Des Esquisses aux Processus de Complexification et d'Emergence

Andrée C. EHRESMANN*

(en collaboration avec Jean-Paul Vanbremeersch)

***Université de Picardie Jules Verne, LAMFA**
ehres@u-picardie.fr
https://ehres.pagesperso-orange.fr
https://vbm-ehr.pagesperso-orange.fr

Séminaire CLE, Université Paris-Diderot, Février 2021

CALAIS JUNE 2008

2 APPROCHES 'PHILOSOPHIQUES' DES CATÉGORIES

Approche 'globalisante'	Approche 'spécifique'
Fonction totale	Fonction partielle
Définition des catégories via leurs Hom	Définition par graphe avec loi de composition partielle
'Grandes' catégories. Topos	'Petites' catégories ; monoïde, ordre Groupoïdes. Théorie des univers.
Foncteurs adjoints	Constructions d'objets libres
Catégories enrichies	Catégories internes
Théories algébriques Catégories (co)complètes	Théorie des esquisses et prototypes Complétion relative. Complexification

EXEMPLES DE CATEGORIES *p*-STRUCTUREES

1958 : **Catégories 'locales'** et leurs actions. Une catégorie locale est une catégorie interne à la catégorie des 'classes locales' (= ensembles ordonnés dont toute partie non vide a une borne inférieure).

1959: **Catégories topologiques, catégories différentiables**. Avec application aux espaces fibrés : le groupoïde des isomorphismes entre fibres d'un espace fibré principal est un groupoïde topologique localement trivial et les espaces fibrés associés correspondent à ses actions

1960: **Catégories doubles** : catégorie des carrés commutatifs, des transformations naturelles.

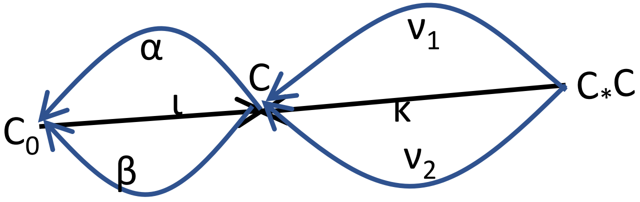
1961-62: **Pseudogroupes** et différentes catégories ordonnées. Catégories **quasi-topologiques** ou pseudo-topologiques (AB))

$\Rightarrow$

1963: Notion générale de **Catégorie p-Structurée où**

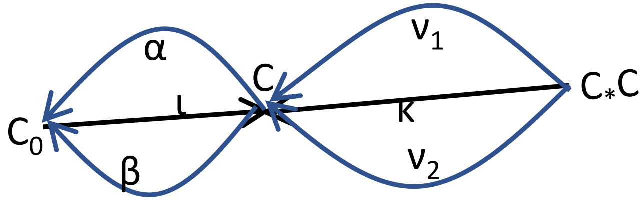
p: H → Sets est un foncteur 'concret'.

CATEGORIES *p*-STRUCTUREES



Idée de catégorie = graphe J où α = application source, β = but et κ: $C_*C \longrightarrow C$ est la loi de composition de $C_*C = \beta \vee \alpha$ = {couples composables} vers C.

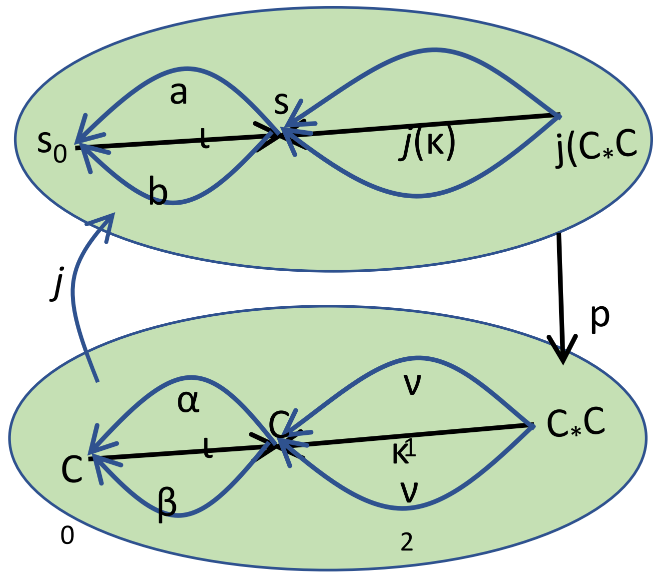
CATEGORIES *p*-STRUCTUREES



Idée de catégorie = graphe J où α = application source, *β* = but et κ: C∗C → C est la loi de composition de C∗C = β V α = {couples composables} vers C.

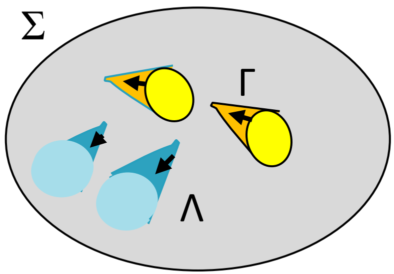
Soit donné p: H → Sets un foncteur concret.(donc il est fidèle).

Catégorie p-structurée = *(C, s)* où *C* = catégorie, *s* = objet de H tel que : p*(s)* = C et qu"il existe un homomorphisme *j* : J → H qui est une section locale de p et vérifie *j(C∗ C)* = *b V a* où b = j(β), a = *j(α)*



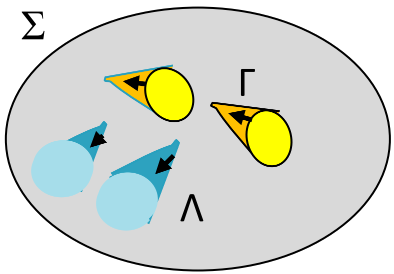
Cf. "Synthèse sur les catégories p-structurées" : A. Bastiani & C. Ehresmann, Cahiers TGD 1969; republié dans "Œuvres C. E" III-1.

ESQUISSES ET LEURS MODELES



La 1ère définition d'une esquisse (C. Ehresmann 1966 et non 1968) est la suivante :
σ = (Σ, Γ, Λ) est une **esquisse** si Σ est une (néo)catégorie, Γ est un petit ensemble de cônes inductifs dans Σ et Λ est un petit endemble de cônes projectifs. L'esquisse est *inductive* si Λ = Ø (resp. *projective* si Γ = Ø).

ESQUISSES ET LEURS MODELES



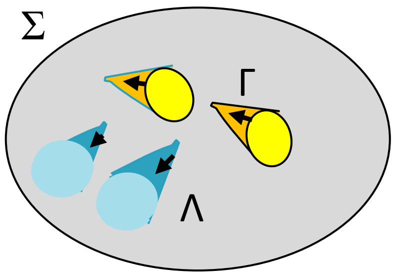
La 1ère définition d'une esquisse (C. Ehresmann 1966 et non 1968) est la suivante :
σ = (Σ, Γ, Λ) est une **esquisse** si Σ est une (néo)catégorie, Γ est un petit ensemble de cônes inductifs dans Σ et Λ est un petit endemble de cônes projectifs. L'esquisse est *inductive* si Λ = Ø (resp. *projective* si Γ = Ø).

Notons ***Sk*** la catégorie des (morphismes entre) esquisses. Un **morphisme** F: σ → σ' est la donnée d'un foncteur F: Σ→ Σ' tel que :

F(γ **)** ϵ Γ' pour tout γ ϵ Γ et F(λ) ϵ Λ' pour λ ϵ Λ.

Elle admet pour sous-catégories pleines les catégories des esquisses inductives et des esquisses projectives

ESQUISSES ET LEURS MODELES



La 1ère définition d'une esquisse (C. Ehresmann 1966 et non 1968) est la suivante : σ = (Σ, Γ, Λ) est une **esquisse** si Σ est une (néo)catégorie, Γ est un petit ensemble de cônes inductifs dans Σ et Λ est un petit endemble de cônes projectifs. L'esquisse est *inductive* si Λ = Ø (resp. *projective* si Γ = Ø).

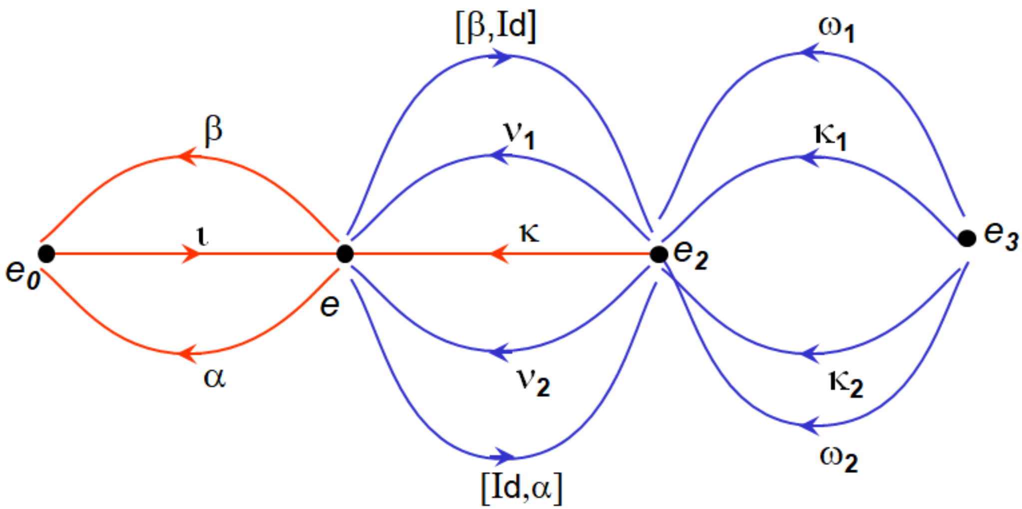
Notons ***Sk*** la catégorie des (morphismes entre) esquisses. Un **morphisme** F: σ → σ' est la donnée d'un foncteur F: Σ→ Σ' tel que :

F(γ **)** ϵ Γ' pour tout γ ϵ Γ et F(λ) ϵ Λ' pour λ ϵ Λ.

Elle admet pour sous-catégories pleines les catégories des esquisses inductives et des esquisses projectives

Un *modèle* M de *σ* dans une catégorie **V** est un foncteur M: Σ ⟶ **V** transformant les cônes inductifs en cônes-colimite et les cônes projectifs en cônes-limite. La catégorie $\mathbf{V}^{\sigma}$ des modèles de ***σ*** dans **V** est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbf{V}^{\Sigma}$ des foncteurs de Σ dans **V.** Ces catégories ont été très étudiées.

L'ESQUISSE DE CATEGORIE σ_{Cat}



$$\begin{tikzcd} e & e_2 \arrow[l, "\nu_1"'] \arrow[d, "\nu_2"] \\ e_0 \arrow[ur, phantom, "\text{P.B.}"] & e \arrow[l, "\alpha"] \arrow[from=1-1, to=2-1, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} e_2 & e_3 \arrow[l, "\omega_1"'] \arrow[d, "\omega_2"] \\ e \arrow[ur, phantom, "\text{P.B.}"] & e_2 \arrow[l, "\nu_1"] \arrow[from=1-1, to=2-1, "\nu_2"'] \end{tikzcd}$$

Axiomes : $\kappa_1 = [\kappa\omega_1, \nu_2\omega_2]$, $\kappa_2 = [\nu_1\omega_1, \kappa\omega_2]$, $\kappa\kappa_1 = \kappa\kappa_2$

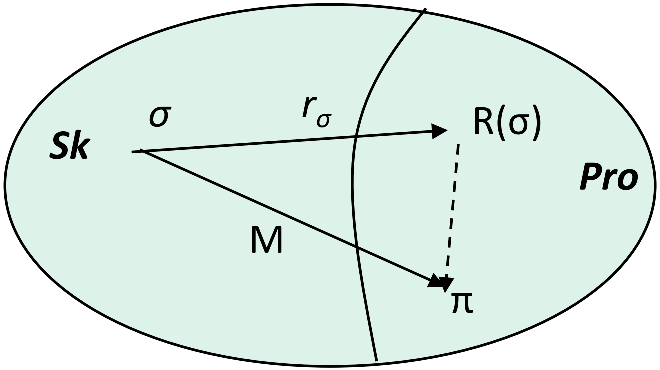
Cette esquisse projective est définie sur la néocatégorie dessinée (dont l'idée de catégorie *J* est un sous-graphe) qui engendre la sous-catégorie pleine de Δ^{op} ayant pour objets 0, 1, 2, 3. (où Δ = catégorie simpliciale).
De plus σ_{Cat} a 2 cônes projectifs, indiqués à droite, à transformer en produits fibrés. par un modèle.

PROTOTYPE D'UNE ESQUISSE

Un ***prototype*** est une esquisse dans laquelle les cônes inductifs (resp. projectifs) sont des cônes colimite (resp. des cônes limite).

Soit ***Pro*** la sous-catégorie pleine de la catégorie ***Sk*** des esquisses relative à un univers U ayant pour objets les prototypes.

Théorème (A. & C. Ehresmann 1, CTGDC XIII-2, 1972)**.** *La catégorie **Pro** des prototypes est une sous-catégorie réflective de la catégorie **Sk** des esquisses. Si le réflecteur de σ est* r_σ*:* $\sigma \to R(\sigma)$, *alors* le foncteur r_σ *est un 'plus petit' modèle.de σ.* Si σ *est inductive ou projective, tel est aussi* R(σ).



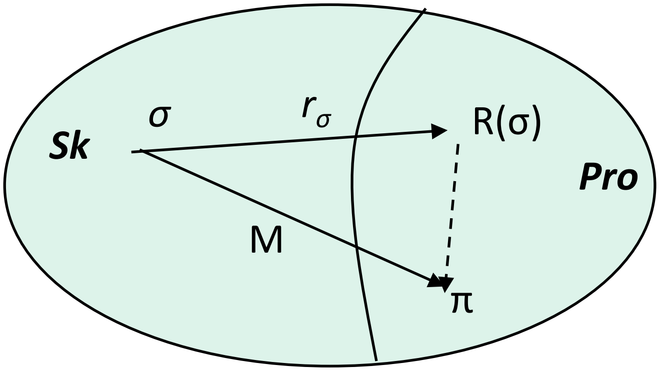
PROTOTYPE D'UNE ESQUISSE

Un ***prototype*** est une esquisse dans laquelle les cônes inductifs (resp. projectifs) sont des cônes colimite (resp. des cônes limite).

Soit ***Pro*** la sous-catégorie pleine de la catégorie ***Sk*** des esquisses ayant pour objets les prototypes.

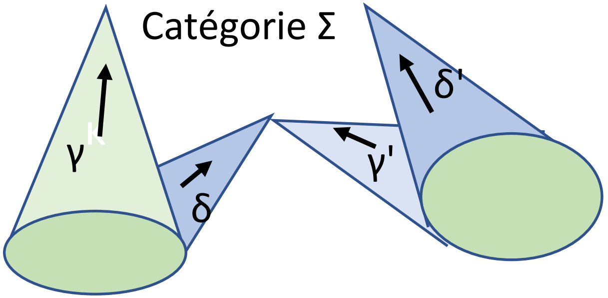
Théorème (A. & C. Ehresmann 1, CTGDC XIII-2, 1972)**.** *La catégorie* **Pro** *des prototypes est une sous-catégorie réflective de la catégorie* **Sk** *des esquisses. Si le réflecteur de σ est* $r_\sigma: \sigma \to R(\sigma)$, *alors* le foncteur r_σ *est un 'plus petit' modèle.de σ.* Si σ *est inductive ou projective, tel est aussi* R(σ).

Le prototype est construit par récurrence (transfinie si Λ ou Γ n'est pas fini). Les objets ne sont pas modifiés. A chaque étape on "force" les cônes distingués à devenir (co)limite par ajout des flèches manquantes et de composés, d'où une nouvelle esquisse. On continue jusqu'à obtenir un prototype



EXEMPLE DE CONSTRUCTION D'UN PROTOTYPE

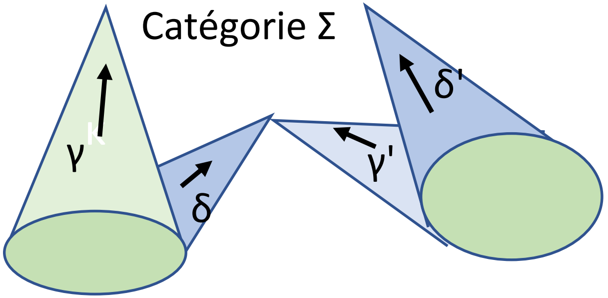
1. On part de l'esquisse inductive
$\sigma = (\Sigma, \Gamma)$ où $\Gamma = \{\gamma, \gamma'\}$1.

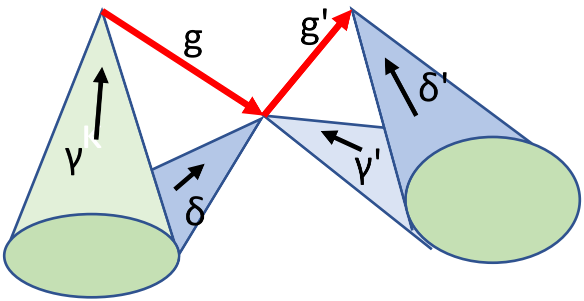


EXEMPLE DE CONSTRUCTION D'UN PROTOTYPE

1. On part de l'esquisse inductive
σ = (Σ, Γ) où Γ = {γ, γ'}1.

Catégorie Σ

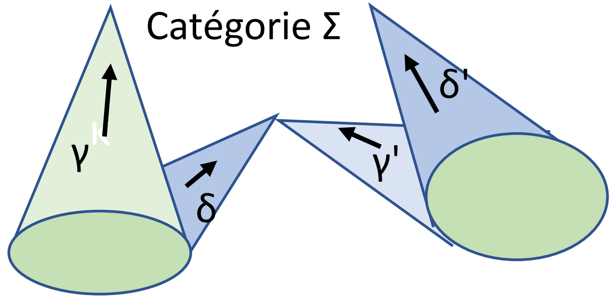


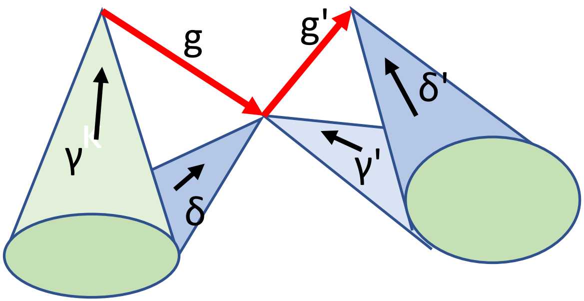


2. On 'force les cônes γ et γ' 'à devenir colimites - en ajoutant g et g' tels que : g¤γ = δ et g'¤γ' = δ'

EXEMPLE DE CONSTRUCTION D'UN PROTOTYPE

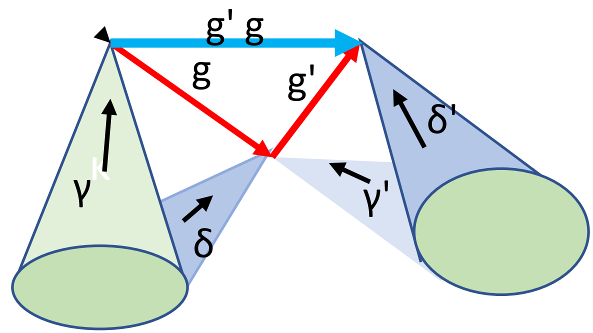
1. On part de l'esquisse inductive $\sigma = (\Sigma, \Gamma)$ où $\Gamma = \{\gamma, \gamma'\}$1.





2. On 'force les cônes γ et γ' 'à devenir colimites - en ajoutant g et g' tels que : g¤γ = δ et g'¤γ' = δ'

3. On ajoute le composé g'g pour avoir une catégorie Σ'. Ici Σ' est le support du prototype.
Sinon il faudrait recommence la construction à partir de C'.



Di-Esquisses
Cocomplétion et Complexification

(CO-)COMPLETION ET COMPLEXIFICATION

La construction du prototype d'une esquisse conduit à une catégorie ayant les mêmes objets mais dans laquelle certains cônes sont forcés de devenir limite ou colimite tout en conservant leur sommet. Ce prototype est défini à isomorphisme près.

Etant donné une catégorie C et un ensemble **D** de diagrammes D dans C, le problème 'universel' (à isomorphisme à ou équivalence près) de la **D**-*(co-)complétion* de C consiste à 'étendre' C en une catégorie K par ajout de (co)limites (dans K) aux diagrammes de **D.** On parle alors de

- **D**-*(co-)complétion libre* si le processus ne conserve pas toutes les (co-)limites existant dans C.

- δ-*Complexification* de C si on veur ajouter des (co)limites aux diagrammes de **D** sans (co)limite dans C, et ceci tout en conservant certains cônes (co-)limites γ existant dans C.

Exemples : 1. 'Améliorer une catégorie, par exemple la catégorie <diff.

2. Modéliser la dycamique d'un système évolutif 'naturel' par formation d'objets de complexité croissante.

DI-ESQUISSE - COMPLEXIFICATION

La notion de di-esquisse généralise celle d'esquisse inductive.

Définition. Une *di-esquisse* $\delta = (C, \mathbf{D}, \Gamma)$ **c**onsiste en :

(i) Une catégorie C. (ii) Un ensemble **D** de diagrammes D de C

(ii) Un ensemble Γ de cones inductifs de C.

Un *morphisme* $F: \delta \to \delta'$ est un foncteur $F: C \to C'$ vérifiant :

(i) pour $D \in \mathbf{D}$, on a F¤D ∊ **D'** ou F¤D est base d'un cône $\gamma' \in \Gamma'$;

(ii) pour tout $\gamma \in \Gamma$, le cône $F(\gamma)$ est dans Γ'.

DI-ESQUISSE - COMPLEXIFICATION

La notion de di-esquisse généralise celle d'esquisse inductive.

Définition. Une *di-esquisse* $\delta = (C, \mathbf{D}, \Gamma)$ **c**onsiste en :

(i) Une catégorie C. (ii) Un ensemble **D** de diagrammes D de C

(ii) Un ensemble Γ de cones inductifs de C.

Un *morphisme* F: δ → δ' est un foncteur F: C → *C'* vérifiant :

(i) pour D ϵ **D**, on a F¤D ϵ **D'** ou F¤D est base d'un cône γ' ϵ Γ' ;

(ii) pour tout γ ϵ Γ, le cône F γ est dans Γ'.

On note ***Di-Sk*** la catégorie des di-esquisses relative à un univers U. La catégorie ***SkI*** des esquisses inductives et sa sous-catégorie ***ProI*** des prototypes inductifs sont identifiées à des sous-catégories de ***Di-Sk*** en identifiant l'esquisse inductive (C, Γ) à la di-esquisse (C, ∅, Γ).

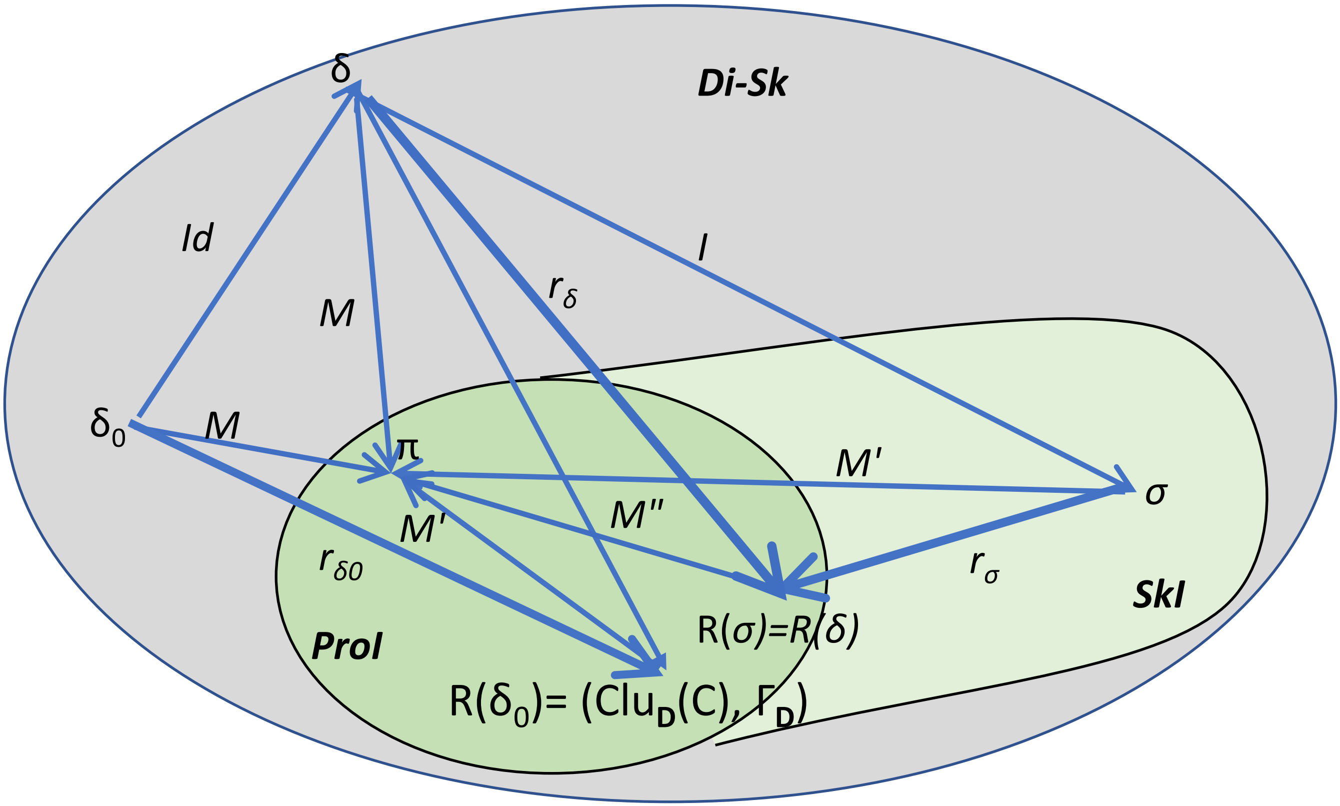
Théorème de Complexification. *La sous-catégorie **ProI** des prototypes est une sous-catégorie reflective de **Di-Sk**. Si* $r_\delta: \delta \to R(\delta) = (K, \Pi)$ *est le réflecteur de δ dans **ProI**, on appelle* R(δ) le ***prototype** de δ et* K *la δ-**complexification** de* C

PROTOTYPE D'UNE DI-ESQUISSE δ = (C, **D**, Γ)

Modèle d'une di-esquisse *δ* dans *V* : *C'est un f*oncteur M: C → V *t*el que :

(i) MD, pour chaque D ϵ **D,** acquière une colimite D* dans V ;

(ii) pour tout γ ϵ **Γ** l'image par M du cône γ est un cône colimite dans V.



COCOMPLETION LIBRE POUR PETITS DIAGRAMMES

Soit C une catégorie localement petite. On sait que la catégorie des préfaisceaux sur C est une co-complétion libre de C, à équivalence près.

Dans le cas filtrant, la catégorie Ind(C) des ind-objets dans C (défiinie par Grothendieck, 1962) est une co-complétion libre, à isomorphisme près, relativement aux diagrammes filtrants. Cette catégorie a pour objets les petits diarammes filtrants P: sP $\longrightarrow$ C et $Hom_{Ind}(Q, P)$ est donné par la formule :

$$Ind(Q, P) = Lim_{k \in sQ} Colim_{i \in sP}(Hom(Q(k), P(i))).$$

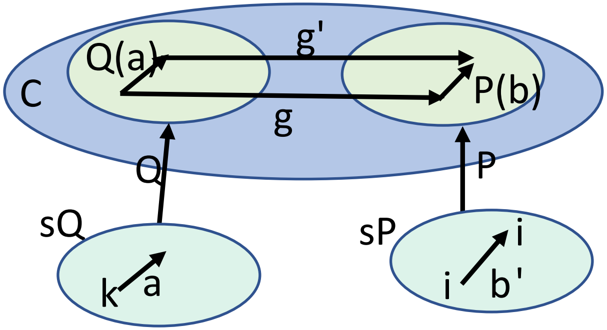
Plusieurs auteurs ont essayé de généraliser ceci au cas de tous les petits diagrammes, mais ont eu des problèmes pour définir la composition. Nous avons réussi à étendre cette formule à l'aide d'une présentation d'un morphisme sous la forme d'un 'cluster' (A. Ehresmann & Vanbremeersch, 1987). D'où la catégorie des clusters que nous allons utiliser pour obtenir des **D-**cocomplétions libres à isomorphismes près.

COMMA-CATEGORIE ET SES CC

Soit C une catégorie, P: sP → C et Q; sQ → C des petits diagrammes.
Catégorie-comma Q|P: objet = (k, g, i) où k ϵ sQ, i ϵ sP et g: Q(k) → P(i) dans C.
Un morphisme de P|Q est de la forme

(a, b) : (k, g, i) → (k', g', i')

où a ϵ sQ, b ϵ sP et g'Q(a) = P(b)g



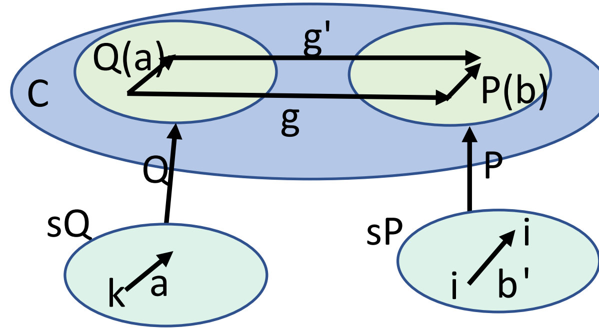
'

COMMA-CATEGORIE ET SES CC

Soit C une catégorie, P: sP → C et Q: sQ → C des petits diagrammes.
Catégorie-comma Q|P: objet = (k, g, i) où k ϵ sQ, i ϵ sP et g: Q(k) → P(i) dans C.
Un morphisme de P|Q est de la forme

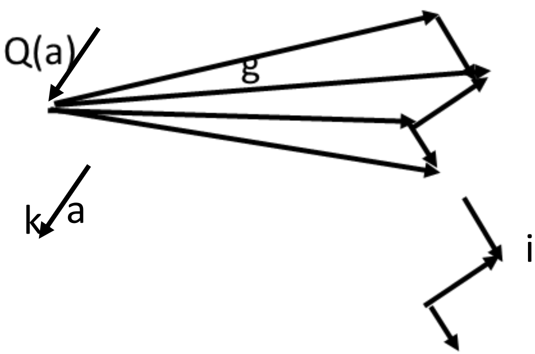
(a, b) : (k, g, i) → (k', g', i')

où a ϵ sQ, b ϵ sP et g'Q(a) = P(b)g



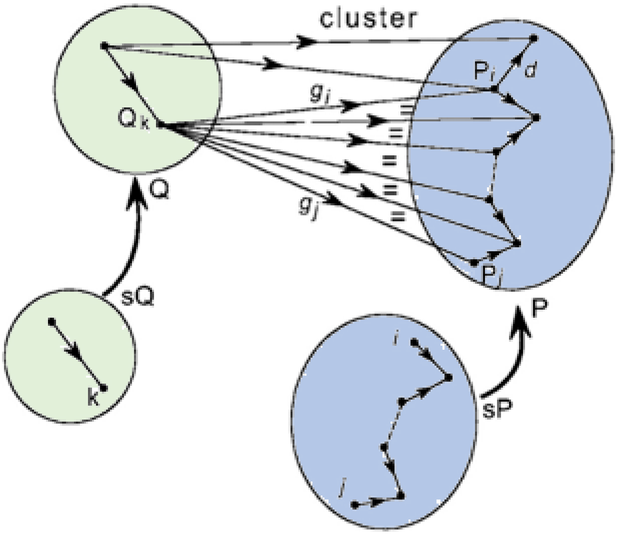
Calcul d'un élément de Ind(Q, P) = $\mathrm{Lim}_{k\epsilon sQ}\mathrm{Colim}_{i\epsilon sP}(\mathrm{Hom}(Q(k), P(i)))$.
Pour un objet k de sQ, l'ensemble $\mathrm{Colim}_{i\epsilon sP}(\mathrm{Hom}(Q(k), P(i)))$ est le quotient de la somme S_k = {(k, g, i) ϵ Q|P} par la relation d'équivalence qu'engendre

(k, g, i) ~ (k, P(b)g, i') où b: i ⟶ i' dans sP.



Ce quotient est la composante connexe de (k, g, i) dans $Q/_k|P$ où $Q/_k$ = restriction de Q à {k}. Et un élément de Ind(Q, P) est une famille de telles composantes connexes se déduisant entre elles par composé avec Q(a).

LA NOTION DE CLUSTER



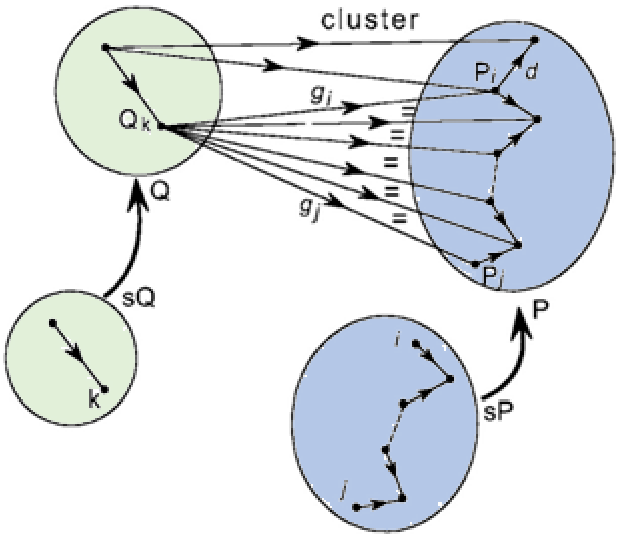
Un **cluster** (aussi appelé **gerbe)** de Q *vers* P est un ensemble maximal G d'objets de Q|P tel que :

(i) Pour tout objet k de sQ il existe au moins (k, g_i, i) ϵ G, et s'il y en a d'autres ils sont liés par un zigzag dans $Q/_k|P$

(ii) Pour a: k' → k dans sQ, on a (k', g_i Q(a), i) ϵ G pour (k, g_i ,i) ϵ G

➔ G définit un préfaisceau sur sQ associant à tout k ϵ sQ une composante connexe de $(Q/_k|P)$.

LA NOTION DE CLUSTER



Un **cluster** (aussi appelé **gerbe)** de Q *vers* P est un ensemble maximal G d'objets de Q|P tel que :

(i) Pour tout objet k de sQ il existe au moins un (k, g_i, i) ϵ G et s'il y en a d'autres ils sont liés par un zigzag dans $Q/_k|P$

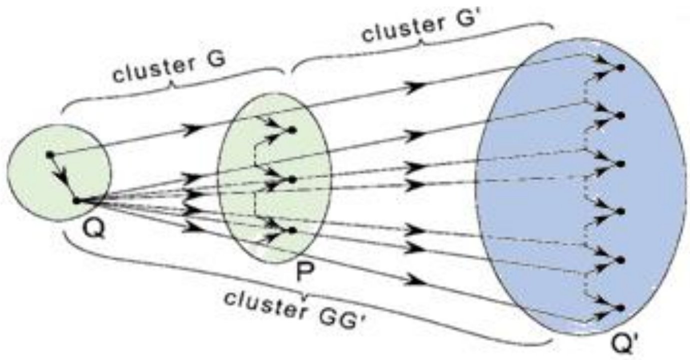
(ii) Pour a: k' → k dans sQ, on a (k', $g_iQ(a)$, i) ϵ G pour (k, g_i ,i) ϵ G

➔ G définit un préfaisceau sur sQ associant à tout k ϵ sQ une composante connexe de ($Q/_k|P$).

Cette définitin a été initialement introduite en 1981 par A. Ehresmann dans le Commentaire 199.1 de "Charles Ehresmann ; Œuvres complètes et Commentées" (Partie IV-1), dans le cas 'dual' où elle est appelée 'atlas'. Puis reprise et développée dans Ehresmann & Vanbremeersch 1987.

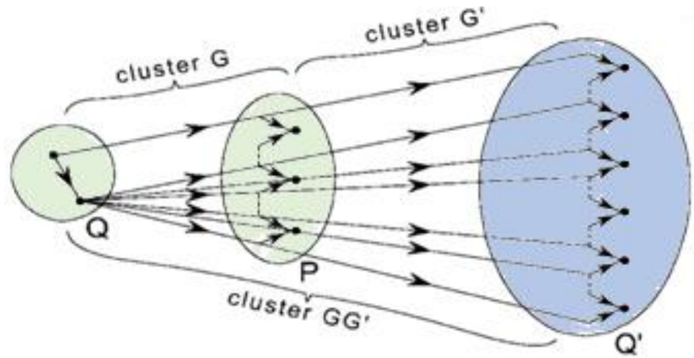
Exemples de clusters : 1. Tout morphisme g: Q(k) → P(i) de C s'identifie au cluster {(k, g_i, i)} du foncteur $Q/_k$ vers $P/_i$: {i} ⟶ P(i). 2. Un cône inductif dans C de base Q et sommet P(i) s'identifie à un cluster de Q vers $P/_i$.

LA CATEGORIE DES CLUSTERS Clu(C)



On définit la catégorie Clu(C) : Les objets sont les petits diagrammes dans C et un morphisme G: Q → P est un cluster. Le composé G'¤ G: Q ⟶ Q' de G: Q → P avec G': P → Q' est le cluster engendré par l'ensemble G'G des composés des éléments de G et G'.

LA CATEGORIE DES CLUSTERS Clu(C)



On définit la catégorie Clu(C) : Les objets sont les petits diagrammes dans C et un morphisme G: Q → P est un cluster. Le composé G'¤ G de G: Q → P avec G': P → Q' est le cluster engendré par l'ensemble G'G des composés des éléments de G et G'.

On a un foncteur injectif I: C → Clu(C) qui associe au morphisme h: c → c' de C le cluster réduit à (c, h, c'): {c}^ → {c']^., où {c}^ désigne le foncteur de {c} vers C constant sur c. Pour simplifier les notations, on identie la sous-catégorie I(C) à C. Pour éviter des confusions, lorsque Q: sQ → C est considéré comme objet de Clu(C), on le notera Q*.

LES D-CLUSTERS POUR PROTOTYPE DE δ_0 = (C, D, Ø)

Soit **D** un ensemble de diagrames D: sD → C. On note $\mathrm{Clu}_{\mathbf{D}}$(C) la sous-catégorie pleine de Clu(C) ayant pour objets ceux de C et les D* où D ϵ **D.** On a $\mathrm{Clu}_{\mathbf{D}}$(C) = Clu(C) si **D** est l'ensemble des petits diagrammes dans C.

Théorème. 1. $\mathrm{Clu}_{\mathbf{D}}$ (C) *est une catégorie* **D**-*cocomplète : tout diagramme* D *ϵ* **D** *admet* D** pour colimite ; le cône-colimite, noté* γ_D*, associe à* k ϵ sD *le cluster* {D(k}}^ → D *engendré par* {D(k)}. *Soit* $\Gamma_{\mathbf{D}} = \{\gamma_D \mid D \in \mathbf{D}\}$

2. *La di-esquisse* δ_0 = (C, **D**, Ø) *admet pour prototype* ($\mathrm{Clu}_{\mathbf{D}}$(C), $\Gamma_{\mathbf{D}}$).

3. $\mathrm{Clu}_{\mathbf{D}}$(C) *est la* **D**-*cocomplétion libre (à isomorphisme près) de* C

LES D-CLUSTERS POUR PROTOTYPE DE δ_0 = (C, D, Ø)

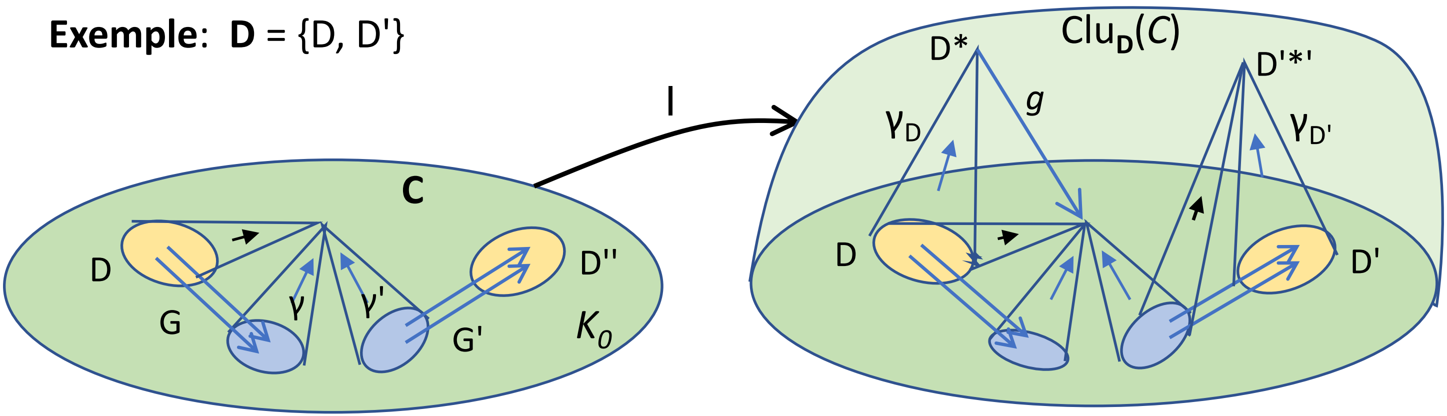
Soit **D** un ensemble de diagrames D: sD → C. On note $Clu_{\mathbf{D}}(C)$ la sous-catégorie pleine de Clu(C) ayant pour objets ceux de C et les D* où D ϵ **D.** On a $Clu_{\mathbf{D}}(C)$ = Clu(C) si **D** est l'ensemble des petits diagrammes dans C.

Théorème. 1. $Clu_{\mathbf{D}}$ (C) *est une catégorie* **D**-*cocomplète : tout diagramme* D ϵ **D** *admet* D* *pour colimite ; le cône-colimite, noté* γ_D, *associe à* k ϵ sD *le cluster* {D(k)}^ → D *engendré par* {D(k)}. *Soit* $\Gamma_{\mathbf{D}} = \{\gamma_D \mid D \in \mathbf{D}\}$

2. *La di-esquisse* δ_0 = (C, **D**, Ø) *admet pour prototype* ($Clu_{\mathbf{D}}(C)$, $\Gamma_{\mathbf{D}}$).

3. $Clu_{\mathbf{D}}(C)$ *est la* **D**-*cocomplétion libre (à isomorphisme près) de* C

Exemple: **D** = {D, D'}



δ-COMPLEXIFICATION DE C

Théorème. *Soit* r_δ: $\delta \to R(\delta)$ *le réflecteur de la di-esquisse* $\delta = (C, \mathbf{D}, \Gamma)$ dans ***Prol.*** *Le prototype* $R(\delta) = (K, \Pi)$ *est obtenu comme étant le prototype* $R(\sigma)$ *de l'esquisse* $\sigma = (Clu_{\mathbf{D}}(C), \Gamma_D \cup \Gamma)$. *En particulier la δ-complexification* K a les mêmes objets que $Clu_{\mathbf{D}}$**(C).** *Et* r_δ est un 'plus petit modèle' de δ.

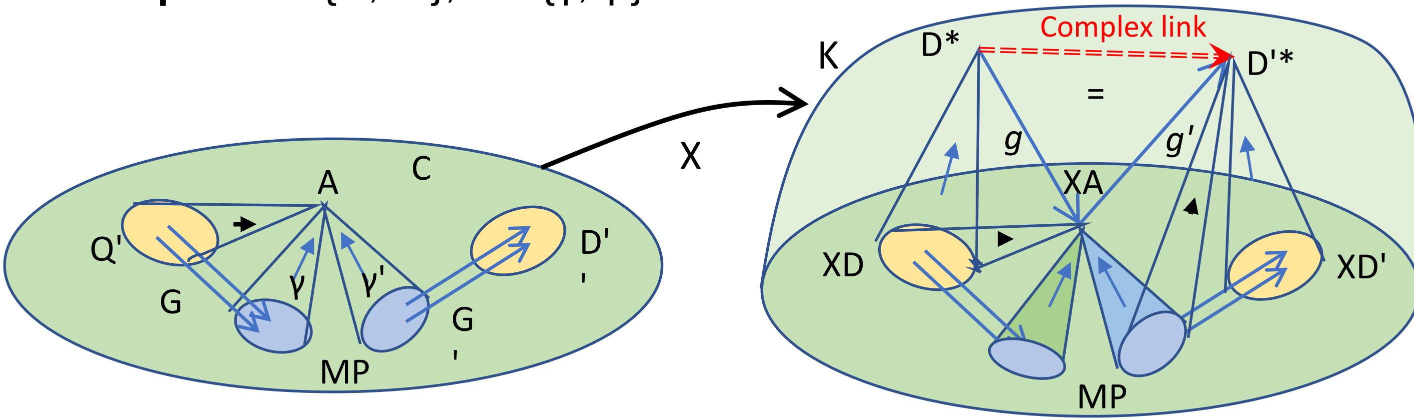
Une construction explicite d'une complexification de C (par récurrence) est donnée dans [Ehresmann & VanbremeerschV, 1987].

δ-COMPLEXIFICATION DE C

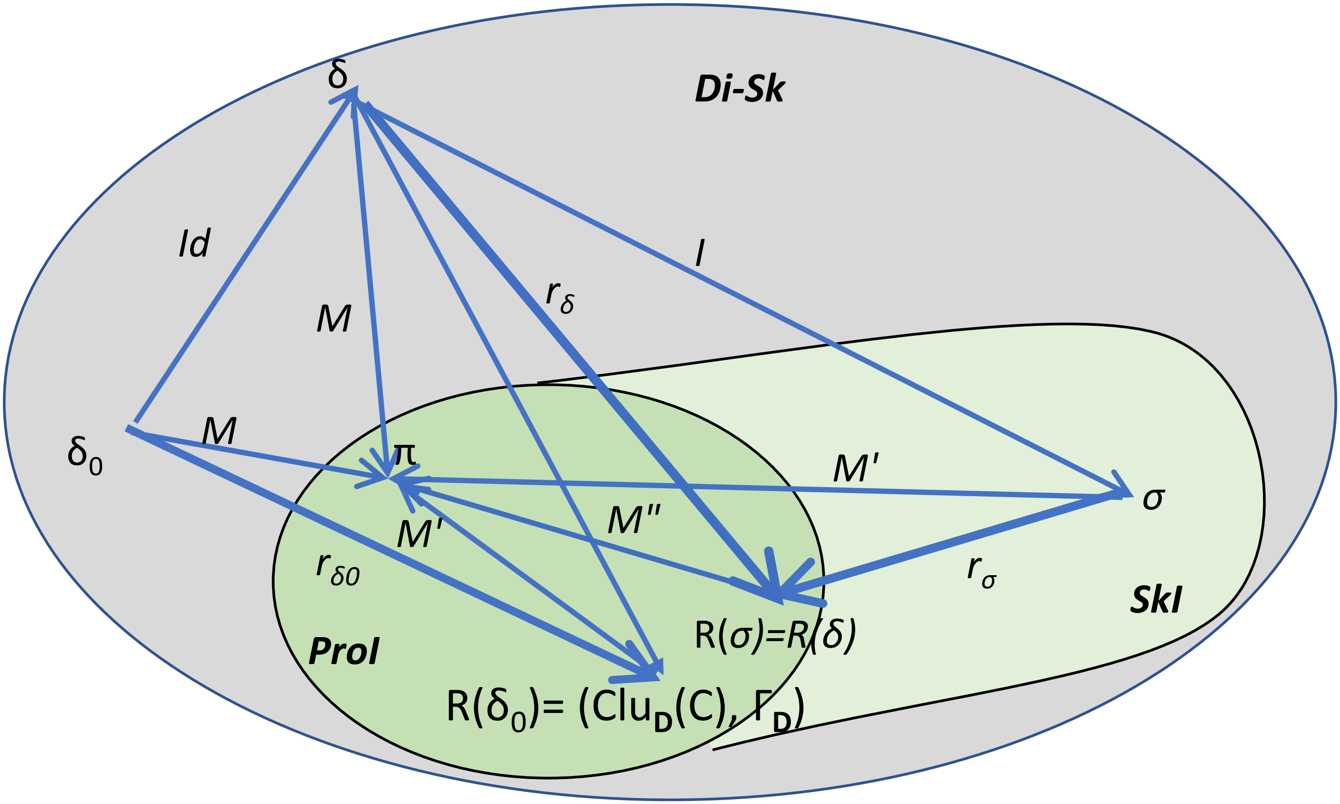
Théorème. *Soit* r_δ: $\delta \to R(\delta)$ *le réflecteur de la di-esquisse* $\delta = (C, \mathbf{D}, \Gamma)$ dans ***PrI***. *Le prototype* $R(\delta) = (K, \Pi)$ *est obtenu comme étant le prototype* $R(\sigma)$ *de l'esquisse* $\sigma = (Clu_{\mathbf{D}}(C), \Gamma_D \cup \Gamma)$. *En particulier la δ-complexification* K a les mêmes objets que $Clu_{\mathbf{D}}$**(C).** *Et* r_δ est un 'plus petit modèle' de δ.

Une construction explicite d'une complexification de C (par récurrence) est donnée dans [Ehresmann & VanbremeerschV, 1987].

Exemple. D = {D, D'}, Γ = {γ, γ'}



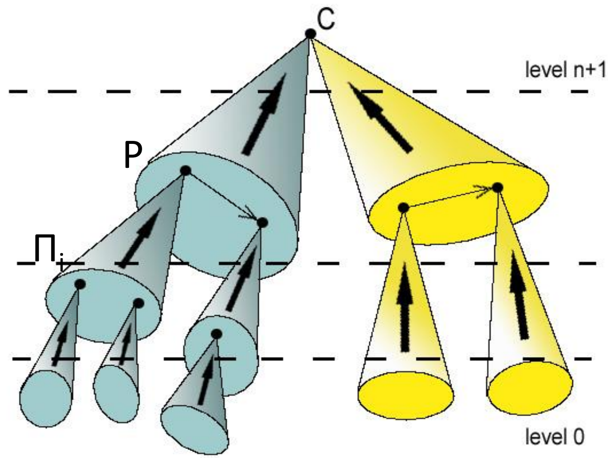
SCHEMA D'ENSEMBLE



Application à la construction de hiérarchies. Problèmes d'émergence

CATEGORIE HIERARCHIQUE

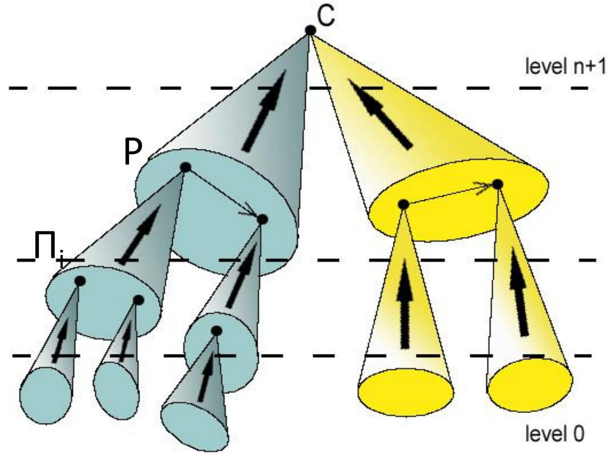
Definition. Une catégorie H *est* dite **hiérarchique** si l'on s'est donné une répartition des objets de H en différents *niveaux de complexité* (de 0 à m) de sorte qu'un objet C de niveau n+1 soit la colimite d'au moins un diagramme P (dont les objets P_i sont) de niveaux ≤ n.



Il s'ensui que chaque objet C de H admet au moins une *ramification jusqu'au niveau* 0 obtenue en prenant un tel diagramme P, puis;pour chaque P_i de P, un diagramme Π_i de niveaux inférieurs ayant P_i pour colimite, et ainsi de suite jusqu'à des diagrammes de niveaux 0 qui forment la *base de la ramification*.

CATEGORIE HIERARCHIQUE

Definition. Une catégorie H *est* dite **hiérarchique** si l'on s'est donné une répartition des objets de H en différents *niveaux de complexité* (de 0 à m) de sorte qu'un objet C de niveau n+1 soit la colimite d'au moins un diagramme P (dont les objets P_i sont) de niveaux ≤ n.



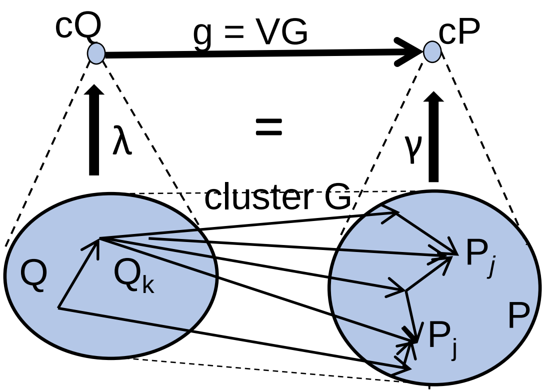
Il s'ensui que chaque objet C de H admet au moins une *ramification jusqu'au niveau* 0 obtenue en prenant un tel diagramme P, puis;pour chaque P_i de P, un diagramme Π_i de niveaux inférieurs ayant P_i pour colimite, et ainsi de suite jusqu'à des diagrammes de niveaux 0 qui forment la *base de la ramification*.

Définition. Dans une catégorie hiérarchique H **l'ordre de complexité** d'un objet C est la plus petite longueur d'une ramification de C. jusqu'au niveau 0.

(Cf. *complexité de Kolmogorov-Chaitin* d'une chaîne = plus petite longeueur d'un programme.)

LIENS n-SIMPLES. CAS DU REDUCTIONISME

Proposition. Soit Q et P 2 diagrammes dans H qui admettant des colimites, Soit γ: P → cP et λ: Q → cQ des cônes-colimite. Si G est un cluster de Q vers P, il existe un unique morphisme g: cQ → cP, noté VG, tel que l'on ait g¤λ = γ¤G.



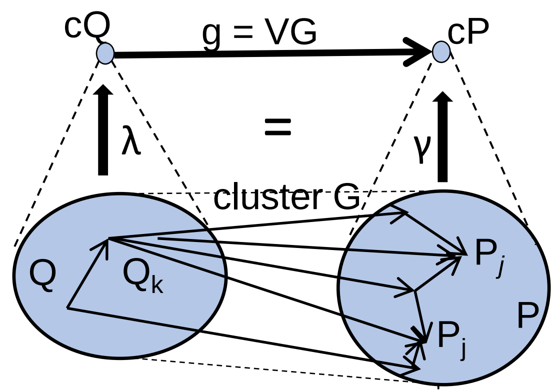
Définition. VG est appelé **lien (Q, P)-simple recollement** *de* **G**. Si les objets de P et Q sont de niveaux ≤ n, on appelle VG un **lien n-simple**.

Un composé de liens n-simples recollant des clusters adjacents est encore un lien n-simple.

LIENS n-SIMPLES. CAS DU REDUCTIONISME

Proposition. Soit Q et P 2 diagrammes dans H qui admettant des colimites, Soit γ: P → cP et λ: Q → cQ des cônes-colimite. Si G est un cluster de Q vers P, il existe un unique morphisme g: cQ → cP, noté VG, tel que l'on ait g¤λ = γ¤G.

Définition. VG est appelé **lien (Q, P)-simple recollement** *de* **G**. Si les objets de P et Q sont de niveaux ≤ n, on appelle VG un **lien n-simple**.

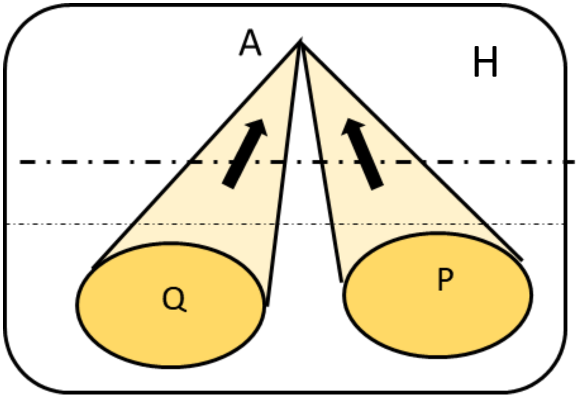


Un composé de liens n-simples recollant des clusters adjacents est encore un lien n-simple.

Définition: On dit que la **hiérarchie de H est réductible** si tout objet de H est d'ordre de complexité 0 ou 1 et si tout morphisme g: A → B est 0-simple.

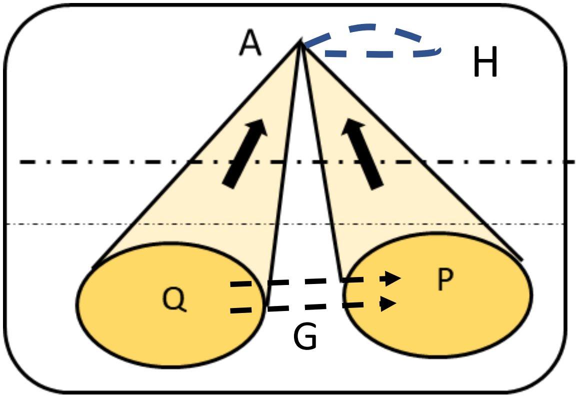
Nous allons donner une condition pour qu'il n'en soit pas ainsi, à savoir le Principe de Multiplicité..

PRINCIPE DE MULTIPLICITE (MP)



Définition. Des diagrammes Q et P de H satisfont le **Principe de Multiplicité (MP)** s'ils ont la même colimite et qu'il n'existe pas de cluster G entre eux tel que VG soit un isomorphisme.

PRINCIPE DE MULTIPLICITE (MP)

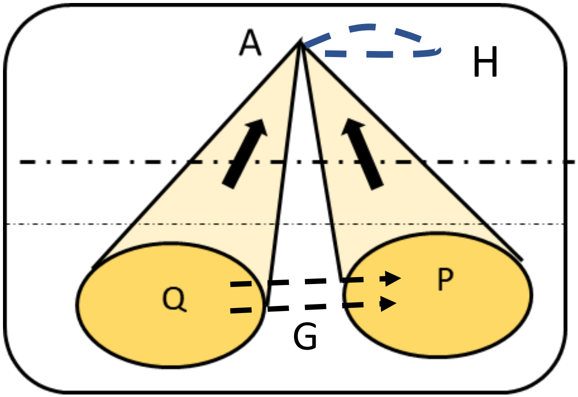


Définition. Des diagrammes Q et P de H satisfont le **Principe de Multiplicité (MP)** s'ils ont la même colimite et qu'il n'existe pas de cluster G entre eux tel que VG soit un isomorphisme.

Autrement dit, si (i) il n'y a pas de cluster entre eux ou (ii) il existe un cluster G entre eux mais VG ≠ iso.

Remarque. Cette notion modélise la propriété de 'degeneracy" des systèmes biologiques (introduite par Edelman, 1989).

PRINCIPE DE MULTIPLICITE (MP)



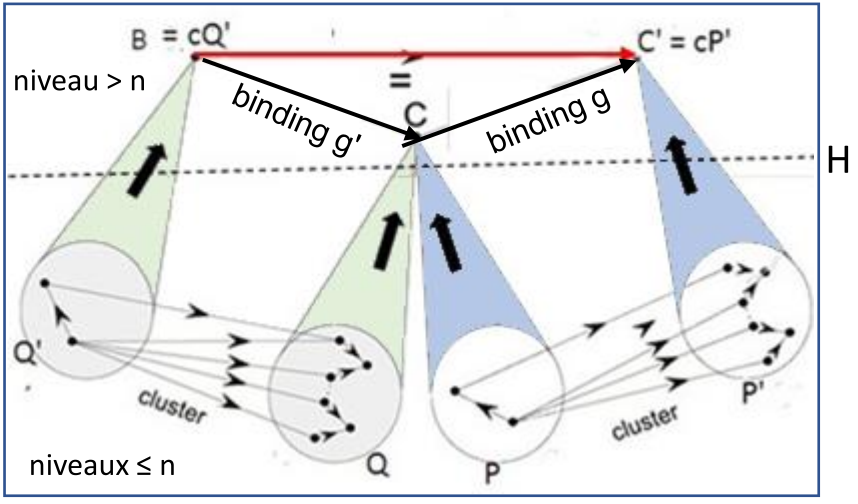
Définition. Des diagrammes Q et P de H satisfont le **Principe de Multiplicité (MP)** s'ils ont la même colimite et qu'il n'existe pas de cluster G entre eux tel que VG soit un isomorphisme.
Autrement dit, si (i) il n'y a pas de cluster entre eux ou (ii) il existe un cluster G entre eux mais VG ≠ iso.

Remarque. Cette notion modélise la propriété de 'degeneracy" des systèmes biologiques (introduite par Edelman, 1989).

Définition. Un objet A de H est dit **multifacettes** s'il est colimite de 2 patterns P et Q vérifiant MP.

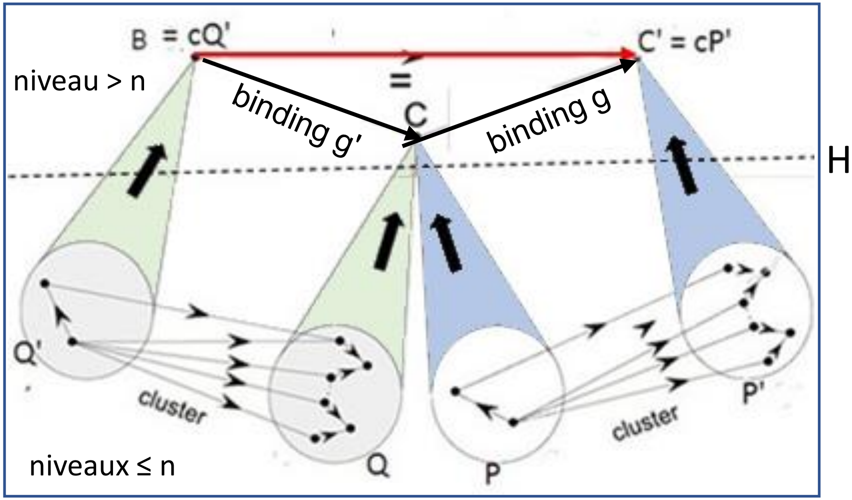
L'existence d'objets multifacettes dans une catégorie hiérarchique permet l'existence d'objets d'ordre de complexité > 1 et conduit à divers phénomènes d'émergence que nous allons étudier.

MP => EMERGENCE DE LIENS COMPLEXES



Si P et Q satisfont MP, les morphismes g et g' recollant des clusters non adjacents doivent avoir un compose gg': B → C'. Ce morphisme est dit **lien n-complexe** si g et g' sont des liens n-simples.

MP => EMERGENCE DE LIENS COMPLEXES

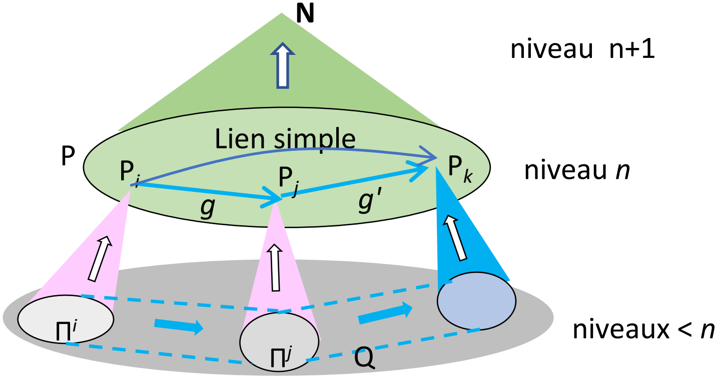


Si P et Q satisfont MP, les morphismes g et g' recollant des clusters non adjacents doivent avoir un compose gg': B → C'. Ce morphisme est dit **lien n-complexe** si g et g' sont des liens n-simples.

Ce morphisme gg': B → C' '*emerge'* dans H bien qu'il ne soit pas 'physiquement' observable via des morphismes reliant les composants de Q' et P'. En fait, il depend de la structure 'globale' des niveaux infrieures qui impose que Q et P aient la même colimite.

De tels phénomènes apparissent en particular dans les *hiérarchies basées* dont les différents niveaux de complexité s'obtiennent à partir des niveaux inférieurs par un processus de *complexification*...

OBJET REDUCTIBLE

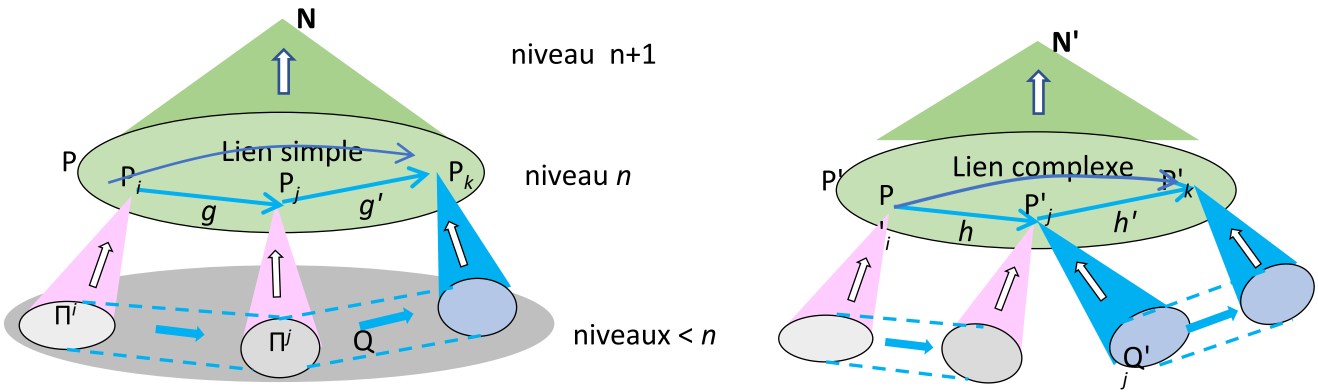


Un objet N de H est *m-réductible* s'il est colimite d'un diagramme dont les objets sont de niveau ≤ *m*. L'ordre de complexité de N est le plus petit *m* tel que N soit *m*-réductible.

Théorème. *Un objet* N *de niveau n*+1 *ayant une ramification* (P, (Π^i)) *telle que les liens distingués de* P *sont* (Π^i, Π^j)-*simples est n*-1-*réductible, donc d'ordre de complexité* ≤ *n*-1.

N est colimite d'un diagramme D formé des Π^i et des clusters que recollent les g: $P_i \longrightarrow P_j$.

OBJET REDUCTIBLE



Un objet N de H est *m-réductible* s'il est colimite d'un diagramme dont les objets sont de niveau ≤ *m*. L'ordre de complexité de N est le plus petit *m* tel que N soit *m*-réductible.

Théorème. *Un objet* N *de niveau n*+1 *ayant une ramification* (P, (Π^i)) *telle que les liens distingués de* P *sont* (Π^i, Π^j)*-simples est n*-1*-réductible, donc d'ordre de complexité* ≤ *n*-1.

N est colimite d'un diagramme D formé des Π^i et des clusters que recollent les g: $P_i \longrightarrow P_j$. Un tel D n'existe pas si P a des liens complexes

Théorème d'émergence. MP *est une condition nécessaire pour qu'il existe des objets d'ordre de complexité* > 1.

HIERARCHIE BASEE

Soit H une catégorie hiérarchique. Pour tout n, on note H_n la slus-catégorie pleine de H ayant pour objets les objets de niveaux ≤ n.

Définition. On dit que H est une catégorie **basée sur** H_0 si, pour tout n ≥ 0, il existe une di-esquisse δ_n sur H_n telle que H_{n+1} soit la δ_n-complexifiction de H_n.

Par construction de la complexification, il s'ensuit que les objets de niveau n+1 sont les colimites D_n* des diagrammes D_n cônsidérés dans δ_n. Et les nouveaux morphismes de H_{n+1} sont des liens n-simples et (en présence de MP) des liens n-complexes émergents à ce niveau.

HIERARCHIE BASEE

Soit H une catégorie hiérarchique. Pour tout n, on note H_n la slus-catégorie pleine de H ayant pour objets les objets de niveaux $\leq$ n.

Définition. On dit que H est une hiérarchie **basée sur** H_0 si, pour tout $n \geq 0$, il existe une di-esquisse δ_n sur H_n telle que H_{n+1} soit la δ_n-complexifiction de H_n.

Par construction de la complexification, il s'ensuit que les objets de niveau n+1 sont les colimites D_n* des diagrammes D_n cônsidérés dans δ_n. Et les nouveaux morphismes de H_{n+1} sont des liens n-simples et (en présence de MP) des liens n-complexes émergents à ce niveau.

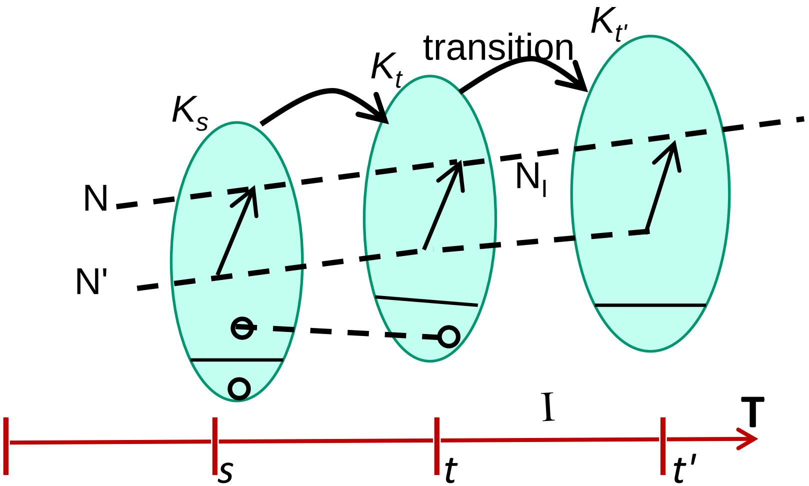
Théorème. *Dans une hiérarchie basée, tout morphisme est 0-simple ou 0-complexe. (i) Si tout morphisme est un lien 0-simple, alors la hiérarchie est* ***réductible****. (ii) En présence de MP, les complexifications successives peuvent conduire à le formation d'objets d'ordre de complexité croissant et de liens complexes de niveaux croissants.*

Dans le cas (ii), on dit que la hiérarchie dépend d'un

"Emergentist Reductionnism" (au sens de Matio Bunge).

Application aux
Systèmes Evolutifs Hiérarchiques

SYSTÈME EVOLUTIF [EV 1987]F



Un **Système Evolutif K** consiste en :

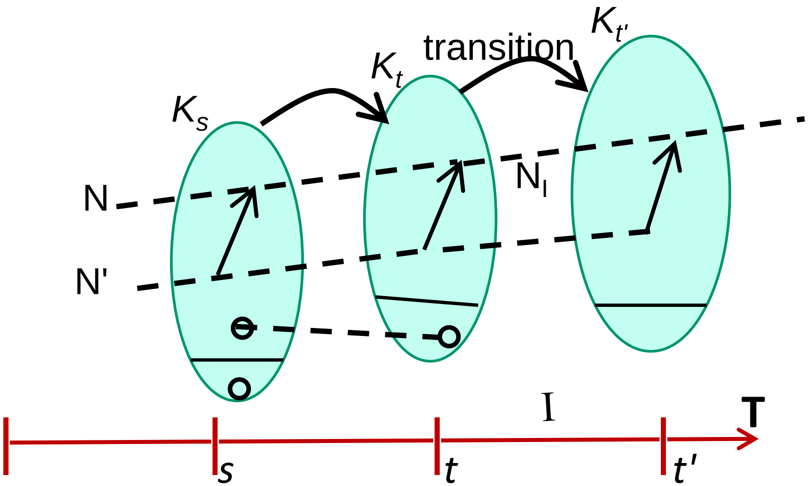
(i) un intervalle T of **R;**

(ii) Pour tout $t \in$ T, une catégorie *configuration* K_t;

(iii) For $t < t'$, un foncteur partiel *transition* $\mathbf{K}(t,t')$ d'une sous-categorie $K_{tt'}$ de) K_t vers $K_{t'}$;

ces données définissant un foncteur $\mathbf{K}: \mathbf{T}° \rightarrow ParCat.$

SYSTÈME EVOLUTIF [EV 1987]F



Un **Système Evolutif K:** consiste en :

(i) un intervalle T of **R;**

(ii) Pour tout $t \in$ T, une catégorie *configur-ation* K_t;

(iii) For $t < t'$, un foncteur partiel *transition* **K**(t,t') d'une sous-categorie $K_{tt'}$ de) K_t vers $K_{t'}$;

ces données définissant un foncteur **K: T° → *ParCat.***

C*omposant* N de **K** = famille maximale d'objets N_r de K_t reliés par des transitions. Les liens entre composants sont définis de même.

Pour I =]t, t'[, soit K_I la categorie ayant pour objets N_I les restrictions à I des composants N dont le support contient I ; les morphismes sont définis de même à partir des liens.

Théorème. *Les catégories* K_I *forment un faisceau de catégories sur* T *tel que*

(A) *Pour tout* t'' ∈ I *le foncteur de* K_I *vers la fibre* $K_{t''}$ *est injectif*.

On a une bijection entre les SE et les faisceaux satisfaisant (A).

CONCLUSION : APPLICATION AUX MES

Un 'Memory Evolutive System' est un Système Evolutif **K** dans lequel les catégories sont hiérarchiques. Sa dynamique de t vers t' > t consiste en la formation, pour t ϵ T, d'une **complexification** d'une sous-catégorie de K_t (pour tenir compte des éléments 'supprimés') vers $K_{t'}$ ayant pour but d'ajouter des colimites à certains foncteurs D n'en ayant pas dans K_t tout en préservant certains cônes-colimites (changements 'standards' de Thom, 1978).

De ce qui précède, il résulte que, si MP est vérifié par certains diagrammes, au cours du temps, il y aura émergence d'objets multifacettes de complexité croissante, en particululier pour former une mémoire qui, grâce à MP, est à la fois robuste et flexible.

MERCI