \psi, (S^{\perp}, \tau(\tilde{S})/S))$ est un foncteur continu section (partielle) de q, i. e. $q\psi(h) = h$, $\forall h \in S$.

2° φ est une application continue de $\tau(\tilde{S})/S_0^{\perp}$ dans $\tau(E)$, section de qp, et, $\forall h \in S$, on a

$$(\psi(h), \varphi(t)) \in C^{\cdot} * E \quad \text{et} \quad \psi(h)\, \varphi(t) = \varphi(\beta(h)) , \quad \text{où} \quad t = \alpha(h) .$$

Soit Σ un système guidable. Soit $\mathcal{S}(\Sigma)$ l'ensemble des solutions de Σ au-dessus de $S^{\perp}$ et soit $\mathcal{S}'(\Sigma)$ l'ensemble des foncteurs continus de $(S^{\perp}, \tau(\tilde{S})/S)$ dans $((C^{\cdot} * E)^{\cdot}, \tau(C) * \tau(E))$ sections de $q.\widehat{p}$.

THÉORÈME : *Si* $(\psi, \varphi) \in \mathcal{S}(\Sigma)$, *l'application*

$$h \to (\psi(h), \varphi(\alpha(h))) \text{ de } S \text{ dans } C^{\cdot} * E$$

définit un élément $\psi * \varphi$ *de* $\mathcal{S}'(\Sigma)$ *et l'application* $\eta : (\psi, \varphi) \to \psi * \varphi$ *est une bijection de* $\mathcal{S}(\Sigma)$ *sur* $\mathcal{S}'(\Sigma)$.

Si X et Y sont des espaces topologiques, nous désignons par $\mathcal{C}_\lambda(Y, X)$ (resp. par $\mathcal{C}_c(Y, X)$) l'espace des applications continues de X dans Y, muni de la quasi-topologie de la convergence locale (déf. 1-5, Chap. II, [1']) (resp. de la topologie de la convergence compacte). Soient $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma)$ et $\mathcal{S}'_\lambda(\Sigma)$ (resp. $\mathcal{S}_c(\Sigma)$ et $\mathcal{S}'_c(\Sigma)$) les espaces quasi-topologiques (resp. topologiques) obtenus en munissant $\mathcal{S}(\Sigma)$ et $\mathcal{S}'(\Sigma)$ de la quasi-topologie (resp. la topologie) induite par

$$\mathcal{C}_\lambda(\tau(C), \tau(\tilde{S})/S) \times \mathcal{C}_\lambda(\tau(E), \tau(\tilde{S})/S_0^\perp)$$

et par

$$\mathcal{C}_\lambda(\tau(C) * \tau(E), \tau(\tilde{S})/S)$$

(resp. par

$$A = \mathcal{C}_c(\tau(C), \tau(\tilde{S})/S) \times \mathcal{C}_c(\tau(E), \tau(\tilde{S})/S_0^\perp)$$

et par

$$\mathcal{C}_c(\tau(C) * \tau(E), \tau(\tilde{S})/S)) .$$

THÉORÈME : *Si* $\tau(E)$ *est séparé,* η *est un quasi-homéomorphisme* [1'] *de* $\mathcal{S}_\lambda(\Sigma)$ *sur* $\mathcal{S}'_\lambda(\Sigma)$. *Si de plus* $\tau(S)$ *est localement compact,* η *est un homéomorphisme de* $\mathcal{S}_c(\Sigma)$ *sur* $\mathcal{S}'_c(\Sigma)$ *et, si* $[C^{\cdot}, S, \kappa']$ *est une espèce de structures,* $\mathcal{S}(\Sigma)$ *est fermé dans* A *(donc complet si* $\tau(C)$ *et* $\tau(E)$ *sont sous-jacents à des structures uniformes complètes).*

2. Systèmes guidables préférentiels et problèmes d'optimisation.

Soit Σ le système guidable considéré ci-dessus. Soit C'' une sous-catégorie de $C^{\cdot}$.

DÉFINITION : Nous appelons *système guidable préférentiel* un triplet $[\Sigma, F, (V^{\cdot}, \tau(V), <)]$ vérifiant les conditions suivantes :

1° $(V^{\cdot}, \tau(V))$ est une catégorie topologique et tout élément de $V^{\cdot}$ est un épimorphisme (déf. 17, Chap. I, [5]) ;
2° $(V^{\cdot}, <)$ est une catégorie p_Ω-dominée (déf. 28, Chap. II, [5]) ;
3° F est un foncteur continu de $((C^{\cdot} * E)^{\cdot}, \tau(C) * \tau(E))$ dans $(V^{\cdot}, \tau(V))$.

Soit $\Pi = [\Sigma, F, (V^{\cdot}, \tau(V), <)]$ un système guidable préférentiel et soit $S^\perp$ une sous-catégorie de $\tilde{S}^\perp$. Si $h \in S$, $z \in E$ et $qp(z) = \alpha(h)$, posons

$$M(h, z) = \{ (f, z) \in C^{\cdot} * E \mid q(f) = h, f \in C' \} .$$

S'il existe $(\bar{f}, z) \in M(h, z)$ tel que

$$F(\bar{f}, z) = \min F(M(h, z)), \text{ i. e. } F(\bar{f}, z) < F(f, z) \qquad \forall (f, z) \in M(h, z)\,,$$

nous posons $M_F(h, z) = F(\bar{f}, z)$.

DÉFINITION : On appelle *solution optimale de Π au-dessus de $S' \subset S$* une solution (ψ, φ) de Σ au-dessus de $S^{\perp}$ telle que, si $h \in S'$ et $t = \alpha(h)$, on ait

$$F(\psi(h), \varphi(t)) = M_F(h, \varphi(t))\,.$$

THÉORÈME (PRINCIPE DE L'OPTIMUM) : *Soit (ψ, φ) une solution optimale de Π au-dessus de $\{ h \} \subset S$ et soit $h'' \in S$. S'il existe $h' \in S$ tel que $h''.h' = h$, et si $M_F(h'', \varphi\, \alpha\,(h''))$ est défini, alors (ψ, φ) est optimale au-dessus de $\{ h'' \}$, lorsque $\psi(h'') \in C'$ et $C'.\psi(h') \subset C'$.*

Supposons que $(\tilde{S}^{\perp}, \tau(\tilde{S}))$ soit le groupoïde topologique $((R \times R)^{\perp}, \tau(R)^2)$, où R est la droite numérique réelle, $\tau(R)$ sa topologie usuelle, et $(R \times R)^{\perp}$ le groupoïde des couples associé à R (ex. 2, Chap. I, [5]) dont la classe des unités est identifiée à R par l'application $(t, t) \to t$. Soit P une partie de E. Pour tout $z \in E$, soit

$$P(z) = \{ (f, z) \in C^{\cdot} * E \mid f \in C', fz \in P \}\,.$$

S'il existe $(\bar{f}, z) \in P(z)$ pour lequel $F(\bar{f}, z) = \min F(P(z))$, nous poserons $m(z) = F(\bar{f}, z)$. Soit $O(P)$ l'ensemble des $z \in E$ tels que $m(z)$ soit défini.

DÉFINITION : On appelle *solution (F, P)-optimale de Π au-dessus de* l'intervalle $I = [\tilde{t}, t_0]$, où $\tilde{t} > t_0$, une solution (ψ, φ) de Π telle que ψ soit défini sur $I \times I$ et que, $\forall t \in I$, on ait

$$\varphi(t) \in O(P) \qquad \text{et} \qquad F(\psi(\tilde{t}, t), \varphi(t)) = m(\varphi(t))\,.$$

Dans la suite, nous nous limitons à l'étude des solutions (F, P)-optimales de Π. On obtient des résultats analogues pour les solutions optimales de Π au-dessus de $S' \subset S$.

Exemples : 1° A un polysystème dynamique au sens de [3] (et *a fortiori* à tout système dynamique) correspond canoniquement un système guidable. Les problèmes d'optimisation étudiés dans [3] reviennent à chercher des solutions optimales ou (F, P)-optimales d'un système guidable préférentiel tel que $(C^{\cdot}, E, \kappa')$ soit une espèce de structures.

2° A une fonction d'accessibilité au sens de [7] on peut faire correspondre une espèce de structures.

3° En utilisant la théorie des catégories différentiables de [5'], on peut définir la notion de système guidable r-différentiable, qui précise celle de système guidable. Pour l'étude de ces systèmes et de leurs solutions r-différentiables optimales, voir [1] (partie II).

4° L'idée d'utiliser des catégories (non structurées) en relation avec l'étude de systèmes industriels a été émise dans [4].

3. Etude des solutions (F, P)-optimales.

Rappels sur les distributions vectorielles ([8] et [1″]) :

Soit G un espace localement convexe complet qui soit un espace (DF) [6]. Si Ω est un ouvert de R, nous désignerons par $\widetilde{\mathfrak{D}}'_G(\Omega)$ l'espace vectoriel topologique dont les éléments sont les distributions vectorielles sur Ω, à valeurs dans G [8]. Soit D'_G l'ensemble réunion des $\widetilde{\mathfrak{D}}'_G(\Omega)$ lorsque Ω varie ; un élément de D'_G est appelé une G-distribution. D'_G est la classe des structures d'une espèce de structures vectorielle topologique complète [1″]. Soit $T \in \widetilde{\mathfrak{D}}'_G(\Omega)$. Nous désignons par T' la G-distribution sur Ω dérivée de T, par T/Ω', la G-distribution induite par T sur un ouvert $\Omega' \subset \Omega$. Si $t \in \Omega$, soit $j_t^\lambda\, T$ le jet local de T en t, c'est-à-dire (déf. [1], partie II, qui est un cas particulier de la définition de jet local dans une espèce de structures locales [5″]) la classe des G-distributions T_1 telles qu'il existe un ouvert Ω' contenant t pour lequel $T/\Omega' = T_1/\Omega'$. Soit $\mathfrak{J}_t^\lambda(D'_G)$ l'ensemble des jets locaux en t des G-distributions.

Soit $\widetilde{\mathfrak{D}}'(\Omega) = \widetilde{\mathfrak{D}}'_R(\Omega)$ et $D' = D'_R$. Nous munirons $\widetilde{\mathfrak{D}}'(\Omega)$ de la structure d'ordre définie p. 29 [8′] ; elle induit sur l'espace des mesures sa structure d'ordre usuelle. Rappelons (th. V, Chap. I, [8′]) que toute distribution positive est une mesure positive. Nous munirons $\mathfrak{J}_t^\lambda(D')$ de l'ordre :
$j_t^\lambda\, T_1 < j_t^\lambda\, T$ si, et seulement si, il existe $\Omega \ni t$ tel que

$$T_1/\Omega < T/\Omega \quad \text{dans} \quad \left(\widetilde{\mathfrak{D}}'(\Omega), <\right).$$

Si g est une application définie presque partout (au sens de la mesure de Lebesgue) sur un ouvert Ω de R et définissant une G-distribution sur Ω (déf. p. 65, [8]), cette G-distribution est notée $[g]$.

Si f est une application différentiable d'un ouvert d'un espace localement convexe E dans G (au sens de [1′]), sa différentielle en x est $Df(x)$.

Hypothèses :

Soit Π un système guidable préférentiel tel que $\widetilde{S}^\perp = (R \times R)^\perp$; nous reprenons les notations du n° 2. Pour simplifier la rédaction (en particulier éviter l'emploi de mesures vectorielles et le passage en « cartes locales ») nous supposons que $\tau(E)$ est la topologie sous-jacente à une structure d'espace affine localement convexe sur E et que $\left(V^\cdot, \tau(V), <\right)$ est le groupe additif de R, muni de sa topologie et de son ordre usuels. Par ailleurs nous supposons vérifiées les conditions suivantes :

1° $(C^{\cdot}, \tau(C))$ est une catégorie topologique localement triviale [5'] telle que le groupoïde $C^{\cdot}_{\gamma}$ des éléments inversibles de $C^{\cdot}$ soit ouvert dans $\tau(C)$ (cette condition est par exemple vérifiée si $(C^{\cdot}, \tau(C))$ est la catégorie topologique sous-jacente à une catégorie différentiable $(C^{\cdot}, A)$, où (C, A) est modelé sur un espace de Banach).

2° Il existe une solution (F, P)-optimale (ψ, φ) de Π au-dessus de $I = [\tilde{t}, t_0]$, où $\tilde{t} > t_0$. Soient $\bar{t} \in [\tilde{t}, t_0]$ et $z = \varphi(\bar{t})$. Soit $d(\bar{s})$ un intervalle ouvert de R contenant $\bar{t}$ et tel que :

$$\psi(t_2, t_1) \in C' \quad \text{si} \quad t_i \in d(\bar{s}) \quad \text{et} \quad t_2 > t_1 ,$$
$$\psi(t, \bar{t}) \in C^{\cdot}_{\gamma} \quad \forall t \in d(\bar{s}) .$$

Nous désignerons par $\bar{s}$ l'application $t \to \psi(t, \bar{t})$ de $d(\bar{s})$ dans $C^{\cdot}_{\gamma}$.

Soit $S(\bar{t})$ l'ensemble des applications s d'un intervalle ouvert $d(s)$ de R dans $C^{\cdot}_{\gamma}$, où $\bar{t} \in d(s) \subset d(\bar{s})$, continues de $\tau(R)/d(s)$ dans $\tau(C)/C^{\cdot}_{\gamma}$, telles que $s(\bar{t}) = z$, que $s(t_2).s(t_1)^{-1} \in C'$ si $t_i \in d(s)$ et $t_2 > t_1$ et que, $\forall t \in d(s)$, on ait

$$q(s(t)) = (t, \bar{t}), \qquad (s(t), z) \in C^{\cdot} * E \qquad \text{et} \qquad s(t)\, z \in O(P) .$$

On a $\bar{s} \in S(\bar{t})$. Si $s \in S(\bar{t})$, soient $F(s, z)$ et $m(s, z)$ les applications

$$t \to F(s(t), z) \qquad \text{et} \qquad t \to m(s(t)\, z)$$

de $d(s)$ dans V. Un élément s de $S(\bar{t})$ est dit *régulier en* $\bar{t}$ si l'application sz : $t \to s(t)\, z$ de $d(s)$ dans E admet presque pour tout $t \in d(s)$ une dérivée $s'\, z(t)$ et si l'application $t \to s'\, z(t)$ définit la E-distribution sur $d(s)$ dérivée de $[sz]$ (i. e. $[s'\, z] = [sz]'$). Si E est de dimension finie, s est régulier en $\bar{t}$ si, et seulement si, sz est absolument continu.

Soit $S''(\bar{t})$ l'ensemble des $s \in S(\bar{t})$ tels que $F(s, z)$ soit à variation bornée ; dans ce cas, $F(s, z)$ admet pour presque tout $t \in d(s)$ une dérivée $F'(s, z)\,(t)$, et l'application $t \to F'(s, z)\,(t)$ définit une distribution.

Résultats :

1° $\forall s \in S(\bar{t})$, l'application $m(s, z) + F(s, z)$ est croissante et l'application $m(\bar{s}, z) + F(\bar{s}, z)$ est constante ; $m(s, z)$ définit une distribution et on a, dans l'espace ordonné $(\mathfrak{J}^{\lambda}_{\bar{t}}(D'), <)$:

$$\min_{s \in S(\bar{t})} \{ j^{\lambda}_{\bar{t}}([m(s, z)]' + [F(s, z)]') \} = [m(\bar{s}, z)]' + [F(\bar{s}, z)]' = 0 .$$

2° Supposons $\bar{s} \in S''(\bar{t})$. Pour tout $s \in S''(\bar{t})$, l'application $m(s, z)$ admet pour presque tout t une dérivée $m'(s, z)\,(t)$ et $m'(s, z)$ définit une distribution sur $d(s)$. Il existe une mesure positive $\mu(s)$, concentrée (Bourbaki) sur un ensemble de mesure nulle, telle que l'on ait

$$\min_{s \in S''(\bar{t})} \{ j_{\bar{t}}^{\lambda}([m'(s, z)] + [F'(s, z)] + \mu(s)) \} = 0 ,$$

le minimum étant atteint pour $s = \bar{s}$. De plus, il existe un ensemble Y de mesure nulle tel que, $\forall t \in d(\bar{s}) - Y$, on ait

$$\min_{s \in S''(\bar{t})} \{ m'(s, z)(t) + F'(s, z)(t) \} = 0 .$$

3° Supposons que E soit un espace de Banach de type dénombrable, que $\bar{s}$ soit régulier en $\bar{t}$ et qu'il existe un voisinage W de $\varphi(d(\bar{s}))$ dans $\tau(E)$ contenu dans $O(P)$ et tel que m soit continu de $\tau(E)/W$ dans $\tau(R)$. Alors il existe un filtre $\mathcal{M}$ d'applications différentiables de W dans R, convergeant vers m dans $\mathcal{C}_c(\tau(R), \tau(E)/W)$, vérifiant les conditions suivantes, où $s \in S(\bar{t})$:

a) Soient $M \in \mathcal{M}$ et $n \in M$; l'application $t \to \langle Dn(sz(t)), s'z(t) \rangle$, si $s'z(t)$ est défini, définit une R-distribution notée $[\langle Dn \circ sz, s'z \rangle]$.

b) Le filtre $\langle D\mathcal{M} \circ sz, s'z \rangle$ sur $\widetilde{\mathfrak{D}}'(d(s))$ engendré par les ensembles

$$\{ [\langle Dn \circ sz, s'z \rangle] \mid n \in M \} ,$$

lorsque M décrit $\mathcal{M}$, converge dans $\widetilde{\mathfrak{D}}'(d(s))$ vers $[m(s, z)]'$.

c) Soit $S^r(\bar{t})$ l'ensemble des $s \in S(\bar{t})$ réguliers en $\bar{t}$ et tels que $sz(d(s)) \subset W$. On a (« *Equation de Bellman généralisée* ») :

$$\min_{s \in S^r(\bar{t})} \{ j_{\bar{t}}^{\lambda}(\lim \langle D\mathcal{M} \circ sz, s'z \rangle + [F(s, z)]') \} = 0 ,$$

le minimum étant atteint pour $s = \bar{s}$.

4° Si E est de dimension finie, on peut remplacer dans 3 le filtre $\mathcal{M}$ par une suite (m_i) d'applications différentiables convergeant vers m dans $\mathcal{C}_c(\tau(R), \tau(E)/W)$.

5° Si m est différentiable sur W, on obtient (« *Equation de Bellman* »)

$$\min_{s \in S^r(\bar{t})} \{ [\langle Dm \circ sz, s'z \rangle] + [F(s, z)]' \} = 0 ,$$

les autres hypothèses étant celles de 3.

La démonstration de ces résultats (en particulier de 3) repose sur la considération des distributions comme des distructures particulières (voir [1″] et [1‴]).

4. Application aux systèmes différentiels dépendant de commandes.

Soit K un espace topologique. Si I est un intervalle fermé (non orienté) de R, soit $M(K, I)$ l'ensemble des applications mesurables de I dans K et soit $\dot{M}(K, I)$ l'ensemble quotient de $M(K, I)$ par la relation d'équivalence ρ :

$U \sim U'$ si, et seulement si, $U(t) = U'(t)$ pour presque tout t.

Si $U \in M(K, I)$, soit $\dot{U} = U \bmod \rho$ et $d(\dot{U}) = I$. Si I a un seul élément t, nous posons $\dot{M}(K, I) = \{0\}$.

Soit $\overline{C}'$ la classe des triplets $(t', \dot{U}, t)$ tels que $U \in M(K, I)$, où I est l'intervalle fermé d'extrémités $t \geqslant t'$; un triplet $(t, 0, t)$ est identifié avec t. Soit $\overline{C}'^{\bullet}$ la catégorie dont la loi de composition est :

$$(t'_1, \dot{U}_1, t_1) \cdot (t', \dot{U}, t) = (t'_1, \dot{U}'', t)$$

si, et seulement si, $t' = t_1$, où

$$U''(t'') = U(t'') \quad \text{si} \quad t'' \in d(\dot{U}) \quad \text{et} \quad U''(t'') = U_1(t'') \quad \text{si} \quad t'' \in d(\dot{U}_1) - \{t'\}.$$

Soit $\overline{C}^{\bullet}$ le groupoïde projection (th. 9, Chap. III, [5]) de $\overline{C}'^{\bullet}$. La catégorie $\overline{C}'^{\bullet}$ est identifiée à une sous-catégorie de $\overline{C}^{\bullet}$. On a

$$\overline{C}^{\bullet}_0 = R, \alpha(t', \dot{U}, t) = t, \beta(t', \dot{U}, t) = t'$$

et on identifie $(t', \dot{U}, t)^{-1}$ avec $(t, \dot{U}, t')$.

Soit $\tau(\overline{C}')$ la topologie « de faisceau » engendrée par les ensembles

$$\gamma(t', \dot{U}, t) = \{ (t'_1, \dot{U}_1, t_1) \in \overline{C}' \mid d(\dot{U}_1) \subset d(U), \dot{U}_1 = \dot{U}/d(\dot{U}_1) \},$$

lorsque $(t', \dot{U}, t) \in \overline{C}'$. Alors $(\overline{C}'^{\bullet}, \tau(\overline{C}'))$ est une catégorie topologique.

PROPOSITION : *Il existe un groupoïde topologique localement trivial $(\overline{C}^{\bullet}, \tau(\overline{C}))$ projection de $(\overline{C}'^{\bullet}, \tau(\overline{C}'))$, admettant $(\overline{C}'^{\bullet}, \tau(\overline{C}'))$ pour sous-catégorie topologique.*

Nous désignerons par $C^{\bullet}$ un sous-groupoïde de $\overline{C}^{\bullet}$ contenant $\overline{C}^{\bullet}_0$, ouvert pour $\tau(\overline{C})$ et tel que $(t', \dot{U}, t) \in C' = C \cap \overline{C}'$ entraîne

$$(t'_1, \dot{U}/I, t_1) \in C' \qquad \text{si} \qquad t_1 \in d(\dot{U}) \text{ et } t'_1 \in d(\dot{U}).$$

Alors $(C^{\bullet}, \tau(C))$, où $\tau(C) = \tau(\overline{C})/C$, est un groupoïde topologique localement trivial. Se donner $C^{\bullet}$ revient à se donner un ensemble $\mathcal{K}$ d'applications mesurables d'un intervalle de R dans K, vérifiant les conditions :

1° Si $U \in \mathcal{K}$, on a $\dot{U} \subset \mathcal{K}$ et $U/I \in \mathcal{K}$ pour tout $I \subset d(\dot{U})$;

2° $$\cup \{ d(\dot{U}) \mid U \in \mathcal{K} \} = R ;$$

3° Si $U_i \in \mathcal{K}$ et si $d(\dot{U}_i)$ a t_i et t'_i pour extrémités $\forall i \leqslant n$, où

$$t_{i+1} = t'_i > t_i \qquad \forall i < n,$$

il existe $U \in \mathcal{K}$ tel que

$$t_1 \in d(\dot{U}),\ t_n \in d(\dot{U}) \text{ et } U_i = U/d(\dot{U}_i) \ \big(\text{on a } \mathcal{K} = \{\, U \mid (t', \dot{U}, t) \in C' \,\}\big).$$

Soit q le foncteur continu de $(C^{\cdot}, \tau(C))$ dans $((R \times R)_{+}, \tau(R)^2) = \widetilde{S}$ engendré par $(t', U, t) \to (t', t)$.

Soit E' un espace affine localement convexe, $E = (R \times E')$ et f une application continue d'un ouvert $d(f)$ de $E' \times K$ dans E'.

DÉFINITION : Soit $U \in \mathcal{K}$ et $I = d(\dot{U})$. On dit que X est une *solution du problème de Cauchy* $(\dot{U}, f, \bar{t}, \bar{x})$, où $\bar{t} \in I$ et $\exists (\bar{x}, u) \in d(f)$, si :

1° X est une application continue d'un intervalle ouvert $d(X) \subset I$ dans $\tau(E')$ telle que $\bar{t} \in d(X)$ et $X(\bar{t}) = \bar{x}$;

2° X admet $f(X(t), U(t))$ pour dérivée pour presque tout $t \in d(X)$; l'application $f(X, U) : t \to f(X(t), U(t))$ définit sur $d(X)$ la E'-distribution $[X]$.

Si $E = R^n$, la condition 2 signifie :

$$X(t) = \bar{x} + \int_{\bar{t}}^{t} f(X(t''), U(t''))\, dt'', \qquad \forall t \in d(X).$$

DÉFINITION : On dira que f est $\mathcal{K}$-*régulier* si, $\forall U \in \mathcal{K}$ et $\forall t \in d(\dot{U})$, le problème de Cauchy $(\dot{U}, f, t, x)$ est « bien posé », c'est-à-dire s'il admet une solution $X(\dot{U}, t, x)$ définie sur $d(\dot{U}, t, x)$ et unique sur cet intervalle, telle que l'application $(t', x') \to X(\dot{U}, t, x')\,(t')$ soit continue en (t', x) $\forall t' \in d(\dot{U}, t, x)$.

Supposons que f soit $\mathcal{K}$-régulier. Soit

$$C'^{\cdot} * E = \{\, ((t', \dot{U}, t), (t, x)) \in C' \times E \mid t' \in d(\dot{U}, t, x) \,\}$$

et soit κ' l'application

$$((t', \dot{U}, t), (t, x)) \to (t', X(\dot{U}, t, x)\,(t')) \text{ de } C'^{\cdot} * E \text{ dans } E\,.$$

Soit p l'application $(t, x) \to t$ de E dans $C_0^{\cdot} = R$.

THÉORÈME : *$((C'^{\cdot}, \tau(C)/C'), p, E)$ est un noyau d'espèce de structures relativement à κ' et il existe un système guidable $\Sigma(f) = (\widetilde{S}, q, (C^{\cdot}, \tau(C)), p, E)$ tel que $(C^{\cdot} * E)^{\cdot}$ soit un groupoïde projection de sa sous-catégorie $(C'^{\cdot} * E)^{\cdot}$.*

$\Sigma'(f) = (\widetilde{S}, q(C', (C'^{\cdot}, \tau(C')), p, E)$ est un sous-système guidable de $\Sigma(f)$.

Les solutions de $\Sigma'(f)$ correspondent biunivoquement aux couples $(\dot{U}, x)$ tels que $U \in \mathcal{K}$ et $x \in E'$, et par suite aussi aux solutions $X(\dot{U}, t, x)$ des problèmes de Cauchy $(\dot{U}, f, t, x)$, où $U \in \mathcal{K}$ et $t \in d(\dot{U})$.

Soit g une application intégrable de $d(f)$ dans R. L'application

$$((t', \dot{U}, t), (t, x)) \to \int_{t}^{t'} g(X(\dot{U}, t, x)\,(t''), U(t''))\, dt''$$

engendre un foncteur continu de $((C^{\cdot} * E)^{\cdot}, \tau(C) * \tau(E))$ dans $(R^{+}, \tau(R))$, noté F.

DÉFINITION : On appelle $(\Sigma(f), F, (R^+, \tau(R), <))$ *le système guidable préférentiel associé à* $(\mathcal{K}, f, g)$ noté $\Pi(\mathcal{K}, f, g)$.

Soit P' une partie de E' et $P = R \times E$. Supposons qu'il existe une solution (F, P)-optimale de $\Pi(\mathcal{K}, f, g)$ au-dessus de $[\tilde{t}, t_0]$ et soit $(\overline{U}, x_0)$ le couple correspondant de $\dot{\mathcal{K}} \times E'$. Soient

$$\bar{t} \in [\tilde{t}, t_0] \text{ et } x = X(\overline{U}, t_0, x_0)(\bar{t}).$$

L'ensemble $S(\bar{t})$ du n° 3 est isomorphe à l'ensemble $\hat{S}(\bar{t})$ formé des $\dot{U}$, où $U \in \mathcal{K}$, tels que $\bar{t} \in d(\dot{U})$ et que

$$(t', X(\dot{U}, \bar{t}, x)(t')) \in O(P) \qquad \forall t' \in d(\dot{U}).$$

On a $S(\bar{t}) = S''(\bar{t})$ et tout élément de $S(\bar{t})$ est réguliere n $\bar{t}$. Si $\dot{U} \in \hat{S}(\bar{t})$, posons $X(\dot{U}) = X(\dot{U}, \bar{t}, x)$. Le résultat 2 du n° 3 entraîne, si $\widetilde{m}(\dot{U}) = m \circ \hat{X}(\dot{U})$, où $\hat{X}(\dot{U})(t) = (t, X(\dot{U})(t))$,

$$\min_{\dot{U} \in \hat{S}(\bar{t})} \{ j_{\bar{t}}^{\lambda} ([\widetilde{m}(\dot{U})'] + [g(X(\dot{U}), U)] + \mu(\dot{U}) \} = 0 ,$$

$$\min_{\dot{U} \in \hat{S}(\bar{t})} \{ \widetilde{m}(\dot{U})'(t) + g(X(\dot{U})(t), U(t)) \} = 0 ,$$

presque pour tout $t \in d(\dot{U})$, les minima étant atteints pour $\dot{U} = \overline{U}$. Sous les conditions du résultat 3, n° 3, l'équation de Bellman généralisée s'écrit :

$$\min_{U \in \hat{S}''(\bar{t})} \{ j_{\bar{t}}^{\lambda} (\lim \langle D\mathcal{M} \circ \hat{X}(\dot{U}), [1, f(X(\dot{U}), U)] \rangle + [g(X(\dot{U}), U)]) \} = 0 ,$$

où $\mathcal{M}$ est un filtre d'applications différentiables convergeant vers m.

Cas particulier : Si E' est de dimension finie, si K est contenu dans un espace de Banach, si $\mathcal{K}$ est formé d'applications mesurables bornées et si l'application $(x, u) \to f(x, u)$ admet une dérivée continue relativement à x sur $d(f)$, alors f est $\mathcal{K}$-régulier. Les équations précédentes s'appliquent donc, tandis que l'équation de Bellman ordinaire ne peut pas être utilisée, car m n'est généralement pas différentiable. *En faisant intervenir* la classe $\mathcal{K}$ *d'applications et pas seulement l'ensemble des valeurs prises* par ces applications (ainsi que le fait Pontryagin), *il est inutile de traiter séparément le cas où il y a des contraintes.*

Conclusion :

Il reste à savoir si, du point de vue *pratique*, les équations en distributions obtenues peuvent être exploitées par un procédé d'approximation. Mais le but de notre étude était de mettre en évidence, d'un point de vue *théorique*, la structure mathématique sous-jacente aux problèmes d'optimisation ; de montrer en particulier pourquoi l'équation de Bellman peut être employée heuristiquement, même lorsque les hypothèses de différentiabilité requises par sa démonstration ne sont pas vérifiées. Le problème qui se pose maintenant est celui de l'existence et de l'unicité des solutions (distributions ou fonctions) des équations trouvées.

RÉFÉRENCES

A. Bastiani [1] Systèmes guidables et problème d'optimisation, multigraphié au Laboratoire d'Automatique Théorique (Caen) : I, 1963, 31 p. ; II, 1964, 48 p. ; III, 1965, 50 p. ; IV, 1965, 62 p.

[1'] Applications différentiables..., *Jour. d'Analyse Math. Jérusalem*, XIII (1964), p. 1-113.

[1"] Sur les distributions vectorielles, multigraphié au Labo. d'Automatique théo. (Caen), 1964, 30 p.

[1‴] Différentiabilité dans les espaces localement convexes-Distructures Thèse, Paris, série A, 3948, 4799 (1962), 140 p.

R. Bellman [2] *Adaptive control processes*, The Rand Corpo. Princeton Un., Press, 1962 (2e édition).

D. Bushaw [3] Dynamical polysystems and optimization, Rias, Report 63-10 (1963), 25 p.

M. Clément [4] Recherches sur les conditions d'automatisation des systèmes industriels (thèse de Dr-Ing., multigraphié, Paris, 1963) et *C. R. A. S.*, **256** (1963), p. 340.

C. Ehresmann [5] *Catégories et structures*, Dunod, Paris, 1965.

[5'] Catégories topologiques..., *Coll. Géom. diff. Glo. C. B. R. M.*, Bruxelles, (1959), p. 137-150.

[5"] Catégories inductives..., *Ann. Fourier* (Grenoble), X (1960), p. 309-332.

A. Grothendieck [6] Sur les espaces (F) et (DF), *Summa Bras. Math.*, 3 (1954), p. 57-123.

O. Roxin [7] Axiomatic theory of control systems, Rias, Report 62-16, 57 p.

L. Schwartz [8] Distributions vectorielles, I, *Ann. Fourier* (Grenoble), VII (1957), p. 1-139.

[8'] *Théorie des distributions*, I, Hermann (2e édition) 1958.

DISCUSSION

Mme Bastiani étant absente, M. le Professeur Pallu de La Barrière a exposé l'essentiel de la communication.

M. Jorgensen. — Il y a des difficultés lorsqu'on définit un trajet en disant que la distance est nulle. Que se passe-t-il dans le cas où par exemple on a un travail de forces (circulation d'un vecteur) le long de la boucle fonction du nombre de tours ?

M. Pallu de La barrière. — Je n'ai pas dit que n'importe quel chemin dont l'origine est égale à l'extrémité était considéré comme nul. J'ai simplement indiqué que pour accepter la notion de catégorie, il faut introduire cette abstraction de chemin de longueur nulle. C'est totalement différent de la notion de chemin ayant son origine confondue avec son extrémité.