BIOLOGIE THÉORIQUE. — *Un modèle mathématique pour un système vivant évolutif et hiérarchique, fondé sur la théorie des catégories.* Note de **Andrée C. Ehresmann** et **Jean-Paul Vanbremeersch,** présentée par Jean-Pierre Changeux.

On propose un modèle mathématique, appelé système évolutif hiérarchique, basé sur la Théorie des Catégories. Nous étudierons ainsi des systèmes de nature diverse qui, comme un organisme, présentent les caractères suivants : une organisation interne avec des composants plus ou moins complexes et des relations entre eux; une évolution au cours du temps; une hiérarchie de niveaux de complexité. Ce cadre permet d'expliquer l'émergence de nouvelles propriétés par complexification, et de décrire un processus de formation de tels systèmes.

THEORETICAL BIOLOGY. — A mathematical model for living systems based on category theory.

The notion of an evolutive hierarchical system proposed here retains the following characteristics of some natural systems, like living organisms: they have an internal organization consisting of more or less complex components with interrelations; they maintain their organization in time although their components are changing; they may be studied at several complexity levels (e. g., molecular, cellular, ...). The idea is to model the state of the system at a given instant by a category, the state transition by a functor, a complex object by the (direct) limit of a pattern of linked objects (its own organization). The emergence of new properties for a complex object is measured, and a development process is described.

Toute modélisation repose sur une certaine conception de l'objet modélisé. Les propriétés des systèmes évolutifs complexes retenues dans notre modèle seront illustrées par l'exemple d'une cellule.

1. Organisation interne. Catégories. — Une cellule est formée, à chaque instant, de composants qui sont aussi bien ses organites que ses molécules ou ses atomes; ces composants sont liés par des relations (contiguïté, interactions chimiques, attachement d'une molécule à un organite, ...), ce qui détermine l'organisation interne de la cellule.

De façon générale, un système « défini par des éléments et des relations qui les unissent » sera représenté par une catégorie dont les objets modélisent les composants, et les flèches les relations entre eux.

Rappelons [1] qu'un *graphe* est formé de sommets et de flèches (ou liens), chaque flèche allant d'un sommet vers un autre. Il peut y avoir plusieurs flèches entre deux sommets, et des flèches « fermées ». Une *catégorie* est un graphe où l'on associe à deux flèches $A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3$ consécutives une flèche de A_1 vers A_3, appelée leur composé, de sorte que deux axiomes soient vérifiés (associativité, identité). Un *homomorphisme* A d'un graphe G vers un autre K associe à un sommet i de G un sommet image A_i dans K, à une flèche $a : i \to j$ de G une flèche $A(a)$ de K, de A_i vers A_j. Si les graphes sont des catégories, un *foncteur* est un homomorphisme qui de plus respecte les composés.

2. Systèmes évolutifs. — Au cours du temps, les composants d'une cellule se modifient : des éléments pris au milieu extérieur sont assimilés par la cellule qui, au contraire, détruit ou rejette certains de ses composants.

L'évolution d'un système général ainsi « ouvert » sera représentée par les données suivantes : 1. Un ensemble T de réels positifs t (les instants où le système est observé); T peut être fini ou infini, discret ou non; 2. pour chacun de ces instants t, une catégorie K_t qui représente l'état du système en t; pour chaque couple d'instants de T avec $t \leqq t'$, un foncteur *évolution* de K_t vers $K_{t'}$ (qui est l'identité de K_t si $t'=t$). On demande que, en composant le foncteur évolution de t à t' avec l'évolution de t' à $t''>t'$, on retrouve l'évolution de t à t''.

0249-6313/86/03020475 $ 2.00 © Académie des Sciences

L'évolution associe à un objet C de K_t (donc à un composant du système en t) un objet de $K_{t'}$ qui représente son état à l'instant postérieur t'. En $t_0 < t$, l'objet C peut avoir plusieurs états antérieurs (ce sont les objets dont C est l'état en t); s'il n'a aucun état antérieur à t, c'est un « nouveau » composant en t. Ceci modélise de manière interne les objets « pris à l'extérieur » sans faire intervenir explicitement cet extérieur.

Pour modéliser de même internement la destruction ou le rejet d'un composant, on introduit dans chaque catégorie K_t un objet *composant néant* (formel) 0_t qui est lié à chaque objet de cette catégorie par une et une seule flèche (0_t est « initial » [2]). Une flèche qui se décompose à travers 0_t est dite *nulle*. Un composant en t *a disparu en* t' si son état en t' est l'objet $0_{t'}$. De même, une flèche en t a disparu en t' si son image par l'évolution est une flèche nulle. Ainsi les objets néant et les flèches nulles représentent ce qui n'existe plus. Pour qu'un élément disparu ne ré-apparaisse pas, on suppose que le foncteur évolution de t à t' applique 0_t sur $0_{t'}$. On a ainsi défini un *système évolutif*.

Dans un système évolutif, la *date d'émergence* d'un composant C est la borne inférieure des instants où C a au moins un état antérieur; sa date de *disparition* est la borne inférieure des instants où l'état de C est l'objet néant; la *trajectoire* de C est formée de tous ses états antérieurs et postérieurs entre son émergence et sa disparition.

3. Limites. Émergence de propriétés par complexification. — Dans la cellule, un organite est un composant complexe : il « recolle » le système formé par ses molécules et leurs interrelations, qui décrit son organisation interne et détermine son comportement (réductionnisme opératoire). De même, une molécule est complexe relativement aux atomes liés qui la composent, mais simple par rapport à un organite.

Dans un système général, un composant est *complexe* s'il a une organisation propre, décrite par un système de composants et de liens spécifiés entre eux qu'il recolle. Traduisons cette notion dans une catégorie K.

Un graphe peut être considéré comme l'esquisse d'un système abstrait de liaisons; un homomorphisme A de ce graphe SA vers K réalise cette esquisse en un système « concret » de liens entre les objets A_i de la catégorie. On dira aussi que A est un *système d'objets liés de* K, d'esquisse SA. Un *lien collectif* de A vers un objet C de la catégorie est une famille de flèches f_i de A_i vers C, indicées par les sommets i de SA, et compatibles avec les liens spécifiés entre les A_i au sens suivant :

(*) Pour toute flèche $a : i \to j$ dans SA, on a $f_i = (A_i \xrightarrow{A(a)} A_j \xrightarrow{f_j} C)$.

Donc chaque A_i est lié à C, mais de telle sorte que, si i et j sont liés dans l'esquisse, le lien f_i de A_i soit « imposé » par celui de A_j.

Un objet A′ est *limite* (inductive [2]) du système A d'objets liés si, pour tout objet C de la catégorie, les liens collectifs de A vers C correspondent biunivoquement aux flèches de A′ vers C dans K. Intuitivement, la limite « recolle » les objets A_i en tenant compte des liens spécifiés entre eux, et un lien collectif vers C se recolle en un unique lien de cette limite vers C.

Un composant complexe est modélisé par un tel objet A′ qui est limite d'un système A d'objets liés; A représente *l'organisation* interne de A′, à savoir ses constituants (les objets indicés A_i) et leurs liens spécifiques. Les propriétés de A′, déterminées par les flèches issues de A′, correspondent aux propriétés des A_i qui sont compatibles [au sens de (*)] avec les liens spécifiques, de sorte que *l'étude de* A′ *est ramenée à celle de ses constituants et de leurs liens spécifiques*. Les contraintes (*) font que tous les A_i n'ont pas le même rôle dans la limite, d'où une *spécialisation* ultérieure. Si l'esquisse n'a que des sommets (sans flèches), A se réduit à une famille d'objets A_i de la catégorie, et toute famille de liens « individuels » f_i de A_i vers C forme un lien collectif, car il n'y a pas de contrainte (*). Dans ce cas la limite (alors appelée *somme*) de la famille d'objets a les mêmes propriétés que ses constituants.

On peut *mesurer* les contraintes qu'imposent des liens, en comparant la limite A′ d'un système A d'objets liés à la somme S de la famille formée des seuls constituants A_i (on « oublie » leurs liens). *Il existe une flèche s de la somme* S *vers la limite* A′ *du système vérifiant la condition : les flèches de* A′ *vers un objet* C *correspondent biunivoquement aux flèches de* S *vers* C *qui se décomposent à travers s.* Ainsi *s* représente *l'obstacle* que doit surmonter une famille de liens individuels (qui se recolle toujours en une flèche de S vers C) pour définir un lien collectif de A. C'est d'autant que cette flèche *s* diffère d'un isomorphisme qu'il y a *émergence de nouvelle propriétés* pour l'objet complexe A′ par rapport à ses constituants A_i.

4. Systèmes hiérarchiques. — La cellule a une organisation hiérarchique, due au fait que ses composants se répartissent en trois niveaux de complexité croissante; et elle peut être étudiée à partir de chacun de ces niveaux.

On appellera *système hiérarchique* une catégorie dont les objets sont répartis en plusieurs niveaux 0, 1, . . . , *p* de complexité croissante au sens suivant : Chaque objet du niveau *n* (autre que 0) est limite d'un système d'objets liés du niveau juste inférieur $n-1$.

Un objet A′ du niveau *n* apparaît à la fois comme simple relativement aux objets d'un niveau supérieur, et complexe par rapport aux objets du niveau $n-1$; son étude est ramenée à celle d'un système A d'objets liés du niveau $n-1$ qu'il recolle. Mais chacun de ces objets recolle lui-même (en tant qu'objet du niveau $n-1$) un système d'objets liés du niveau $n-2$, etc. Par suite A′ a, par l'intermédiaire de ces constituants, une organisation interne de chacun des niveaux $k<n$, formée d'objets du niveau *k* avec des liens (difficiles à définir, car répartis entre plusieurs niveaux). Dans [3] on *construit* des hiérarchies dont l'étude se réduit à celle de leurs objets du niveau 0 avec les simples flèches entre eux (comme dans les exemples concrets).

Un *système hiérarchique évolutif* est un système évolutif tel que : 1. la catégorie K_t état du système en *t* est un système hiérarchique, et l'objet néant 0_t est du niveau 0; 2. chaque foncteur évolution préserve le niveau d'un objet, ou le fait disparaître. Il en résulte que, si un composant en *t* est du niveau *n*, sa trajectoire est formée d'objets du niveau *n*.

Dans le système hiérarchique évolutif associé à une cellule, un composant complexe conserve, pendant toute sa vie, son identité due à son organisation interne, bien que ses constituants se renouvellent peu à peu.

Cette notion d'*identité* d'un composant complexe prend un sens dans tout système hiérarchique évolutif : Une trajectoire du niveau *n conserve son organisation du niveau* $n-1$ si on peut associer à chacun de ses éléments C'_t un système C_t d'objets liés du niveau $n-1$ dans K_t ayant C'_t pour limite et vérifiant la condition : Si t' est « assez proche » de *t*, l'évolution de *t* à t' fait disparaître suffisamment peu d'objets de C_t pour que les objets liés maintenus en t' forment un sous-système de $C_{t'}$ ayant la même limite $C'_{t'}$ que $C_{t'}$ tout entier.

5. Formation de systèmes évolutifs. — Dans la cellule, l'évolution entre deux instants *t* et t' résulte des opérations suivantes : assimilation de nouveaux éléments, disparition ou décomposition de certains composants existant en *t*, formation de composants

complexes par recollement de composants liés en t, tout en préservant l'organisation interne d'autres composants.

Décrivons ces opérations dans une catégorie K avec un objet initial 0. Nous considérons les données suivantes : une catégorie E (modélisant des objets liés à « assimiler »), certains objets N de K (devant disparaître), un ensemble de systèmes A d'objets liés de K qui n'y ont pas de limite (systèmes à recoller) et un ensemble de systèmes B d'objets liés de K qui ont une limite dans K (à préserver). Alors on montre [3] :

THÉORÈME D'ÉVOLUTION. — *Il existe un foncteur* G *de* K *vers « une plus petite » catégorie* L *tel que :* 1. G *se décompose à travers la catégorie somme de* K *et* E; 2. *il applique* 0 *et chacun des objets* N *sur un objet initial* 0′ *de* L; 3. *l'image par* G *de chacun des systèmes* A *a une limite dans* L; 4. *les limites de chacun des systèmes* B *sont préservées par* G.

Ce théorème (énoncé ici de manière un peu informelle) permet de construire par étapes des systèmes évolutifs lorsque les instants de T forment une suite croissante (temps discret). On part d'une catégorie K à l'instant initial et on construit par récurrence l'état du système à chaque instant : connaissant cet état en t, le foncteur évolution de t à l'instant suivant sera le foncteur G associé par le théorème d'évolution à la catégorie K_t en t et à un certain choix d'objets à assimiler ou à faire disparaître, et de limites à ajouter ou à préserver.

Cette construction pourrait s'appliquer à des systèmes hiérarchiques évolutifs concrets (organismes vivants, systèmes d'objets mentaux, sociétés, écosystèmes, ...). Mais le vrai problème consiste à *sélectionner* à chaque étape les objets à assimiler ou supprimer, les composants liés à recoller et les composants complexes à préserver. Disons seulement que ces choix seront faits parmi les différents éléments possibles en utilisant des « pondérations » de ceux-ci à l'aide d'*observables* (fonctions numériques définies sur certains systèmes d'objets liés) et en tenant compte des « lois de la nature » qui lient ces observables, de manière à obtenir un développement optimal (« principle of optimal design » de R. Rosen [4]).

Les résultats de cette Note sont développés dans [3]. Remarquons que le modèle que nous proposons pour étudier des systèmes bio-sociologiques, ... rentre dans le cadre d'une Biologie relationnelle au sens de Rashevsky et R. Rosen [4]. Mais, à la différence de ces auteurs, on cherche à décrire l'organisation interne du système et non son fonctionnement, lequel résultera des interactions synchroniques et diachroniques des composants et de la réduction d'un composant complexe à ses constituants liés. Les réseaux morphogénétiques de Rosen [5], ses systèmes naturels et les organismes de Louie [6] peuvent se traduire en termes de systèmes évolutifs (*cf.* [3]).

Remise le 17 février 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] C. EHRESMANN, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris, 1965.
[2] S. MACLANE, *Categories for the working mathematician*, Springer, 1971.
[3] A. C. EHRESMANN et J.-P. VANBREMEERSCH, Prépublication, n° 861, Université de Picardie, Amiens, 1985.
[4] R. ROSEN, *Foundations of mathematical biology*, 4, Acad. Press, 1972, p. 217-253.
[5] R. ROSEN, *Progress in Theor. Biol.*, 6, Acad. Press, 1981, p. 161-209.
[6] A. H. LOUIE, *Bull. Math. Biol.*, 45, n° 6, 1983, p. 1047-1072.

A. C. E. : *Université de Picardie, U.E.R. de Mathématiques*, 33, *rue Saint-Leu*, 80039 *Amiens Cedex;*
J.-P. V. : *Centre médical*, 80, *rue Saint-Roch*, 80000 *Amiens.*